# 代数学I

## Ver 0.3

Fiddie

2022 年 1 月 6 日

# Contents

前置知识(近世代数)参考书:

- N. Jacobson, Basic Algebra I, W.H.Freeman and Company, 1974, Chapter 1,2. 有中译本.
- 刘绍学, 近世代数基础, 高教出版社, 1999(本科生教材, 偏难), 有宋体与楷体部分, 重点看楷体.
- 聂灵沼, 丁石孙, 代数学引论, 第1∼4章, 2000. 很多学校用, 难度适中, 抄Jacobson抄得比较成功.

本课程参考书:

- N.Jacobson, Basic Algebra II, W.H.Freeman and Company, 1980. Chapter 1 & 3.
- 聂丁书的第五、六章.
- S.Maclane, Categories for the working mathematicians, 2nd edition, GTM5, Springer Verlag, 1998.
- F.W.Anderson, K.R.Fuller, Rings and Categories of Modules, 2nd edition, GTM13, Springer Verlag, 1992.
- 所有有关同调代数的中文著作.

补充材料: (我个人完善讲义所用的主要参考书)

- An Introduction to Homological Algebra, J.J.Rotman, 2nd Edition, Universitext, Springer.
- P.J.Hilton, U.Stammbach, A Course in Homological Algebra, 2nd Edition, GTM4, Springer Verlag.
- T.Y.Lam, Lectures on Modules and Rings, GTM189, Springer Verlag. (作者出了一份习题解答)
- T.Y.Lam, Exercises in Modules and Rings, Springer. (GTM189的习题解答, 属于Problem Books in Mathematics)

平时分: 20%, 期末: 80%, 平时会点名回答问题, 一次不到5分, 有可能点人回答问题. 共10道判断题、5道大题, 需要对每个书上知识点都表述清楚, 有1∼1.5道大题是书上定理(需要搞懂, 一般出在前两个大题的位置), 证明太长的不会考, 大部分知识点都考, 以前的题目基本不会考.

本课程内容: 跳过近世代数(§0.1与§0.2为补充参考内容), 讲模与范畴.

本课程中, 约定: ①$\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}^+,\mathbb{Q}^+,\mathbb{R}^+$. ②所有环都指带单位元的结合环.

说明:

- 有**笔误、做不出来的习题、老师新讲但讲义里没有的东西**请向Fiddie反馈, 在微信公众号“数学兔的极大理想”里面能找到联系方式.
- 如果同学们有新的比较好的习题(比如某本代数书上的习题、**你懂的那种**)补充上来, 也可以向Fiddie反馈.
- 第0章的前两节为本课程的补充前置知识, 包括了后面学习模与范畴的过程中所要用到的所有内容.
- **对于非基础数学方向的学习建议：**建议把每节后面的大部分习题都做一遍, 大部分习题都出自上面的参考书, 尽量独立做出来, 实在做不出来也可以在Math Stack Exchange上找到解答. 少部分习题出自**你懂的**地方.
- 考试的时候不能直接用老师上课没讲的定理, 比如: 需要把图追踪的过程写出来, 不要直接写“由五引理(Five Lemma)可得”, 因为老师上课没讲, 会被扣分扣得很惨.

# 第0章　近世代数复习

## §0.1　(*)群

### 0.1.1　群的基本概念

**定义 0.1**

所有的元素都可逆的幺半群叫**群**. 换言之, 下述公理必须满足:

$(G0)$在集合$G$上定义了一个二元运算$(x, y) \mapsto xy$.

$(G1)$运算是结合的: $\forall x, y, z \in G, (xy)z = x(yz)$.

$(G2)$有单位元$e$: $\forall x \in G, xe = ex = x$.

$(G3)$有逆元: $\forall x \in G, \exists x^{-1}, xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

**例 0.1.1** *行列式不为0的实系数$n \times n$矩阵的集合$GL_n(\mathbb{R})$构成群, 叫$\mathbb{R}$**上的$n$阶一般线性群**.*

**例 0.1.2** *$n$元置换的对称群$S_n$.*

**定义 0.2: Abel群**

带有交换二元运算的群叫**交换群**或**Abel群**.

群$G$中元素的个数可以记为$\mathrm{Card}(G), |G|, [G : e]$.

**定义 0.3: 子群**

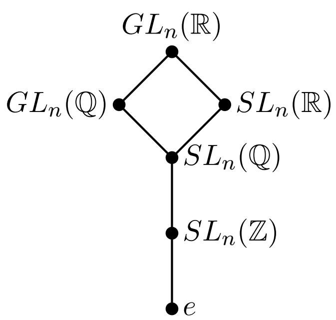
子集$H \subset G$称为$G$的一个**子群**, 若$H$按$G$的运算也构成群.

**例 0.1.3** *一般线性群$GL_n(\mathbb{R})$中考察由行列式为1的矩阵构成的子集$SL_n(\mathbb{R})$:*

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | \det A = 1\}.$$

*则$SL_n(\mathbb{R})$按乘法构成群, 叫$\mathbb{R}$**上的$n$阶特殊线性群**, 也叫**单位模群**. 然而后一名词通常用于行列式为$\pm 1$的矩阵构成的群.*

**例 0.1.4** *类似有$\mathbb{Q}$上的$n$阶一般线性群$GL_n(\mathbb{Q})$和它的子群$SL_n(\mathbb{Q})$. 群$SL_n(\mathbb{Q})$中有一个有趣的子群$SL_n(\mathbb{Z})$, 它由行列式为1的整数矩阵构成. 容易证明$SL_n(\mathbb{Z})$也构成群. $SL_n(\mathbb{Q})$和$SL_n(\mathbb{Z})$在数论中有重要的地位. $GL_n(\mathbb{R})$的上述子群构成了一个偏序集:*



### 0.1.2 群的同构与同态

**定义 0.4: 群的同构**

两个分别具有运算$*$与$\circ$的群$(G,*)$与$(G',\circ)$叫**同构**的, 若存在映射$f:G\to G'$, 使得

(1)$f(a*b)=f(a)\circ f(b),\forall a,b\in G$.

(2)$f$是双射.

通常用符号$G\simeq G'$表示两个群同构. 如果$G'=G$, 就得到了群$G$映往自身的同构映射, 这个映射叫**自同构**的. 群的全体自同构的集合$\mathrm{Aut}(G)$构成$S(G)$的一个子群, 后者由$G\to G$的全体双射构成.

**命题 0.5**

群同构有如下性质:

(1)单位元映往单位元.

(2)$f(a^{-1})=f(a)^{-1}$.

(3)逆映射$f^{-1}:G'\to G$也是同构.

**定理 0.6**

任意两个同阶循环群是同构的.

**定理 0.7: Cayley**

任意$n$阶有限群都同构于对称群$S_n$的某个子群.

**定义 0.8**

在群$G$的自同构群$\mathrm{Aut}(G)$中含有一个特殊的子群$\mathrm{Inn}(G)$, 叫**内自同构群**, 其元素是映射

$$I_a:g\mapsto aga^{-1}.$$

**注:** 由公式$f(a)=I_a,a\in G$可以定义映射$f:G\to\mathrm{Inn}(G)$. 它满足自同构映射的条件(1), 但是不满足条件(2), 例如当$G$是Abel群的时候任取$a,g\in G,aga^{-1}=g$, 故$I_a=I_e$. 群$\mathrm{Inn}(G)$仅由单位元组成.

**定义 0.9: 群的同态**

群$(G,*)$到$(G',\circ)$的映射$f:G\to G'$叫**同态映射**, 若

$$\forall a,b\in G,f(a*b)=f(a)\circ f(b).$$

换言之它只满足同构定义的第一个条件.

把集合

$$\mathrm{Ker}\,(f)=\{g\in G|f(g)=e',e'\text{是}G'\text{的单位元}\}$$

叫同态$f$的**核(kernel)**. 容易证明, $\mathrm{Ker}\,(f)$是$G$的一个子群.

把群到自身的同态映射叫群的**自同态**.

**注:** 同态定义中, 不要求$f$是单射也不要求$f$是满射, 但这不是本质的, 因为我们总可以局限于考察映射的像$\mathrm{Im}f\subset G'$, 它显然是$G'$的一个子群. 同态$f$与同构的主要区分点在于非平凡核$\mathrm{Ker}\,(f)$的存在性, 它是度量$f$的非单射性的尺度. 如果$\mathrm{Ker}\,(f)=\{e\}$, 则$f:G\to\mathrm{Im}f$是同构.

### 0.1.3 等价关系、商映射、商集

设$X, Y$是任意两个集合, $X \times Y$任意子集$R$叫做$X$与$Y$之间的一个**二元关系**. 有序对$(x, y) \in R$记为$xRy$, 并称$x$与$y$有关系$R$.

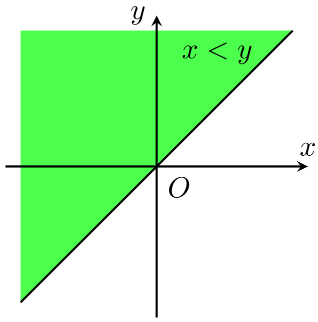
**例 0.1.5** 二元关系的例子:

(1)对角线

$$\Delta = \{(a, b) \in X^2 | a = b\}$$

是$X^2$的一个子集, 它给出了集合$X$中元素的相等关系. 事实上, $a\Delta b$表示$(a, b) \in \Delta$, 即$a = b$.

(2)实数集$\mathbb{R}$中的顺序$<$是$\mathbb{R}$的一个二元关系, 由实平面$\mathbb{R}^2$上位于直线$x - y = 0$上方的点组成; 用通常的不等式$x < y$代替了繁琐的包含号$(x, y) \in <$.




每一个映射$f : X \to Y$都对应于它的**图像(graph)**, 也就是子集

$$\mathrm{graph}(f) := \{(x, f(x)) | x \in X\} \subset X \times Y.$$

这是$X$与$Y$之间的一个二元关系. 显然, 并非每一个二元关系都可以作为某个映射$X \to Y$的图像. 二元关系是某个映射的图像的充要条件是: 任取$x \in X$, 刚好有一个元素$y$使得$xRy$.

对于$R \subset Y \times Z, S \subset X \times Y$, 定义关系的**复合**为

$$R \circ S := \{(x, z) \in X \times Z | \text{存在} y \in Y \text{使得} (x, y) \in S, (y, z) \in R\}.$$

**定义 0.10: 等价关系**

集合$X$上的二元关系$\sim$叫**等价关系**, 若任取$x, y, z \in X$, 都满足:

(1)自反性: $x \sim x$;

(2)对称性: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;

(3)传递性: $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

元素$a, b \in X$不具有等价关系记作$a \nsim b$.

与给定元素$x$等价的所有元素的子集

$$\overline{x} = \{x' \in X | x' \sim x\} \subset X$$

叫包含$x$的**等价类**. 显然, $x \in \overline{x}$. $\overline{x}$中的任意元素$x'$叫做$\overline{x}$的**代表元**.

对于集合$X$, 如果$X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, 其中$\{A_k\}$两两不交(即当$i \neq j$时, $A_i \cap A_j = \varnothing$), 则称$\{A_k\}_{k=1}^{n}$是$X$的一个**划分**.

**命题 0.11**

设$\sim$是$X$的一个关系. 我们有:

(1)不同的等价类互不相交;

(2)所有等价类是$X$的**划分**.

**证明:** (1)若$\overline{x'}\cap\overline{x''}\neq\varnothing$, 取$x\in\overline{x'}\cap\overline{x''}$, 则$x\sim x'$且$x\sim x''$. 由传递性, $x'\sim x''$, 因此$\overline{x'}=\overline{x''}$. 所以不同的等价类不相交.

(2)注意$X=\bigcup\limits_{x\in X}\overline{x}$, 去掉相同的等价类即可. □

**例 0.1.6** *等价关系的例子:*

(1)设$\mathbb{R}^2$是二维平面. 对于两点$A,A'\in\mathbb{R}^2$位于同一水平线上记作性质$\sim$, 这样就得到了一个等价关系, 等价类$\overline{A}$是一条水平直线.

(2)设$X$是所有平面向量构成的集合, 两个向量$\boldsymbol{a}\in X,\boldsymbol{a}'\in X$共线记作性质$//$, 则$//$是等价关系.

由于上述给出的集合$X$的等价关系与划分之间一一对应, 对应于等价关系$\sim$的划分通常记作$X/\sim$, 并称之为$X$关于$\sim$的**商集**或者由关系$\sim$确定的商集. 满射$p:x\mapsto p(x)=\overline{x}$ 叫做$X$到商集$X/\sim$上的**自然映射**(或**典范投影**).

### 0.1.4 正规子群与商群

**定义 0.12: 正规子群**

设$H$是群$G$的子群, 如果对任意$a\in G$, 有$aH=Ha$, 称$H$为**正规子群**.

正规子群的定义可以改写为

$$aHa^{-1}=H,\qquad \forall a\in H,$$

正规子群的定义换个说法就是子群$H$的左右陪集相等.

根据定义可以马上得到如下的命题:

**命题 0.13**

Abel群的每个子群都正规. □

**定义 0.14**

若非平凡群$G$没有不同于$\{e\}$与$G$的正规子群, 则称$G$是**单群(simple group)**.

当$p$为素数时, $p$阶群一定为单群. Abel单群只有素数阶循环群.

**定义 0.15**

设$p$是素数, $n\in\{0,1,2,\cdots\}$, 把$p^n$阶群叫**p-群**.

接下来要用到如下结论:

**命题 0.16**

设$H$是群$G$的子集, 则$H$是$G$的子群当且仅当$H^2=H$且$H^{-1}=\{h^{-1}|h\in H\}\subset H$.

群$G$关于正规子群$H$的陪集所确定的$G$上的等价关系具有一个极好的性质. 如果$a,b$是群的任意元且$a\sim c, b\sim d$, 则通过运算, 有$a^{-1}c=h_1\in H$, $b^{-1}d=h_2\in H$. 于是

$$(ab)^{-1}cd=b^{-1}a^{-1}cd=b^{-1}(a^{-1}c)d=b^{-1}h_1b(b^{-1}d)=h_1'h_2\in H,$$

由此得到$ab\sim cd$. 这里用到了$H$在$G$中的正规性: $b^{-1}h_1b=h_1'\in H$. 因此

$$a\sim c, b\sim d\Rightarrow ab\sim cd.$$

实际上, 这表明群$G$上的乘法运算诱导了商集合$G/\sim$上的一个乘法运算, 我们将该商集合记为$G/H$.

从陪集的角度看, $aH$等于一个元素的集合$\{a\}$与子群$H$的乘积. 两个陪集$aH,bH$的乘积是集合$aH\cdot bH$. 一般来说, 它不一定是$H$的陪集. 但是当$H$是$G$的一个正规子群时, 由于对所有的$g\in G$, 我们有$gH=Hg$, 所以由

$$aH\cdot bH=a(Hb)H=a(bH)H=abH^2=abH.$$

(最后的等号用到了命题0.16).

根据上面的论断, 陪集$abH$不依赖于陪集$aH,bH$的代表元的选取. 所以我们有如下的性质:

$$\begin{aligned}aH\cdot bH&=abH,\\ H\cdot aH&=aH\cdot H=aH,\\ a^{-1}H\cdot aH&=aH\cdot a^{-1}H=eH=H.\end{aligned}$$

所以有下面的定理成立, 我们从这个定理引入商群的概念.

**定理 0.17**

如果$H$是$G$的一个正规子群, 那么乘法运算$aH\cdot bH=abH$可以使得商集合$G/H$成为一个群, 叫做群$G$关于正规子群$H$的**商群**. 陪集$H$充当$G/H$的单位元, $a^{-1}H=(aH)^{-1}$是$aH$的逆元.

如果$G$是有限群, 那么显然有$|G/H|=\dfrac{|G|}{|H|}$.

**例 0.1.7** 设$n>1$是正整数, 我们知道, $n\mathbb{Z}$是$\mathbb{Z}$的正规子群, 在$\mathbb{Z}$中的运算是加法, 因此陪集就可以写成

$$n\mathbb{Z}+r=\{nk+r|k\in\mathbb{Z}\}.$$

我们知道, 每一个整数$x$都可以唯一表示成

$$x=qn+r,\qquad 0\le r<n,$$

$r$称为余数. 不难看出, 两个整数属于同一个陪集的充分必要条件是它们有相同的余数, 由此可知, $\mathbb{Z}$对于$n\mathbb{Z}$的全部陪集为

$$n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}+1,\cdots,n\mathbb{Z}+(n-1).$$

如果用$\overline{0},\overline{1},\cdots,\overline{n-1}$表示这$n$个陪集, 那么它们之间的运算就是

$$\overline{i}+\overline{j}=\begin{cases}\overline{i+j}, & i+j<n,\\ \overline{i+j-n}, & i+j\ge n.\end{cases}$$

### 0.1.5 对称群

令$\Omega$是$n$元有限集, 不妨设$\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$, 由$\Omega\to\Omega$的全体一一变换组成的集合记作$S_n(\Omega)$, 或简记为$S_n$, 其元素通常用小写希腊字母表示, 叫做**置换**. 于是

$$S_n=\{\{1,2,\cdots,n\}\text{上的置换}\}.$$

置换直观的方式来表示任意置换$\sigma:i\mapsto\sigma(i),i=1,2,\cdots,n$如下:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}.$$

它完全指明了所有的像.

置换上的乘法运算对应于映射合成的一般法则: $(\sigma\tau)(i)=\sigma(\tau(i))$.

**例 0.1.8** 设$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$, 则$\sigma\tau\neq\tau\sigma$.

**证明:** 注意映射的运算顺序. $\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$, 类似有$\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$. 所以$\sigma\tau\neq\tau\sigma$. □

**命题 0.18**

置换的乘法满足下述规律:

(1)结合律: $\forall\alpha,\beta,\gamma\in S_n,(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$.

(2)单位元$e$是恒同映射: $\forall\sigma\in S_n,\sigma e=\sigma=e\sigma$.

(3)逆元存在: $\forall\sigma\in S_n,\exists\tau$使得$\sigma\tau=e=\tau\sigma$, 记为$\tau=\sigma^{-1}$.

根据此命题, $S_n$依据映射复合构成群, 叫做**$n$元对称群**或**$n$个文字上的对称群**. 对于一般的集合$X$(不仅仅是有限集), 把$X$上的置换的全体依映射复合构成的群叫**$X$上的对称群**.

设置换$\sigma\in S^k$满足

$$\sigma=\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_{k-1}&a_k\\a_2&a_3&\cdots&a_k&a_1\end{pmatrix}$$

那么这个置换叫长为$k$的**循环置换**或**$k$-轮换**, 简记为$(a_1,a_2,\cdots,a_k)$或$(a_1\ a_2\ \cdots\ a_k)$.

**定理 0.19**

设$X$是$n$元集, 对每个$\sigma\in S_n(X)$, 存在唯一的$X$的分划

$$\pi=\Big\{\{a_{11},\cdots,a_{1l_1}\},\{a_{21},\cdots,a_{2l_2}\},\cdots,\{a_{k1},\cdots,a_{kl_k}\}\Big\},$$

使得

$$\sigma=(a_{11}\cdots a_{1l_1})(a_{21}\cdots a_{2l_2})\cdots(a_{k1}\cdots a_{kl_k}).$$

即可以把$\sigma$分成不相交轮换的乘积, 而且不计因子顺序与各个轮换乘法顺序情况下表示方法唯一.

## § 0.2 (*)环和域

### 0.2.1 环与域的基本概念

**定义 0.20**

设$R$是非空集合, 在$R$上定义了两种二元代数运算$+$与$\circ$(加法与乘法), 满足下述条件:

$(R1)(R,+)$是Abel群;

$(R2)(R,\cdot)$是半群;（即乘法满足结合律）

$(R3)$加法和乘法运算以分配律相联系, 即$(a+b)c=ac+bc, c(a+b)=ca+cb, \forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

则称$(R,+,\cdot)$构成一个**环**. 把$(R,+)$叫**环的加法群**, $(R,\cdot)$叫它的**乘法群**. 若$(R,\cdot)$是一个幺半群, 称$(R,+,\cdot)$是**幺环**.

**定义 0.21: 环的同态**

设$(R,+,\cdot)$与$(R',\oplus,\odot)$是两个环, 映射$f:R\to R'$称为**同态**, 若$f$保持环的两种运算, 即

$$f(a+b)=f(a)\oplus f(b), f(ab)=f(a)\odot f(b).$$

易见$f(0)=0', f(na)=nf(a), n\in\mathbb{Z}$.

单同态、满同态、同构的定义也类似.

**定义 0.22: 整环**

在环$R$中, 如果$a\neq 0, b\neq 0$但$ab=0$, 则$a,b$分别叫做**左零因子**与**右零因子**. 在非零环$R$中, 零本身叫做**平凡零因子**. 如果交换环$R$含有$1\neq 0$, 且无零因子, 则称$R$为**整环**.

**定义 0.23**

若环$R$有单位元1, 称元素$a$为**可逆的**, 若存在元素$a^{-1}$, 使得$aa^{-1}=1=a^{-1}a$. 准确来说, 应该谈元素是**右可逆的**（resp. **左可逆的**）, 若存在元素$b$, 使得$ab=1$（resp. $ba=1$）. 在交换环或无零因子环中, 这两个概念是一致的.

$R$中同时为左零因子与右零因子的元素简称为**零因子**. 整数环$\mathbb{Z}$无零因子, 而矩阵环$M_n(P)$有零因子.

**定理 0.24**

有单位元的非平凡交换环$R$是整环当且仅当在$R$中满足**消去律**, 即

$$\forall a,b,c\in R, ab=ac, a\neq 0\Rightarrow b=c.$$

**定义 0.25: 理想**

设$R$是环, $\varnothing\neq I\subseteq R$. 如果$I$对加法封闭, 且$r\in R, a\in I$可推出$ra\in I(ar\in I)$, 则称$I$分别是环$R$的**左(右)理想**. 如果$I$是左理想也是右理想, 那么称它为**理想(ideal)**.

若$a\in R$, 则集合$aR$一定是$R$的理想, 把$aR$叫做由元素$a\in R$生成的**主理想(principal ideal)**.

如果整环$R$的所有理想都是主理想, 则称$R$是**主理想整环(PID, principal ideal domain)**.

**注:** 环作用在理想的左(右)边, 这个理想就是左(右)理想.

定义环$R$的子环$H,N$的**和(sum)**为$H+N:=\{a+b|a\in H,b\in N\}$.

**命题 0.26**

若$H,N$是$R$的理想, 则$H\cap N,H+N$也是$R$的理想.

**证明:** (1)显然$H\cap N$是$R$的子环. 设$a\in H\cap N,r\in R$, 由于$H,N$是$R$的理想, 则$ar,ra\in H$且$ar,ra\in N$, 所以$ar,ra\in H\cap N$, 所以$H\cap N$为$R$的理想.

(2)对于$a\in H,b\in N,r\in R$, 有$r(a+b)=ra+rb\in H+N$, 同样$(a+b)r\in H+N$, 所以$H+N$是$R$的理想. □

**例 0.2.1** *若$H,N$是$R$的子环, 则$H+N$不一定是$R$的子环.*

*考虑$R$为数域$F$上的$2\times 2$全矩阵环, 令*

$$H=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\a&0\end{pmatrix}\middle|a\in F\right\},$$
$$N=\left\{\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}\middle|b\in F\right\}$$

*它们都是$R$的子环, 但$H+N$不是$R$的子环.*

**定义 0.27**

设$R$是一个交换幺环.

(1)若$R$的一个理想$P\neq R$, 而且从$a\cdot b\in P$可以推出$a\in P$或$b\in P$, 称$P$为$R$的一个**素理想**.

(2)若$R$的一个理想$M\neq R$, 而且不存在理想$A$使得$M\subsetneq A\subsetneq R$, 称$M$为$R$的一个**极大理想**.

**例 0.2.2** *整数环$\mathbb{Z}$中, 由素数$p$生成的理想$(p)$是素理想也是极大理想.*

**命题 0.28: 中心**

对于环$R$, 我们定义$R$的**中心(center)**为$Z(R)=\{a\in R|ar=ra,\forall r\in R\}$. 所以$Z(R)$是$R$的子环, 并且环$R$是交换环当且仅当$Z(R)=R$.

**注:** $R$是左$Z(R)$-模.

**定义 0.29**

如果把环定义中的$(R2)$换成更强的条件:

$(R2')$ $R^*=R\setminus\{0\}$关于乘法运算构成群,

此时称这样的环为**除环**或**斜域**.

**定义 0.30**

交换除环叫**域**, 即如果$P$是有单位元$1\neq 0$的交换环, 且$P$的每个非零元都可逆, 则称$P$是一个**域**.

如果域$P$中的子环$F$自身也是一个域, 则称$F$为$P$的一个**子域**. 当域$F\subset P$时, 我们也称$P$是$F$的一个**扩域**.

例如有理数域$\mathbb{Q}$是实数域$\mathbb{R}$的子域.

### 0.2.2 理想和域的有关结论

**定理 0.31: 对应定理, Correspondence Theorem, 见Artin, Algebra, Theorem 10.4.3**

设$\overline{R}=R/J$, $\pi$是自然满同态$R\to\overline{R}$.

(1)存在从$R$包含$J$的理想到$\overline{R}$的理想的一一对应, 如下给出:

$$I \rightsquigarrow \pi(I) \qquad 与 \qquad \pi^{-1}(\overline{I}) \leftarrow\!\!\sim\!\sim\; \overline{I}\,.$$

(2)**第三同构定理:** 若$I\subset R$对应于$\overline{I}\subset\overline{R}$, 则$R/I$与$\overline{R}/\overline{I}$是环同构.

**定理 0.32**

设$R$是一个交换幺环. 则

(1)$R$为域的充分必要条件是$R$的零理想为极大理想.

(2)$R$的理想$M\neq R$是极大理想的充分必要条件是$\overline{R}=R/M$是域.

**定理 0.33**

设$R$是一个交换幺环. 则

(1)$R$的理想$P\neq R$是素理想的充分必要条件是$\overline{R}=R/P$是整环.

(2)$R$为整环的充分必要条件是$R$的零理想为素理想.

由上我们可以推出: 一个交换幺环的每个极大理想都是素理想.

下面几个命题揭示了极大理想的存在性. 称环$R$中的元素$x$是**幂零的(nilpotent)**, 若存在正整数$n$使得$x^n=0$. 把$R$的全部幂零元构成的集合记为$r(R)$, 叫环$R$的**诣零根(nilradical)**.

**命题 0.34**

设$R$是一个交换幺环, $a\in R\setminus r(R)$. 则$R$至少有一个素理想并且不含$a$的任何方幂$a^m(m\geq 0)$.

**推论 0.35**

设$R$是一个交换幺环, 则$R$至少有一个极大理想.

**推论 0.36**

设$R$是一个交换幺环, 则$R$的全部素理想的交就是诣零根, 即 $\bigcap\limits_{P为素理想} P=r(R)$.

**证明:** 设$a\in r(R)$是任意一个幂零元, 于是存在$m>0$使得$a^m=0$. 对$R$的任意素理想$P$, 有$a^m=0\in P$, 故存在最小的正整数$r$使得$a^r\in P$. 若$r>1$, 则$a^r=a\cdot a^{r-1}\in P$, 由素理想定义可知$a\in P$或$a^{r-1}\in P$, 与$r$的取法矛盾. 所以只能有$r=1$, 即$a\in P$. 由$P$的任意性, $a\in\bigcap\limits_{P为素理想} P$.

再设$a\notin r(R)$, 由命题0.34, 存在$R$的一个素理想$P$使得$a\notin P$, 于是$a\notin\bigcap\limits_{P为素理想} P$. □

**注:** 一个交换环$R$的幂零元素全体$r(R)$构成$R$的一个理想. (不过可以有更直接的证明)

**例 0.2.3** 整数环$\mathbb{Z}$的诣零根是$(0)$.

### 0.2.3 分式域的构造

对于整环$A$, 我们可以构造它的**分式域(商域, field of fractions)**. 分式域的构造可以类比由整数集$\mathbb{Z}$定义有理数集$\mathbb{Q}$.

考虑所有的元素对$(a,b), a,b\in A, b\neq 0$组成的集合$A\times A^*(A^*=A\setminus\{0\})$, 定义关系$\sim$如下: 若$ad=bc$, 那么就记$(a,b)\sim(c,d)$, 容易证明$\sim$是个等价关系.

记$Q(A)$是所有等价类的集合, 或者$Q(A)$是集合$A\times A^*$关于等价关系的商集, 即$Q(A)=A\times A^*/\sim$. 用符号$[a,b]$表示有序对$(a,b)$所在的类, 根据定义, $[a,b]=[c,d]\Leftrightarrow ad=bc$. 在集合$A\times A^*$上用下述公式给出加法和乘法运算: [①]

$$(a,b)+(c,d)=(ad+bc,bd),\qquad (a,b)(c,d)=(ac,bd).$$

这些二元运算也可以转移到$Q(A)$上. 事实上, 可以证明若$(a,b)\sim(a',b')$, 则

$$(a,b)+(c,d)\sim(a',b')+(c,d),\qquad (a,b)(c,d)\sim(a',b')(c,d).$$

所以可以断言, $Q(A)$上的加法与乘法运算不依赖于等价类中代表元的选取. 于是我们有

$$[a,b]+[c,d]=[ad+bc,bd],\qquad [a,b][c,d]=[ac,bd].$$

可以证明在这样定义的运算下, $Q(A)$构成一个域, 并且加法零元是$[0,1]$, 乘法单位元是$[1,1]$.

定义映射$f:A\to Q(A), a\mapsto[a,1]$, 则$f$是环的单同态. 任取元素$x=[a,b]\in Q(A)$, 有$[b,1]x=[a,1]$, 于是$x$就是$f(A)$中元素的“比”$f(a)/f(b)$, 由于这个原因, 我们把上述$Q(A)$叫**环$A$的分式域(商域)**, 记为$\mathrm{Frac}(A)$.

所以整环$R$的**分式域(商域)**$F$满足如下条件:

(1)$R$是$F$的一个子环;

(2)任意$a\in F$可以表成$R$的两个元素的商$a=\dfrac{b}{c}, c\neq 0$.

**命题 0.37**

整环$R$都有分式域, 并且分式域在同构的意义下唯一.

---

[①]可以类比两个有理数的相加与相乘, 即对整数$a,b,c,d$, 有$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$.

## § 0.3 模的概念与例子

本课程中, 约定所有环都指带单位元的结合环.

模的概念是近百年来在代数学中所创造出的基本原理的载体, 其原因在于任何代数系统的研究不应仅是研究这一系统的内部性质, 而且也应研究它的全部表示(在这个词的最广泛的意义下).

**基本模型**: ①域上的向量空间, 把域改为一般的环; ②环的左(右)理想.

**定义 0.38: 模**

设$R$是环, **左$R$-模(left R-module)**记为${}_RM$, 是指一个Abel群$M$, 使得$R\times M$到$M$的二元运算$(r,x)\mapsto rx$满足下面的条件:

$(M1)(r_1+r_2)x=r_1x+r_2x$;

$(M2)r(x_1+x_2)=rx_1+rx_2$;

$(M3)(r_1r_2)x=r_1(r_2x)$;

$(M4)1_R\cdot x=x$, 这里$1_R$指$R$的单位元.

**注:** 模的运算包括加法以及环作用. 这里(M1)(M2)(M3)表示运算的相容性, 可以类比域上面的数乘与向量加法. 对称地, 也可以定义**右$R$-模**$M_R$, 此时环作用在右边.

**注:** 环$R$的反同态就是其反环$R^{op}$的自同态. (**反环(opposite ring)**就是把$R$的乘法运算重新定义为$a\times b=ba$, 这样可以得到一个环, 记为$R^{op}$)

对任意${}_RM$, 定义$x\cdot r=rx$可得$M_{R^{op}}$, 即左模对应反环的右模.

对任意$M_r$, 定义$r\cdot x=xr$可得${}_{R^{op}}M$, 即右模对应反环的左模.

当$R$为交换环时, $R^{op}=R$, 此时左$R$-模与右$R$-模一致. (域上不分左模与右模)

**例 0.3.1** *模的一些例子:*

(1)*Abel群是$\mathbb{Z}$-模: 定义*$nx=\begin{cases}0, & n=0,\\ \underbrace{x+\cdots+x}_{n}, & n\geq 1,\\ (-n)(-x), & n\leq -1.\end{cases}$

(2)*域$F$上的向量空间$V$是$F$-模.*

(3)*环$R$的左(右)理想是左(右)$R$-模. 特别地, ${}_RR$与$R_R$都是$R$-模.*

**定义 0.39**

称左$R$-模$M$的非空子集$N$为$M$的**子模(submodule)**, 记为$N<M$, 如果满足:

$\forall x_1,x_2,x\in N$且$r\in R$有$x_1+x_2\in N$且$rx\in N$. (加法与环作用封闭)

称$M$的子模$N$是$M$的**极大子模(maximal submodule)**, 若$N\subseteq N'\subsetneq M$, 有$N=N'$.

回顾: Abel群的子群是正规子群. 那么模的子模也是"正规"的.

**例 0.3.2** *子模的例子:*

(1)*对任意的左$R$-模${}_RM$, $\{0\}$与$M$都是$M$的子模, 叫***平凡子模**.

(2)*Abel群$G$的子群为$G$的$\mathbb{Z}$-子模.*

(3)*域$F$上向量空间$V$的子空间是$V$的$F$-子模; 反过来, $V$的$F$-子模也是$V$的子空间.*

(4)*环$R$的左理想是${}_RR$的$R$-子模, 反过来, ${}_RR$的子模也是$R$的左理想(右理想情形一样).*

(5)*根据子模的定义, 容易知道$M$的两个子模的交也是$M$的子模.*

下面来看**生成模**的概念. 设$\varnothing \neq S \subseteq {}_RM$(非空子集), 由前一个注可知所有包含$S$的子模之交也是$M$的子模, 叫**由$S$生成的子模**, 记为$\langle S\rangle$. 若$M = \langle S\rangle$且$|S| < \infty$, 称$M$是**有限生成的(finitely generated, f.g.)**. 设$y_1, \cdots, y_n \in M$, 令$N \triangleq \left\{\sum_{i=1}^{n} r_i y_i : r_i \in R\right\}$, 则可以证明$N < {}_RM$, 我们记$N = Ry_1 + \cdots + Ry_n = \sum_{i=1}^{n} Ry_i$. 不难证明:

$$\langle S\rangle = \left\{\sum_i r_i x_i : \forall r_i \in R, x_i \in S\right\}.^{①}$$

此时把$N$叫做由$y_1, y_2, \cdots, y_n$生成的子模.

**注**: 代数上无限和没有意义, 例如整数环的无限和没有意义.

设$\{N_i\}_{i\in I}$是${}_RM$的一个子模集, 则

$$\left\{\sum_{i\in I} r_i x_i : \forall r_i \in R, x_i \in N_i\right\} < {}_RM.$$

叫$\{N_i\}_{i\in I}$的**和(sum)**, 记为$\sum_{i\in I} N_i$. 不难证明, $\sum_{i\in I} N_i = \left\langle \bigcup_{i\in I} N_i \right\rangle$. 显然$M = \langle M\rangle$, 但这个没什么意义, 我们更希望把问题转化为用尽可能小的生成元素刻画$M$的性质.

**定义 0.40: 商模**

设$N < {}_RM$, 则商群$\overline{M} = M/N$是Abel群, 其元素是陪集$\bar{x} = x + N$. 定义从$R \times \overline{M} \to \overline{M}$的映射:

$$(r, \bar{x}) \mapsto \overline{rx},$$

这里$r \cdot \bar{x} = \overline{rx}$. 这个定义与代表元的选取无关, 这是因为

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 \Rightarrow \overline{rx_1} - \overline{rx_2} = \overline{r(x_1 - x_2)} = r \cdot \overline{(x_1 - x_2)} = r(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \bar{0}, \Rightarrow \overline{rx_1} = \overline{rx_2}.$$

因此$M/N$是左$R$-模, 称之为$M$的相对于子模$N$的**商模(quotient module, factor module)**.

**定义 0.41: 同态**

设$M, M'$是左$R$-模, 称映射$\eta : M \to M'$是**左$R$-模同态(homomorphism)**, 若

$$\eta(x_1 + x_2) = \eta(x_1) + \eta(x_2), \eta(rx_1) = r\eta(x_1), \forall x_1, x_2 \in M, r \in R.$$

或者写

$$\eta(r_1x_1 + r_2x_2) = r_1\eta(x_1) + r_2\eta(x_2). \qquad \text{(保持双线性)}$$

把**单同态(monomorphism)**记为$M \rightarrowtail M'$, 把**满同态(epimorphism)**记为$M \twoheadrightarrow M'$, 如果$\eta$是一一映射, 则记为$M \cong M'$, 称为**同构(isomorphism)**.

① 以后凡是出现$\sum$, 都表示有限和. 对于如果有无限和出现了$\sum$, 要求参与求和的非零元个数有限.

记从$M$到$M'$的左$R$-模同态全体为

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \triangleq \{f | f : M \to M' \text{是左} R-\text{模同态}\}$$

它关于同态的合成构成Abel群. 特别地,

$$\mathrm{End}(M) \triangleq \mathrm{Hom}_R(M, M)$$

是环, 叫$M$的**自同态环(endomorphism ring)**.

记$M$是Abel群, 在$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, M)$中分别定义

- $(fg)(x) = f(g(x))$.
- $(x)(fg) = ((x)f)g$.

此两种定义方式都可以使得$\mathrm{Hom}_R(M, M)$是一个环, 分别叫$M$的**左(右)自同态环**. 记为$\mathrm{End}^l(M)$与$\mathrm{End}^r(M)$.

左模是右自同态的右模, 右模是左自同态的左模, 即${}_RM \Rightarrow M_{\mathrm{End}^r(M)}, M_R \Rightarrow_{\mathrm{End}^l(M)} M$. 具体参见GTM13的20页.

**定义 0.42**

设$\eta : M \to M'$是左$R$-模同态.

(1)称

$$\mathrm{Ker}\,(\eta) \triangleq \{x \in M : \eta(x) = 0\}$$

为$\eta$的**同态核(kernel)**. $\mathrm{Ker}\,(\eta) < M$.

(2)称

$$\mathrm{Im}(\eta) \triangleq \{\eta(x) | x \in M\}$$

为$\eta$的**同态像(image)**. $\mathrm{Im}(\eta) < M'$.

(3)称

$$\mathrm{Coker}\,(\eta) \triangleq M'/\mathrm{Im}(\eta)$$

为$\eta$的**余核(cokernel)**或叫**上核**.

设$N <_R M$, $\pi : M \twoheadrightarrow M/N$定义为$\pi(x) = \bar{x}(= x + N)$, 注意有可能$M \to M/N$不满, 这里强行让它是满射. 把$\pi$叫**自然满同态(natural epimorphism)**. 此时, $\mathrm{Ker}\,(\pi) = N$.

**注: 交换图(commutative diagram)**可以刻画一些集合的关系与映射[1]. 例如

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

表示$f = h \circ g$. 必须要两个方向是可以推出同样的东西, 例如下面的不是交换图, 叫**平凡交换图**.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[dl] \\ \cdot \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

[1]交换图本质上没有任何意义, 仅为一种语言, 但是可以给我们直观, 强烈建议用(尤其是考试时). 虚线表示可构造出来的东西(“存在”).

下面这些结论都是群里有的东西.

**定理 0.43: 模的同态基本定理**

存在单同态$\bar{\eta}: M/_{\operatorname{Ker}\eta} \to M'$使得$\eta = \bar{\eta}\pi$, 对$x \in M$, 定义$\bar{\eta}(\bar{x}) = \eta(x)$. 用交换图来表示就是

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\pi"'] & M' \\ M/_{\operatorname{Ker}\eta} \arrow[ur, dotted, "\exists\bar{\eta}"'] & \end{tikzcd}$$

**推论 0.44**

$\mathrm{Im}\eta \cong M/_{\operatorname{Ker}\eta}$.

**证明:** 把$M$换成像, 那么$\eta, \pi$都是满射, 所以$\bar{\eta}$也是满射, 因此$\bar{\eta}$是同构. □

**注:** $fg$单$\Rightarrow g$单, $fg$满$\Rightarrow f$满.

**定理 0.45: 对应定理**

设$\eta: M \to M'$是满的左$R$-模同态, 则$\eta$可诱导一一对应:

$$\begin{array}{ccc} \{M\text{的包含}\operatorname{Ker}\eta\text{的子模}\} & \longleftrightarrow & \{M'\text{的子模}\} \\ H & \longmapsto & \eta(H) \end{array}$$

且使得$\eta^{-1}\eta(H) = H, \eta\eta^{-1}(H') = H'$.

**定理 0.46: 第二同构定理**

设$\eta$是左$R$-模同态且$\operatorname{Ker}\eta \triangleq K < H < M$, 则$\eta$可诱导左$R$-模同构:

$$\begin{array}{ccc} M/H & \cong & \eta(M)/\eta(H) \\ x+H & \mapsto & \eta(x)+\eta(H) \\ & & \downarrow \\ M/H & \cong & (M/K)/(H/K) \end{array}$$

**证明:** 由同态基本定理的推论, $\eta(M) \cong M/K, \eta(H) \cong H/K$. □

**注:** $(M/H)/(M/K)$不可作商, 无意义. 只有分母相同才可以作商.

**定理 0.47: 第一同构定理**

设$H, M <{}_R M$, 则有左$R$-模同构

$$\begin{array}{ccc} (H+M)/H & \cong & N/(H\cap N) \\ x+H & \mapsto & x+H\cap N, \quad (\forall x \in N) \end{array}$$

**定义 0.48: 循环模**

若存在$x \in M$使得$M = Rx$, 则称${}_R M$是**左循环模(cyclic module)**(用一个元素生成). 类似也有右循环模.

**例 0.3.3** (1) 循环$Abel$群是循环$\mathbb{Z}$-模.
(2)${}_RR = R\cdot 1_R$是循环左$R$-模, $R_R = 1_R\cdot R$是循环右$R$-模.

**定义 0.49: 单模**

称$0\neq {}_RM$为**单模(simple)**或**不可约模(irreducible)**, 若$M$只有平凡子模($0$与$M$).

**例 0.3.4** 设${}_RM$是单的, 则$\forall(0\neq)x\in M$有$M=Rx$.

**证明:** 显然$0\neq Rx<M$, 但是$M$只有平凡子模, 那么$Rx$只有平凡子模, 则必有$Rx=M$, 所以单模是特殊的循环模.

**注:** 单群不简单, 但是单模简单. 单的Abel群是素数阶循环群.

**定义 0.50: 零化子**

设$M=Rx$, 则有满的左$R$-模同态$\mu_x: R\to Rx, \mu_x(r)=rx(\forall r\in R)$. 且

$$\operatorname{Ker}\mu_x=\{r\in R|rx=0\}\lhd R(\text{左理想}).$$

把$\operatorname{Ker}\mu_x$叫做$x$在$R$中的**零化子(annibilator)**, 记为$\operatorname{ann}x$或$O_{:R}x$. 对任意$\varnothing\neq S<M$, 可以定义$\operatorname{ann}S=\bigcap\limits_{x\in S}\operatorname{ann}x$叫做$S$在$R$中的零化子.

当$R=\mathbb{Z}$时, $\operatorname{ann}x=\mathbb{Z}$或$\operatorname{ann}x=(n)$, 其中$n$是使得$nx=0$的最小正整数, 即$x$的**阶**, 也把$\operatorname{ann}x$叫做**阶理想(order ideal)**.

**定义 0.51: 自由模**

设$M=\langle S\rangle$, 如果由$\sum\limits_{<\infty}r_ix_i=0(\forall r_i\in R, x_i\in S)$, 可以推出$r_i=0(\forall i)$, 则称$S$是$R$-线性无关的. 此时称$S$是$M$的一组**基**, 也称$M$是以$S$为基的**自由模(free module)**.

如果基的个数有限, 即$|S|=n<\infty$, 则称$M$是**秩为$n$**的自由模.

**例 0.3.5** 设$n\in\mathbb{Z}^+$, $R^{(n)}\triangleq R\times\cdots\times R=\{(x_1,\cdots,x_n)|\forall x_i\in R\}$, 它是自由的左$R$-模, 定义

$$(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n),$$

零元$(0,\cdots,0)$, 数乘

$$r(x_1,\cdots,x_n)=(rx_1,\cdots,rx_n).$$

则$M$是左$R$-模. 令$e_i=(0,\cdots,1,\cdots,0), 1\le i\le n$, 易知$R^{(n)}$是以$e_1,\cdots,e_n$为基的自由模.

**断言:** 设$M$是秩为$n$的自由模, 则

$$M\cong R^{(n)}$$
$$\sum_{i=1}^n r_ix_i\mapsto\sum_{i=1}^n r_ie_i,$$

其中$x_1,\cdots,x_n$为$M$的一组基.

**定义 0.52: 直和**

设$M_1,\cdots,M_n$是左$R$-模, 在$M_1\times\cdots\times M_n=\{(x_1,\cdots,x_n)|\forall x_i\in M_i\}$中, 定义加法与环作用如前一个例子, 那么$M_1\times\cdots\times M_n$是左$R$-模, 叫做$M_1,\cdots,M_n$的**直和(direct sum)**, 记为$M_1\oplus\cdots\oplus M_n$, 或$\bigoplus\limits_{i=1}^{n}M_i$. 此时, 称每个$M_i$为$\bigoplus\limits_{i=1}^{n}M_i$的**直和项**.

**注:** (1)设$\eta_i:M_i\to N$是左$R$-模同态, $1\le i\le n$, 则可以诱导左$R$-模同态

$$\eta:\bigoplus_{i=1}^{n}M_i\to N,$$
$$\eta\left[\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right]=\sum_{i=1}^{n}\eta_i(x_i)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\left[\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right].$$

(形式上把环作用记为“乘法”. )

(2)设$\phi_i:M\to N_i$是左$R$-模同态, 则有左$R$-模同态$\phi(x)=\begin{pmatrix}\phi_1(x)\\ \vdots\\ \phi_n(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix}(x)$.

对于$M_1\oplus\cdots\oplus M_m\to N_1\oplus\cdots\oplus N_n$, 可以定义$f_{ij}:M_i\to N_j(\forall 1\le i\le m,j\le n)$, 那么就有同态

$$\begin{pmatrix}f_{11}&\cdots&f_{1m}\\ \vdots&&\vdots\\ f_{n1}&\cdots&f_{nm}\end{pmatrix}_{n\times m}$$

(3)设$M_1,\cdots,M_n<{}_RM$, 则

$$\begin{aligned}\eta:\bigoplus_{i=1}^{n}M_i&\to\sum_{i=1}^{n}M_i\\ (x_1,\cdots,x_n)&\mapsto\sum_{i=1}^{n}x_i\end{aligned}\qquad(*)$$

是满的左$R$-模同态. 即$\sum\limits_{i=1}^{n}M_i$是$\bigoplus\limits_{i=1}^{n}M_i$的同态像或商模.

**定理 0.53**

设$M_1,\cdots,M_n<{}_RM$, 则$(*)$是同构等价于下面同时成立:

(1)$M=\sum\limits_{i=1}^{n}M_i$;

(2)$M_j\cap\sum\limits_{i=1}^{j-1}M_i=0,\forall 1\le j\le n$.

此时把$\bigoplus\limits_{i=1}^{n}M_i$叫**内直和**.

**注：** TFAE:[1]

- $M_1,\cdots,M_n$独立;
- $\forall x_i\in M_i,\sum\limits_{i=1}^n x_i=0\Rightarrow x_i=0$.(零元的表示唯一)
- $\sum\limits_{i=1}^n x_i=\sum\limits_{i=1}^n y_i(\forall x_i,y_i\in M)\Rightarrow x_i=y_i(\forall i)$.

**命题 0.54**

设$M_1,\cdots,M_n$独立，则
(1) $\bigcap\limits_{i=1}^n M_i=0$;
(2) $M_j\cap\bigcup\limits_{i\neq j} M_i=0$.

**注：** 反之不对. 例如

$$M_1=\{(x,0)\},M_2=\{(0,y)\},M_3=\{(x,x)\},$$

则$M_1,M_2,M_3$满足(1)(2)，但是不独立. 事实上找经过原点的任何直线都可以说明.

**定理 0.55**

设$M_1,\cdots,M_n<_RM$独立.
(1)**(加粗)**令$N_1=M_1+M_2+\cdots+M_{r_1},N_2=M_{r_1+1}+\cdots+M_{r_2},N_3\cdots$，则$N_1,N_2,N_3,\cdots$是独立的.
(2)**(加细)**令$M_i=M_{i1}\oplus\cdots\oplus M_{ik_i}(\forall 1\le i\le n)$，则$M_{i1},\cdots,M_{ik_1},\cdots,M_{n1},\cdots,M_{nk_n}$也独立.

**推论 0.56**

设$M_1,\cdots,M_n<_RM$，且$M=\bigoplus\limits_{i=1}^n M_i$，沿用前一定理记号，则

$$M\cong\bigoplus_i N_i,M\cong\bigoplus_{i,j}M_{ij}.$$

下面两个定理不太好证明.

**定理 0.57**

设$D$是PID，则$D^{(n)}$的子模也是自由模，且其秩不超过$n$.

**定理 0.58: PID上有限生成模结构定理**

设$D$是PID，且$0\neq M$是f.g.的$D$-模，则存在$z_1,\cdots,z_n\in M$使得$M=Dz_1\oplus\cdots\oplus Dz_n$，其中阶理想满足$\operatorname{ann}z_1\supset\operatorname{ann}z_2\supset\cdots\supset\operatorname{ann}z_n$，且$\operatorname{ann}z_i\neq D(1\le i\le n)$.

**注：** f.g.就是有限生成的缩写. PID是principal ideal domain(主理想整环)的缩写.

[1] 一些常用缩写：TFAE: The following are equivalent; WLOG: without loss of generality; WRT: with respect to.

**定义 0.59: IBN环**

满足$R^{(m)} \cong R^{(n)} \Rightarrow m = n$的环是**IBN环(invariant basis number)**.

**定理 0.60**

交换环与Noether环都是IBN环.

**注:** 存在非交换的IBN环, 例子较难给出, 在代数K理论的书上有例子.

课外读物: 微信公众号: 返朴, (范畴论内容)数学的数学|众妙之门.

## 练习题 0.1

本节习题目的是让读者快速熟悉模的基本概念, 以便后续学习.

(如果没有特别说明, “$R$-模”都是指“左$R$-模”)

1. 设$p$是素数, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, 根据例0.3.1, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$是左$\mathbb{Z}$-模. 证明：$\mathbb{Z}$不是左$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-模.

2. 若$N_1, N_2, \cdots, N_k, \cdots$是左$R$-模$M$的子模, 并且
$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_k \subset \cdots,$$
证明$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} N_i < M$.

3. 设$M$是一个左$R$-模, $\eta$是环$S$到$R$的一个同态, 而且$\eta$将$S$的单位元素映到$R$的单位元素, 我们定义$S$在$M$上的作用如下: 对于$a \in S, x \in M$, 规定
$$ax = \eta(a)(x).$$
证明$M$是一个$S$-模.

4. 设$M$是一个有限Abel群且$M \neq 0$, 问$M$是否能成为一个左$\mathbb{Q}$-模.

5. 设$M$为一个$R$-模, 规定$R$对$\mathrm{Hom}_R(R, M)$的作用如下: 对$f \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$, $a \in R$, 规定$a \cdot f$为
$$af(r) = f(ra), \qquad r \in R.$$
证明$\mathrm{Hom}_R(R, M)$是一个$R$-模.

6. 证明: $R$-模$M$是单模的充分必要条件是: $M$是一个非零循环模且每个非零元都是它的生成元.

7. 证明: $\mathbb{Q}$作为$\mathbb{Z}$-模, 它的任一有限生成的子模是循环模, 由此证明, $\mathbb{Q}$不是一个自由$\mathbb{Z}$-模.

8. 设$M$为一个$R$-模, 映射$\eta: \mathrm{Hom}_R(R, M) \to M$, $\eta(f) = f(1), f \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$. 证明$\eta$是一个同构.

9. 证明: 若$M$是一个自由左$R$-模, $u_1, \cdots, u_n$为它的一基, 则$\mathrm{Hom}_R(M, R)$, 记作$M^*$, 是一个自由右$R$-模, 它有一基$f_1, \cdots, f_n$使得

$$f_i(u_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \cdots, n,$$

$\delta_{ij}$为克罗内克(Kronecker)符号.

10. 证明: 任一$R$-模都是某个自由$R$-模的同态像.

11. (1)证明：${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$不是有限生成模;
(2)举例说明有限生成模的子模不一定是有限生成模.

12. 设$R$是交换环, 定义
$$tM = \{m \in M : \text{存在非零的} r \in R \text{使得} rm = 0\}.$$
(1)令$R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, 并把$R$看成$R$-模. 证明$\overline{1} \notin tR$.
(2)证明$tR$不是$R$的子模. （提示: $\overline{2}, \overline{3} \in tR$, 但$\overline{3} - \overline{2} \notin tR$. ）

13. 设$M$是非零模, $M^2 = M \times M$. 记$M_1 = \{(m, 0) | m \in M\}$, $M_2 = \{(0, m) | m \in M\}$. 对任意$\sigma \in \mathrm{End}({}_R M)$, 记
$$M^\sigma = \{(m, m\sigma) | m \in M\}.$$
则$M^\sigma < M^2$. 令$K < M^2$, 证明:
(1)$M^2 = K \oplus M_2$当且仅当存在$\sigma \in \mathrm{End}({}_R M)$, 使得$K = M^\sigma$.
(2)若存在自同构$\sigma \in \mathrm{End}({}_R M)$, 使得$K = M^\sigma$, 则$M^2 = M_1 \oplus K$.

14. 设$M = K \oplus K' = L \oplus L'$. 证明:
(1)若$K = L$, 则$K' \cong L'$, 但不一定有$K' = L'$.
(2)若$K \subseteq H < M$, 则$H = K \oplus (H \cap K')$.
(3)$K \cap L = 0$不一定能推出$K + L$是$M$的直和. (**提示:** 用第13题的结论. )

15. 设$M = K + L$, $f : M \to N$是满同态. 若$K \cap L = \mathrm{Ker}\, f$, 证明$N = f(K) \oplus f(L)$.

16. (1)为了定义$M = H \oplus K \oplus L$, 证明: 若$M = H \oplus H'$, $H' = K \oplus L$, 则
$$M = (H + K) \oplus L \text{且} H + K = H \oplus K.$$
(即$H \oplus (K \oplus L) = (H \oplus K) \oplus L$. )
(2)设$H, K, L < M$. 证明$M = H \oplus K \oplus L$当且仅当
$$H \cap K = 0 = L \cap K \text{且} M/K = (H + K)/K \oplus (L + K)/K.$$

17. 举例说明存在左$R$-模$M = S \oplus T$的子模$N$, 但是$N \neq (N \cap S) \oplus (N \cap T)$.

18. 设$M, N$是$R$-模, $f : M \to N$是满同态, $K \leq M$. 证明:
(1)若$K \cap \mathrm{Ker}\, f = 0$, 则$f|_K : K \to N$是单同态.
(2)若$K + \mathrm{Ker}\, f = M$, 则$f|_K : K \to N$是满同态.

19. 幺环$R$的一个左(右)理想$I$叫做**极大的**, 若$I \neq R$且不存在左(右)理想$I'$使得$I \subsetneq I' \subsetneq R$. 证明: 左$R$-模$M$是单模当且仅当存在$R$的一个极大左理想$I$, 使得$M$和$R$-模$R/I$成模同构.

20. (**Schur引理**)证明: 若$M_1, M_2$是单的$R$-模, 则$M_1$到$M_2$的模同态不是零同态就是模同构.
**注：**上面两个结论会在§1.7节用到.

# 第1章　模

本章主要内容: $R$-模的基本性质、Artin模和Noether模(以人名命名的概念都很重要)、投射模、内射模和平坦模、直和与直积、生成元与余生成元、推出与拉回(有常用技巧)、正向极限与反向极限.

## § 1.1　$R$-模范畴

设$R$是环, $R-\mathbf{Mod}$是左$R$-模范畴, $\mathbf{Mod}-R$是右$R$-模范畴. 把左$R$-模与左$R$-模同态放在一起就是左$R$-模范畴.

### 1.1.1　正合列

**定义: 正合**

称左$R$-模序列

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

为**正合的(exact)**, 若$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$.

**注:** $\mathrm{Im}\, f, \mathrm{Ker}\, g$都是$N$的子模, 如果它们刚好相等那么就是正合的.

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g \Rightarrow gf = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f \leq \mathrm{Ker}\, g.$$

证明正合只需要证相互包含. 一般来说证明“$\leq$”比证明“$\geq$”容易.

一般地, 称左$R$-模序列

$$\cdots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow \cdots$$

是**正合的**, 如果

$$\mathrm{Im}\, f_i = \mathrm{Ker}\, f_{i+1} \qquad , \forall i.$$

即每相邻三项都是正合的.

**注:** $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$是正合的 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, f = 0$ $\Leftrightarrow$ $f$是单射. 记为$M \overset{f}{\rightarrowtail} N$.

$M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$是正合的 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\, f = N$ $\Leftrightarrow$ $f$是满射, 记为$M \overset{f}{\twoheadrightarrow} N$.

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{Coker}\, f = 0.$$

**注:** 设$M_1 \xrightarrow{f_1} N_1 \xrightarrow{g_1} P \longrightarrow 0$与$0 \longrightarrow P \xrightarrow{g_2} N_2 \xrightarrow{f_2} M_2$都是正合的, 则

$$M_1 \xrightarrow{f_1} N_1 \xrightarrow{g_2 g_1} N_2 \xrightarrow{f_2} M_2$$

也是正合的. (把$P$连在一起, 从而把较短的正合列连成长的.)

**定义**

把正合列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

称为**短正合列(short exact sequences)**, 此时$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$并且$f$单、$g$满. 可以看作$M \overset{f}{\rightarrowtail} N \overset{g}{\twoheadrightarrow} P$.

**例 1.1.1** 设$N <_R M$, 则有短正合列

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0.$$

其中$i$是嵌入映射(也记作“$\hookrightarrow$”), $\pi$是自然满同态.

**例 1.1.2** 设$f : M \to N$是左$R$-模同态, 则有左$R$-模正合列

$$\begin{tikzcd}
 & & \operatorname{Im} f \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r, "\text{嵌入}"] & M \arrow[u] \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & \operatorname{Coker} f \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow M \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} f \longrightarrow M \xrightarrow{f} \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0$$

**例 1.1.3** 设$f : M \to N$是左$R$-模同态, 则有左$R$-模正合列

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & N \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & P \\
 & \operatorname{Im} f \arrow[ur] & & \operatorname{Im} g \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

**例 1.1.4 (例1.1.2的特殊情况)** $M_1, M_2 <_R M$, 则有左$R$-模短正合列

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow M_1 \cap M_2 \longrightarrow & M_1 \oplus M_2 & \longrightarrow & M_1 + M_2 & \longrightarrow 0. \\
 & (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 + x_2 &
\end{array}$$

但是当$n \geq 3$时,

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^{n} M_i & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} M_i & \longrightarrow 0. \\
 & (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i &
\end{array}$$

一般不是正合列.

**解答:** 我们来举两个例子说明当$n \geq 3$时一般不是正合列. 注意到

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\},$$

(1)取$R = \mathbb{R}$且$M_i = \mathbb{R}(\forall 1 \leq i \leq n)$, 则$\bigcap_{i=1}^{n} M_i = \mathbb{R}$是一维$\mathbb{R}$-向量空间. 而$\operatorname{Ker} f$是$n-1$维$\mathbb{R}$-向量空间, 则$\operatorname{Ker} f \ncong \bigcap_{i=1}^{n} M_i$. (于是不满足短正合列的定义. )

(2)取$R = \mathbb{Z}, M_1, M_2, M_3 = \mathbb{Z}_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, 则$\bigcap_{i=1}^{3} M_i = \mathbb{Z}_2$含有两个元素, 但是

$$\operatorname{Ker} f = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1})\}$$

含有四个元素, 故$\operatorname{Ker} f \ncong \bigcap_{i=1}^{3} M_i$. □

**注:** 显然

$$\begin{aligned}\bigoplus_{i=1}^n M_i &\longrightarrow \sum_{i=1}^n M_i \longrightarrow 0.\\ (x_1,\cdots,x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n x_i\end{aligned}$$

是正合列.

### 1.1.2 直积

设$A_i\in R-\mathbf{Mod},\forall i\in J$, 其中$J$是指标集(index set). 在下面的笛卡尔集

$$\mathrm{X}_{j\in J}A_j=\{(\cdots,a_j,\cdots)\triangleq(a_j)|\forall a_j\in A_j\}$$

中, 定义

$$(a_j)+(b_j)=(a_j+b_j),r(a_j)=(ra_j),$$

则$\mathrm{X}_{j\in J}A_j$是左$R$-模, 称之为$\{A_j|j\in J\}$的**直积(direct product)**, 记为$\prod\limits_{j\in J}A_j$.

在如上定义中,

$$\{(a_j)|\text{只有有限个非零分量}\}<\prod_{j\in J}A_j,$$

称之为$\{a_j|j\in J\}$的**直和(direct sum)**, 也记为$\coprod\limits_{j\in J}A_j$[①]或$\bigoplus\limits_{j\in J}A_j$.

**注:** (1)若$|J|<\infty$, 则$\coprod\limits_{j\in J}A_j=\prod\limits_{j\in J}A_j$; 若$|J|=\infty$, 则$\coprod\limits_{j\in J}A_j\subsetneqq\prod\limits_{j\in J}A_j$(真子模).

(2)当$A_j=A(\forall j\in J)$, 记$\prod\limits_{j\in J}A_j=A^J,\coprod\limits_{j\in J}A_j=A^{(J)}$.

**定义**

定义映射

$$\begin{aligned}p_i:\prod_{j\in J}A_j &\to A_i,\\ (a_j) &\mapsto a_i,\end{aligned}$$

这是满的左$R$-模同态, 叫做$\prod\limits_{j\in J}A_j$的**第i个标准投射(standard projection)**.

定义映射

$$\begin{aligned}\lambda_i:A_i &\to \prod_{j\in J}A_j\\ (a_i) &\mapsto (\delta_{ij}a_i),\end{aligned}$$

其中$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j,\end{cases}$是符号函数, 这是单的左$R$-模同态, 叫做$\prod\limits_{j\in J}A_j$的**第i个标准内射(standard injection/embedding)**.

---

[①] 在范畴中, 我们也把$\coprod$符号叫做**余积**(参见§2.5). 事实上, $R-\mathbf{Mod}$范畴中的余积就是直和.

**命题 1.1**

我们有:

(1)$p_j\lambda_i = \delta_{ij}\cdot 1_{A_i}, \forall i, j \in J$.

(2)对于$\coprod_{j\in J} A_j$, 有$\sum_{j\in J}\lambda_j p_j = 1_{\coprod_{j\in J} A_j}$.

(3)由(1)(2)给出了直和的本质特征: $A \cong \coprod_{j\in J} A_j \Leftrightarrow \exists$满同态$p_j' : A \to A_j$与单同态$\lambda_j' : A_j \to A$满足(1)(2).

**注:** (2)改成直积不行, 对任意$(a_j) \in \prod_{j\in J} A_j$, $\left(\sum_{j\in J}\lambda_j p_i\right)[(a_j)]$只有有限个非零元素是有限和. (3)的结论很常用.

**证明:** (1)(2)只需注意

$$\begin{array}{ccccccc} A_i & \xrightarrow{\lambda_j} & \coprod_{j\in J} A_j & \xrightarrow{p_j} & A_j & \xrightarrow{\lambda_i} & \coprod_{j\in J} A_j \\ a_i & \mapsto & (\delta_{ij}a_i) & \mapsto & \delta_{ij}a_i & & \\ & & (a_j) & \mapsto & a_j & \mapsto & (\delta_{ij}a_j) \end{array}$$

(3)**必要性**(“$\Rightarrow$”): 由(1)(2)即得. **充分性**: 记$M \triangleq \coprod_{j\in J} A_j$, 由(1)(2)可知

$$\begin{aligned} p_j\lambda_i &= \delta_{ij}\cdot 1_{A_i}, \forall i, j \in J, \\ \sum_{j\in J}\lambda_j p_j &= 1_M. \end{aligned}$$

由已知,

$$\begin{aligned} p_j'\lambda_i' &= \delta_{ij}\cdot 1_{A_i}, \forall i, j \in J, \\ \sum_{j\in J}\lambda_j' p_j' &= 1_A. \end{aligned}$$

下证$A$到$M$是单且满的同态:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{P_j'} & A_j & \xrightarrow{\lambda_j} & M \\ & \xleftarrow{\lambda_j'} & & \xleftarrow{P_j} & \end{array}}$$

(直接合并不太现实, 因为$A \to A_j$丢失了太多信息.)

令

$$\theta = \sum_{j\in J}\lambda_j p_j' : A \to M, \theta' = \sum_{j\in J}\lambda_j' p_j : M \to A,$$

它们都是左$R$-模同态, 所以

$$\theta\theta' = \left(\sum_{j\in J}\lambda_j p_j'\right)\left(\sum_{j\in J}\lambda_j' p_j\right) = \sum_{j\in J}\lambda_j(p_j'\lambda_j')p_j = \sum_{j\in J}\lambda_j\cdot 1_{A_j}\cdot p_j = \sum_{j\in J}\lambda_j p_j = 1_M.$$

同理, $\theta'\theta = 1_A$, 因此$\coprod_{j\in J} A_j = M \cong A$. □

**注:** 判断一个模是另一个模的直和, 这是常用的方法.

**定义 1.2**

**共变函子(covariant functor)**$F : R-\mathbf{Mod} \to S-\mathbf{Mod}$由下面两个要素构成:

(1)映射$A \mapsto F(A), \forall A \in R-\mathbf{Mod}$.

(2)从$\mathrm{Hom}_R(A,B)$到$\mathrm{Hom}_S(F(A),F(B))$的映射$f \mapsto F(f), \forall A,B \in R$-$\mathbf{Mod}$.

其中满足两个公理:

$(F1)$ $F(gf) = F(g)F(f)$, 如果$gf$在$R-\mathbf{Mod}$中有定义.

$(F2)$ $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

**注:** 共变函子中把上面的所有左模$R-\mathbf{Mod}$改为右模$\mathbf{Mod}-R$都可以, 即$F$把左模映往左模, 把右模映往右模. 对偶地, 也有**反变函子(contravariant)**, 把左模映往右模, 把右模映往左模.

**定义**

**反变函子(contravariant)**$F : R-\mathbf{Mod} \to \mathbf{Mod}-S$由下面两个要素构成:

(1)映射$A \mapsto F(A), \forall A \in R-\mathbf{Mod}$.

(2)从$\mathrm{Hom}_R(A,B)$到$\underline{\mathrm{Hom}_S(F(B),F(A))}$的映射$f \mapsto F(f), \forall A,B \in R-\mathbf{Mod}$.

其中满足两个公理:

$(F1)$ $\underline{F(gf) = F(f)F(g)}$, 如果$gf$在$R-\mathbf{Mod}$中有定义.

$(F2)$ $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

$F$叫**加法函子(additive)**, 若$F(f+g) = F(f) + F(g)$.

$F$叫**正合的(exact)**, 若$F$把短正合列映往短正合列, 即

$$\begin{array}{rl} & 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \\ \text{共变函子变成} & 0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0. \\ \text{反变函子变成} & 0 \longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \longrightarrow 0. \end{array}$$

设$F$是共变函子, $F$叫**左正合(left exact)**, 若

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

是正合列可以推出

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

也是正合列. **右正合**有类似定义:

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$$

设$F$是反变函子, $F$叫**左正合(left exact)**, 若

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

是正合列可以推出

$$0 \longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$$

也是正合列. **右正合(right exact)**有类似定义:

$$F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \longrightarrow 0.$$

(这与教材有点不一样, 其实是等价的, 但我们的表述更简单. )

**定义**

设$R,S$是环, 称$M$是$(R,S)$**-双模(bimodule)**, 记为${}_RM_S$, 如果$M$既是左$R$-模,又是右$S$-模, 且

$$(rx)s = r(xs), \forall r \in R, x \in M, s \in S.$$

（即$R$对$M$的环作用与$S$对$M$的环作用相容. ）

**命题 1.3**

设$R,S,T$是环, $M,N$都是Abel群. 则

(1)由${}_RM_S,{}_RN_T$可以诱导$\mathrm{Hom}_R({}_RM_S, {}_RN_T)$的一个$(S,T)$-双模结构, 只需定义

$$①sf(x) = f(xs), ②(ft)(x) = f(x)t.$$

其中$x \in M, s \in S, t \in T, f \in \mathrm{Hom}_R({}_RM_S, {}_RN_T)$.

(2)由${}_SM_R,{}_TN_R$可以诱导$\mathrm{Hom}_R({}_SM_R, {}_TN_R)$的一个$(T,S)$-双模结构, 只需定义

$$①(tf)(x) = tf(x), ②(fs)(x) = f(sx).$$

其中$x \in M, s \in S, t \in T, f \in \mathrm{Hom}_R({}_SM_R, {}_TN_R)$.

**注:** $M,N$都有相同的左$R$-模, 可以诱导左$R$-模同态.

**证明:** (1)根据定义, 只需证明$(sf)t = s(ft)$, 而这是个同态映射, 所以只需要证明对任意$x \in M$, 都有$((sf)t)(x) = (s(ft))x$. 事实上,

$$((sf)t)(x) \xlongequal{②} (sf)(x)t \xlongequal{①} f(xs)(t) \xlongequal{②} (ft)(xs) \xlongequal{①} s(ft)(x).$$

(2)同理. □

**注:** (1)下面四个都是模: (“左反右同”).

$${}_S[\mathrm{Hom}_R({}_RM_S, {}_RN)],[\mathrm{Hom}_R({}_RM, {}_RN_T)]_T,$$
$${}_T[\mathrm{Hom}_R(M_R, {}_TN_R)],[\mathrm{Hom}_R({}_SM_R, N_R)]_S,$$

(2)左模和右模都可以看作双模: ${}_RM \Rightarrow {}_RM_{\mathbb{Z}}, M_R \Rightarrow {}_{\mathbb{Z}}M_R$.

(3)左模可以看作右模, 当然也可以看作双模:

$${}_RM \Rightarrow {}_RM_{\mathrm{End}(M)}, xf = x(f)$$
$$M_R \Rightarrow {}_{\mathrm{End}(M)}M_R, fx = f(x).$$

回忆: $f: M_R \to N_R$是模同态等价于$f(xa+yb) = f(x)a + f(y)b$.

**命题 1.4**

对任意$M_R$, 有右$R$-模同构

$$\begin{array}{rcl} \rho: \quad M & \to & \mathrm{Hom}_R({}_RR_R, M_R) \\ \rho(x)(a) & = & xa, \qquad (x\in M, a\in R) \end{array}$$

同样对任意${}_RM$都有左$R$-模同构

$$\begin{array}{rcl} \rho: \quad M & \to & \mathrm{Hom}_R({}_RR_R, {}_RM) \\ \rho(x)(a) & = & ax, \qquad (x\in M, a\in R) \end{array}$$

**注:** 注意记号不要写反了. $\mathrm{Hom}_R(M_R, {}_RR_R)$是左模! 左模映往右模或者右模映往左模不可能是同态.

**证明:** 只证明第一部分. (i)对任意$a, a', b, b' \in R, x \in M$, 都有

$$\rho(x)(ab + a'b') = (xa)b + (xa')b' = \rho(x)(a)b + \rho(x)(a')b',$$

则$\rho(x) \in \mathrm{Hom}_R({}_RR_R, M_R)$. (注意$(ab)c = a(bc)$是约定俗成的.)

(ii)下证$\rho(xa + yb) = \rho(x)a + \rho(y)b$. 注意这是个映射, 只需要证它作用在$c \in R$上相等. 对任意$a, b, c \in R, x, y \in M$都有

$$\begin{aligned} \rho(xa + yb)(c) &= x(ac) + y(bc) = \rho(x)(ac) + \rho(y)(bc) \\ &\xlongequal{\text{Prop1.3(1)②}} (\rho(x)a)(c) + (\rho(x)b)(c) \quad (\text{注意}\rho(x), \rho(y) \in [\mathrm{Hom}_R({}_RR_R, M_R)]_R) \\ &= (\rho(x)a + \rho(y)b)(c). \end{aligned}$$

因此$\rho$是右$R$-模同态.

(iii)下证$\rho$是单射. 设$\rho(x) = 0$, 则$x = x \cdot 1_R = \rho(x)(1_R) = 0$, 于是$\rho$是单射.

(iv)下证$\rho$是满射. 设$f \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$, 则

$$f(a) = f(1_R \cdot a) = f(1_R)a = \rho(f(1_R))(a) \Rightarrow f = \rho(f(1_R)),$$

找到了原像. [1]

综上, $\rho$是同构. □

**定理 1.5**

设$R, S$是环, 且$U$是$(R, S)$-双模, 则

(1)$\mathrm{Hom}_R(U, -) : R - \mathbf{Mod} \to S - \mathbf{Mod}$是加法共变函子.

(2)$\mathrm{Hom}_R(-, U) : R - \mathbf{Mod} \to \mathbf{Mod} - S$是加法反变函子.

**证明:** 只证明(1). 设$f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, 为了方便, 记$\mathrm{Hom}_R(U, f) \triangleq \mathrm{Hom}_R(U, -)(f)$, 于是

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(U, f): &\mathrm{Hom}_R(U, M) \to \mathrm{Hom}_R(U, N). \\ &\mathrm{Hom}_R(U, f)(\gamma) = f\gamma, \qquad \forall \gamma \in \mathrm{Hom}_R(U, M). \end{aligned}$$

[1]我们通常认为在一个幺环中, 单位元是“确定”的元素, 而其他元素都是变的. 以后很常用.

(i)下证同态, 即证$\mathrm{Hom}_R(U,f)(s_1\gamma_1+s_2\gamma_2)=s_1\mathrm{Hom}_R(U,f)(\gamma_1)+s_2\mathrm{Hom}_R(U,f)(\gamma_2)$. 而这是个映射, 只需证明它们作用在$u\in M$上相等. 事实上

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hom}_R(u,f)(s_1\gamma_1+s_2\gamma_2))(u)&=f(s_1\gamma_1)(u)+f(s_2\gamma_2)(u)\\&\xlongequal[\gamma_1,\gamma_2\in\mathrm{Hom}_R({}_RU_S,{}_RM)]{\text{Prop1.3(1)②}} f\gamma_1(us_1)+f\gamma_2(us_2)\\&\xlongequal[f\gamma_1,f\gamma_2\in\mathrm{Hom}_R({}_RU_S,{}_RN)]{\text{Prop1.3(1)①}} s_1(f\gamma_1(u))+s_2(f\gamma_2(u))\\&=(s_1\mathrm{Hom}_R(U,f)(\gamma_1))(u)+(s_2\mathrm{Hom}_R(U,f)(\gamma_2))(u).\end{aligned}$$

所以$\mathrm{Hom}_R(u,f)$是右$S$-模同态.

(ii)显然, $\mathrm{Hom}_R(U,1_M)=1_{\mathrm{Hom}_R(U,M)}$.

（如果$f$是恒等同态，则$\mathrm{Hom}_R(U,1_M)$把$\gamma$映往$\gamma$，故$\mathrm{Hom}_R(U,1_M)$是恒等同态）.

(iii)对任意${}_RM\xrightarrow{f}{}_RN\xrightarrow{g}{}_RK$与$\gamma:{}_RU\to{}_RM$, 下证$\mathrm{Hom}_R(U,gf)=\mathrm{Hom}_R(U,g)\mathrm{Hom}_R(U,f)$. 事实上,

$$(\mathrm{Hom}_R(U,gf))(\gamma)=g(f\gamma)=\mathrm{Hom}_R(U,g)(f\gamma)=\mathrm{Hom}_R(U,g)\mathrm{Hom}_R(U,f)(\gamma).$$

所以欲证结论成立. 所以$\mathrm{Hom}_R(U,-)$是共变函子.

(iv)加法: 对任意$\forall {}_RM \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} {}_RN$与$\gamma:{}_RM\to{}_RN$, 有

$$\mathrm{Hom}_R(U,f_1+f_2)(\gamma)=f_1\gamma+f_2\gamma=\Big[\mathrm{Hom}_R(U,f_1)+\mathrm{Hom}_R(U,f_2)\Big]\gamma.$$

所以$\mathrm{Hom}_R(U,f_1+f_2)=\mathrm{Hom}_R(U,f_1)+\mathrm{Hom}_R(U,f_2)$, 即$\mathrm{Hom}_R(U,-)$是加法函子. □

**注:** 反变函子的情形就是定义$\mathrm{Hom}_R(N,U)\to\mathrm{Hom}_R(M,U)$的映射: $\mathrm{Hom}_R(f,U)(\gamma)=\gamma f$, 证明过程类似.

下面这个分解定理会用到很多次, 见GTM13的定理3.6.

**定理: (Factor Theorem)**

(1)设有下图:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & N \arrow[dl, dotted, "\exists\gamma"] \\ U & \end{tikzcd}$$

若$g$是满射且$\mathrm{Ker}\,g\subseteq\mathrm{Ker}\,\beta$, 则存在$\gamma:N\to U$, 使得$\beta=\gamma g$.

(2)设有下图:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, dotted, "\exists\gamma"'] \arrow[d, "\beta"] \\ M \arrow[r, tail, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

$g$是单的, 且$\mathrm{Im}\,g\supset\mathrm{Im}\,\beta$, 则$\exists\gamma:U\to M$使得$\beta=g\gamma$.

**证明:** 见下面的定理1.6的步骤. □

**定理 1.6**

对任意${}_RU$, $\mathrm{Hom}_R(U,-)$与$\mathrm{Hom}_R(-,U)$都是左正合函子.

**证明:** 只看第2个(另一个可以作为练习). 只需要证$(-)^* \triangleq \mathrm{Hom}_R(-,U)$是左正合函子. 对偶地, $\mathrm{Hom}_R(U,-)$也是左正合函子.

本定理结论中, 只需要证明: <u>若$K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$是左$R$-模正合列, 则</u>

$$0 \longrightarrow N^* \xrightarrow{g^*} M^* \xrightarrow{f^*} K^*$$

<u>是正合的.</u>

(i)$g^*$是单的: 设$\gamma \in N^*$使得$0 = g^*(\gamma) = \mathrm{Hom}_R(g,U)(\gamma) = \gamma g$, 由于$g$满, 则$\gamma = 0$.

(ii)下证$\mathrm{Im}\, g^* = \mathrm{Ker}\, f^*$. 一方面, 由于

$$f^* g^* \xlongequal{\text{定理1.5(2)}} (gf)^* \xlongequal{gf=0} 0,$$

则$\mathrm{Im}\, g^* \leq \mathrm{Ker}\, f^*$. 另一方面, 我们要证"$\geq$". 设$\beta \in \mathrm{Ker}\, f^*$, 则$0 = f^*(\beta) = \beta f$, 从而$\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, \beta$.（注意： $\beta \in \mathrm{Im}\, g^* \Leftrightarrow \exists \gamma \in N^*, \beta = g^*(\gamma) = \gamma g$．）

我们希望证明

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & N \arrow[dl, dotted, "\exists\gamma"] \\ U & \end{tikzcd}$$

设$y \in N$, 则存在$x \in M$使得$y = g(x)$. 定义$\gamma: N \to U$为$\gamma(y) = \beta(x)$, 先说明$\gamma$是良好定义的: 设$x_1, x_2 \in M$, 使得$y = g(x_1) = g(x_2)$, 要证$\beta(x_1) = \beta(x_2)$. 事实上,

$$g(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}\, g \subseteq \mathrm{Ker}\, \beta \Rightarrow \beta(x_1) = \beta(x_2).$$

再说明$\gamma$是同态. 设$y_1, y_2 \in N$. 则存在$x_1, x_2 \in M$使得$y_1 = g(x_1), y_2 = g(x_2)$, 所以对任意$r_1, r_2 \in R$, 有

$$r_1 y_1 + r_2 y_2 = r_1 g(x_1) + r_2 g(x_2) = g(r_1 x_1 + r_2 x_2).\text{(注意}g\text{是同态)}$$

而且

$$\gamma(r_1 y_1 + r_2 y_2) = \beta(r_1 x_1 + r_2 x_2) = r_1 \beta(x_1) + r_2 \beta(x_2) = r_1 \gamma(x_1) + r_2 \gamma(x_2).$$

因此$\gamma$是左$R$-模同态.

显然$\gamma$使得上图可交换, 即$\beta = \gamma g = g^*(\gamma) \subseteq \mathrm{Im}\, g^*$, 因此$\mathrm{Ker}\, f^* \subseteq \mathrm{Im}\, g^*$. □

**例 1.1.5** 一般地, $\mathrm{Hom}_R(U,-)$与$\mathrm{Hom}_R(-,U)$都不是右正合的. 反例都可以在$Abel$群、$\mathbb{Z}$模正合列中考虑. 举反例时通常利用$f(\overline{n}) = f(\overline{0}) = 0$.

**答:** 考虑$\mathbb{Z}$模正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

(1)取$U = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} (n \geq 2)$, 由定理1.6,

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \beta)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}_{\text{只需说明它不是满射}}$$

是正合的.

设$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$使得$f(\bar{1}) = q$, 于是

$$0 = f(\bar{0}) = f(\bar{n}) = f(n \cdot \bar{1}) = nf(\bar{1}) = nq,$$

所以$q = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = 0$.（进一步有$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$，但与这个例子没关系）

下证$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$. 定义$g : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$为$g(\bar{r}) = \dfrac{r}{n} + \mathbb{Z}$, 则$g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

所以$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \beta)$不是满的, 从而$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, -)$不是右正合的.

(2)再取$U = \mathbb{Z}$, 由定理1.6,

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\alpha,\mathbb{Z})} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{\text{只需证明它不是满射}}$$

是正合的.

由于$1_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, 所以$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \neq 0$. 设$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$并且$f(m/n) = r$(其中$(m, n) = 1$, 且$f(1) = s$), 下证$f = 0$. 注意

$$nr = nf(m/n) = f(n \cdot m/n) = f(m) = mf(1) = ms,$$

由于$(m, n) = 1$, 则$n|s$对无数个$n$都成立, 所以$s = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow f = 0$, 所以$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$.（进一步有$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$，但与这个例子没关系）

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \neq 0$, 因为有恒等同态$1_{\mathbb{Z}}$.

于是$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\alpha, \mathbb{Z})$是不满的, 因此$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$不是右正合的.

**注:** (1)$\mathrm{Hom}_R(M, N)$一定非空, 因为有零同态, 即$0 \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$.

(2)由命题1.13, $\mathrm{Hom}_R(U, -)$是正合函子的充分必要条件是$U$为投射模.

(3)由命题1.18, $\mathrm{Hom}_R(-, U)$是正合函子的充分必要条件是$U$为内射模.

(4)$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$是因为如果$0 \to M \to 0$ 是正合列, 则必有$M = 0$.

### 1.1.3 补充内容：分裂满同态与分裂单同态的定义

**引理**

若$f : M \to N$与$f' : N \to M$是同态, $ff' = 1_N$, 则$f$满, $f'$单, 且$M = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f'$.

**证明:** 只证明第二部分. 若$x = f'(y) \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f'$, 则$0 = f(x) = ff'(y) = y$, 从而$x = f'(y) = 0$. 若$x \in M$, 则$f(x - f'f(x)) = f(x) - f(x) = 0$, 所以$x = (x - f'f(x)) + f'f(x) \in \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f'$. □

**定义**

若$f : M \to N$与$f' : N \to M$是同态, $ff' = 1_N$, 我们称$f$是**分裂满同态**, $f'$是**分裂单同态**.

### 1.1.4 补充内容：图追踪与Five Lemma

**例 1.1.6** 考虑如下交换图，每一行都是正合列：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed, "f"'] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & A'' \arrow[d, "h"'] \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "j"'] & B \arrow[r, "q"'] & B''
\end{tikzcd}$$

则存在唯一的映射$f: A' \to B'$使得上图可交换. 另外, 若$f, g$都是同构, 则$h$也是同构.

**证明:** (1)设$a' \in A'$, 由于$qgi(a') = hpi(a') = 0$, 所以$gi(a') \in \operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} j$, 故存在$b' \in B'$使得$j(b') = gi(a')$. 下面定义$f$为$f(a') = b'$.

下面验证$f$定义合理, 即当$a_1' = a_2'$时, 记$f(a_1') = b_1', f(a_2') = b_2'$, 则$b_1' = b_2'$. 事实上, 当$a_1' = a_2'$时, $a_1' - a_2' = 0$, 所以$gi(a_1' - a_2') = 0$, 即$j(b_1') = j(b_2')$. 由于$j$是单同态, 故$b_1' = b_2'$, 所以$f$定义合理.

下证唯一性. 若存在另外的$f'$使得$jf' = gi$, 则对任意$a' \in A'$, $jf'(a') = gi(a') = jf(a')$. 由$j$是单同态, 故$f'(a') = f(a')$, 故$f' = f$.

(2)下证$f$是同构. 我们构造逆如下: 由前面的推导, 存在映射$f'$使得下图可交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "j"] \arrow[d, dashed, "f'"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g^{-1}"'] & B'' \arrow[d, "h^{-1}"'] \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"'] & A \arrow[r, "p"'] & A''
\end{tikzcd}$$

我们证明$f' = f^{-1}$. 由于$if' = g^{-1}j$, 故

$$if'f = g^{-1}jf = g^{-1}gi = i,$$

由$i$是单射, 则$f'f = 1_{A'}$. 类似可证$ff' = 1_{B'}$. 所以$f$是同构. □

**例 1.1.7** 考虑如下交换图，每一行都是正合列：

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"'] & 0 \\
B' \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "q"] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

则存在唯一的映射$h: A'' \to B''$使得上图可交换. 另外, 若$f, g$都是同构, 则$h$也是同构.

**证明:** (i)若$a'' \in A''$, 由$p$是满射, 故存在$a \in A$使得$p(a) = a''$. 定义

$$h(a'') = qg(a).$$

我们要验证$h$定义良好, 即如果$p(u) = a''$, 则$qg(u) = qg(a)$.

由于$p(a) = p(u)$, 则$p(a - u) = 0$, 故$a - u \in \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} i$. 所以存在$a' \in A'$使得$a - u = i(a')$, 因此

$$qg(a - u) = qgi(a') = qjf(a') = 0.$$

这是因为$qj=0$. 所以$h$定义良好.

若有另外的$h':A''\to B''$使得$h'p=qg$, 对任意的$a''\in A''$, 取$a\in A$使得$p(a)=a''$, 则$h'p(a)=h'(a'')=qga=h(a'')$, 所以$h$是唯一的.

(ii)下证$h$是同构, 我们构造逆如下: 由前面的推导, 存在映射$h'$使得下图可交换:

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f^{-1}"] & B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g^{-1}"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h'"'] & 0 \\
A' \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "p"] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

我们证明$h'=h^{-1}$. 由于$h'q=pg^{-1}$, 故

$$h'hp=h'qg=pg^{-1}g=p,$$

由$p$是满射, 则$h'h=1_{A''}$. 类似可证$hh'=1_{B''}$. 所以$h$是同构. □

**注:** 上面的证明方法叫**图追踪(diagram chase)**, 在每一步, 我们都只有两件事情可以做, 要么是“push it along an arrow”, 要么是“lift it(i.e. choose an inverse image) back along another arrow”.

利用图追踪, 还可以证明如下的**Five Lemma**:

**引理: Five Lemma**

考虑如下交换图, 每一行都是正合列:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "h_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"'] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "h_4"'] & A_5 \arrow[d, "h_5"'] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

(1)若$h_2,h_4$是满同态, $h_5$是单同态, 则$h_3$是满同态.

(2)若$h_2,h_4$是单同态, $h_1$是满同态, 则$h_3$是单同态.

(3)若$h_1,h_2,h_4,h_5$都是同构(或者只需$h_1$是满同态, $h_5$是单同态), 则$h_3$也是同构.

**例 1.1.8 (Short Five Lemma)** *考虑下面的交换图:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "h"'] & N \arrow[r, "k"'] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

*每一行都是正合列. 证明如果$u,v,w$的其中两个是同构, 那么第三个也是同构.*

## 练习题 1.1

1. 判断题:

   (1)设$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3$和$0 \longrightarrow M_3 \xrightarrow{f_3} M_4$均是左$R$-模正合列, 则$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_3 f_2} M_4$是正合的.

   (2)设$R$是环且$N$是左$R$-模$M$的一个子模, 如果作为左$R$-模, $N \cong M$, 则$N = M$.

   (3)设${}_RK < {}_RM < {}_RN$且$M \cong N$. 则作为左$R$-模, $M/K \cong N/K$.

   (4)对任意$n \geq 2$, 有$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = 0 = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

   (5)设$R$是环. 若$M$是非零左$R$-模, 则$\mathrm{Hom}_R(M, R)$是非零右$R$-模.

   (6)设$R$是环. 若$M$是非零左$R$-模, 则$\mathrm{Hom}_R(R, M)$是非零左$R$-模.

2. 设$0 \to A \to B \to C \to 0$是左$R$-模短正合列, 若$M$是任意左$R$-模, 证明存在如下的正合列:

$$0 \longrightarrow A \oplus M \longrightarrow B \oplus M \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

与

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \oplus M \longrightarrow C \oplus M \longrightarrow 0$$

3. (1)若 $0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 是正合列, 证明$M = 0$.

   (2)若 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ 是正合列, 证明$f$满$\Leftrightarrow$ $h$单.

   (3)若 $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{\delta} E$ 是正合列, 若$\alpha, \delta$是同构, 证明$C = 0$.

4. 设$R, S$是环, $M$是$R-S-$双模. 定义环$T = R \oplus S$, 证明如果定义

$$(r, s)x = rx, x(r, s) = xs, \qquad (r, s) \in R \oplus S, x \in M,$$

   那么$M$成为一个$T-T-$双模.

5. 若$M$是有限循环$\mathbb{Z}$-模, 证明存在短正合列 $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$

6. (1)证明存在$\mathbb{Z}$-模正合列 $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$

   (2)证明存在$\mathbb{Z}$-模正合列 $\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \cdots$

7. 设$R$是环, $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$是$R$-模序列. 证明这是个正合列的充分必要条件是存在如下交换图, 其中“对角”的$R$-模序列都是正合列.

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[dr] & & 0 \\
& & & N \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
M' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & M \arrow[ur] \arrow[rr, "g"'] & & M'' \\
& K \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

8. 设$m, n \geq 2$. 求: (1)$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$; (2)$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$; (3)$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$; (4)$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$; (5)$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$; (6)$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$; (7)$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$; (8)$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$.

9. 设$R$是环, $f : A \to B$和$g : B \to C$均是左$R$-模同态, 且$gf = 0$. 证明: 如果对任意满足$hf = 0$的左$R$-模同态$h : B \to D$, 存在单同态$\xi \in \mathrm{Hom}_R(C, D)$, 使得$h = \xi g$, 则

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

是正合列.

10. 设$R$是环, $f : A \to B$和$g : B \to C$均是左$R$-模同态, 且$gf = 0$. 证明: 如果对任意满足$gh = 0$的左$R$-模同态$h : X \to B$, 存在满同态$\sigma \in \mathrm{Hom}_R(X, A)$, 使得$h = f\sigma$, 则

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

是正合列.

11. 利用Hom函子的左正合性质证明: 若$G$是Abel群, 则$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \cong G[n]$, 其中$G[n] = \{g \in G | ng = 0\}$.

12. 设$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$是$R-\mathbf{Mod}$正合列. $f$满足性质: 若$f = f_2 f_1$, 则$f_1$是分裂单同态或$f_2$是分裂满同态. 证明: 对任意$R-\mathbf{Mod}$同态$v : V \to N$, 要么存在$R-\mathbf{Mod}$同态$v_1 : V \to M$, 使得$v = gv_1$; 要么存在$v_2 : M \to V$, 使得$g = vv_2$.

13. (1)若$C$是循环群, 证明$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, C) = 0$.
(2)设$R$是交换环, 若$M$是$R$-模, 且对任意非零理想$I$, 有$\mathrm{Hom}_R(M, R/I) = 0$, 证明对任意$R$-模同态$f : M \to R$, 有$\mathrm{Im}\, f \subseteq \bigcap_{0 \leq I \lhd R} I$.
(3)设$R$是整环, $M$是$R$-模, 且对任意非零理想$I$, 有$\mathrm{Hom}_R(M, R/I) = 0$, 证明: $\mathrm{Hom}_R(M, R) = 0$.
**提示：**任意$r \in \bigcap_{I \neq 0} I$都是幂零元, 即存在正整数$n$使得$r^n = 0$.

14. 考虑下面的交换图:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "h"'] & N \arrow[r, "k"'] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

每一行都是正合列. 假设$v$是同构. 证明：$u$是单同态, $w$是满同态, 且$u$满$\Leftrightarrow$ $w$单.

15. 考虑下面的交换图:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "h"'] & B \arrow[r, "k"'] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

其中$u, v, w$都是同构. 证明: 第二行是正合列当且仅当第一行是正合列.

16. ($3\times 3$**引理**)考虑下面的左$R$-模交换图, 其中每列都是$R-\mathbf{Mod}$正合列.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

证明:

(1)若第二、三行是正合列, 则第一行是正合列.

(2)若第一、二行是正合列, 则第三行是正合列.

17. 考虑下面的左$R$-模交换图, 其中每行、每列都是$R-\mathbf{Mod}$正合列.

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
B' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
C' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

证明:

(1)若$A''\to B''$与$B'\to B$是单射, 则$C'\to C$是单射. 类似地, 若$C'\to C$与$A'\to B$是单射, 则$A''\to B''$是单射.

(2)若第三列和第二行是短正合列, 则第三行是短正合列. 类似地, 若第三行和第二列是短正合列, 则第三列是短正合列.

18. 考虑如下交换图, 每一行都是正合列:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "h_2"'] & A_3 \arrow[r] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "h_4"'] & A_5 \arrow[d, "h_5"'] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

举例说明即使$h_1,h_2,h_4,h_5$都是同构, 也可能不存在$h_3:A_3\to B_3$使得上图可交换.

## §1.2 Noether模与Artin模

这里Noether与Artin分别指E.Noether与E.Artin.

**定义: (Noether模与Artin模)**

称$M$为**Noether模**, 若$M$满足**升链条件(ascending condition)**, 即不存在$M$的子模的无限严格升链$M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq M_3 \cdots$.

称$M$为**Artin模**, 若$M$满足**降链条件(descending condition)**, 即不存在$M$的子模的无限严格降链$M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq M_3 \cdots$.

**注:** 即Noether模与Artin模最终都会有$M_n = M_{n+1} = \cdots$.

**定义**

左$R$-模$M$的非空子集族$\mathcal{P}$中, 把$P \in \mathcal{P}$叫**极大元(maximal element)**, 如果$N \in \mathcal{P}$, 满足$N \supseteq P$, 则$N = P$. 把$P \in \mathcal{P}$叫**极小元(minimal element)**, 如果$N \in \mathcal{P}$, 满足$N \subseteq P$, 则$N = P$.

**命题 1.7: Noether模的刻画**

对任意左$R$-模$M$, $M$是Noether模$\Leftrightarrow$ $M$的任意非空子模集都有极大元(**极大条件**).

**证明:** “$\Rightarrow$”: 设$\mathcal{P} = \{M_i | i \in I\}$是非空子模集, 若$\mathcal{P}$没有极大元, 则$\mathcal{P}$有无限严格升链. 这与$M$为Noether模矛盾.

“$\Leftarrow$”: 任一$M$的子模升链$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \cdots$中, $\{M_i | i \in \mathbb{Z}^+\}$有极大元$M_p$, 所以当$n \geq p$时$M_n = M_p$, 故$M$是Noether模. □

**命题 1.8: Artin模的刻画**

对任意左$R$-模$M$, $M$是Artin模$\Leftrightarrow$ $M$的任意非空子模集都有极小元(**极小条件**).

**证明:** 与前面命题类似. □

下面我们来举四个例子, 来说明Artin模与非Artin模、Noether模与非Noether模的存在性. 注意$\mathbb{Z}$是主理想整环, 其理想形如$n\mathbb{Z} \triangleq (n)$.

**例 1.2.1** *(1)有限Abel群既是Noether $\mathbb{Z}$-模, 又是Artin $\mathbb{Z}$-模.*

*(2)作为$\mathbb{Z}$模, $\mathbb{Z}$是Noether模但不是Artin模.*

*(3)设$p$是素数, 令$P = \left\{\frac{m}{p^i} \middle| m \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{Z}^+\right\}$. 则$P$不是Artin模也不是Noether模.*

*(4)接(3), **Prüfer群**$P/\mathbb{Z}$是Artin模但不是Noether模.*

**证明:** (2)注意$(n) \leq (m) \Rightarrow m|n$, 于是$(2) \gneqq (2^2) \gneqq \cdots \gneqq (2^n) \gneqq \cdots$, 不满足降链条件.

(3)注意$P <_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$,

$$P_i = \left\{\frac{m}{p^i} \middle| m \in \mathbb{Z}\right\}, i \in \mathbb{Z}^+.$$

那么$\mathbb{Z} \lneqq P_1 \lneqq P_2 \lneqq \cdots$ 是$P$的所有包含$\mathbb{Z}$的子模. 这是因为: 取$\frac{m}{p^i} \in M, (m,p) = 1$, 则$\frac{1}{p^i} \in M$, 取$i$是其中的最大者, 则$M = P_i(\exists i)$. 于是$P$不是Noether模. 由于$\mathbb{Z}$不满足降链条件, 那么$P$更加不满足, 所以$P$不是Artin模.

(4)注意$0 \subsetneq P_1/\mathbb{Z} \subsetneq P_2/\mathbb{Z} \subsetneq \cdots$. (任何一个子模的降链一定是有限的). □

接下来看Noether模与Artin模的判别方法.

易知**Noether模(Artin模)的真子模与商模都是Noether模(Artin模)**, 那反过来呢? 下面证明其实反过来也成立(但证明不平凡), 即若一个模的真子模与非零商模都是Noether模(Artin模), 则该模也是Noether模(Artin模). 事实上还可以证明更强的结论: 只要一个模的其中一个真子模与对应的商模是Noether模(Artin模), 则该模也是Noether模(Artin模).

**引理**

$N, P_1, P_2 < {}_RM$且$P_1 \supset P_2$, 若$N + P_1 = N + P_2$且$N \cap P_1 = N \cap P_2$, 则$P_1 = P_2$.

**证明:** 令$z_1 \in P_1$, 则$z_1 \in N+P_1 = N+P_2$, 故$z_1 = y+z_2, y \in N, z_2 \in P_2 \subset P_1$. 于是$y \in z_1-z_2 \in P_1$, 从而$y \in P_1 \cap N = P_2 \cap N$, 所以$y \in P_2$, 从而$z_1 = y + z_2 \in P_2$. 于是$P_1 \subset P_2$, 从而$P_1 = P_2$. □

**例 1.2.2** *引理中"$P_1 \supset P_2$"条件不可去掉. 例如: 考虑$M = \mathbb{R}^2, N = x$轴, $P_1 = y$轴, $P_2 = \{(x, x)|x \in \mathbb{R}\}$. 则所有条件都满足, 但$P_1 \neq P_2$.*

**定理 1.9**

设${}_RM$的子模$N$与$M/N$都是Noether模(Artin模), 则$M$也是Noether模(Artin模).

**证明:** 只证明Artin模的情形. 设$N(< {}_RM)$与$M/N$都是Artin模, 并且$P_1 \supset P_2 \supset \cdots$ 是$M$的子模降链, 则$N \cap P_1 \supsetneqq N \cap P_2 \supsetneqq \cdots$是$N$的子模降链, 于是存在$k$使得

$$N \cap P_k = N \cap P_{k+1} = \cdots.$$

而$M/N$的子模必定形如$M_1/N(N \leq M_1 < M)$, 而$(N + P_1)/N \supseteq (N + P_2)/N \supset \cdots$是子模降链, 所以存在$l$使得$(N + P_l)/N = (N + P_{l+1})/N = \cdots$, 所以

$$N + P_l = N + P_{l+1} = \cdots.$$

令$n = \max\{k, l\}$, 根据引理可知$P_n = P_{n+1} = \cdots$, 所以$M$是Artin模. □

**定理 1.10**

(1)设$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ 是左$R$-模正合列, 则$M$是Noether模(Artin模)$\Leftrightarrow$ $K, N$是Noether模(Artin模).

(2)设$M_1, M_2 < {}_RM$, TFAE:

(2.1)$M_1, M_2$是Noether模(Artin模).

(2.2)$M_1 + M_2$是Noether模(Artin模).

(2.3)$M_1 \oplus M_2$是Noether模(Artin模).

(3)设$M_1, M_2, \cdots, M_n < {}_RM$, 则TFAE:

(3.1)$M_1, \cdots, M_n$是Noether模(Artin模).

(3.2)$\sum\limits_{i=1}^{n} M_i$是Noether模(Artin模).

(3.3)$\bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_i$是Noether模(Artin模).

**证明:** (1) "$\Rightarrow$": 显然. "$\Leftarrow$": 由同态基本定理, $K \cong \mathrm{Im}\, f, N \cong M/\mathrm{Im}\, f$, 再用前一定理即可.

(2)注意有正合列: (这里直和中的矩阵的定义可以回顾第0章)

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\binom{1_{M_1}}{0}} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{(0,1_{M_2})} M_2 \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 + M_2 \longrightarrow (M_1 + M_2)/M_1 \longrightarrow 0$$

注意由第一同构定理, $(M_1 + M_2)/M_1 \cong M_2/(M_1 \cap M_2)$, 根据前一定理可知这是Noether模. 再用(1)即可得欲证结论. □

**定义: (Noether环与Artin环)**

称环$R$是**左Noether(Artin)环**, 若${}_RR$是Noether(Artin)模.

对称地, 可以定义右Noether(Artin)环.

**注:** 左(右)Artin环是左(右)Noether环, 证明见GTM13的推论15.21.

**定理 1.11**

设$R$是左Noether(Artin)环, $M$是有限生成的左$R$-模, 则$M$是Noether(Artin)模.

**证明:** 不妨设$M = Rx_1 + \cdots + Rx_n$, 因为${}_RR \to Rx_i, r \mapsto rx_i$是满的左$R$-模同态($\forall 1 \leq i \leq n$), 则所有$Rx_i$都是Noether(Artin)模. 由前一定理的(3), $M = Rx_1 + \cdots + Rx_n$也是Noether(Artin)模. □

**注:** 定理表明Noether(Artin)环的有限生成模同时为Noether模与Artin模.

注意到除环仅有的左(右)理想是0与本身, 所以除环是左、右Noether环也是左、右Artin环. 由这个定理可知

**推论**

除环的有限维向量空间既是Noether模又是Artin模.

(另一种叙述: 设$M$是除环上的线性空间, 若$M$是有限生成的, 则$M$既是Noether模, 也是Artin模. )

## 练习题 1.2

1. 判断下列命题的正误:
   (1)设$N$是左$R$-模$M$的子模, 若$N$和$M/N$均是Noether模, 则$M$的任意子模都是Noether模.
   (2)设$R$是环且$M$是一个左$R$-模, 如果$M$不是Artin的, 则$M$的任意非零商模也不是Artin的.
   (3)作为$\mathbb{Z}$-模, $\mathbb{Z}\oplus P/\mathbb{Z}$既不是Noether模, 也不是Artin模, 其中$P=\left\{\dfrac{m}{p^i}\middle| m\in\mathbb{Z}, i\in\mathbb{Z}\right\}$.
   (4)设$R$是主理想整环, 则$R$的分式域是Noether $R$-模.

2. 设$R$是环且$f$是Noether左$R$-模$M$的一个自同态, 证明:
   (1)存在$n$, 使得$\operatorname{Im} f^n\cap\ker f^n=0$;
   (2)$f$是自同构当且仅当$f$是满的.

3. 设$R$是环且$f$是Artin左$R$-模$M$的一个自同态, 证明:
   (1)存在正整数$n$, 使得$\operatorname{Im} f^n+\ker f^n=M$;
   (2)$f$是自同构当且仅当$f$是单的.

4. 证明: 若${}_RM$是Artin模或者Noether模, 且$m,n\in\mathbb{N}$满足$M^{(m)}\cong M^{(n)}$, 则$m=n$. **提示:** 用前两题的(1)小问.

5. 若环$R$存在理想$I$使得$R/I$是左Noether环或左Artin环, 证明$R$是IBN环.

6. 证明: $M$是Noether模当且仅当$M$的每个子模都是有限生成的.

7. **(Small)**环$R=\begin{pmatrix}\mathbb{Z} & \mathbb{Q}\\ 0 & \mathbb{Q}\end{pmatrix}$是右Noether环, 但不是左Noether环.

8. 设$R$是环, $M,N$是$R$-模, $N<M$, 并且有满同态$f:N\to M$. 证明: 若$N$是Noether模, 则$f$是同构.

## § 1.3 投射模

自由模有如下性质:

**性质 1.3.1** 设$F$是以$X=\{x_i|i\in I\}$为基的自由左$R$-模, 则$F\cong R^{(X)}(\cong R^{(I)})$.

**证明:** 记$e_{x_i}=(\delta_{x_ix_j}\cdot 1_R),\forall x_i\in X$, (或写$e_i=(\delta_{ij}\cdot 1_R),\forall i\in I$), 则$\{e_{x_i}|x_i\in X\}$是$R^{(x_i)}$的一组基. 易知$F\to R^{(X)},\sum\limits_{<\infty}r_ix_i\mapsto\sum\limits_{<\infty}r_ie_{x_i}$是左$R$-模同构. □

**性质 1.3.2** 任意模都是某个自由模的同态像.

**证明:** 设${}_RM=\{x_i|i\in I\}$, 则$R^{(M)}\to M,\sum\limits_{<\infty}r_ie_{x_i}\mapsto\sum\limits_{<\infty}r_ix_i$是满的左$R$-模同态. □

**性质 1.3.3** 设$F$是以$X=\{x_i|i\in I\}$为基的自由左$R$-模. 考虑下图[①].

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "\exists g"'] \\ M \arrow[r, two heads, "\pi"'] & N \end{tikzcd}$$

由于$\pi$满, 则对任意$x_i$, 存在$u_i\in M,f(x_i)=\pi(u_i)$, 注意这里$u_i$不唯一, 定义$g:F\to M$为$g\Big(\sum\limits_{<\infty}r_ix_i\Big)=\sum\limits_{<\infty}r_iu_i$, 则$g$是左$R$-模同态且使上图可交换, 即$f=\pi g$. 把此性质叫$f$**可“提升”为**$g$.

**定义 1.12**

把${}_RP$叫**投射模(projective module)**, 若形如下图的图

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, two heads, "\pi"'] & N \end{tikzcd}$$

可以补为交换图, 即任意$M\xrightarrow{\pi}\!\!\!\!\rightarrow N$ 与任意$P\xrightarrow{f}N$, 都存在$g:P\to M$使得$f=\pi g$.

**注:** 根据定义, 自由模是投射模. [②]

**命题 1.13**

左$R$-模$P$是投射的$\Leftrightarrow\mathrm{Hom}_R(P,-)$是正合函子.

**证明:** “$\Rightarrow$”: 设$0\longrightarrow K\xrightarrow{i}M\xrightarrow{\pi}N\longrightarrow 0$ 是左$R$-模正合列. 由定理1.6,

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(P,K)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(P,i)}\mathrm{Hom}_R(P,M)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(P,\pi)}\mathrm{Hom}_R(P,N)$$

是正合的. 由于$P$是投射的, 则对任意$f\in\mathrm{Hom}_R(P,N)$, 存在$g\in\mathrm{Hom}_R(P,M)$使得

$$f=\pi g=\mathrm{Hom}_R(P,\pi)(g).$$

[①]交换图没有本质意义, 但方便分析问题.

[②]在这之前, 我们引入新概念的方法都是: (1)把定义的条件放宽, 例如域作用在线性空间变成环作用在线性空间得到模; (2)把性质抽象出来.

因此$\mathrm{Hom}_R(P,\pi)$是满的.

"⇐": 考虑下图:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, two heads, "\pi"'] & N \end{tikzcd}$$

我们有短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\pi \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0.$$

由已知, $\mathrm{Hom}_R(P,\pi)$是满的, 所以存在$g \in \mathrm{Hom}_R(P,M)$使得

$$f = \mathrm{Hom}_R(P,\pi)(g) = \pi g,$$

即$g$可以使得上图可交换. 所以$P$是投射模. □

**命题 1.14**

设$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \longrightarrow 0$是左$R$-模正合列. 则

"$\exists i' : M'' \to M$使得$pi' = 1_{M''}$" 等价于 "$\exists p' : M \to M'$使得$p'i = 1_{M'}$".

在此条件下, 称如上正合列是**分裂的(split)**, 此时有$M \cong M' \oplus M''$.

**注:** 这个定理是说"存在$p'$为$M$到$M'$的同态"等价于"存在$i'$为$M''$到$M$的同态". 最自然的想法是考虑下图:

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[dl, dotted, "\exists p'"'] \arrow[d, "1_M"] & & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "p"] & M'' \arrow[r] \arrow[l, bend left, dotted, "i'"] & 0 \end{tikzcd}$$

于是$iP' = 1_M$, 但是这样会得到同构, 不太好证明. 改为

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[dl, dotted, "\exists p'"'] \arrow[d, "1_M - i'p"] & & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "p"] & M'' \arrow[r] \arrow[l, bend left, dotted, "i'"] & 0 \end{tikzcd}$$

在$M$中找$x$, 在$M'$中找$x'$对应起来就好.

**证明:** (1) "⇒": 由于$p(1_M - i'p) = p - (pi')p = p - p = 0$, 则$\mathrm{Im}\,(1_M - i'p) \subseteq \mathrm{Ker}\,p = \mathrm{Im}\,i$. (此处便证明了Factor Theorem的第二条) 则对任意$x \in M$, 存在$x' \in M'$, 使得

$$(1_M - i'p)(x) = ix'.(\text{由于}i\text{是单射, 则此}x'\text{唯一})$$

定义$p' : M \to M'$为$p'(x) = x'$, 易知$p'$是左$R$-模同态且

$$ip' = 1_M - i'p. \tag{1.1}$$

所以$ip'i = (1_M - i'p)i = i - 0 = i$(注意$pi = 0$) [①]. 由于$i$是单射, 所以$p'i = 1_M$(消去一个$i$).

[①]最后一步由(1.1)式左乘$p'$不太好, 得不到$p'i = 1_M$. 我们希望能消掉$p'$, 尽量利用已知条件. 但是$p'$的性质不太清楚,

“$\Leftarrow$”：考虑下图：

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] & M \arrow[l, dotted, bend left, "p'"] \arrow[r, "p"] \arrow[d, "1_M - ip'"'] & M'' \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "\exists i'"] & 0 \\ & & M & & \end{tikzcd}$$

由于$(1_M - ip')i = i - i \cdot 1_{M'} = i - i = 0$, 所以$\mathrm{Ker}\,(1_M - ip') \supseteq \mathrm{Im}\, i = \mathrm{Ker}\, p$. 由Factor Theorem, 存在$i' : M'' \to M$使得

$$i'p = 1_M - ip'. \tag{1.2}$$

所以$pi'p = p(1_M - ip') = p - pip' = p$. 由于$p$是满射, 则$pi' = 1_{M'}$(消去了一个$p$).

(2)回忆命题1.1: $M \cong M_1 \oplus M_2$等价于存在 $\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] & M \arrow[l, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift left, "p_2"] & M_2 \arrow[l, shift left, "\lambda_2"] \end{tikzcd}$, 使得

$$\begin{cases} p_i\lambda_j = \delta_{ij} \cdot 1_{M_j}, (\forall i, j = 1, 2), \\ \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 1_M. \end{cases}$$

前面已证

$$p'i = 1_{M'}, \qquad pi' = 1_{M''}, \qquad pi = 0.$$

考虑下图：

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] & M \arrow[l, dotted, bend left, "p'"] \arrow[r, "p"] & M'' \arrow[l, dotted, bend left, "i'"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

由式(1.1)与(1.2)可知, 总有$i'p + ip' = 1_M$, 因此只需证明$p'i' = 0$. 事实上左乘$p'$可得$p'(i'p + ip') = p' \cdot 1_M$, 因此

$$p'ip + p' \xlongequal{p'i=1} p'i'p + (p'i)p' = p',$$

所以$p'i'p = 0$, 由于$p$是满射, 则$p'i' = 0$. 根据命题1.1(3), 可知$M \cong M' \oplus M''$. □

下面用自由模来刻画投射模. [①]

**定理 1.15**

$\forall_R P$, TFAE:

(1)$P$是投射模;

(2)任意短正合列$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$是分裂的. (任意以$P$为尾项的短正合列都是分裂的)

(3)$P$是某自由模的同态像(也是直和项), 即存在自由模$F$, 使得$F \cong P \oplus P'$, for some $P'$. (事实上，$P'$是投射模.)

**证明：** “(1) $\Rightarrow$ (2)”：设

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$$

是左$R$-模短正合列. 由(1)与命题1.13, $\mathrm{Hom}_R(P, \pi)$是满的. 所以存在$g \in \mathrm{Hom}_R(P, N)$使得

$$1_P = \mathrm{Hom}_R(P, \pi)(g) = \pi g.$$

由命题1.14, 上面的正合列是分裂的.

---

而$i$是单同态是已知条件.

[①] $\forall_R P$是指: 对任意左$R$-模$P$. 不要写“For $\forall_R P$”, $\forall$已经表示For any/For all.

"(2) ⇒ (3)": 由于存在自由模$F$使得有满同态$F \xrightarrow{\pi} P \to 0$, 由(2), $0 \to \operatorname{Ker}\pi \to F \xrightarrow{\pi} P \to 0$是分裂的. 于是由命题1.14, $F \cong P \oplus \operatorname{Ker}\pi$.

"(3) ⇒ (1)": 由(3)与命题1.14可知, 有分裂的正合列$0 \longrightarrow P' \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} P \longrightarrow 0$, 所以存在$i' : P \to F$使得$pi' = 1_P$. 考虑下图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P' \arrow[r, "i"] & F \arrow[r, "p"] \arrow[d, dotted, "\exists g"'] & P \arrow[r] \arrow[l, dotted, bend left, "i'"] \arrow[d, "\forall f"] & 0 \\
& & M \arrow[r, "\forall\pi"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

则存在$g : F \to M$使得$fp = \pi g$, 所以$f = f \cdot 1_P = (fp)i' = \pi(gi')$, 则$P$是投射模. □

**注:** (1)设$f : R \to S$是环同态且$M \in S$-**Mod**, 定义$r \cdot x = f(r)x$, 则$M \in R$-**Mod**, 但反过来左$R$-模不一定是左$S$-模. 特殊情况: 设$I \lhd R$, 则有环同态

$$R \twoheadrightarrow R/I, r \mapsto r + i.$$

再设$M \in R$-**Mod**且$IM = 0$, 定义$(r + I)x = rx$ [1], 则$M \in R/I$-**Mod**.

(2)对任意$n \in \mathbb{Z}^+$, 记$(n) = n\mathbb{Z}$. 设$m, n \geq 2$, 且$(m, n) = 1$, 则

$$\mathbb{Z}/(mn) = (m)/(mn) \oplus (n)/(mn)^{②}$$

这是个$\mathbb{Z}$-模等式, 由(1)可知这也是个$\mathbb{Z}/(mn)$-模等式. 注意到$\mathbb{Z}/(mn)$是自由$\mathbb{Z}/(mn)$-模, 且$|\mathbb{Z}/(mn)| = mn$. 由定理1.15, 可知$(m)/(mn)$与$(n)/(mn)$都是投射$\mathbb{Z}/(mn)$-模, 但是$|(m)/(mn)| = n, |(n)/(mn)| = m$, 所以它们都不是自由$\mathbb{Z}/(mn)$-模.

**引理**

我们有:

(1)有限生成模的同态像是有限生成的.

(2)模$M$是有限生成等价于$M$是某有限生成自由模的同态像.

**证明:** (1)设$N \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$是满的左$R$-模同态, 且$N$有限生成. 不妨设$N = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle$, 对任意$y \in M$, 存在$x \in N$使得$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i)$. 所以$M = \langle f(x_1), \cdots, f(x_n) \rangle$.

(2) "⇐": 由(1)可得; "⇒": 设$M$是有限生成的, $M = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle$. 则存在以$\{e_i : i \in I\}$为基的自由左$R$-模$F$, 使得有满同态$f : F \to M \to 0$. ($F$不一定有限生成), 故对任意$1 \leq i \leq n$, 有$x_i = \sum_{j=1}^{n_i} f(e_{i_j})(n_i < \infty)$, 令$F' = \langle \{e_{i_j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n_i\} \rangle$, 则$F'$是有限生成的自由模, 且$f|_{F'} : F' \to m \to 0$是满同态. □

**定理 1.16**

模$P$是有限生成投射模⇔ $P$是某有限生成自由模的同态像(直和项).

**证明:** 由定理1.15与上面的引理立得. □

---

[1] $IM = 0$的条件很常用. 如果不加$IM = 0$的条件, 不能保证同一个元素映往同一个元素.

[2] 自证, 以前期末考过; $\mathbb{Z}/(mn)$的子模的分母要相同, 例如同构定理: $(M/N)/(M_1/N) \cong M/N_1$, 分母相同才可以作商模.

### 1.3.1 补充内容：PID上的投射模与自由模

**引理**

设$R$是主理想整环, 则$R$上的自由模的子模也是自由模.

参加[Rotman, Theorem 4.13, Corollary 4.15].

**命题**

设$R$是主理想整环, 则$R$上的投射模也是自由模.

**证明:** 设$P$是投射模, 由于$P$是某个自由模的直和项, 当然也是某个自由模的子模, 由引理, $P$也是自由模. $\square$

## 练习题 1.3

1. 判断命题正误:
   (1)设$R$是一个环且$P$是一个有限生成投射左$R$-模, 则$P$是某个有限生成自由左$R$-模的同态像.
   (2)对任意$n \geq 2$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$都不是投射$\mathbb{Z}$-模.
   (3)设$R$是环, $P$是非零投射左$P$-模, 则$\mathrm{Hom}_R(P, R) \neq \{0\}$.

2. 举例说明投射模不一定是自由模.

3. 证明：$\mathbb{Q}$不是投射$\mathbb{Z}$-模.

4. 证明：$\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$是投射$\mathbb{Z}_6$-模.

5. 举例说明投射模的子模不一定是投射模.
   **提示：** 考虑$R = \mathbb{Z}_{p^2}$, $p$是素数. 则$\mathbb{Z}_p \rightarrowtail \mathbb{Z}_{p^2} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p$是短正合列但不是分裂的.

6. 考虑如下交换图
$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "k"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r, "h"'] & Q \end{tikzcd}$$
   其中最下面一行是正合列, $P$是投射模, $hf = 0$. 证明: 存在$k : P \to M$使得$f = gk$.

7. (1)考虑下面的交换图.
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "h"'] & B \arrow[r, "k"'] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
   证明：若$u$是同构, 则序列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\binom{g}{v}} A'' \oplus B \xrightarrow{(w,-k)} B'' \longrightarrow 0$ 是正合列.
   (2)若$w$是同构, 类似(1)写出命题并证明.
   (3)**(Schanuel引理)**若$0 \to N \to P \to A \to 0$与$0 \to M \to Q \to A \to 0$都是正合列, $P, Q$是投射模, 证明$P \oplus M \cong Q \oplus N$.

8. **(Eilenberg)** 证明任意投射左$R$-模$P$都有**自由补(free complement)**, 即存在一个自由左$R$-模$F$使得$P \oplus F$是自由模.
**提示：**若$P \oplus Q$是自由模, 考虑
$$Q \oplus P \oplus Q \oplus P \oplus \cdots.$$

9. 设$P, Q$是投射$R$-模, 证明存在自由$R$-模$F$使得$P \oplus F \cong Q \oplus F$.
**提示：**令$P \oplus P'$和$Q \oplus Q'$是自由模, 定义
$$R = P' \oplus (Q \oplus Q') \oplus (P \oplus P') \oplus \cdots \cong Q' \oplus (P \oplus P') \oplus (Q \oplus Q') \oplus \cdots.$$

10. 设$P$是投射右$R$-模, 且$R$为$P$的直和项. 证明: 若$P \oplus R^m \cong R^n$, $n > m$, 则$P^{m+1}$是自由模.

11. 设$x \in R$, $P = xR$. 证明: $P$是投射右$R$-模当且仅当$x$的右零化子$r_x(R) = \{r \in R | xr = 0\}$形如$eR$, 其中$e \in R$是幂等的, 即$e^2 = e$.

12. (1)设$A, B, C$是主理想整环$R$上的有限生成模, 证明: 若$A \oplus C \cong B \oplus C$, 则$A \cong B$.
(2)举反例说明去掉“有限生成”的条件后, 上述结论不成立.
(3)举反例说明去掉“主理想整环”的条件后, 上述结论不成立.

13. 设$i : P \to M$是嵌入同态, $P$是有限生成投射模. 证明: 若$i^* : M^* \to P^*$是满的, 则$P$是$M$的直和项, 其中$(-)^* = \mathrm{Hom}_R(-, R)$.

14. (1)设$\{x_i\}_{i \in I} \subset {}_RF$. 证明: $F$是以$\{x_i\}_{i \in I}$为基的自由模的充分必要条件是: 对于任意的${}_RM$以及$\{y_i\}_{i \in I} \subset M$, 存在唯一的同态$f : F \to M$使得$f(x_i) = y_i (i \in I)$.
(2)证明若${}_RF$是自由模, 则每个满同态$f : M \to F$都是分裂满同态.

15. 设$P$是左$R$-模. 证明**对偶基引理(Dual Basis Lemma)**: $P$是有限生成投射模当且仅当存在$x_1, \cdots, x_n \in P$与$f_1, \cdots, f_n \in \mathrm{Hom}_R(P, R)$, 使得对任意$x \in P$, 有$x = \sum\limits_{i=1}^n f_i(x) x_i$.

## § 1.4 内射模与内射包络

**定义 1.17**

称左$R$-模$Q$是**内射模(injective module)**, 如果形如下图的图均可补为交换图:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, tail, "\forall i"] \arrow[d, "\forall f"'] & M \arrow[dl, dashed, "\exists g"] \\
Q &
\end{tikzcd}$$

即对任意$i : N \rightarrowtail M$和$f : N \to Q$, 存在$g : M \to Q$使得$f = gi$.

为了叙述方便, 把$(M, g)$称为$(N, f)$的一个**开拓**.

**注:** 可以把$i$简化, 总可以限制上述定义中的$N$为$M$的子模, 且$i$是嵌入映射.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr, tail, "i"] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[dd, bend right, "f"'] & & M \arrow[ddll, dotted, bend left, "\exists g"] \\
& \mathrm{Im}\, i \arrow[ur, hook, "\alpha"'] \arrow[ul, dotted, bend left, "\beta^{-1}"] \arrow[dl, dotted, "f\circ\beta^{-1}"] & \\
Q & &
\end{tikzcd}$$

$i = \alpha\beta$, $i$是单射, 从而$\beta$是单射; 而$\beta$是满射, 所以$\beta$同构, 从而有逆映射$\beta^{-1}$.

(一个图中所有小图都交换, 那么大图也交换)

**命题 1.18**

左$R$-模$Q$是内射的$\Leftrightarrow \mathrm{Hom}_R(-, Q)$是正合函子.

**证明:** 与命题1.13完全对偶. □

**定义**

设$P$是集合, 且$\leq$是$P$中元素间的一个二元关系. 称$(P, \leq)$为**偏序集(partially ordered set)**, 如果满足:

(1)若$a \in P$, 则$a \leq a$;

(2)若$a, b, c \in P, a \leq b, b \leq c$, 则$a \leq c$;

(3)若$a, b \in P, a \leq b, b \leq a$, 则$a = b$.

称偏序集$(P, \leq)$是**全序集(totally ordered set)**或**线性集**, 若对任意$a, b \in P$, 都有$a \leq b$或$b \leq a$.

**定义**

设$(P, \leq)$是偏序集, $a \in P$. 若$\forall b \in P$, 由$a \leq b$可推出$b = a$, 则称$a$为$P$的**极大元**. 若$\forall b \in P$, 由$b \leq a$可推出$b = a$, 则称$a$为$P$的**极小元**.

**引理: Zorn引理**

设$(P, \leq)$是非空偏序集, 如果对$P$的任意全序子集$L$, 存在$a \in P$使得$x \leq a, \forall x \in L$, (即有上界), 则$P$必有极大元.

**命题 1.19: Baer准则**

左$R$模$Q$是内射模$\Leftrightarrow$ 对任意$I \overset{左}{\lhd} R$, 以及嵌入同态$i: I \hookrightarrow R$与任意$f: I \to Q$, 存在$g: R \to Q$, 使得$f = gi$, 即形如下图的图均可补成交换图:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\forall f"'] & R \arrow[dl, dashed, "\exists g"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

**证明:** "$\Rightarrow$": 显然. "$\Leftarrow$": 考虑上图. 如果$M = N$, 取$g = f$即可; 若不然, 考虑下图

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook, "\forall i"] \arrow[d, "\forall f"'] & M' < M \arrow[dl, "\exists g"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

把$(M', f)$的含$N$的所有开拓都放在一起, 定义一个偏序, 每个全序集都有上界, 从而有极大元, 只需证极大元就是$N$.

设$N <_R M$, 下证$i: N \hookrightarrow M$且$f: N \to Q$是左$R$-模同态. 令

$$\mathscr{C} = \{(N', f') | N < N' < M \text{且} f' \in \mathrm{Hom}_R(N', Q) \text{是} f \text{的开拓}\},$$

由于$(N, f) \in \mathscr{C}$, 则$\mathscr{C} \neq \varnothing$. 在$\mathscr{C}$中定义$(N', f') \leq (N'', f'')$, 指$N < N' < N'' < M$且$f''$是$f'$的开拓. 易证$(\mathscr{C}, \leq)$是偏序集. 设$\mathscr{L} \triangleq \{(N_\alpha, f_\alpha) | \alpha \in J\}$是$\mathscr{C}$的全序子集, 则$N < N_\alpha \leq \bigcup\limits_{\alpha \in J} N_\alpha < M$.

定义$f_*: \bigcup\limits_{\alpha \in J} N_\alpha \to Q$为: $f_*(x) = f_\alpha(x)$, 其中$\alpha$是使得$x \in N_\alpha$的指标, 则$f_*$是左$R$-模同态, 且$(N, \alpha) < (N_\alpha, f_\alpha) \leq \left(\bigcup\limits_{\alpha \in J} N_\alpha, f_*\right)$ (找到了$\mathscr{L}$的上界), 则$\left(\bigcup\limits_{\alpha \in J} N_\alpha, f_*\right) \in \mathscr{C}$. 由Zorn引理, $(\mathscr{C}, \leq)$有极大元$(N_0, f_0)$.

下证$N_0 = M$. (反证)若$N_0 \neq M$, 存在$x \in M \setminus N_0$, 定义$I = \{r \in R | rx \in N_0\}$, 则$I \overset{左}{\lhd} R$且$I$是非空的($0 \in I$). 定义$\sigma: I \to N_0$为$\sigma(r) = rx$, 则$\sigma$是左$R$-模同态. 令$h = f_0\sigma$, 考虑下图:

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[drr, dotted, bend right, "\exists f_1"'] & N_0 \arrow[l, "\neq"'] \arrow[dr, "f_0"'] & & I \arrow[ll, "\sigma"'] \arrow[r, hook] \arrow[dl, "h"] & R \arrow[dll, dotted, bend left, "\exists h'"] \\ & & Q & & \end{tikzcd}$$

由已知, 存在$h': R \to Q$使得上图中右边三角可交换, 令$N_1 = N_0 + Rx$, 则$N_0 \subsetneqq N_1 < M$. ($N_0$到$N_1$的嵌入不是恒同映射).

(下证存在$f_1: N_1 \to Q$使得$(N_0, f_0) \leq (N_1, f_1)$) 定义$f_1: N_1 \to Q$为$f_1(n_0 + rx) = f_0(n_0) + h'(r)$, 但这里$n_0 + rx$表示方式可能不唯一, 要先证合理性: 只需证明0元素对应0元素. 设$n_0 + rx = 0$, 则$rx = -n_0 \in N_0$, 则$r \in I$, 则

$$\begin{aligned} f(0) = f(n_0 + rx) = f_0(n_0) + h'(r) &\xlongequal{r \in I} f_0(n_0) + h(r) \\ &= f_0(n_0) + f_0\sigma(r) = f_0(n_0 + rx) = f_0(0) = 0. \end{aligned}$$

(注意最后一步$f_0$是同态, 把0映往0). 因此$f_1$定义合理, 故$f_1$是左$R$-模同态, 从而$f_1$可使上图中左边的三角可交换, 因此

$$(N,f)\leq (N_0,f_0)\lneqq (N_1,f_1)\Rightarrow (N_1,f_1)\in\mathscr{C},$$

这与$(N_0,f_0)$是极大元矛盾, 因此$N_0=M$. □

下面, 对任意$r\in R$与$M\in R$-**Mod**, 记$rM=\{rx|x\in M\}$.

**引理 1.20**

设$r\in R$是非零因子(即$rr'\neq 0, r'r\neq 0, \forall r'\in R$), 则对任意$f\in \mathrm{Hom}_R(Rr,M)$, 均可开拓为$g\in\mathrm{Hom}_R(R,M)$的充分必要条件是$rM=M$.

$$\begin{tikzcd} Rr \arrow[r, hook] \arrow[d, "\forall f"'] & R \arrow[dl, "\exists g"] \\ M & \end{tikzcd}$$

**证明:** “$\Rightarrow$”: 反证. 设$rM\neq M$, 则存在$m_0\in M\setminus rM$. 取$f\in\mathrm{Hom}_R(Rr,M)$使得$f(r)=m_0$(由于$r$是非零因子，则$f$定义合理.）由已知,

$$m_0=f(r)=g(r)=g(r\cdot 1_R)=rg(1_R)\in rM$$

(这里把$r$提出来了；另外不能写$rf(1_R)$，因为$f(1_R)$没有意义．）矛盾, 因此$rM=M$.

“$\Leftarrow$”: 设$f\in\mathrm{Hom}_R(Rr,M)$, 不妨设$f(r)=m_0$, 由已知, $rM=M$, 则存在$m_1\in M$使得$m_0=rm_1$. 定义$g:R\to M$为$g(a)=am_1$, 则$g$是左$R$-模同态, 且$f(r)=rm_1=g(r)$, 所以$g$是$f$的开拓. □

由引理1.20可以引入如下概念:

**定义 1.21**

称${}_RM$为**可除模(divisible)**, 如果对$R$的任一非零因子$r$, 总有$rM=M$, 即对任意$m\in M$, 方程$rx=m$在$M$中有解.

**注:** 在[Basic Algebra II]的158页中, 可除模的定义只要求$r$是非零元, 这样的定义不完善. 设$0\neq r,s\in R, rs=0$, 若$M$是可除模, 则$M=rM=r(sM)=(rs)M=0\cdot M=0$. 这是平庸的结果.

**命题 1.22**

对任意环$R$, 内射左$R$-模都是可除模; 反之, 假设$R$是无零因子的环, 且$R$的任意左理想都是左主理想(例如$\mathbb{Z}$), 则可除左$R$-模是内射模.

**证明:** (1)先证明内射模是可除模: 设$Q$是内射模, 考虑$R$的左理想$I=rR$, 嵌入映射$i:I\to R$. 对任意$f:I\to Q$, 由Baer准则, 存在$g:R\to Q$, 使得$f=gi$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "\forall f"'] & R \arrow[dl, dashed, "\exists g"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

由引理1.20, 这等价于$rQ=Q$, 符合可除模的定义, 故$Q$是可除模.

(2)下证如果$R$是主理想整环(无零因子的环, 且$R$的任意左理想都是左主理想), 则可除$R$-模$M$是内射模. 对任意$R$的左理想$I$, 由条件, 存在$r\in R$使得$I=rR$, 考虑嵌入映射$i:I\to R$. 由引理1.20, 对任意$f:I\to M$, 存在$g:R\to M$使得$f=gi$, 由Baer准则, $M$是内射模. □

**例 1.4.1** (1)可除模的商模是可除的，但可除模的子模未必可除．例如可除模${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$的子模${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$不可除．

(2)因为$\mathbb{Q}$与$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$都是可除$\mathbb{Z}$-模，所以根据命题1.22，$\mathbb{Q}$与$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$都是内射$\mathbb{Z}$-模．因为${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$不是可除的，所以${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$不是内射模．(但是${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$是投射模．)

(3)作为(2)的推广，设$D$是$PID$，且$F$是其分式域．则$\forall r \in D, F/rD$是可除$D$-模，从而是内射$D$-模．当$r=0$时，$F/rD = F$；当$r=1$时，$F/rD = F/D$．(对任意$r \in \mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}/r\mathbb{Z}$是内射模)

**引理 1.23**

任意$\mathbb{Z}$-模可嵌入到内射$\mathbb{Z}$-模中.

**证明：** 设$M$是$\mathbb{Z}$-模，它是自由模的同态像，则存在满的$\mathbb{Z}$-模同态$f : \mathbb{Z}^{(J)} \twoheadrightarrow M$，故$M \cong \mathbb{Z}^{(J)}/_{\operatorname{Ker} f} < \mathbb{Q}^{(J)}/_{\operatorname{Ker} f}$．由于$\mathbb{Q}$是可除模，则$\mathbb{Q}^{(J)}/_{\operatorname{Ker} f}$与$\mathbb{Q}^{(J)}$都是可除$\mathbb{Z}$-模．由命题1.22，它们都是内射$\mathbb{Z}$-模． □

**注：** 对一般的环$R$，$R^{(J)}$一般都不是内射模．

**引理 1.24**

设$Q$是内射$\mathbb{Z}$-模，则$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_{\mathbb{Z}}R_R, {}_{\mathbb{Z}}Q)$是内射左$R$-模.

**证明：** 设$I \overset{左}{\lhd} R$，$i : I \hookrightarrow R$(嵌入映射)，且$f \in \operatorname{Hom}_R(I, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q))$．考虑下图：

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dotted, "f'", "(下证)"'] \arrow[ddl, dotted, bend left, "\exists g"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q) \arrow[d, "\varphi"'] & \\
Q &
\end{tikzcd}$$

定义

$$\begin{array}{rccl}
\varphi : & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q) & \to & Q \\
& \sigma & \mapsto & \sigma(1_R), \quad \forall \sigma \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q).
\end{array}$$

则$\varphi$是$\mathbb{Z}$-模同态．由Baer准则，存在$\mathbb{Z}$-模同态$g : R \to Q$使得$gi = \varphi f$.

定义[1]

$$\begin{array}{rccl}
f' : & R & \to & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q) \\
& f'(r_1)(r) & = & g(rr_1),
\end{array}$$

则$f'$是$\mathbb{Z}$-模同态(保持加法)．对任意$r_1, r_2, r \in R$有

$$f'(r_2r_1)(r) = g[r(r_2r_1)] = g[(rr_2)r_1] = f'(r_1)(rr_2) \xlongequal[f'(r_1)\in {}_R[\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_{\mathbb{Z}}R_{\mathbb{R}}, {}_{\mathbb{Z}}Q)]]{\text{命题1.3(1)}} r_2 f'(r_1)(r).$$

(保持环作用)，则$f'$是左$R$-模同态.

下证上图可交换．对任意$x \in I, r \in R$，只需要证像一样：[2]

$$f'i(x)(r) = g(ri(x)) \xlongequal{i\text{是左}R\text{-模同态}} gi(rx) = \varphi f(rx) = f(rx)(1_R) = rf(x)(1_R)$$
$$\xlongequal[f(x)\in {}_R[\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_{\mathbb{Z}}R_{\mathbb{R}}, {}_{\mathbb{Z}}Q)]]{\text{命题1.3(1)}} f(x)(1_R \cdot r) = f(x)r.$$

---

[1]这里不定义$g(r_1r)$，因为$R$是右$R$-模！${}_{\mathbb{Z}}R_R$，所以$r_1$应作用在$r$右边.

[2]最后一步不写$f(x)(r \cdot 1_R)$，因为上面是右$R$-模结构.

所以$f'i=f$, 由Baer准则, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,Q)$是内射左$R$-模. $\square$

**定理 1.25: 嵌入定理**

任意左$R$-模均可嵌入到内射左$R$-模中.

**证明:** 设$M\in R$-$\mathbf{Mod}$, 由引理1.23, 存在单的$\mathbb{Z}$-模同态$i:M\rightarrowtail Q$, 其中$Q$是内射$\mathbb{Z}$-模. 而$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,-)$是左正合函子, 则

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,i):\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,M)\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,Q)$$

是单的左$R$-模同态. 由引理1.24, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,Q)$是内射的左$R$-模.

下面只需证存在单的左$R$-模同态$M\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,M)$. 定义

$$\begin{array}{rcll}\varphi: & M & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,M)\\ \varphi(m)(r) & = & rm, & \forall m\in M, r\in R.\end{array}$$

(构造一定要合理.)则$\varphi$是$\mathbb{Z}$-模同态(保持加法). 对任意$r,r_1\in R, m\in M$都有

$$\varphi(r_1m)(r)=r(r_1m)=(rr_1)m=\varphi(m)(rr_1)\xlongequal[\varphi(m)\in{}_R[\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_{\mathbb{Z}}R_R,{}_{\mathbb{Z}}M)]]{\text{命题1.3(1)}}r_1\varphi(m)(r),$$

因此$\varphi(r_1m)=r_1\varphi(m)$.(保持环作用), 则$\varphi$是左$R$-模同态.

最后验证$\varphi$是单同态. ($\varphi(m)=0\Rightarrow m=0$) 设$m\neq0$, 则$\varphi(m)(1_R)=1_R\cdot m=m\neq0$ [①], 所以$\varphi$是单的. $\square$

**命题 1.26**

左$R$-模$Q$是内射$\Leftrightarrow$任意正合列$0\to Q\to M\to N\to0$是分裂的.

等价地, ${}_RQ$是内射的$\Leftrightarrow$ $Q$是包含$Q$的任意模的直和项. (在同构意义下, 即设$i:Q\rightarrowtail M$, 那么$M\cong Q\oplus K$)

**证明:** “$\Rightarrow$”: 与投射模的情形完全对偶(自己补充).

“$\Leftarrow$”: 由引理1.23, 存在单的左$R$-模同态$i:Q\rightarrowtail M$, 其中$M$是内射左$R$-模. 由已知,

$$0\to Q\xrightarrow{i}M\longrightarrow\mathrm{Coker}i\to0$$

是分裂的, 则存在$p:M\to Q$使得$pi=1_Q$. 设$I\overset{左}{\lhd}R$, 且$f:I\to Q$是左$R$-模同态. 考虑下图:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dotted, "pg"] \arrow[ddl, dotted, bend left, "\exists g"] \\
Q \arrow[d, "i"', shift right] & \\
M \arrow[u, dotted, "p"', shift right] &
\end{tikzcd}$$

存在左$R$-模同态$g:R\to M$使得$if=gj$, 所以$pif=pgj\Rightarrow f=pgj$. 由Baer准则(其实不用也可以), $Q$是内射左$R$-模. $\square$

---

① 我们只把单位元与零元看成常量, 其余$r\in R$都应该看成变量. 要有“合理的安置”.

**定义**

称左$R$-模$N$的子模$M$是**本质的(essential)**或**大的(large)**, 记为$M \trianglelefteq N$, 若$\forall 0 \neq N' < N$, 有$N' \cap M \neq 0$.

称单的左$R$-模同态$i : M \rightarrowtail N$是**本质的**, 若$\mathrm{Im}\, i \trianglelefteq N$, 此时也称$(N, i)$是$M$的一个**本质扩张(essential extension)**.

**注:** (1)设$M \trianglelefteq N$且$N \trianglelefteq Q$, 则$M \trianglelefteq Q$.

(2)显然$M \trianglelefteq M$.

(3)设$M < N$, 令$\mathscr{E} = \{S | M \trianglelefteq S < N\}$, 则由注的(2), $M \in \mathscr{E}$, 从而$\mathscr{E}$非空. 显然$(\mathscr{E}, \subseteq)$是偏序集, 设$\{S_\alpha\}$是$\mathscr{E}$的一个完全全序子集, 则$M \trianglelefteq S_\alpha < \bigcup S_\alpha < N$. 设$0 \neq S' < \bigcup S_\alpha$, 则对某个$\alpha$有$0 \neq S' \cap S_\alpha (< S_\alpha)$. 因为$M \trianglelefteq S_\alpha$, 所以$M \cap (S' \cap S_\alpha) \neq 0$, 所以$M \cap S' \neq 0$, 所以$M \trianglelefteq \bigcup S_\alpha \Rightarrow S_\alpha \in \mathscr{E}$, 故$\mathscr{E}$有极大元$S$, 即$S$是包含$M$的本质子模的$N$的子模中的极大元.

**命题 1.27**

${}_RQ$是内射的$\Leftrightarrow$ $Q$的任意本质扩张都是同构的.

**证明:** "$\Rightarrow$": 设$i : Q \rightarrowtail M$是本质扩张, 因为${}_RQ$是内射的, 则$0 \to Q \xrightarrow{i} M \longrightarrow \mathrm{Coker} i \to 0$是分裂的. 所以存在$S < M$使得$M = i(Q) \oplus S$. 因为$i(Q) \trianglelefteq M$且$S \cap i(Q) = 0$, 则$S = 0$, 所以$M = i(Q)$, 即$i$是满射, 从而$i$是同构.

"$\Leftarrow$": 设

$$0 \to Q \xrightarrow{i} M \to N \to 0 \tag{1.3}$$

是左$R$-模正合列. 由命题1.26, 只需证明正合列(1.3)是分裂的. 而(1.3)是分裂的等价于存在$S < M$使得$M = i(Q) \oplus S$.

**引理**

正合列(1.3)是分裂的等价于存在$S < M$使得$M = i(Q) \oplus S$.

**证明:** "$\Rightarrow$": 显然. "$\Leftarrow$": 考虑下图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\beta", "\cong"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & i(Q) \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[l, bend left, dotted, "\beta'"] & S \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad \text{(分裂)}$$

(回顾分裂的定义.)这里$\beta'\alpha = 1_{i(Q)}$. 由于$i = \alpha\beta$, 则$(\beta^{-1}\beta')i = \cdots = 1_Q$, 因此正合列(1.3)是分裂的. □

**注:** 进一步, 正合列(1.3)是分裂的可推出$S \cap i(Q) = 0$, 且: ①$S$是满足此性质的极大者; ②$i(Q) \cong M/S$. 这样找到了同构, 我们只需要再证$i$是本质扩张, 即可完成命题1.27 "$\Rightarrow$" 的证明.

由Zorn引理,

$$\mathscr{E} = \{T < M | T \cap i(Q) = 0\}$$

有极大元$S$. 令$j$是合成: $Q \overset{i}{\rightarrowtail} M \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M/S$, 其中$\pi$是自然满同态. 则$j(x) = i(x) + S(\forall x \in Q)$, 且$j(Q) = i(Q) + S/S$. 因为$S \cap i(Q) = 0$, 所以$j$是单的, 下证$j(Q) \trianglelefteq M/S$.

设$T/S < M/S$(其中$S < T < M$), 且$T/S \cap i(Q) + S/S = \bar{0}(= S/S)$. 则

$$\begin{aligned} T \cap (i(Q) + S) = S &\Rightarrow T \cap i(Q) \subseteq T \cap (i(Q) + S) = S \\ &\Rightarrow T \cap i(Q) \subseteq S \cap i(Q) = 0 \\ &\Rightarrow T \in \mathscr{E}. \end{aligned}$$

于是由$S$的极大性可得$T = S$, 即$T/_S = \bar{0}$. 则$j(Q) = i(Q) + S/S \trianglelefteq M/S$, 则$(M/S, j)$是$Q$的本质扩张. 由已知, $j$是同构, 所以$i(Q) + S/S = j(Q) = M/S$, 所以$M = i(Q) + S$.

又由于$S \cap i(Q) = 0$, 所以$M = i(Q) \oplus S$, 所以正合列(1.3)是分裂的, 则$_RQ$是内射模. □

**引理 1.28**

设有下图

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "k"] \arrow[d, tail, "j"'] & N \arrow[dl, dotted, "\exists l"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

其中$Q$是内射模, $j : M \rightarrowtail Q$是单同态, $k : M \rightarrowtail N$是本质单同态, 则存在单同态$l : N \to Q$使$lk = j$.

**证明:** 只需证$\ker l = 0$. 由于$Q$是内射模, $k : M \to N$单, 则存在同态$l : N \to Q$使$j = lk$, 设$x = \ker l \cap \operatorname{Im} k$, 则$l(x) = 0$且存在$y \in M$使得$x = k(y)$, 则$j(y) = lk(y) = l(x) = 0$. 由于$j$是单的, 则$y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \ker l \cap \operatorname{Im} k = 0$. 又由于$k$是本质单同态, 则$\operatorname{Im} k \trianglelefteq N \Rightarrow \ker l = 0 \Rightarrow l$单. □

**注:** 设有同态列 $M \overset{k}{\rightarrowtail} N \xrightarrow{l} P$ , 如果$k$是本质单同态且$lk$是单的, 则$l$是单的(证明同上).

**定义**

称$(Q, i)$是左$R$-模$M$的**内射包络(injective envelope)**, 如果$Q$是内射模, 且$i : M \rightarrowtail Q$是本质单同态.

**例 1.4.2** 在$\mathbb{Z}$-模中, $(\mathbb{Q}, i)$是$\mathbb{Z}$的内射包络, 其中$i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$是嵌入映射. (前面已证$\mathbb{Q}$是内射$\mathbb{Z}$-模) 设$0 \neq Q' < \mathbb{Q}$, 则存在$0 \neq \dfrac{s}{r} \in Q'$, 其中$s, r \in \mathbb{Z}$且$r, s \neq 0$, 则$0 \neq s = r \cdot \dfrac{s}{r} \in Q'$, 所以$\mathbb{Z} \cap Q' \neq 0$, 所以$i$是本质单同态.

**定理 1.29: Eckmann,Schopf, 1953**

(1)任意左$R$-模的内射包络存在.

(2)设$(Q, i)$与$(Q', i')$都是左$R$-模$M$的内射包络, 则存在同构$l : Q \to Q'$使得$i' = li$. (在同构意义下内射包络唯一. )

**证明:** (1)设$M \in R-\mathbf{Mod}$, 由定理1.25(嵌入定理), 存在单同态$i_0 : M \to Q_0$, 其中$Q_0$是内射左$R$-模. 令

$$\mathscr{E} = \{S | i_0(M) \trianglelefteq S < Q_0\},$$

由命题1.26的注(3), 可知$\mathscr{E}$有极大元$Q$, 只需证明$Q$是内射模.

由命题1.27, 只需证$Q$的任意本质扩张是同构. 设$\alpha : Q \rightarrowtail N$是本质扩张, 只需证明$\alpha$是满射(从而$\alpha$是同构).

考虑下图

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, hook, "\lambda"'] & N \arrow[dl, dashed, "\exists\psi"] \\ Q_0 & \end{tikzcd}$$

由引理1.28, 存在单同态$\psi : N \to Q_0$, 使得$\lambda = \psi\alpha$. 由于$\alpha(Q) \trianglelefteq N$且$\psi$是单同态, 则

$$Q = \lambda(Q) = \underbrace{\psi\alpha(Q) \trianglelefteq \psi(N)}_{\text{需要补充过程}} < Q_0.$$

又因为$i_0(M) \trianglelefteq Q$(本质子模有传递性), 所以$i_0(M) \trianglelefteq \psi(N)$. 所以$\psi(N) \in \mathscr{E}$. 由$Q$是极大元, 则$Q = \psi(N)$.

设$x \in N$, $y = \psi(x) \in Q$, 下证$x = \alpha(y)$. 事实上,

$$\psi(x - \alpha(y)) = \psi(x) - \psi\alpha(y) = \psi(x) - \lambda(y) = y - y = 0.$$

由$\psi$是单同态, 则$x - \alpha(y) = 0$, 即$x = \alpha(y)$. 故$\alpha$是满射, 从而是同构.

(2)设$(Q, i), (Q', i')$都是左$R$-模$M$的内射包络, 考虑下图:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, tail, "i'"'] & Q \arrow[dl, dashed, "\exists l"] \\ Q' & \end{tikzcd}$$

由引理1.28, 存在单同态$l : Q \to Q'$, 使得$i' = li$, 并且$l$是单同态. 由于$Q$是内射模, 则$l$是分裂单同态, 即有如下的分裂正合列:

$$0 \to Q \xrightarrow{l} Q' \to \operatorname{Coker} l \to 0$$

由命题1.27中的引理, 存在$Q'' < Q'$使得$Q' = l(Q) \oplus Q''$, 故$l(Q) \cap Q'' = 0$.

因为$i' = li$, 所以$i'(M) = li(M) < l(Q)$, 故$i'(M) \cap Q'' = 0$. 而$i'$是本质单同态, 即$i'(M) \trianglelefteq Q''$, 则$Q'' = 0$, 故$Q' = l(Q)$, 从而$l$是满射, 于是$l$是同构. □

**注:** 设$(Q, i)$是$M$的内射包络, $i' : M \rightarrowtail Q'$是单同态, 由上面的证明可知: 存在单同态$l : Q \rightarrowtail Q'$, 即$Q$同构于$Q'$的内射子模, 从而$Q$是$Q'$的直和项. 因此内射包络是模嵌入内射模的极小嵌入. (每个模可以嵌入到内射模!)

**定义**

称左$R$-模$N$的子模$M$是**多余的(superfluous)**或**小的(small)**, 记为$M \ll N$, 若对任意$N' < N$, 由$M + N' = N$可推出$N' = N$.

称满的左$R$-模同态$f : N \twoheadrightarrow N'$为**多余的**, 如果$\ker f \ll N$.

称$(P, \pi)$为左$R$-模$M$的**投射覆盖(projective cover)**, 若$P$是投射的, 且$\pi : P \twoheadrightarrow M$是多余的满同态.

**注:** (1)投射覆盖若存在必唯一. **(下面的“唯一”都指同构意义下的唯一. )**

(2)H.Bass在[Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, Trans. Amer. Math Soc. 95(1960), 466-488]中证明了任意左$R$-模有投射覆盖$\Leftrightarrow$ $R$是左完全的(left perfect), 即$R$的任意主右理想满足降链条件(如: 右Artin环.) 因为存在不是完全环的环(如$\mathbb{Z}$), 所以对一般的环$R$, 不是所有的左$R$-模都有投射覆盖.

## 练习题 1.4

1. 判断题:
   (1)域上的所有模都是投射的, 但不一定是内射的.
   (2)若$R$是整环, 且${}_RR$是内射模, 则$R$是域.
   (3)设$R$是主理想整环, $I \triangleleft R$且$\pi : R \twoheadrightarrow R/I$是$R$-模的自然满同态, 则$(R,\pi)$是$R/I$的投射覆盖.
   (4)主理想整环上的内射模的任意子模是可除模.
   (5)设$R$是一个环且$M$是一个左$R$-模, 则$M$的任意本质扩张都是同构的.
   (6)设$R$是环, $M$是左$R$-模$N$的一个极大子模, 如果$M$是$N$的多余子模, 则$M$是$N$的本质子模.
   (7)对内射左$R$-模$E$, $\mathrm{Hom}_R(-,E)$将任意左$R$-模正合列变为$\mathbb{Z}$-模正合列.

2. 举出可除模的子模不一定是内射模的例子.

3. (1)证明: $\mathbb{Z}_n$是内射$\mathbb{Z}_n$-模. (显然, 它是投射$\mathbb{Z}_n$-模)
   (2)举例说明若${}_RM$是内射模, $N$是$M$的子模, 则$M/N$不一定是内射模.

4. 设$E$为内射$\mathbb{Z}_4$-模$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$, $M = \{(0,0),(2,2)\} < E$. 证明:
   (1)$M$不是内射模;
   (2)$M$可以写成$E$的内射子模的交.

5. (1)设$R$是环, 若$R$-模$M$是非零内射模, 证明: 每个非零同态$f : M \to R$是满同态.
   (2)设$R$是整环而不是域, $M$是$R$-模. 若$M$同时是投射模与内射模, 证明: $M = \{0\}$.

6. (1)若$R$的左理想$I$是内射左$R$-模, 证明$I$是投射左$R$-模.
   (2)第(1)问的逆命题是否成立?

7. 称环$R$是**左(resp. 右)自内射的(self-injective)**, 若${}_RR$(resp. $R_R$)是内射模. 下设$R$是主理想整环, $I \neq 0$是$R$的理想. 证明:
   (1)$R/I$的任意理想都是主理想($R/I$不一定是整环, 如$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).
   (2)$R/I$是自内射的.

8. (**Schanuel引理的对偶**)设有正合列$0 \to A \to I_1 \to J_1 \to 0, 0 \to A \to I_2 \to J_2 \to 0$, 其中$I_1, I_2$是内射模. 证明: $I_1 \oplus J_2 \cong I_2 \oplus J_1$.

9. 设有如下$R$-模正合列:
$$0 \to A \to P \to B \to 0$$
$$0 \to C \to Q \to D \to 0$$
   (1)若$\alpha : A \to C$是同态, $Q$是内射模, $\mathrm{Hom}_R(B,D) = 0$, 证明$\alpha$可以提升为$\alpha^* : P \to C$.
   (2)类似地, 若$\beta : B \to D$是同态, $P$是投射模, $\mathrm{Hom}_R(A,C) = 0$, 证明$\beta$可以提升为$\beta^* : B \to Q$.

10. 设$R$是环, $M,N$是左$R$-模, $f:M\to N$是单同态.

(1)若$f:M\to N$是本质单同态, 证明: 对任意左$R$-模$P$以及左$R$-模同态$g:N\to P$, 当$gf$是单同态时, $g$也是单同态.

(2)如果(1)的结论成立, 那么$f$是否为本质单同态?

11. 证明：右$R$-模$N$的子模$M$是本质子模当且仅当对任意$0\neq x\in N$, 存在$r\in R$, 使得$xr\neq 0$且$xr\in M$.

12. 考虑如下左$R$-模交换图, 其中$g$是单同态:

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[rr, "g"'] & & M
\end{tikzcd}$$

证明: $h$是本质单同态$\Leftrightarrow$ $f,g$都是本质单同态.

13. 考虑如下左$R$-模交换图, 其中$g$是满同态:

$$\begin{tikzcd}
 & K & & \\
M \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "g"'] & & N \arrow[ul, "f"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

证明: 则$h$是多余满同态$\Leftrightarrow$ $f,g$都是多余满同态.

14. 考虑如下$R-\mathbf{Mod}$交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

假设每一行都是正合列. 若$\alpha$是满同态, $g$是多余的, 证明$g'$也是多余的.

15. 考虑如下$R-\mathbf{Mod}$交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

假设每一行都是正合列.

(1)若$\gamma$是单同态, $f'$是本质的, 证明$f$也是本质的.

(2)若$K\trianglelefteq M$并且$x\in M$, 则$\rho_x^{\leftarrow}(K)\triangleq\{r\in R|rx\in K\}\trianglelefteq {}_RR$.

16. 设$I$是环$R$的幂零左理想[①]. 证明对每个左$R$-模$M$, 有$IM \ll M$.
**提示:** 若$IM+N=M$, 则$I^2M+IN+N=M$.

17. 设$M, E', E$都是左$R$-模, $M \subseteq E' \subseteq E$. 若$E', E$都是$M$的本质扩张, 证明$E$是$E'$的本质扩张.

18. (1)若$B_i$是$A_i$的本质扩张, $i=1,2$, 证明$B_1 \oplus B_2$是$A_1 \oplus A_2$的本质扩张.
(2)把这个结论推广到任意指标集$J$.

19. 设$M, E$都是左$R$-模, $M \subseteq E$.
(1)证明: $E$是$M$的本质扩张当且仅当对任意非零的$e \in E$, 存在$r \in R$, 使得$re \in M$且$re \neq 0$.
(2)设$\mathcal{S}$是一串位于$M, E$之间的子模集, 即$M \subseteq S \subseteq E, \forall S \in \mathcal{S}$, 并且对$S, S' \in \mathcal{S}$, 有$S \subseteq S'$或$S' \subseteq S$. 若任意$S \in \mathcal{S}$都是$M$的本质扩张, 用(1)的结论证明$\bigcup\limits_{S \in \mathcal{S}} S$也是$M$的本质扩张.

20. 证明：作为$\mathbb{Z}$-模, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$不存在投射覆盖.

21. 求出下面$\mathbb{Z}$-模的内射包络: (1)$\mathbb{Z}$; (2)$\mathbb{Z}_p$, $p$为素数; (3)$\mathbb{Z}_n$.

22. 设$R$是一个整环, $Q$为$R$的分式域, 证明: 作为$R$-模, $Q$是$R$的内射包络.

23. 书中已证任意左$R$-模$M$可以嵌入到某个内射左$R$-模中. 并且$M$有内射包络, 记为$E(M)$(有的书也记为$\mathrm{Env}(M)$). 但是, 内射包络并不是一个“闭包”的操作, 因为$E(M)$不一定是$E$的某些包含$M$的交. 证明下面命题:
(1)若$E$是内射模, 则$E$的任意子模有唯一的$E$中内射包络的充分必要条件是: $E$中任意内射子模的交是内射模.
(2)若$H, K, H \cap K$都是$M$的内射子模, 则$H+K$也是$M$的内射子模.
(3)第(2)小问的逆命题不正确: 设$E$为内射$\mathbb{Z}_4$-模$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$, $M = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{2})\} < E$. 证明: $M$不是内射模, 但$M$可以写成$E$的内射子模的交.

[①] 环$R$的理想$N$称为**幂零理想**, 若存在正整数$m$使得$N^m=0$(即$N$中任意$m$个元素的乘积都为0).

## § 1.5　张量积与平坦模

张量积的发展过程: 域上向量空间的张量积⇒交换环上自由模的张量积$\xRightarrow[\text{双加平衡映射}]{\text{泛性质}}$交换环上一般模的张量积⇒任意环上模的张量积. 本节中, $R$是环.

**定义 1.30**

设$A \in \mathbf{Mod}-R, B \in R-\mathbf{Mod}$, $G$是Abel群, 再设映射$f : A \times B \to G$.

（Ⅰ）$\forall a, a_1, a_2 \in A, b, b_1, b_2 \in B$, 如果

(1)$f[(a_1 + a_2, b)] = f[(a_1, b)] + f[(a_2, b)]$,

(2)$f[(a, b_1 + b_2)] = f[(a, b_1)] + f[(a, b_2)]$,

则称$f$是$A, B$到$G$的**双加映射(biadditive mapping)**.

（Ⅱ）$\forall a \in A, b \in B, r \in R$, 如果满足

(3)$f[(ar, b)] = f[(a, rb)]$,

则称$f$是$A, B$到$G$的**$R$-平衡映射(R-balanced mapping)**.

（Ⅲ）如果$f$满足(1)(2)(3), 则称$f$是$A, B$到$G$的**双加R-平衡映射**, 记为$f \in \mathrm{Biab}(A, B; G)$. (Bi代表“双”, a代表“加”, b代表“平衡”.)

**例 1.5.1** *用$R^{(n)}$(对应地, ${}^{(n)}R$)表示秩为$n$的自由右(对应地, 左)$R$-模. 为方便起见, 分别用列向量$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$与行向量$(x_1, \cdots, x_n)$ 表示$R^{(n)}$与${}^{(n)}R$中的元素[①], 定义*

$$\begin{array}{cccc} f: & R^{(m)} \times {}^{(n)}R & \to & M_{m\times n}(R) \\ & \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, (y_1, \cdots, y_n) \right) & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_my_1 & \cdots & x_my_n \end{pmatrix} \end{array}$$

则$f \in \mathrm{Biab}(R^{(m)}, {}^{(n)}R, M_{m\times n}(R))$.

**注:** 若$f$是双加映射, 则$f[(0, b)] = 0 = f[(a, 0)], f[(-a, b)] = -f[(a, b)] = f[(a, -b)]$. (自证. )

**定义 1.31**

设$A \in \mathbf{Mod}-R, B \in R-\mathbf{Mod}$, 若$T$是Abel群且$f \in \mathrm{Biab}(A, B; T)$满足如下的**泛性质(universal property)**: 对任意Abel群$G$与$g \in \mathrm{Biab}(A, B; G)$, 存在唯一的群同态$h : T \to G$使得$g = hf$, 即下图可交换:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\forall g"'] & T \arrow[dl, dotted, "\exists! h"] \\ G & \end{tikzcd}$$

则称$(T, f)$是$A_R, {}_RB$的**张量积(tensor product)**, 记为$A \otimes_R B$. 也记$f[(a, b)] = a \otimes b$. 因此也把$f$记为$\otimes_R$或$\otimes$.

泛性质是一个思想方法, 以后会有更多体会. 定义泛性质时需“穿过”要定义的对象.

[①]写成行向量或者列向量没什么本质区别, 仅仅为了直观.

**命题 1.32**

设$A \in \mathbf{Mod}-R$且$B \in R-\mathbf{Mod}$, 则$A \otimes_R B$总是存在的, 且在同构意义下唯一.

**证明:** (1)设$F$是以$A \times B$为基的自由Abel群($\mathbb{Z}$-模), 则$F = \left\{ \sum\limits_{<\infty} \pm(a_i, b_j) \middle| \forall a_i \in A, b_j \in B \right\}$. 令

$$\begin{aligned} S = \Big\langle \{ &(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b), (a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2), (ar, b) - (a, rb) \Big| \\ &\forall a, a_1, a_2 \in A, b, b_1, b_2 \in B, r \in R\} \Big\rangle < F. \end{aligned}$$

则$F/S$也是Abel群(两个`Abel`群的商群也是`Abel`的.) 定义映射

$$\begin{array}{rccc} f: & A \times B & \to & F/S \\ & (a, b) & \mapsto & \overline{(a, b)} \quad (= (a, b) + S) \end{array}$$

它是自然满同态$\pi : F \to F/S$在$A \times B$中的限制, 在$F/S$中有恒等式

$$\overline{(a_1 + a_1, b)} = \overline{(a_1, b)} + \overline{(a_2, b)}, \overline{(a, b_1 + b_2)} = \overline{(a, b_1)} + \overline{(a, b_2)}, \overline{(ar, b)} = \overline{(a, rb)}.$$

(以第一个为例, $((a_1+a_2, b)+S)-((a_1, b)+S)-((a_2, b)+S) = ((a_1+a_2, b)-(a_1, b)-(a_2, b))+S = \overline{0}$.) 因此$f \in \mathrm{Biab}(a, b; F/S)$.

对任意Abel群$G$与$g \in \mathrm{Biab}(a, b; G)$, 考虑下图:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\forall g"'] & F/S \arrow[dl, dotted, "\exists h"] \\ G & \end{tikzcd} \qquad (*)$$

因为$F = \langle A \times B \rangle$且$g \in \mathrm{Biab}(A, B; G)$, 所以$g$可以唯一线性扩张为Abel群同态$\overline{g} : F \to G$, 其中$\overline{g} : F \to G$, 且$\mathrm{Ker}\,\pi = S \leq \mathrm{Ker}\,\overline{g}$. 由Factor Theorem, 存在群同态$h : F/S \to G, h[\overline{(a, b)}] = g[(a, b)]$使得下图可交换.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\overline{g}"'] & F/S \arrow[dl, dotted, "\exists h"] \\ G & \end{tikzcd}$$

再将$\pi$与$\overline{g}$都限制在$A \times B$中, 则$h$可以使得$(*)$图可交换, 即$g = hf$. 由于$F/S$由$\overline{(a, b)}$生成, 故$h$是唯一的, 故

$$A \otimes_R B = F/S (= \langle \{ a \otimes b (= \overline{(a, b)}) | \forall a \in A, b \in B \} \rangle).$$

(2)设$(G, g)$也是$A, B$的张量积, 则存在唯一群同态$h' : G \to A \otimes_R B$使得$f = h'g$, 则$f = (h'h)f$. 由泛性质定义中的唯一性, $h'h = 1_{A \otimes_R B}$, 同理$hh' = 1_G$, 则$h, h'$是同构. □

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \otimes_R B \arrow[dl, dotted, bend left, "\exists! h'"] \\ G \arrow[ur, dotted, bend left, "\exists! h"] & \end{tikzcd}$$

**注:** 因为$A\otimes_R B=\langle\{a\otimes b|a\in A,b\in B\}\rangle$, 故$A\otimes_R B$中的元素的一般形式为$\sum\limits_{<\infty}(a_i\otimes b_j)$, 但一般不具有形式$a\otimes b$.

下面设映射

$$A\otimes_R - : R-\mathbf{Mod}\to \mathrm{Ab}, B\mapsto A\otimes_R B, (\text{右模映往Abel群})$$

$$-\otimes_R B : \mathbf{Mod}-R\to \mathrm{Ab}, A\mapsto A\otimes_R B, (\text{左模映往Abel群})$$

把$A\otimes_R g\triangleq (A\otimes_R -)(g)$. 对$f:A\to A', g:B\to B'$, 下面看

$$A\otimes_R B\xrightarrow{A\otimes g} A\otimes_R B'$$

$$A\otimes_R B\xrightarrow{f\otimes B} A'\otimes_R B.$$

这里, 把$A\otimes g$看成$1_A\otimes g$, 把$f\otimes B$看成$f\otimes 1_B$, 这样就可以定义$f\otimes g$了.

设$A,A'\in R-\mathbf{Mod}, B,B'\in \mathbf{Mod}-R$, 且$f:A_R\to A'_R, g: {}_RB\to {}_RB'$是模同态, 定义

$$(f,g)[(a,b)]=f(a)\otimes g(b),$$

则$(f,g)$是双加平衡映射. 考虑下图

$$\begin{tikzcd}
A\times B \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "{(f,g)}"'] & A\otimes_R B \arrow[dl, dotted, "\exists! f\otimes g"] \\
A'\otimes_R B' &
\end{tikzcd}$$

存在唯一的群同态$f\otimes g: A\otimes_R B\to A'\otimes_R B'$, 使得上图可交换, 于是

$$(f\otimes g)(a\otimes b)=f(a)\otimes g(b).$$

**性质:** ①对任意 $\begin{tikzcd} A_R \arrow[r, shift left=2, "f_1"] \arrow[r, "f" description] \arrow[r, shift right=2, "f_2"'] & A' \end{tikzcd}$ , $\begin{tikzcd} {}_RB \arrow[r, shift left=2, "g_1"] \arrow[r, "g" description] \arrow[r, shift right=2, "g_2"'] & B' \end{tikzcd}$ , 有

$$(f_1+f_2)\otimes g=f_1\otimes g+f_2\otimes g;$$

$$f\otimes(g_1+g_2)=f\otimes g_1+f\otimes g_2;$$

$$f\otimes 0=0=0\otimes g;$$

$$1_A\otimes 1_B=1_{A\otimes_R B}.$$

②对任意$A_R\xrightarrow{f}A'_R\xrightarrow{f'}A''_R$, ${}_RB\xrightarrow{g}{}_RB'\xrightarrow{g'}{}_RB''$, 有$A\otimes_R B\xrightarrow{f\otimes g}A'\otimes_R B'\xrightarrow{f'\otimes g'}A''\otimes_R B''$,

$$(f'f)\otimes(g'g)=(f'\otimes g')(f\otimes g).$$

这些等式对$A\otimes_R B$的生成元$\{a\otimes b\}$显然是成立的.

**例 1.5.2** $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}$.

**证明:** 由命题1.33立证. 或者如下证明: 由于$n\otimes m=1\cdot n\otimes m=1\otimes n\cdot m=1\otimes mn$, 则

$$\sum_i n_i\otimes m_i=\sum_i 1\otimes n_im_i=1\otimes\sum_i n_im_i,$$

所以$\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\cong 1\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}$. □

**命题 1.33**

$\forall A_R$与$_RB$, $A\otimes_R -$与$-\otimes_R B$都是加法共变函子, 且$A\otimes_R R\cong A, R\otimes_R B\cong B$.

**证明:** 由前面的讨论, $A\otimes_R -$与$-\otimes_R B$都是加法共变函子. 定义$g: A\times R\to A$为$g[(a,r)]=ar$, 则$g\in \mathrm{Biab}(A,R;A)$, 所以存在唯一的群同态$h: A\otimes_R R\to A$, $h(a\otimes r)=ar$, 使得下图可交换: (需要验证$h$定义合理, 我们只明确知道$a\otimes 0=0=0\otimes a$. )

$$\begin{tikzcd}
A\times R \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "g"'] & A\otimes_R R \arrow[dl, dotted, "\exists! h"] \\
A &
\end{tikzcd}$$

再定义$h': A\to A\otimes_R R$为$h'(a)=a\otimes 1_R$, 则$h'$是群同态且$h'h=1_{A\otimes_R R}$, 所以$h,h'$是群同构. 类似可证$R\otimes_R B\cong B$. □

**命题 1.34**

设$\{A_i|i\in I\}$是一族右$R$-模, 且$\{B_j|j\in J\}$是一族左$R$-模, 则有如下Abel群同构:

$$(\bigoplus_{i\in I} A_i)\otimes_R(\bigoplus_{j\in J} B_j)\cong \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} A_i\otimes_R B_j.$$

(进一步, $A\otimes_R(\bigoplus_{j\in J} B_j)\cong \bigoplus_{j\in J} A\otimes_R B_j, (\bigoplus_{i\in I} A_i)\otimes_R B\cong (\bigoplus_{i\in I}(A_i\otimes_R B))$.)

**证明:** 令$A=\bigoplus_{i\in I} A_i$的第$i$个标准单射与标准投射为$\lambda_i, p_i$, $B=\bigoplus_{j\in J} B_j$的第$j$个标准单射与标准投射为$\alpha_j,\beta_j$. 则有同态列

$$A_{i'}\otimes_R B_{j'}\xrightarrow{\lambda_{i'}\otimes\alpha_{j'}} A\otimes_R B\xrightarrow{p_i\otimes\beta_j} A_i\otimes_R B_j.$$

则

$$(p_j\otimes\beta_j)(\lambda_{i'}\otimes\alpha_{j'})=(p_i\lambda_{i'})\otimes(\beta_j\alpha_{j'})=\delta_{(i,j)(i',j')}1_{A_{i'}\otimes_R B_{j'}}, \forall (i,j),(i',j')\in I\times J.$$

且

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in I\times J}(\lambda_i\otimes\alpha_j)(p_i\otimes\beta_j) &= \sum_{(i,j)\in I\times J}(\lambda_i p_i)\otimes(\alpha_j\beta_j)\\ &= \Big(\sum_{i\in I}\lambda_i p_i\Big)\otimes\Big(\sum_{j\in J}\alpha_j\beta_j\Big)=1_A\otimes 1_B=1_{A\otimes_R B}.\end{aligned}$$

由命题1.1可知结论成立. □

**注:** 由命题1.34与1.1的证明可知:

$$\begin{array}{ccc} A\otimes_R\Big(\bigoplus_{j\in J} B_j\Big) & \cong & \bigoplus_{j\in J}(A\otimes_R B_j)\\ a\otimes(b_j) & \mapsto & (a\otimes b_j)\end{array}$$

和

$$\begin{array}{ccc} \Big(\bigoplus_{i\in I} A_i\Big)\otimes_R B & \cong & \bigoplus_{i\in I}(A_i\otimes_R B)\\ (a_i)\otimes b & \mapsto & (a_i\otimes b)\end{array}$$

补充: 设有交换图

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"', "\cong"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta"', "\cong"] & C_1 \arrow[d, "\gamma", "\cong"'] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & C_2 \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

则上行正合⇔下行正合. (自证)

**定理 1.35**

对任意$A_R$和${}_RB$, $A\otimes_R -$与$-\otimes_R B$都是右正合函子.

**证明:** 只证$A\otimes_R -$是右正合函子. 设 $0\longrightarrow L\xrightarrow{\alpha} M\xrightarrow{\beta} N\longrightarrow 0$ 是左$R$-模正合列. 注意到$(A\otimes_R -)(\alpha)=1_A\otimes\alpha$, 且$(A\otimes_R -)(\beta)=1_A\otimes\beta$, 只需要证明

$$A\otimes_R L\xrightarrow{1_A\otimes\alpha} A\otimes_R M\xrightarrow{1_A\otimes\beta} A\otimes_R N\to 0 \tag{1.5}$$

是正合的.[1] 结合(1.4), 我们只需证$A\otimes_R N\cong A\otimes_R M/_{\mathrm{Im}\,(1_R\otimes\alpha)}$.

因为

$$(1_A\otimes\beta)(1_A\otimes\alpha)=1_A\otimes(\beta\alpha)=1_A\otimes 0=0,$$

所以$\mathrm{Im}\,(1_A\otimes\alpha)\subseteq\mathrm{Ker}\,(I_A\otimes\beta)$. 考虑下图: (其中$\pi$是自然满同态)

$$\begin{tikzcd} A\otimes_R L \arrow[r, "1_A\otimes\alpha"] & A\otimes_R M \arrow[r, "1_A\otimes\beta"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[d, phantom, "①", shift left=3] & A\otimes_R N \arrow[dl, dotted, shift left, "\exists\overline{f}"] \\ & A\otimes_R M/_{\mathrm{Im}\,(1_A\otimes\alpha)} \arrow[ur, dotted, shift left, "\exists\overline{\beta}"] & A\times N \arrow[l, dotted, "f"'] \arrow[u, "\otimes"'] \arrow[u, phantom, "②", shift left=3] \end{tikzcd}$$

因为$\mathrm{Ker}\,\pi=\mathrm{Im}\,(1_A\otimes\alpha)\subseteq\mathrm{Ker}\,(1_A\otimes\beta)$, 由Factor Theorem, 存在同态$\overline{\beta}: A\otimes_R M/_{\mathrm{Im}\,(1_A\otimes\alpha)}\to A\otimes_R N$, 使得上图中的①可交换. 故

$$\overline{\beta}(a\otimes m+\mathrm{Im}\,(1_A\otimes\alpha))=\alpha\otimes\beta(m).$$

对任意$n\in N$, 存在$m\in M$使得$\beta(m)=n$. 定义

$$\begin{array}{rccc} f: & A\times N & \to & A\otimes_R M/\mathrm{Im}\,(1_A\otimes\alpha) \\ & f[(a,n)] & = & a\otimes m+\mathrm{Im}\,(1_A\otimes\alpha) \end{array}$$

下面验证$f$是良好定义的. 设$n=\beta(m_1)=\beta(m_2)$, 则$(m_1-m_2)\in\mathrm{Ker}\,\beta=\mathrm{Im}\,\alpha$, 则存在$l\in L$使得$m_1-m_2=\alpha(l)$, 于是

$$\begin{aligned}(a\otimes m_1+\mathrm{Im}\,(1_A\otimes\alpha))-(a\otimes m_2+\mathrm{Im}\,(1_A\otimes\alpha)) &= a\otimes(m_1-m_2)+\mathrm{Im}\,(1_A\otimes\alpha)\\ &= a\otimes\alpha(l)+\mathrm{Im}\,(1_A\otimes\alpha)\\ &= (1_A\otimes\alpha)(a\otimes l)+\mathrm{Im}\,(1_A\otimes\alpha)=\overline{0}.\end{aligned}$$

[1]回顾: 我们总有正合列

$$A\otimes_R L\xrightarrow{1_A\otimes\alpha} A\otimes_R M\xrightarrow{\pi} A\otimes_R M/\mathrm{Im}\,(1_R\otimes\alpha)\to 0, \tag{1.6}$$

所以$f$是良好定义的.

易证$f$是双加平衡映射, 则存在唯一的群同态$\overline{f}: A\otimes_R N\to A\otimes_R M/\mathrm{Im}\,(1_A\otimes\alpha)$, 使得上图中的② 可交换, 所以$\overline{f}(a\otimes h)=a\otimes m+\mathrm{Im}\,(1_A\otimes\alpha)$. 易证$\overline{\beta f}=1_{A\otimes_R N}$且$\overline{f}\overline{\beta}=1_{A\otimes_R N/\mathrm{Im}\,(1_A\otimes\alpha)}$. 因此(1.5)是正合的. □

**例 1.36**

一般地, $A\otimes_R -$与$-\otimes_R B$未必是左正合的. 考虑$\mathbb{Z}$-模正合列

$$0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{\alpha}\mathbb{Q}\xrightarrow{\beta}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to 0,$$

由定理1.35,

$$\underbrace{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}}_{\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(\neq 0)}\xrightarrow{1\otimes\alpha}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\xrightarrow{1\otimes\beta}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to 0(n\geq 2)$$

是正合的. 对任意$x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$与$q\in\mathbb{Q}$, 有$x\otimes q=nx\otimes\dfrac{q}{n}=\bar{0}\otimes\dfrac{q}{n}=0$, 所以$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=0$, 所以$1\otimes\alpha$不是单射, 且$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}=0$. 类似地, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=0\Rightarrow\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}=0$.

**例 1.37**

一般地, $\mathrm{Hom}_R(-,U)$和$\mathrm{Hom}_R(U,-)$未必是右正合的. 见定理1.6后的例子.

**注:** 回顾：$\mathrm{Hom}_R(-,U)$与内射模、$\mathrm{Hom}_R(U,-)$与投射模的关系.

**定义 1.38**

设$A\in\mathbf{Mod}-R$, 如果对任意单的左$R$-模同态$f: M\rightarrowtail N$, 总有单的Abel群同态

$$1_A\otimes f: A\otimes_R M\to A\otimes_R N,$$

则称$A$是**平坦模(flat)**.

由定理1.35, 可得下面的命题:

**命题 1.39**

$A\in\mathbf{Mod}-R$平坦$\Leftrightarrow A\otimes_R -$正合.

**例 1.5.3** 由例1.36, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(\forall n\geq 2)$与$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$都不是平坦$\mathbb{Z}$-模.

**命题 1.40**

$R$作为右或左$R$-模都是平坦的.

**证明:** 设$f: M\rightarrowtail N$是单的左$R$-模同态. 由命题1.33, 有如下交换图.

$$\begin{tikzcd} m \arrow[d, squiggly] & M \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\cong"'] & N \arrow[d, "\cong"] & n \arrow[d, squiggly] \\ r\otimes m & R\otimes_R M \arrow[r, "1_A\otimes f"] & R\otimes_R N & r\otimes n \end{tikzcd}$$

所以$1_A\otimes f$是单的, 所以$R_R$平坦. 类似可以证明$_RR$平坦. □

**命题 1.41**

设$\{A_j|j\in J\}$是一族右$R$-模, 则$\bigoplus\limits_{j\in J}A_j$是平坦的$\Leftrightarrow$ $A_j$是平坦的, $\forall j\in J$.

**证明:** 设$f:M\rightarrowtail N$是单的左$R$-模同态, 由命题1.34, 有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
(a_j)\otimes m \arrow[d, squiggly] & \left(\bigoplus_{j\in J}A_j\right)\otimes_R M \arrow[r, tail, "1_{\oplus_{j\in J}A_j}\otimes f"] \arrow[d, "\cong"'] & \left(\bigoplus_{j\in J}A_j\right)\otimes_R N \arrow[d, "\cong"] & (a_j)\otimes n \arrow[d, squiggly] \\
(a_j\otimes m) & \bigoplus_{j\in J}(A_j\otimes_R M) \arrow[r, "\bigoplus_{j\in J}(1_{A_j}\otimes f)"] & \bigoplus_{j\in J}(A_j\otimes_R N) & (a_j\otimes n)
\end{tikzcd}$$

所以$\bigoplus\limits_{j\in J}A_j$平坦$\Leftrightarrow$ $1_{\oplus_{j\in J}A_j}\otimes f$是单的$\Leftrightarrow$ $\bigoplus\limits_{j\in J}(1_{A_j}\otimes f)$是单的$\Leftrightarrow$ $1_{A_j}\otimes f$是单的$(\forall j\in J)$ $\Leftrightarrow$ $A_j$是平坦的$(\forall j\in J)$. □

**定理 1.42**

投射模是平坦的.

**证明:** 由命题1.40, $R_R$是平坦的. 再由命题1.41, $R_R$的任意直和$R^{(J)}$是平坦的(即任意自由模平坦), 由于任意投射右$R$-模$P$是自由模的直和项, 所以$P$是平坦的(命题1.41). 类似, 投射左$R$-模是平坦的. □

## 练习题 1.5

1. 判断题:
   (1)$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\neq 0$.
   (2)对任意正整数$n$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=0=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
   (3)$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$不是平坦$\mathbb{Z}$-模.
   (4)设$R$是交换环, $F$是$R$-模. 若$F$是平坦模但不是投射模, 则函子$\mathrm{Hom}_R(F,F\otimes_R -):R-\mathbf{Mod}\to R-\mathbf{Mod}$不是正合的.

2. 设$R$是整环, $Q$为$R$的分式域, 证明$(Q/R)\otimes_R(Q/R)=0$.

3. **(张量积的结合律)**证明: 对于环$R$以及对任意的模$M_R, {}_RW_S, {}_SN$, 有同构

$$\begin{array}{rrcl} v: & M\otimes_R(W\otimes_S N) & \to & (M\otimes_R W)\otimes_S N, \\ & m\otimes_R(w\otimes_S n) & \mapsto & (m\otimes_R w)\otimes_S n. \end{array}$$

4. 设$R$是环, $P,Q$是平坦$R$-模, 证明$P\otimes_R Q$是平坦$R$-模.

5. 设$G$是Abel群且$n$是正整数, 证明: $G\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong G/nG$, 其中$nG=\{nx|x\in G\}$.

6. 设$R$是环, $I$是$R$的理想, $M$是左$R$-模. 证明: $R/I\otimes_R M\cong M/IM$.

7. 设$R$是交换环, 且$I$和$J$均是$R$的理想, 证明: $R/I\otimes_R R/J\cong R/(I+J)$.

8. 记$\mathbb{Z}_m=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 则$\mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_{(m,n)}$.
特别地, 若$(m,n)=1$, 则$\mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n=0$.

9. 设$B={}_RB_S$是$R-S-$双模, 且${}_RB$是平坦模, $C=C_S$是内射模, 证明: $\mathrm{Hom}_S(B,C)$是内射左$R$-模.

10. 设$R$是主理想整环. 若$A$是有限生成$R$-模, 且$A\otimes_R A=0$, 则$A=0$. 举出一个Abel群$G\neq 0$的例子使得$G\otimes G=0$.

11. 设$R,S$是环, ${}_SP_R$是$(S,R)$双模, $P_R$是投射右$R$-模.
(1)证明对任意投射右$S$-模$M_S$, 张量积$M\otimes_S P$是投射右$R$-模.
(2)特别地, 给定环同态$S\to R$, 把$R$看成$(S,R)$双模, 则对任意$S$-模$M_S$, $M\otimes_S R$是投射右$R$-模.
(3)对$S$的任意理想$I$, 若$M_S$是投射右$S$-模, 则$M/MI$是投射右$S/I$-模.

12. 举反例说明下面命题不正确: 若$I_S$是内射模, $f:S\to R$是环同态, 则$I\otimes_S R$是内射右$R$-模.

13. 考虑下面的左$R$-模交换图, 其中每行、每列都是$R-\mathbf{Mod}$正合列.

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
B' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
C' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

证明:
(1)若$A''\to B''$与$B'\to B$是单射, 则$C'\to C$是单射. 类似地, 若$C'\to C$与$A'\to B$是单射, 则$A''\to B''$是单射.
(2)若第三列和第二行是短正合列, 则第三行是短正合列. 类似地, 若第三行和第二列是短正合列, 则第三列是短正合列.

14. 设有如下左$R$-模正合列

$$0\to A\to B\to C\to 0\qquad(*)$$

称正合列$(*)$是**纯正合列(pure exact)**, 若对任意的右$R$-模$C'$, 有如下正合列：

$$0\to C'\otimes_R A\to C'\otimes_R B\to C'\otimes_R C\to 0\qquad(**)$$

例如, 分裂短正合列都是纯正合列.
(1)证明: $C$是平坦模当且仅当任意以$C$为尾项的正合列$(*)$是纯正合列. (**提示:** 用前一道题. )
(2)若$C$是平坦模, 证明$A$是平坦模当且仅当$B$是平坦模.

15. 设$M,N$是$R$-模$E$的子模, $M+N$是平坦模.
(1)证明: $M\cap N$是平坦模当且仅当$M,N$都是平坦模.
(2)举例说明一个平坦模的子模$M,N$可以满足$M,N,M\cap N$都是平坦模但$M+N$不是平坦模.

## § 1.6　直和与直积的相关性质

本节中, 设$\{A_j|j \in J\}$是一族左$R$-模, 且$\lambda_j$与$p_j$分别是$\bigoplus\limits_{j\in J} A_j$ 或$\prod\limits_{j\in J} A_j$的第$j$个标准嵌入与标准投射, $\forall j \in J$.

**命题 1.43**

$\bigoplus\limits_{j\in J} A_j$投射$\Leftrightarrow$ $A_j$投射,$\forall j \in J$. (即: 投射对直和封闭)

**证明:** "$\Rightarrow$": 设$\bigoplus\limits_{j\in J} A_j$是投射的, 考虑下图:

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{j\in J} A_j \arrow[r, "p_j"] \arrow[d, dotted, "\exists f"'] & A_j \arrow[d, "\forall f_j"] \\ B \arrow[r, two heads, "\forall\beta"] & C \end{tikzcd} ,\forall j \in J.$$

存在$f : \bigoplus\limits_{j\in J} A_j \to B$使得$f_j p_j = \beta f, \forall j$, 则$f_j = f_j 1_{A_j} = f_j(p_j\lambda_j) = \beta(f\lambda_j)$. 所以$A_j$是投射的, $\forall j \in J$.

"$\Leftarrow$": 设$A_j$是投射的, $\forall j \in J$. 考虑下图:

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\lambda_j"] \arrow[d, dotted, "\exists f_j"'] & \bigoplus_{j\in J} A_j \arrow[d, "\forall f"] \\ B \arrow[r, two heads, "\forall\beta"] & C \end{tikzcd} ,\forall j \in J.$$

则存在$f_j : A_j \to B$, 使得$f\lambda_j = \beta f_j, \forall j \in J$. 所以(右乘$p_j$再加起来)

$$f = f \cdot 1_{\bigoplus_{j\in J} A_j} = f\Big(\sum_{j\in J} \lambda_j p_j\Big) = \sum_{j\in J}(f\lambda_j)p_j = \sum_{j\in J} \beta(f_j p_j) = \beta\sum_{j\in J}(f_j p_j).$$

所以$\bigoplus\limits_{j\in J}$是投射的. □

**有限生成投射模**$P$指$P$是有限生成自由模的直和项.

称$_RM$为**有限表现的(finitely presented)**或**有限相关的(finitely related)**, 如果存在左$R$-模正合列$P_1 \to P_0 \to M \to 0$, 其中$P_0, P_1$是有限生成投射模.

称$R$是**右凝聚的(right coherent)**, 如果$R$的任意有限生成右理想是有限表现的.

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] & 0 \\ & \operatorname{Ker} f \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\ 0 \arrow[ur] & & 0 & & \end{tikzcd}$$

凝聚环的概念是Noether环和Artin环的推广.

注意到存在不是右凝聚环的环([S.Glaz, Commutative Coherent Rings, LNM, 1371, Springer, 1989] P51, example). 则对任意环, 平坦模的直积不一定是平坦的.

J.U.Chase在[Direct Products of modules, Trans. Amer. Math. Soc, 97(1960), 457-473]中证明了:

(1) 平坦左$R$-模的任意直积都是平坦的$\Leftrightarrow$ ${}_RR$的任意直积是平坦的$\Leftrightarrow$ $R$是右凝聚环.

(2) 投射左$R$-模的任意直积是投射的$\Leftrightarrow$ ${}_RR$的任意直积是投射的$\Leftrightarrow$ $R$是右凝聚的左完全环.

(3) 设$R$是交换环, 则投射左$R$-模的任意直积是投射的$\Leftrightarrow$ ${}_RR$的任意直积是投射的$\Leftrightarrow$ $R$是Artin环. (因为存在不是Artin环的环(如$\mathbb{Z}$), 所以对任意环, 投射模的直积不一定是投射的.)

**命题 1.44**

$\prod\limits_{j\in J} A_j$是内射模$\Leftrightarrow$ $A_j$是内射的$(\forall j\in J)$. (即： 内射对直积封闭)

**证明:** “$\Rightarrow$”: 设$\prod\limits_{j\in J} A_j$是内射模, 则存在$g: C\to \prod\limits_{j\in J} A_j$使得$g\alpha=\lambda_j f_j$. 考虑下图,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\forall\alpha"] \arrow[d, "\forall f_j"'] & C \arrow[d, dotted, "\exists g"] \\ A_j \arrow[r, "\lambda_j"] & \prod\limits_{j\in J} A_j \end{tikzcd} \quad ,\forall j\in J.$$

于是$p_j g\alpha = p_j\lambda_j f_j = 1_{A_j} f_j = f_j$, 所以$A_j$是内射模.

“$\Leftarrow$”: 设$A_j$是内射的$(\forall j\in J)$, 考虑下图:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\forall\alpha"] \arrow[d, "\forall g"'] & C \arrow[d, dotted, "\exists g_j"] \\ \prod\limits_{j\in J} A_j \arrow[r, "p_j"] & A_j \end{tikzcd} \quad ,\forall j\in J.$$

存在$g_j: C\to A_j$使得$g_j\alpha = p_j g$. 定义

$$\begin{aligned} g' \quad C &\to \prod_{j\in J} A_j, \\ g'(c) &= (g_j(c)). \end{aligned}$$

则$g'$是左$R$-模同态[1]. 对任意$b\in B$有

$$g'\alpha(b) = (g_j\alpha(b)) = (p_j g(b)) = g(b),^{②}$$

则$g'\alpha = g$, 故$\prod\limits_{j\in J} A_j$是内射的. □

[1] 此处如果把直积改为直和将会过不去, $g': C\to \bigoplus\limits_{j\in J} A_j$定义为$g'(c)=\sum\limits_{j\in J} g_j(c)$, 但$g'$不是同态(因为可能会出现无限和).

[2] $g(b)$的第$j$个分量放在第$j$个位置上恰好得到$(p_j g(b))$.

H.Bass在[Injective dimension in Noetherian rings, Trans. Amer. Math, Soc. 102(1962), 18-29]中, 证明了内射左$R$-模的任意直和是内射的$\Leftrightarrow$ $R$是左Noether环.

因为存在不是左Noether的环, 所以对任意环, 内射左$R$-模的直和不一定是内射的.

不是左Noether的环的例子有:

(1)矩阵环$\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$是右Noether环, 但不是左Noether环. 见[L.Small, Hereditary rings, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 54(1965) 1035-1036].

(2)设$K$是域, 则$K[x_1, x_2, \cdots]$是凝聚环但不是Noether环. 见前面[LNM 1371]的Cor2.3.4.

**注:** 直积$\prod\limits_{j\in J} A_j$投射$\Rightarrow$ $A_j$投射, 反之不对; 直和$\bigoplus\limits_{j\in J} A_j$内射$\Rightarrow$ $A_j$内射, 反之不对.

前面证明了张量积与直和可交换, 下面看Hom函子与直和、直积的关系.

**命题 1.45**

对任意$B \in R-\mathbf{Mod}$, 有$\mathrm{Hom}_R\Big(\bigoplus\limits_{j\in J} A_j, B\Big) \cong \prod\limits_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(A_j, B)$.

**命题 1.46**

对任意$B \in R-\mathbf{Mod}$, 有$\mathrm{Hom}_R\Big(B, \prod\limits_{j\in J} A_j\Big) \cong \prod\limits_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(B, A_j)$.

**例 1.6.1** $\mathbb{Q}$与$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$都不是投射$\mathbb{Z}$-模.

**证明:** (1)若$\mathbb{Q}$是投射$\mathbb{Z}$-模, 则存在指标集$J$使得$\mathbb{Q} < \mathbb{Z}^{(J)} < \mathbb{Z}^J$. (直和项可以看作子模, 也可以看作商模.) 所以由命题1.46,

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}^{(J)}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})^J \xlongequal{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})=0} 0,$$

矛盾. 所以$\mathbb{Q}$不是投射$\mathbb{Z}$-模.

(2)再考虑正合列

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0.$$

若$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$是投射$\mathbb{Z}$-模, 则这个正合列是分裂的. 根据命题1.43以及$\mathbb{Q} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, 从而$\mathbb{Q}$是投射$\mathbb{Z}$-模, 与(1)矛盾. 所以$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$不是投射$\mathbb{Z}$-模. □

**注:** (1)$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$不是平坦模(例1.36), 更不是投射模.

(2)这个例子说明对于$R$-模$M, N$, 其中$N$是$M$的子模, 那么下面正合列中,

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

不一定有$M \cong N \oplus M/N$(当然, 也不一定分裂). 取$N = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Q}$, 若$\mathbb{Q} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, 则有标准投射$p_1 : Q \to \mathbb{Z}$, 但$p_1 = 0$, 矛盾(标准投射不应该是0).

**引理 1.47**

我们有

(1)**(直积的泛性质)**对任意左$R$-模$A$与$\alpha_j : A \to A_j(\forall j \in J)$, 存在唯一的$\alpha : A \to \prod\limits_{j\in J} A_j$使得$\alpha_j = p_j\alpha(\forall j \in J)$.

(2)**(直和的泛性质)**对任意左$R$-模$B$与$\beta_j : A_j \to B(\forall j \in J)$, 存在唯一的$\beta : \bigoplus\limits_{j\in J} A_j \to B$使得$\beta\lambda_j = \beta_j(\forall j \in J)$.

**证明:** (1)定义

$$\begin{aligned}\alpha: \quad A &\to \prod_{j\in J} A_j\\ \alpha(a) &= (\alpha_j(a))\end{aligned}$$

则$\alpha$是左$R$-模同态. 因为对任意$a \in A$有$p_j\alpha(a) = p_j[(\alpha_j(a))] = \alpha_j(a)$, 则$p_j\alpha = \alpha_j(\forall j \in J)$, 即下图可交换. [1]

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dotted, "\exists\alpha"'] \arrow[d, "\forall\alpha_j"] & ,\forall j \in J. \\ \prod\limits_{j\in J} A_j \arrow[r, "p_j"'] & A_j & \end{tikzcd}$$

下证唯一性. 设$\alpha' : A \to \prod\limits_{j\in J} A_j$使得$p_j\alpha' = \alpha_j, \forall j \in J$, 下证$\alpha = \alpha'$. 因为$\alpha(a) = (\alpha_j(a)) = (p_j\alpha'(a)) = \alpha'(a)$, 所以$\alpha = \alpha'$.

(2)定义

$$\begin{aligned}\beta: \bigoplus_{j\in J} A_j &\to \qquad B\\ \beta[(a_j)] &= \sum_{j\in J} \beta_j(a_j)\end{aligned}$$

则$\beta$是左$R$-模同态. (这是个有限和!) 因为对任意$a_j \in A_j$有$\beta\lambda_j(a_j) = \beta[(\cdots, 0, a_j, 0, \cdots)] = \beta_j(a_j)$, 则$\beta\lambda_j = \beta_j(\forall j \in J)$, 即下图可交换.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\lambda_j"] \arrow[d, "\beta_j"'] & \bigoplus_{j\in J} A_j \arrow[dl, dashed, "\beta"] & ,\forall j \in J \\ B & & \end{tikzcd}$$

下设$\beta' : \bigoplus\limits_{j\in J} A_j \to B$使得$\beta'\lambda_j = \beta_j, \forall j \in J$, 因为对$(a_j) \in \bigoplus\limits_{j\in J} A_j$, 有

$$\begin{aligned}\beta[(a_j)] &= \beta\Big(\sum_{j\in J} \lambda_j(a_j)\Big) = \sum_{j\in J} \beta(\lambda_j(a_j))\\ &= \sum_{j\in J} \beta_j(a_j) = \sum_{j\in J} \beta'\lambda_j(a_j) = \beta'\Big(\sum_{j\in J} \lambda_j(a_j)\Big) = \beta'[(a_j)],\end{aligned}$$

所以$\beta = \beta'$. □

[1] 定义泛性质一定要穿过所定义的对象, 且一定要有唯一性.

命题1.45与命题1.46是下面结果的特殊情形:

**命题 1.48**

设$\{A_i|i\in I\}$和$\{B_j|j\in J\}$是两族左$R$-模, 则有Abel群同构:

$$\mathrm{Hom}_R\Big(\bigoplus_{i\in I}A_i,\prod_{j\in J}B_j\Big)\cong\prod_{(i,j)\in I\times J}\mathrm{Hom}_R(A_i,B_j).$$

**证明:** (1)设$\lambda_i,p_j$分别是$\bigoplus_{i\in I}A_i$ 和$\prod_{j\in J}B_j$的第$i$个标准嵌入与第$j$个标准投射, $\forall i\in I,j\in J$. 定义

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathrm{Hom}_R\Big(\bigoplus_{i\in I}A_i,\prod_{j\in J}B_j\Big) & \to & \prod_{(i,j)\in I\times J}\mathrm{Hom}_R(A_i,B_j) \\ & \varphi(f) & = & (p_jf\lambda_i).\end{array}$$

则$\varphi$是Abel群同态.

(2)下证$\varphi$是单的: 设$f\neq 0$, 则存在$(a_i)\in\bigoplus_{i\in I}A_i$, 使得$f[(a_i)]\neq 0$ ①, 则

$$f[(a_i)]=f\left(\sum_{i\in I}\lambda_i(a_i)\right)=\sum_{i\in I}f\lambda_i(a_i)\neq 0,$$

所以存在$i\in I$使得$0\neq f\lambda_i(a_i)\in\prod_{j\in J}B_j$, 所以存在$j\in J$使得$p_jf\lambda_i(a_i)\neq 0,\Rightarrow p_jf\lambda_i\neq 0$. 所以$\varphi(f)=(p_jf\lambda_i)\neq 0\Rightarrow f$单.

(3)下证$\varphi$是满的: 设$(f_{ij})\in\prod_{(i,j)\in I\times J}\mathrm{Hom}(A_i,B_j)$, 由引理1.47(直积的泛性质), 存在唯一的$f_i: A_i\to\prod_{j\in J}B_j$, 使得$f_{ij}=p_jf_i(\forall j\in J)$.

$$\begin{tikzcd}
& & & A_i \arrow[dl, dotted, "\exists f_i"'] \arrow[d, "f_{ij}"] \\
A_i \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "f_i"'] & \bigoplus_{i\in I}A_i \arrow[r, dotted, "\exists! f"'] \arrow[dl, dotted, "\exists! f"] & \prod_{j\in J}B_j \arrow[r, "p_j"'] & B_j \\
\prod_{j\in J}B_j
\end{tikzcd}\qquad \forall i\in I,j\in J.$$

再由直和的泛性质, 存在唯一的$f:\bigoplus_{j\in J}A_i\to\prod_{j\in J}B_j$, 使得$f_i=f\lambda_i$. 所以$f_{ij}=p_jf_i=p_jf\lambda_i$, 则$(f_{ij})=(p_jf\lambda_i)=\varphi(f)$.

由上, $\varphi$是Abel群同构. □

① $f[(a_i)]$是直积中的元素, 由$f\neq 0$, 故必有一个分量不为0.

**注:** 先用直和泛性质, 再用直积的泛性质, 结果是一样的:

$$
\begin{tikzcd}
& & & \bigoplus_{i\in I} A_i \arrow[dl, dotted, "\exists f_j"'] \arrow[d, "\exists ! f"] \\
A_i \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "f_{ij}"'] & \bigoplus\limits_{i\in I} A_i \arrow[r, dotted, "\exists ! f"'] \arrow[dl, dotted, "\exists ! f_j"] & \prod\limits_{j\in J} B_j \arrow[r, "p_j"'] & B_j \\
B_j
\end{tikzcd}
\qquad \forall i\in I, j\in J
$$

一般情况下, 直和在前面可以拿出来, 直积在后面可以拿出来. 但若$I$是有限集, 则直和与直积是一回事, 只要是有限集, 直和与直积都能从Hom函子中拿出来.

**例 1.49**

当$|J|=\infty$, 一般地, 我们有

$$\mathrm{Hom}_R(B, \bigoplus_{j\in J} A_j) \ncong \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(B, A_j).$$
$$\mathrm{Hom}_R(B, \bigoplus_{j\in J} A_j) \ncong \mathrm{Hom}_R\Big(B, \prod_{j\in J} A_j\Big).$$

**证明:** (1)取$B=R$, 则左边$\cong \bigoplus\limits_{j\in J} A_j$, 右边$\cong \prod\limits_{j\in J} A_j$, 但是一般地, $\bigoplus\limits_{j\in J} A_j \lneqq \prod\limits_{j\in J} A_j$.

(2)记$\mathbb{Z}_m=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(\forall m\geq 1)$, 注意到如下事实:(自证)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)=\{f|f(r+m\mathbb{Z})=kr+n\mathbb{Z}, \text{其中} n|km\},$$

设$\{p_1, p_2, \cdots\}$是所有素数, 由上事实, 有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p_i}, \mathbb{Z}_{p_j}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{p_i}, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases} \tag{1.7}$$

对任意$f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p_i}, \mathbb{Z}_{p_i})$, 由$p_i f(x)=f(p_i x)$, 则有$p_i f=0$. 取$B=\bigoplus\limits_{j\in\mathbb{Z}^+} \mathbb{Z}_{p_j}$, $A_j=\mathbb{Z}_{p_j}, j\in\mathbb{Z}^+$, 则由命题1.48及(1.7)式,

$$\mathrm{LHS}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}^+} \mathbb{Z}_{p_j}, \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}^+} \mathbb{Z}_{p_j}\Big) \cong \prod_{j\in\mathbb{Z}^+} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\mathbb{Z}_{p_j}, \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}^+} \mathbb{Z}_{p_i}\Big) \cong \prod_{j\in\mathbb{Z}^+} \mathbb{Z}_{p_j},$$
$$\mathrm{RHS}=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}^+} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}^+} \mathbb{Z}_{p_i}, \mathbb{Z}_{p_j}\Big) \cong \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}^+}\Big(\prod_{i\in\mathbb{Z}^+} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p_i}, \mathbb{Z}_{p_j})\Big) \cong \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}^+} \mathbb{Z}_{p_j} \lneqq \prod_{j\in\mathbb{Z}^+} \mathbb{Z}_{p_j},$$

但是$\prod\limits_{j\in\mathbb{Z}^+} \mathbb{Z}_{p_j} \ncong \bigoplus\limits_{j\in\mathbb{Z}^+} \mathbb{Z}_{p_j}$. $\square$

**例 1.50**

当$|J|=\infty$, 一般地, 我们有

$$\prod_{j\in J}\mathrm{Hom}_R(A_j,B)\ncong\mathrm{Hom}_R\Big(\prod_{j\in J}A_j,B\Big)\ncong\bigoplus_{j\in J}\mathrm{Hom}_R(A_j,B)\tag{1.8}$$

**证明:** 取$A_j$如例1.49, 即$A_j=\mathbb{Z}_{p_j},\forall j\in\mathbb{Z}^+$. 再取$B=\prod\limits_{j\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{Z}_{p_j}/\bigoplus\limits_{j\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{Z}_{p_j}\neq 0$. 则

$$\mathrm{Hom}_R\Big(\prod_{j\in\mathbb{Z}^+}A_j,B\Big)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\prod_{j\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{Z}_{p_j},\prod_{j\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{Z}_{p_j}/\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{Z}_{p_j}\Big)\neq 0.$$

(因为有自然满同态.) 下证(1.8)式的右边式子每个分量为0.

设$0\neq f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_j,B)$, 则$0\neq f(\bar{1})$(生成元的像不为0), 而$f(\bar{1})$有无限多个非零分量, 则$f(\bar{0})=f(p_j\bar{1})=p_jf(\bar{1})$也有无限多个非零分量①, 所以$f(\bar{0})\neq\bar{0}$, 矛盾. 故$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_j,B)=0$, 即左$=0=$右. □

**例 1.51**

当$|J|=\infty$, 一般地, 我们有

$$\begin{aligned}&\bigoplus_{j\in J}(A_j\otimes_R B)\ncong\Big(\prod_{j\in J}A_j\Big)\otimes_R B\ncong\prod_{j\in J}(A_j\otimes_R B),\\&\bigoplus_{j\in J}(B\otimes_R A_j)\ncong B\otimes_R\Big(\prod_{j\in J}A_j\Big)\ncong\prod_{j\in J}(B\otimes_R A_j),\end{aligned}\tag{1.9}$$

**证明:** (1)设$p$为素数, 令$R=\mathbb{Z}$, $A_j=\mathbb{Z}_{p^j}(\forall j\in\mathbb{Z}^+)$, $B=\mathbb{Q}$. 设$\overline{a_j}\otimes q\in\mathbb{Z}_{p^j}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, 则

$$\overline{a_j}\otimes q=\overline{a_j}\otimes p^j\left(\frac{q}{p^j}\right)=(p^j\overline{a_j})\otimes\frac{q}{p^j}=\bar{0}\otimes\frac{q}{p_j}=0,\Longrightarrow\mathbb{Z}_{p^j}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=0,$$

所以左边$=0=$右边, 下证$\Big(\prod\limits_{j\in J}\mathbb{Z}_{p^j}\Big)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\neq 0$. 定义

$$\begin{aligned}\alpha:\ \mathbb{Z}&\to\prod_{j\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{Z}_{p^j}\\ r&\mapsto(r+p^j\mathbb{Z}),\end{aligned}$$

则$\alpha$是单$\mathbb{Z}$-模同态. (若对任意$j$, 有$r+p^j\mathbb{Z}=0$, 则$r=0$. )

(间接证明)由$\mathbb{Q}$是平坦$\mathbb{Z}$-模(后面将证), 则

$$\alpha\otimes 1_{\mathbb{Q}}:\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\to\Big(\prod_{j\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{Z}_{p^j}\Big)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$$

是单的. 由于$\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}\neq 0$, 则$\Big(\prod\limits_{j\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{Z}_{p^j}\Big)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\neq 0$.

(直接证明)考虑下图:

$$\begin{tikzcd}\mathbb{Z}\arrow[r,tail,"\alpha"]\arrow[d,hook,"i"'] & \prod\limits_{j\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{Z}_{p^j}\arrow[dl,dotted,"\exists f"]\\ \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

①$p_jf(\bar{1})$仅能把第$j$个分量变成0, 其他分量不会变成0. 同态映射必定会把0元素映往0元素.

由于$\mathbb{Q}$是内射$\mathbb{Z}$-模, 则存在$f:\prod\limits_{j\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{Z}_{p^j}\to\mathbb{Q}$, 使得上图可交换. ($f[(1+p^j\mathbb{Z})]=f\alpha(1)=i(1)=1$.) 定义

$$\begin{aligned} g:\ \Big(\prod_{j\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{Z}_{p^j}\Big)\otimes\mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ ((r_j+p^j\mathbb{Z}),q) &\mapsto f[(r_j+p^j\mathbb{Z})]q, \end{aligned}$$

则$g$是双加$\mathbb{Z}$-平衡映射, 存在唯一的Abel群同态$h:\Big(\prod\limits_{j\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{Z}_{p^j}\Big)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, 使得下图可交换:

$$\begin{tikzcd} \Big(\prod_{j\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{Z}_{p^j}\Big)\times\mathbb{Q} \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "g"'] & \Big(\prod_{j\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{Z}_{p^j}\Big)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \arrow[dl, dotted, "\exists! h"] \\ \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

故$g[((1+p^j\mathbb{Z}),q)]=f[(1+p^j\mathbb{Z})]q=1\cdot q=q$, 所以$g$满$\Rightarrow$ $h$满$\Rightarrow\Big(\prod\limits_{j\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{Z}_{p^j}\Big)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\neq 0$. □

**命题 1.52**

设$B\in R-\mathbf{Mod}$是有限生成的, 则有如下的Abel群同构:

$$\mathrm{Hom}_R\Big(B,\bigoplus_{j\in J}A_j\Big)\cong\bigoplus_{j\in J}\mathrm{Hom}_R(B,A_j).$$

**证明:** 定义$\varphi:\mathrm{Hom}_R\Big(B,\bigoplus\limits_{j\in J}A_j\Big)\to\bigoplus\limits_{j\in J}\mathrm{Hom}_R(B,A_j)$ 为$\varphi(f)=(p_jf)$. 由已知, $B$是有限生成的, 不妨设$B=Rb_1+\cdots+Rb_n$, 则对任意$b\in B$, 有$b=r_1b_1+\cdots+r_nb_n$(其中$r_i\in R$). 所以$f(b)=r_1f(b_1)+\cdots+r_nf(b_n)$. 由$f(b_i)\in\bigoplus\limits_{j\in J}A_j(\forall i\in I)$, 则$f(b_i)$中只有有限多个非零分量, $\forall 1\leq i\leq n$. 所以$f(b)$只有有限多个非零分量$\Rightarrow$ $(p_jf)$只有有限多个非零分量, 则$(p_jf)\in\bigoplus\limits_{j\in J}\mathrm{Hom}_R(B,A_j)$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "f_j"] & \bigoplus_{j\in J}A_j \arrow[r, "p_j"] & A_j \arrow[l, bend left, "\lambda_j"] \end{tikzcd}$$

显然$\varphi$是Abel群同态, 设$\varphi(f)=0$, 则$p_jf=0(\forall j\in J)$, 从而

$$f=1_{\bigoplus_{j\in J}A_j}f=\Big(\sum_{j\in J}\lambda_jp_j\Big)f=\sum_{j\in J}\lambda_j(p_jf)=0.$$

所以$\varphi$是单的. 再设$(f_j)\in\bigoplus\limits_{j\in J}\mathrm{Hom}_R(B,A_j)$, 如图, 令$f=\sum\limits_{j\in J}\lambda_jf_j$ ①, 则

$$p_jf=p_j\Big(\sum_{i\in J}\lambda_if_i\Big)=\sum_{i\in J}(p_j\lambda_if_i)=f_j(\forall j\in J\text{固定}).$$

所以$\varphi(f)=(p_jf)=(f_j)\Rightarrow\varphi$是满的. □

① 由$f_j$的取法, 这是个有限和!

### 1.6.1 补充内容：无挠模

**定义**

对于整环$R$, 若$M$是$R$-模, 定义$M$的**挠子模(torsion-submodule)**为

$$tM = \{m \in M : 存在非零的r \in R使得rm = 0\}.$$

$tM$中的非零元叫**挠元(torsion element)**. 若$tM = 0$, 称$M$是**无挠模(torsion-free module)**.

**命题**

主理想环上无挠的有限生成模一定是自由模.

**证明:** 参考[聂灵沼、丁石孙《代数学引论》, 高等教育出版社, 6.1节定理2.]

**例 1.6.2** 设$Q$是整环$R$的分式域, 证明: $A$是$Q$上的线性空间当且仅当$A$作为$R$-模同时是无挠模与可除模.

## 练习题 1.6

1. 判断题:

(1)设$N$是有限生成的左$R$-模$M$的任意子模, 且$\{A_j\}_{j\in J}$是一族左$R$-模, 这里$J$是指标集, 则

$$\mathrm{Hom}_R(M/N, \bigoplus_{j\in J} A_j) \cong \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(M/N, A_j).$$

(2)对一族左$R$-模$\{A_j\}_{j\in J}$, 若$\prod\limits_{j\in J} A_j$是投射左$R$-模, 则每个$A_j$都是投射左$R$-模.

(3)对任意指标集$I$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}^I) = 0$.

(4)设$I$是$R$的左理想, $\{A_j\}_{j\in J}$是一族左$R$-模, 其中$J$为指标集. 则

$$\mathrm{Hom}_R\Big(R/I, \bigoplus_{j\in J} A_j\Big) \cong \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(R/I, A_j).$$

2. 设$p$为素数, $B_n$是$p^n$阶循环群, $n$是正整数. 若$A = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, 证明

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(A, \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \ncong \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B_n).$$

**提示:** 证明$\mathrm{Hom}(A, A)$有无穷阶元, 但$\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B_n)$中元的阶都是有限的.

3. 证明: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\prod\limits_{n\geq 2} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\Big) \ncong \prod\limits_{n\geq 2} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$.

4. 若$Z_i \cong \mathbb{Z}$, $\forall i \in \mathbb{Z}^+$, 证明:

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\prod_{i=1}^{\infty} Z_i, \mathbb{Z}\Big) \ncong \prod_{i=1}^{\infty} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z_i, \mathbb{Z}).$$

**提示:** J. Łos, E. C. Zeeman证明了如下定理: [参考Fuchs, Infinite Abelian Groups II, Section 94]

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\prod_{i=1}^{\infty} Z_i, \mathbb{Z}\Big) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z_i, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_i.$$

5. 设$\{M_i\}_{i\in I}$是一族左$R$-模, 并且对任意$i \in I$, $N_i < M_i$. 证明:

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \Big/ \Big(\bigoplus_{i\in I} N_i\Big) \cong \bigoplus_{i\in I} (M_i/N_i).$$

6. 下面说明若$A_j$投射$(j \in J)$, 则$\prod_{j\in J} A_j$不一定投射. 考虑$M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots$, $R = \mathbb{Z}$.
(1)设$P = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \subset M$, 证明: $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M/P, \mathbb{Z}) = 0$.
(2)证明$M$不是投射$\mathbb{Z}$-模.

7. 设$R$是一个环, 记$(-)^* = \operatorname{Hom}_R(-, R)$, 对任意$N \in \operatorname{Mod} - R$, 定义右$R$-模同态$\sigma_N : N \to N^{**}$如下: 对任意$x \in N$与$f \in N^*$, $\sigma_N(x)(f) = f(x)$. 证明:
(1)对任意有限生成投射右$R$-模$P$, $P^*$是一个有限生成投射左$R$-模;
(2)若$N \in \operatorname{Mod} - R$, $M \in R - \operatorname{Mod}$, 且$\varphi : M \to N^*$是满的左$R$-模同态, 则对任意有限生成投射右$R$-模$P$和$g \in \operatorname{Hom}_R(N, P)$, 都存在$h \in \operatorname{Hom}_R(M^*, P)$, 使得$g = h\varphi^*\sigma_N$.

8. 设$R$是整环, $A, C$是$R$-模, $Q$是$R$的分式域.
对于固定的$r \in R$, 定义$A$上的**乘积映射(multiplication)**为$\mu_r : A \to A, a \mapsto ra$.
(1)证明: 若对任意$0 \neq r \in R$, $\mu_r$都是单同态, 则$A$是无挠模.
(2)证明: 若对任意$0 \neq r \in R$, $\mu_r$都是满同态, 则$A$是可除模.
(3)证明: 若对任意$0 \neq r \in R$, $\mu_r$都是同构, 则$A$是$Q$上的线性空间.
(4)证明: 若$C$或$A$都是$Q$上的线性空间, 则$C \otimes_R A$和$\operatorname{Hom}_R(C, A)$也是$Q$上的线性空间.

9. 设$P$是$\mathbb{Z}$中素数全体, 证明:
(1)$\bigoplus_{p\in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$是$\prod_{p\in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$的挠子模.
(2)$\Big(\prod_{p\in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\Big) \Big/ \Big(\bigoplus_{p\in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\Big)$是可除模.
(3)$t\Big(\prod_{p\in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\Big)$不是$\prod_{p\in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$的直和项.

## § 1.7　生成元与余生成元

回顾: 任何一个模都是自由模的同态像.

**定义**

设$X \in R-\mathbf{Mod}$, 若对任意$M \in R-\mathbf{Mod}$, 存在集合$J$, 使得有满的左$R$-模同态$\pi : X^{(J)} \twoheadrightarrow M$, 此时称**X生成M, X为$R-\mathbf{Mod}$的生成元(generator)**.

设$M, N \in R-\mathbf{Mod}$, 定义

$$\mathrm{Tr}_M(N) \triangleq \sum\{\mathrm{Im}\, h | h \in \mathrm{Hom}_R(N, M)\}$$

为$N$在$M$中的**迹(trace)**.

**断言 1.7.1** $\mathrm{Tr}_M(N)$是$M$的由$N$生成的最大子模.

**证明:** 一个简单观察: 易证$K(< M)$由$N$生成$\Leftrightarrow$ $K = \mathrm{Im}\, h$对某个$h : N^{(J)} \to M$成立. ($K$由$N$生成$\Leftrightarrow$有满的左$R$-模同态$h : X^{(J)} \to K$ $\Leftrightarrow$ $K = \mathrm{Im}\, h$对某个$h : X^{(J)} \to M$成立.)

$$\begin{tikzcd}
N^{(J)} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h"'] & & M \\
& K \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

设$h : N^{(J)} \to M$, 则

$$h[(x_j)] = h\Big(\sum_{j\in J} \lambda_j(x_j)\Big) = \sum_{j\in J} h\lambda_j(x_j),$$

所以$\mathrm{Im}\, h \subseteq \sum_{j\in J} \mathrm{Im}\, h\lambda_j \subseteq \mathrm{Tr}_M(N)$. 注意到存在指标集$I$使得$\mathrm{Tr}_M(N) \triangleq \sum_{i\in I}\{\mathrm{Im}\, h_i | h_i : N \to M\}$, 定义

$$\begin{array}{rccc}
h: & N^{(J)} & \to & M \\
 & h[(x_i)] & = & \sum_{i\in I} h_i(x_i),
\end{array}$$

则$h$是左$R$-模同态, 且$\mathrm{Im}\, h = \mathrm{Tr}_M(N)$, 所以$\mathrm{Tr}_M(N)$由$N$生成. □

**注:** (1)$_R R$是$R-\mathbf{Mod}$的一个生成元. (任何一个模是自由模的同态像，$J$取为$M$.　)

(2)设$X$是$R-\mathbf{Mod}$的生成元, 且$Y$生成$X$, 则$Y$也是$R-\mathbf{Mod}$的一个生成元.

(3)$N$生成$M \Leftrightarrow \mathrm{Tr}_M(N) = M$.

**定义**

设$R, S$是环, $F : R-\mathbf{Mod} \to S-\mathbf{Mod}$是加法共变函子. 如果Abel群同态

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R(M, N) & \to & \mathrm{Hom}_R(F(M), F(N)) \\
f & \mapsto & F(f)
\end{array}, \forall M, N \in R-\mathbf{Mod}$$

是单的, 则称$F$是**忠实的(faithful)**.(即$\mathrm{Hom}_R(X, f) = 0$可推出$f = 0$.　)

(反变函子有类似定义: 左→右, 右→左, 即$\mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(F(N), F(M))$).

**定理 1.53**

设$X \in R-\mathbf{Mod}$, TFAE:

(1)$X$是$R-\mathbf{Mod}$的一个生成元;

(2)$\mathrm{Hom}_R(X,-)$是忠实的;

(3)$\mathrm{Tr}_R(X)=R$.(这里$\mathrm{Tr}_R(X)\overset{左}{\lhd} R$.)

(4)$\exists n\in\mathbb{Z}^+$, 使得有满的左$R$-模同态$X^{(n)}\twoheadrightarrow {}_RR$. (等价地, ${}_RR$是$X^{(n)}$的直和项.)

**证明:** “(1) $\Rightarrow$ (2)”: 设$f: M\to N$且$\mathrm{Hom}_R(X,f)=0$.

由$\mathrm{Hom}_R(X,f):\mathrm{Hom}_R(X,M)\to\mathrm{Hom}_R(X,N)$, 故$\forall g\in\mathrm{Hom}_R(X,M)$, $fg=\mathrm{Hom}_R(X,f)(g)=0$. 只需证$f=0$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\forall g"'] \arrow[dr, dotted, "0"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

【法一】由(1), 存在满的左$R$-模同态$\pi: X^{(J)}\twoheadrightarrow M$, 则$\pi\lambda_j\in\mathrm{Hom}_R(X,M),\forall j\in J$, 所以$f\pi\lambda_j=0,\forall j\in J$, 所以

$$f\pi=f\pi 1_{X^{(J)}}=f\pi\Big(\sum_{j\in J}\lambda_j p_j\Big)=\sum_{j\in J}f\pi\lambda_j p_j=0.$$

由$\pi$是满射, 则$f=0$.

【法二】由$\mathrm{Tr}_M(X)=M$, 则

$$fM=f(\mathrm{Tr}_M(X))=f\Big(\sum_{g\in\mathrm{Hom}_R(X,M)}g(X)\Big)=\sum_{g\in\mathrm{Hom}_R(X,M)}fgX=0,\Rightarrow f=0.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\lambda_j"'] \arrow[ddr, dotted, "0"] & \\ X^{(J)} \arrow[d, "\pi"'] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

“(2) $\Rightarrow$ (3)”: [1] 考虑左$R$-模正合列$\mathrm{Tr}_R(X)\hookrightarrow R\xrightarrow{\pi}R/\mathrm{Tr}_R(X)$, 其中$\pi$是自然满同态. 对任意$g\in\mathrm{Hom}_R(X,R)$, 有$\mathrm{Im}\,g\subseteq\mathrm{Tr}_R(X)=\mathrm{Ker}\,\pi$, 则$0=\pi g=\mathrm{Hom}_R(X,\pi)(g)$, 则$\mathrm{Hom}_R(X,\pi)=0$. 由(2), $\mathrm{Hom}_R(X,-)$是忠实的, 则$\pi=0$, 则$R/\mathrm{Tr}_R(X)=0$, 即$\mathrm{Tr}_R(X)=R$.

“(3) $\Rightarrow$ (4)”: 由(3)可知, 存在$h_i\in\mathrm{Hom}_R(X,R)$与$x_i\in X$使得$1_R=\sum_{i=1}^n h_i(x_i)$. [2]

定义$h: X^{(n)}\to R$为$h[(y_1,\cdots,y_n)]=\sum_{i=1}^n h_i(y_i)$, 则$h$是左$R$-模同态, 且$R_R$的生成元$1_R\in\mathrm{Im}\,h\Rightarrow h$是满射.

“(4) $\Rightarrow$ (1)”: 显然. □

[1] 要证明$M$的子模$M'$满足$M'=M$, 可证明$M/M'=0$, 此处便是证明$R/_{\mathrm{Tr}_R(X)}=0$; 要证明一个模是0, 可以考虑证它嵌入一个模, 嵌入映射是0, 或者证明满同态是0.

[2] 注意$\mathrm{Tr}_R(X)$定义中的求和是有限和, 所以$1_R\in R$可以写成有限个$\mathrm{Im}\,h$中元素的和.

回忆单模的简单性质:

(1)单模是循环模, 即对于单模$S$, 对任意$0\neq x\in S$, 有$S=Rx$.

(2)设$S$是单模, 若$f:M\to S$是非零同态, 则$f$是满射; 若$f:S\to M$是非零同态, 则$f$是单的. 从而如果$S_1,S_2$是两个单模, $S_1\ncong S_2$, 则$\mathrm{Hom}_R(S_1,S_2)=0$.(即非同构单模之间只有零同态.)

(3)$N$是$M$的极大子模$\Leftrightarrow M/N$是单的.

**断言 1.7.2** 设$_RM$是有限生成的, 则$M$的任意真子模必包含在$M$的某个极大子模中.

**证明:** 设$M=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$且$A\subsetneqq M$. 记

$$\langle\Lambda,\leq\rangle=\{B|A\subseteq B\subsetneqq M\}(\neq\varnothing),$$

它是偏序集, 并设$\Gamma$是$\Lambda$的全序子集, 记$C=\bigcup\limits_{B\in\Gamma}B$, 则$A\subseteq C\subseteq M$.

若$C=M$, 由于$M$是有限生成模, 则存在$B\in\Gamma$使得$x_1,\cdots,x_n\in B\Rightarrow B=M$, 矛盾. 故$C\subsetneqq M$, 故$C\in\Lambda$. 由Zorn引理, $\Lambda$有极大元$D$. 设$D\subseteq L\subsetneqq M$, 则$L\in\Lambda$, 由$D$的极大性, $L=D$, 从而$D$是$M$的极大子模. □

**注:** 在上述证明中把$A$改成0也可以.

**定理 1.54**

设$P$是投射模. TFAE:

(1)$P$是$R-\mathbf{Mod}$的生成元;

(2)$P$生成所有单的左$R$-模;

(3)$\mathrm{Hom}_R(P,S)\neq 0,\forall$单的左$R$-模$S$.

**证明:** "(1) $\Rightarrow$ (2)": 显然.

"(2) $\Rightarrow$ (3)": 设$S$是单的左$R$-模, 则存在满的左$R$-模同态$P^{(J)}\twoheadrightarrow S$, 由命题1.48,

$$0\neq\mathrm{Hom}_R(P^{(J)},S)\cong[\mathrm{Hom}_R(P,S)]^J.$$

所以$\mathrm{Hom}_R(P,S)\neq 0$.

"(3) $\Rightarrow$ (1)": 由定理1.53, 只需证$\mathrm{Tr}_R(P)=R$即可. 若$\mathrm{Tr}_R(P)\subsetneqq R$, 由断言1.7.2[1], $\mathrm{Tr}_R(P)$包含在$R$的某个极大子模$L$中, 所以$R/L$是单模. 由(3), 存在$0\neq f\in\mathrm{Hom}_R(P,R/L)$. 考虑下图:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "\exists g"'] \arrow[d, "f"] & \\
R \arrow[r, two heads, "\pi"] & R/L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由$P$是投射模, 则存在$g\in\mathrm{Hom}_R(P,R)$使得$f=\pi g$. 由于$\mathrm{Im}\,g\subseteq\mathrm{Tr}_R(P)\subseteq L\subseteq\mathrm{Ker}\,\pi$, 则$f=\pi g=0$, 矛盾. 综上, $\mathrm{Tr}_R(P)=R$, 从而$P$是$R-\mathbf{Mod}$的生成元. □

**注:** "(2) $\Rightarrow$ (3)"没有用到$P$是投射模与$S$是单模的条件. 若$P$是生成元, 则对任意$0\neq A\in R-\mathbf{Mod}$, 都有$\mathrm{Hom}_R(P,A)\neq 0$, 即生成元到任何非零模都有非零同态.

[1] $_RR$是有限生成模, 生成元为$1_R$.

**定义**

设$Y \in R-\mathbf{Mod}$. 若$\forall M \in R-\mathbf{Mod}$, 存在集合$J$使得有单的左$R$-模同态$\alpha: M \rightarrowtail Y^J$, 此时称$\boldsymbol{Y}$**余生成**$\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{Y}$为$R-\mathbf{Mod}$的**余生成元**.

设$M, N \in R-\mathbf{Mod}$, 称

$$\mathrm{Rej}_M(N) \triangleq \bigcap \{\mathrm{Ker}\, h | h : h \in \mathrm{Hom}_R(M, N)\}$$

为$N$在$M$中的**驳回(rejection)**.

**注:** 比较生成元与余生成元的两个定义, “驳回”定义为“核的交”, “迹”定义为“像的和”.

**断言 1.7.3** $\mathrm{Rej}_M(N)$*是*$M$*的使得*$M/K$*由*$N$*余生成的最小子模, 即:*
*(i)若*$K < M$*且*$M/K$*由*$N$*余生成, 则*$\mathrm{Rej}_M(N) < K$*;* *(ii)*$M/_{\mathrm{Rej}_M(N)}$*由*$N$*余生成.*

**证明:** 一个简单的观察: $K(< M)$使$M/K$由$N$余生成$\Leftrightarrow$存在$h : M \to N^J$使得$K = \mathrm{Ker}\, h$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook] & M \arrow[rr, dashed, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & N^J \\ & & M/K \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

设$h : M \to N^J$, 则$\mathrm{Ker}\, h = \bigcap\limits_{j\in J} \mathrm{Ker}\, p_j h \supseteq \mathrm{Rej}_M(N)$(若$h = 0$, 则每个分量$p_j h = 0$). 由定义可知存在指标集$I$使得$\mathrm{Rej}_M(N) = \bigcap\limits_{i\in I}\{\mathrm{Ker}\, h_i | h_i : M \to N\}$. 定义$h : M \to N^I$为$h(x) = (h_i(x))$, 则$h$是左$R$-模同态, 且$\mathrm{Ker}\, h = \bigcap\limits_{i\in I} \mathrm{Ker}\, h_i = \mathrm{Rej}_M(N)$, 所以$M/_{\mathrm{Rej}_M(N)}$由$N$余生成. □

**注:** (1)设$Y$是$R-\mathbf{Mod}$的余生成元, 且$X$余生成$Y$, 则$X$也是$R-\mathbf{Mod}$的余生成元;
(2)由断言1.7.3, $N$余生成$M \Leftrightarrow \mathrm{Rej}_M(N) = 0$.

**定理 1.55**

设$Y \in R-\mathbf{Mod}$. TFAE:
(1)$Y$是$R-\mathbf{Mod}$的余生成元;
(2)$\mathrm{Hom}_R(-, Y)$是忠实的.

**证明:** “(1) $\Rightarrow$ (2)”: 设$f : M \to N$使得$\mathrm{Hom}_R(f, Y) = 0$, 注意到$\mathrm{Hom}_R(f, Y) : \mathrm{Hom}_R(N, Y) \to \mathrm{Hom}_R(M, Y)$, 则$\forall g \in \mathrm{Hom}_R(N, Y)$, 与$gf = \mathrm{Hom}_R(f, Y)(g) = 0$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "0"'] & N \arrow[d, "\forall g"] \\ & Y \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[ddr, dashed, "0"'] & N \arrow[d, "\alpha"] \\ & Y^J \arrow[d, "p_j"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

由于$Y$是余生成元, 所以存在单同态$\alpha : N \rightarrowtail Y^J$. 由$p_j\alpha \in \mathrm{Hom}_R(N, Y), \forall j \in J$, 所以$p_j\alpha f = 0$, $\forall j \in J$. 则$p_j\alpha f(x) = 0$, $\forall x \in M, j \in J$. 所以$(p_j\alpha f(x) = 0)$, 即$\alpha f(x) = 0$, $\forall x \in M$. [1] 由$\alpha$是单同态,

[1]这里不可以像定理1.53那样用$\sum\limits_{j\in J} \lambda_j p_j = 1$去做, 因为这里的求和可能是无限和.

故$f(x)=0,\forall x\in M$, 所以$\mathrm{Hom}_R(-,Y)$是忠实的.

"(2) $\Rightarrow$ (1)"：设$i:\mathrm{Rej}_M(Y)\hookrightarrow M$, 注意到$\mathrm{Hom}_R(i,Y):\mathrm{Hom}_R(M,Y)\to\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Rej}_M(Y),Y)$, 则$\forall h\in\mathrm{Hom}_R(M,Y)$, 有$\mathrm{Ker}\,h\supseteq\mathrm{Rej}_M(Y)=\mathrm{Im}\,i$(嵌入), 所以$0=hi=\mathrm{Hom}_R(i,Y)(h)$.

从而$\mathrm{Hom}_R(i,Y)=0$. 由(2)可知$i=0$, 所以$\mathrm{Rej}_M(Y)=0$, 从而$Y$是$R-\mathbf{Mod}$的余生成元. □

**定理 1.56**

设$E\in R-\mathbf{Mod}$是内射模, TFAE:

(1)$E$是$R-\mathbf{Mod}$的余生成元;

(2)$E$余生成所有单的左$R$-模;

(3)$\mathrm{Hom}_R(S,E)\neq 0$, $\forall$单的左$R$-模$S$.

**证明:**："(1) $\Rightarrow$ (2)"：显然.

"(2) $\Rightarrow$ (3)"：设$S$是单的左$R$-模，则存在$J$使得$\alpha:S\rightarrowtail E^J$为单的左$R$-模同态, 由命题1.48, $0\neq\mathrm{Hom}_R(S,E^J)\cong(\mathrm{Hom}_R(S,E))^J$. 所以$\mathrm{Hom}_R(S,E)\neq 0$.

"(3) $\Rightarrow$ (1)": [1] 设$0\neq M\in R-\mathbf{Mod}$, 且$0\neq x\in M$. 由断言1.7.2, $Rx$有极大子模$N$, 故$Rx/N$是单模. 由(3), $\mathrm{Hom}_R(Rx/N,E)\neq 0$, 所以存在$0\neq g\in\mathrm{Hom}_R(Rx/N,E)$.

$$\begin{tikzcd} Rx \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[ddl, dashed, "\exists h"] \\ Rx/N \arrow[d, "g"'] & \\ E & \end{tikzcd}$$

设$\pi:Rx\to Rx/N$是自然满同态, 则$g\pi(x)=g(x+N)\neq 0$(若$x\in N$，则$N=Rx$，与$N$极大矛盾). 由于$E$是内射模, 则存在$h:M\to E$使得$hi=g\pi$, 故$h(x)=hi(x)=g\pi(x)\neq 0$, 故$x\notin\mathrm{Ker}\,h$, 从而$\mathrm{Rej}_M(E)=0$, 所以$E$是$R-\mathbf{Mod}$的余生成元. □

**注:**"(2) $\Rightarrow$ (3)"没有用到$S$是单模与$E$是内射的条件, 所以下面结论成立：设$E$是$R-\mathbf{Mod}$的余生成元, 则$\forall 0\neq M\in R-\mathbf{Mod}$, $\mathrm{Hom}_R(M,E)\neq 0$.

**例 1.7.1** 设$\mathcal{L}=\{$非同构的单的左$R$-模$\}$, $\bigoplus\limits_{S\in\mathcal{L}}S$的内射包络是$R-\mathbf{Mod}$的内射余生成元.

**证明:** 记$Q$为$\bigoplus\limits_{S\in\mathcal{L}}S$的内射包络, 则有本质单同态$\bigoplus\limits_{S\in\mathcal{L}}S\rightarrowtail Q$, 所以对任意单的左$R$-模$S$, 有$S\rightarrowtail\bigoplus\limits_{S\in\mathcal{L}}S\rightarrowtail Q$, 即$\mathrm{Hom}_R(S,Q)\neq 0$. 由定理1.56, $Q$是$R-\mathbf{Mod}$的内射余生成元. □

**例 1.7.2** $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$是$\mathbb{Z}-\mathbf{Mod}$的余生成元.

**证明:** 前面已经证明了$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$是内射$\mathbb{Z}$-模. 设$S$是单的$\mathbb{Z}$-模, 则$S\cong\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, 其中$p$是素数. (单的$\mathbb{Z}$–模是素数阶循环群) 定义

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ & r+p\mathbb{Z} & \mapsto & \dfrac{r}{p}+\mathbb{Z} \end{array}$$

则$f$是非零同态, 由定理1.56可知结论成立. □

[1]这个地方老师说"挺有意思的, 期末考试会考书上结论, 这个(3) $\Rightarrow$ (1)考了很多次. "只需证$\mathrm{Rej}_M(E)=0$, 即$\bigcap\{\mathrm{Ker}\,h|h:M\to E\}=0$. 可证明对任意$0\neq x\in M$, $x$不在某个核里面, 即存在$h$使得$h(x)\neq 0$, $x\notin\mathrm{Ker}\,h$. 要构造$h$以及单模$S$，而$S$与极大子模对应.

接下来建立内射模与平坦模之间的联系.

**定义**

把$(-)^+ := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$称为**特征函子(character functor)**. 特别地, 对$M \in R-\mathbf{Mod}$, 称$M^+$为$M$的**特征模**.

**注:** 特征模是右$R$-模.

**命题 1.57**

左$R$-模序列$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$是正合列$\Longleftrightarrow 0 \to C^+ \xrightarrow{\beta^+} B^+ \xrightarrow{\alpha^+} A^+ \to 0$是正合列.

**证明:** “$\Rightarrow$”: 由$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$是内射模即得. (复习：若左$R$-模$Q$是内射模，则$\mathrm{Hom}_R(-, Q)$是正合函子.)

“$\Leftarrow$”: 只需证由$C^+ \xrightarrow{\beta^+} B^+ \xrightarrow{\alpha^+} A^+$ 正合可推出$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$正合即可. ($A^+, B^+, C^+$可以由0代替，即可得欲证结论. )

由于$(-)^+$是反变函子, 则$(\beta\alpha)^+ = \alpha^+\beta^+ = 0$. 由于$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$是$\mathbb{Z}-\mathbf{Mod}$的内射余生成元, 由定理1.55, $(-)^+$是忠实函子, 所以$\beta\alpha = 0$, 故$\mathrm{Im}\,\alpha \subseteq \mathrm{Ker}\,\beta$.

下证$\mathrm{Ker}\,\beta \subseteq \mathrm{Im}\,\alpha$. (反证)设$b \in \mathrm{Ker}\,\beta \setminus \mathrm{Im}\,\alpha$, 则$0 \neq b + \mathrm{Im}\,\alpha \in B/\mathrm{Im}\,\alpha$. 由于$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$是$\mathbb{Z}$-模的内射余生成元, 所以$\mathrm{Rej}_{B/\mathrm{Im}\,\alpha}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$, 所以存在$g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B/\mathrm{Im}\,\alpha, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$使得$g(b + \mathrm{Im}\,\alpha) \neq 0$. 设$\pi : B \to B/\mathrm{Im}\,\alpha$是自然满同态, 令$f = g\pi (f \in B^+)$, 则$f(b) = g\pi(b) = g(b + \mathrm{Im}\,\alpha) \neq 0$, 并且由$f(\mathrm{Im}\,\alpha) = g\pi(\mathrm{Im}\,\alpha) = 0$可知$0 = g\pi\alpha = f\alpha = \alpha^+(f)$, 故$f \in \mathrm{Ker}\,\alpha^+ = \mathrm{Im}\,\beta^+$, 所以存在$g_1 \in C^+$使得$f = \beta^+(g_1) = g_1\beta$. 所以$0 \neq f(b) = g_1\beta(b) = 0$, 矛盾. 因此$\mathrm{Ker}\,\beta \subseteq \mathrm{Im}\,\alpha$. □

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[rr, bend left, "f"] & B/\mathrm{Im}\,\alpha \arrow[r, "g"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

**注:** “$\Rightarrow$”只用到了$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$的内射模性质, “$\Leftarrow$”只用到$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$是余生成元的性质. 即:

设$E \in R-\mathbf{Mod}$是余生成元, $(-)^* = \mathrm{Hom}_R(-, E)$, 如果$0 \to C^* \xrightarrow{\beta^*} B^* \xrightarrow{\alpha^*} A^* \to 0$是正合列, 则$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$是正合列.

**定义 1.58: 自然变换**

设$F, G : R-\mathbf{Mod} \to S-\mathbf{Mod}$是两个共变函子, 称对应$\tau$为**从$F$到$G$的自然变换(natural transformation)**, 若对任意左$R$-模$A$都有$\tau_A \in \mathrm{Hom}_S(F(A), G(A))$, 并且对任意$f \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$都有$G(f) \cdot \tau_A = \tau_B F(f)$, 即下图可交换:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ B & F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

若所有$\tau_A$都是同构, 称$\tau$是$F$到$G$的**自然同构(natural isomorphism)**.

**注:** 自然变换不是映射, 而是函子到函子之间的对应、函子范畴之间对象与对象之间的态射. 在§2.3节中会引入更一般化的范畴中对自然变换的定义.

回顾: 张量积是Abel群. 设$R,S$是环.

- $\forall {}_RA, {}_SB_R$, 可以定义$B\otimes_R A$为左$S$-模:

$$s\Big(\sum_{<\infty} b_j\otimes a_j\Big)=\sum_{<\infty}(sb_j)\otimes a_j.$$

- $\forall A_R, {}_RB_S$, 可以定义$A\otimes_R B$为右$S$-模:

$$\Big(\sum_{<\infty} a_j\otimes b_j\Big)s=\sum_{<\infty}a_j\otimes (b_js).$$

**定理 1.59: 伴随同构定理, The Adjoint Isomorphism Theorem**

我们有:

(1)$\forall {}_RA, {}_SB_R, {}_SC$, 有如下的Abel群同构:

$$\mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A, C)\cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C)),$$

(2)$\forall A_R, {}_RB_S, C_S$, 有如下的Abel群同构:

$$\mathrm{Hom}_S(A\otimes_R B, C)\cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C)).$$

并且固定$A,B,C$中的任意两个, 上面的同构是函子的自然同构. (例如固定$A,B$，把$C$变为“$-$”，可得自然同构)

**注:** 不用刻意去记. (1)右模$\otimes$左模才有意义; (2)张量在前, Hom在后. (3)换环, $S$变成$R$.

**证明:** 对任意$f\in \mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A, C)$, 定义

$$\begin{array}{rccc}\tau: & \mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A, C) & \to & \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C)) \\ & \tau(f)(a)(b) & = & f(b\otimes a)\end{array}$$

下面验证定义合理. 先证$\tau(f)(a)$是左$S$-模同态. 显然$\tau(f)(a)$是Abel群同态(加法封闭), 对任意$a\in A, b\in B, r\in R$, 有

$$\tau(f)(a)(sb)=f(sb\otimes a)=f(s(b\otimes a))=sf(b\otimes a)=s\tau(f)(a)(b).$$

所以$\tau(f)(a)$是左$S$-模同态. 再证$\tau(f)$是左$R$-模同态. 显然$\tau(f)$是Abel群同态(加法封闭). 对任意$a\in A$, $b\in B$, $r\in R$, 有

$$\begin{aligned}\tau(f)(ra)(b)&=f(b\otimes ra)=f(br\otimes a)=\tau(f)(a)(br)\\ &\xlongequal[\text{命题1.3(1)}]{\tau(f)(a)\in{}_R[\mathrm{Hom}_S(B,C)]} r\tau(f)(a)(b),\end{aligned}$$

所以$\tau(f)(ra)=r\tau(f)(a)$, 故$\tau(f)$是左$R$-模同态.

对任意$g\in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C))$, $a\in A, b\in B$, 定义

$$\begin{array}{rccc}\sigma: & \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C)) & \to & \mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A, C) \\ & \sigma(g)(b\otimes a) & = & g(a)(b).\end{array}$$

下面说明$\sigma$是well-defined(即$g \mapsto \sigma(g)$有一一对应). 定义

$$\begin{aligned} h: \quad B \times A &\to \quad C \\ h[(b,a)] &= \quad g(a)(b), \end{aligned}$$

则$h$是双加映射, 下证它为$R$-平衡映射. $\forall r \in R$, 有

$$\begin{aligned} h[(br,a)] = g(a)(br) &\xlongequal[\text{命题1.3(1)}]{g(a)\in {}_R[\mathrm{Hom}_S(B,C)]} rg(a)(b) \\ &\xlongequal{g\text{是左}R\text{-模同态}} g(ra)(b) = h[(b,ra)]. \end{aligned}$$

则$h$是双加$R$-平衡映射, 故存在唯一的Abel群同态$\sigma(g): B \otimes_R A \to C$, 使得下图可交换:

$$\begin{tikzcd} B \times A \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "h"'] & B \otimes_R A \arrow[dl, dashed, "\exists!\sigma(g)"] \\ C & \end{tikzcd}$$

$\forall a \in A, b \in B, s \in S$, 有

$$\begin{aligned} \sigma(g)[s(b\otimes a)] &= \sigma(g)(sb\otimes a) = g(a)(sb) \\ &\xlongequal{g(a)\text{是左}S\text{-模同态}} sg(a)(b) = s\sigma(g)(b\otimes a), \end{aligned}$$

故$\sigma(g)$是左$S$-模同态. 所以$\sigma(g)$定义合理.

下面说明$\tau,\sigma$都是Abel群同构: 易知$\tau,\sigma$都是Abel群同态, 由于

$$\begin{aligned} \sigma\tau(f)(b\otimes a) &= \tau(f)(a)(b) = f(b\otimes a), \\ \tau\sigma(g)(a)(b) &= \sigma(g)(b\otimes a) = g(a)(b), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \sigma\tau &= 1_{\mathrm{Hom}_R(B\otimes_R A, C)}, \\ \tau\sigma &= 1_{\mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(B,C))}, \end{aligned}$$

故$\tau,\sigma$都是同构.

由Hom函子与$\otimes$函子的性质, 易知固定$A,B,C$中的两个, 这个同构是函子之间的自然同构. □

**推论 1.60: (引理1.24的推广)**

设$R,S$是环, ${}_SE$是内射模, ${}_SB_R$是$(R,S)$-双模, 且$B_R$是平坦模. 则$\mathrm{Hom}_S(B,E)$是内射左$R$-模.

**证明:** 只需证$\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{Hom}_S(B,E))$是正合函子. 由定理1.59,

$$\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{Hom}_S(B,E)) \cong \mathrm{Hom}_S(B\otimes_R -, E) = \mathrm{Hom}_S(-,E)\circ(B\otimes_R -),$$

由已知, $B_R$是平坦模, 并且${}_SE$是内射模, 所以$B\otimes_R -$与$\mathrm{Hom}_S(-,E)$都是正合的.

故$\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{Hom}_S(B,E))$是正合的, 所以$\mathrm{Hom}_S(B,E)$是内射左$R$-模. □

**推论 1.61**

$(R_R)^+$是$R-\mathbf{Mod}$的内射余生成元, $({}_RR)^+$是$\mathbf{Mod}-R$的内射余生成元.

**证明:** 只证明$(R_R)^+$是$R-\mathbf{Mod}$的内射余生成元. 由推论1.60, $(R_R)^+$是内射左$R$-模. 设$M\in R-\mathbf{Mod}$. 由定理1.59,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(M,(R_R)^+)&=\mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))\\&\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R\otimes_R M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &&(\text{定理}1.59)\\&\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=M^+. &&(\text{命题}1.33)\end{aligned}$$

由于$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$是$\mathbb{Z}-\mathbf{Mod}$的内射余生成元, 若$M$为单模, 由定理1.56, $M^+\neq 0$, 故$\mathrm{Hom}_R(M,(R_R)^+)\cong M^+\neq 0$, 再由定理1.56可得$(R_R)^+$是$R-\mathbf{Mod}$的内射余生成元. □

**注:** 在定理1.55中可以再加一条: (3)$\mathrm{Rej}_{(R_R)^+}(Y)=0$.

**例 1.7.3** 由于$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z})=0$, 所以

- $\mathbb{Z}-\mathbf{Mod}$的投射生成元$\mathbb{Z}$既不是内射的, 也不是余生成元.
- $\mathbb{Z}-\mathbf{Mod}$的内射余生成元$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$既不是投射的, 也不是生成元.

**例 1.7.4** 设$X\in R-\mathbf{Mod}$.

- 若$X$不是投射模, 则$X\oplus{}_RR$是$R-\mathbf{Mod}$的非投射生成元;
- 若$X$不是内射模, 则$X\oplus(R_R)^+$是$R-\mathbf{Mod}$的非内射余生成元.

我们把环$R$称为**半单环**, 若$R$满足“所有左$R$-模是投射模⇔所有左$R$-模是内射模”. 例如如果$R$是域, 那么$R$就是一个半单环, 见第§1.4的习题部分.

**例 1.7.5** ${}_RR\oplus(R_R)^+$同时是$R-\mathbf{Mod}$的生成元与余生成元.
若$R$是半单环, 则${}_RR\oplus(R_R)^+$同时是$R-\mathbf{Mod}$的投射生成元与内射余生成元.

**定理 1.62: Lambek, 1964**

$B\in\mathbf{Mod}-R$是平坦模⇔ $B^+\in R-\mathbf{Mod}$是内射模.

**证明:** “⇒”: 在推论1.60中取$S=\mathbb{Z}$, $E=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$即得.

“⇐”: 设$f:M\rightarrowtail N$是单的左$R$-模同态, 由于$B^+\in R-\mathbf{Mod}$是内射模, 所以$\mathrm{Hom}_R(-,B^+)$(反变的正合函子)是满的. 由定理1.59, 有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Hom}_R(N,B^+) \arrow[r, two heads, "\mathrm{Hom}_R(f,B^+)"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_R(M,B^+) \arrow[d, "\cong"] \\ (B\otimes_R N)^+ \arrow[r, "(B\otimes_R f)^+"] & (B\otimes_R M)^+\end{tikzcd}$$

所以$(B\otimes_R f)^+$是满同态. 由命题1.57, $B\otimes_R f$是单同态. 所以$B$是平坦模. □

**定理 1.63: 平坦模判别方法, Modified Flatness Test**

设$B \in \mathbf{Mod}-R$, TFAE:

(1)$B$是平坦模;

(2)$\forall I \overset{左}{\lhd} R$和$i : I \hookrightarrow R$, 有单的Abel群同态$1_B \otimes i : B \otimes_R I \to B \otimes_R R$;

(3)$\forall I \overset{左}{\lhd} R$, 有Abel群同构

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_R I & \cong & BI \\ b \otimes x & \mapsto & bx \end{array}$$

**注:** 定理1.62给出了平坦模与内射模之间的关系. 通过把平坦模转化为内射模, 我们可以用Baer准则来推出结论.

**证明:** “(1) $\Rightarrow$ (2)”: 显然.

“(2) $\Rightarrow$ (1)”: 由(2)以及命题1.57, $(1_B \otimes i)^+ : (B \otimes_R R)^+ \to (B \otimes_R I)^+$是满的. 由定理1.59, 有如下交换图:

$$\begin{tikzcd} (B \otimes_R R)^+ \arrow[r, "(1_B \otimes i)^+"] \arrow[d, "\cong"'] & (B \otimes_R I)^+ \arrow[d, "\cong"] \\ \mathrm{Hom}_R(R, B^+) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(i, B^+)"] & \mathrm{Hom}_R(I, B^+) \end{tikzcd}$$

所以$\mathrm{Hom}_R(i, B^+)$是满的, 即对任意$f \in \mathrm{Hom}_R(I, B^+)$, 存在$g \in \mathrm{Hom}_R(R, B^+)$, 使得

$$f = \mathrm{Hom}_R(i, B^+)g = gi.$$

由Baer准则, $B^+$是内射模. 由定理1.62, $B$是平坦模.

“(2) $\Leftrightarrow$ (3)”: 对任意$I \overset{左}{\lhd} R$, 考虑下图:

$$\begin{tikzcd} B \otimes_R I \arrow[r, two heads, "1_B \otimes i"] \arrow[dr, "h(1_B \otimes i)"'] & B \otimes_R R \arrow[d, "h"] & b \otimes r \arrow[d, squiggly] \\ & B(= BR) & br \end{tikzcd}$$

由命题1.33, $h : B \otimes_R R \to B$, $b \otimes r \mapsto br$是群同构. 对任意$b \in B, x \in I$, 有

$$h(1_B \otimes i)(b \otimes x) = h(b \otimes x) = bx,$$

所以$h(1_B \otimes i)$是$B \otimes_R I \to BI$的满同态. 因此

$$(2)成立(即1_R \otimes i是单同态) \Leftrightarrow h(1_B \otimes i)是单同态 \Leftrightarrow B \otimes_R I \cong \mathrm{Im}\,(h(1_B \otimes i)) = BI. \qquad \square$$

**例 1.7.6** $\mathbb{Q}$是平坦$\mathbb{Z}$-模.

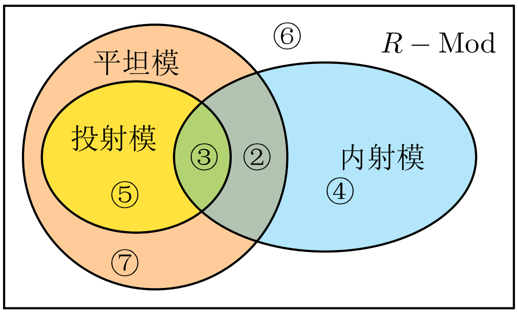
**证明:** 设$I \lhd \mathbb{Z}$, 注意$\mathbb{Z}$是PID, 故$I = n\mathbb{Z}(\exists n \in \mathbb{N})$. 易知

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} I & \to & \mathbb{Q}I \\ q \otimes x & \mapsto & qx \end{array}$$

是单的(有理数与整数相乘为0，则必有一个为0), 由定理1.63, $\mathbb{Q}$是平坦$\mathbb{Z}$-模. $\square$

### 1.7.1 小结

投射模、内射模、平坦模的关系:




| | |
|---|---|
| ①投射模⇒平坦模: | 定理1.42. |
| ②是平坦模与内射模, 但不是投射模: | ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. |
| ③同时是投射模与内射模: | ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$. |
| ④是内射模, 但不是平坦模(更不是投射模): | $\mathbb{Q}/n\mathbb{Z}(n\geq 1)$. |
| ⑤是投射模(当然也是平坦模), 但不是内射模: | ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$. |
| ⑥不是内射模, 也不是平坦模(更不是投射模): | $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. |
| ⑦是平坦模, 不是投射模, 不是内射模: | $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Q}$. |

## 练习题 1.7

1. 判断题.
(1)不是所有的环都有无限多个生成元.
(2)设$R$是主理想整环, 则任意非零$R$-模都有极大子模.
(3)$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(4\mathbb{Z},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$是内射$\mathbb{Z}$-模.

2. 证明每个自由模都是生成元.

3. 举例说明存在$R$-模$U$与$R$-模$M$使得$U$生成$M$但是并不满足$U$生成$M$的所有子模.
(提示: 设$R$是某个数域上的$2\times 2$上三角矩阵环, $U=M$是$R$的左理想.)

4. 举例说明存在$R$-模$U$与$R$-模$M$使得$U$余生成$M$但是$U$并不余生成$M$的所有商模.

5. 设$M$是左$R$-模, $S=\mathrm{End}({}_RM)$. 记$e\in S$是$S$中的幂等态射, 证明:

$$\mathrm{Tr}_M(Me)=(Me)S,\qquad \mathrm{Rej}_M(Me)=l_M(Se).$$

其中$l_R(M)=\{r\in R|rx=0,\forall x\in M\}$叫$M$的**左零化子(left annihilator)**.

6. (1)设${}_RM$是左$R$-模. 证明每个满同态$f:M\to {}_RR$都是分裂满同态（"分裂满同态”的定义见§1.1节的补充内容）. 另外说明存在单同态$g:{}_RR\to M$不分裂(提示: 考虑$R=\mathbb{Z}$)
(2)证明${}_RG$是生成元当且仅当存在自然数$n$与某个模${}_RL$使得有同构$G^{(n)}\cong R\oplus L$.

7. 设$M$和$U$是左$R$-模. 证明:
(1)$\mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Tr}_U(M))\cong\mathrm{Hom}_R(M,U)$;
(2)$\mathrm{Hom}_R(M/_{\mathrm{Rej}_M(U)},U)\cong\mathrm{Hom}_R(M,U)$.

8. 对于模${}_RM$, 证明TFAE:
(1)${}_RM$是忠实的, 即满足$l_R(M)=0$, 其中**左零化子(left annihilator)**定义为

$$l_R(M):=\{a\in R|ax=0,\forall x\in M\};$$

(2)$M$余生成$R$;
(3)$M$余生成某个生成元.

9. 设$I$是$R$的左理想, $M$是左$R$-模. 证明$\mathrm{Tr}_M(R/I)=Rr_M(I)$. 其中, 对$A\subseteq R$, 定义$A$在$M$中的**右零化子(right annihilator)**为

$$r_M(A)=\{x\in M|ax=0(\forall a\in A)\}.$$

10. 设 $0\longrightarrow K\xrightarrow{i}F\longrightarrow P\longrightarrow 0$ 是右$R$-模正合列, $F$是平坦模, $K$是$F$的子模, $i$是嵌入. 证明: $P$是平坦模当且仅当对任意$R$的(有限生成)左理想$I\subseteq R$, 有$K\cap FI=KI$.

11. 设$I$是$R$的左理想, $J$是$R$的右理想. 证明: 若左$R$-模$R/I$是平坦模, 则$J\cap I=JI$.

12. 举例说明不一定有$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(B,A),C)\cong\mathrm{Hom}(A,B\otimes C)$.

13. 设$R$是环, 且$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$是一个左$R$-模正合列. 证明: 如果$A$和$C$都是平坦左$R$-模, 则$B$也是平坦左$R$-模.

14. $R$为交换环, $E$为内射左$R$-模, $L,M,N$为左$R$-模, 且有正合列$0\to L\to M\to N\to 0$, 满足对任意右$R$-模$A$, 有

$$0\to A\otimes_R L\to A\otimes_R M\to A\otimes_R N\to 0$$

是左$R$-模正合列. 证明: $0\to N^e\to M^e\to L^e\to 0$是分裂的. 其中, $(-)^e=\mathrm{Hom}_R(-,E)$.

## § 1.8　推出与拉回

**定义 1.64**

设$A, B, C \in R-\mathbf{Mod}$.

(1)对左$R$-模同态$f : A \to B, g : A \to C$, 一个**推出(push-out)**或**纤维和(fibered sum)**是一个三元组$(D, \alpha, \beta)$, 使得$\alpha f = \beta g$, 而且满足如下的泛性质: 对任意三元组$(Y, \alpha', \beta')$使$\alpha' f = \beta' g$, 存在唯一同态$\theta : D \to Y$使得下图可交换, 即$\alpha' = \theta\alpha, \beta' = \theta\beta$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "\beta"'] \arrow[ddr, bend left, "\beta'"] & \\
B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[drr, bend right, "\alpha'"'] & D \arrow[dr, dotted, "\exists!\theta"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

此时也称

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "\beta"'] \\
B \arrow[r, "\alpha"] & D
\end{tikzcd}$$

是**推出图(push-out diagram)**.

(2)对左$R$-模同态$f : B \to A, g : C \to A$, 一个**拉回(pull-back)**或**纤维积(fibered product)**是一个三元组$(D, \alpha, \beta)$, 使得$g\alpha = f\beta$, 且满足如下的泛性质: 对任意三元组$(X, \alpha', \beta')$使$g\alpha' = f\beta'$, 存在唯一的同态$\theta : X \to D$使得下图可交换, 即$\beta' = \beta\theta, \alpha' = \alpha\theta$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "\alpha'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta'"'] \arrow[dr, dotted, "\exists!\theta"] & & \\
 & D \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "g"] \\
 & B \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

此时称

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & C \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

是**拉回图(pull-back diagram)**.

**注:** 推出图(拉回图)若存在, 则(在同构意义下)唯一.

**命题 1.65**

(1)对任意左$R$-模同态$f : A \to B$, $g : A \to C$, 其推出是存在的.

(2)对任意左$R$-模同态$f : B \to A$, $g : C \to A$, 其拉回是存在的.

**证明:** (1)易知$S \triangleq \{(f(a),-g(a))|a\in A\} < B\oplus C$. 令$D=(B\oplus C)/_S$, 定义

$$\begin{array}{cccc} \alpha: & B & \to & D \\ & \alpha(b) & = & (b,0)+S, \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \beta: & C & \to & D \\ & \beta(c) & = & (0,c)+S, \end{array}$$

则$\alpha,\beta$是左$R$-模同态. 对任意$a\in A$,

$$\begin{aligned}(\alpha f-\beta g)(a) &= \alpha f(a)-\beta g(a) \\ &= [(f(a),0)+S]-[(0,g(a)]+S] \\ &= (f(a),-g(a))+S=\overline{0}.\end{aligned}$$

所以$\alpha f-\beta g=0$, 即$\alpha f=\beta g$.

设三元组$(Y,\alpha',\beta')$满足$\alpha' f=\beta' g$, 定义

$$\begin{array}{cccc} \theta: & D & \to & Y \\ & \theta[(b,c)+S] & = & \alpha'(b)+\beta'(c). \end{array}$$

设$(b,c)+S=\overline{0}$, 即$(b,c)\in S$, 则存在$a\in A$使得$(b,c)=(f(a),-g(a))$, 即$b=f(a),c=-g(a)$. 所以

$$\alpha'(b)+\beta'(c)=(\alpha' f-\beta' g)(a)=0.$$

从而$\theta$是well-defined(映射). 易证$\theta$是左$R$-模同态.

对任意$b\in B$, $\theta\alpha(b)=\theta[(b,0)+S]=\alpha'(b)$, 故$\theta\alpha=\alpha'$.

对任意$c\in C$, $\theta\beta(c)=\theta[(0,c)+S]=\beta'(c)$, 故$\theta\beta=\beta'$.

再设$\theta': D\to Y$使得$\theta'\alpha=\alpha',\theta'\beta=\beta'$, 下证$\theta=\theta'$. 对任意$(b,c)+S\in D$, 有

$$\begin{aligned}\theta[(b,c)+S] &= \alpha'(b)+\beta'(c)=\theta'\alpha(b)+\theta'\beta(c) \\ &= \theta'[(b,0)+S]+\theta'[(0,c)+S]=\theta'[(b,c)+S].\end{aligned}$$

所以$\theta=\theta'$. 于是我们就构造了一个推出.

(2)令$D\triangleq\{(b,c)\in B\oplus C|f(b)=g(c)\}<B\oplus C$. 定义

$$\begin{array}{cccc} \alpha: & D & \to & B \\ & \alpha[(b,c)] & = & b, \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \beta: & D & \to & C \\ & \beta[(b,c)] & = & c, \end{array}$$

则$\alpha,\beta$是左$R$-模同态. 设$(b,c)\in D$即$f(b)=g(c)$. 由于$f\alpha[(b,c)]=f(b)=g(c)=g\beta[(b,c)]$, 故$f\alpha=g\beta$.

设三元组$(X,\alpha',\beta')$满足$f\alpha'=g\beta'$, 定义

$$\begin{array}{cccc} \theta: & X & \to & D \\ & \theta(x) & = & (\alpha'(x),\beta'(x)), \end{array}$$

对任意$x\in X$, 有

$$f\alpha'(x)-g\beta'(x)=(f\alpha'-g\beta')(x)=0,$$

所以$f\alpha'(x)=g\beta'(x)$, 从而$(\alpha'(x),\beta'(x))\in D$, 故$\theta$是well-defined(映射). 易证$\theta$也是左$R$-模同态.

对任意$x\in X$, 有

$$\alpha\theta(x)=\alpha[(\alpha'(x),\beta'(x))]=\alpha'(x),$$
$$\beta\theta(x)=\beta[(\alpha'(x),\beta'(x))]=\beta'(x).$$

所以$\alpha\theta=\alpha'$, $\beta\theta=\beta'$.

再设$\theta':X\to D$使$\alpha\theta'=\alpha'$, $\beta\theta'=\beta'$, 则对任意$x\in X$,

$$\theta(x)=(\alpha'(x),\beta'(x))=(\alpha\theta'(x),\beta\theta'(x))\xlongequal{\text{由}\alpha,\beta\text{的定义}}\theta'(x),$$

故$\theta'=\theta$. 于是我们就构造了一个拉回. □

**定理 1.66**

TFAE:

(1)下图是推出图:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "\beta"] \\ B \arrow[r, "\alpha"] & D \end{tikzcd} \qquad (*)$$

(2) $A\xrightarrow{\binom{f}{-g}}B\oplus C\xrightarrow{(\alpha,\beta)}D\longrightarrow 0$ 是正合列.

**证明:** “(1) $\Rightarrow$ (2)”: 设$(*)$是推出图, **由于推出在同构意义下唯一, 所以可以设**$D,\alpha,\beta$**如命题1.65**. 即$D=B\oplus C/S$, 其中$S=\{(f(a),-g(a))|a\in A\}$, $\alpha:B\to D$定义为$\alpha(b)=(b,0)+S$, $\beta:C\to D$定义为$\beta(c)=(0,c)+S$.

(i)$\forall(b,c)+S\in D$, 有

$$(b,c)+S=[(b,0)+S]+[(0,c)+S]=\alpha(b)+\beta(c)=(\alpha,\beta)\Big[\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}\Big],$$

故$(\alpha,\beta)$是满同态.

(ii)由于$(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}f\\-g\end{pmatrix}=\alpha f-\beta g=0$, 所以$\mathrm{Im}\begin{pmatrix}f\\-g\end{pmatrix}\subseteq\mathrm{Ker}\,(\alpha,\beta)$. 另一方面, 设$(b,c)\in\mathrm{Ker}\,(\alpha,\beta)$, 则

$$\overline{0}=(\alpha,\beta)\Big[\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}\Big]=\alpha(b)+\beta(c)=[(b,0)+S]+[(0,c)+S]=(b,c)+S,$$

故$(b,c)\in S$. 所以存在$a\in A$使得

$$(b,c)=(f(a),-g(a))=\begin{pmatrix}f\\-g\end{pmatrix}(a)\in\mathrm{Im}\begin{pmatrix}f\\-g\end{pmatrix},$$

所以$\mathrm{Ker}\,(\alpha,\beta)\subseteq\mathrm{Im}\begin{pmatrix}f\\-g\end{pmatrix}$.

由(i)(ii)可知 $A\xrightarrow{\binom{f}{-g}}B\oplus C\xrightarrow{(\alpha,\beta)}D\longrightarrow 0$ 是正合列.

“(2) $\Rightarrow$ (1)”: 由(2)可知$0=(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}f\\-g\end{pmatrix}=\alpha f-\beta g$, 故$\alpha f=\beta g$, 所以$(*)$是交换图.

设三元组$(Y,\alpha',\beta')$使得$\alpha'f=\beta'g$. **由(2)可知**$\boldsymbol{D=\alpha(B)+\beta(C)}$, 即$\forall d\in D,\exists b\in B,c\in C$使

得$d=\alpha(b)+\beta(c)$. 定义

$$\begin{array}{rccc} \theta: & D & \to & Y \\ & \theta(d) & = & \alpha'(b)+\beta'(c). \end{array} \tag{1.10}$$

下面说明$\theta$是well-defined. 设$\alpha(b)+\beta(c)=d=0$, 下证$\alpha'(b)+\beta'(c)=0$. 由于

$$\begin{aligned} (\alpha,\beta)\left[\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}\right]=0 \quad &\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(\alpha,\beta)=\operatorname{Im}\begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \quad \exists a\in A, \text{使得}\begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}(a)=(f(a),-g(a))=(b,c) \\ &\Longrightarrow \quad (\alpha',\beta')\left[\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}\right]=(\alpha',\beta')\left[\begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}\right](a)=(\alpha' f-\beta' g)(a)=0, \end{aligned}$$

所以$\alpha'(b)+\beta'(c)=0$, 故$\theta$是well-defined(映射). 易知$\theta$是左$R$-模同态.

在(1.10)式中分别令$c=0$与$b=0$, 所以

$$\theta\alpha(b)=\alpha'(b), \qquad \theta\beta(c)=\beta'(c).$$

所以$\theta\alpha=\alpha',\theta\beta=\beta'$.

再设$\theta':D\to Y$使得$\theta'\alpha=\alpha',\theta\beta=\beta'$. 下证$\theta=\theta'$. 对任意$d\in D$, 有

$$\theta(d)=\theta(\alpha(b)+\beta(c))=\alpha'(b)+\beta'(c)=\theta'\alpha(b)+\theta'\beta(c)=\theta'(\alpha(b)+\beta(c))=\theta'(d).$$

所以$\theta=\theta'$, 从而$(*)$是推出图. □

**命题 1.67**

设

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "\beta"] \\ B \arrow[r, "\alpha"] & D \end{tikzcd} \qquad (*)$$

是推出图, 则存在如下行正合的交换图:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\beta"'] & \operatorname{Coker} g \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"'] & 0 \\ B \arrow[r, "\alpha"] & D \arrow[r, "\pi_2"] & \operatorname{Coker}\alpha \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

其中$h$是诱导同态, 且是同构.

反之, 若$\alpha$是单同态, 则反过来也成立, 即若$\alpha$是单同态且存在如上行正合的交换图, 其中$h$是同构, 则$(*)$是推出图.

**证明:** (1)(**图追踪**)设$(*)$是推出图, 则上图左方框是交换图. 设$x\in\operatorname{Coker} g$, 由于$\pi_1$满, 则存在$c\in C$使得$x=\pi_1(c)$. 定义

$$\begin{array}{rccc} h: & \operatorname{Coker} g & \to & \operatorname{Coker}\alpha \\ & h(x) & = & \pi_2\beta(c). \quad (\text{即}h(\pi_1 c)=\pi_2\beta(c).) \end{array}$$

下证$h$是well-defined(与原像选取无关). 设$c_1, c_2$满足$\pi_1(c_1) = x = \pi_1(c_2)$, 则$c_1 - c_2 \in \operatorname{Ker}\pi_1 = \operatorname{Im} g$, 故存在$a \in A$使得$c_1 - c_2 = g(a)$, 所以

$$\pi_2\beta(c_1) - \pi_2\beta(c_2) = \pi_2\beta(c_1 - c_2) = \pi_2\beta g(a) = \pi_2\alpha f(a) \xlongequal{\pi_2\alpha=0} 0.$$

所以$h$是个映射, 易证$h$是左$R$-模同态且使得上图右方框可交换.

下证$h$是单同态: 设$h(x) = 0$, 则$\pi_2\beta(c) = 0$, 故$\beta(c) \in \operatorname{Ker}\pi_2 = \operatorname{Im}\alpha$. 所以存在$b \in B$使得$\alpha(b) = \beta(c)$, 即$(\alpha, \beta)\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} = 0$. 由定理1.66, $\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(\alpha, \beta) = \operatorname{Im}\begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}$, 故存在$a \in A$使得$f(a) = b, -g(a) = -c$. 于是$x = \pi_1(c) = \pi_1 g(a) \xlongequal{\pi_1 g=0} 0$, 故$h$是单的.

下证$h$是满同态: 设$y \in \operatorname{Coker}\alpha$, 由于$\pi_2$是满同态, 则存在$d \in D$使得$y = \pi_2(d)$. 由定理1.66, $(\alpha, \beta)$是满射, 所以存在$b \in B, c \in C$使得$(\alpha, \beta)\left[\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}\right] = d$, 即$d = \alpha(b) = \beta(c)$. 所以

$$y = \pi_2(d) = \pi_2(\alpha(b) + \beta(c)) = \pi_2\alpha(b) + \pi_2\beta(c) \xlongequal{\pi_2\alpha=0} \pi_2\beta(c) = h\pi_1(c) = h[\pi_1(c)].$$

所以$h$是满同态.

综上, $h$为同构.

(2)设$\alpha$是单同态, 即有如下行正合的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\beta"'] & \operatorname{Coker} g \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\alpha"] & D \arrow[r, "\pi_2"] & \operatorname{Coker}\alpha \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

下证$(*)$是推出图. 由定理1.66, 只需证 $A \xrightarrow{\binom{f}{-g}} B \oplus C \xrightarrow{(\alpha,\beta)} D \longrightarrow 0$ 是正合列, 即证$(\alpha, \beta)$是满同态并且$\operatorname{Im}\begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}(\alpha, \beta)$.

(i)对任意$d \in D$, 由$h$是同构, 且$\pi_1$满, 则存在$c \in C$使$\pi_2(d) = h\pi_1(c) = \pi_2\beta(c)$, 故$\pi_2(d - \beta(c)) = 0$. 所以$d - \beta(c) = \operatorname{Ker}\pi_2 = \operatorname{Im}\alpha$, 故存在$b \in B$使得$d - \beta(c) = \alpha(b)$, 所以$d = \alpha(b) + \beta(c) = (\alpha, \beta)\left[\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}\right]$, 从而$(\alpha, \beta)$满.

(ii)由于$(*)$是交换图, 则$\alpha f = \beta g$, 即$(\alpha, \beta)\begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} = 0$, 所以$\operatorname{Im}\begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} \subseteq \operatorname{Ker}(\alpha, \beta)$.

另一方面, 设$(b, c) \in \operatorname{Ker}(\alpha, \beta)$, 则$(\alpha, \beta)\left[\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}\right] = \alpha(b) + \beta(c) = 0$, 所以

$$0 = \pi_2(\alpha(b) + \beta(c)) = \pi_2\beta(c) = h\pi_1(c).$$

由于$h$是同构, 所以$\pi_1(c) = 0$, 故$c \in \operatorname{Ker}\pi_1 = \operatorname{Im} g$. 所以存在$a \in A$使得$c = -g(a)$, 则

$$0 = \alpha(b) + \beta(c) = \alpha(b) - \beta g(a) = \alpha(b) - \alpha f(a) = \alpha(b - f(a)).$$

由于$\alpha$是单同态, 故$b = f(a)$, 所以$(b, c) = (f(a), -g(a)) = \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}(a)$, 从而$\operatorname{Ker}(\alpha, \beta) \subseteq \operatorname{Im}\begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}$. 综上, $\operatorname{Ker}(\alpha, \beta) = \operatorname{Im}\begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}$.

结合(i)(ii)可知结论成立. $\square$

**定理 1.68**

TFAE:

(1)下图是拉回图:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd} \qquad (**)$$

(2) $0 \longrightarrow D \xrightarrow{\binom{\alpha}{\beta}} B \oplus C \xrightarrow{(f,-g)} A$ 是正合列.

**证明:** 与定理1.66平行. □

**命题 1.69**

设

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd} \qquad (**)$$

是拉回图, 则存在如下行正合的交换图:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\alpha \arrow[r, "\lambda_1"] \arrow[d, dashed, "h"] & D \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & C \arrow[d, "g"'] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r, "\lambda_2"] & B \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

其中$h$是诱导同态, 且是同构.

反之, 若$\beta$是满同态, 则反过来也成立, 即若$\beta$是满同态且存在如上行正合的交换图, 其中$h$是同构, 则$(**)$是拉回图.

**证明:** 与命题1.67平行. □

**推论 1.70**

设 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\binom{f}{-g}} B \oplus C \xrightarrow{(\alpha,\beta)} D \longrightarrow 0$ 是左$R$-模正合列. 则

(1)下图既是推出图, 也是拉回图.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "\beta"'] \\ B \arrow[r, "\alpha"] & D \end{tikzcd} \qquad (*)$$

(2)$g$是满的$\Leftrightarrow$ $\alpha$是满的, $g$是单的$\Leftrightarrow$ $\alpha$是单的.

(3)$f$是满的$\Leftrightarrow$ $\beta$是满的, $f$是单的$\Leftrightarrow$ $\beta$是单的.

**证明:** (1)由定理1.66与定理1.68立得.

(2)由(1), $(*)$是推出图. 由命题1.67, $\operatorname{Coker} g \cong \operatorname{Coker}\alpha$, 故$g$满$\Leftrightarrow$ $\operatorname{Coker} g = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Coker}\alpha = 0 \Leftrightarrow$ $\alpha$满. 由(1), $(*)$是拉回图, 由命题1.69, $\operatorname{Ker} g \cong \operatorname{Ker}\alpha$, 故$g$单$\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} g = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker}\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha$单.

(3)类似(2). □

**例 1.71**

(1)设$B,C<{}_RU$.

(i)有如下的嵌入映射: $\lambda_1:B\cap C\hookrightarrow B$与$\lambda_2:B\cap C\hookrightarrow C$, 则有如下正合列:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B\cap C \arrow[r, "\binom{\lambda_1}{\lambda_2}"] & B\oplus C \arrow[r] & B+C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

由定理1.66, $B+C$是$\lambda_1,\lambda_2$的推出.

(ii)有如下的嵌入映射: $i:B\hookrightarrow U, j:C\hookrightarrow U$, 则有如下正合列:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B\cap C \arrow[r] & B\oplus C \arrow[r, "(i,j)"] & U \end{tikzcd}$$

由定理1.68, $B\cap C$是$i,j$的拉回.

(2)设$f:A\to B$是左$R$-模同态.

(i)有正合列

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "\pi"] & \operatorname{Coker} f \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

从而有正合列

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\binom{f}{0}"] & B\oplus 0 \arrow[r, "(\pi{,}0)"] & \operatorname{Coker} f \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

由定理1.66, Coker $f$是$f,0$的推出. (这里0表示$A$到0的零同态. )

(ii)有正合列

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r, "\lambda"] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

从而有正合列

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r, "\binom{\lambda}{0}"] & A\oplus 0 \arrow[r, "(f{,}0)"] & B \end{tikzcd}$$

由定理1.68, Ker $f$是$f,0$的拉回. (这里0表示0到$B$的零同态. )

**注:** 由于

$$\begin{tikzcd} & & & \operatorname{Coker}\alpha \arrow[ddl, equal, bend left] \\ A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r, two heads, "\pi_1"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[urr, bend left, "h\pi_1"] & \operatorname{Coker} g \arrow[ur, "h", "\cong"'] \arrow[d, dashed, "h"'] & \\ B \arrow[r, "\alpha"] & D \arrow[r, two heads, "\pi_2"] & \operatorname{Coker}\alpha \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

则有如下行、列正合的交换图: ($\alpha,\beta$地位平等，$\alpha,\beta$单可得推出图)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & K_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & K_1 \arrow[r] & 0 \\ K_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_2 \arrow[d] & & \\ 0 & 0 & & \end{tikzcd}$$

类似有如下行、列正合的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & & T_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & T_2 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & T_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & C \arrow[d, "g"'] \\
0 \arrow[r] & T_1 \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

**引理: 蛇引理, Snake Lemma**

设有如下的左$R$-模行正合图(列正合是显然的), 则虚线部分是正合的.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Ker}\alpha \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\beta \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\gamma \arrow[d] \arrow[dddll, dashed] & \\
 & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta"'] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d] & C_2 \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Coker}\alpha \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\beta \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\gamma \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

可以用Snake Lemma来记命题1.67与命题1.69, 注意看$\operatorname{Ker}\gamma$中元如何到$\operatorname{Coker}\alpha$中元.

**引理: Schanuel Lemma**

(1)设有正合列

$$0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{\lambda_1} P_0 \xrightarrow{f_0} A \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K_1' \xrightarrow{\lambda_1'} P_0' \xrightarrow{f_0'} A \longrightarrow 0$$

其中$P_0, P_0'$是投射模, 则$K_1 \oplus P_0' \cong K_1' \oplus P_0$.

(2)设有正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I_0' \longrightarrow T_1' \longrightarrow 0$$

其中$I_0, I_0'$是内射模, 则$I_0 \oplus T_1' \cong I_0' \oplus T_1$.

**证明:** (尾/头一样，尝试写出拉回/推出图． )

考虑拉回图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & K_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_1 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_1' \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "\alpha_0'"'] & P_0 \arrow[d, "f_0"'] & \\
0 \arrow[r] & K_1' \arrow[r] & P_0' \arrow[r, "f_0'"] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

则

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\binom{\alpha_0'}{-\alpha_0}} P_0' \oplus P_0 \xrightarrow{(f_0', f_0)} A \longrightarrow 0$$

是正合列, 从而

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "\alpha_0'"'] & P_0 \arrow[d, "f_0"'] \\
P_0' \arrow[r, "f_0'"] & A
\end{tikzcd}$$

既是推出图也是拉回图. 由推论1.70, $\alpha_0$满且$\alpha_0'$满.

由于$P_0, P_0'$是投射模, 则上图中间行和中间列为分裂的, 即$K_1 \oplus P_0' \cong X \cong K_1' \oplus P_0$. □

**注:** 该定理可以推广. 设有正合列

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K_n' \longrightarrow P_{n-1}' \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1' \longrightarrow P_0' \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

并且$P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}, P_0', P_1', \cdots, P_{n-1}'$都是投射模, 则(交叉作直和)

$$K_n \oplus P_{n-1}' \oplus P_{n-2} \oplus P_{n-3}' \oplus \cdots \cong K_n' \oplus P_{n-1} \oplus P_{n-2}' \oplus P_{n-3} \oplus \cdots.$$

一个应用: 设$A \in R-\mathbf{Mod}$是有限表现的, 且$0 \to K \to P \to A \to 0$是正合列, 其中$P$是有限生成投射模, 则$K$是有限生成的.

### 1.8.1 补充内容：Schanuel引理的直接证明

**引理: Schanuel Lemma**

设有正合列

$$0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{\lambda_1} P_0 \xrightarrow{f_0} A \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K_1' \xrightarrow{\lambda_1'} P_0' \xrightarrow{f_0'} A \longrightarrow 0$$

其中$P_0, P_0'$是投射模, 则$K_1 \oplus P_0' \cong K_1' \oplus P_0$.

**证明:** 考虑下图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "\lambda_1"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & P_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, dashed, "\beta"] & A \arrow[r] \arrow[d, dashed, "1_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1' \arrow[r, "\lambda_1'"] & P_0' \arrow[r, "f_0'"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由于$P$是投射模, 根据投射模的定义, 存在映射$\beta : P \to P'$使得$f_0'\beta = f_0$, 即上图的右边方框可交换. 由图追踪(Five Lemma), 存在$\alpha : K_1 \to K_1'$, 使得左边方框可交换. 于是可以得到如下的正合列(不难验证):

$$0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{\theta} P_0 \oplus K_1' \xrightarrow{\psi} P_0' \longrightarrow 0$$

其中, $\theta : x \mapsto (\lambda_1(x), \alpha(x))$, $\psi : (u, x') \mapsto (\beta(u), -\lambda_1'(x'))$, $x \in K_0, u \in P_0, x' \in K_0'$. 由于$P'$是投射模, 所以上述正合列是分裂的. □

## 练习题 1.8

1. 判断题:
(1)对任意环$R$, $R-\mathrm{Mod}$中的推出图不可能是拉回图, 反之亦然.

2. 证明定理1.68.

3. 证明命题1.69.

4. 证明Schanuel引理的(2).

5. 设$0 \to K_1 \to B_1 \xrightarrow{f_1} A \to 0$和$0 \to K_2 \to B_2 \xrightarrow{f_2} A \to 0$ 均是左$R$-模正合列, 并且$\mathrm{Hom}_R(B_1, f_2)$和$\mathrm{Hom}_R(B_2, f_1)$均是满的, 证明: $B_1 \oplus K_2 \cong B_2 \oplus K_1$.

6. 设有正合列

$$0 \to B_2 \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \to A \to 0 \qquad \text{与} \qquad 0 \to C_2 \xrightarrow{g_2} Q_1 \xrightarrow{g_1} Q_0 \to A \to 0$$

其中$P_0, P_1, Q_0, Q_1$是投射模, 证明: $B_2 \oplus Q_1 \oplus P_0 \cong C_2 \oplus P_1 \oplus Q_0$.

7. (1)设$0 \to K_i \to F_i \to M \to 0 (i = 1, 2)$是$R$-模正合列, 其中$F_1, F_2$是平坦模. 举例说明$K_1 \oplus F_2$不一定与$K_2 \oplus F_1$同构. (**提示**: 取$M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, K_1 = \mathbb{Z}, F_1 = \mathbb{Q}$, 且$F_2$是自由模. )
(2)对于右$R$-模$A$, 我们在§1.7中记$A^+ := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, 这是个左$R$-模. 举例说明$A^+ \cong B^+$不能推出$A \cong B$.

8. 设$R$是环, $P, Q$是投射$R$-模, 证明$P \otimes_R Q$是投射$R$-模.

9. (1)设$R-R-$双模$P$是投射模, 且在$R-\mathbf{Mod}$中有限生成, $C \in R-\mathbf{Mod}$是平坦模. 证明$P^* \otimes C \cong \mathrm{Hom}_R(P, C)$.
(2)若把$C$是平坦模的条件去掉(即改为$C$是一般的左$R$-模), 结论还成立吗?

## § 1.9　正向极限与反向极限

**定义**

称偏序集$\langle I,\leq\rangle$是**正向的(direct)**, 若$\forall i,j\in I$, $\exists k\in I$使得$i,j\leq k$(有上界).

**例**

(1)$\langle\mathbb{Z},\leq\rangle$是正向集, 其中"$\leq$"是通常意义上的. 这是因为$i,j$可比较.

(2)$\langle\mathbb{Z}^+,$整除关系$\rangle$是正向集, $a,b$的一个上界是它们的最小公倍数.

(3)$\langle\{1,2,3,4\},$整除关系$\rangle$不是正向集.

(4)设$A\in R-\mathbf{Mod}$, 则:

(i)$\langle\{A$的所有真子模$\},\leq\rangle$不一定是正向集. (可能有两个以上的极大子模)

(ii)$\langle\{A$的所有子模$\},\leq\rangle$是正向集.

**定义**

设$\langle I,\leq\rangle$是偏序集, 且$\{A_i\}_{i\in I}$是一族左$R$-模. 若$\forall i\leq j$, 存在左$R$-模同态$\varphi_j^i:A_i\to A_j$使得:

(1)$\varphi_i^i=1_{A_i},\forall i\in I$;

(2)$\forall i\leq j\leq k$, 有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "\varphi_k^i"] \arrow[dr, "\varphi_j^i"'] & & A_k \\
& A_j \arrow[ur, "\varphi_k^j"'] &
\end{tikzcd}$$

则称$(\{A_i\}_{i\in I},\{\varphi_j^i\}_{i\leq j})$(简记为$\{A_i,\varphi_j^i\}$) 为一个**正向系(统)(direct system)**.

**定义 1.72**

设$\{A_i,\varphi_j^i\}$是$R-\mathbf{Mod}$的一个正向系, 这个系的**正向极限(direct limit)**或**余极限(colimit)** 是一个左$R$-模$\varinjlim A_i$和一族左$R$-模同态$\{\alpha_i:A_i\to\varinjlim A_i\}_{i\in I}$, 满足

(1)$\forall i\leq j$, 有$\alpha_j\varphi_j^i=\alpha_i$;

(2)(**泛性质**)$\forall$左$R$-模$Y$和左$R$-模同态$\{f_i:A_i\to Y\}_{i\in I}$, 如果$f_j\varphi_j^i=f_i(\forall i\leq j)$, 存在唯一的左$R$-模同态$\beta:\varinjlim A_i\to Y$, 使下图可交换(即$f_i=\beta\alpha_i$):

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim A_i \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & Y \\
& A_i \arrow[ul, "\alpha_i"] \arrow[ur, "f_i"'] \arrow[d, "\varphi_j^i"] & \\
& A_j \arrow[uul, bend left, "\alpha_j"] \arrow[uur, bend right, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

**注:** 正向极限若存在, 则在同构的意义下唯一.

**定理 1.73**

$R-\mathbf{Mod}$的任一正向系$\{A_i,\varphi_j^i\}$的正向极限是存在的.

**证明:** 设$\lambda_i$是$\bigoplus\limits_{i\in I}A_i$的第$i$个标准嵌入$(\forall i\in I)$. 令$\varinjlim A_i=\bigoplus\limits_{i\in I}A_i\Big/S$, 其中

$$S\triangleq\left\langle\{\lambda_j\varphi_j^i(a_i)-\lambda_i(a_i)|\forall a_i\in A,i,j\in I,i\leq j\}\right\rangle<\bigoplus_{i\in I}A_i.$$ [①]

定义

$$\begin{array}{rcl}\alpha_i: & A_i & \to & \varinjlim A_i\\ & \alpha_i(a_i) & = & \lambda_i(a_i)+S,\quad\forall i\in I.\end{array}$$

则$\alpha_i$是左$R$-模同态. 由于

$$\begin{aligned}(\alpha_j\varphi_j^i-\alpha_i)(a_i)&=\alpha_j\varphi_j^i(a_i)-\alpha_i(a_i)\\&=(\lambda_j\varphi_j^i(a_i)+S)-(\lambda_i(a_i)+S)\\&=(\lambda_j\varphi_j^i(a_i)-\lambda_i(a_i))+S=\overline{0},\end{aligned}$$

所以$\alpha_j\varphi_j^i-\alpha_i=0$, 即$\alpha_j\varphi_j^i=\alpha_i(\forall i\leq j)$.

设$Y$是个左$R$-模, 且$\{f_i:A_i\to Y\}_{i\in I}$是一族左$R$-模同态, 使得$f_j\varphi_j^i=f_i(\forall i\leq j)$. 定义

$$\begin{array}{rcl}\beta: & \varinjlim A_i & \to & Y\\ & \beta[(a_i)+S] & = & \sum\limits_{i\in I}f_i(a_i),\end{array}$$

(i)显然, $\beta$是双线性的, 即保持加法与环作用: $\beta(a+b)=\beta(a)+\beta(b)$, $\beta(ra)=r\beta(a)$.

(ii)下证$\beta$是well-defined($\beta$是映射): 即证如果$(a_i)\in S$, 则$\beta((a_i))=0$. 只需证$S$中元在$\beta$下的像为0. 事实上, 由于

$$\begin{aligned}\beta(\lambda_j\varphi_j^i(a_i)-\lambda_i(a_i))&=\beta[(\cdots,0,-a_i,0,\cdots,0,\varphi_j^i(a_i),0,\cdots)]\\&=-f_i(a_i)+f_j(\varphi_j^i(a_i))=(f_j\varphi_j^i-f_i)(a_i)=0.\end{aligned}$$

所以$\beta$是well-defined, 从而$\beta$是左$R$-模同态.

(iii)对任意$a_i\in A_i$, 有

$$\beta\alpha_i(a_i)=\beta(\lambda_i(a_i)+S)=\beta[(\cdots,0,a_i,0,\cdots)]+S]=f_i(a_i),$$

则$\beta\alpha_i=f_i,\forall i\in I$. 所以此图可交换.

(iv)唯一性: 设$\beta'=\varinjlim A_i\to Y$使得$\beta'\alpha_i=f_i,\forall i\in I$. 对任意$(a_i)+S\in\varinjlim A_i$, 有

$$\beta'[(a_i)+S]=\beta'\left[\Big(\sum_{i\in I}\lambda_i(a_i)\Big)+S\right]=\beta'\sum_{i\in I}\alpha_i(a_i)=\sum_{i\in I}\beta'\alpha_i(a_i)=\sum_{i\in I}f_i(a_i)=\beta[(a_i)+S].$$

所以$\beta'=\beta$, 故上述$\beta$是唯一的.

综上, $\{\varinjlim A_i,\alpha_i\}$或$\varinjlim A_i$为$\{A_i,\varphi_j^i\}$的正向极限. □

---

[①]形式上, 可以写$S=\left\langle\left\{(\cdots,0,-a_i,0,\cdots,0,\varphi_j^i(a_i),0,\cdots)|\forall a_i\in A,i,j\in I,i\leq j\right\}\right\rangle$, 看起来会非常方便. 但这样写不准确, 因为$I$不一定可数. 注意标清楚其他分量是0.

**例 1.74**

(1)设$\langle I,\leq\rangle$为偏序集, 且$A\in R-\mathbf{Mod}$. 令$A_i=A(\forall i\in I)$, $\varphi_j^i=1_A(\forall i\leq j)$, 则$\{A,\varphi_j^i\}$是正向系, 称之为**常量正向系**(简称**常系**), 记为$|A|$, 且$\varinjlim A=A$.

(2)设$\langle I,\leq\rangle$是**离散偏序集**(即$\forall i,j\in I, i\leq j\Leftrightarrow i=j$), 则正向系$\{A_i,\varphi_j^i\}$中, $\varinjlim A_i=\bigoplus\limits_{i\in I}A_i$.

(3)设$\mathcal{I}$是左$R$-模$A$具有简单序的子模集(即$\forall A',A''\in\mathcal{I}$, $A'\subseteq A''$或$A''\subseteq A'$), 则$\mathcal{I}$是个正向集, 此时$\varinjlim A_i=\bigcup\limits_{A_i\in\mathcal{I}}A_i$.

(4)设$I$是只有三个元素的指标集, 不妨设$I=\{0,1,2\}$(仅为三个符号), $0<1$且$0<2$但$1,2$不能比较. 则以$I$为指标集的正向系如下图, 称之为**三点正向系**. 它的正向极限是$\varphi_1^0,\varphi_2^0$的推出$(A,\alpha_1,\alpha_2)$.

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "\varphi_2^0"] \arrow[d, "\varphi_1^0"'] & A_2 \\
A_1 &
\end{tikzcd}$$

**证明:** (4)设这个正向系的正向极限为$A$, 则存在左$R$-模同态$\alpha_i:A_i\to A(i=0,1,2)$使得下图可交换. (正向极限定义)

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "\varphi_2^0"] \arrow[d, "\varphi_1^0"'] \arrow[dr, dashed, "\alpha_0"] & A_2 \arrow[d, dashed, "\alpha_2"] \\
A_1 \arrow[r, dashed, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

设$Y\in R-\mathbf{Mod}$, $f_i:A_i\to Y(i=1,2)$使得$f_1\varphi_1^0=f_2\varphi_2^0\triangleq f_0$. 考虑下图:

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "\varphi_2^0"] \arrow[d, "\varphi_1^0"'] \arrow[dr, dashed, "\alpha_0"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \arrow[ddr, bend left, "f_2"] & \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] \arrow[drr, bend right, "f_1"'] & A \arrow[dr, dashed, "\exists!\theta"] & \\
& & Y
\end{tikzcd} \tag{1.11}$$

由于有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, dashed, "\exists!\theta"] & & Y \\
& A_0 \arrow[ul, "\alpha_0"] \arrow[ur, "f_0"'] \arrow[d, "\varphi_1^0"] & \\
& A_1 \arrow[uul, bend left, "\alpha_1"] \arrow[uur, bend right, "f_1"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, dashed, "\exists!\theta"] & & Y \\
& A_0 \arrow[ul, "\alpha_0"] \arrow[ur, "f_0"'] \arrow[d, "\varphi_2^0"] & \\
& A_2 \arrow[uul, bend left, "\alpha_2"] \arrow[uur, bend right, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

(如果可以证明有$\theta$使得上半部分可交换，则可以证明泛性质．)

则存在唯一$\theta:A\to Y$使得图(1.11)可交换, 从而$f_1=\theta\alpha_1$, $f_2=\theta\alpha_2$. 所以$(A,\alpha_1,\alpha_2)$是$\varphi_1^0,\varphi_2^0$的推出. (推出是特殊的正向极限．) □

**注:** 设$A\in R-\mathbf{Mod}$. (1)$A$同构于其所有有限生成(或有限表现)的子模的正向极限;

(2)(**Lazard定理**)$A$是平坦模$\Leftrightarrow$ $A$同构于有限生成投射(或自由)模的正向极限. 参考: [J.J.Rotman, An Introduction to Homological Algebra, 2nd Edition, Springer, 2009] 的例5.32(iii)和定理5.40.

**定义**

设$\langle I,\leq\rangle$是偏序集, 且$\{A_i\}_{i\in I}$是一族左$R$-模. 若$\forall i\leq j$, 存在左$R$-模同态$\psi_i^j:A_j\to A_i$使得

(1)$\psi_i^i=1_{A_i},\forall i\in I$;

(2)$\forall i\leq j\leq k$, 有如下交换图:

$$\begin{tikzcd} A_i & & A_k \arrow[ll, "\psi_i^k"'] \arrow[dl, "\psi_j^k"] \\ & A_j \arrow[ul, "\psi_i^j"] & \end{tikzcd}$$

则称$(\{A_i\}_{i\in I},\{\psi_i^j\}_{i\leq j})$(简记为$\{A_i,\psi_i^j\}$) 为一个**反向系(统)(inverse system)**.

**定义 1.75**

设$\{A_i,\psi_i^j\}$是$R-\mathbf{Mod}$的一个反向系. 这个反向系的**反向极限(inverse limit)**或**极限(limit)**是一个左$R$-模$\varprojlim A_i$和一族左$R$-模同态$\{\alpha_i:\varprojlim A_i\to A_i\}_{i\in I}$, 满足

(1)$\forall i\leq j$, 有$\alpha_i=\psi_i^j\cdot\alpha_j$.

(2)(**泛性质**)$\forall$左$R$-模$X$与同态族$\{f_i:X\to A_i\}_{i\in I}$, 若$\forall i\leq j$, 有$f_i=\psi_i^j\cdot f_j$, 则$\exists!$左$R$-模同态$\beta$使得下图可交换(即$f_i=\alpha_i\beta$):

$$\begin{tikzcd} \varprojlim A_i \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_j"'] & & X \arrow[ll, dashed, "\exists!\beta"'] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, bend left, "f_j"] \\ & A_i & \\ & A_j \arrow[u, "\psi_i^j"] & \end{tikzcd}$$

**注:** 反向极限若存在, 则在同构的意义下唯一.

**定理 1.76**

$R-\mathbf{Mod}$中任一反向系$\{A_i,\psi_i^j\}$的反向极限是存在的.

**证明:** 设$p_i$是$\prod\limits_{i\in I}A_i$的第$i$个标准投射, $\forall i\in I$. 令

$$\varprojlim A_i=\left\{(a_i)\in\prod_{i\in I}A_i\middle|a_i=\psi_i^j(a_j),\forall j\in J\right\}<\prod_{i\in I}A_i.$$

定义

$$\begin{array}{rccl}\alpha_i: & \varprojlim A_i & \to & A_i\\ & \alpha_i & = & p_i\big|_{\varprojlim A_i}, \quad \forall i\in I.\end{array}$$

易证$\alpha_i=\psi_i^j\alpha_j(\forall i\leq j)$.

设$X \in R-\mathbf{Mod}$且$\{f_i : X \to A_i\}_{i\in I}$是一族左$R$-模同态, 且使$f_i = \psi_i^j f_j (\forall i \le j)$. 定义

$$\begin{array}{rccc} \beta: & X & \to & \varprojlim A_i \\ & \beta(x) & = & (f_i(x)). \end{array}$$

要证①$\beta(x) \in \varprojlim A_i$(定义合理), 且②$f_i = \alpha_i\beta, \forall i \in I$. (自己补充)

唯一性: 再设$\beta' : X \to \varprojlim A_i$使$f_i = \alpha_i\beta', \forall i \in I$. 则$\forall x \in X$, 有$\alpha_i\beta'(x) = f_i(x) = \alpha_i\beta(x), \forall i \in I$. 由于$\alpha_i = p_i\big|_{\varprojlim A_i}$, 所以$\beta'(x) = \beta(x)$, 故$\beta' = \beta$.

综上, $\varprojlim A_i$是$\{A_i, \psi_i^j\}$的反向极限. □

**例 1.77**

(1)对常量反向系(简称常系)$|A|$, 有$\varprojlim A = A$.

(2)对离散系$\{A_i, \psi_i^j\}$, $\varprojlim A_i = \prod\limits_{i\in I} A_i$;

(3)对简单系$\{A_i, \psi_i^j\}$, $\varprojlim A_i = \bigcap\limits_{i\in I} A_i$;

(4)设$I$是只有三个元素的指标集, $I = \{0, 1, 2\}$, 规定$0 < 1$且$0 < 2$但$1, 2$不能比较, 则以$I$为指标集的反向系如下图:

$$\begin{tikzcd} & A_2 \arrow[d, "\psi_0^2"] \\ A_1 \arrow[r, "\psi_0^1"] & A_0 \end{tikzcd}$$

其反向极限为$\psi_0^1, \psi_0^2$的拉回$(A, \alpha_1, \alpha_2)$.

下面几个定理的证明超出了本课程的要求.

**定理 1.78**

设$\{A_i, \psi_j^i\}$是$R-\mathbf{Mod}$的正向系.

(1)$\forall B \in R-\mathbf{Mod}$, 有Abel群同构

$$\mathrm{Hom}_R\left(\varinjlim A_i, B\right) \cong \varprojlim \mathrm{Hom}_R(A_i, B).$$

(2)$\forall B \in \mathbf{Mod}-R$, 有Abel群同构

$$B \otimes_R \left(\varinjlim A_i\right) \cong \varinjlim B \otimes_R A_i.$$

**证明:** 证明参见[Rotman, Prop5.26]与[Rotman, Thm5.27].

**定理 1.79**

设$\{A_i, \psi_i^j\}$是一个$R-\mathbf{Mod}$中的反向系, 则$\forall B \in R-\mathbf{Mod}$, 有Abel群同构

$$\mathrm{Hom}_R\left(B, \varprojlim A_i\right) \cong \varprojlim \mathrm{Hom}_R(B, A_i).$$

**证明:** 证明参见[Rotman, Prop5.21].

## 练习题 1.9

1. 判断题:

   (1)任意一个模都是某个反向系统的反向极限.

   (2)对任意左$R$-模同态$f: A \to B$, $\ker f$是$R-\mathrm{Mod}$的某个正向系统的正向极限.

2. (1)设$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是一族同构的Abel群, 即$A_n \cong A, \forall n$. 考虑反向系$\{A_n, f_n^m\}$与$\{A_n, g_n^m\}$, 其中每个$f_n^m = 0$并且$g_n^m$是同构. 证明第一个反向系统的反向极限是$\{0\}$, 第二个反向系统的反向极限是$A$.

   (2)举例说明两个正向系统含有相同的Abel群, 其正向极限不一定同构.

3. 若$\{M_i, \pi_i^j\}_{i,j\in I}$是一族可除$R$-模的正向系, 证明该正向系的正向极限$\varinjlim\{M_i, \pi_i^j\}$是可除$R$-模.

   上述命题的逆命题通常是不正确的. 例如取$\mathbb{Q}$是可除$\mathbb{Z}$-模, 由于每个Abel群都是它的有限生成子群依嵌入构成正向系的正向极限, 所以$\mathbb{Q}$是有限生成子群的正向极限. 但是有限生成Abel群不是可除的.

4. 设$\{P_i : i \in I\}$是右$R$-模正向系, $I$是指标集. 若每个$P_i(i \in I)$都是平坦模, 证明其正向极限$P := \varinjlim P_i$也是平坦模.

## § 1.10 综合习题

1. 完善下表:

| | 投射模 | 平坦模 | 内射模 |
|---|---|---|---|
| ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ | $\times$ | $\checkmark$ | $\checkmark$ |
| ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$ | | | |
| ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ | | | |
| ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ | | | |
| ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ | | | |
| ${}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ | | | |

2. **(Prüfer群)** 对于素数$p$, 记$M=\left\{\dfrac{a}{p^n}\in\mathbb{Q}\middle|a\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\right\}$, 显然$\mathbb{Z}<M<\mathbb{Q}$. 定义商群$M/\mathbb{Z}$为$\mathbb{Z}_{p^\infty}$, 这个群叫**Prüfer群**. [1]
(1)证明: $\mathbb{Z}_{p^\infty}$的每个真子群都是循环群, 且存在$n$使得该循环群由$\dfrac{1}{p^n}$生成, 以此说明$\mathbb{Z}_{p^\infty}$是Artin模但不是Noether模.
(2)证明: $\mathbb{Z}_{p^\infty}$是可除$\mathbb{Z}$-模, 从而是内射$\mathbb{Z}$-模.
(3)证明: $\mathbb{Z}_{p^n}$的内射包络是$\mathbb{Z}_{p^\infty}$.
(4)举例说明: 对于一个模, 其两个内射子模的交不一定是内射模.
**提示:** 考虑$E=A\oplus\{0\}$, $E'=\langle\{(a_{n+1},a_n)|n\geq 0\}\rangle$于$A\oplus A$.
(5)对任意正整数$m$, 定义嵌入同态$\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}$为乘$p$. 对$i\leq j$, $\phi_j^i$定义为从$\mathbb{Z}_{p^i}$到$\mathbb{Z}_{p^j}$的嵌入同态. 则正向系统$\{\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z},\phi_i^j\}$的正向极限为$\mathbb{Z}/p^\infty$.
(6)证明: 若$n\in\mathbb{Z}$不是$p$的倍数, 则$x\mapsto nx$是$\mathbb{Z}_{p^\infty}\to\mathbb{Z}_{p^\infty}$的同构.
(7)定义Abel群$G=\langle a_n,n\geq 0|pa_0=0,pa_{n+1}=a_n\rangle$, 即$G$由满足$pa_0=0,pa_{n+1}=a_n$的一列$\{a_n\}_{n\geq 0}$生成. 证明$G\cong\mathbb{Z}_{p^\infty}$.
(8)证明$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\cong\bigoplus\limits_{p\text{为素数}}\mathbb{Z}_{p^\infty}$.

3. **(Pontrjagin对偶)** 若$G$是一个（离散的）Abel群, 定义它的**Pontrjagin对偶**为一个群

$$G^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

(1)若$G$是Abel群且$0\neq a\in G$, 证明存在同态$f:G\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$使得$f(a)\neq 0$.
(2)证明$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$是内射$\mathbb{Z}$-模.
(3)证明若$0\to A\to G\to B\to 0$是$\mathbb{Z}$-模正合列, 则$0\to B^*\to G^*\to A^*\to 0$也是$\mathbb{Z}$-模正合列.
(4)若$G$是有限Abel群, 证明$G^*\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.
(5)若$G$是有限Abel群, 证明$G^*\cong G$.
(6)若$G$是有限Abel群, 则$G$的每个商群$G/H$同构于$G$的某个子群.

4. 记$(-)^*=\mathrm{Hom}_R(-,R)$, 设$\alpha:A\to B$是左$R$-模同态且$\alpha^*$是分裂满的, 证明: 若$A$自反, 则$A$是$B$的直和项.

[1] Prüfer群与p-adic数有关. 有的书上定义如下: $\mathbb{Z}_{p^\infty}=\{e^{\frac{2k\pi i}{p^n}}|k\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Z}^+\}$, 其中$i$为虚数单位.

# 第 2 章　范畴

主要内容:

- 范畴的概念和例子;
- 基本的范畴概念;
- 函子与自然变换;
- 范畴的等价;
- 积与余积;
- 核与余核;
- 加法范畴与Abel范畴.

范畴的思想: (数学的趋势是范畴化)可以避免重复劳动, 可以揭示问题的本质.

数学的研究对象是各种各样的: 不同的整体有共同的整体规律, 建立统一的数学系统.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 集合论 | 集合 | 映射 | **Set** |
| 拓扑学 | 拓扑空间 | 连续映射 | **Top** |
| 群论 | 群 | 群同态 | **G** |

## § 2.1　范畴的定义与例子

**定义 2.1: (Eilenberg&Maclane, General theory of natural equivalences, Trans. Amer. Math. Soc, 58(1945),231-294)**

**范畴(category)**$\mathscr{C}$由下列三成员组成:

**C1.** 一类**对象(object)**$A, B, C, \cdots$, 记为$\mathrm{ob}\,\mathscr{C}$.

**C2.** 集合$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$(或记为$\mathrm{Hom}(A, B), \mathscr{C}(A, B), \mathrm{Mor}(A, B), \mathrm{Morph}(A, B)$等), $\forall A, B \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, 称$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$中的元素是$A$到$B$的**态射(morphism)**.

**C3.** (**态射的合成**): 对任意的$A, B, C \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}, \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B), \tau \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$, 存在唯一的$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C)$与$\sigma, \tau$对应, 记为$\varphi = \tau\sigma$, 称之为$\sigma, \tau$的**合成**或**乘积**, 它们都应服从以下公理:

**A1(不相交性)**: 除非$A = A'$且$B = B'$, 否则$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A', B') = \varnothing$.

**A2(结合性)**: $\forall A, B, C, D \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B), \tau \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C), \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, D)$, 有$\psi(\tau\sigma) = (\psi\tau)\sigma$;

**A3(恒等态射存在性)**: $\forall A \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, 存在$1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A)$, 使得对任意$\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$与$\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, A)$, 有$\sigma \cdot 1_A = \sigma$, $1_A \cdot \tau = \tau$.

**注:** (1)显然$\mathrm{ob}\,\mathscr{C} \to \{1_A | A \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}\}$是一个一一对应, 因此在范畴论中, 有时只研究态射及其合成, 而忽略对象. (范畴性质要反映在态射上) 在这个意义下, 范畴理论称为箭头理论.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\tau"] \arrow[rr, bend right, "\tau"'] & A \arrow[r, "1_A"] \arrow[rr, bend left, "\sigma"] & A \arrow[r, "\sigma"] & B \end{tikzcd}$$

($A \xrightarrow{f} B$与$A \xrightarrow{f} \mathrm{Im}\, f$是不一样的东西)

(2)C1强调范畴$\mathscr{C}$的对象的全体; ob $\mathscr{C}$是一个类但不一定是集合, 即ob $\mathscr{C}$不必满足集合的公理体系. 否则, 在**Set**中就会出现“所有集合的集合”这样的悖论, 这在逻辑上是不成立的. 虽然如此, 我们仍用集合的一些记号: $\in, \subseteq, \times$(笛卡尔积)等等. 但C1没有排除ob $\mathscr{C}$成为集合的可能性. 如果ob $\mathscr{C}$是一个集合, 则称$\mathscr{C}$为**小范畴(small category)**.

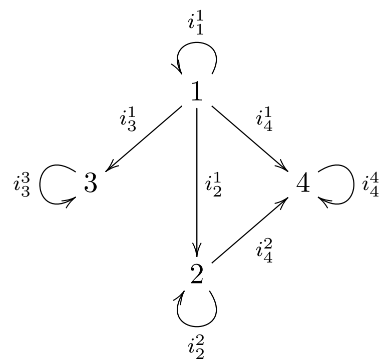
(3)$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$可以是空集, 但$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A) \neq \varnothing$, 因为由A3, $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A)$. [1]

如果$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) = \varnothing, & A \neq B, \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) = \{1_A\}, & A = B. \end{cases}$, 则称$\mathscr{C}$为**离散范畴**.

例如, 取ob $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{Z}^+$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x,y) = \begin{cases} \{i_y^x\}, & x|y, \\ \varnothing, & x\text{不整除}y, \end{cases}$. (这里暂时不知道$i_y^x$的具体表示). 态射合成: 若$x|y$且$y|z$, 则$i_z^y i_y^x = i_z^x$.

① 若ob $\mathscr{C} = \{\text{素数}\}$, 则$\mathscr{C}$是离散范畴.

② 若ob $\mathscr{C} = \{1,2,3,4\}$, 此时$\mathscr{C}$可以用如下有向箭头来表示. [2]




**定义**

设$\mathscr{C}, \mathscr{D}$是两个范畴.

若ob $\mathscr{D} \subseteq$ ob $\mathscr{C}$且对任意$A,B \in$ ob $\mathscr{D}$, 有$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A,B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$, 则称$\mathscr{D}$为$\mathscr{C}$的**子范畴(subcategory)**.

若ob $\mathscr{D} \subseteq$ ob $\mathscr{C}$且对任意$A,B \in$ ob $\mathscr{D}$, 有$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$, 则称$\mathscr{D}$为$\mathscr{C}$的**全子范畴(满子范畴, full subcategory)**.

**例 2.2: 一些常见范畴**

| 范畴 | 对象类 | 态射 |
|---|---|---|
| 集合范畴(**Set**) | 集合 | 映射 |
| 拓扑空间(**Top**) | 拓扑空间 | 连续映射 |
| 群范畴(**G**) | 群 | 群同态 |
| Abel群范畴(**AG**) | Abel群 | (Abel)群同态 |
| 环范畴(**Ring**或**Rng**) | 环 | 环同态 |
| 左$R$-模范畴($R-$**Mod**) | 左$R$-模 | 左$R$-模同态 |
| 域$K$上线性空间范畴($\mathbf{LS}_K$) | $K$-线性空间 | $K$-线性变换 |

[1]在模中$\mathrm{Hom}_R(A,B)$中一定有零同态.

[2]图追踪在范畴中不能用. 要证明范畴, 需要用泛性质证. 范畴不讲元素.

说明: (1)**Ring**包含单位元, **Rng**不要求有单位元(不是“没有单位元”).

(2)**AG**是**G**的全子范畴, **Ring**是**Rng**的子范畴(保持加、乘法)但不是全子范畴. 例如, 取

$$A=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\middle|a,b\in\mathbb{Q}\right\},B=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}\middle|a\in\mathbb{Q}\right\},$$

则$A,B\in\operatorname{ob}\mathbf{Ring}$. 定义$f:A\to B$为

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

则$f\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{Rng}}(A,B)$, 但$f\notin\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,B)$. 因为不把单位元映往单位元(它把单位元映往0).

(3)设$K$是域, 可定义矩阵范畴$\mathbf{M}_K$如下: $\operatorname{ob}\mathbf{M}_K=\mathbb{Z}^+$, 而$\operatorname{Hom}_{\mathbf{M}_K}(m,n)=K^{m\times n}$ (有时也把$K^{m\times n}$记为$M_{m\times n}(K)$), 态射的合成定义为通常的矩阵乘法, $n$级单位矩阵是$n$的恒等态射.

注意此时对象是一个个数而不是集合, 态射不一定是映射而是个矩阵. 所有$m\times n$矩阵都是从$m$到$n$的态射.

**两种构造新范畴的方法**:

(1)设$\mathscr{C}$是范畴, 可定义**对偶范畴(dual category)**或**反范畴(opposite category)**$\mathscr{C}^{op}$如下:

①$\operatorname{ob}\mathscr{C}^{op}=\operatorname{ob}\mathscr{C}$,

②$\forall A,B\in\operatorname{ob}\mathscr{C}^{op}$有$\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(A,B)=\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(B,A)$.

③态射合成: 若$f\in\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(A,B),g\in\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(B,C)$, 定义$g\cdot f(\text{in}\mathscr{C}^{op})=fg(\text{in}\mathscr{C})$.

④恒等态射$1_A$与$\mathscr{C}$中一样.

显然$\mathscr{C}=(\mathscr{C}^{op})^{op}$. $\mathscr{C}$中任意态射的交换图倒转箭头即可得到$\mathscr{C}^{op}$中态射的交换图: 如

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, "h"] \\ C & \end{tikzcd} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "f"'] \\ C \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

我们有**对偶原则**: $\mathscr{C}$中的一个陈述(定义或结论)倒转箭头, 则得$\mathscr{C}^{op}$中陈述, 无需再证.

(2)设$\mathscr{C},\mathscr{D}$是范畴, 可定义**积范畴(product category)**如下:

①$\operatorname{ob}\mathscr{C}\times\mathscr{D}=\operatorname{ob}\mathscr{C}\times\operatorname{ob}\mathscr{D}$(即由$\{(C,D)|C\in\operatorname{ob}\mathscr{C},D\in\operatorname{ob}\mathscr{D}\}$构成).

②$\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}((C,D),(C',D'))=\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C')\times\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(D,D')$(这是两个集合的笛卡尔积).

③对$(f,g)\in\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}((C,D),(C',D')),(f',g')\in\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}((C',D'),(C'',D''))$, 定义$(f',g')(f,g)=(f'f,g'g)$.

④对任意$(C,D)\in\operatorname{ob}\mathscr{C}\times\mathscr{D}$, 记$1_{(C,D)}=(1_C,1_D)$. 则$\mathscr{C}\times\mathscr{D}$是范畴.

## 练习题 2.1

1. 判断题:
(1)满足如下性质的范畴$\mathscr{C}$是存在的: $\forall A, B \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, $A \neq B$, $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) = \varnothing$.
(2)满足如下性质的范畴$\mathscr{C}$是存在的: $\forall A, B \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) = \varnothing$.

2. 设$\mathscr{C}$是个范畴, $A_1, A_2 \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$. 证明如下可以定义范畴$\mathscr{C}/\{A_1, A_2\}$: 其中对象为三元组$(B, f_1, f_2)$, 其中$f_i \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A_i)$, 态射$h : (B, f_1, f_2) \to (C, g_1, g_2)$定义为$\mathscr{C}$中的态射$h : B \to C$, 使得下图可交换:

$$\begin{tikzcd}
 & & A_1 \\
B \arrow[urr, "f_1"] \arrow[r, "h"] \arrow[drr, "f_2"'] & C \arrow[ur, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"] & \\
 & & A_2
\end{tikzcd}$$

Hom集合的不相交性定义如$\mathscr{C}$那样. 定义$1_{(B, f_1, f_2)} = 1_B$, 并且态射合成如$\mathscr{C}$.

## § 2.2 一些基本的范畴概念

小的范畴的概念与性质可能无法推广到大的范畴, 需要等价刻画.

**定义**

设$\mathscr{C}$是范畴, $A, B \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$.

若$fg = 1_B, gf = 1_A$, 则称$f$是**同构态射(isomorphism)**. 若$gf = 1_A$, 则称$f$是$g$的**截面态射(section)**, $g$是$f$的**保核映射(或收缩映射, retraction)**.

**定义**

设$\mathscr{C}$是范畴, $A, B \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$,

若$f$是**左可消的**, 即对$g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, A)$, $fg_1 = fg_2$可推出$g_1 = g_2$, 则称$f$是**单态射(monic)**.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

若$f$是**右可消的**, 即对$g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, $g_1 f = g_2 f$可推出$g_1 = g_2$, 则称$f$是**满态射(epic)**.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] & C \end{tikzcd}$$

**注:** 设$\mathscr{C}$是范畴, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$.

(1)易知, 在**Set**中, 单(resp. 满)态射$\Leftrightarrow$单(resp. 满)射.

(2)若$f, g$是单(resp. 满)态射, 则$gf$也是单(resp. 满)态射.

(3)若$gf$是单(resp. 满)态射, 则$f$(resp. $g$)是单(resp. 满)态射.

(4)截面态射是单态射, 保核态射是满态射. (由定义, 只需要分别验证$1_A$是单态射与满态射. )

(5)我们有

$$\begin{array}{ccccc} \text{同构} & \Rightarrow & \text{section(分裂单)} & \Rightarrow & \text{单态射} \\ \text{同构} & \Rightarrow & \text{retraction(分裂满)} & \Rightarrow & \text{满态射} \end{array}$$

但反过来一般不成立.

①由下面的命题2.3可知, 在$R-$**Mod**中, 单(resp. 满)态射$\Leftrightarrow$单(resp. 满)同态.

②在$\mathbb{Z}-$**Mod**中, 有正合列

$$\mathbb{Z} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

则$i$是单态射而不是section, $\pi$是满态射而不是retraction.

③设$P$是非自由的投射模, 则存在投射模$Q$, 使得$P \oplus Q$是自由模. 在分裂正合列

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\binom{1_P}{0}} P \oplus Q \xrightarrow{(0, 1_Q)} Q \longrightarrow 0$$

中, $\begin{pmatrix} 1_P \\ 0 \end{pmatrix}$是section(分裂单)但不是同构, $(0, 1_Q)$是retraction(分裂满)但不是同构.

**命题 2.3**

在$R-\mathbf{Mod}$与$\mathbf{G}$中, $f$是单(resp. 满)态射$\Leftrightarrow$单(resp. 满)同态.

**证明:** “$\Leftarrow$”: 若$f$是单(resp. 满)同态, 则$f$也是集合之间的单(resp. 满)射, 故左(resp. 右)可消, 从而$f$是单(resp. 满)态射.

“$\Rightarrow$”: (1)在$R-\mathbf{Mod}$中:

①先证明单的情形. 设$f:A\to B$不是单同态, 则$\operatorname{Ker} f\neq 0$, 再设$i:\operatorname{Ker} f\hookrightarrow A$是嵌入映射, 则$fi=0=f0$, 但$i\neq 0$, 故$f$不是左可消的, 从而不是单态射, 矛盾.

②下面证明满的情形. 设$f:A\to B$不是满同态, 则$\operatorname{Im} f\subsetneqq B$, 则有自然满同态$\pi:B\twoheadrightarrow B/\operatorname{Im} f$, 且$\pi f=0=0f$. 但$\pi\neq 0$, 故$f$不是右可消的, 从而不是满态射, 矛盾.

(2)在$\mathbf{G}$中, 单的情形与$R-\mathbf{Mod}$的类似, 略去. 下证满的情形. 设$f:A\to B$不是满同态, 则$C\triangleq\operatorname{Im} f\subsetneqq B$.（注意$B/\operatorname{Im} f$不一定是群，但$[B:C]=2$时，$B/\operatorname{Im} f$是群.）

(i)若$[B:C]=2$, 则$C\lhd B$(正规子群), 可以作商群$B/C$, 类似$R-\mathbf{Mod}$的证明可知$f$不是满态射.

(ii)若$[B:C]>2$, 考虑下图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & D \arrow[r, "\alpha"] & D \end{tikzcd}$$

要找$g,h,D$使得$gf=hf$但$g\neq h$(从而$f$不是右可消，进而不是满态射，导出矛盾.）想要$D$包含$B$的信息，可以让$D=\operatorname{sym} B$(有自然同态)，但另一个同态不好找，可以找$\alpha:D\to D$，让$h=\alpha g$，则$h$也是同态，而对称群到对称群的同态除了恒等映射还有内同构$y\mapsto pyp^{-1}$. 这里给一些补充内容:

设$G$是群, $a\in G$. 称$a_L:G\to G, a_L(x)=ax$为由$a$给定的**左平移**, $a_R:G\to G, a_R(x)=xa$为由$a$给定的**右平移**.

记$G_L=\{a_L|a\in G\}, G_R=\{a_R|a\in G\}$, $M(G)=\{G$的所有变换$\}$, 则

$$G_L\cup G_R\subseteq \operatorname{Sym}(G)\subseteq M(G),$$

其中$\operatorname{Sym}(G)$表示$G$的**对称群**. 记$C(G_L)$表示$G_L$在$M(G)$中的**中心化子**(与左平移可交换的变换), $C(G_R)$表示$G_R$在$M(G)$中的中心化子.

**断言 2.2.1** 在$M(G)$中, $G_R=C(G_L)$且$G_L=C(G_R)$.

**证明:** 一方面, 由于

$$a_Rb_L(x)=a_R(b_x)=(bx)a=b(xa)=b\cdot a_R(x)=b_La_R(x),$$

所以$a_Rb_L=b_La_R$, 故$G_R\subseteq C(G_L)$.

另一方面, 设$\eta\in C(G_L)$, 则

$$\eta(x)=\eta(x\cdot 1_G)=\eta(x_L(1_G))=x_L\eta(1_G)=x\eta(1_G).$$

则$\eta=(\eta(1_G))_R\in G_R$, 故$C(G_L)\subseteq G_R$. 因此$G_R=C(G_L)$, 另一个类似. □

**注:** 我们可以使用的“常量”有: 模: ${}_RR, 0, 1_R$; 环: $0,1$; 群: $1$.

定义$g: B \to \mathrm{Sym}(B)$为$g(b) = b_L$, 取定$p \in \mathrm{Sym}(B)$, 定义$\alpha: \mathrm{Sym}(B) \to \mathrm{Sym}(B)$为$\alpha(y) = pyp^{-1}$, 令$h = \alpha g$. 我们证明$gf = hf$但$g \neq h$.

由于$g = h \Leftrightarrow \forall b \in B, g(b) = h(b) \Leftrightarrow b_L = pb_Lp^{-1} \Leftrightarrow b_Lp = pb_L$, 由上面的断言, $p$是右平移, 故若$p$不是右平移, 则$g \neq h$.

注意到不等于1的右平移没有不动点, 故若$p \neq 1$且有不动点, 则$p$不是右平移, 此时$g \neq h$. 记$C = \mathrm{Im}\, f$, 记$B/C = \{cb | b \in B\}$为右平移空间, $\sigma$是$B/C$的变换, 且有不动点. (因为$|B/C| > 2$, 故这总可以办到) 再设

$$U = \{B/C\text{右陪集的代表元}\},$$

则对任意$b \in B$, 存在唯一的$c \in C$与$u \in U$, 使得$b = cu$. 下面定义$p$. 设$\sigma(cu) = cu'$(把陪集映往陪集), 定义$p(cu) = cu'$, 所以$p \in \mathrm{Sym}(B)$, 由$\sigma \neq 1$且有不动点, 则$p \neq 1$且有不动点, 故$p$不是右平移的, 从而$g \neq h$.

下证$gf = hf$. 对任意$b \in B, c \in C$,

$$pc_L(b) = pc_L(c_1u) = p(cc_1u) = (cc_1)u' = c(c_1u') = c(p(c_1u)) = cp(b) = c_Lp(b),$$

所以$pc_L = c_Lp$, 故对任意$a \in A$, 有

$$gf(a) = f(a)_L = pf(a)_Lp^{-1} = hf(a).$$

所以$gf = hf$. 综上, $f$不是满态射. □

**命题 2.4**

在环范畴中, $f$是单态射$\Leftrightarrow$ $f$是单同态, 但存在满态射不是满同态.

**证明:** 类似命题2.3可以证明若$f$是单(resp.满)同态, 则$f$是单(resp.满)态射.

(1)设$f: A \to B$是单态射,

思路: 我们不可以像前一个命题那样考虑下图, 因为一般情况下$\mathrm{Ker}\, f \notin \mathrm{ob}\,\mathbf{Ring}$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\, f \arrow[r, shift left, "\neq 0"] \arrow[r, shift right, "0"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

要考虑另外一种方式定义

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

并证明$fg = fh, g \neq h$.

令$A \oplus A = \{(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in A\}$, 定义

$$\begin{aligned}
&(a_1, a_2) + (a_1', a_2') = (a_1 + a_1', a_2 + a_2'),\\
&(a_1, a_2)(a_1', a_2') = (a_1a_1', a_2a_2'),\\
&1_{A\oplus A} = (1_A, 1_A).
\end{aligned}$$

则$A\oplus A\in\operatorname{ob}\mathbf{Ring}$. 令

$$K=\{(a_1,a_2)\in A\oplus A|f(a_1)=f(a_2)\},$$

则$K<A\oplus A$. 若$f$不是单同态, 则$\exists a_1,a_2\in A(a_1\neq a_2)$, 使得$f(a_1)=f(a_2)$, 此时$(a_1,a_2)\in K$. 定义$g_1,g_2:K\to A$为

$$g_1[(a_1,a_2)]=a_1,\qquad g_2[(a_1,a_2)]=a_2.$$

则$g_1\neq g_2$, 但$fg_1[(a_1,a_2)]=f(a_1)=f(a_2)=fg_2[(a_1,a_2)]$, 从而$fg_1=fg_2$, 故$f$不是单态射.

(2)在$\mathbf{Ring}$中, 令$i:\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Q}$, 则$i$是环同态, 显然不是满同态. 对任意环$R$, 设$g,h:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$是环同态, 使得$gi=hi$, 则$g|_{\mathbb{Z}}=h|_{\mathbb{Z}}$,

$$\begin{tikzcd}\mathbb{Z} \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{Q} \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & R\end{tikzcd}$$

下证$g=h$: 设$0\neq b\in\mathbb{Z}$, 则$g(b)g\left(\dfrac{1}{b}\right)=g\left(b\cdot\dfrac{1}{b}\right)=g(1)=1_R$, 于是$g\left(\dfrac{1}{b}\right)=g(b)^{-1}$, 故

$$g\left(\frac{a}{b}\right)=g(a)g\left(\frac{1}{b}\right)=g(a)g(b)^{-1}\xlongequal{g|_{\mathbb{Z}}=h|_{\mathbb{Z}}}h(a)h(b)^{-1}=h\left(\frac{a}{b}\right).$$

所以$g=h$, 从而$i$是满态射. (上述证明把$\mathbb{Z}$改为整环，把$\mathbb{Q}$改为分式域也可以). □

**注:** (1)环一般不谈直和, 只谈直积. 若$A_i\in\operatorname{ob}\mathbf{Ring}$, $i\in I$, 则一般情况下都有$\bigoplus\limits_{i\in I}A_i\notin\operatorname{ob}\mathbf{Ring}$. 但$\prod\limits_{i\in I}A_i\in\operatorname{ob}\mathbf{Ring}$. 无限直和没有意义.

(2)既单又满的环同态是同构, 但既单又满的态射不一定是同构(在$\mathbf{Ring}$中).

**命题 2.5**

在数域$K$上的矩阵范畴$\mathbf{M}_K$中, $A\in\operatorname{Hom}(m,n)$, 则:

(1)$A$是单态射$\Leftrightarrow$ $A$是行满秩矩阵.

(2)$A$是满态射$\Leftrightarrow$ $A$是列满秩矩阵.

**注:** 注意到在矩阵范畴中, 态射乘积顺序与一般范畴中相反. 因此在$\mathbf{M}_K$中, 单(resp. 满)态射$\leftrightarrow$该态射是右(resp. 左)可消, 此时与前面的定义相反, 即:

- 一般态射中$M\xrightarrow{f}N\xrightarrow{g}K$的态射乘积为$gf$,
- 矩阵乘法中$m\xrightarrow{A}n\xrightarrow{B}k$的态射乘积为$AB$.

**证明:** 只证明(1). "$\Rightarrow$": 假设$A$是单态射, 且$X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, 则

$$X=0\Leftrightarrow X^T=0\Leftrightarrow X^TA=0=0A\Leftrightarrow A^TX=0.$$

即齐次线性方程组$A^TX=0$只有零解, 故$A^T$是列满秩的, 从而$A$行满秩.

"$\Leftarrow$": 假设$A$是行满秩矩阵, 则$\operatorname{rank}(A)=m\leq n$, 从而存在$n\times n$可逆矩阵$Q$, 使得$AQ=(A_1,0)$, 其中$A_1$是$m\times m$可逆矩阵. 若$BA=CA$, 则$(BA_1,0)=BAQ=CAQ=(CA_1,0)$, 所以$BA_1=CA_1$, 所以$B=C$, 故$A$右可消, 从而$A$是单态射. □

## 练习题 2.2

1. 判断题:
   (1)在环范畴**Ring**中, 一个态射是同构的当且仅当它既单又满.
   (2)环范畴**Ring**的单态射和满态射分别是单同态和满同态.
   (3)设$\mathscr{C}$是范畴, $\mathscr{D}$是$\mathscr{C}$的全子范畴, $A, B \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, 若$f \in \mathscr{C}(A, B)$是满的, 则$f \in \mathscr{D}(A, B)$也是满的.

2. 设$\mathscr{C}$是由所有可除Abel群构成的范畴. 证明自然映射$\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$是$\mathscr{C}$中的单态射.

3. 在**Top**中举例说明一个态射可以是单态射和满态射但没有保核映射(retraction).
   **提示:** 考虑非空、非单点集$X$, 由$X$得到的离散拓扑(由$X$的幂集构成)记为$A$, 非离散拓扑(仅由$\varnothing$与$X$构成)记为$B$, 则$A, B \in \operatorname{ob}\mathbf{Top}$. 考虑$f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(A, B)$定义为$f(x) = x, \forall x \in A$.

## § 2.3 函子与自然变换

**定义 2.6**

设$\mathscr{C}, \mathscr{D}$是范畴, 一个**共变函子**$F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$由下面两个要素组成:

(1)从ob $\mathscr{C}$到ob $\mathscr{D}$的映射$A \mapsto F(A)$,

(2)从$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$到$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$的映射$f \mapsto F(f)$.

对任意$\mathscr{C}$中的一对对象$(A, B)$, 满足下面两条公理:

(F1) 若$gf$在$\mathscr{C}$中有定义, 则$F(gf) = F(g)F(f)$.

(F2) 对任意$A \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, 有$F(1_A) = 1_{F(A)}$.

**定义**

设$\mathscr{C}, \mathscr{D}$是范畴, 一个**反变函子**$F : \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{D}$由下面两个要素组成:

(1)从ob $\mathscr{C}$到ob $\mathscr{D}$的映射$A \mapsto F(A)$,

(2)从$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$到$\underline{\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(B), F(A))}$的映射$f \mapsto F(f)$.

对任意$\mathscr{C}$中的一对对象$(A, B)$, 满足下面两条公理:

(F1) 若$fg$在$\mathscr{C}$中有定义, 则$\underline{F(fg) = F(g)F(f)}$.

(F2) 对任意$A \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, 有$F(1_A) = 1_{F(A)}$.

称一个函子$F$是**加法函子(additive)**, 若$F(f + g) = F(f) + F(g)$.

**注:** (1)设$F$是共变(resp.反变)函子, 则$F$将sections与retractions分别变为sections与retractions(resp. retractions与sections). 所以无论$F$是共变还是反变, $F$均将同构映到同构, 但对单态射和满态射没有类似性质. (例如模范畴，Hom函子与张量函子不把单态射映为单态射，仅在特殊情况下才有)

(2)设$F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$与$G : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$都是函子, 定义

$$\begin{aligned} GF(A) &= G(F(A)), & \forall A \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}, \\ GF(f) &= G(F(f)), & \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B), \end{aligned}$$

则$GF : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$是函子, 叫$F, G$的**合成函子(composition)**. 易知: ①函子合成满足结合律; ②若$F, G$皆为共变或反变函子, 则$GF$是共变函子. 若$F, G$中一个是共变函子、一个是反变函子, 则$GF$是反变函子.

(3)称函子$\mathscr{B} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$为在$\mathscr{B}, \mathscr{C}$中共变的**双函子**(bifunctor)，$\mathscr{B}^{op} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$为在$\mathscr{B}$中反变，在$\mathscr{C}$中共变的双函子，$\mathscr{B} \times \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{D}$为在$\mathscr{B}$中共变，在$\mathscr{C}$中反变的双函子，$\mathscr{B}^{op} \times \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{D}$为在$\mathscr{B}, \mathscr{C}$中反变的双函子.

**例 2.7**

下面举一些函子的例子.

**例: 2.7(1)**

设$\mathscr{D}$是$\mathscr{C}$的子范畴, 可定义**嵌入函子(embedding functor)**$J : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$如下:

①$\forall A \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, $J(A) = A(\in \mathrm{ob}\,\mathscr{C})$,

②$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, $J(f) = f(\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B))$.

特别地, 若$\mathscr{D} = \mathscr{C}$, 称$J$为**恒等函子(identity functor)**, 记为$1_{\mathscr{C}}$.

**例: 2.7(2)**

可定义**忘却函子(forgetful functor)**$F:\mathbf{G}\to\mathbf{Set}$如下:

①$\forall G\in\operatorname{ob}\mathscr{C}$, $F(G)$为$G$的**基础集**(即忘掉$G$中代数结构的集合)$(\in\operatorname{ob}\mathbf{Set})$.

②$\forall f\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{G}}(G,G')$, $F(f)$为相应的基础集之间的映射(即忘掉群同态保持运算性质的映射)$(\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(G,G'))$.

类似可以定义忘却函子$\mathbf{Ring}\to\mathbf{AG}$(忘掉乘法), 或$\mathbf{Ring}\to\mathbf{Set}$(忘掉加法和乘法), 也可以定义忘却函子$R-\mathbf{Mod}\to\mathbf{AG}$.

**例: 2.7(3)**

可定义函子$M_n:\mathbf{Ring}\to\mathbf{Ring}$如下:

①$\forall R\in\operatorname{ob}\mathbf{Ring}$, $M_n(R)$为$R$的$n$级矩阵环$(\in\operatorname{ob}\mathbf{Ring})$.

②$\forall f\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R,S)$, $M_n(f):M_n(R)\to M_n(S)$定义为$(r_{ij})_{n\times n}\mapsto f(r_{ij})_{n\times n}$, 则$M_n(f)\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(M_n(R),M_n(S))$.

**例: 2.7(4)**

可定义函子$GL_n:\mathbf{Ring}\to\mathbf{G}$如下:

①$\forall R\in\operatorname{ob}\mathbf{Ring}$, $GL_n(R)$为由$n$级可逆矩阵构成的群$(\in\operatorname{ob}\mathbf{G})$.

②$\forall f\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R,S)$, $GL_n(f):GL_n(R)\to GL_n(S)$定义为$(r_{ij})_{n\times n}\mapsto(f(r_{ij}))_{n\times n}$(一定是可逆矩阵). 则$GL_n(f)\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{G}}(GL_n(R),GL_n(S))$.

**例: 2.7(5)**

可定义**幂函子(power functor)**$\mathcal{P}:\mathbf{Set}\to\mathbf{Set}$如下:

①$\forall A\in\operatorname{ob}\mathbf{Set}$, $\mathcal{P}(A)$为$A$的**幂集**$(\in\operatorname{ob}\mathbf{Set})$.

②$\forall f\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(A,B)$, $\mathcal{P}(f):\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(B)$定义为$A'\mapsto f(A')$. (特别地$\varnothing\mapsto\varnothing$), 则$\mathcal{P}(f)\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathcal{P}(A),\mathcal{P}(B))$.

**例: 2.7(6)**

可定义**Abel化函子(abelianizing functor)**$A:\mathbf{G}\to\mathbf{AG}$如下:

①$\forall G\in\operatorname{ob}\mathbf{G}$, $A(G)=G/(G,G)\in\operatorname{ob}\mathbf{AG}$, [a]

②$\forall f\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{G}}(G,H)$, $A(f):G/(G,G)\to H/(H,H)$定义为$x(G,G)\mapsto f(x)(H,H)$. 则$A(f)\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{AG}}(A(G),A(H))$.

[a] 设$G$是群, 把$(G,G):=\langle\{aba^{-1}b^{-1}|a,b\in G\}\rangle$称为$G$的**换位子群(commutator subgroup)**, 根据[BAI, p.245], $(G,G)\lhd G$且$G/(G,G)$是Abel群.

**例: 2.7(7)**

设$\mathscr{C},\mathscr{D}$是范畴. 可定义**射影函子(projection functor)**$P:\mathscr{C}\times\mathscr{D}\to\mathscr{C}$如下:

①$\forall(C,D)\in\operatorname{ob}\mathscr{C}\times\mathscr{D}$, $P[(C,D)]=C(\in\operatorname{ob}\mathscr{C})$;

②$\forall(f,g)\in\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}((C,D),(C',D'))$, $P[(f,g)]=f(\in\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C'))$.

**例: 2.7(8)**

可定义**对角函子(diagonal functor)**$D:\mathscr{C}\to\mathscr{C}\times\mathscr{C}$如下:

①$\forall C\in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, $D(C)=(C,C)(\in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}\times\mathscr{C})$;

②$\forall f\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C')$, $D(f)=(f,f)(\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}\times\mathscr{C}}((C,C),(C',C')))$.

**例: 2.7(9)**

设$R$是环, 前面已证$\mathrm{Hom}_R(-,R)(\triangleq(-)^*):R-\mathbf{Mod}\to\mathbf{Mod}-R$是加法反变函子.

①$\forall M\in \mathrm{ob}\,R-\mathbf{Mod}$, $M^*\in \mathrm{ob}\,\mathbf{Mod}-R$.

②$\forall f\in \mathrm{Hom}_{R-\mathbf{Mod}}(M,N)$, $f^*\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}-R}(N^*,M^*)$.

$$\begin{tikzcd} R-\mathbf{Mod} \arrow[r, "(-)^*"] \arrow[rr, bend right, "(-)^{**}"'] & \mathbf{Mod}-R \arrow[r, "(-)^*"] & R-\mathbf{Mod} \end{tikzcd}$$

后面会介绍双对偶函子$(-)^{**}$.

接下来如果没有特别说明, 函子都是指**共变函子**.

**定义 2.8: 忠实函子与完全函子**

设$F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$是函子, 若对$\mathscr{C}$中任意的对象对$(A,B)$, 映射

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),F(B)),\\ f & \mapsto & F(f)\end{array}$$

是单的(resp. 满的), 则称$F$是**忠实的(faithful)**(resp. **完全的/满的(full)**).

称$F$是**完全忠实的(fully faithful)**, 若$F$既是忠实又是完全的.

**注:** (1)嵌入函子是完全忠实的$\Leftrightarrow$ $\mathscr{D}$是$\mathscr{C}$的全子范畴. [①]

(2)忘却函子是忠实的, 但不是完全的.

(3)射影函子是完全的, 但不是忠实的.

**定义 2.9: 自然变换**

设$F,G:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$是函子, 称对应$\eta$为**从$F$到$G$的自然变换(natural transformation)**, 若$\eta$把每个$A\in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$对应一个$\eta_A\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),G(A))$, 并且对任意$f\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$都有$G(f)\cdot\eta_A=\eta_B F(f)$, 即下图可交换:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ B & F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

若所有$\eta_A$都是同构, 称$\eta$是**自然同构(natural isomorphism)**.

函子之间的同构都是指自然同构.

---

[①]根据例2.2后的注, Abel群范畴**AG**到群范畴**G**的嵌入函子是完全忠实的; 环范畴**Ring**到**Rng**的嵌入函子不是完全忠实的.

**例 2.10**

在例2.7(9)中已经看到$(-)^* = \mathrm{Hom}_R(-,R)$是$R-\mathbf{Mod} \to \mathbf{Mod}-R$的加法反变函子, 则$(-)^{**}(:=[(-)^*]^*) : R-\mathbf{Mod} \to R-\mathbf{Mod}$是加法共变函子, 叫**双对偶函子(double dual functor)**.

设$M \in R-\mathbf{Mod}$, 定义$\sigma_M : M \to M^{**}$为

$$\sigma_M(x)(f) = f(x), \forall x \in M, \forall f \in M^*,$$

则$\sigma_M$是左$R$-模同态. (注意$M^{**} = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R),R)$)

设$x \in M, g \in N^*$, 则

$$\underbrace{h^{**}\sigma_M(x)(g)}_{\neq h^{**}g(x)} = \sigma_M(x)h^* = \sigma_M(x)h^* = \sigma_M(x)(gh) = gh(x).$$

并且

$$\sigma_N h(x)(g) = gh(x),$$

于是$h^{**}\sigma_M = \sigma_N h$, 从而下图可交换.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "h"'] & 1_{R-\mathbf{Mod}}(M) \arrow[r, "\sigma_M"] \arrow[d, "1_{R-\mathbf{Mod}}(h)"'] & M^{**} \arrow[d, "h^{**}"] \\ N & 1_{R-\mathbf{Mod}}(N) \arrow[r, "\sigma_N"] & N^{**} \end{tikzcd}$$

所以$\sigma : 1_{R-\mathbf{Mod}} \to (-)^{**}$是自然变换.

**注:** (1)一般地, $(-)^{**} : R-\mathbf{Mod} \to R-\mathbf{Mod}$不是忠实的, 例如: 取$R = \mathbb{Z}$, 考虑嵌入映射$i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, 于是有$\mathbb{Z}$-模同态$i^{**} : \mathbb{Z}^{**} \to \mathbb{Q}^{**}$. 前面已经证明$\mathbb{Q}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) = 0$, 则$\mathbb{Q}^{**} = 0$, 所以$i^{**} = 0 = 0^{**}$, 但$i \neq 0$. 故$(-)^*$不是忠实的.

(2)若$\sigma_M$单, 则称$M$是**无挠的(torsionless, 注意这里的“无挠”与§1.6节补充内容的torsion-free不一样)**. 若$\sigma_M$为同构, 称$M$为**自反的(reflexive)**. [1]

**命题**

我们有:

(1)无挠模的子模是无挠的; (自反模的子模一般不是自反的).

(2)设$M = M_1 \oplus M_2$, 则$M$是无挠模(resp. 自反模)$\Leftrightarrow$ $M_1, M_2$都是无挠模(resp. 自反模).

(3)任意有限生成投射左$R$-模是自反的.

**证明:** (1)设$M <_R N$且$N$是无挠的, 则$\sigma_N$是单的. 因为有如下交换图

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\sigma_M"] \arrow[d, hook, "\lambda"'] & M^{**} \arrow[d, "\lambda^{**}"] \\ N \arrow[r, tail, "\sigma_N"] & N^{**} \end{tikzcd}$$

[1] $\sigma_M$满的时候没什么比较好的性质, 所以不给特殊的名字定义.

则$\lambda^{**}\sigma_M = \sigma_N\lambda$是单的, 从而$\sigma_M$单, 故$M$是无挠模.

(2)设$M = M_1 \oplus M_2$, 则有分裂正合列

$$0 \to M_1 \xrightarrow{\lambda_1} M(= M_1 \oplus M_2) \xrightarrow{p_2} M_2 \to 0.$$

其中, $\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1_{M_1} \\ 0 \end{pmatrix}$, $p_2 = (0, 1_{M_2})$. 于是有下面的分裂正合列:

$$0 \to M_2^* \xrightarrow{p_2^*} M^* \xrightarrow{\lambda_1^*} M_1^* \to 0.$$
$$0 \to M_1^{**} \xrightarrow{\lambda_1^{**}} M^{**} \xrightarrow{p_2^{**}} M_2^{**} \to 0.$$

因为有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r, dashed] & \operatorname{Ker}\sigma_{M_1} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\sigma_M \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\sigma_{M_2} \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, rounded corners] & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\lambda_1"] \arrow[d, "\sigma_{M_1}"] & M \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\sigma_M"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{M_2}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1^{**} \arrow[r] \arrow[d] & M^{**} \arrow[r] \arrow[d] & M_2^{**} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{Coker}\sigma_{M_1} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\sigma_M \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\sigma_{M_2} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

由此易知结论成立.

(3)由(2)可知只需要证明${}_RR$是自反的. 参考: [GTM13]Prop20.17. □

**例 2.11**

定义函子$\oplus_n : R-\mathbf{Mod} \to R-\mathbf{Mod}$的函子如下:

①$\forall M \in \operatorname{ob} R-\mathbf{Mod}$, $\oplus_n(M) = M^{(n)}(\in \operatorname{ob} R-\mathbf{Mod})$;

②$\forall f \in \operatorname{Hom}_{R-\mathbf{Mod}}(M, N)$, $\oplus_n(f) \triangleq f^{(n)} : M^{(n)} \to N^{(n)}$定义为$(a_1, \cdots, a_n) \mapsto (f(a_1), \cdots, f(a_n))$.

再定义**对角同态(diagonal homomorphism)**$\delta_M^{(n)} : M \to M^{(n)}$为$x \mapsto (x, \cdots, x)$, 则有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "f"'] & 1_{R-\mathbf{Mod}}(M)(= M) \arrow[r, "\delta_M^{(n)}"] \arrow[d, "1_{R-\mathbf{Mod}}(f)(=f)"'] & \oplus_n(M)(= M^{(n)}) \arrow[d, "\oplus_n(f)(=f^{(n)})"] \\
N & 1_{R-\mathbf{Mod}}(N)(= N) \arrow[r, "\delta_N^{(n)}"] & \oplus_n(N)(= N^{(n)})
\end{tikzcd}$$

所以$\delta^{(n)} : 1_{R-\mathbf{Mod}} \to \oplus_n$是自然变换.

**例 2.12**

在例2.7(6)中已看到有Abel化函子$A:\mathbf{G}\to\mathbf{AG}$, 可以将$A$视为$\mathbf{G}$到$\mathbf{G}$的函子.

定义$v_G:G\to G/(G,G)$为$x\mapsto x(G,G)$, 则有如下交换图:

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "f"'] & 1_{\mathbf{G}}(G)(=G) \arrow[r, "v_G"] \arrow[d, "1_{\mathbf{G}}(f)(=f)"'] & A(G)(=G/(G,G)) \arrow[d, "A(f)"] & x(G,G) \arrow[d, squiggly] \\
H & 1_{\mathbf{G}}(H)(=H) \arrow[r, "v_H"] & A(H)(=H/(H,H)) & f(x)(H,H)
\end{tikzcd}
$$

则$v:1_{\mathbf{G}}\to A$是自然变换.

**定义 2.13**

设$F,G,H:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$是函子, $\eta:F\to G,\zeta:G\to H$是自然变换. 对任意$A\in\operatorname{ob}\mathscr{C}$, $\eta_A\in\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),G(A))$, $\zeta_A\in\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(G(A),H(A))$, 有$\zeta_A\cdot\eta_A\in\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),H(A))$, 且下图中两个小方框交换, 则整个图交换, 从而$\zeta\eta:F\to H$是自然变换, 叫$\zeta$与$\eta$的**积**或**合成**.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[r, "\zeta_A"] \arrow[d, "G(f)"] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\
B & F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \arrow[r, "\zeta_B"] & H(B)
\end{tikzcd}
$$

设$F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$为函子, 则有$1_F:F\to F$(自然变换), 记函子$G:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$, 并且$\eta:F\to G$是自然变换, 则$\eta\cdot 1_F=\eta=1_G\cdot\eta$.(可以定义函子范畴)

**定义 2.14**

设$\eta:F\to G$与$\zeta:G\to H$为自然变换. 若$\zeta\eta=1_F$且$\eta\zeta=1_G$, 则$\eta,\zeta$都是自然同构, 称$\zeta$为$\eta$的**逆变换(inverse transformation)**, 记为$\zeta=\eta^{-1}$.

**注:** (1)易知自然同构有逆变换: $G(f)\eta_A=\eta_B F(f)\Rightarrow\eta_B^{-1}G(f)=F(f)\eta_A^{-1}$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "\eta_A", "\cong"'] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \arrow[l, bend right, "\eta_A^{-1}"'] \\
B & F(B) \arrow[r, "\eta_B", "\cong"'] & G(B) \arrow[l, bend left, "\eta_B^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

(2)设$F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}$是函子且$\eta:1_{\mathscr{C}}\to F$为自然同构, 则有如下交换图:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & 1_{\mathscr{C}}(A) \arrow[r, "\eta_A", "\cong"'] \arrow[d, "1_{\mathscr{C}}(f)(=f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\
B & 1_{\mathscr{C}}(B) \arrow[r, "\eta_B", "\cong"'] & F(B)
\end{tikzcd}
$$

故$F(f)=\eta_B f\eta_A^{-1}$, 即$F(f)$可以由$f$唯一确定.（当然，$f=\eta_B^{-1}F(f)\eta_A$.　）

于是$F:\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)\to\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(F(A),F(B))$是双射, 从而$F$完全忠实.

## 练习题 2.3

1. 判断题:

   (1)设$\mathscr{C}$是范畴且$F : G : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$都是共变函子, 若$F$是正合函子而$G$不是正合函子, 则$GF$不是正合函子.

   (2)Abel群范畴到群范畴的嵌入函子是完全忠实的.

   (3)设$\mathscr{C}, \mathscr{D}$均为范畴, 且$F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$是函子. 则$F : \mathrm{ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{ob}\,\mathscr{D}$是一个映射.

   (4)与恒等函子同构的函子一定是完全忠实的.

2. 设$\mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}$是范畴. $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$是函子, $K : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$是函子, $H : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$是函子. 证明若$\eta$是$F$到$G$的自然变换, 则对$A \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, $A \mapsto H\eta_A$是从$HF$到$HG$的自然变换; 对$B \in \mathrm{ob}\,\mathscr{B}$, $B \mapsto \eta_{KB}$是从$FK$到$GK$的自然变换.

3. 定义范畴$\mathscr{C}$的**中心(center)**表示恒等函子$1_{\mathscr{C}}$到$1_{\mathscr{C}}$的自然变换的全体. 让$\mathscr{C} = R - \mathbf{Mod}$, 且$c \in R$. 对任意$M \in \mathrm{ob}\,R - \mathbf{Mod}$, 记$\eta_M(c)$为映射$x \mapsto cx, x \in M$.

   (1)证明$\eta(c) : M \mapsto \eta_M(c)$在$\mathscr{C}$的中心中, 并且$\mathscr{C}$的中心中的每个元素都有这样的形式.

   (2)证明$c \mapsto \eta(c)$是双射, 从而$R - \mathbf{Mod}$的中心是一个集合.

4. 设$T : \mathbf{AG} \to \mathbf{AG}$是加法函子, 证明对任意Abel群$G$, 映射$\mathrm{End}(G) \to \mathrm{End}(TG)$定义为$f \mapsto Tf$是环同态.

## § 2.4 范畴的等价

**定义**

称范畴$\mathscr{C}$与$\mathscr{D}$**同构(isomorphic)**, 记为$\mathscr{C} \cong \mathscr{D}$, 若存在函子$F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$与$G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$使得$GF = 1_{\mathscr{C}}$且$FG = 1_{\mathscr{D}}$.

**注:** 同构的范畴经常性地等同, 如$\mathbf{AG} \cong \mathbb{Z}-\mathbf{Mod}$, $R-\mathbf{Mod} \cong \mathbf{Mod}-R^{op}$. 但同构的条件太强, 希望放宽条件.

**定义 2.15**

称范畴$\mathscr{C}$与$\mathscr{D}$是**等价的(equivalent)**, 记为$\mathscr{C} \approx \mathscr{D}$, 若存在函子$F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$与$G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$使得$GF \cong 1_{\mathscr{C}}$且$FG \cong 1_{\mathscr{D}}$(这里的$\cong$表示函子之间的自然同构).

此时也称函子对$(F, G)$给出了范畴$\mathscr{C}, \mathscr{D}$之间的等价.

**注:** (1)范畴等价是等价关系(自反性、对称性、传递性).

(2)若$\mathscr{C} \cong \mathscr{D}$, 则$\mathscr{C} \approx \mathscr{D}$, 但反之不然. 例子如下:

**例 2.4.1** *设$K$是域, 取范畴$\mathscr{C}$使得$\operatorname{ob}\mathscr{C} = \{K\}$, 惟一的态射集$\operatorname{Hom}_K(K, K)$, 态射的合成为$K$-线性变换的合成. 取范畴$\mathscr{D}$使得$\operatorname{ob}\mathscr{D} = \{$所有1维$K$-线性空间$\}$, 态射与态射的合成同$\mathbf{LS}_K$(通常的线性变换). 于是$\mathscr{C}$是$\mathscr{D}$的子范畴. 易知$\mathscr{C} \approx \mathscr{D}$但$\mathscr{C} \not\cong \mathscr{D}$.*

下面给出范畴等价的判别方法. 有时候我们不知道$G$的具体表示, 希望只用$F$判断是否等价.

**定义**

称函子$F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$是**稠密的(dense)**或**本质满的(essentially surjective)**, 若$\forall A' \in \operatorname{ob}\mathscr{D}$, $\exists A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, 使得$A' \cong F(A)$. (即有同构的原像)

**定理 2.16: 两个范畴等价的判别方法**

设$F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$是共变函子, TFAE:

(1)存在共变函子$G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$使得$(F, G)$之间给出了$\mathscr{C}$与$\mathscr{D}$之间的等价.

(2)$F$完全忠实且稠密.

**证明:** “(1) $\Rightarrow$ (2)”: 由于$FG \cong 1_{\mathscr{D}}$, 则$\forall A' \in \operatorname{ob}\mathscr{D}$, $FG(A') \cong A'$. 令$A = G(A')$, 则$A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$且$A' \cong F(A)$, 所以$F$稠密.

下证$F : \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$, $f \mapsto F(f)$为双射. 由$GF \cong 1_{\mathscr{C}}$, 则$GF$是完全忠实的(见定义2.14后的注(2)). 故$GF : \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(GF(A), GF(B))$是双射, 所以$F : \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$是单射.

同理, 由$FG \cong 1_{\mathscr{D}}$可得$F : \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$是满射. 从而$F$是完全忠实的.

“(2) $\Rightarrow$ (1)”: 由已知, $F$是稠密的, 即$\forall A' \in \operatorname{ob}\mathscr{D}$, $\exists A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, 使得$A' \overset{\eta_{A'}}{\cong} F(A)$.[①] 下面我们设$\eta_{A'} : A' \to F(A)$是同构.

下面定义函子$G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. 先定义$G : \operatorname{ob}\mathscr{D} \to \operatorname{ob}\mathscr{C}$为$G(A') = A$, 则$\eta_{A'} : A' \to FG(A')$是同构.

---

[①] 注意这里$A$不唯一, 但事实上我们不需要管它是否唯一, 因为$\operatorname{ob}\mathscr{C}$不一定是集合, $\eta_{A'}$不一定是映射.

设$f' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A', B')$, 则存在唯一的态射$\eta_{B'} f' \eta_{A'}^{-1} : FG(A') \to FG(B')$, 使得下图可交换:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\eta_{A'}", "\cong"'] \arrow[d, "f'"'] & FG(A') \arrow[d, dashed, "\eta_{B'} f' \eta_{A'}^{-1}"] \\ B' \arrow[r, "\eta_{B'}", "\cong"'] & FG(B'). \end{tikzcd}$$

由于$F$完全忠实, 则有唯一的$f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(G(A'), G(B'))$使得$\eta_{B'} f' \eta_{A'}^{-1} = F(f)$.

再定义$G : \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A', B') \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(G(A'), G(B'))$为$G(f') = f$. 则有如下交换图:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\eta_{A'}"] \arrow[d, "f'"'] & FG(A') \arrow[d, "FG(f')"] \\ B' \arrow[r, "\eta_{B'}"] & FG(B'). \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

而且$G(f')$即$f$是$G(A') \to G(B')$使得上图可交换的唯一态射.

设$g' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B', C')$, 则有如下交换图.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\eta_{A'}"] \arrow[d, "f'"'] & FG(A') \arrow[d, "FG(f')"] \\ B' \arrow[r, "\eta_{B'}"] \arrow[d, "g'"'] & FG(B') \arrow[d, "FG(g')"] \\ C' \arrow[r, "\eta_{C'}"] & FG(C') \end{tikzcd}$$

由于$F$为共变函子, 即$F(G(g'))F(G(f')) = F(G(g')G(f'))$, 则有如下交换图:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\eta_{A'}"] \arrow[d, "g'f'"'] & FG(A') \arrow[d, "F(G(g')G(f'))"] \\ C' \arrow[r, "\eta_{C'}"] & FG(C') \end{tikzcd}$$

由于我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\eta_{A'}"] \arrow[d, "g'f'"'] & FG(A') \arrow[d, "FG(g'f')"] \\ C' \arrow[r, "\eta_{C'}"] & FG(C') \end{tikzcd}$$

而且$G(g'f')$是$G(A') \to G(C')$使上图可交换的唯一态射, 所以结合这两个交换图可得$G(g')G(f') = G(g'f')$. 同理可证明$G(1_{A'}) = 1_{G(A')}$, 故$G$为共变函子, 且$\eta : 1_{\mathscr{D}} \to FG$是自然同构.

下证$GF \cong 1_{\mathscr{C}}$. 我们给出如下断言:

**断言 2.4.1** *设$F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$是完全忠实函子, 且$f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$. 则下面任何一个$F(f)$的性质可推出$f$具有相同的性质: 单态射、满态射、section、retraction、同构.*

下证$F(f)$单$\Rightarrow$ $f$单. 即$fg_1 = fg_2$可推出$g_1 = g_2$. 事实上,

$$fg_1 = fg_2 \xRightarrow{F\text{共变}} F(f)F(g_1) = F(f)F(g_2) \xRightarrow{F(f)\text{单}} F(g_1) = F(g_2) \xRightarrow{F\text{完全忠实}} g_1 = g_2.$$

其他是类似的, 自证.

由于$\eta_{F(A)}: F(A) \to FGF(A)$是同构, $F$完全忠实, 故存在唯一的态射$\zeta_A \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, GF(A))$使得$\eta_{F(A)} = F(\zeta_A)$. 由上面的断言可知$\zeta_A$是同构, 由图(2.1)可知有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(\zeta_A)", "(=\eta_{F(A)})"'] \arrow[d, "F(f)"'] & FGF(A) \arrow[d, "FGF(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "F(\zeta_B)", "(=\eta_{F(B)})"'] & FGF(B)
\end{tikzcd}$$

则

$$F(GF(f)\zeta_A) = FGF(f)F(\zeta_A) = F(\zeta_B)F(f) = F(\zeta_B f).$$

由$F$忠实, 则$GF(f)\zeta_A = \zeta_B f$, 即有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\zeta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & GF(A) \arrow[d, "GF(f)"] \\
B \arrow[r, "\zeta_B"] & GF(B)
\end{tikzcd}$$

所以$\zeta: 1_{\mathscr{C}} \to GF$是自然同构.

综上, 函子对$(F, G)$给出了$\mathscr{C}$与$\mathscr{D}$之间的等价. □

**注:** 此定理证明思路很清晰, 不适合拿来考, 但也要搞清楚. 先找到$G$(验证共变函子), 再验证$FG \cong 1_{\mathscr{D}}$, $GF \cong 1_{\mathscr{C}}$.

**定理 2.17**

设$R$是环, 则$\mathbf{Mod} - R \approx \mathbf{Mod} - M_n(R)$, 其中$M_n(R)$是$R$的$n$级矩阵环. (即矩阵环⇔基础环.)

**证明:** 设$M \in \mathrm{ob}\,\mathbf{Mod} - R$, 记$M^{(n)} = \{(x_1, \cdots, x_n) | \forall x_i \in M\}$, 对任意$(a_{ij})_{n\times n} \in M_n(R)$, 定义

$$(x_1, \cdots, x_n)(a_{ij})_{n\times n} = (y_1, \cdots, y_n) \in M^{(n)},$$

其中$y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j a_{ji}, 1 \le i \le n$. 则$M^{(n)} \in \mathbf{Mod} - M_n(R)$.

下面定义函子$F: \mathbf{Mod} - R \to \mathbf{Mod} - M_n(R)$.

- 对任意$M \in \mathrm{ob}\,\mathbf{Mod} - R$, $F(M) = M^{(n)} \in \mathbf{Mod} - M_n(R)$.
- 对任意$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}-R}(M, N)$, 定义$F(f) \triangleq f^{(n)}: M^{(n)} \to N^{(n)}$为$(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (f(x_1), \cdots, f(x_n))$. 则$f^{(n)} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}-M_n(R)}(M^{(n)}, N^{(n)})$,

易证$F$是加法共变函子(自己补充).

再证$F$完全忠实且稠密, 于是由定理2.16可知结论成立.

①$F$是忠实的: 设$f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}-R}(M, N)$且$f \neq f'$, 则存在$x_0 \in M$, 使得$f'(x_0) \neq f(x_0)$, 于是

$$\begin{aligned}
F(f)[(x_0, \cdots, x_0)] &= f^{(n)}[(x_0, \cdots, x_0)] = (f(x_0), \cdots, f(x_0)) \\
&\neq (f'(x_0), \cdots, f'(x_0)) = f'^{(n)}[(x_0, \cdots, x_0)] \\
&= F(f')[(x_0, \cdots, x_0)],
\end{aligned}$$

于是$F(f) \neq F(f')$, 故$F$忠实.

②$F$是完全的: 记$e_{ij}$为第$i$行、第$j$列为$1_R$, 其余位置为0的$n$级方阵, $\forall 1 \le i,j \le n$. 设$g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}-M_n(R)}(M^{(n)}, N^{(n)})$, 注意到

$$M^{(n)}e_{11} = \{(x,0,\cdots,0)|x \in M\}, \qquad N^{(n)}e_{11} = \{(y,0,\cdots,0)|y \in N\},$$

因为$g$是$M_n(R)$-模同态, 则$g(M^{(n)}e_{11}) = g(M^{(n)})e_{11} \subseteq N^{(n)}e_{11}$. 定义

$$g(x,0,\cdots,0) = (f(x),0,\cdots,0).$$ [①]

显然$f(x+x') = f(x) + f(x')$. 设$a \in R$且$a' = \mathrm{diag}\{a,\cdots,a\}$, 则

$$\begin{aligned}(f(x)a,0,\cdots,0) &= (f(x),0,\cdots,0)a' = g[(x,0,\cdots,0)]a' \\ &= g[(x,0,\cdots,0)a'] = g[(xa,0,\cdots,0)] = f(xa).\end{aligned}$$

因此$f(xa) = f(x)a$, 所以$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}-R}(M,N)$. 因为

$$\begin{aligned}g[(0,\cdots,0,\overset{i}{x},0,\cdots,0)] &= g[(x,0,\cdots,0)e_{1i}] = g[(x,0,\cdots,0)]e_{1i} \\ &= (f(x),0,\cdots,0)e_{1i} = (0,\cdots,0,\overset{i}{f(x)},0,\cdots,0), \qquad 1 \le i \le n,\end{aligned}$$

所以$g = f^{(n)} = F(f)$, 所以$F$完全.

③$F$是稠密的: 设$M' \in \mathrm{ob}\,\mathbf{Mod} - M_n(R)$, 令$\alpha : R \to M_n(R)$为$a \mapsto a' = \mathrm{diag}(a,\cdots,a)$, 则$\alpha$是环同态. $\forall a \in R, x' \in M'$, 定义$x'a = x'a'$, 则$M' \in \mathrm{ob}\,\mathbf{Mod} - R$[②]. 令$M = M'e_{11}$. $\forall x' \in M', a \in R$, 有

$$(x'e_{11})a = x'e_{11}a' = (x'a')e_{11} \in M,$$

所以$M$是$M'$的$R$-子模. 注意$x'e_{i1} = x'e_{i1}e_{11} \in M$, 定义

$$\begin{array}{rccc}\eta_{M'}: & M' & \to & M^{(n)}(=F(M)) \\ & \eta_{M'}(x') & = & (x'e_{11}, x'e_{21}, \cdots, x'e_{n1}).\end{array}$$

则$\eta_{M'}$是右$M_n(R)$-模同态, 设$(x'e_{11}, x'e_{21}, \cdots, x'e_{n1}) = 0$, 则

$$x' = x'\underbrace{\sum_{i=1}^n e_{ii}}_{\text{单位矩阵}} = \sum_{i=1}^n x'e_{ii} = \sum_{i=1}^n (\underbrace{x'e_{i1}}_{=0})e_{1i} = 0.$$

故$\eta_{M'}$是单同态. 再设$(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in M^{(n)}$, 由$M = M'e_{11} \neq 0$, 存在$x'_i \in M'$使得$x_i = x'_ie_{11}$, $\forall 1 \le i \le n$. 则

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= (x'_1e_{11}, x'_2e_{11}, \cdots, x'_ne_{11}) \\ &= ((x'_1e_{11})e_{11}, (x'_2e_{12})e_{21}, \cdots, (x'_ne_{1n})e_{n1}) \\ &= \eta_{M'}(x'_1e_{11} + x'_2e_{12} + \cdots + x'_ne_{1n}).\end{aligned}$$

故$\eta_{M'}$是满的, 从而是同构. 故$F$是稠密的. □

[①] 证明$R - \mathbf{Mod}$的满同态是满态射也用了这样的方法.

[②] 设$\alpha : R \to S$是环同态, $M' \in \mathbf{Mod} - S$. 定义$x'r = x'\alpha(r)$, 则$M' \in \mathbf{Mod} - R$.

## 练习题 2.4

1. 范畴$\mathscr{C}$的全子范畴$\mathscr{D}$称为$\mathscr{C}$的**骨架(skeleton)**, 若任意$A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, 存在唯一的$A_0 \in \operatorname{ob}\mathscr{D}$使得$A_0 \cong A$.

   (1)证明：$\mathscr{C}$的任意骨架都与$\mathscr{C}$等价,

   (2)举例说明$\mathscr{C}$的骨架不一定与$\mathscr{C}$同构.

   (3)$\mathscr{C}$的所有骨架之间是否都同构？

   **提示：**可以参考[GTM5, 4.4节].

## § 2.5 积与余积

本节中, 设$\mathscr{C}$是范畴, $A_j \in \operatorname{ob}\mathscr{C}, \forall j \in J$, 其中$J$是指标集.

**定义 2.18**

若$\exists A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$和$p_j \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A_j)(\forall j \in J)$, 满足如下**泛性质**: $\forall B \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$和$f_j \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A_j)$ $(\forall j \in J)$, $\exists! f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$使得$f_j = p_j f, \forall j \in J$, 则称$\{A, \{p_j\}_{j\in J}\}$或$A$为$\{A_j\}_{j\in J}$的**积(product)**, 记为$A = \prod\limits_{j\in J} A_j$.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, dashed, "\exists! f"'] \arrow[d, "f_j"] & , \quad \forall j \in J \\ A \arrow[r, "p_j"'] & A_j & \end{tikzcd}$$

**命题 2.19**

设$\{A, \{p_j\}_{j\in J}\}$与$\{A', \{p'_j\}_{j\in J}\}$都是$\{A_j\}_{j\in J}$的积, 则存在唯一的同构$h : A' \to A$使得$p'_j = p_j h$ $(\forall j \in J)$.

**证明:** 见[BA II, Chap 1, Prop 1.5].

**例 2.20**

(1)在集合范畴**Set**中, 记$A_j \in \operatorname{ob}\mathbf{Set}$, $\forall j \in J$. 令$A = \prod\limits_{j\in J} A_j$为$\{A_j\}_{j\in J}$的笛卡尔积, 而且$p_j$是$\prod\limits_{j\in J} A_j$的第$j$个投射. 设$B \in \operatorname{ob}\mathbf{Set}$且$f_j \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(B, A_j)$, 则存在唯一映射$f : B \to A$, $f(b) = (f_j(b))$使得$f_j = p_j f, \forall j \in J$. 则$\left(\prod\limits_{j\in J} A_j, \{p_j\}_{j\in J}\right)$是$\{A_j\}_{j\in J}$的积.

(2)在群范畴**G**中, $G_j \in \operatorname{ob}\mathbf{G}$, $\forall j \in J$. 令$G = \prod\limits_{j\in J} G_j$(笛卡尔积) $\forall g, g' \in G, j \in J$, 定义$gg'(j) = g(j)g'(j)$, 且$1_G(j) = 1_{G_j}$. 则$G \in \operatorname{ob}\mathbf{G}$. 类似(1)可以说明$\left(\prod\limits_{j\in J} G_j, \{p_j\}_{j\in J}\right)$是$\{G_j\}_{j\in J}$的积.

(3)在环范畴**Ring**中, $R_j \in \operatorname{ob}\mathbf{Ring}$, $\forall j \in J$. 同理可证明$\left(\prod\limits_{j\in J} R_j, \{p_j\}_{j\in J}\right)$是$\{R_j\}_{j\in J}$的积. (需要定义加法、乘法、单位元、零元)

(4)在$R - \mathbf{Mod}$中, 一族模的积就是这族模的直积.

**定义 2.21**

若$\exists A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$和$\lambda_j \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j, A)(\forall j \in J)$, 满足如下**泛性质**: $\forall B \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$和$g_j \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j, B)$ $(\forall j \in J)$, $\exists! g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$使得$g_j = g\lambda_j, \forall j \in J$, 则称$\{A, \{\lambda_j\}_{j\in J}\}$或$A$为$\{A_j\}_{j\in J}$的**余积(coproduct)**, 记为$A = \coprod\limits_{j\in J} A_j$.

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\lambda_j"] \arrow[d, "g_j"'] & A , \forall j \in J \arrow[dl, dashed, "\exists! g"] \\ B & \end{tikzcd}$$

**命题 2.22**

设$(A,\{\lambda_j\}_{j\in J})$与$(A',\{\lambda'_j\}_{j\in J})$都是$\{A_j\}_{j\in J}$的余积, 则存在唯一的同构$h:A\to A'$使得$\lambda'_j=h\lambda_j$ $(\forall j\in J)$.

**证明:** 略.

**例 2.23**

(1)在集合范畴**Set**中, $A_j\in \mathrm{ob}\,\mathbf{Set},\forall j\in J$. 令$A=\dot{\bigcup\limits_{j\in J}}A_j$为$\{A_j\}_{j\in J}$的**不交并(disjoint unit)**, [a] 且$\lambda_j:A_j\to\dot{\bigcup\limits_{j\in J}}A_j$是嵌入映射. 再设$B\in\mathrm{ob}\,\mathbf{Set}$且$g_j\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A_j,B)(\forall j\in J)$, 则存在唯一映射$g:A\to B$使得$g|_{A_j}=g_j(\forall j\in J)$, 即$g_j=g\lambda_j(\forall j\in J)$. 则$\left(\dot{\bigcup\limits_{j\in J}}A_j,\{\lambda_j\}_{j\in J}\right)$是$\{A_j\}_{j\in J}$的余积.

(2)在$R-\mathbf{Mod}$中, 一族模的余积就是这族模的直和.

[a]例如如果$A_1=\{1,2\},A_2=\{1,3\}$，则$A_1$与$A_2$的不交并为$\{1_{A_1},2,1_{A_2},3\}$.

**例 2.24**

(1)取范畴$\mathscr{C}$如下: $\mathrm{ob}\,\mathscr{C}\subseteq\mathbb{Q}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a,b)=\begin{cases}\{\varphi_b^a\}, & 若a\le b,\\ \varnothing, & 其他\end{cases}$, 且对$a\le b\le c$, 有$\varphi_c^b\varphi_b^a=\varphi_c^a$.

设$\mathrm{ob}\,\mathscr{C}=\{a_j\in\mathbb{Q}|j\in J\}$, 其中$J$是指标集, 则

$$\prod_{j\in J}a_j=\inf\{a_j|j\in J\},\qquad \coprod_{j\in J}a_j=\sup\{a_j|j\in J\}.$$

由此可知: (小)范畴$\mathscr{C}$的一族对象的积与余积可能不存在. 例如如果$S=\mathbb{Z}$, 则$\inf S\notin\mathbb{Q}$, $\sup S\notin\mathbb{Q}$.

(2)取范畴$\mathscr{C}$如下: $\mathrm{ob}\,\mathscr{C}\subseteq\mathbb{Z}^+$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a,b)=\begin{cases}\{i_b^a\}, & 若a|b,\\ \varnothing, & 其他\end{cases}$, 且对$a|b$且$b|c$, 有$i_c^bi_b^a=i_c^a$.

设$\mathrm{ob}\,\mathscr{C}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subseteq\mathbb{Z}^+$, 则

$$\prod_{j=1}^n a_j=(a_1,\cdots,a_n)\quad (a_1,\cdots,a_n\text{的最大公约数}),$$
$$\coprod_{j=1}^n a_j=[a_1,\cdots,a_n]\quad (a_1,\cdots,a_n\text{的最小公倍数}).$$

在$R-\mathbf{Mod}$中, $\{A_j\}_{j\in J}$的直和$\bigoplus\limits_{j\in J}A_j$与直积$\prod\limits_{j\in J}A_j$分别是余积与积.

在有限生成左$R$-模范畴$R-\mathrm{mod}$中, 取$|J|=\infty$, 则$\bigoplus\limits_{j\in J}A_j$与$\prod\limits_{j\in J}A_j$不在$R-\mathrm{mod}$中(但在$R-\mathbf{Mod}$中). 也就是说, 虽然能写出表达式, 但不一定在原来的范畴中.

## 练习题 2.5

1. 判断题:

(1)小范畴中任意一族对象的积是存在的.

(2)$\{C_j\}_{j\in J}$是范畴$\mathscr{C}$的一族对象, 其中$J$是指标集. 若$\prod\limits_{j\in J} C_j$和$\coprod\limits_{j\in J} C_j$都存在, 并且$|J| < \infty$, 则$\prod\limits_{j\in J} C_j = \coprod\limits_{j\in J} C_j$.

(3)$\{C_j\}_{j\in J}$是范畴$\mathscr{C}$的一族对象, 其中$J$是指标集. 若$\prod\limits_{j\in J} C_j$和$\coprod\limits_{j\in J} C_j$都存在, 则

$$\mathrm{Hom}\Big(\coprod_{j\in J} C_j, \prod_{j\in J} C_j\Big) \neq \varnothing.$$

2. 对任意$X \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, 证明$A$是$\mathscr{C}$中$A_1, A_2$的积当且仅当$\mathscr{C}(X, A)$是**Set**中$\mathscr{C}(X, A_1)$和$\mathscr{C}(X, A_2)$的积. (要定义合适的态射$p_1, p_2$). 对余积的情形写出类似结论.

3. 把例2.24(1)中的$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b)$的定义换为$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b) = \begin{cases} \{\varphi_b^a\}, & 若a \geq b, \\ \varnothing, & 其他 \end{cases}$, 那么积与余积分别是什么?

4. 把例2.24(2)中的$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b)$的定义换为$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b) = \begin{cases} \{\varphi_b^a\}, & 若b|a, \\ \varnothing, & 其他 \end{cases}$, 那么积与余积分别是什么?

## § 2.6 零对象、核与余核

**定义 2.25**

设$\mathscr{C}$是范畴, $A \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, 若$\forall X \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, $\mathscr{C}(A, X)$(resp. $\mathscr{C}(Y, A)$)是一个单元集(有且只有一个态射), 则称$A$是$\mathscr{C}$的一个**始对象(initial object)**(resp. **终对象(terminal object)**).

若$A$既是$\mathscr{C}$的始对象, 也是终对象, 则称$A$为$\mathscr{C}$的**零对象(zero object)**.

**例 2.26**

(1)在**Set**中, 单元集是终对象. ($X \to \{a\}$的映射只有一个), 空集$\varnothing$是唯一的始对象, 故**Set**无零对象.

(2)在**G**中, 单元群$G$既是始对象, 也是终对象, 从而是零对象.

(3)在$R-$**Mod**中, 零模既是始对象, 也是终对象, 从而是零对象.

(4)在例2.24(2)中, 取$\mathrm{ob}\,\mathscr{C} = \mathbb{Z}^+$, 则1是唯一的始对象, 无终对象, 从而无零对象.

(5-1)在环范畴**Rng**中, 零环既是始对象, 也是终对象, 从而是零对象.

(5-2)在环范畴**Ring**中,

(a)若不要求0与1不同, 则$\mathbb{Z}$是始对象, 零环$(0+0=0, 0\cdot 0=0)$是终对象.

(b)若要求0与1不同, 则$\mathbb{Z}$是始对象, 无终对象.

**证明:** (5-2)(b): 设$R \in \mathrm{ob}\,\mathbf{Ring}$, 则$\mathrm{char}\,R \geq 2$.

若$\mathrm{char}\,R > 2$, 则$\mathbb{Z}_2$到$R$没有环同态[①], 要不然$\bar{0} \mapsto 0$, 且$\bar{1} \mapsto 1_R$, 但$2\cdot\bar{1} \mapsto 2\cdot 1_R \neq 0$, 矛盾. 故$R$不是终对象.

若$\mathrm{char}\,R = 2$, 则$R \cong \mathbb{Z}_2$, 于是易知$\mathbb{Z}_3$[②] 到$R$没有环同态, 故$R$不是终对象. □

**注:** (1)始对象与终对象是对偶的概念, 零对象的对偶概念是本身.

(2)若范畴$\mathscr{C}$有始对象(resp. 终对象), 则本质上只有一个(即所有始对象(resp. 终对象)都是同构的). 证明如下: 设$I, I'$是$\mathscr{C}$的始对象, 并且有

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] & I' \arrow[r, "\beta"] \arrow[rr, bend left, "1_{I'}"] & I \arrow[r, "\alpha"] & I' \end{tikzcd}$$
$$I \xrightarrow{\alpha} I' \xrightarrow{\beta} I,\quad I \xrightarrow{1_I} I$$

其中$\alpha, \beta, 1_I$是唯一态射. 则$\alpha\beta = 1_{I'}$, $\beta\alpha = 1_I$, 从而$\alpha, \beta$是同构.

**定理 2.27**

若范畴$\mathscr{C}$有零对象, 则本质上只有一个.

**证明:** 设$Z$是$\mathscr{C}$的零对象, 分别用$0_{AZ}$与$0_{ZB}$表示$\mathscr{C}(A, Z)$与$\mathscr{C}(Z, B)$中的唯一的元素. 则$0_{ZB}0_{AZ} \triangleq 0_{AB}$是$\mathscr{C}(A, B)$中唯一确定的元素, 它不随零对象的选取而改变.

设$Z' \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$也是零对象, 则$\exists \sigma: Z \to Z'$与$\tau: Z' \to Z$使得$\tau\sigma = 1_Z$且$\sigma\tau = 1_{Z'}$. 考虑下图:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dr, "0_{ZB}"] \arrow[dd, bend right, "\sigma"'] & \\ A \arrow[ur, "0_{AZ}"] \arrow[dr, "0_{AZ'}"'] & & B \\ & Z' \arrow[ur, "0_{Z'B}"'] \arrow[uu, bend right, "\tau"'] & \end{tikzcd}$$

[①]两个模之间必有模同态(零同态), 但环不一定.

[②]也可以改为$\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$等等, 但不能是$\mathbb{Z}_4$, 因为有嵌入

则$0_{Z'B}0_{AZ'}=(0_{ZB}\tau)(\sigma 0_{AZ})=0_{ZB}\cdot 1_Z\cdot 0_{AZ}=0_{ZB}0_{AZ}$. □

称$0_{AB}$为$\mathscr{C}(A,B)$中的**零态射(zero morphism)**. 由定理2.27, 若范畴$\mathscr{C}$有零对象, 则$\mathscr{C}(A,B)$有且仅有一个零态射$0_{AB}$. 为方便起见, 记$0_{AB}$为0. 我们也约定用“0”表示零对象.

**推论 2.28**

设范畴$\mathscr{C}$有零对象, $f\in\mathscr{C}(A,B)$, $g\in\mathscr{C}(B,C)$. 若$f,g$至少有一个为零态射, 则$gf=0$.

**证明:** 不妨设$f=0$. 则$f=0_{0B}0_{A0}$, 所以$gf=(g\cdot 0_{0B})0_{A0}=0_{0C}\cdot 0_{A0}=0_{AC}$. □

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f(=0_{AB})"] \arrow[dr, "0_{A0}"'] & & B \arrow[rr, "g"] & & C \\
& 0 \arrow[ur, "0_{0B}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

**注:** (1)在Abel群范畴**AG**中, 记零群为0, 则$\mathbf{AG}(A,0)$中的唯一元素$0_{A0}$将$A$的所有元素都映到0, 而$\mathbf{AG}(0,B)$中唯一元素将0映到$B$中的零元素. 则$\mathbf{AG}(A,B)$中的零态射$0_{AB}$是将$A$的所有元素映到$B$的零元素的群同态.

(2)推论2.28的逆不成立, 例如: 设$A,B\in\operatorname{ob}\mathbf{AG}$, 且$0\neq A\subsetneq B$. 令$f:A\hookrightarrow B$是嵌入映射, 且$g:B\to B/A$是自然满同态, 则$f\neq 0,g\neq 0$但$gf=0$.

(3)设$\mathscr{C}$有零对象, 则$\forall A\in\operatorname{ob}\mathscr{C}$, $\mathscr{C}(A,0)$中唯一元素是满态射, $\mathscr{C}(0,A)$中唯一元素是单态射. 但一般地, 若$A$不是终对象, 则$0_{AB}$不是单态射. 若$A$不是始对象, 则$0_{AB}$不是满态射. (只需验证是否左、右可消.)

**定义 2.29**

设范畴$\mathscr{C}$有零对象, 态射$f\in\mathscr{C}(A,B)$的**核Ker $f$**是一个二元组$(K,\eta)$, 其中$K\in\operatorname{ob}\mathscr{C}$且$\eta\in\mathscr{C}(K,A)$, 满足

(1)$\eta$是单态射, 且$f\eta=0$;

(2)$\forall g\in\mathscr{C}(D,A)$, 若$fg=0$, 则存在$\tau\in\mathscr{C}(D,K)$使得$g=\eta\tau$.

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, dotted, "\exists\tau"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "0_{DB}"] & \\
K \arrow[r, "\eta"] & A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

**注:** (1)在$R-\mathbf{Mod}$中, 其态射就是左$R$-模同态. 设$f:A\to B$是左$R$-模同态, 且$\operatorname{Ker}f=K$, 则有嵌入映射$\eta:K\hookrightarrow A$且$f\eta=0$. 设$g\in\operatorname{Hom}_R(D,A)$使得$fg=0$, 则$\operatorname{Im}g\subseteq\operatorname{Ker}f=\operatorname{Im}\eta$. 由Factor Theorem, 存在$\tau\in\operatorname{Hom}_R(D,A)$使得$g=\eta\tau$. 则在$R-\mathbf{Mod}$中, 态射$f$的核就是同态$f$的核(再加上一个嵌入映射).

(2)同理, 在群范畴中, 态射$f$的核就是同态$f$的核(再加上一个嵌入映射).

**定理 2.30: 核的泛性质**

设$f\in\mathscr{C}(A,B)$, 则$\operatorname{Ker}f=(K,\eta)$的充分必要条件是下面同时满足:

(1)$f\eta=0$;

(2)$\forall g\in\mathscr{C}(D,A)$, 若$fg=0$, 则$\exists!\tau\in\mathscr{C}(D,K)$, 使得$g=\eta\tau$.

**证明:** “$\Rightarrow$”: 设$g=\eta\tau_1=\eta\tau_2$, 由于$\eta$是单态射, 则$\tau_1=\tau_2$.

“$\Leftarrow$”: 设$\eta\tau_1=\eta\tau_2\triangleq g$. 由于$f\eta=0$, 则$fg=0$, 故$\tau_1=\tau_2$. □

设$(K,\eta)=\operatorname{Ker} f$, 其中$f\in\mathscr{C}(A,B)$. 设$\phi:K'\to K$是同构, 则易知$(K',\eta\phi)$也是$f$的核,

$$\begin{tikzcd}
 & & D \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "0_{DB}"] \arrow[dll, dotted, bend right, "\exists\tau'"'] & \\
K' \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right, "\eta\phi"'] & K \arrow[r, "\eta"] & A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

故态射的核不唯一, 但由核的泛性质(定理2.30)可知:

**推论 2.31**

设$f\in\mathscr{C}(A,B)$有核, 则本质上只有一个(在同构意义下唯一).

事实上, 考虑下图:

$$\begin{tikzcd}
 & K' \arrow[d, "\eta'"] \arrow[dl, dotted, bend right, "\exists\tau"'] & \\
K \arrow[r, "\eta"'] \arrow[ur, dotted, "\exists\tau'"'] & A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

根据核的定义可得存在$\tau\in\mathscr{C}(K',K)$与$\tau'\in\mathscr{C}(K,K')$使得$\eta'=\eta\tau$, $\eta=\eta'\tau'$. 于是

$$\eta=\eta'\tau'=\eta\tau\tau'$$
$$\eta'=\eta\tau=\eta'\tau'\tau$$

由$\eta,\eta'$单可得$\tau\tau'=1_K$, $\tau'\tau=1_{K'}$, 从而$\tau$为同构. □

**定义 2.32**

设范畴$\mathscr{C}$有零对象, 态射$f\in\mathscr{C}(A,B)$的**余核Coker $f$**是一个二元组$(C,\pi)$, 其中, $C\in\operatorname{ob}\mathscr{C}$, 且$\pi\in\mathscr{C}(B,C)$, 满足:

(1)$\pi$是满态射, 且$\pi f=0$;

(2)$\forall g\in\mathscr{C}(B,D)$, 若$gf=0$, 则存在$\tau\in\mathscr{C}(C,D)$使得$g=\tau\pi$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[dl, dotted, "\exists\tau"] \\
 & D &
\end{tikzcd}$$

**注:** (1)在$R-\mathbf{Mod}$中, 态射的余核就是模同态的余核(再加上一个自然满同态).

$$\begin{tikzcd}
 & & B/\operatorname{Im} f \arrow[d, equal] & \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "\exists\tau"] & 0 \\
 & D & &
\end{tikzcd}$$

证明如下: 设$f:A\to B$是左$R$-模同态, $C=\operatorname{Coker} f=B/\operatorname{Im} f$, 则有自然满同态$\pi:B\twoheadrightarrow C$且$\pi f=0$. 设$g\in\operatorname{Hom}_R(B,D)$使得$gf=0$, 则$\operatorname{Ker} g\supseteq\operatorname{Im} f=\operatorname{Ker}\pi$. 由Factor Theorem, 存在$\tau\in\operatorname{Hom}_R(C,D)$使得$g=\tau\pi$. 因此$f$的余核就是模同态的余核$B/\operatorname{Im} f$.

(2)在群范畴$\mathbf{G}$中, 设$f : A \to B$是群同态, 则$f(A)$是$B$的子群但不一定是正规子群.[1] 设$\mathrm{Coker}\, f = (C, \pi)$, 则$\pi f = 0$且$\pi$是满态射, 从而$f(A) \subseteq \mathrm{Ker}\,\pi \lhd B$. 可以证明$\mathrm{Ker}\,\pi$是$B$的包含$f(A)$的最小正规子群[2], 则$f$的余核就是$C = B/\mathrm{Ker}\,\pi$(再加上一个自然满同态).[3]

$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[d, hook] & \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[r, "\pi", two heads] \arrow[d, "g", two heads] & C \arrow[dl, dotted, "\exists\tau"] \\
& B/K &
\end{tikzcd}$$

**定理 2.33: 余核的泛性质**

设$f \in \mathscr{C}(A, B)$, 则$\mathrm{Coker}\, f = (C, \pi)$的充分必要条件是下面同时满足:

(1)$\pi f = 0$;

(2)$\forall g \in \mathscr{C}(B, D)$, 若$gf = 0$, 则存在唯一态射$\tau \in \mathscr{C}(C, D)$使得$\tau\pi = g$.

**证明:** 与前面完全对偶. □

设$(C, \pi)$是$f \in \mathscr{C}(A, B)$的余核, 则对任意同构$\phi : C \to C'$, $(C', \phi\pi)$也是$f$的余核.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend left, "\phi\pi"] & C \arrow[r, "\phi", "\cong"'] & C'
\end{tikzcd}$$

故态射的余核不唯一, 但是由泛性质中的唯一性可得:

**推论 2.34**

设$f \in \mathscr{C}(A, B)$的余核存在, 则本质上只有一个(在同构意义下唯一).

**定理 2.35**

设$f \in \mathscr{C}(A, B)$是态射, 若$f$是单态射, 则$\mathrm{Ker}\, f = (0, 0_{0A})$. 若$f$是满态射, 则$\mathrm{Coker}\, f = (0, 0_{B0})$.

**证明:** 设$\mathrm{Ker}\, f = (K, \eta)$, 则$f\eta = 0_{KB}$. 由于$f$是单态射, 则$\eta = 0_{KA}$, 从而$0_{KA}$是单态射. 下证$K = 0$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, shift left, "1_K"] \arrow[r, shift right, "0_{KK}"'] & K \arrow[r, shift left, "\eta"] \arrow[r, shift right, "0_{KA}"'] & A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

若$K \neq 0$, 则$\mathscr{C}(K, K)$有两个不同的态射$1_K$与$0_{KK}$. 因为$0_{KA} \cdot 1_K = 0_{KA} = 0_{KA}0_{KK}$, 故$1_K = 0_{KK}$, 矛盾. 故$K = 0$. 所以$\mathrm{Ker}\, f = (0, 0_{0A})$. 对偶地, 可以证明另一个结论. □

---

[1]这是群与模的情形不一样的地方, 余核不一定形如$B/f(A)$, 但可以假设有余核.

[2]证明如下: 设$f(A) \subseteq K \lhd B$, 考虑下图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\,\pi \arrow[r, hook, "f_2"] \arrow[d, dotted, "\exists\alpha"'] & B \arrow[r, "\pi", two heads] \arrow[d, equal] & C \arrow[d, dotted, "\tau"] \\
K \arrow[r, hook, "f_1"] & B \arrow[r, "g", two heads] & B/K
\end{tikzcd}$$

其中$g$是自然满同态. 由图追踪可知$\alpha$的存在性. 所以$f(A) \subseteq K = \mathrm{Ker}\, g$, 故$gf = 0$(这里0是群范畴中的零对象, 就是相当于1, 把所有元素映往单位元). 所以存在$\tau : C \to B/K$使得$g = \tau\pi$, 因此$\mathrm{Ker}\,\pi \subseteq \mathrm{Ker}\, g = K$.

[3]$\mathrm{Ker}\,\pi$是$B$的包含$f(A)$的所有正规子群的交. 若$B'$是$B$的包含$f(A)$的最小正规子群, 则$\mathrm{Coker}\, f = (B/B', \pi)$.

**注：** 一般地, 定理2.35的逆不成立. 如在群范畴$\mathbf{G}$中, 设$B$是单群[1], $A$是$B$的真子群. 则有嵌入映射$f: A \hookrightarrow B$. 由命题2.3, $f$不是满态射[2]. 由于$B$的包含$f(A) = A$的最小正规子群就是$B$, 由定义2.32后的注(2), $\operatorname{Coker} f = 0$.

**命题 2.36**

零态射的核与余核都是同构态射.

**证明：** 设$\sigma \in \mathscr{C}(K, A)$是$0_{AB}$的核. 因为$0_{AB} \cdot 1_A = 0_{AB}$, 所以存在$\tau \in \mathscr{C}(A, K)$使得$\sigma\tau = 1_A$. 所以$(\sigma\tau)\sigma = 1_A \cdot \sigma = \sigma$. 由于$\sigma$是单态射, 所以$\tau\sigma = 1_K$. 故$\sigma$是同构, 对偶地可以证明另一个结论. □

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, dashed, "\tau"'] \arrow[d, "1_A"] \arrow[dr, "0_{AB}"] & \\
K \arrow[r, "\sigma"] & A \arrow[r, "0_{AB}"] & B
\end{tikzcd}
$$

**注：** 也可以利用核的定义去证, 证明$1_A$是$0_{AB}$的核即可.

## 练习题 2.6

1. 判断题:
   (1)如果范畴$\mathscr{C}$只有唯一的始对象, 则$\mathscr{C}$有终对象.
   (2)如果范畴$\mathscr{C}$既有唯一的始对象, 也有唯一的终对象, 则$\mathscr{C}$有零对象.
   (3)有唯一的始对象和唯一终对象的范畴不一定有零对象.
   (4)存在范畴$\mathscr{C}$, 使得$\mathscr{C}$中所有对象都是零对象.

2. 若$\mathscr{C}$是含零对象0的范畴, 证明对任意$A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, $(A, 1_A, 0)$同时是$A$和0的积与余积.

3. 设$\mathscr{C}$是范畴, 含有零对象与核. 设$f: A \to B$是$\mathscr{C}$中态射, 核为$k: K \to A$, 则$f_*: \mathscr{C}(-, A) \to \mathscr{C}(-, B)$是从$\mathscr{C}$到$\mathbf{Set}_0$的反变函子的自然变换, 其中$\mathbf{Set}_0$是点集构成的范畴. 证明: $X \mapsto \operatorname{Ker}(f_*)_X$是$\mathscr{C}$到$\mathbf{Set}_0$的反变函子(它用$K$表示), 并证明$k_*$是$f_*$的核.

4. 把上一题中的核换成余核, 写出类似结论并证明.

5. 证明终对象（resp. 始对象）可以看成空指标集的积（resp. 余积）.

[1] 单模是简单的, 但单群并不简单.
[2] 考虑群范畴的对偶范畴即可得到$\operatorname{Ker} f = 0$但$f$不是单态射的例子.

# § 2.7 加法范畴与Abel范畴

## 2.7.1 加法范畴

**定义 2.37**

设$\mathscr{C}$中有零对象.

(1)称$\mathscr{C}$为**预加法范畴(preadditive category, Ab-category)**, 若$\mathscr{C}$服从以下两条公理:

**(Ad1)**$\forall A, B \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, $\mathscr{C}(A,B)$是Abel群, 且零态射$0_{AB}$是其中的零元素.

**(Ad2)**态射的合成是双线性的(双边分配律), 即$\forall \sigma, \sigma' \in \mathscr{C}(A,B)$与$\tau, \tau' \in \mathscr{C}(B,C)$, 有

$$\tau(\sigma+\sigma') = \tau\sigma + \tau\sigma', \qquad (\tau+\tau')\sigma = \tau\sigma + \tau'\sigma.$$

(2)进一步, 称$\mathscr{C}$为**加法范畴(additive category)**, 若它还服从下面公理:

**(Ad3)**$\forall A_1, A_2, \cdots, A_n \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, 余积$\coprod\limits_{i=1}^{n} A_i$存在.

**例 2.38**

(1)群范畴**G**、Abel群范畴**AG**与$R-$**Mod**都是加法范畴.

(2)自由Abel群与群同态构成的自由Abel群范畴**FAG**是加法范畴.

(3)因为集合范畴**Set**没有零对象, 所以**Set**不是预加法范畴.

**引理 2.39**

设$\mathscr{C}$是预加法范畴, $\sigma, \tau$是态射, 且$\tau\sigma$有意义, 则$(-\tau)\sigma = -\tau\sigma = \tau(-\sigma), (-\tau)(-\sigma) = \tau\sigma$.

**证明:** 注意$0 = \tau \cdot 0 = \tau(\sigma + (-\sigma)) = \tau\sigma + \tau(-\sigma)$即可. □

**定理 2.40: 加法范畴中余积的判别方法**

设$\mathscr{C}$是加法范畴, 且$A_1, \cdots, A_n \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, 则TFAE:

(1)$A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$和$n$个态射$\{\lambda_i \in \mathscr{C}(A_i, A) | 1 \le i \le n\}$ 是$A_1, \cdots, A_n$的余积;

(2)存在唯一的态射$p_i \in \mathscr{C}(A, A_i)$满足: ①$p_i\lambda_j = \delta_{ij} \cdot 1_{A_j}, \forall 1 \le i, j \le n$; ②$\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i p_i = 1_A$.

**证明:** “(1) ⇒ (2)” : 考虑下图:

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\lambda_j"] \arrow[d, "\delta_{ij}1_{A_j}"'] & A \arrow[dl, dashed, "\exists! p_i"] \\ A_i & \end{tikzcd}, \qquad \forall 1 \le i, j \le n.$$

则存在唯一的态射$p_i$使得$p_i\lambda_j = \delta_{ij}1_{A_j}, \forall 1 \le i, j \le n$. 再考虑下图:

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\lambda_j"] \arrow[d, "\lambda_j"'] & A \arrow[dl, dashed, "\exists! 1_A"] \\ A & \end{tikzcd}, \qquad \forall 1 \le j \le n.$$

则存在唯一的态射$1_A : A \to A$使得$1_A\lambda_j = \lambda_j(\forall 1 \le j \le n)$. 由于

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i p_i\Big)\lambda_j = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(p_i\lambda_j) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\delta_{ij}\cdot 1_{A_j}) = \lambda_j, \qquad \forall 1 \le j \le n,$$

由$1_A$的唯一性可得$1_A = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i p_i$.

“(2) $\Rightarrow$ (1)”: $\forall B \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$与$g_j \in \mathscr{C}(A_j, B)(1 \le j \le n)$, 考虑下图:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, shift left, "\lambda_i"] \arrow[d, "\forall g_i"'] & A \arrow[l, bend left, "p_i"] \arrow[dl, dotted, "g"] \\ B & \end{tikzcd}, \qquad \forall 1 \le j \le n.$$

令$g = \sum_{i=1}^{n} g_i p_i$, 则$g \in \mathscr{C}(A, B)$, 所以

$$g\lambda_i = \Big(\sum_{i=1}^{n} g_i p_j\Big)\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} g_j(p_j\lambda_i) = \sum_{j=1}^{n} g_j(\delta_{ij}1_{A_i}) = g_i, \qquad \forall 1 \le i \le n.$$

再设$g' \in \mathscr{C}(A, B)$使得$g'\lambda_i = g_i(\forall 1 \le i \le n)$, 则

$$g' = g' \cdot 1_A = g'\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i p_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}(g'\lambda_i)p_i = \sum_{i=1}^{n} g_i p_i = g.$$

则$A$和$n$个态射$\{\lambda_i \in \mathscr{C}(A_i, A) | 1 \le i \le n\}$ 是$A_1, \cdots, A_n$的余积. □

**推论 2.41**

定理2.40中的$A$和$\{p_i \in \mathscr{C}(A, A_i) | 1 \le i \le n\}$是$A_1, \cdots, A_n$的积.

**证明:** $\forall B \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$和$f_i \in \mathscr{C}(B, A_i)(1 \le i \le n)$, 考虑下图:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, dotted, "\exists! f"'] \arrow[d, "\forall f_j"] \\ A \arrow[r, bend left, "p_j"] & A_j \arrow[l, shift left, "\lambda_j"] \end{tikzcd}$$

令$f = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i$, 则$f \in \mathscr{C}(B, A)$, 则

$$p_j f = p_j\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{n}(p_j\lambda_i)f_i = \sum_{i=1}^{n}(\delta_{ij}\cdot 1_{A_i})f_i = f_i, \qquad \forall 1 \le j \le n.$$

再设$f' \in \mathscr{C}(A, B)$, 使得$p_j f' = f_j(\forall 1 \le j \le n)$, 则

$$f' = 1_A \cdot f' = \Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j p_j\Big)f' = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(p_j f') = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j = f.$$

则$A$和$\{p_i \in \mathscr{C}(A, A_i) | 1 \le i \le n\}$是$A_1, \cdots, A_n$的积. □

**推论 2.42**

加法范畴中任意有限个对象都有积.

**推论 2.43**

加法范畴的对偶范畴也是加法范畴.

**证明:** 设$\mathscr{C}$是加法范畴, 易知$\mathscr{C}^{op}$是预加法范畴. 设$A_1, \cdots, A_n \in \operatorname{ob}\mathscr{C}^{op}(=\operatorname{ob}\mathscr{C})$. 由推论2.42, 在$\mathscr{C}$中可设$(A, \{p_i|1 \le i \le n\}) = \prod_{i=1}^{n} A_i$, 则在$\mathscr{C}^{op}$中, $(\underbrace{A^{op}}_{=A}, \{p_i^{op}|1 \le i \le n\}) = \coprod_{i=1}^{n} A_i^{op} = \coprod_{i=1}^{n} A_i$. □

**定义**

设$\mathscr{C}$是加法范畴, $A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, 则$\mathscr{C}(A, A)$是一个环, $1_A$是其中的单位元, 称这个环为$A$的**自同态环(endomorphism)**, 记为$\operatorname{End} A$.

**命题 2.44: 解释定理2.45条件可以满足**

设$\mathscr{C}$是加法范畴, $\sigma \in \mathscr{C}(A, B)$且$\tau \in \mathscr{C}(B, A)$, 设$\sigma\tau = 1_B$, 则$\varepsilon \triangleq \tau\sigma$是**幂等的(idempotent)**(即$\varepsilon^2 = \varepsilon$), 且$\tau = \operatorname{Ker}(1_A - \varepsilon)$.

**证明:** (1)$\varepsilon^2 = (\tau\sigma)(\tau\sigma) = \tau \cdot 1_B \cdot \sigma = \tau\sigma = \varepsilon$.

(2)①由$\sigma\tau = 1_B$, $\tau$是section, 从而是单态射.

$$\begin{tikzcd}
 & & & D \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "0"] & \\
B \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "1_B"] & A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[rr, bend right, "\varepsilon"'] & B \arrow[r, "\tau"] & A \arrow[r, "1_A-\varepsilon"'] & A
\end{tikzcd}$$

②$(1_A - \varepsilon)\tau = \tau - \varepsilon\tau = \tau - \tau(\sigma\tau) = \tau - \tau \cdot 1_B = \tau - \tau = 0$,

③设$g \in \mathscr{C}(D, A)$使得$(1_A - \varepsilon)g = 0$, 则$g - \varepsilon g = 0$, 故$g = \varepsilon g = (\tau\sigma)g$, 其中$\sigma g \in \mathscr{C}(D, B)$,

综上, $\tau = \operatorname{Ker}(1_A - \varepsilon)$. (复习核的概念) □

下面通过幂等态射把一个对象分解成两个对象的余积.

**定理 2.45**

设$\mathscr{C}$是加法范畴, 且$A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, $\lambda_1 \in \mathscr{C}(A_1, A)$, $\lambda_2 \in \mathscr{C}(A_2, A)$. 若$\varepsilon \in \operatorname{End} A$是幂等的, $\lambda_1 = \operatorname{Ker}\varepsilon$, $\lambda_2 = \operatorname{Ker}(1_A - \varepsilon)$, 则$(A, \lambda_1, \lambda_2) = A_1 \coprod A_2$($A_1$与$A_2$的余积).

**证明:** 由定理2.40, 只需证存在$p_1 \in \mathscr{C}(A, A_1)$与$p_2 \in \mathscr{C}(A, A_2)$使得它满足定理2.40的①②, 即①$p_i\lambda_j = \delta_{ij}1_{A_j}, \forall i, j \in \{1, 2\}$, 与②$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 1_A$.

因为$\varepsilon$幂等, 则$\varepsilon(1_A - \varepsilon) = 0$且$(1_A - \varepsilon)\varepsilon = 0$. 因为$\lambda_1, \lambda_2$分别是$\varepsilon$与$1_A - \varepsilon$的核, 故存在$p_1 \in \mathscr{C}(A, A_1)$和$p_2 \in \mathscr{C}(A, A_2)$使得

$$\lambda_1 p_1 = 1_A - \varepsilon, \qquad \lambda_2 p_2 = \varepsilon.$$

两式相加可得$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 1_A$, 故②成立.

考虑下图.

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, dashed, "\exists p_1"'] \arrow[d, "1_A-\varepsilon"] \arrow[dr, "0"] & \\
A_1 \arrow[r, "\lambda_1"] & A \arrow[r, "\varepsilon"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, dashed, "\exists p_2"'] \arrow[d, "\varepsilon"] \arrow[dr, "0"] & \\
A_2 \arrow[r, "\lambda_2"] & A \arrow[r, "1_A-\varepsilon"] & A
\end{tikzcd}
$$

由于

$$
\begin{cases}
\lambda_1 p_1 \lambda_1 = (1_A - \varepsilon)\lambda_1 = \lambda_1 - \varepsilon\lambda_1 \xlongequal{\varepsilon\lambda_1 = 0} \lambda_1, \\
\lambda_1 p_1 \lambda_2 = (1_A - \varepsilon)\lambda_2 = 0, \qquad (\lambda_2\text{是核})
\end{cases}
$$

由$\lambda_1$是核, 从而是单态射, 是左可消的, 故

$$
\begin{cases}
p_1\lambda_1 = 1_{A_1}, \\
p_1\lambda_2 = 0
\end{cases}
$$

另一方面, 由于

$$
\begin{cases}
\lambda_2 p_2 \lambda_1 = \varepsilon\lambda_1 = 0, \qquad (\lambda_1\text{是核}) \\
\lambda_2 p_2 \lambda_2 = \varepsilon\lambda_2 = \lambda_2 - (1_A - \varepsilon)\lambda_2 \xlongequal{(1_A-\varepsilon)\lambda_2 = 0} \lambda_2,
\end{cases}
$$

由$\lambda_2$是核, 从而是单态射, 是左可消的, 故

$$
\begin{cases}
p_2\lambda_1 = 0, \\
p_2\lambda_2 = 1_{A_2}
\end{cases}
$$

故①成立. □

### 2.7.2 Abel范畴

**定义 2.46**

称加法范畴$\mathscr{C}$为**Abel范畴**, 若它服从以下三条公理:

**(Ab1)**每个态射都有核与余核;

**(Ab2)**每个单态射是其余核的核, 每个满态射都是其核的余核;

**(Ab3)**每个态射$\sigma$可分解成一个单态射$\eta$与一个满态射$\pi$的积: $\sigma = \eta\pi$. 称之为$\sigma$的**标准分解式**.

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \cdot \\
 & \cdot \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd}
$$

$R-\mathbf{Mod}$中的东西在Abel范畴中基本都成立，证明可能不同，例如图追踪与泛性质.

$R-\mathbf{Mod}$中也有核与余核，但核与余核不一定有限生成，有限生成模的子模不一定有限生成.

**例 2.47**

(1)Abel群范畴$\mathbf{AG}$与模范畴$R-\mathbf{Mod}$都是Abel范畴.

(2)自由Abel群范畴$\mathbf{FAG}$是加法范畴(例2.38)但不是Abel范畴.

**证明:** (2)设$A = \langle a \rangle, B = \langle b \rangle$是无限循环Abel群(也是自由Abel群). 令$\sigma : A \to B$为$\sigma(na) = 2nb$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. 则$\sigma \in \mathbf{FAG}(A, B)$.

下证$\sigma$既单又满: [1] 设$\tau_1,\tau_2\in\mathscr{C}(B,C)$使得$\tau_1\sigma=\tau_2\sigma$, 则$\forall b\in B$有

$$2\tau_1(b)=\tau_1(2b)=\tau_1\sigma(a)=\tau_2\sigma(a)=\tau_2(2b)=2\tau_2(b),$$

所以$\tau_1(b)=\tau_2(b)$, 故$\sigma$是满态射.

设$\eta_1,\eta_2\in\mathscr{C}(C,A)$使得$\sigma\eta_1=\sigma\eta_2$, 则$\forall c\in C$, 存在$k_1,k_2\in\mathbb{Z}$使得$\eta_1(c)=k_1a,\eta_2(c)=k_2a$, 所以

$$2k_1b=k_1\sigma(a)=\sigma(k_1a)=\sigma\eta_1(c)=\sigma\eta_2(c)=\sigma(k_2a)=k_2\sigma(a)=2k_2b.$$

所以$k_1=k_2$(无限循环Abel群的性质), 即对任意$c\in C$都有$\eta_1(c)=\eta_2(c)$, 所以$\sigma$是单态射.

若$\mathbf{FAG}(A,B)$是Abel范畴, 由(Ab1), $\sigma$有余核$\operatorname{Coker}\sigma$. 由定理2.35, $\operatorname{Coker}\sigma=0$. 又由(Ab2), $\sigma$是$\operatorname{Coker}\sigma(=0)$的核, 由命题2.36, $\sigma$是同构, 这是不可能的(因为$\sigma$没有逆态射[2]), 矛盾. 故$\mathbf{FAG}(A,B)$不是Abel范畴. □

**定理 2.48: Abel范畴判别准则**

加法范畴$\mathscr{C}$是Abel范畴$\Leftrightarrow$对任意$\sigma\in\mathscr{C}(A,B)$, 存在唯一(在同构意义下)$C,D,E\in\operatorname{ob}\mathscr{C}$, 使得下图可交换:

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dr, tail, "\eta"] & & \\
D \arrow[r, tail, "\phi"] & A \arrow[ur, two heads, "\pi"] \arrow[rr, "\sigma"] & & B \arrow[r, two heads, "\psi"] & E
\end{tikzcd}$$

其中, $\phi=\operatorname{Ker}\sigma=\operatorname{Ker}\pi$, $\psi=\operatorname{Coker}\sigma=\operatorname{Coker}\eta$, $\pi=\operatorname{Coker}\phi$, $\eta=\operatorname{Ker}\psi$.

**证明:** "$\Rightarrow$": 设$\mathscr{C}$是Abel范畴, 由(Ab3), 存在$\pi:A\twoheadrightarrow C$和$\eta:C\rightarrowtail B$使得$\sigma=\eta\pi$. 由(Ab1), $\sigma$有核$\phi:D\rightarrowtail A$与余核$\psi:B\twoheadrightarrow E$. 由于$0=\sigma\phi=\eta(\pi\phi)$且$\eta$单, 则$\pi\phi=0$. 设$\pi\phi'=0$, 则$\sigma\phi'=\eta(\pi\phi')=0$, 所以存在$\tau$使得$\phi'=\phi\tau$, 故$\phi=\operatorname{Ker}\pi$.

由于$\pi$满, 由(Ab2), $\pi=\operatorname{Coker}(\operatorname{Ker}\pi)=\operatorname{Coker}\phi$, 对偶地, 可证明$\psi=\operatorname{Coker}\eta$且$\eta=\operatorname{Ker}\psi$.

"$\Leftarrow$": 由已知, (Ab1)与(Ab3)成立. 设$\sigma$是满态射, 由定理2.35, $\psi=0_{BE}$, 再由命题2.36, $\eta=\operatorname{Ker}\psi$是同构. 因为$\pi$是$\phi$的余核, 所以$\sigma=\eta\pi$也是$\phi(=\operatorname{Ker}\sigma)$的余核, 对偶可证明每个单态射是其余核的核, 故(Ab2)成立. □

**注:** 称定理2.48中的$(C,\eta)$为$\sigma$的**像(image)**, 记为$(C,\eta)=\operatorname{Im}\sigma$或$\eta=\operatorname{Im}\sigma$. 称定理2.48中的$(C,\pi)$为$\sigma$的**余像(coimage)**, 记为$(C,\pi)=\operatorname{Coim}\sigma$或$\eta=\operatorname{Coim}\sigma$. 所以定理2.48中的图可以改写成下图:

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dr, tail, "\operatorname{Im}\sigma"] & & \\
D \arrow[r, tail, "\operatorname{Ker}\sigma"] & A \arrow[ur, two heads, "\operatorname{Coim}\sigma"] \arrow[rr, "\sigma"] & & B \arrow[r, two heads, "\operatorname{Coker}\sigma"] & E
\end{tikzcd}$$

其中,

$$\operatorname{Ker}\sigma=\operatorname{Ker}(\operatorname{Coim}\sigma),\qquad \operatorname{Coker}\sigma=\operatorname{Coker}(\operatorname{Im}\sigma),$$
$$\operatorname{Coim}\sigma=\operatorname{Coker}(\operatorname{Ker}\sigma),\qquad \operatorname{Im}\sigma=\operatorname{Ker}(\operatorname{Coker}\sigma),$$
$$\sigma=(\operatorname{Im}\sigma)(\operatorname{Coim}\sigma)$$

[1]这里又提供了一个既单又满但不是同构的例子.

[2] 不可能有$\tau:B\to A$使得$\tau\sigma=1_A$, 因为对任意$\tau:B\to A$, 存在$k\in\mathbb{Z}$使得$\tau\sigma(a)=2ka$, 但是$2ka\neq a$.

**定理 2.49**

设$\mathscr{C}$是Abel范畴, 则:

(1)$\sigma$是单态射$\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\sigma = 0$; $\sigma$是满态射$\Leftrightarrow \operatorname{Coker}\sigma = 0$.

(2)$\sigma$是同构$\Leftrightarrow$ $\sigma$既是单态射, 又是满态射.

**证明:** (1) “$\Rightarrow$”: 由定理2.35立得.

“$\Leftarrow$”: 设$\operatorname{Ker}\sigma = 0_{KA}$, 设$\sigma_1, \sigma_2 \in \mathscr{C}(D, A)$, 使得$\sigma\sigma_1 = \sigma\sigma_2$, 则$\sigma(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$, 所以存在$\tau \in \mathscr{C}(D, A)$使得$\sigma_1 - \sigma_2 = 0_{KA} \cdot \tau = 0$, 故$\sigma_1 = \sigma_2$, 从而$\sigma$单. 对偶可证另一个结论.

(2)[①] “$\Rightarrow$”: 显然. “$\Leftarrow$”:

若$\sigma$单, 则$\operatorname{Ker}\sigma = 0$, 由命题2.36, $\operatorname{Coim}\sigma = \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker}\sigma)$是同构.

若$\sigma$满, 则$\operatorname{Coker}\sigma = 0$, 由命题2.36, $\operatorname{Im}\sigma = \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker}\sigma)$是同构.

所以$\sigma = (\operatorname{Im}\sigma)(\operatorname{Coim}\sigma)$是同构. □

**注:** 定理2.49(2)对一般的加法范畴不成立, 见例2.47(2)的自由Abel群范畴**FAG**. 而环范畴连预加法范畴都不是.

**定理 2.50**

设$\mathscr{C}$是Abel范畴, $\sigma \in \mathscr{C}(A, B)$, $\tau \in \mathscr{C}(B, C)$, 而且$\sigma = \eta_1\pi_1$与$\tau = \eta_2\pi_2$分别是$\sigma$与$\tau$的标准分解式, 即有如下交换图.

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dr, "\eta_1"] & & E \arrow[dr, "\eta_2"] & \\
A \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[rr, "\sigma"] & & B \arrow[ur, "\pi_2"] \arrow[rr, "\tau"] & & C
\end{tikzcd}$$

TFAE: (1)$\operatorname{Im}\sigma = \operatorname{Ker}\tau$; (2)$\eta_1 = \operatorname{Ker}\pi_2$; (3)$\pi_2 = \operatorname{Coker}\eta_1$; (4)$\operatorname{Coim}\tau = \operatorname{Coker}\sigma$.

**证明:** “(1) $\Leftrightarrow$ (2)”: 由定理2.48及其“注”, $\operatorname{Ker}\tau = \operatorname{Ker}\pi_2$且$\operatorname{Im}\sigma = \eta_1$, 则$\operatorname{Im}\sigma = \operatorname{Ker}\tau \Leftrightarrow \eta_1 = \operatorname{Ker}\pi_2$.

“(2) $\Leftrightarrow$ (3)”: 由(Ab2), $\eta_1 = \operatorname{Ker}\pi_2 \underset{\eta_1\text{单}}{\overset{\pi_2\text{满}}{\rightleftarrows}} \pi_2 = \operatorname{Coker}\eta_1$ .

“(3) $\Leftrightarrow$ (4)”: 由定理2.48及其“注”, $\operatorname{Coker}\eta_1 = \operatorname{Coker}\sigma$且$\pi_2 = \operatorname{Coim}\tau$, 则$\pi_2 = \operatorname{Coker}\eta_1 \Leftrightarrow \operatorname{Coim}\eta = \operatorname{Coker}\sigma$. □

**定义 2.51**

设$\mathscr{C}$是Abel范畴, 且$f_1 \in \mathscr{C}(A_1, A_2)$, $f_2 \in \mathscr{C}(A_2, A_3)$. 若$\operatorname{Im} f_1 = \operatorname{Ker} f_2$, 则称$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3$为**正合列(exact sequence)**.

一般地, 称$\mathscr{C}$中的序列

$$\cdots \longrightarrow A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

为**正合列**, 若$\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$, $\forall i$.

特别地, 称正合列 $A \overset{\sigma}{\rightarrowtail} B \overset{\tau}{\twoheadrightarrow} C$ 是**短正合列(short exact sequence)**.

**正合函子**把短正合列映往短正合列, **左正合函子**与**右正合函子**的定义与模一样.

加法范畴不一定总有正合列!

[①]定理2.49(2)的结论也可以表述为: $\sigma$是同构当且仅当$\tau\sigma = 0$可推出$\tau = 0$, 并且$\sigma\tau' = 0$可推出$\tau' = 0$.

**定义 2.52**

设$\mathscr{C}$是Abel范畴, 且 $A \overset{\sigma}{\rightarrowtail} B \overset{\tau}{\twoheadrightarrow} C$ 是短正合列. 称这个短正合列是**分裂的(split)**, 若存在同构$u: B \to A\coprod C$使得下图可交换, 其中$\lambda_A, p_C$是定理2.40中的态射.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\sigma"] \arrow[dr, "\lambda_A"'] & B \arrow[r, two heads, "\tau"] \arrow[d, dashed, "\cong\,\vdots\,\exists u"] & C \\ & A\coprod C \arrow[ur, "p_C"'] & \end{tikzcd} \quad \text{或者写} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\sigma"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, two heads, "\tau"] \arrow[d, dashed, "\cong\,\vdots\,\exists u"] & C \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, tail] & A\coprod C \arrow[r, two heads] & C \end{tikzcd}$$

注意, 在同构意义下只有 $A \overset{\binom{1_A}{0}}{\rightarrowtail} A\coprod C \overset{(0,1_C)}{\twoheadrightarrow} C$ 这一正合列. 但若把$\begin{pmatrix}1_A\\0\end{pmatrix}$与$(0,1_C)$换成一般的$f, g$, 则不一定分裂. (在某些情况下是对的, 比如投射模、内射模的情况)

**定理 2.53: 短正合列是分裂的判别方法**

设

$$A \overset{\sigma}{\rightarrowtail} B \overset{\tau}{\twoheadrightarrow} C \tag{2.2}$$

是Abel范畴$\mathscr{C}$中的短正合列. TFAE:

(1)正合列(2.2)分裂;

(2)$\exists f \in \mathscr{C}(B, A)$, 使得$f\sigma = 1_A$;

(3)$\exists g \in \mathscr{C}(C, B)$, 使得$\tau g = 1_C$.

**证明:** 只证明(1) $\Leftrightarrow$ (2), 自己补充 "(1) $\Leftrightarrow$ (3)" (完全对偶).

"(1) $\Rightarrow$ (2)": 由定理2.40, 存在$p_A \in \mathscr{C}(A\coprod C, A)$使得$p_A\lambda_A = 1_A$. 令$f = p_A u$, 则$f\sigma = p_A u\sigma \xlongequal{u\sigma=\lambda_A} p_A\lambda_A = 1_A$.

"(2) $\Rightarrow$ (1)": 由推论2.41, $A\coprod C$是$A, C$的积,[①] 故存在态射$u \in \mathscr{C}(B, A\coprod C)$使得下图可交换:

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, dashed, "\cong\,\vdots\,\exists u"] & C \\ & A\coprod C \arrow[ul, "p_A"] \arrow[ur, "p_C"'] & \end{tikzcd}$$

则$f = p_A u$, $p_A\lambda_A = 1_A$, $f\sigma = 1_A$(已知), $\tau = p_C u$, $p_C\lambda_C = 1_A$.

(i)下证$u\sigma = \lambda_A$(前面已经说明定义2.52中的右边三角形可交换,下证左边三角形可交换. )[②] 由

---

[①] 在这里我们不能用余积的泛性质:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "?"] \arrow[dr, "\lambda_A"'] & B & C \arrow[l, "?"'] \arrow[dl, "\lambda_C"] \\ & A\coprod C \arrow[u, dashed, "\exists u\,\vdots\,\cong"] & \end{tikzcd}$$

在上图中, 从$A$到$B$以及从$C$到$B$不一定有态射.

[②]不可以直接在左乘$p_A$, 这样只能得到$p_A u\sigma = f\sigma = 1_A = p_A\lambda_A$, 但$p_A$不是左可消的.

于[1]

$$u\sigma = 1_{A\coprod C}u\sigma = (\lambda_A p_A + \lambda_C p_C)u\sigma = \lambda_A p_A u\sigma + \lambda_C p_C u\sigma = \lambda_A f\sigma + \lambda_C \tau\sigma \xlongequal[\tau\sigma=0]{f\sigma=1_A} \lambda_A,$$

所以$u\sigma = \lambda_A$.

(ii)下证$u$是同构, 即证$u$既单又满(定理2.49), 即$ud = 0 \Rightarrow d = 0$, $eu = 0 \Rightarrow e = 0$.

设$d \in \mathscr{C}(D, B)$使$ud = 0$, 则$\tau d = p_C(ud) = 0$. 在正合列(2.2)中, $\sigma = \operatorname{Ker}\tau$, 则存在$h \in \mathscr{C}(D, A)$使得$d = \sigma h$, 则$\lambda_A h = (u\sigma)h = ud = 0$. 由于$\lambda_A$单, 则$h = 0$, 故$d = \sigma h = 0$, 所以$u$是单态射.

再设$e \in \mathscr{C}(A\coprod C, E)$使得$eu = 0$, 则$e\lambda_A = eu\sigma = 0$. 又因为

$$\begin{aligned}
0 &= eu = e\cdot 1_{A\coprod C}u = e(\lambda_A p_A + \lambda_C p_C)u \\
&= (e\lambda_A)p_A u + (e\lambda_C)(p_C u) = 0 + (e\lambda_C)\tau \\
&= (e\lambda_C)\tau,
\end{aligned}$$

由$\tau$满, 则$e\lambda_C = 0$. 则

$$e = e\cdot 1_{A\coprod C} = e\lambda_A p_A + e\lambda_C p_C = 0 + 0 = 0.$$

故$u$是满态射.

综上, $u$是同构. □

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, dotted, "\exists h"'] \arrow[d, "d"] \arrow[dr, "0"] & \\
A \arrow[r, tail, "\sigma"] \arrow[dr, "\lambda_A"'] & B \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, dotted, "u", "\cong"'] & C \\
& A\coprod C \arrow[ur, "p_C"'] \arrow[d, "e"] & \\
& E &
\end{tikzcd}$$

[1]也可以这样推导:

$$\begin{aligned}
u\sigma - \lambda_A = 1_{A\coprod C}(u\sigma - 1_A) &\xlongequal{Thm2.40} (\lambda_A p_A + \lambda_C p_C)(u\sigma - \lambda_A) \\
&= \lambda_A \underbrace{p_A u}_{=f}\sigma - \lambda_A \underbrace{p_A\lambda_A}_{=1_A} + \lambda_C \underbrace{p_C u}_{=\tau}\sigma - \lambda_C \underbrace{p_C\lambda_A}_{=0} \\
&= \lambda_A f\sigma - \lambda_A\cdot 1_A + \lambda_C \underbrace{\tau\sigma}_{=0} \\
&= \lambda_A\cdot 1_A - \lambda_A\cdot 1_A = 0.
\end{aligned}$$

## 练习题 2.7

1. 判断下面命题的正误:
(1)存在加法范畴$\mathscr{C}$, 使得对任意$C_1, C_2 \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, 如果$C_1 \neq C_2$, 则$\mathscr{C}(C_1, C_2) = \varnothing$.
(2)设$\mathscr{C}$是预加法范畴且$f$是$\mathscr{C}$中的态射, 若$f$的核$\operatorname{Ker} f$是存在的, 则$f$是单态射当且仅当$\operatorname{Ker} f = 0$.
(3)环范畴**Ring**是一个Abel范畴.
(4)环范畴**Ring**是一个加法范畴.
(5)设$\mathscr{C}$是一个Abel范畴, 则对$C$中任意态射$f$, $f$的余像$\operatorname{Coim} f$是存在的, 并且在同构的意义下是唯一的.
(6)在自由Abel群范畴**FAG**中, 既单又满的态射是同构态射.
(7)由所有投射左$R$-模构成的$R-\mathbf{Mod}$的子范畴是Abel范畴.
(8)由所有内射左$R$-模构成的$R-\mathbf{Mod}$的子范畴是Abel范畴.
(9)由所有平坦左$R$-模构成的$R-\mathbf{Mod}$的子范畴是Abel范畴.

2. 完善下表:

| | 始对象 | 终对象 | 零对象 | 加法范畴 | Abel范畴 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Set** | 单元集 | 空集 | – | $\times$ | $\times$ |
| **G** | | | | | |
| $R-\mathbf{Mod}$ | | | | | |
| 例2.24(2) | | | | | |
| **Rng** | | | | | |
| **Ring**(不要求$0 \neq 1$) | | | | | |
| **Ring**(要求$0 \neq 1$) | | | | | |
| **FAG** | | | | | |
| **AG** | | | | | |
| 有限Abel群范畴 | | | | | |

3. 设$\mathscr{C}$和$\mathscr{D}$是Abel范畴, $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$均是右正合的加法共变函子, 且对$M, C_1, C_2 \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, 有满态射$\beta \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1 \coprod C_2, M)$. 证明: 若自然变换$\theta : F \to G$使得$\theta_{C_1}, \theta_{C_2}$都是满态射, 则$\theta_M$也是满态射.

4. 设$\mathscr{C}$和$\mathscr{D}$是Abel范畴, $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$均是左正合的加法共变函子, 且对$M, C_1, C_2 \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, 有单态射$\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M, C_1 \coprod C_2)$. 证明: 若自然变换$\theta : F \to G$使得$\theta_{C_1}, \theta_{C_2}$都是单态射, 则$\theta_M$也是单态射.

5. 若$\mathscr{C}$是加法范畴, $C \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, 证明$\operatorname{Hom}(C, C)$依态射复合作为乘积构成环.

6. 若$\mathscr{C}$是加法范畴, 有零对象0, $A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$. 证明唯一的态射$A \to 0$与唯一的态射$0 \to A$分别是Abel群$\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, 0)$与$\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(0, A)$的单位元.

7. 在任意有零对象的范畴中, 证明每个核都是单态射, 并且每个余核都是满态射.

8. 若$\mathscr{C}, \mathscr{D}$是Abel范畴, 证明积范畴$\mathscr{C} \times \mathscr{D}$也是Abel范畴.

9. 证明有限Abel群范畴是Abel范畴.

10. 设$R$是左Noether环, 证明所有有限生成左$R$-模构成的范畴是Abel范畴.

11. 在加法范畴中, 举例说明: (1)态射不一定有核; (2)态射不一定有余核.

12. 考虑Abel范畴$\mathscr{C}$的如下交换图:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, "\varphi'"] & B' \arrow[r, "\psi'"] & C' \end{tikzcd}$$

若$A \xrightarrow{\beta\varphi} B' \xrightarrow{\psi'} C'$是正合列, $\beta$是单态射, 证明$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi'\beta} C'$是正合列.