

数理科学概论往年题

Fiddie

2021年1月13日

来自Fiddie的温馨提示：此往年题是历届学长学姐呕心沥血之作，希望参加这门课考试的同学可以把题目抄在草稿纸上带出来，共同完善这份资料！

这里记录南京大学《数理科学概论》的往年试题(2017、2018、2019、2020年).

数理科学概论包括天文、大气、物理、数学,由四个院系的老师合上,2018期末是开卷,一共考8道题,每个科目2道.2019期末是半开卷,考试容许带一张A4纸进去考场,数学与天文都是10个选择题与一个解答题;物理是4个解答题大气是2个解答题.2020年期末与2019年期末一样,只不过天文变成8道选择题与2道解答题.

此资料会同步更新在知乎里: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/99821899>

§1 数学部分

1. 【19】按照十进制的方法写成2的幂次的等比数列 $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ 中取前 n 项,把其中以3打头(即十进制表达式的最高位为3)的项的数目记为 a_n .则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{a_n}{n}$ 的极限为 ()
A. $\frac{1}{10}$ B. $\lg \frac{4}{3}$ C. $\frac{1}{9}$ D. 不存在
2. 【20】按照十进制的方法写成2的幂次的等比数列 $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ 中取前 n 项,把其中以2打头(即十进制表达式的最高位为2)的项的数目记为 a_n .则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{a_n}{n}$ 的极限为 ()
A. $\frac{1}{10}$ B. $\lg \frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{9}$ D. 不存在
3. 【19】爱尔兰数学家哈密顿发现的新的数系是 ()
A. 实数 B. 复数 C. 四元数 D. 八元数
4. 【19】以下哪个是超越数? ()
A. $\sqrt{2}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ C. $e^{i\pi}$ D. 0.618
5. 【20】以下哪个不是超越数? ()
A. $\sqrt{2}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ C. e D. π
6. 【19】以下哪个是同余数? ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 5
7. 【20】以下哪个不是同余数? ()
A. 6 B. 157 C. 15 D. 10
8. 【19】黎曼 ζ -函数在2处的值等于 ()
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{\pi^2}{6}$ C. $\frac{6}{\pi^2}$ D. $-\frac{1}{12}$
9. 【20】黎曼 ζ -函数在-6处的值等于 ()
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{\pi^2}{6}$ C. $\frac{\pi^4}{90}$ D. 0

10. 【19】同余数问题和七个千禧年问题中的哪个有关系? ()
 A. BSD猜想 B. P与NP问题 C. 黎曼假设 D. 庞加莱猜想
11. 【19】1978年, Roger Apéry证明了下面哪个是无理数? ()
 A. $\zeta(2)$ B. π C. e D. $\zeta(3)$
12. 【19,20】下面哪个方程的根不能用有限个有理数的加减乘除、根号等运算所表示出来? ()
 A. $x^5 - 1 = 0$ B. $x^5 - x - 1 = 0$ C. $x^{17} - 1 = 0$ D. $x^4 + 4 = 0$
13. 【19】四次方程求根公式是谁发现的? ()
 A. 卡丹 B. 费拉里 C. 塔塔利亚 D. 伽罗瓦
14. 【19】谁证明了 π 是个超越数? ()
 A. 林德曼 B. 阿贝尔 C. 埃尔米特 D. 刘维尔
15. 【20】谁第一个将 π 近似为 $\frac{355}{113}$? ()
 A. 刘徽 B. 祖冲之 C. 华罗庚 D. 张苍
16. 【20】2013年, 张益唐在什么问题中取得较大的突破? ()
 A. 希尔伯特第十问题 B. 同余数问题 C. 孪生素数问题 D. 哥德巴赫猜想
17. 【20】谁证明了正十七边形可以尺规作图? ()
 A. 高斯 B. 哈密尔顿 C. 埃尔米特 D. 刘维尔
18. 【20】群论是谁开创的 ()
 A. 阿贝尔和伽罗瓦等人 B. 卡丹 C. 塔塔利亚 D. 费拉里
19. 【20】2000年, 美国克雷研究所宣布了千禧年七大猜想有哪个? ()
 A. 朗道猜想 B. 孪生素数猜想 C. 哥德巴赫猜想 D. BSD猜想
20. 【20】叙述同余数定义, 利用Tunnell定理判断3是否是同余数.
21. 【19】丢番图方程是否有自然数解的问题可以转化为哪一个丢番图方程是否有整数解的问题?
22. 【17】请设计一个能较快地对欧拉常数进行近似计算的方法.
23. 【17】计算积分的方法有万能变换和欧拉变换, 请给出它们的几何解释.
24. 【17】求 3^{9973} 被41除所得的最小非负余数.
25. 【17】设 k 与 m 为非负整数, 证明 $4^k(8m+7)$ 不能表示成三个整数的平方和.
26. 【18】设 p 是个素数, 对任意 $x \in \mathbb{Q}$, 我们定义 $|x|_p$ 如下:

$$|x|_p = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ p^{-\alpha}, & x = p^\alpha \cdot \frac{n}{m}, \alpha \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{Z}, (p, mn) = 1, x \neq 0. \end{cases}$$

定义数列 $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}, n = 1, 2, \dots$.

- (1) 我们称数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 是 p -柯西列, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N > 0$, 使得 $\forall m, n > N$ 都有 $|a_m - a_n|_p < \varepsilon$.
- (2) 如果存在 $A \in \mathbb{Q}$, 使得对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N > 0$, 使得对 $\forall n > N$ 都有 $|A - a_n|_p < \varepsilon$, 我们则称数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 是 p -收敛于 A .

证明:

- (a) 如果数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 是 p -收敛于 A , 则数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 是 p -柯西列.
- (b) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 是 p -柯西列当且仅当数列 $\{a_{n+1} - a_n\}_{n=1}^\infty$ 是 p -收敛于0.
- (c) 存在 p -柯西列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 满足: 对任意 $A \in \mathbb{Q}$, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 都不 p -收敛于 A .

27. 【18】记 \mathbb{R} 为实数全体, 定义四元数集合

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k = \{d + ai + bj + ck | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

我们称 \mathbb{H} 中的元素 $\alpha = d + ai + bj + ck$ 的四元数, 其中 d 称为四元数 α 的实部, $ai + bj + ck$ 称为是四元数 α 的虚部. 实部为0的四元数叫做是纯四元数. 两个四元数之间的加法定义如下:

$$\begin{aligned} & (d_1 + a_1i + b_1j + c_1k) + (d_2 + a_2i + b_2j + c_2k) \\ &= (d_1 + d_2) + (a_1 + a_2)i + (b_1 + b_2)j + (c_1 + c_2)k. \end{aligned}$$

两个四元数之间的乘法定义如下:

$$\begin{aligned} & (d_1 + a_1i + b_1j + c_1k)(d_2 + a_2i + b_2j + c_2k) \\ &= d_1d_2 - a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 + (d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2)i \\ &+ (d_1b_2 + b_1d_2 + c_1a_2 - a_1c_2)j + (d_1c_2 + c_1d_2 + a_1b_2 - b_1a_2)k. \end{aligned}$$

假设 α 是个四元数, 如果存在四元数 β 使得 $\alpha\beta = \beta\alpha = 1$, 我们称 β 是 α 的逆, 记为 $\beta = \alpha^{-1}$. 回答下面问题:

- (1) 已知 $\alpha = d + ai + bj + ck \neq 0$. 求 α^{-1} .
 - (2) 纯四元数的全体记为 W . 假设 α 是个非零的纯四元数, $\beta \in W$, 求证 $\alpha\beta\alpha^{-1} \in W$.
 - (3) 三维空间中的一个向量 α 可以对应到纯四元数 $\alpha = ai + bj + ck$ 其中 a, b, c 分别是 x, y, z 轴的坐标. 求证: 空间解析几何中的两个向量 α, β 之间的叉积(或者外积)可以用四元数之间的运算表达出来, 即 $\alpha \times \beta = \frac{1}{2}(\alpha\beta - \beta\alpha)$. 等号右边的运算是将 α, β 看作四元数对的运算.
28. 【19】假设 p 是个固定的素数, 我们在有理数集合中定义一个新的绝对值. 假设有理数 $x = \pm p^k \frac{b}{a}$, 其中 $k, a, b \in \mathbb{N}$, a, b 都和 p 互素. 我们定义 $|x| = p^{-k}$. 特别地, 我们定义0的绝对值是0. 证明这个绝对值满足下面的性质:
- (1) $|x| \geq 0$, 等号成立当且仅当 $x = 0$.
 - (2) $|xy| = |x| \cdot |y|$.
 - (3) $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$, 这个性质叫强三角不等式.
 - (4) 如果 $|x| < |y|$, 那么 $|x + y| = |y|$.

§ 2 天文

1. 【19】望远镜的角分辨率为 θ , 口径为 D , 观测波长为 λ . 则 $\theta \propto$ ()
 A. λD B. $\lambda^{-1} D^{-1}$ C. λD^{-1} D. $\lambda^{-1} D$
2. 【19】一个天文单位约为_____km. ()
 A. 1.5×10^6 B. 1.5×10^7 C. 1.5×10^8 D. 1.5×10^9
3. 【19】赫罗图两轴代表的物理量分别是 ()
 A. 表面温度、光度 B. 年龄、光度 C. 表面温度、质量 D. 年龄、质量
4. 【19】我国最早开设天文学本科专业的大学是 ()
 A. 南京大学 B. 北京大学 C. 北京师范大学 D. 中国科学技术大学
5. 【19】太阳系的年龄约为_____年 ()
 A. 1亿 B. 5亿 C. 50亿 D. 100亿

6. 【19】第一个使用望远镜观测的是 ()
A. 哥白尼 B. 伽利略 C. 牛顿 D. ... (忘了)
7. 【19,20】记 v 为行星视向速度, D 为星系距离, H 为哈勃常数. 它们的关系是 ()
A. $v = H^{-1}D$ B. $v = HD$ C. $v = H^{-1}D^{-1}$ D. $v = HD^{-1}$
8. 【19,20】以下不属于大爆炸学说的明确预言的是 ()
A. 氢元素的相对丰度 B. 微波背景辐射 C. 中微子背景辐射 D. 星系形成
9. 【19】太阳演化的后期会变为 ()
A. ... (忘了) B. 红巨星 C. 行星状星云 D. 白矮星
10. 【19,20】太阳系距银河系中心约26000光年, 太阳绕行的线速度约为一千三百分之一光速($\frac{1}{1300}c$) 那么太阳诞生至今大约绕了多少周? ()
A. 23 B. 2.3×10^3 C. 2.3×10^5 D. 2.3×10^7
11. 【20】1光年约为_____米. ()
A. 9×10^{12} B. 9×10^{14} C. 9×10^{15} D. 9×10^{18}
12. 【20】2020年诺贝尔物理学奖颁发给了三位天文学家, 是因为他们取得了什么成就?
A. 宇宙微波背景辐射 B. 黑洞理论及探测 C. 引力波测量 D. 系外行星搜寻
13. 【20】Chandrasekhar极限是指白矮星的最高质量, 那么Chandrasekhar极限大约是_____. (其中 M_0 是太阳质量) ()
A. $1.4M_0$ B. $1.6M_0$ C. $2.7M_0$ D. $16M_0$
14. 【20】可见光波长范围是 ()
A. 240-580nm B. 360-520nm C. 380-740nm D. 520-810nm
15. 【20】造父变星的光度呈周期性变化, 且周期与光度有很好的正比关系. 可用此性质测量 ()
A. 星际介质的质量 B. 星系距离 C. 星际介质的密度 D. 寻找系外行星
16. 【20】2020年天文学发生了许多重要的事情, 让你印象最深的天文学事件是什么? 说明让你印象深刻的理由. 比如: 2020年诺贝尔物理学奖颁给了天文领域.
17. 【20】卫星发射需要很多能量. 一包薯条质量是100g, 包含热量为 1.5×10^6 焦耳, 一颗100kg的小卫星从地面发射到近地轨道, 所需要消耗的能量相当于多少包薯条所含有的能量? 其中万有引力常量 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, 地球质量 $M = 5.965 \times 10^{24} \text{kg}$, 地球半径 $R = 6371 \text{km}$.
18. 【19】史瓦西半径 $R_s = \frac{2GM_{BH}}{c^2}$, $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$. $Sgr A^*$ 的质量 $M_{BH} = 8 \times 10^{39} \text{g}$. 试求 $Sgr A^*$ 的史瓦西半径约为几个天文单位.
19. 【19】如果星系团中的星系是完全受各自万有引力的束缚而运动, 请问星系团中星系间的距离会因为宇宙膨胀而变得越来越远么?
20. 【17,18】暗物质的天文观测证据是什么, 当前天文上探索暗物质的研究手段有哪些?
21. 【17,18】双黑洞的合并和双中子星的合并观测表现上有哪些不同?
22. 【17】广义相对论的时空跟牛顿力学的时空和狭义相对论的时空有何不同?
23. 【17】探索系外行星你对哪种方法印象最深刻, 其原理是什么? 该方法的优点和局限性?
24. 【17】为什么探测系外行星这么难?

§ 3 大气

1. 【17】我国东部地区当前面临的大气复合污染与伦敦烟雾和洛杉矶烟雾的主要异同是什么?
2. 【17】我国的大气污染防治所面临的主要挑战有哪些?

3. 【18】雾和霾有什么区别？灰霾形成的原因是什么？
4. 【18】什么是气溶胶效应，和温室气体的作用有什么不同？
5. 【19】地球气候系统模式中考虑了哪些圈层的相互作用？为什么？
6. 【19】天气预报有哪些方法，各有什么优缺点？
7. 【20】数值天气预报方法和原理是什么？
8. 【20】地球系统模式是什么，内部包含哪些重要的物理化学过程？

§ 4 物理

对所选题目的回答不要求长篇大论，只要能讲清自己的观点并有适当的论据支撑即可。

1. 【17】电荷间的库仑定律与质量间的万有引力定律同为距离的平方反比关系，请就你的理解谈谈引力相互作用与电磁相互作用间有哪些异同？这些异同会造成哪些重要的物理后果？
2. 【17】2018年1月2日，美国《连线》杂志（Wired）有一个报道，称“华尔街之后，物理学家将接管硅谷”。谈谈你对这一问题的看法。
3. 【17,19】物理学有哪些学科？对一个你最感兴趣，或理解最深刻的学科（可以是一个相对大一点的学科，也可以是一个很小的分支），作一些个人的评述。（19年：据你所知物理有哪些主要分支学科，分别研究什么？）
4. 【18】请介绍一个你最感兴趣的物理学问题(可以是一个小问题也可以是一个小学科)，谈谈你对这个问题的理解以及你为什么觉得它特别有趣(设想你在把这个有趣的问题科普给别人)。在极端的情况下，如果你觉得物理学无趣极了，也可以举若干实例来说明这一点作为对本题的回答。此外请对数理科学概论课程谈谈自己的感受和建议(任何感受和建议都是受欢迎的)。
5. 【17】谈谈你对不确定关系 $\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$ 的理解。考虑到不确定关系的限制，一个弹簧振子的能量最低会是多少？给出你的推理过程，并说明你的结论与经典物理有什么区别，会造成哪些严重的后果？
6. 【17】你知道有哪些重要的对称性？它们在物理学中有什么重要的后果？
7. 【19】一个均匀带电球面，电荷量为 Q ，半径为 R ，根据对称性，试求球心处电场强度。
8. 【19】行星开普勒452b绕类似太阳的恒星做匀速圆周运动，半径是地球的1.6倍，它到地球的距离是1600光年，被称为第二个地球，那你认为人类有没有可能乘坐宇宙飞船在有生之年去到那颗行星上？为你的结论辅以数学论证。
9. 【19】已知一光子的能量 $E = h\nu$ ， ν 是其频率，一个光子从 H 高处，落到地面上，其频率会怎样变化？这说明 H 高处的钟和地面上的钟谁走得慢？慢多少？
10. 【18】根据爱因斯坦的光子说，频率为 ν 的光子具有能量 $E = h\nu$ 其中 h 是普朗克常数。
 - (1) 试问太阳表面发出的光子到达地球时，其频率是否会发生变化？若有，请估算引力红移量 $\frac{\Delta\nu}{\nu_0}$ 。
 - (2) 假定在地面上空高 H 处有一个实验室(H 不是很大)，忽略重力加速度的空间变化，计算从实验室发出的无线电波到达地面时的频率变化，并据此分析实验室中的时钟与地面上的时钟谁走得快，时间间隔相差多少？
 - (3) 现在让实验室在高 H 处，以速率 u 作水平运动，问当速率 u 为多大时，实验室中的时钟与其正下方地面上的时钟快慢一致。
11. 【20】写出三个基本粒子。
12. 【20】谈谈你对量子叠加态原理的认识。

13. **【20】** 已知光子能量 $E = h\nu$, 光线由恒星发出到达地球频率会发生改变, 利用光子从恒星表面到地球克服引力做的功, 推导引力红移公式.
14. **【20】** 电荷量 q 或 $-q$ 的粒子在同处会完全抵消, 在有间距 d 时, 在远处带电粒子会受到影响(距离 $r \gg d$). 利用 $P = qd$ 描述电偶极子. 回答: (1) 利用对称性分析氢原子的平均电偶极矩. (2) 两个氢原子之前会有范德华力, 范德华力是电偶极子之间的相互作用, ……(一大段叙述), 你认为是否与 (1) 中的结果矛盾?