

# 偏微分方程笔记

Fiddie



2021 年 10 月 19 日

# Contents

<b>0</b>	<b>本科阶段偏微分方程的学习方法</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>基础知识</b>	<b>4</b>
1.1	基本记号	4
1.2	散度定理与Green公式	4
1.3	散度定理的一些例题	6
1.4	Banach空间介绍	7
1.5	Hilbert空间介绍	9
1.6	$L^p$ 空间	11
1.7	Hölder空间	14
1.8	光滑函数逼近	15
<b>2</b>	<b>四种重要的线性PDE初探</b>	<b>18</b>
2.1	输运方程	18
2.1.1	初值问题	18
2.1.2	非齐次问题	18
2.2	Laplace方程	19
2.2.1	基本解	19
2.2.2	调和函数的性质	22
2.2.3	调和函数的局部估计	24
2.2.4	Green函数	26
2.2.5	半空间的Green函数	28
2.2.6	球上的Green函数	30
2.3	热传导方程	38
2.3.1	基本解	38
2.3.2	齐次初值问题	39
2.3.3	非齐次问题	40
2.3.4	平均值性质	42
2.3.5	有界区域的极值原理与解的唯一性	44
2.3.6	无界区域的最大值原理与解的唯一性	44
2.4	波动方程	47
2.4.1	一维情形下的解、d'Alembert公式	47
2.4.2	d'Alembert公式与对称延拓	48
2.4.3	2,3维情形下的解、Kirchhoff公式	49
2.4.4	(*)高维波动方程的解	51
2.4.5	非齐次波动方程的解	55
<b>3</b>	<b>PDE中的重要方法</b>	<b>57</b>
3.1	能量方法	57
3.1.1	位势方程	57
3.1.2	热传导方程	58
3.1.3	波动方程	60
3.2	分离变量法	62
3.2.1	二维情形	65
3.2.2	高维情形	67
3.3	Cole-Hopf变换	71
3.4	特征线法	73
3.4.1	基本理论	73
3.4.2	线性的例子	74
3.4.3	拟线性的例子	75
3.5	Fourier变换	81
<b>4</b>	<b>更多补充习题</b>	<b>85</b>
4.1	更多补充习题	85

## 第0章 本科阶段偏微分方程的学习方法

参考书与使用方法:

(1) 预习:

- L. C. Evans, Partial Differential Equations. (本科阶段只要求第1,2章大部分, 以及3,4,5章小部分).
- Walter A. Strauss, Partial Differential Equations, An Introduction. (有一些我这里没有提到的东西, 比如说Bessel函数, 建议在这里找一些习题来做).

预习建议: 我的笔记大部分都是Evans书上的内容(的翻译), 少部分是Strauss书上的内容(而且有的内容我没写在笔记里面), 建议大家预习的时候, 先看Evans书的第2章, 建立对椭圆、抛物、双曲型方程研究方法的基本想法(建立广度), 然后再提高深度(比如说, 热传导方程的各类边界问题的解法, 如分离变量法等).

大家在使用Evans书的过程中, 如果遇到一些细节无法推导, 我这里其实对一部分地方都给出了详细的计算过程.

当然少量的实变、泛函知识还是需要的, 大家也可以先看看Banach空间与 $L^p$ 空间的简单概念(我笔记的第一章).

(2) 其他参考书:

- Gilbarg, Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations.
- 沙玛耶夫, 偏微分方程习题集, 郭思旭译.
- 姜礼尚, 《数学物理方程》.

第一本比较深, 有兴趣可以深入研究; 第二本的习题很多都是能做的, 大家在复习考试的时候可以简单挑一下来练; 第三本是最不推荐的, 但是NJU的偏微分方程考试会从里面挑选题来(改编着)出, 所以里面的习题也要尽可能都会做.

# 第 1 章 基础知识

## § 1.1 基本记号

记  $C_c^k(\Omega)$  代表在区域  $\Omega$  内  $k$  次可微且具有紧支集的函数空间.

记  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  是 Lebesgue 可积的,

$$\|u\|_{L^p(U)} \triangleq \left( \int_U |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty.$$

设  $\alpha_i \in \mathbb{N}^+, 1 \leq i \leq n, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  叫做多重指标 (multiindex notation), 记  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  为多重指标的阶, 定义

$$D^\alpha u(x) \triangleq \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u.$$

如果  $k$  是个非负整数, 则定义

$$D^k u(x) \triangleq \{D^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}, |D^k u| = \left( \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}.$$

$f_\alpha = \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}$ , 这里  $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$ , 因此  $f$  等于它在  $x_0$  附近的 Taylor 展开式:

$$f(x) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0) (x - x_0)^\alpha, (|x - x_0| < r),$$

记  $V \subset\subset U$  表示  $V \subset \bar{V} \subset U$  且  $\bar{V}$  是紧集.

## § 1.2 散度定理与 Green 公式

散度定理、Gauss-Green 定理、分部积分公式、Green 公式

**定义 1.2.1 (单位法向量场)** 如果  $\partial U \in C^1$ , 则沿着  $\partial U$  可以定义一个单位外法向量场

$$\nu = (\nu^1, \dots, \nu^n).$$

在任意的点  $x^0 \in \partial U$  的单位法向量是  $\nu(x_0) = \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ .

**定义 1.2.2** 让  $u \in C^1(\bar{U})$ , 称

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \triangleq \nu \cdot Du$$

叫为  $u$  的法向导数.

**定理 1.2.1** 设  $u \in C^1(\bar{U})$ , 则

$$\int_U u_{x_i} dx = \int_{\partial U} u \nu^i dS (i = 1, \dots, n).$$

把上面的分量相加可得

**定理 1.2.2 (散度定理)** 设  $U \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in C^1(\overline{U})$ , 则

$$\int_U \operatorname{div} \mathbf{u} dx = \int_{\partial U} \mathbf{u} \cdot \nu dS.$$

**定理 1.2.3 (分部积分公式)**  $u, v \in C^1(\overline{U})$ , 则

$$\int_U u_{x_i} v dx = - \int_U u v_{x_i} dx + \int_{\partial U} u v \nu^i dS, i = 1, 2, \dots, n.$$

**证明:** 对  $uv$  用散度定理. □

**定理 1.2.4** 若  $u, v \in C^2(\overline{U})$ , 则

- (1)  $\int_U \Delta u dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$
- (2)  $\int_U Dv \cdot Dv dx = - \int_U u \Delta v dx + \int_{\partial U} \frac{\partial v}{\partial \nu} u dS,$
- (3)  $\int_U u \Delta v - v \Delta u dx = \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$

**证明:** (1) 在分部积分公式中, 用  $u_{x_i}$  代替  $u$ , 设  $v \equiv 1$ .

(2) 用  $v_{x_i}$  代替  $v$ .

(3) 对(2)交换  $u, v$  并相减. □

**定理 1.2.5 (余面积公式)** 设  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是 Lipschitz 连续, 且集合  $\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = r\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中光滑的  $(n-1)$  维超平面, 并设  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  连续且可积, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) |Du| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{\{u=r\}} f dS \right) dr.$$

上面相关定理证明可以见梅加强数学分析14.5节.

对任意  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , 令  $u = |x - x_0|$  可得:

**推论 1.2.6 (极坐标公式)** 设  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  连续且可积, 则对任意  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \left( \int_{\partial B(x_0, r)} f dS \right) dr.$$

**注:** 如果积分的区域是个球, 则有如下定理:

**推论 1.2.7 (极坐标公式II)** 设  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  连续且可积, 则

$$\int_{B(x_0, R)} f(x) dx = \int_0^R \left( \int_{\partial B(x_0, r)} f dS \right) dr.$$

**注:** 严格的证明 (用测度论) 参考 Measure Theory and Fine Properties of Functions, Evans. (我不会)

**定理 1.2.8 (含参变量积分求导)** 设  $f(x, y), f_y(x, y)$  均在  $[a, b] \times [c, d]$  连续, 若  $a(y), b(y)$  关于  $y$  可微, 则  $F(y)$  关于  $y$  可微, 且

$$F'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x, y) dx + f(b(y), y) b'(y) - f(a(y), y) a'(y).$$

**证明:** 梅加强数学分析的定理16.1.5. □

**推论 1.2.9 (移动区域求导公式)** 设  $f = f(x, t)$  与  $g = g(t)$  光滑,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , 则

$$\frac{d}{dt} \int_{B(x_0, g(t))} f(x, t) dx = \int_{\partial B(x_0, g(t))} f(x, t) dS + g'(t) \int_{B(x_0, g(t))} f_t(x, t) dx.$$

证明: 用含参变量积分的求导. □

定理 1.2.10 (Cauchy-Schwarz) 设  $f, g$  在  $[a, b]$  中可积, 则有

$$\left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

### § 1.3 散度定理的一些例题

例 1.3.1 (Trudinger, 2.15题) 设  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ ,  $\partial\Omega \in C^1$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . 证明 *interpolation inequality*: 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 都有

$$\int_{\Omega} |Du|^2 dx \leq \varepsilon \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} u^2 dx.$$

证明: 我们有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |Du|^2 dx \\ &= - \int_{\Omega} u \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} u dS \text{ (边界为0)} \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} u^2 dx. \text{ (基本不等式)} \end{aligned}$$

证明完毕. □

设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是有界开集, 且在边界处光滑. 又设  $U_T = U \times (0, T]$ ,  $\Gamma_T = \bar{U}_T - U_T$ ,  $T > 0$ . 看初始边界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & x \in U_T, \\ u = g, & x \in \Gamma_T, \\ u_t = h, & x \in U \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (1.1)$$

例 1.3.2 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 在  $\bar{B}(0, r)$  内有一阶连续偏导数,  $f|_{\partial B(0, r)} = 0$ . 证明:

$$\left| \int_{B(0, r)} f(x) dx \right| \leq \frac{\alpha(n)r^{n+1}}{n+1} \sup_{B(0, r)} |Df|.$$

证明: 由分部积分公式,

$$\int_{B(0, r)} f(x) dx + \int_B f_{x_i}(x) x_i dx = \int_{\partial B(0, r)} f(x) x_i \cdot \nu^i dS = 0 \quad (f|_{\partial B(0, r)} = 0)$$

叠加  $i = 1, 2, \dots, n$  可得

$$\int_{B(0, r)} n f(x) dx = - \int_B (Df) \cdot \mathbf{x} dx,$$

于是

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(0, r)} f(x) dx \right| &\leq \frac{1}{n} \left| \int_{B(0, r)} (Df) \cdot \mathbf{x} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sup_{B(0, r)} |Df| \int_{B(0, r)} |x| dx \\ &= \frac{1}{n} \sup_{B(0, r)} |Df| \int_0^r \left( \int_{\partial B(0, t)} |x| dS \right) dt \text{ (余面积公式)} \\ &= \frac{1}{n} \sup_{B(0, r)} |Df| \int_0^r t(n\alpha(n)t^{n-1}) dt \\ &= \sup_{B(0, r)} |Df| \frac{\alpha(n)r^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

**例 1.3.3** 设  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , 若函数  $v$  满足  $v, v_{x_1}, v_{x_2} \in L^2(\Omega)$ ,  $v|_{\partial\Omega} = 0$ , 以及

$$\int_{\Omega} \sin \pi x_1 \cdot \sin \pi x_2 \cdot v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0,$$

证明: 【通常都记  $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}$ ,  $1 \leq p < \infty$ 】

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{5\pi^2} \|Dv\|_{L^2(\Omega)}^2$$

**证明:** 对  $v$  用完备正交基  $\{\sin m\pi x \sin n\pi y\}$  (权为1, 在  $\Omega$  区域积分) 展开.

$$\begin{aligned} v &= \sum_{m,n} A_{m,n} \sin m\pi x_1 \sin n\pi x_2, \\ v_x &= \sum_{m,n} B_{m,n} \cos m\pi x_1 \sin n\pi x_2, \\ v_y &= \sum_{m,n} C_{m,n} \sin m\pi x_1 \cos n\pi x_2, \end{aligned}$$

于是  $A_{11} = \int_{\Omega} v \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 dx_1 dx_2 = 0$ , 且  $A_{m,n} = \frac{B_{mn}}{m\pi} = \frac{C_{mn}}{n\pi}$ . 由(类似于Parseval恒等式的式子)

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \frac{1}{4} \sum_{m,n} A_{m,n}^2, \\ \|Dv\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \frac{1}{4} \sum_{m,n} (B_{m,n}^2 + C_{m,n}^2) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{m,n} (m^2 + n^2) \pi^2 A_{m,n}^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \sum_{m,n} (2^2 + 1^2) \pi^2 A_{m,n}^2 \text{ (注意 } A_{11} = 0) \\ &= 5\pi^2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

注: 模仿Friedrichs不等式的证明过程我暂时想不出来!

**例 1.3.4** 存在常数  $C_n > 0$ , 使得对于  $\beta > \frac{n}{2} + 1$ , 有下面不等式成立:

$$\int_{\{\|x\|_2 \geq R\}} \left( \frac{1}{\|x\|_2^2 + 1} \right)^{\beta} dx \leq C_n \left( \frac{1}{R^2 + 1} \right)^{\beta - \frac{n}{2}}.$$

**证明:** 请参考<https://www.zhihu.com/question/414615042/answer/1412426370>, 并关注这个用户!

## § 1.4 Banach空间介绍

**定义 1.4.1 (范数)** 设  $V$  是个线性空间,  $\mathcal{V}$  的范数(norm)是一个映射  $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ , 也写  $p(x) = \|x\| = \|x\|_V$ ,  $x \in V$ , 满足

- 非负性:  $\|x\| \geq 0, \forall x \in V$ ; 且  $\|x\| = 0$  当且仅当  $x = 0$ .
- 数乘:  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{R}, x \in V$ .
- 三角不等式:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$ .

赋予了范数的线性空间  $V$  称作**赋范线性空间**(normed linear space).

**定义 1.4.2 (度量)** 赋范线性空间  $V$  是个度量空间, 其度量定义为

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, x, y \in V.$$

下面设赋范线性空间  $V$  中有序列  $\{x_n\}$ .

定义 1.4.3 (收敛) 称  $x_n$  收敛到  $x \in V$ , 若

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

定义 1.4.4 (Cauchy列) 若  $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0, m, n \rightarrow \infty$ , 则把  $\{x_n\}$  称作一个 *Cauchy* 序列.

定义 1.4.5 (Banach空间) 若  $V$  是完备赋范线性空间, 即 *Cauchy* 序列都是收敛序列, 则  $V$  也叫 **Banach** 空间.

下面介绍压缩映像原理.

定义 1.4.6 设  $V$  是赋范线性空间. 称映射  $T: V \rightarrow V$  是个压缩映射, 若存在  $\theta < 1$  使得

$$\|Tx - Ty\| \leq \theta \|x - y\|, \forall x, y \in V.$$

定理 1.4.1 (压缩映像原理) *Banach* 空间  $\mathcal{B}$  上的压缩映射  $T$  有唯一的不动点, 即方程  $Tx = x$  存在唯一的解  $x \in \mathcal{B}$ .

证明: (逐次逼近法) 设  $x_0 \in \mathcal{B}$ , 定义序列  $\{x_n\} \subset \mathcal{B}$  为  $x_n = T^n x_0$ , 若  $n \geq m$ , 则

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \sum_{j=m+1}^n \|x_j - x_{j-1}\| \\ &= \sum_{j=m+1}^n \|T^{j-1} x_1 - T^{j-1} x_0\| \\ &\leq \sum_{j=m+1}^n \theta^{j-1} \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{\|x_1 - x_0\| \theta^m}{1 - \theta} \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

所以  $\{x_n\}$  是 *Cauchy* 列. 由于 *Banach* 空间是完备的, 则  $x_n \rightarrow x$ . 显然  $T$  是连续映射, 则我们有

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

所以  $x$  是  $T$  的不动点. 根据压缩映射的定义立即得唯一性. □

定义 1.4.7 (线性算子) 映射  $A: X \rightarrow Y$  称作**线性算子** (*linear operator*), 若

$$A(\lambda u + \mu v) = \lambda Au + \mu Av, \forall u, v \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

定义 1.4.8 (有界线性算子) 设  $V_1, V_2$  是赋范线性空间, 线性算子  $T: V_1 \rightarrow V_2$  称为**有界的** (*bounded*), 若

$$\|T\| \triangleq \sup_{x \in V_1, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_{V_2}}{\|x\|_{V_1}} < \infty.$$

容易证明:

定理 1.4.2 线性算子  $T$  有界当且仅当它连续.

有界线性算子的可逆性有时候会通过下面的定理, 从一个长得很像的映射的可逆性得出来. 下面定理用到的方法也叫**连续性方法**.

定理 1.4.3 设  $\mathcal{B}$  是 *Banach* 空间,  $V$  是赋范线性空间, 并设  $L_0, L_1$  是从  $\mathcal{B}$  映往  $V$  的有界线性算子. 对任意的  $t \in [0, 1]$ , 设

$$L_t = (1 - t)L_0 + tL_1.$$



并设存在常数 $C$ 使得

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = C\|L_t x\|_V, t \in [0, 1].$$

则 $L_1$ 从 $\mathcal{B}$ 到 $V$ 的满射的充分必要条件是 $L_0$ 从 $\mathcal{B}$ 到 $V$ 的满射.

**证明:** 对某个 $s \in [0, 1]$ , 设 $L_s : \mathcal{B} \rightarrow V$ 是满射. 由条件 $\|x - y\|_{\mathcal{B}} = C\|L_s x - L_s y\|_V$ , 若 $L_s x = L_s y$ 则 $x = y$ , 从而 $L_s$ 是单射, 从而是一一映射, 逆映射 $L_s^{-1} : V \rightarrow \mathcal{B}$ 存在.

对任意 $t \in [0, 1]$ 与 $y \in V$ , 下证 $L_t x = y$ 有解(从而是满射). 方程 $L_t x = y$ 等价于方程

$$\begin{aligned} L_s(x) &= y + (L_s - L_t)x = y + (t - s)L_0 x - (t - s)L_1 x. \\ \Leftrightarrow x &= L_s^{-1}y + (t - s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x \quad (\text{线性算子}). \end{aligned}$$

设映射 $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ 为 $Tx = L_s^{-1}y + (t - s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$ . 若

$$|s - t| < \delta = [C(\|L_0\| + \|L_1\|)]^{-1},$$

则 $T$ 是个压缩映射. 此时对任意 $t \in [0, 1]$ 且满足 $|s - t| < \delta$ , 都有 $L_t$ 是满射.

最后把区间 $[0, 1]$ 分成许多长度小于 $\delta$ 的区间, 可知 $\forall t \in [0, 1]$ ,  $L_t$ 是满射. 特别地 $t = 0, t = 1$ 也正确.  $\square$

下面设 $V$ 是赋范线性空间,  $V$ 上的泛函是从 $V$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射. 所有 $V$ 中有界线性泛函叫 $V$ 的对偶空间, 记为 $V^*$ . 容易证明在下面的范数意义下 $V^*$ 是Banach空间.

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

**例 1.4.1** 同构:  $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ .

把 $V^*$ 的对偶空间记为 $V^{**}$ , 叫 $V$ 的二次共轭空间(second dual). 显然映射 $J : V \rightarrow V^{**}$ ,  $Jx(f) = f(x), f \in V^*$ 是保范(preserving,  $\|Jx(f)\| = \|f\|$ )、线性、一一映射. 若 $JV = V^{**}$ , 则称 $V$ 是自反的(reflexive). 后面介绍的Sobolev空间是自反的, Holder空间不是自反的.

## § 1.5 Hilbert空间介绍

下面设 $H$ 是实线性空间.

**定义 1.5.1 (内积)** 映射 $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ 叫内积(inner product), 若

- $(u, v) = (v, u), \forall u, v \in H$ .
- $u \mapsto (u, v)$ 是线性映射,  $\forall v \in H$ .
- $(u, u) \geq 0, \forall u \in H$ ; 且 $(u, u) = 0$ 当且仅当 $u = 0$ .

赋予内积的线性空间 $H$ 叫内积空间.

如果对内积空间赋予范数 $\|u\| = (u, u)^{1/2}, u \in H$ , 则内积空间 $H$ 有如下不等式( $x, y \in H$ )

- Cauchy-Schwarz不等式:  $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$ .
- 三角不等式:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .
- 平行四边形法则:  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ .

由上, 内积空间也是一个赋范线性空间.

**定义 1.5.2 (Hilbert空间)** 完备的内积空间叫做Hilbert空间.

**例 1.5.1**  $\mathbb{R}^n$ 上的Euclid空间是Hilbert空间, 赋予内积为 $(x, y) = \sum x_i y_i$ .

**例 1.5.2**  $L^2(U)$ 是Hilbert空间, 赋予内积为 $(f, g) = \int_U f g dx$ .

**例 1.5.3** Sobolev空间 $H^1(U)$ 是Hilbert空间, 赋予内积为 $(f, g) = \int_U fg + Df \cdot Dg dx$ . 以后会介绍Sobolev空间.

**定义 1.5.3 (正交)** 设 $H$ 是内积空间, 称 $x, y$ 正交(orthogonal), 若 $(x, y) = 0$ .

**定义 1.5.4 (正交基)** 设 $H$ 是内积空间, 一组(可数个)基 $\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ 称作一个**标准正交基** (orthonormal), 若

$$\begin{cases} (w_k, w_l) = 0, k \neq l, \\ \|w_k\| = 1, \forall k. \end{cases}$$

若 $u \in H$ 且 $\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ 是标准正交基, 可以写

$$u = \sum_{k=1}^\infty (u, w_k) w_k.$$

这个序列在 $H$ 中收敛. 此外

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^\infty \|(u, w_k)\|^2.$$

**定义 1.5.5** 若 $M$ 是内积空间 $H$ 的子空间, 则 $M^\perp = \{u \in H : (u, v) = 0, \forall v \in M\}$ 由与 $M$ 中元正交的向量构成.

**定理 1.5.1 (投影定理)** 设 $M$ 是Hilbert空间 $H$ 的闭子空间, 则 $\forall x \in H$ , 可以写 $x = y + z, y \in M, z \in M^\perp$ .

**证明:** 若 $x \in M$ , 令 $y = x, z = 0$ 即可. 因此我们设 $M \neq H$ 且 $x \notin M$ . 定义

$$d = \text{dist}(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\| > 0,$$

并让 $\{y_n\} \subset M$ 满足 $\|x - y_n\| \rightarrow d$ . 根据平行四边形法则,

$$4\|x - \frac{1}{2}(y_m + y_n)\|^2 + \|y_m - y_n\|^2 = 2(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2).$$

由于 $\frac{1}{2}(y_m + y_n) \in M$ 且 $\|y_m - y_n\| \rightarrow 0 (m, n \rightarrow \infty)$ , 从而 $\{y_n\}$ 是Cauchy列. 根据Hilbert空间的完备性以及 $M$ 是闭集可知 $y = \lim y_n \in M$ 且 $\|x - y\| = d$ .

下面设 $x = y + z, z = x - y$ . 只需证 $z \in M^\perp$ . 对任意的 $y' \in M, \alpha \in \mathbb{R}$ , 有 $y + \alpha y' \in M$ , 所以

$$d^2 \leq \|x - y\alpha y'\|^2 = (z - \alpha y', z - \alpha y') = \|z\|^2 - 2\alpha(y', z) + \alpha^2\|y'\|^2.$$

因此, 由于 $\|z\| = d$ , 则 $|(y', z)| \leq \frac{\alpha}{2}\|y'\|^2$ . 由 $\alpha > 0$ 的任意性,  $(y', z) = 0, \forall y' \in M \Rightarrow z \in M^\perp$ . □

**定理 1.5.2 (Riesz表示定理)** 对任意的Hilbert空间 $H$ 上的有界线性泛函 $F$ , 存在唯一确定的元素 $f \in H$ 使得 $F(x) = (x, f), \forall x \in H$ 且 $\|F\| = \|f\|$ .

**证明:** (1)存在性. 设 $N = \{x : F(x) = 0\}$ 为 $F$ 的零空间(null space). 若 $N = H$ , 让 $f = 0$ 即可.

下面设 $N \neq H$ . 由于 $N$ 是 $H$ 的一个闭子空间, 则根据投影定理, 存在非零 $z \in H$ 使得 $(x, z) = 0, \forall x \in N$ . 因此 $F(z) \neq 0$ . 由于 $F$ 是线性泛函, 则

$$F\left(x - \frac{F(x)}{F(z)}z\right) = F(x) - \frac{F(x)}{F(z)}F(z) = 0, \forall x \in H,$$

所以 $x - \frac{F(x)}{F(z)}z \in N$ , 所以

$$\left(x - \frac{F(x)}{F(z)}z, z\right) = 0, \Rightarrow (x, z) = \frac{F(x)}{F(z)}\|z\|^2.$$

取  $f = zF(z)/\|z\|^2$  即可得  $F(x) = (f, x)$ .

(2) 唯一性: 若  $f, g$  都满足  $F(x) = (x, f) = (x, g), \forall x \in H$ , 则  $(x, f - g) = 0$ , 由  $x \in H$  的任意性, 必有  $f - g = 0 \Rightarrow f = g$ .

(3) 下证  $\|F\| = \|f\|$ . 由 Cauchy-Schwarz 不等式,  $\|F\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, f)|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\| \|f\|}{\|x\|} = \|f\|$ , 另一方面, 由 (1) 可知  $\|f\|^2 = (f, f) = F(f) \leq \|F\| \|f\| \Rightarrow \|f\| \leq \|F\|$ . 所以  $\|F\| = \|f\|$ .  $\square$

注: Hilbert 空间的共轭空间可以由它本身来表示, 从而 Hilbert 空间是自反的.

## § 1.6 $L^p$ 空间

对于  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  上的可测函数, 我们把只在零测集上取不同值的  $\Omega$  上的可测函数看作一个等价类. 注意零测集上取值不同不会影响积分的值.

对于  $1 \leq p < \infty$ , 定义

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ 为 Lebesgue 可积}, \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\},$$

其中

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

对于  $p = \infty$ , 记

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ 为 Lebesgue 可积}, \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\},$$

其中

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |u(x)|.$$

记  $S = \{a \in \mathbb{R} : m(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\}$ , 则  $\operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |u(x)|$  代表本性上确界, 定义为

$$\operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |u(x)| := \begin{cases} \infty, & S = \emptyset, \\ \inf S, & S \neq \emptyset. \end{cases}$$

注: 有时候为了方便, 在不混淆的情况下也会写  $\|u\|_{L^p(\Omega)}$  为  $\|u\|_p$ . (可能会和向量范数混淆, 但是向量范数通常都在数值代数中用到, 在 PDE 中比较少出现)

对于  $L^p$  空间, 最重要的是几个常见不等式.

**定理 1.6.1 (Young 不等式)** 设  $1 < p < \infty, 1 < q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . 则

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, a, b > 0.$$

**证明:** 映射  $x \mapsto e^x$  是凸的, 所以

$$ab = e^{\log a + \log b} = e^{\frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q} \leq \frac{1}{p} e^{\log a^p} + \frac{1}{q} e^{\log b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

$\square$

**定理 1.6.2 (Hölder 不等式)** 设  $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . 若  $u \in L^p(U), v \in L^q(U)$ , 则

$$\int_U |uv| dx = \|u\|_{L^1(U)} \leq \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}.$$

**证明:** 不妨设  $\|u\|_{L^p} = \|v\|_{L^q} = 1$  (否则可以乘一个倍数). 由 Young 不等式,

$$\int_U |uv| dx \leq \frac{1}{p} \int_U |u|^p dx + \frac{1}{q} \int_U |v|^q dx = 1 = \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}.$$

$\square$

**定理 1.6.3 (Minkowski 不等式)** 设  $1 \leq p \leq \infty, u, v \in L^p(U)$ . 则

$$\|u + v\|_{L^p(U)} \leq \|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}.$$

**证明:** 注意到

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{L^p(U)}^p &= \int_U |u+v|^p dx \leq \int_U |u+v|^{p-1}(|u|+|v|)dx \\ (\text{Holder不等式}) &\leq \left( \int_U |u+v|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left[ \left( \int_U |u|^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_U |v|^p dx \right)^{1/p} \right] \\ &= \|u+v\|_{L^p(U)}^{p-1} (\|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}). \end{aligned}$$

注意讨论  $\|u+v\| = 0, \infty$  的情况把  $\|u+v\|^{p-1}$  除过去. □

**注:** 类似可以证明离散版本的Holder不等式与Minkowski不等式. 设  $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \right)^{1/p} \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{1/q} \\ \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \right)^{1/p} &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

**定理 1.6.4** 对  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $L^p$  空间是 Banach 空间.

**证明:** 略. □

**注:** 特别地,  $L^2(\Omega)$  是 Hilbert 空间, 赋予内积  $(u, v) = \int_{\Omega} uv dx$ .

**定理 1.6.5 (广义Minkowski不等式)** 设  $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是可测函数, 若对几乎处处  $y \in \mathbb{R}^n, f(x, y) \in L^p(\mathbb{R}^m), p \geq 1$ , 且  $\int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |f|^p dx \right)^{1/p} dy < +\infty$ , 则

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)|^p dx \right)^{1/p} dy$$

**证明:** 略.

**定理 1.6.6 (Hardy不等式)** 设  $f(x) \geq 0, p > 1$ . 则

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy \right]^p dx \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{\infty} f^p(x) dx.$$

**证明:** 作变量代换  $y = tx$

$$\begin{aligned} &\left( \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy \right]^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_0^{\infty} \left[ \int_0^1 f(xt) dt \right]^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \int_0^1 \left[ \int_0^{\infty} |f(xt)|^p dx \right]^{1/p} dt \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{\infty} |f(y)|^p t^{-1} dy \right)^{1/p} dt (\text{变量代换}) \\ &= \|f\|_p \int_0^1 t^{-1/p} dt = \frac{p}{p-1} \|f\|_p. \end{aligned}$$

对上面不等号两边取  $p$  次方可. □

**注:** 类似有如下的Hilbert不等式: 设  $p > 1, V_f(x) = \int_0^{\infty} \frac{f(y)}{x+y} dy, x > 0$ . 若  $\|f\|_p < +\infty$ , 则

$$\|V_f\|_p \leq \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}} \|f\|_p.$$

**例 1.6.1** 设  $m(U) < +\infty, 0 < p < q \leq +\infty$ , 则  $L^q(U) \subset L^p(U)$ .

**证明:** 不妨设  $q < +\infty$  (否则 trivial), 设  $r = \frac{q}{p}, \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ . 由 Hölder 不等式可得

$$\int_U |f|^p dx = \int_U (|f|^{p \cdot r} \cdot 1^{r'}) dx \leq \left( \int_U (|f|^p) dx \right)^{1/r} \left( \int_U 1^{r'} dx \right)^{1/r'} = (m(U))^{1/r'} \left( \int_U |f|^q \right)^{1/r}.$$

因此若  $\|f\|_{L^q(U)} < \infty$ , 则  $\|f\|_{L^p(U)} < \infty$ , 则  $L^q(U) \subset L^p(U)$ . □

**例 1.6.2** 若  $f_k \in L^p(U), k \in \mathbb{N}, p \geq 1$  满足  $\|f_{k+1} - f_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}$ . 则存在  $f \in L^p(U)$  使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in U.$$

**证明:** 仿照  $L^p$  空间是 Banach 空间的证明即可.

设  $g_n = \sum_{k=1}^n |f_{k+1} - f_k|, g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{k+1} - f_k|$ . 则  $g_n$  单调上升. 由离散 Minkowski 不等式,

$$\begin{aligned} \|g_n\|_p &= \left( \sum_{k=1}^n \int_U |f_{k+1} - f_k|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left( \int_U |f_{k+1} - f_k|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} < 1. \end{aligned}$$

根据 Fatou 引理,

$$\|g\|_p = \left( \int_U \lim_{n \rightarrow \infty} |g_n|^p dx \right)^{1/p} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \int_U |g_n|^p dx \right)^{1/p} \leq 1.$$

所以  $g$  绝对收敛, a.e. 因此  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1} - f_k)$  存在 (a.e.), 记为  $f$ . □

**例 1.6.3** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  有界, 若  $u$  是  $\Omega$  中的可测函数, 且  $|u|^r \in L^1(\Omega), \exists r \in \mathbb{R}$ , 定义

$$\Phi_p(u) := \left( \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

**证明:** (1)  $\lim_{p \rightarrow \infty} \Phi_p(u) = \text{ess sup}_{\Omega} |u|$ . (2)  $\lim_{p \rightarrow 0} \Phi_p(u) = \exp \left[ \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} \log |u| dx \right]$ .

**证明:** (1)  $\forall \varepsilon > 0$ , 设  $E = \{x : |u(x)| \geq M - \varepsilon\}$ , 其中  $M = \|u\|_{\infty}$ . 则  $m(E) < \infty$ , 否则与  $u \in L^r$  矛盾. 于是

$$\|u\|_p \geq \left( \int_E |u|^p dx \right)^{1/p} \geq (M - \varepsilon) m(E)^{1/p} \rightarrow M - \varepsilon (p \rightarrow \infty).$$

若  $M = \infty$ , 则命题已证完, 只需考虑  $M < \infty$  的情况. 当  $p > r$  充分大时,

$$\int_{\Omega} |u|^p dx \leq \|u^{p-r}\|_{\infty} \int_{\Omega} |u|^r dx = \|u\|_{\infty}^{p-r} \|u\|_r^r < \infty.$$

即  $\|u\|_p \leq \|u\|_{\infty}^{1-(r/p)} \cdot \|u\|_r^{r/p} \rightarrow M \cdot 1 = M (p \rightarrow \infty)$ . 由  $\varepsilon$  的任意性,  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p = \|f\|_{\infty}$ . □

**注:** 上述证明没有用到  $\Omega$  的有界性. 也就是说  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p = \|f\|_{\infty}$  对无界区域也对. 根据有界性即可得到  $\lim_{p \rightarrow \infty} \Phi_p(u) = \text{ess sup}_{\Omega} |u|$

(2)不妨设 $m(\Omega) = 1$ . 假设 $\int_{\Omega} \log |u| dx < \infty$ , 令 $g(p) = \frac{1}{p} \log \int_{\Omega} |u|^p dx - \int_{\Omega} \log |u| dx$ . 由于 $t \mapsto \log t$ 是凹函数, 则 $g(p) \geq 0$ . 用不等式 $\ln(1+t) \leq t$ , 有

$$0 \leq g(p) \leq \frac{1}{p} \left( \int_{\Omega} |u|^p dx - 1 \right) - \int_{\Omega} \log |u| dx = \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p - 1}{p} - \log |u(x)| dx.$$

易证 $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{t^p - 1}{p} - \log t = 0$ , 且 $\frac{t^p - 1}{p} - \log t \geq 0 (p > 0)$ , 根据Fatou引理,  $\lim_{p \rightarrow \infty} g(p) = 0$ . 整理得

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Phi_p(u) = \exp \left[ \int_{\Omega} \log |u| dx \right].$$

若 $\int_{\Omega} \log |u| dx = \infty$ , 则

$$\int_{\Omega} |u|^p dx \geq \int_{\Omega} (1 + \log |u|^p) dx = m(\Omega) + p \int_{\Omega} \log |u| dx = \infty.$$

从而 $\Phi_p(u) = \infty, \forall p$ .

**例 1.6.4** 设 $1 \leq p < r < q < \infty, f \in L^p \cap L^q$ . 证明 $f \in L^r$ 且

$$\log \|f\|_r \leq \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \log \|f\|_p + \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \log \|f\|_q$$

提示: 仿照定理1.7.2的证明过程.

## § 1.7 Hölder空间

**定义 1.7.1 (Hölder连续)** 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是开集,  $0 < \gamma \leq 1$ , 若存在常数 $C$ 使得函数 $u$ 满足

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma, x, y \in U,$$

则称函数 $u$ 是Hölder连续的.

如果 $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界的连续函数, 记

$$\|u\|_{C(\overline{U})} := \sup_{x \in U} |u(x)|.$$

把 $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ 的 $\gamma$ 阶Hölder半范数(seminorm)记为

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} := \sup_{x,y \in U, x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}$$

把 $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ 的 $\gamma$ 阶Hölder范数记为

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} := \|u\|_{C(\overline{U})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}.$$

**定义 1.7.2** Hölder空间 $C^{k,\gamma}(\overline{U})$ 包含了所有 $u \in C^k(\overline{U})$ , 其中赋予的范数

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{U})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}$$

是有限的.

根据定义, 空间 $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ 包含的所有 $u$ 都是 $k$ 次可微, 且 $u$ 的 $k$ 阶偏导数有界且为 $\gamma$ 阶Hölder连续. 这样的函数有很好的数学结构:

**定理 1.7.1 (Evans, 5.1题)** 函数空间 $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ 是Banach空间.

根据Banach空间的定义, 我们要验证 $\|\cdot\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})}$ 是个范数(满足非负性、三角不等式、数乘), 并验证它的Cauchy列都收敛(完备性).

**证明:** (1)非负性、三角不等式、数乘: 由 $\|\cdot\|_{C(\bar{U})}$ 与 $[\cdot]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}$ 的定义, 这是显然的.

(2)若 $u = 0$ , 显然有 $\|u\| = 0$ ; 另一方面, 若 $\|u\| = 0$ , 则 $\|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} = 0, \forall |\alpha| \leq k$ . 取 $\alpha = 0$ 可得 $u \equiv 0$ .

(4)完备性: 设 $\{u_n\}$ 是Cauchy序列. 则

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|u_m - u_n\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_m - D^\alpha u_n\|_{C(\bar{U})} + \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u_m - D^\alpha u_n]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} = 0.$$

根据非负性,

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|D^\alpha u_m - D^\alpha u_n\|_{C(\bar{U})} = 0, \text{ 且 } [D^\alpha u_m - D^\alpha u_n]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} = 0, \forall |\alpha| \leq k.$$

由于 $C(\bar{U})$ 是完备的, 则 $\{D^\alpha u_n\}$ 都是收敛的, 存在 $u \in C^k(\bar{U})$ 使得 $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

根据 $[\cdot]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}$ 的定义, 容易得知 $\lim_{n \rightarrow \infty} [D^\alpha u_n - D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} = 0$  (三角不等式).

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} = 0$ . □

**定理 1.7.2 (Evans, 5.2题)** 设 $0 < \beta < \gamma \leq 1$ , 证明插值不等式

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(U)} \leq \|u\|_{C^{0,\beta}(U)}^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} \|u\|_{C^{0,1}(U)}^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}}$$

**证明:** 根据定义,

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{0,\gamma}(U)} &= \|u\|_{C(\bar{U})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} \\ &= \|u\|_{C(\bar{U})} + \sup_{x,y \in U, x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\} \\ &= \|u\|_{C(\bar{U})}^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} \|u\|_{C(\bar{U})}^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}} + \sup_{x,y \in U, x \neq y} \left( \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta} \right)^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} \left( \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right)^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}} \\ (\text{Hölder不等式}) &\leq \left( \|u\|_{C(\bar{U})} + \sup_{x,y \in U, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta} \right)^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} \left( \|u\|_{C(\bar{U})} + \sup_{x,y \in U, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right)^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}} \\ &= \|u\|_{C^{0,\beta}(U)}^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} \|u\|_{C^{0,1}(U)}^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}} \end{aligned}$$

## § 1.8 光滑函数逼近

局部 $L^p$ 可积函数:

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \in L^p(V), V \subset\subset U\},$$

其中 $V \subset\subset U$ 代表 $\bar{V} \subset U$ ,  $V$ 是 $U$ 的紧子集.

如果有 $\{u_m\}$ 在 $L^p_{loc}(\Omega)$ 意义下收敛到 $u$ , 这指的是 $u \in L^p(\Omega')$ ,  $\forall \Omega' \subset\subset \Omega$ .

令 $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho dx = 1$ ,  $\rho|_{B(0,1)^c} = 0$ . 这样的函数叫做磨光子(mollifier). 一个经典的例子是

$$\rho(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

其中 $c$ 是规范化常数, 使得 $\int_{\rho} dx = 1$ 成立.

对于 $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ,  $h > 0$ , 把 $u$ 的规范化函数(regularization)记作 $u_h$ , 用卷积定义:

$$u_h(x) = h^{-n} \int_{\Omega} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy.$$

其中 $h < \text{dist}(x, \partial\Omega)$ .

容易知道如下事实.

- 若 $h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ , 则 $u_h \in C^\infty(\Omega')$ ,  $\forall \Omega' \subset\subset \Omega$ ,
- 若 $u \in L^1(\Omega)$ ,  $\Omega$ 有界, 则 $\forall h > 0$ ,  $u_h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . (用 $C_0^\infty$ 表示在无穷远处取0的无穷次可微函数)
- 若 $h \rightarrow 0$ , 则函数 $y \mapsto h^{-n} \rho(x-y/h)$ 趋于Dirac函数 $\delta(x)$ .

**引理 1.8.1** 设 $u \in C^0(\Omega)$ . 则在任意区域 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 内 $u_h$ 一致收敛于 $u$ .

**证明:** 我们有

$$\begin{aligned} u_h(x) &= h^{-n} \int_{\Omega} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy \\ &= h^{-n} \int_{|x-y| \leq h} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy \\ &= \int_{|z| \leq 1} \rho(z) u(x-hz) dz. \end{aligned}$$

若 $\Omega' \subset\subset \Omega$ ,  $2h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ , 则

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega'} |u - u_h| &\leq \sup_{x \in \Omega'} \int_{|z| \leq 1} \rho(z) |u(x) - u(x-hz)| dz \\ &\leq \sup_{x \in \Omega'} \sup_{|z| \leq 1} |u(x) - u(x-hz)|. \end{aligned}$$

由于 $u$ 在集合 $B_h(\Omega') = \{x : \text{dist}(x, \Omega') < h\}$ 是一致连续的, 则 $u_h$ 在区域 $\Omega'$ 内一致收敛于 $u$ . □

**引理 1.8.2** 设 $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ 或 $L^p(\Omega)$ ,  $p < \infty$ . 则 $u_h$ 在 $L^p_{loc}(\Omega)$ 意义下收敛到 $u$ .

**证明:** 由前一引理的中间式子

$$u_h(x) = \int_{|z| \leq 1} \rho(z) u(x-hz) dz,$$

根据Hölder不等式,

$$|u_h(x)|^p \leq \int_{|z| \leq 1} \rho(z) |u(x-hz)|^p dz,$$

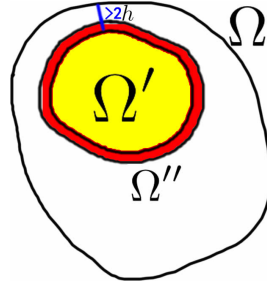
若 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 且 $2h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |u_h|^p dx &\leq \int_{\Omega'} \int_{|z| \leq 1} \rho(z) |u(x-hz)|^p dz dx \\ &= \int_{|z| \leq 1} \rho(z) dz \int_{\Omega'} |u(x-hz)|^p dx \\ &\leq \int_{B_h(\Omega')} |u|^p dx, \text{ 其中 } B_h(\Omega') = \{x : \text{dist}(x, \Omega') < h\}. \end{aligned}$$

因此

$$\|u_h\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u\|_{L^p(\Omega'')}, \Omega'' = B_h(\Omega'). \quad (1.2)$$





下面我们要用前一引理的逼近结果. (Weierstrass逼近定理)选 $\varepsilon > 0$ 与 $w \in C^0(\Omega)$ 满足

$$\|u - w\|_{L^p(\Omega'')} \leq \varepsilon,$$

其中 $\Omega' = B_{h'}(\Omega')$ ,  $2h' < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ . 由前一引理, 可以选充分小的 $h$ 使得

$$\|w - w_h\|_{L^p(\Omega')} \leq \varepsilon,$$

由式1.2,  $\|(u_h - w_h)\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u - w\|_{L^p(\Omega'')} + \|w - w_h\|_{L^p(\Omega')} + \|u_h - w_h\|_{L^p(\Omega')} \leq 3\varepsilon$ . 因此

$$\|u - u_h\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u - w\|_{L^p(\Omega'')} + \|w - w_h\|_{L^p(\Omega')} + \|u_h - w_h\|_{L^p(\Omega')} \leq 3\varepsilon.$$

其中 $h \leq h'$ 充分小. 因此在 $L^p_{loc}(\Omega)$ 意义下 $u_h \rightarrow u$ .

类似地对 $u \in L^p(\Omega)$ , 取 $u|_{\Omega^c} = 0$ 并考虑 $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 即可.

□

## 第2章 四种重要的线性PDE初探

### § 2.1 输运方程

下面记  $u = u(x, t), x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$ ,  $x$  是空间中的一个点,  $t$  是时间.  $D_u = D_x u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$  是代表  $u$  关于空间变量  $x$  的梯度.  $u_t$  代表  $u$  关于时间的偏导数.

偏微分方程

$$u_t + b \cdot D_u = 0, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \quad (2.1)$$

是输运方程(transport equation), 这里  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  是个固定的向量.

为了解这个PDE, 我们现在就不妨设  $u$  有某个光滑的解然后再尝试计算它. 首先必须注意到方程2.1表明  $u$  的某个特定方向的导数为0, 我们固定任意的点  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  并定义

$$z(s) \triangleq u(x + sb, t + s) (s \in \mathbb{R}),$$

以下都记  $\frac{d}{ds} = ;$  利用方程(2.1)计算得到  $\dot{z}(s) = Du(x + sb, t + s)b + u_t(x + sb, t + s) = 0$ . 因此  $z(\cdot)$  是关于  $s$  的常数, 所以对每个点  $(x, t)$ ,  $u$  在穿过  $(x, t)$  且方向是  $(b, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$  的直线上是个常数. 因此, 如果我们知道了在这样的直线上任意一个点的  $u$  值, 我们就知道了  $u(x, t)$  在这条直线上其余点的  $u$  值.

#### 2.1.1 初值问题

为了确定所需要的解, 考虑如下初值问题

$$\begin{cases} u_t + b \cdot D_u = 0, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g, \text{ 在 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (2.2)$$

这里  $b \in \mathbb{R}^n, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  给定, 问题是求出  $u$  的表达式.

给定了上述  $(x, t)$ , 穿过  $(x, t)$  且方向为  $(b, 1)$  的直线可以用参数方程  $(x + sb, t + s) (s \in \mathbb{R})$  表示, 当  $s = -t$  时, 这条直线打在平面  $\Gamma := \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$  上, 且交点是  $(x - tb, 0)$ . 由于  $u$  是直线上的常数, 且  $u(x - tb, 0) = g(x - tb)$ , 因此可得

$$u(x, t) = g(x - tb), x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0. \quad (2.3)$$

因此如果方程(2.2)有足够好的解  $u$ , 则这个解一定形如(2.3). 另一方面, 容易判断如果  $g \in C^1$ , 则式(2.3)满足方程(2.2).

注: 如果  $g \notin C^1$ , 显然方程(2.2)没有  $C^1$  解, 则这个解叫做弱解. 有时候不光滑甚至是不连续的函数都可以作为PDE的一个解. 这个以后再说.

#### 2.1.2 非齐次问题

下面考虑非齐次方程

$$\begin{cases} u_t + b \cdot D_u = f, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g, \text{ 在 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (2.4)$$

与前面类似, 固定  $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , 记  $z(s) \triangleq u(x + sb, t + s), s \in \mathbb{R}$ , 则

$$\dot{z}(s) = Du(x + sb, t + s) \cdot b + u_t(x + sb, t + s) = f(x + sb, t + s).$$

因此

$$\begin{aligned} u(x, t) - g(x - tb) &= z(0) - z(-t) = \int_{-t}^0 \dot{z}(s) ds \\ &= \int_{-t}^0 f(x + sb, t + s) ds = \int_0^t f(x + (s - t)b, s) ds. \end{aligned}$$

因此

$$u(x, t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (s - t)b, s) ds, x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \quad (2.5)$$

是初值问题(2.4)的解. 将来会运用这个方程去解一维的波动方程.

**注:** 注意到我们实际上是通过有效地把PDE转变成ODE最终得到PDE的解. 这些步骤是“特征线法”的一种特例, 以后可能会介绍.

## § 2.2 Laplace方程

记  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, u = u(x), \Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$ .

Laplace方程又称为“位势方程”. Laplace方程是

$$\Delta u = 0, \quad (2.6)$$

Poisson方程是

$$-\Delta u = f. \quad (2.7)$$

在上面两个方程中,  $x \in U$ , 且未知量为  $u: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}, u = u(x)$ , 这里  $U \subset \mathbb{R}^n$  是开集. 而在第二个方程中  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  也是给定的.

**定义 2.2.1** (调和函数) 满足  $\Delta u = 0$  的函数  $u$  称作调和函数.

### 2.2.1 基本解

基本解(fundamental solution)的来源: 研究PDE的一个好的方式是去找某个特解. 由于这个PDE是线性的, 所以可以用特解去找更复杂的解. 此外, 为了寻找显然的特解, 通常会把注意力集中在某类具有对称性的函数.

**定理 2.2.1** Laplace方程  $\Delta u = 0$  是旋转不变量(rotation invariant), 即如果  $O$  是正交的  $n$  阶方阵, 定义  $v(x) \triangleq u(Ox) (x \in \mathbb{R}^n)$ , 则  $\Delta v = 0$ .

**证明:** 设  $O = (o_{ij})_{n \times n}$ , 则

$$\begin{aligned} D_i v(x) &= \sum_{k=1}^n D_k u(Ox) o_{ki}, \\ D_{ij} v(x) &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n D_{kl} u(Ox) o_{ki} o_{lj}. \end{aligned}$$

由于  $O$  正交, 则  $OO^T = I$ , 对  $k, l = 1, \dots, n$ , 有

$$\sum_{i=1}^n o_{ki} o_{li} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n D_{kl} u(Ox) o_{ki} o_{li} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n D_{kl} u(Ox) \left( \sum_{i=1}^n o_{ki} o_{li} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n D_{kl} u(Ox) \delta_{kl} = \Delta u(Ox) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

由于Laplace方程作旋转以后是不变的, 因此我们似乎可以先去找“放射状(radial)”的函数, 也就是 $r = |x|$ . 首先尝试在 $U = \mathbb{R}^n$ 中找到Laplace方程(2.6)的一个解 $u$ , 具有形式 $u(x) = v(r)$ , 这里 $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ , 且选择 $v$ (如果这样的 $v$ 存在)使得 $\Delta u = 0$ 满足. 首先注意到对于 $i = 1, 2, \dots, n$ , 有

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} 2x_i = \frac{x_i}{r} (x \neq 0),$$

因此(自己验证)

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, \\ u_{x_i x_i} &= v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left( \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right), i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

因此

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

因此 $\Delta u = 0$ 当且仅当

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0. \quad (2.8)$$

下面来解这个ODE: 如果 $v' \neq 0$ , 则 $\ln(|v'|)' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r}$ , 因此存在常数 $a$ 使得 $v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$ , 因此如果 $r > 0$ , 我们有

$$v(r) = \begin{cases} b \ln r + c, & n = 2 \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c, & n \geq 3. \end{cases}$$

这里 $b, c$ 均为常数. 上述观察可启发我们定义如下:

### 定义 2.2.2 (基本解) 函数

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0)$$

叫做Laplace方程的**基本解**, 这里

$$\alpha(n) = \mathbb{R}^n \text{ 中单位球的体积} = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

以后我们有时候为了方便, 记 $\Phi(x) := \Phi(|x|)$ 来强调基本解是放射状的. 另外, 注意我们有如下估计:

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}, |D^2\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}, (x \neq 0), \text{ for some } C > 0. \quad (2.9)$$

下面看Poisson方程. 设函数 $\Phi(x)$ 在 $x \neq 0$ 是调和的. 如果我们把原点移动到新的点 $y$ , 则PDE(2.6)保持不变, 且函数 $x \mapsto \Phi(x-y)$ 也是关于 $x(\neq y)$ 的调和函数. 对于 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 并注意到关于 $x$ 的映射 $x \mapsto \Phi(x-y)f(y)(x \neq y)$ 对任意的点 $y \in \mathbb{R}^n$ 都是调和的, 因此对于有限个不同的 $y$ 构成这样的表达式之和也是调和的.

上面的推断可能能够认为卷积式

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|) f(y) dy, & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy, & n \geq 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.10)$$

可以用来解决Laplace方程(2.6), 但**这是错的**. 根据估计式(2.9),  $D^2\Phi(x-y)$ 在奇点 $y=x$ 附近不可积, 故上面那么naive的求积式是不正确的, 我们在计算 $\Delta u$ 的时候需要更小心一点.

为了简单起见, 假设 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ , 即 $f$ 在紧支集上二次连续可微.

**定义 2.2.3 (单位法向量场)** 如果 $\partial U \in C^1$ , 则沿着 $\partial U$ 可以定义一个单位外法向量场

$$\nu = (\nu^1, \dots, \nu^n).$$

在任意的点 $x^0 \in \partial U$ 的单位法向量(unit normal) 是 $\nu(x_0) = \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ .

**定义 2.2.4** 让 $u \in C^1(\bar{U})$ , 称 $\frac{\partial u}{\partial \nu} \triangleq \nu \cdot Du$  为 $u$ 的**法向导数**.

**定理 2.2.2 (解Poisson方程)** 记 $u$ 是式(2.10), 则 $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ , 且 $-\Delta u = f, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

注: 式(2.10)可以用来解Poisson方程(2.7).

证明: 根据

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y)dy. \quad (2.11)$$

则

$$\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \left[ \frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \right] dy.$$

这里 $h \neq 0, e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , 这里1是第 $i$ 个分量. 然而

$$\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \rightarrow f_{x_i}(x-y).$$

上式在 $\mathbb{R}^n$ 中当 $h \rightarrow 0$ 时一致收敛, 因此有

$$\begin{aligned} u_{x_i}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f_{x_i}(x-y)dy, i = 1, 2, \dots, n. \\ u_{x_i x_j}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f_{x_i x_j}(x-y)dy, i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

这个表达式的右边关于 $x$ 是连续的, 故 $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ .

由于 $\Phi$ 在0处的值趋于无穷大(blow up at 0), 所以需要一些计算来处理0这个极点(用以0为中心的小球), 固定 $\varepsilon > 0$ , 则

$$\Delta u(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)dy + \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)dy \triangleq I_\varepsilon + J_\varepsilon. \quad (2.12)$$

由于(极坐标换元)

$$|I_\varepsilon| \leq C\|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|dy \leq \begin{cases} C(\varepsilon|\ln \varepsilon| + \varepsilon), & n = 2, \\ C\varepsilon^2, & n \geq 3. \end{cases}$$

这里 $\|u\|_{L^\infty(U)} = \text{ess sup}_U |u|$ 表示**本性上确界**(复习实变), 利用分部积分公式,

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_y f(x-y)dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} D\Phi(y) \cdot D_y f(x-y)dy + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y)dS(y) \triangleq K_\varepsilon + L_\varepsilon. \end{aligned}$$

这里 $\nu$ 是沿着 $\partial B(0, \varepsilon)$ 的指向球【内】的单位法向量. 马上可以验证

$$|L_\varepsilon| \leq \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|dS(y) \leq \begin{cases} C\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|, & n = 2, \\ C\varepsilon^2, & n \geq 3. \end{cases}$$

继续对 $K_\varepsilon$ 作分部积分, 注意到

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n - B(0, \varepsilon)} \Delta \Phi(y) f(x - y) dy - \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x - y) dS(y) \\ &= - \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x - y) dS(y). \end{aligned}$$

这里用到了 $\Phi$ 是定义域不含原点的调和函数的条件( $\Delta \Phi = 0$ ). 由于 $D\Phi(y) = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y}{|y|^n} (y \neq 0)$ , 且 $\nu = \frac{-y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon} (y \in \partial B(0, \varepsilon))$ , 则 $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) = \nu \cdot D\Phi(y) = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}, y \in \partial B(0, \varepsilon)$ . 由于 $n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}$ 是球面 $\partial B(0, \varepsilon)$ 的表面积, 则

$$K_\varepsilon = -\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} f(x - y) dS(y) = -\oint_{\partial B(x, \varepsilon)} f(y) dS(y) \rightarrow -f(x), \varepsilon \rightarrow 0.$$

结合前面的估计式,  $-\Delta u(x) = f(x)$ . □

### 2.2.2 调和函数的性质

下面考虑开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ , 并设 $u$ 是 $U$ 中调和函数. 我们下面要推出很重要的**平均值性质**, 它表明 $u(x)$ 的值等于 $u$ 在球面 $\partial B(x, r)$ 的积分(再除以球的表面积), 也等于 $u$ 在整个球 $B(x, r)$ 的积分(再除以球的体积). 这里 $B(x, r) \subset U$ . 这个公式可以推出很多定理.

**注:**  $\alpha(n) = \mathbb{R}^n$ 中单位球的体积  $= \frac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$ .  $n\alpha(n) = \mathbb{R}^n$ 中单位球的表面积.

**定理 2.2.3 (平均值性质)** 如果 $u \in C^2(U)$ 调和, 则

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u dS = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x, r)} u dy \quad (2.13)$$

对任意的球 $B(x, r) \subset U$ 成立.

**证明:** (1)记

$$\phi(r) \triangleq \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz) dS(z).$$

则

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0, 1)} Du(x + rz) \cdot z dS(z) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} Du(y) \cdot \frac{y - x}{r} dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS(y) \text{ (看上面定义)} \\ &= \frac{r}{n\alpha(n)r^n} \int_{B(x, r)} \Delta u(y) dy \text{ (Green公式)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此 $\phi \equiv$ 常数, 从而

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int_{\partial B(x, t)} u(y) dS(y) = u(x).$$

(2)注意到用极坐标变换(直观上看, 一层层的薄球壳拼起来可以变成一个实心球), 以及(1)中的结论可得

$$\int_{B(x, r)} u(y) dy = \int_0^r \left( \int_{\partial B(x, s)} u dS \right) ds = u(x) \int_0^r n\alpha(n)s^{n-1} ds = \alpha(n)r^n u(x).$$

□

**定理 2.2.4 (平均值性质逆定理)** 如果  $u \in C^2(U)$  满足

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u dS, \forall B(x,r) \subset U,$$

则  $u$  是调和函数.

**证明:** 如果  $\Delta u$  不恒为0, 则存在某个球  $B(x,r) \subset U$  使得(不妨设)  $\Delta u > 0$  在  $B(x,r)$  内成立, 则对于前一题的  $\phi$ , 有

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \Delta u(y) dy > 0,$$

推出矛盾. □

下面介绍调和函数的一些有趣推论, 它们都基于平均值性质. 下设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是有界开集.

**定理 2.2.5 (极值原理(maximum principle))** 设  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  是  $U$  中调和函数, (1)则

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u.$$

(2)另外, 如果  $U$  连通且存在一个点  $x_0 \in U$  使得  $u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$ , 则  $u$  是  $U$  中的常函数.

**证明:** 假设存在点  $x_0 \in U$  满足  $u(x_0) = M \triangleq \max_{\bar{U}} u$ , 则对于  $0 < r < \text{dist}(x_0, \partial U)$ , 根据平均值性质有

$$M = u(x_0) = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0,r)} u dy \leq M.$$

不等式成立当且仅当在  $B(x_0,r)$  内有  $u \equiv M$ , 因此  $u(y) = M, \forall y \in B(x_0,r)$ . 因此集合  $S = \{x \in U : u(x) = M\}$  是  $U$  中的开集也是相对于  $U$  的闭集(relatively closed in  $U$ ), 从而  $U \setminus S$  也相对于  $U$  既开又闭, 它只能是空集(否则  $U = S \cup (U \setminus S)$  不连通), 因此(2)证完, (1)也证完. □

参考: <https://math.stackexchange.com/questions/114848/what-does-relatively-closed-mean>

**定理 2.2.6 (边界问题的Poisson方程解的唯一性)** 设  $g \in C(\partial U), f \in C(U)$ , 则边界问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in U \\ u = g, & x \in \partial U. \end{cases} \quad (2.14)$$

存在至多一个解  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ .

**证明:** 如果  $u, v$  都满足式(2.14), 则  $w = \pm(u - v)$  是调和函数, 且在边界上为0, 根据最大值原理,  $w \equiv 0, \forall x \in \bar{U}$ . 因此解是唯一的. □

下面我们证调和函数的光滑性: 即调和函数无穷次可微. 先引入个定义. 记  $U \subset \mathbb{R}^n$  是开集,  $\varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon \triangleq \{x \in U : \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\},$$

定义  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  为磨光子.(见“光滑函数逼近”一节)

**定理 2.2.7 (光滑性)** 如果  $u \in C(U)$  在任意的球  $B(x,r) \subset U$  内都满足平均值性质(2.13)式, 则  $u \in C^\infty(U)$ .

**证明:** 设  $\eta$  是磨光子, 它是放射状的函数, 记  $u^\varepsilon \triangleq \eta_\varepsilon * u$  定义在  $U_\varepsilon$  上, 则  $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ . 下面我们通过证

明  $u \equiv u^\varepsilon, (x \in U_\varepsilon)$  来说明  $u$  是光滑的. 如果  $x \in U_\varepsilon$ , 则

$$\begin{aligned}
 u^\varepsilon(x) &= \int_U \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \text{ (卷积符号*的定义)} \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)dy \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left( \int_{\partial B(x,r)} u dS \right) dr \text{ (极坐标变换公式)} \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^n} u(x) \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) n\alpha(n)r^{n-1}dr \text{ (平均值性质)} \\
 &= u(x) \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon dy = u(x) \int_{B(0,\varepsilon)} dy = u(x).
 \end{aligned}$$

因此  $u^\varepsilon \equiv u$  于  $U_\varepsilon$  内成立, 则  $u \in C^\infty(U_\varepsilon), \forall \varepsilon > 0$ . □

### 2.2.3 调和函数的局部估计

利用平均值性质可以推出许多关于调和函数的不等式, 这些估计式可以推出调和函数的解析性.

**定理 2.2.8 (导数估计)** 设  $u$  是  $U$  中调和函数, 则

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

对于任意的球  $B(x_0, r) \subset U$  与任意的多重指标  $\alpha, |\alpha| = k$  都成立, 这里  $C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}, C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)}, k \in \mathbb{N}^+$ .

**证明:** (1) 下面看  $k = 0, 1$  的情况: 对 Laplace 方程两端求偏导数, 可知  $u_{x_i}$  也是调和的, 因此

$$\begin{aligned}
 |u_{x_i}(x_0)| &= \left| \frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^n} \int_{B(x_0, \frac{r}{2})} u_{x_i} dx \right| = \left| \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \int_{\partial B(x_0, \frac{r}{2})} u \nu_i dS \right| \text{ (Green公式)} \\
 &\leq \frac{2^n}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r/2))}.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

如果  $x \in \partial B(x_0, \frac{r}{2})$ , 则  $B(x, \frac{r}{2}) \subset B(x_0, r) \subset U$ , 因此  $k = 0$  的情况成立, 即

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}.$$

结合  $k = 0$  的情况与前面对  $|u_{x_i}(x_0)|$  的估计, 当  $|\alpha| = 1$  时立即可得

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}.$$

(2) 下面看  $k \geq 2$  的情况: 用归纳法, 假设定理中的两条式子对于多重指标  $\leq k-1$  的情况都成立, 固定  $B(x_0, r) \subset U$ , 并让多重指标  $|\alpha| = k$ , 则  $D^\alpha u = (D^\beta u)_{x_i}$ , for some  $i \in \{1, \dots, n\}, |\beta| = k-1$ . 用类似于式(2.15)的计算, 有

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{nk}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, \frac{r}{k}))}.$$

如果  $x \in \partial B(x_0, \frac{r}{k})$ , 则  $B(x, \frac{k-1}{k}r) \subset B(x_0, r) \subset U$ . 因此利用定理式子的归纳假设有

$$|D^\beta u(x)| \leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n) \left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}.$$



结合这两个不等式可得

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}.$$

因此 $|\alpha| = k$ 的情况证完.  $\square$

**定理 2.2.9 (Liouville)** 设 $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界调和函数, 则 $u$ 是常数.

**证明:** 固定 $x_0 \in \mathbb{R}^n, r > 0$ , 则根据前面对调和函数的导数的估计式,

$$\begin{aligned} |Du(x_0)| &\leq \frac{\sqrt{n}C_1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))} \\ &= \frac{\sqrt{n}C_1}{r^{n+1}} \int_{B(x_0, r)} |u(x)| dx \\ &\leq \frac{\sqrt{n}C_1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(x_0, r)} dx \\ &= \frac{\sqrt{n}C_1 \alpha(n)}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

因此 $Du \equiv 0, u \equiv \text{常数}$ .  $\square$

**定理 2.2.10 (表示公式)** 记 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n), n \geq 3$ , 则Poisson方程 $-\Delta u = f, x \in \mathbb{R}^n$ 的有界解都形如

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy + C(x \in \mathbb{R}^n), \text{对某个常数} C.$$

**证明:** 由于 $\Phi(x) \rightarrow 0, (|x| \rightarrow \infty), \forall n \geq 3$ , 则 $\tilde{u}(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy$ 是Poisson方程在 $\mathbb{R}^n$ 中的有界解. 如果 $u$ 是另外一个解, 则根据Liouville定理,  $w = u - \tilde{u}$ 是个常数.  $\square$

**注:** 如果 $n = 2$ , 则 $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x|$ 在 $|x| \rightarrow \infty$ 处无界,  $\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y)f(y)dy$ 也可能无界.

利用前面的定理, 我们可以证明调和函数的解析性.

**定义 2.2.5 (解析)** 函数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 称作在 $x_0$ 附近(实)解析, 如果存在 $r > 0$ 和一系列常数 $\{f_\alpha\}$ , 满足

$$f(x) = \sum_{\alpha} f_\alpha (x - x_0)^\alpha, (|x - x_0| < r),$$

这个求和表示对所有多重指标 $\alpha$ 进行求和.

**注:** 若 $f$ 在 $x_0$ 附近解析, 则在 $x_0$ 附近有 $f \in C^\infty$  (可以写成级数形式).

**定理 2.2.11 (解析性)** 设 $u$ 是 $U$ 中调和函数, 则 $u$ 是 $U$ 中的解析函数.

**证明:** 固定点 $x_0 \in U$ , 我们现在要证 $u$ 可以被一个 $x_0$ 邻域内的收敛级数来表示. 记 $r = \frac{1}{4} \text{dist}(x_0, \partial U)$ , 则 $M \triangleq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \|u\|_{L^1(B(x_0, 2r))} < \infty$ . 对任意 $x \in B(x_0, r)$ , 由于 $B(x, r) \subset B(x_0, 2r) \subset U$ , 则根据前面的导数估计式,

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B(x_0, r))} \leq M \left( \frac{2^{n+1}n}{r} \right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}.$$

根据 $e^x$ 的Taylor展开式, 不难验证

$$|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|} |\alpha|!, \forall \text{多重指标} \alpha.$$

根据多项式展开,

$$n^k = (1 + \cdots + 1)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$$

从而 $|\alpha|! \leq n^{|\alpha|}\alpha!$ . 结合两个不等式有

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B(x_0, r))} \leq CM \left( \frac{2^{n+1}n^2e}{r} \right)^{|\alpha|} \alpha!.$$

下面我们证 $u$ 的Taylor级数收敛, 只需证余项收敛于0. 取 $|x - x_0| < \frac{r}{2^{n+2}n^3e}$ , 则余项为

$$\begin{aligned} R_N(x) &= u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \\ &= \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}, \exists t = t(x) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\leq CM \sum_{|\alpha|=N} \left( \frac{2^{n+1}n^2e}{r} \right)^N \left( \frac{r}{2^{n+2}n^3e} \right)^N \\ &\leq CM n^N \frac{1}{2^N n^N} = \frac{CM}{2^N} \rightarrow 0, (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

因此定义在 $U$ 的调和函数 $u$ 的Taylor级数处处收敛. □

下面看Harnack不等式, 记 $V \subset\subset U$ 表示 $V \subset \bar{V} \subset U$ 且 $\bar{V}$ 是紧集.

**定理 2.2.12 (Harnack不等式)** 对每个连通开集 $V \subset\subset U$ , 存在一个正的常数 $C$ (只依赖于 $V$ 的选取), 使得

$$\sup_V u \leq C \inf_V u,$$

不等式对于任意定义在 $U$ 上的非负调和函数 $u$ 成立.

**注:** 特别地,  $\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y), \forall x, y \in V$ , 这个不等式断言 $V$ 里面的非负调和函数值是可以比较的, 在 $V$ 中任意点 $x$ ,  $u(x)$ 不可以太小或者太大, 除非 $u$ 本身在 $V$ 中非常小(或者非常大). 直观来看, 由于 $V$ 离 $\partial U$ 有一定的距离, 则有“一定的位置来产生Laplace方程的平均值效应”.

**证明:** 记 $r = \frac{1}{4}\text{dist}(V, \partial U)$ , 选 $x, y \in V$ 使得 $|x - y| \leq r$ , 则

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n} \int_{B(x, 2r)} u(z) dz (\text{平均值性质}) \\ &\geq \frac{1}{2^n \alpha(n) r^n} \int_{B(y, r)} u(z) dz (u \text{非负, 缩小积分区域}) \\ &= \frac{1}{2^n} u(y) (\text{平均值性质}). \end{aligned}$$

因此 $2^n u(y) \geq u(x) \geq \frac{1}{2^n} u(y), x, y \in V, |x - y| \leq r$ .

由于 $V$ 连通且 $\bar{V}$ 紧, 则可以用有限的一列球 $\{B_i\}_{i=1}^N$ 来覆盖 $\bar{V}$ , 且每个球的半径是 $\frac{r}{2}, B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset, \forall i = 2, \dots, N$ . 因此

$$u(x) \geq \frac{1}{2^{n(N+1)}} u(y), \forall x, y \in V.$$

证明完成. □

## 2.2.4 Green函数

下面设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, 且 $\partial U \in C^1$ (有连续可微的边界). 下面我们要得到一个通用的表示公式来解Poisson方程 $-\Delta u = f, (x \in U)$ , 并且满足边界条件 $u = g, (x \in \partial U)$ .

设 $u \in C^2(U)$ 是任一函数, 固定 $x \in U$ , 选择足够小的 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon) \subset U$ , 并且在区域 $V_\varepsilon \triangleq U - B(x, \varepsilon)$ 对

函数 $u(y)$ 与 $\Phi(y-x)$ 使用Green公式,

$$\begin{aligned} & \int_{V_\varepsilon} u(y) \Delta \Phi(y-x) - \Phi(y-x) \Delta u(y) dy \\ &= \int_{\partial V_\varepsilon} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y), \end{aligned}$$

这里 $\nu$ 是 $\partial V_\varepsilon$ 的单位外法向量. 回顾 $\Delta \Phi(x-y) = 0, (x \neq y)$ , 并注意到

$$\left| \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y) \right| \leq C \varepsilon^{n-1} \max_{\partial B(0, \varepsilon)} |\Phi| = o(1), (\varepsilon \rightarrow 0).$$

另外, 由于 $D\Phi(y) = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y}{|y|^n} (y \neq 0)$ , 且 $\nu = \frac{-y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon} (y \in \partial B(0, \varepsilon))$ , 则根据法向导数的定义,  $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) = \nu \cdot D\Phi(y) = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}, y \in \partial B(0, \varepsilon)$ . 由于 $n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}$ 是球面 $\partial B(0, \varepsilon)$ 的表面积, 则

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B(x, \varepsilon)} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} u(y) dS(y) \\ &\rightarrow u(x) (\varepsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$

因此对前面所有式子让 $\varepsilon \rightarrow 0$ , 有

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial U} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) dS(y) \\ &\quad - \int_U \Phi(y-x) \Delta u(y) dy, \forall x \in U, \forall u \in C^2(\bar{U}). \end{aligned}$$

根据这个式子, 如果我们知道了在 $U$ 内 $\Delta u$ 的值以及在边界 $\partial U$ 上的 $u, \partial u/\partial \nu$ 的值, 我们就能解出 $u(x)$ 了. 但是, 只是给定了 $u$ 的边界值的Poisson方程, 并不知道沿着边界的 $\partial u/\partial \nu$ 的值. 因此上式需要做一些调整, 把 $\partial u/\partial \nu$ 消掉.

下面固定 $x$ , 引入corrector function  $\phi^x = \phi^x(y)$ , 满足下面的固定边界的条件

$$\begin{cases} \Delta \phi^x = 0, & \text{in } U \\ \phi^x = \Phi(y-x), & \text{on } \partial U. \end{cases}$$

再次用Green公式,

$$\begin{aligned} - \int_U \phi^x(y) \Delta u(y) dy &= \int_{\partial U} u(y) \frac{\partial \phi^x}{\partial \nu}(y) - \phi^x(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y) \\ &= \int_{\partial U} u(y) \frac{\partial \phi^x}{\partial \nu}(y) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y). \end{aligned}$$

**定义 2.2.6** 区域 $U$ 上的Green函数为 $G(x, y) \triangleq \Phi(y-x) - \phi^x(y), x, y \in U, x \neq y$ .

根据我们前面的推导可知

$$u(x) = - \int_{\partial U} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(y) - \int_U G(x, y) \Delta u(y) dy (x \in U), \quad (2.16)$$

这里 $\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = D_y G(x, y) \cdot \bar{\nu}(y)$ 是 $G$ 关于变量 $y$ 的单位外法向量. 在这条式子中, 没有出现 $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ , 这就是我们引入 $\phi^x$ 的目的.

下面假设  $u \in C^2(\bar{U})$  是下面方程的解:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } U, \\ u = g, & \text{on } \partial U, \end{cases}$$

这里函数  $f, g$  是给定的. 结合式(2.16), 得如下定理.

**定理 2.2.13 (用Green函数的表示公式)** 如果  $u \in C^2(\bar{U})$  是方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } U, \\ u = g, & \text{on } \partial U, \end{cases}$$

的解, 则

$$u(x) = - \int_{\partial U} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(y) + \int_U f(y) G(x, y) dy, (x \in U).$$

给定区域  $U$ , 如果可以构建Green函数  $G$ , 那么我们就有公式来解上面的方程了. 不过这是个非常复杂的事情, 只有当  $U$  是个简单的形状才能解出来.

固定  $x \in U$ , 把  $G$  看作  $y$  的函数, 则形式上可以写

$$\begin{cases} -\Delta G = \delta_x, & \text{in } U, \\ G = 0, & \text{on } \partial U, \end{cases}$$

这里  $\delta_x$  为Dirac函数.

**定理 2.2.14 (Green函数的对称性)** 对所有的  $x, y \in U, x \neq y$ , 我们有  $G(y, x) = G(x, y)$ .

**证明:** 固定  $x, y \in U, x \neq y$ , 记  $v(z) \triangleq G(x, z), w(z) \triangleq G(y, z), (z \in U)$ . 则  $\Delta v(z) = 0 (z \neq x), \Delta w(z) = 0 (z \neq y)$ , 且在边界  $\partial U$  上有  $w = v = 0$ . 对充分小的  $\varepsilon > 0$ , 在区域  $V \triangleq U - [B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon)]$  用Green公式得

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu} w - \frac{\partial w}{\partial \nu} v dS(z) = \int_{\partial B(y, \varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} w dS(z), \quad (2.17)$$

这里  $\nu$  是  $\partial B(x, \varepsilon) \cup \partial B(y, \varepsilon)$  的单位内法向量. 而  $w$  在点  $x$  附近光滑, 则

$$\left| \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \nu} v dS \right| \leq C \varepsilon^{n-1} \sup_{\partial B(x, \varepsilon)} |v| = o(1) (\varepsilon \rightarrow 0).$$

另一方面,  $v(z) = \Phi(z - x) - \phi^x(z)$ , 这里  $\phi^x$  在  $U$  内光滑, 则根据前面定理 “解Poisson方程” 的运算, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu} w dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x - z) w(z) dS = w(x).$$

则式(2.17)的左边收敛到  $w(x)(\varepsilon \rightarrow 0)$ . 同理右边收敛到  $v(y)$ , 因此  $G(y, x) = w(x) = v(y) = G(x, y)$ .  $\square$

接着我们介绍半空间以及球的Green函数, 我们在学复变函数的共形映射部分的时候, 恰好重点讲了上半平面以及单位球的共形映射, 原因无非是这样的形状非常 “好看”.

### 2.2.5 半空间的Green函数

半空间指  $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$ , 这是无界的, 所以在前面的计算不一定直接适用于这里, 所以尝试用以前的想法来构建Green函数. 然后我们再验证对应的表示公式是否成立.

**定义 2.2.7** 如果  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ , 则它关于  $\partial \mathbb{R}_+^n$  的reflection是点  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ .

下面我们解如下PDE:

$$\begin{cases} \Delta \phi^x = 0, & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ \phi^x = \Phi(y - x), & \text{on } \partial \mathbb{R}_+^n. \end{cases} \quad (2.18)$$

令

$$\phi^x(y) \triangleq \Phi(y - \tilde{x}) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n), x, y \in \mathbb{R}_+^n,$$

现在的想法是把奇点  $x \in \mathbb{R}_+^n$  reflect 到  $\tilde{x} \in \mathbb{R}_+^n$  中, 从而由  $\Phi$  来构造 corrector function  $\phi^x$ . 记  $\phi^x(y) = \Phi(y - x), y \in \partial \mathbb{R}_+^n$ , 则可得到PDE(2.18)

下面定义Green函数:

**定义 2.2.8** 半空间  $\mathbb{R}_+^n$  的 Green 函数定义为  $G(x, y) \triangleq \Phi(y - x) - \Phi(y - \tilde{x}), (x, y \in \mathbb{R}_+^n, x \neq y)$ .

则

$$\begin{aligned} G_{y_n}(x, y) &= \Phi_{y_n}(y - x) - \Phi_{y_n}(y - \tilde{x}) \\ &= \frac{-1}{n\alpha(n)} \left[ \frac{y_n - x_n}{|y - x|^n} - \frac{y_n + x_n}{|y - \tilde{x}|^n} \right]. \end{aligned}$$

于是如果  $y \in \partial \mathbb{R}_+^n$ , 则

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = \nu \cdot dG = -G_{y_n}(x, y) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^n}.$$

下面设  $u$  满足下面的边界上的初值问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \mathbb{R}_+^n, \\ u = g, & \text{on } \partial \mathbb{R}_+^n. \end{cases}$$

则根据定理2.2.13, 我们想要的结果是

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dy, x \in \mathbb{R}_+^n \quad (2.19)$$

来作为半空间的表示公式, 函数

$$K(x, y) \triangleq \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^n}, (x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \partial \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1})$$

是  $\mathbb{R}_+^n$  的 **Poisson核**, 式(2.19)是Poisson公式.

下面验证式(2.19)确实给我们提供了上面的边界上的初值问题的解.

**定理 2.2.15 (半空间的Poisson公式)** 设  $g \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ , 定义  $u$  为式(2.19), 则

- (1)  $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ ,
- (2)  $\Delta u = 0$ , in  $\mathbb{R}_+^n$ ,
- (3)  $\lim_{x \rightarrow x^0, x \in \mathbb{R}_+^n} u(x) = g(x^0), \forall x^0 \in \partial \mathbb{R}_+^n$ .

(这里  $L^\infty(U)$  表示在区域  $U$  内的本性上确界存在的函数, 可以理解为有界.)

**证明:** (1)(2) 固定  $x$ , 映射  $y \mapsto G(x, y)$  在除了  $y = x$  以外的地方调和, 由于  $G(x, y) = G(y, x)$ , 则  $x \mapsto G(x, y)$  在除了  $x = y$  以外的地方调和. 由于调和函数的偏导数仍然是调和的, 因此  $x \mapsto -\frac{\partial G}{\partial y_n}(x, y) = K(x, y)$  在  $x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \partial \mathbb{R}_+^n$  是调和的. 可以算得:

$$\int_{\partial \mathbb{R}_+^n} K(x, y) dy = 1, \forall x \in \mathbb{R}_+^n. (\text{不是这么好算})$$

由于  $g$  有界, 则  $u$  也有界. 由于  $x \mapsto K(x, y)$  在  $x \neq y$  处光滑, 容易验证  $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ , 且

$$\Delta u(x) = \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \Delta_x K(x, y) g(y) dy = 0, x \in \mathbb{R}_+^n.$$

- (3) 固定  $x^0 \in \partial \mathbb{R}_+^n, \varepsilon > 0$ , 选充分小的  $\delta > 0$  使得当  $|y - x^0| < \delta, y \in \partial \mathbb{R}_+^n$  时有

$$|g(y) - g(x^0)| < \varepsilon.$$

如果  $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}, x \in \mathbb{R}_+^n$ , 则

$$\begin{aligned} |u(x) - g(x^0)| &= \left| \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} K(x, y) [g(y) - g(x^0)] dy \right| \\ &\leq \int_{\partial \mathbb{R}_+^n \cap B(x^0, \delta)} K(x, y) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &\quad + \int_{\partial \mathbb{R}_+^n - B(x^0, \delta)} K(x, y) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &\triangleq I + J. \end{aligned}$$

容易验证

$$I \leq \varepsilon \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} K(x, y) dy = \varepsilon.$$

另一方面, 如果  $|x - x^0| \leq \frac{\delta}{2}, |y - x^0| \geq \delta$ , 则有

$$|y - x^0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0|.$$

因此  $|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x^0|$  (这个放缩是为了让会动的  $x$  变成固定的  $x^0$ ), 则

$$\begin{aligned} J &\leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\partial \mathbb{R}_+^n - B(x^0, \delta)} K(x, y) dy \\ &\leq \frac{2^{n+2}\|g\|_{L^\infty} x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial \mathbb{R}_+^n - B(x^0, \delta)} |y - x^0|^{-n} dy \\ &\rightarrow 0 (x_n \rightarrow 0^+). \end{aligned}$$

结合两个估计, 当  $|x - x^0|$  充分小时有  $|u(x) - g(x^0)| \leq 2\varepsilon$ . □

### 2.2.6 球上的Green函数

与半空间类似, 先考虑单位球的情况, 再作伸缩变换变成一般球的情况. 我们先通过球面  $\partial B(0, 1)$  定义一个 reflection.

**定义 2.2.9** 如果  $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ , 则  $\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$  称为  $x$  关于  $\partial B(0, 1)$  的对偶点 (dual point). 映射  $x \mapsto \tilde{x}$  叫通过单位球面  $\partial B(0, 1)$  的反演 (inversion).

下面我们用通过单位球面的反演映射来计算单位球  $U = B^0(0, 1)$  的Green函数. 首先要找一个 corrector function  $\phi^x = \phi^x(y)$  满足:

$$\begin{cases} \Delta \phi^x = 0, & \text{in } B^0(0, 1) \\ \phi^x = \Phi(y - x), & \text{on } \partial B^0(0, 1). \end{cases}$$

那么Green函数为  $G(x, y) = \Phi(y - x) - \phi^x(y)$ .

现在的想法是把奇点  $x \in B^0(0, 1)$  映为  $\tilde{x} \notin B(0, 1)$ . 下面设  $n \geq 3$ , 映射  $y \mapsto \Phi(y - \tilde{x})$  在  $y \neq \tilde{x}$  调和, 则  $y \mapsto |x|^{2-n}\Phi(y - \tilde{x})$  在  $y \neq \tilde{x}$  调和, 从而

$$\phi^x(y) \triangleq \Phi(|x|(y - \tilde{x}))$$

在  $U$  中调和. 另外, 如果  $y \in \partial B(0, 1), x \neq 0$ , 则

$$\begin{aligned} |x|^2|y - \tilde{x}|^2 &= |x|^2 \left( |y|^2 - \frac{2y \cdot x}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} \right) \\ &= |x|^2 - 2y \cdot x + 1 = |x - y|^2. \end{aligned}$$

则 $(|x||y - \tilde{x}|)^{-(n-2)} = |x - y|^{-(n-2)}$ , 则

$$\phi^x(y) = \Phi(y - x), y \in \partial B(0, 1).$$

满足corrector function的定义.

**定义 2.2.10** 单位球的Green函数是 $G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(|x|(y - \tilde{x}))$ ,  $x, y \in B(0, 1), x \neq y$ . 这个公式对 $n = 2$ 也成立.

下面假设 $u$ 是下面边界上初值问题的解:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } B^0(0, 1), \\ u = g, & \text{on } \partial B(0, 1). \end{cases}$$

根据定理2.2.13,

$$u(x) = - \int_{\partial B(0, 1)} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(y).$$

由上面的定义,

$$G_{y_i}(x, y) = \Phi_{y_i}(y - x) - \Phi(|x|(y - \tilde{x}))_{y_i}$$

但是

$$\Phi_{y_i}(y - x) = \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n},$$

且当 $y \in \partial B(0, 1)$ 时有

$$\Phi(|x|(y - \tilde{x}))_{y_i} = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y_i|x|^2 - x_i}{(|x||y - \tilde{x}|)^n} = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{y_i|x|^2 - x_i}{|x - y|^n},$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) &= \sum_{i=1}^n y_i G_{y_i}(x, y) \\ &= -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^n} \sum_{i=1}^n y_i ((y_i - x_i) - y_i|x|^2 + x_i) \\ &= -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n}. \end{aligned}$$

则表示公式可以化为

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_{\partial B(0, 1)} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(y) \\ &= \frac{1 - |x|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0, 1)} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dS(y). \end{aligned}$$

下面可以把单位球推广到普通球. 设 $u$ 是下面的边界上初值问题的解:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } B^0(0, r), \\ u = g, & \text{on } \partial B(0, r). \end{cases}, r > 0.$$

则作变换 $\tilde{u}(x) = u(rx)$ 可以变成单位球的情形, 相应地 $\tilde{g}(x) = g(rx)$ . 从而有球 $B(0, r)$ 情形的Poisson公式

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(0, r)} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dS(y), x \in B^0(0, r). \quad (2.20)$$

函数

$$K(x, y) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \frac{1}{|x - y|^n}, x \in B^0(0, r), y \in \partial B(0, r)$$

是球 $B(0, r)$ 情形的Poisson核.

**定理 2.2.16 (球上的Poisson公式)** 假设 $g \in C(\partial B(0, r))$ , 定义 $u$ 如式(2.20). 则

$$(1) u \in C^\infty(B^0(0, r)),$$

$$(2) \Delta u = 0, \text{ in } B^0(0, r),$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x^0, x \in B^0(0, r)} u(x) = g(x^0), \forall x^0 \in \partial B(0, r).$$

证明与上半空间情形类似.



## ◆习题 1

1. 设  $K(x, y) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^n}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in \partial\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1}$ .  $dy = dy_1 \cdots dy_{n-1}$ . 证明:

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(x, y) dy = 1, \forall x \in \mathbb{R}_+^n.$$

2. (Evans 2.5题)如果在U内有  $-\Delta v \leq 0$ , 则称  $v \in C^2(\bar{U})$  是次调和(subharmonic)的.

(a)证明: 次调和函数  $v$  满足  $v(x) \leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} v(y) dy, \forall B(x, r) \subset U$ .

(b)证明:  $\max_{\bar{U}} v = \max_{\partial U} v$ .

(c)让  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  光滑凸, 设  $u$  调和且  $v \triangleq \phi(u)$ , 证明  $v$  次调和.

(d)当  $u$  调和时, 证明:  $v \triangleq |Du|^2$  次调和.

3. (Evans 2.6题)设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是有界开集, 证明存在常数  $C$  (只依赖于  $U$  的选取), 使得对任意的

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } U, \\ u = g, & \text{on } \partial U \end{cases}$$

的光滑解  $u$ , 都有

$$\max_{\bar{U}} |u| \leq C(\max_{\partial U} |g| + \max_{\bar{U}} |f|).$$

(提示:  $-\Delta \left( u + \frac{|x|^2}{2n} \lambda \right) \leq 0, \lambda \triangleq \max_{\bar{U}} |f|$ .)

4. (Evans 2.7题)用球上的Poisson公式证明: 当  $u \geq 0$  且在  $B^0(0, r)$  调和时, 有

$$r^{n-2} \frac{r - |x|}{(r + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq r^{n-2} \frac{r + |x|}{(r - |x|)^{n-1}} u(0).$$

这是Harnack不等式的显式形式.

5. (沙玛耶夫, 5.12题)设  $\bar{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + 2y^2 \leq 2\}$ ,  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ . 满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u = x + y, & \text{当 } x^2 + 2y^2 = 2. \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + (1 - x)u(x, y) = 0, & \text{当 } x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

其中  $\nu$  是单位内法向量(指向圆环内). 求  $\max_{\bar{\Omega}} |u(x, y)|$ .

6. (沙玛耶夫, 5.18题)对于方程  $u_{xx} + u_{yy} + u_x + u = 0$ , 在平面有界区域  $Q$  中, 如同Laplace方程那样形式的极值原理  $\max_{\bar{Q}} u = \max_{\partial Q} u$  不成立.

7. (沙玛耶夫, 5.24题)设函数  $u(x)$  充分光滑,  $x \in \mathbb{R}^n$  满足方程  $\Delta u = u(x)$ , 且  $|u(x)| \leq C, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , 证明:  $u \equiv 0$  于  $\mathbb{R}^n$ .

8. (沙玛耶夫, 5.19题)设  $u(x)$  是  $\mathbb{R}^3$  中的调和函数, 且

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(x) dx}{(1 + |x|)^3} < \infty.$$

证明:  $u(x) \equiv 0$ .

9. (Trudinger, 2.18题)设  $u$  在  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  内调和, 并设  $B(x_0, c) \subset \subset \Omega$ , 若  $a \leq b \leq c$  且  $b^2 = ac$ , 证明

$$\int_{|\omega|=1} u(x_0 + a\omega) u(x_0 + c\omega) d\omega = \int_{|\omega|=1} u^2(x_0 + b\omega) d\omega.$$

从而证明如果在一个邻域内恒为常数, 则  $u$  也是常数.

10. (沙玛耶夫, 5.21题) 设函数  $u(x)$  在球  $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$  内给定, 满足方程

$$\Delta u = \lambda u \quad (\lambda < 0 \text{ 为常数}),$$

且在半径为  $\delta$  的球  $B(0, \delta)$  内  $u(x) \equiv 0$ , 其中  $0 < \delta < 1$ ,  $\delta$  为常数. 证明在  $B(0, 1)$  内  $u \equiv 0$ .

11. (陈学长PDE补充题) 设  $u$  是  $\mathbb{R}^n$  中的调和函数,  $n \geq 3$ , 则下面的频率函数

$$F_n(r) := \frac{r^{2-n} \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx}{r^{1-n} \int_{\partial B_r} u^2 dS}$$

在  $(0, \infty)$  是非减的.

12. (Evans, 2.6题) 设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是有界开集. 证明存在常数  $C$  (只依赖于  $U$ ), 使得

$$\max_{\bar{U}} |u| \leq C \left( \max_{\partial U} |g| + \max_{\bar{U}} |f| \right)$$

其中  $u$  是下面 Poisson 问题的光滑解.

$$\begin{cases} -\Delta u = f, x \in U, \\ u = g, x \in \partial U. \end{cases}$$

提示: 记  $F = \max_{\bar{U}} |f|$ , 用  $-\Delta \left( u + \frac{|x|^2}{2n} F \right) \leq 0$  然后用极值原理.

13. (沙玛耶夫, 5.42题) 设  $u(x, y)$  是问题

$$\begin{cases} \Delta u = x^2 y, (x, y) \in B(0, 1), \\ u|_{\partial B(0, 1)} = 0. \end{cases}$$

的解. 求  $u(0, 0)$ .

14. (沙玛耶夫, 5.46题) 设  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$ . 考虑 Dirichlet 外问题

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, |x| > 1, \\ u|_{|x|=1} = 0. \end{cases}$$

记解为  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  且补充条件

$$\int_{|\xi-x|<1} |u(\xi)|^2 d\xi = o(1) (x \rightarrow +\infty).$$

证明解是唯一的. 若把上述条件改为

$$\int_{|\xi-x|<1} |u(\xi)|^2 d\xi = O(1) (x \rightarrow +\infty).$$

则解是不唯一的.

提示: 平均值性质、Dirichlet 外问题的唯一性. 对不唯一性, 考虑  $u(x) \equiv 0$  与  $u(x) = 1 - |x|^{-1} (|x| > 1)$ .

15. (沙玛耶夫, P122) 求

$$\inf_M \left\{ \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + 2u) dx + \int_{|x|=1} u^2 dS \right\},$$

其中  $\Omega = \{1 < |x| < 2\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $M = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{|x|=2} = 0\}$ .

注: 我的答案:  $-\Delta u = 1$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n} + u \Big|_{|x|=1} = 0$ ,  $u|_{|x|=2} = 0$ .

## 习题解答

1. 证明: 结合余面积公式, 最后化到

$$\int_{\partial \mathbb{R}_+^n} K(x, y) dy = \frac{2x_n(n-1)\alpha(n-1)}{n\alpha(n)} \int_0^\infty \frac{r^{n-2}}{(r^2 + x_n^2)^{n/2}} dr.$$

你还想算下去吗?

2. 证明: (a) 固定  $x$ , 记

$$\phi(r) \triangleq \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz) dS(z).$$

则

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \dots = \frac{r}{n\alpha(n)r^n} \int_{B(x, r)} \Delta u(y) dy \\ &\geq 0. \text{(省略号部分与“平均值性质”证明的步骤相同)} \end{aligned}$$

因此  $\phi$  在  $r > 0$  内单调不降, 从而

$$\phi(r) \geq \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, t)} u(y) dS(y) = u(x).$$

(b) 根据(a)得

$$\begin{aligned} v(x) &\leq \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x, r)} v(y) dy \\ &\leq \max_{\partial U} v \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x, r)} dy \\ &= \max_{\partial U} v, \forall B(x, r) \subset U, \end{aligned}$$

则  $\max_{\bar{U}} v \leq \max_{\partial U} v$ , 接下来的步骤与“极值原理”证明过程相同(考虑集合  $S = \{x \in U : u(x) = M\}$  与  $U \setminus S$  的关系).  $\square$

(c)  $\phi$  光滑凸, 则  $\phi'' \geq 0$ . 根据链式法则可得

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= u_{x_i} \phi'(u), \\ v_{x_i x_i} &= u_{x_i x_i} \phi'(u) + u_{x_i}^2 \phi''(u) \geq u_{x_i x_i} \phi'(u), \end{aligned}$$

则  $\Delta v \geq \Delta u \phi'(u) = 0$ , 即  $v$  次调和.

(d) 记  $Du = (u^1, \dots, u^n)$ , 则每个  $u^j$  都是调和的. 由于  $[(u^j)^2]_{x_i} = 2u^j u_{x_i}^j$ , 则由  $v = |Du|^2 = \sum_{j=1}^n (u^j)^2$  可知

$$v_{x_i} = 2 \sum_{j=1}^n u^j u_{x_i}^j, v_{x_i x_i} = 2 \sum_{j=1}^n (u_{x_i}^j)^2 + u^j u_{x_i x_i}^j,$$

则

$$\begin{aligned} \Delta v &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(u_{x_i}^j)^2 + u^j u_{x_i x_i}^j] \geq 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u^j u_{x_i x_i}^j \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u^j u_{x_i x_i}^j \text{ (有限求和可交换次序)} \\ &= 2 \sum_{j=1}^n u^j \Delta u^j = 0 \text{ (} u^j \text{ 调和)}. \end{aligned}$$

因此  $v$  是次调和的.  $\square$

3. 证明:  $-\Delta \left( u + \frac{|x|^2}{2n} \lambda \right) = f - \sum_{i=1}^n \frac{2}{2n} \lambda < 0$ , 则函数  $u + \frac{|x|^2}{2n}$  是次调和的, 根据前一例题, 记实数  $R \in (0, +\infty)$  满足  $U \subset B(0, R)$ , 则当  $B(x, r) \subset U$  时, 必有  $r \leq R, |x| \leq R$ , 当  $y \in B(x, r)$  时, 有  $|y| \leq |x| + r$ . 则  $\forall x \in \bar{U}$ ,

$$\begin{aligned} u(x) + \frac{|x|^2}{2n} \lambda &\leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} u(y) + \frac{|y|^2}{2n} \lambda dy \\ &\leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} u(y) dy + \frac{(|x|+r)^2}{2n} \lambda \\ &= \max_{\partial U} |g(y)| + \frac{(|x|+r)^2}{2n} \lambda, \forall x \in \bar{U}. \text{ (前一例题的性质(b))} \end{aligned}$$

移项可得

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \max_{\partial U} |g(y)| + \frac{2|x|r + r^2}{2n} \lambda \\ &\leq \max_{\partial U} |g(y)| + \frac{3R^2}{2n} \lambda, \forall x \in \bar{U}. \end{aligned}$$

取  $C = \max \left\{ 1, \frac{3R^2}{2n} \right\}$  即可. □

4. 证明: 设  $u(x) = g(x), x \in \partial B(0, r)$ , 则根据球的Poisson公式,

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS(y), x \in B^0(0, r).$$

从而

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{r}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(y)}{|y|^n} dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(0,r)} g(y) dS(y). \end{aligned}$$

注意到

$$r - |x| = |y| - |x| \leq |x - y| \leq |x| + |y| = |x| + r,$$

对  $u(x)$  作放缩即可得欲证不等式. □

5. 解: 由极值原理,  $u$  的最大值在边界达到. 因此需要求两个边界上的值. 一方面,

$$\max_{x^2+2y^2=2} |u(x, y)| = \max\{x + y | x^2 + 2y^2 = 2\} = \sqrt{3} \text{ (高中知识)}.$$

所以  $\max_{\bar{\Omega}} |u(x, y)| \geq \sqrt{3}$ .

另一方面, 设  $(x_0, y_0)$  满足  $x_0^2 + 2y_0^2 = 1$  且为  $u$  在  $\bar{\Omega}$  内的最大值, 由前面分析,  $u(x_0, y_0) \geq \sqrt{3} > 0$ . 由Hopf引理(边界点引理),  $\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$ . 由于  $(1 - x_0) \geq 0$ , 则由内环边界条件, 必有  $u(x_0, y_0) < 0$ , 与  $u(x_0, y_0) > \sqrt{3}$  矛盾. 因此满足  $x_0^2 + 2y_0^2 = 1$  的  $(x_0, y_0)$  不可能为最大值.  $\max_{\bar{\Omega}} |u(x, y)| = \sqrt{3}$ . □

6. 证明: 设  $Q = [0, \sqrt{2}\pi] \times [0, 2\pi]$ . 考虑

$$u(x, y) = e^{-x/2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \sin \frac{y}{2}.$$

它满足方程, 但在边界上,  $u(0, y) = u(x, 0) = u(\sqrt{2}\pi, y) = u(x, 2\pi) = 0$ , 在内部  $u\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \pi\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) > 0$ . □

7. 证明: 对任意的有界区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , 由强极值原理,  $u$  在  $\Omega$  内恒为常数. 而由  $\Omega$  的任意性,  $u$  在  $\mathbb{R}^n$  内恒为常数. 因此  $\Delta u = 0$ , 从而  $u = \Delta u \equiv 0$ . □

8. 证明:  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^3$ , 由极坐标公式,

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(x) dx}{(1+|x|)^3} \\
 &= \int_0^\infty \left( \int_{\partial B(x_0, r)} \frac{u^2(x)}{(1+|x|)^3} dS \right) dr \\
 &\geq \int_{|x_0|}^\infty \left( \int_{\partial B(x_0, r)} \frac{u^2(x)}{(1+|x|)^3} dS \right) dr \\
 &\geq \int_{|x_0|}^\infty \frac{1}{(1+r-|x_0|)^3} \left( \int_{\partial B(x_0, r)} u^2(x) dS \right) dr \quad (\text{可以画个草图}) \\
 &= \int_{|x_0|}^\infty \frac{1}{4\pi r^2(1+r-|x_0|)^3} \left( \int_{\partial B(x_0, r)} u^2(x) dS \right) \left( \int_{\partial B(x_0, r)} 1 dS \right) dr \\
 &\geq \int_{|x_0|}^\infty \frac{1}{4\pi r^2(1+r-|x_0|)^3} \left( \int_{\partial B(x_0, r)} u(x) dS \right)^2 dr \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\
 &= \int_{|x_0|}^\infty \frac{4\pi r^2}{(1+r-|x_0|)^3} u^2(x_0) dr \quad (\text{平均值性质}) \\
 &= \int_1^\infty \frac{4\pi(t+|x_0|-1)^2}{t^3} u^2(x_0) dt \quad (\text{换元 } t = 1+r-|x_0|)
 \end{aligned}$$

若  $u(x_0) \neq 0$ , 则上述积分是发散的, 与原积分  $< \infty$  矛盾. 因此必有  $u(x_0) = 0$ . 由  $x_0$  的任意性, 证完.  $\square$

注: 把3改成  $n$  也对.

9. 证明: 不妨设  $x_0 = 0$ . 对  $\phi(w) = u(aw)$ ,  $\psi(w) = u(cw)$  用散度定理, 得

$$\int_{|\omega|=1} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = 0.$$

所以(其中  $u_r$  表示  $\frac{\partial u}{\partial n}$ )

$$a \int_{|\omega|=1} u(cw) u_r(aw) dS = c \int_{|\omega|=1} c \int_B u(aw) u_r(cw) dS.$$

考虑  $I(a) = \int_{|\omega|=1} u(aw) u((b^2/a)w) dS$ , 则

$$I'(a) = \int_{|\omega|=1} \left( u_r(aw) u((b^2/a)w) - \frac{b^2}{a^2} u(aw) u_r((b^2/a)w) \right) = 0.$$

$\square$

注: 也是陈学长PDE补充题的4.4题.

10. 证明: 若  $u$  在  $B(0, 1)$  内达到非负最大值(即  $\max_{\overline{B(0,1)}} u \geq 0$ , 由强极值原理,  $u$  恒为常数, 而  $u|_{B(0,\delta)} = 0$ , 所以  $u \equiv 0$ .

因此不可能有  $u > 0$ . 同样, 对  $v = -u$  用强极值原理可知不可能有  $v > 0$ . 所以必有  $u \equiv 0$ .  $\square$

## § 2.3 热传导方程

下面看热传导方程(heat equation)

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (2.21)$$

以及非齐次热传导方程

$$u_t - \Delta u = f, \quad (2.22)$$

其中给定合适的初值与边界条件. 这里  $t > 0, x \in U \subset \mathbb{R}^n$  为开集. 不确定的东西是  $u: \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, u = u(x, t)$ , 而Laplace算子是关于空间  $x = (x_1, \dots, x_n)$  的, 即  $\Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$ . 在非齐次的方程中  $f: U \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  是给定的.

下面的主要思考原则是用调和函数(即位势方程的解)来类比热传导方程(只不过更加复杂), 所以一些思路是相似的.

### 2.3.1 基本解

解一个PDE的重要思路一般都是先搞一些特解. 注意到热传导方程包括时间分量  $t$  的一阶偏导数和关于空间分量  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的二阶偏导数. 因此, 如果  $u(x, t)$  是热传导方程(2.21)的解, 那  $u(\lambda x, \lambda^2 t), t \in \mathbb{R}$  也是. 因此比率  $\frac{r^2}{t} (r = |x|)$  对热传导方程来说非常重要, 从而我们需要寻找一个形如  $u(x, t) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) (t > 0, x \in \mathbb{R}^n)$  的解.

虽然上面的方法最终可以得到我们所需要的东西(见后面的例题), 但是如果考察形如

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right), x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \quad (2.23)$$

的解  $u$  可能会更快, 这里常数  $\alpha, \beta$ , 函数  $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是待定的. 容易知道, 上式等价于  $\forall \lambda > 0, x \in \mathbb{R}^n, t > 0$  都有

$$u(x, t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t),$$

让  $\lambda = t^{-1}$ , 则式(2.23)变成  $v(y) \triangleq u(y, 1)$ .

下面把式(2.23)代入热传导方程, 有

$$\alpha t^{-\alpha-1} v(y) + \beta t^{-\alpha-1} y \cdot Dv(y) + t^{-\alpha-2\beta} \Delta v(y) = 0,$$

这里  $y = t^{-\beta} x$ . 如果要把这个式子转化为只有  $y$ , 我们可以取  $\beta = \frac{1}{2}$ , 把  $t$  消去得

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot Dv(y) + \Delta v(y) = 0.$$

为了简化问题, 下面设  $v$  是放射状的, 即  $v(y) = w(|y|)$ , for some  $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 则上式变为

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0, r = |y|, ' = \frac{d}{dr}.$$

下面取  $\alpha = \frac{n}{2}$ , 则变为

$$\begin{aligned} \left( r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w \right)' &= 0, \\ \Rightarrow r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w &= C, \exists C. \end{aligned}$$

为方便, 再假设  $\lim_{r \rightarrow \infty} w = 0, \lim_{r \rightarrow \infty} w' = 0$ , 则  $a = 0$ , 则  $w' = -\frac{1}{2} r w$ , 从而存在常数  $b$  使得

$$w = b e^{-\frac{r^2}{4}}.$$

因此结合式(2.23)得  $\frac{b}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$  满足热传导方程(2.21).

**定义 2.3.1 (热传导方程的基本解)** 定义函数

$$\Phi(x, t) \triangleq \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n, t \leq 0 \end{cases}$$

为热传导方程的基本解.

注意到 $\Phi$ 在 $(0, 0)$ 为奇点, 有时候写 $\Phi(x, t) = \Phi(|x|, t)$ 强调基本解是关于 $x$ 放射状的. 而根据下面引理, 常数 $(4\pi)^{-n/2}$ 是为了归一化, 证明过程只需要刚学重积分就能算了.

**引理 2.3.1 (基本解函数的积分)** 我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1.$$

## 2.3.2 齐次初值问题

下面用 $\Phi$ 来解下面的初值(Cauchy)PDE:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g, & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

假设函数 $(x, t) \mapsto \Phi(x, t)$ 在除了奇点 $(0, 0)$ 以外的地方满足热传导方程的解, 则对固定的 $y \in \mathbb{R}^n$ , 函数 $(x, t) \mapsto \Phi(x - y, t)$ 也满足. 那仿照Laplace(位势)方程的过程, 如果我们作一个卷积

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \end{aligned} \quad (2.24)$$

那也应为上面初值问题的解.

**定理 2.3.2 (初值问题的解)** 设 $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , 定义 $u$ 如式(2.24), 则

- (1)  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ ,
- (2)  $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$ ,
- (3)  $\lim_{(x, t) \rightarrow (x^0, 0)} u(x, t) = g(x^0), \forall x^0 \in \mathbb{R}^n$ . 这里 $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ .

**证明:** (1) 由于函数 $\frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ 无穷次可微, 且在 $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty), (\delta > 0)$ 的任意阶导数有界, 则 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ .

(2) 仿照Laplace基本解的相关证明可得

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} [(\Phi_t - \Delta_x \Phi)(x - y, t)] g(y) dy \\ &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0), \end{aligned}$$

(3) 固定 $x^0 \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$ , 选 $\delta > 0$ 使得当 $|y - x^0| < \delta, y \in \mathbb{R}^n$ 时有

$$|g(y) - g(y^0)| < \varepsilon.$$

如果 $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$  且  $|y - x^0| \geq \delta$ , 则

$$\begin{aligned} |y - x^0| &\leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0|, \\ \iff |y - x| &\geq \frac{1}{2}|y - x^0|. \end{aligned}$$

则根据前面引理,

$$\begin{aligned}
|u(x, t) - g(x^0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) [g(y) - g(x^0)] dy \right| \\
&\leq \int_{B(x^0, \delta)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x^0)| dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x^0)| dy \\
&\leq \varepsilon + 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} \Phi(x - y, t) dy \\
&\leq \varepsilon + \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \\
&\leq \varepsilon + \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}} dy \\
&= \varepsilon + C \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta/\sqrt{t})} e^{-\frac{|z|^2}{16}} dz \\
&\rightarrow 0, (t \rightarrow 0^+, \varepsilon \rightarrow 0).
\end{aligned}$$

证完. □

注: 有时候也用如下Dirac函数来表示:

$$\begin{cases} \Phi_t - \Delta \Phi = 0, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \Phi = \delta_0, \text{ on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

### 2.3.3 非齐次问题

下面考虑非齐次问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = 0, \text{ on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (2.25)$$

如果我们回忆式(2.24)中映射 $\Phi(x - y, t - s)$ 也是它的解(给定 $y \in \mathbb{R}^n, 0 < s < t$ ). 下面固定 $s$ , 函数

$$u = u(x, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy$$

是方程

$$\begin{cases} u_t(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) = 0, \text{ in } \mathbb{R}^n \times (s, \infty) \\ u(\cdot; s) = f(\cdot; s), \text{ on } \mathbb{R}^n \times \{t = s\}. \end{cases} \quad (2.26)$$

的解, 它形如前一小节我们要解决的方程, 但是初始时间由 $t = 0$ 变成了 $t = s$ ,  $g$ 变成了 $f(\cdot, s)$ . 则 $u(\cdot; s)$ 一定不是方程(2.25)的解.

怎么办呢? 用**Duhamel原理**(对 $s$ 进行积分, 不仅仅适用于热传导方程, 后面也会用), 我们可以通过式(2.26)来求(2.25), 对于 $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$ , 考虑

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \int_0^t u(x, t; s) ds \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds \\
&= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy ds,
\end{aligned} \quad (2.27)$$

为了验证这条式子起作用的, 我们假设 $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ , 并且 $f$ 有紧支集.

这里 $C_1^2(U_T) = \{u : U_T \rightarrow \mathbb{R} | u, D_x u, D_x^2 u, u_t \in C(U_T)\}$ .



**定理 2.3.3 (非齐次问题的解)** 定义  $u$  如式(2.27), 则

- (1)  $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ ,
- (2)  $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t), (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$ ,
- (3)  $\lim_{(x, t) \rightarrow (x^0, 0)} u(x, t) = 0, \forall x^0 \in \mathbb{R}^n$ . 这里  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ .

**证明:** (1) 由于  $\Phi$  在  $(0, 0)$  为奇点, 则不可以直接对它求导来验证. 因此要仿照之前Laplace(位势)方程的做法, 一步步来求. 首先换元, 写

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds.$$

由于  $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  有紧支集且  $\Phi = \Phi(y, s)$  在  $s = t > 0$  附近光滑, 则

$$\begin{aligned} u(x + h, t) &= \int_0^{t+h} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t + h - s) dy ds, \\ u_t(x, t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) [f(x - y, t + h - s) - f(x - y)] dy ds \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t + h - s) dy ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f_t(x - y, t - s) dy ds \quad \text{【极限与积分交换顺序】} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy \quad \text{【换元 } z = s - t \text{】}. \end{aligned}$$

同理

$$u_{x_i x_j}(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f_{x_i x_j}(x - y, t - s) dy ds, i, j = 1, \dots, n.$$

则  $u_t, D_x^2 u, u, D_x u \in C(\mathbb{R}^n)$  (套前面写的  $C_1^2(U_T)$  定义验证). □

(2) 根据(1)中的计算可得

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) f(x - y, t - s) \right] dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy \\ &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x - y, t - s) \right] dy ds \\ &\quad + \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x - y, t - s) \right] dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy \quad \text{【前2项积分区间以 } \varepsilon \text{ 拆成两半】} \\ &\triangleq I_\varepsilon + J_\varepsilon + K. \end{aligned}$$

根据前面引理, 可知

$$|J_\varepsilon| \leq (\|f_t\|_{L^\infty} + \|D^2 f\|_{L^\infty}) \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) dy ds \leq C\varepsilon.$$

通过分部积分以及  $\left( \frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) \Phi(y, s) = 0$  可得

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) \Phi(y, s) \right] f(x - y, t - s) dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \varepsilon) f(x - y, t - \varepsilon) dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \varepsilon) f(x - y, t - \varepsilon) dy - K. \end{aligned}$$

结合上面所有式子, 让  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 根据前一定理2.3.2最后部分的证明过程可知

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \varepsilon) f(x - y, t - \varepsilon) dy = f(x, t).$$

其中  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ .

(3) 利用引理,  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq t\|f\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ . □

注: 对于在  $t = 0$  时为一般的函数的非齐次问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g, & \text{on } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \end{cases}$$

结合前面两个定理以及前面对  $f, g$  所加的条件, 可以知道

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds$$

是解.

### 2.3.4 平均值性质

设  $U \subset \mathbb{R}^n$  为有界开集, 固定时间  $T > 0$ .

**定义 2.3.2** 把抛物柱面 (parabolic cylinder) 定义为  $U_T = U \times (0, T]$ . 把  $U_T$  的抛物边界定义为  $\Gamma_T = \bar{U}_T - U_T$ .

下面想办法把调和函数的平均值性质类比于此, 但是没有简单的公式. 但是我们观察到固定  $x$  以后, 球面  $\partial B(x, r)$  上的点在 Laplace (位势) 方程的基本解  $\Phi(x - y)$  的值是一样的 (等值面, level set), 因此这给我们一个启示, 也许固定  $(x, t)$  以后热传导方程的基本解  $\Phi(x - y, t - s)$  的等值面与平均值性质有关.

**定义 2.3.3** 固定  $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, r > 0$ , 定义

$$E(x, t; r) = \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}.$$

$E(x, t; r)$  的边界是  $\Phi(x - y, t - s)$  的一个等值面.  $E(x, t; r)$  有时也叫做 “热球” (heat ball).

**定理 2.3.4** (热传导方程的平均值性质) 设  $u \in C_1^2(U_T)$  满足热传导方程, 则对任意的  $E(x, t; r) \subset U_T$ , 都有

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x, t; r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds$$

注意到等号的右边只包括所有  $s \leq t$  时间的  $u(y, s)$ , 这是合理的, 因为  $u(x, t)$  的值不应该由未来时间决定.

**证明:** 把空间和时间作一个平移使得  $x = 0, t = 0$ , 记  $E(r) = E(0, 0; r)$  并不妨假设  $u$  光滑, 记

$$\begin{aligned} \phi(r) &\triangleq \frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \\ &= \iint_{E(1)} u(ry, r^2s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds. \end{aligned}$$

计算可得

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \iint_{E(1)} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2ru_s \frac{|y|^2}{s} dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s \frac{|y|^2}{s} dy ds \\ &\triangleq A + B. \end{aligned}$$

下面引入

$$\psi \triangleq -\frac{n}{2} \log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n \log r,$$

注意到在 $\partial E(r)$ 上 $\psi = 0$ , 这是因为在边界上 $\frac{1}{(-4\pi s)^{n/2}} e^{\frac{|y|^2}{4s}} = \Phi(y, -s) = r^{-n}$ . 利用该式, 写

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4u_s \sum_{i=1}^n y_i \psi_{y_i} dy ds \\ &= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4nu_s \psi + 4 \sum_{i=1}^n u_{sy_i} y_i \psi dy ds \quad \text{【关于 } y_i, i=1, \dots, n \text{ 分部积分】} \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4nu_s \psi + 4 \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \psi_s dy ds \quad \text{【关于 } s \text{ 分部积分, 边界上 } \psi = 0 \text{】} \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4nu_s \psi + 4 \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \left( -\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2} \right) dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4nu_s \psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i dy ds - A. \end{aligned}$$

由于直接求偏导即可得 $\psi_{y_i} = \frac{y_i}{2s}$ , 因此

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= A + B = \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4n\Delta u \psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i dy ds \quad \text{【u是解, } u_s = \Delta u \text{】} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4nu_{y_i} \psi_{y_i} - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i dy ds \quad \text{【分部积分公式】} \\ &= 0. \end{aligned}$$

则 $\phi \equiv$ 常数, 则

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = u(0, 0) \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^n} \iint_{E(t)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \right) = 4u(0, 0).$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^n} \iint_{E(t)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds &= \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \\ &= \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 ds \int_{\Phi(-y, -s) \geq 1} \frac{|y|^2}{s^2} dy \\ &= \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 ds \int_{|y|^2 \leq 2ns \log(-4\pi s)} \frac{|y|^2}{s^2} dy \\ &\stackrel{\text{【极坐标变换】}}{\implies} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 ds \int_0^{\sqrt{2ns \log(-4\pi s)}} dr \int_{\partial B(0, r)} \frac{|y|^2}{s^2} dS \\ &= \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 ds \int_0^{\sqrt{2ns \log(-4\pi s)}} \frac{r^2 n \alpha(n) r^{n-1}}{s^2} dr \\ &= \frac{n \alpha(n)}{n+2} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \frac{(2ns \log(-4\pi s))^{\frac{n+2}{2}}}{s^2} ds \\ &\stackrel{e^{-t} = -4\pi s}{=} \frac{n \alpha(n)}{n+2} \frac{(2n)^{\frac{n+2}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-\frac{nt}{2}} t^{\frac{n+2}{2}} dt \\ &= \frac{n \pi^{\frac{n}{2}}}{(n+2) \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \frac{(2n)^{\frac{n+2}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{n+4}{2}} \Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right). \end{aligned}$$

利用 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ 可知:  $\Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right) = \frac{n+2}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ . 因此上面积分的值是4.  $\square$

### 2.3.5 有界区域的极值原理与解的唯一性

利用平均值性质, 我们可以证明强极值原理(strong maximum principle).

**定理 2.3.5 (热传导方程的强极值原理)** 设  $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$  是热传导方程在  $U_T$  内的解, 则

$$(1) \max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

(2) 另外, 如果  $U$  连通, 且存在点  $(x_0, t_0) \in U_T$  使得  $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{U_T}} u$ , 则  $u$  在  $\overline{U}_{t_0}$  内是常数.

注: (1) 叫做热传导方程的极值原理, 而(2)叫强极值原理. 把  $\max$  换成  $\min$  这个命题也是对的.

注: 如果  $u$  在内部取到极值, 那么  $u$  在该时间点之前的值为常数. 从直观上看, 如果在时间  $[0, t_0]$  范围内的初值和边界值都是常数, 那么解也是常数; 但是如果在  $t > t_0$  范围内的边界条件变化的话, 那么解就会发生改变.

要注意的是物理意义、直观不能给我们提供证明思路, 下面我们要用数学证明这个事实.

**证明:** (1) 如果存在点  $(x_0, t_0) \in U_T$  满足  $u(x_0, t_0) = M \triangleq \max_{\overline{U_T}} u$ , 则对充分小的  $r > 0$ ,  $E(x_0, t_0; r) \subset U_T$ , 根据平均值性质得

$$\begin{aligned} M = u(x_0, t_0) &= \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0, t_0; r)} u(y, s) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dy ds \\ &\leq M \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0, t_0; r)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dy ds \\ &= M. \end{aligned}$$

等号成立的条件是  $u \equiv M$  在  $E(x_0, t_0; r)$  内成立, 即  $u(y, s) = M, \forall (y, s) \in E(x_0, t_0; r)$ .

(下面建议画草图理解) 下面在  $U_T$  中画一条线段  $L$  连接  $(x_0, t_0)$  与任意一点  $(y_0, s_0) \in U_T, s_0 < t_0$ . 取

$$r_0 = \min\{s | s \geq s_0, u(x, t) = M, (x, t) \in L, s \leq t \leq t_0\}.$$

由于  $u$  连续, 则上面的  $r_0$  存在. 如果  $r_0 > s_0$ , 则

$$u(z_0, r_0) = M, \exists (z_0, r_0) \in L \cap U_T,$$

则对充分小的  $r > 0$ ,  $u \equiv M$  在  $E(z_0, r_0; r)$  内成立, 而根据我们前面的论证过程, 可知  $\exists \sigma > 0$  使得

$$L \cap \{r_0 - \sigma \leq t \leq r_0 + \sigma\} \subset E(z_0, r_0; r),$$

因此找到了比  $r_0$  更小的  $r_0 - \sigma/2$  满足  $u(z_0, r_0 - \sigma/2) = M$ , 矛盾. 因此  $r_0 = s_0$ , 则  $u \equiv M$  在  $L$  上成立.

(2) 下面固定任意一点  $x \in U$  与时间  $0 \leq t < t_0$ , 则存在点  $\{x_k\}_0^m, x_m = x$ , 使得所有连接  $x_{i-1}$  与  $x_i$  的  $n$  维空间上的线段都在  $U$  中, (注意  $U$  不一定是凸集), 选择时间  $\{t_k\}_0^m, t_m = t$ , 则所有  $n+1$  维空间上连接  $(x_{i-1}, t_{i-1})$  与  $(x_i, t_i)$  的线段都在  $U_T$  中. 根据(1)的类似步骤可知  $u \equiv M$  在所有线段上成立, 因此  $u(x, t) \equiv M, 0 \leq t < t_0$ .  $\square$

**定理 2.3.6 (有界区域解的唯一性)** 设  $g \in C(\Gamma_T), f \in C(U_T)$ , 则存在至多一个下面问题的解  $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{in } U_T, \\ u = g, & \text{on } \Gamma_T. \end{cases}$$

**证明:** 若  $u, \tilde{u}$  是这个问题的两个解, 取  $w = \pm(u - \tilde{u})$  也是解, 且在边界上为0, 根据最大值原理,  $w \equiv 0$  在  $U_T$  内成立.  $\square$

### 2.3.6 无界区域的最大值原理与解的唯一性

我们在前面的过程中都假设了  $U \in \mathbb{R}^n$  是有界开集. 对于无界区域(以  $\mathbb{R}^n$  为例), 此时的问题叫Cauchy问题, 我们考虑解的唯一性. 由于区域是无界的, 所以有必要对充分大的  $|x|$  加一个条件来控制住这个解.

**定理 2.3.7 (Cauchy问题的极值原理)** 设  $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  是下面问题的解:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u = g, & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

且满足如下增长速率估计:  $u(x, t) \leq Ae^{a|x|^2}$ ,  $(x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T)$ , 其中  $A, a > 0$  是常数. 则

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

**证明:** (1) 首先假设  $4aT < 1$ , 则  $\exists \varepsilon > 0, 4a(T + \varepsilon) < 1$ . 固定  $y \in \mathbb{R}^n, \mu > 0$ , 定义

$$v(x, t) \triangleq u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0).$$

则  $v_t - \Delta v = 0$  在  $\mathbb{R}^n \times (0, T]$  (请回忆热传导方程的基本解). 固定  $r > 0$ , 记  $U \triangleq B^0(y, r), U_T = B^0(y, r) \times (0, T]$ , 根据有界区域的极值原理可知

$$\max_{\bar{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v.$$

如果  $x \in \mathbb{R}^n$ , 则

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= u(x, 0) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}} \\ &\leq u(x, 0) = g(x), \end{aligned}$$

如果  $|x - y| = r, 0 \leq t \leq T$ , 则  $r \geq |y| - |x|$ ,

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \\ &\leq Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \\ &\leq Ae^{a(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

根据  $4a(T + \varepsilon) < 1$ , 可知存在  $\gamma > 0$  使得  $\frac{1}{4(T + \varepsilon)} = a + \gamma$ , 则当  $r$  充分大的时候,

$$v(x, t) \leq Ae^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a + \gamma))^{n/2} e^{(a+\gamma)r^2} \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g,$$

这是因为  $e^{(a+\gamma)r^2}$  的阶比  $e^{a(|y|+r)^2}$  大, 上式在  $r \rightarrow \infty$  时将趋于负无穷大.

综上, 当  $y \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T$  时让  $\mu \rightarrow 0$  有  $v(y, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$ .

(2) 如果  $4aT < 1$  不成立, 则对于  $T_1 = \frac{1}{8a}$ , 可考虑  $[0, T_1], [T_1, 2T_1], \dots$  这些时间区间. □

**定理 2.3.8 (Cauchy问题解的唯一性)** 设  $g \in C(\mathbb{R}^n), f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ , 则下面的初值问题存在至多一个解  $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u = g, & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

满足下面的增长速率:

$$|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2}, \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T),$$

其中  $A, a > 0$  是常数.

**证明:** 如果  $u, \tilde{u}$  是解, 考虑  $w = \pm(u - \tilde{u})$  即可.(步骤同上) □

## ◆习题 2

1. (Evans 2.13题) 设  $n = 1$  即  $x \in \mathbb{R}, t > 0, u(x, t) = v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ .

(1) 证明  $u_t = u_{xx}$  当且仅当  $v''(z) + \frac{z}{2}v'(z) = 0$ , 而这个ODE的通解是

$$v(z) = c \int_0^z e^{-s^2/4} ds + d.$$

这里  $c, d$  是常数.

(2) 如果对  $u(x, t) = v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$  关于  $x$  求导, 并选恰当的  $c$ , 可以得到之前我们提到的  $n = 1$  情形的基本解  $\Phi$ , 解释为什么这种操作  $\Phi = u_x$  可以是基本解.

提示: (2)  $u_x = \frac{c}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \triangleq \Phi(x, t)$ , 作归一化处理(在全体实数上的积分为1), 可得  $c = 2\sqrt{\pi}$ . 这种操作成立是因为函数  $h(x, t) \triangleq u_x(x, t)$  恰好也满足  $h_t = h_{xx}$  (不难验证).

2. (Evans 2.14题) 对  $c \in \mathbb{R}$ , 写出下面问题的一个显式解.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f, & x \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g, & x \in \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

提示: 取  $v = ue^{ct}$ .

3. (Evans 2.15题) 设  $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(0) = 0$ . 请推导下面的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}_+, \\ u = 0, & x \in \mathbb{R}_+, t = 0, \\ u = g, & x = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

的解是

$$u(x, t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} g(s) ds.$$

提示: 设  $v(x, t) = u(x, t) - g(t)$ , 对  $v$  作奇延拓到  $\{x < 0\}$ .

## § 2.4 波动方程

下面我们讨论波动方程

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

和非齐次形式

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

的解, 其中给定一定的初始和边界条件. 这里  $t > 0, x \in U, U \subset \mathbb{R}^n$  开. 要解的东西是  $u : \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, u = u(x, t)$ , 这里拉普拉斯算子是关于空间变量  $x = (x_1, \dots, x_n)$  的. 另外  $f : U \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  给定. 通常我们也记

$$\square u := u_{tt} - \Delta u.$$

我们下面会说明波动方程的解和Laplace方程以及热传导方程的解的性质非常不一样, 比如波动方程的解通常不是  $C^\infty$  光滑的等等.

### 2.4.1 一维情形下的解、d'Alembert公式

和解Laplace方程、热传导方程找不变量不同, 下面我们提供一个非常优雅的解决方式来解高维情形. 先考虑一维情形, 然后再看高维.

下面考虑

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g, u_t = h, & t = 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

这里  $g, h$  给定. 我们要用  $g, h$  来表示  $u$ .

注意到我们可以对波动方程作一个“分解”, 写

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

记  $v(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u$ , 则  $v_t(x, t) + v_x(x, t) = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0$ . 这是个常系数的输运方程(回顾笔记(1)), 套用相关公式可得  $v(x, t) = a(x - t)$ , 这里  $a(x) \triangleq v(x, 0)$ . 代回  $v$  的定义式可得

$$u_t(x, t) - u_x(x, t) = a(x - t), (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

这是非齐次输运方程, 记  $b(x) \triangleq u(x, 0)$ , 再次代入输运方程的解(回顾笔记(1))则可以得到 (根据给定的初始条件可以得到  $b(x) = g(x), a(x) = h(x) - g'(x)$ )

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t a(x + (t - s) - s) ds + b(x + t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + b(x + t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) - g'(y) dy + g(x + t) \\ &= \frac{1}{2} [g(x + t) + g(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy, x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \end{aligned}$$

我们得到的就是d'Alembert公式.

**定理 2.4.1** (波动方程的解,  $n = 1$ ) 设  $g \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $h \in C^1(\mathbb{R})$ , 定义

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy,$$

则:

$$(1) u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$$

$$(2) u_{tt} - u_{xx} = 0, (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

$$(3) \lim_{(x,t) \rightarrow (x^0, 0^+)} u(x, t) = g(x^0), \lim_{(x,t) \rightarrow (x^0, 0)} u_t(x, t) = h(x^0), \forall x^0 \in \mathbb{R}.$$

**证明:** 直接计算即可. □

**注:** 在d'Alembert公式中, 波动方程的解形如

$$u(x, t) = F(x+t) + G(x-t),$$

相反这样的方程都可以解决  $u_{tt} - u_{xx} = 0$ . 因此一维波动方程的通解就是  $u_t - u_x = 0$  与  $u_t + u_x = 0$  两个方程的通解之和. 详情见习题: (过程比较简单, 略)

**注:** 根据d'Alembert公式, 如果  $g \in C^k$ ,  $h \in C^{k-1}$ , 则  $u \in C^k$ , 因此波动方程不能马上推出初始条件函数的光滑性, 但是热传导方程可以.

## 2.4.2 d'Alembert公式与对称延拓

考虑下面的初边界问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ u = g, u_t = h, & x \in \mathbb{R}_+, t = 0, \\ u = 0, & x = 0, t \in (0, \infty) \end{cases}$$

这里  $g, h$  给定且  $g(0) = h(0) = 0$ . 下面作奇延拓:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \begin{cases} u(x, t), & (x \geq 0, t \geq 0) \\ -u(-x, t), & (x \leq 0, t \geq 0) \end{cases} \\ \tilde{g}(x) &= \begin{cases} g(x), & (x \geq 0) \\ -g(-x), & (x \leq 0) \end{cases} \\ \tilde{h}(x) &= \begin{cases} h(x), & (x \geq 0) \\ -h(-x), & (x \leq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

则问题变成

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ \tilde{u} = \tilde{g}, \tilde{u}_t = \tilde{h}, & x \in \mathbb{R}, t = 0. \end{cases}$$

根据d'Alembert公式,

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy.$$

再代入  $\tilde{u}, \tilde{g}, \tilde{h}$  的定义可得

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy, & x \geq t \geq 0. \\ \frac{1}{2}[g(x+t) - g(t-x)] + \frac{1}{2} \int_{-x+t}^{x+t} h(y) dy, & t \geq x \geq 0. \end{cases}$$

若  $h \equiv 0$ , 则根据上面的式子,  $u(x, t)$  可以看作波形  $g$  分为两部分, 一部分向右运动, 一部分向左运动, 速度都是1. 向左运动的波在  $x = 0$  消失, 在这个地方振动的弦被固定住.

注意我们求得的解不是  $C^2$  连续的, 除非  $g''(0) = 0$ . □



### 2.4.3 2,3维情形下的解、Kirchhoff公式

接下来我们要看 $n \geq 2, m \geq 2, u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ , 考虑下面初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g, u_t = h, & x \in \mathbb{R}^n, t = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

我们目标是用 $g, h$ 来表示 $u$ , 方案是先看 $u$ 在球上的积分的平均值. 而这个方案可以求解Euler-Poisson-Darboux方程. 再利用d'Alembert公式可以让我们最终找到这个高维波动方程的解.

先做一些符号约定. 记 $x \in \mathbb{R}^n, r > 0, t > 0, \alpha(n)$ 是 $n$ 维单位球的体积. 定义

$$U(x; r, t) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) dS(y),$$

这是 $u(\cdot, t)$ 在半球面 $\partial B(x, r)$ 上的积分平均. 类似我们定义

$$\begin{aligned} G(x; r) &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} g(y) dS(y), \\ H(x; r) &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} h(y) dS(y), \end{aligned}$$

固定 $x$ , 下面我们把 $U$ 看作关于 $r$ 与 $t$ 的函数, 并注意到 $U$ 是一个PDE的解:

**引理 2.4.2 (Euler-Poisson-Darboux方程)** 固定 $x \in \mathbb{R}^n$ , 记 $u$ 满足式(2.28), 则 $U \in C^m(\overline{\mathbb{R}_+} \times [0, \infty))$ 且

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0, & (r, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ U = G, U_t = H, & r \in \mathbb{R}_+, t = 0. \end{cases}$$

注意 $U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r$ 恰好是Laplace算子的极坐标形式.

**证明:** 对于 $r > 0$ , 回顾散度定理 $\int_U \operatorname{div} u dx = \int_{\partial U} u \cdot \vec{n} dS$ , 而在球面 $\partial B(x, r)$ 上 $y$ 处的单位外法向量 $\vec{n} = \frac{y-x}{r}$ . 我们有

$$\begin{aligned} U_r(x; r, t) &= \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) dS(y) \right] \\ &= \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz, t) dS(z) \right] \quad \text{【换元】} \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0, 1)} Du(x + rz, t) \cdot z dS(z) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0, 1)} Du(x + rz, t) \cdot z dS(z) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} Du(y, t) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x, r)} \operatorname{div} Du(y, t) dy \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy. \end{aligned}$$

让  $r \rightarrow 0^+$  我们有  $\lim_{r \rightarrow 0^+} U_r(x; r, t) = U_r(x; r, t) = 0$ . 再对上式关于  $r$  再求导一次有

$$\begin{aligned} U_{rr}(x; r, t) &= \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy \right] \\ &= \frac{d}{dr} \left[ \frac{r}{n\alpha(n)} \int_{B(0,1)} \Delta u(x + rz, t) dz \right] \quad \text{【换元】} \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(0,1)} \Delta u(x + rz, t) dz + \frac{r}{n\alpha(n)} \int_{B(0,1)} D(\Delta u(x + rz, t)) \cdot z dz \\ &= \cdots = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \Delta u dS + \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} \Delta u dy. \end{aligned}$$

让  $r \rightarrow 0^+$  有  $\lim_{r \rightarrow 0^+} U_{rr}(x; r, t) = \frac{1}{n} \Delta u(x, t)$ . 类似可以计算  $U_{rrr}, \dots$ , 则  $U \in C^m(\mathbb{R}_+ \times [0, \infty))$ .

另一方面, 由于  $u_{tt} = \Delta u$ , 则

$$\begin{aligned} U_r(x; r, t) &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} u_{tt} dy, \\ \Rightarrow \quad r^{n-1} U_r &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(x,r)} u_{tt} dy \\ \Rightarrow \quad (r^{n-1} U_r)_r &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1} U_{tt}. \end{aligned}$$

证明完成. □

有了 Euler-Poisson-Darboux 方程, 我们可以把高维的转化为一维波动方程. 由于整个过程是比较复杂的, 所以我们接下来仅看更简单的  $n = 3, 2$  的情形(接下来讲的顺序也是如此).

下面设  $n = 3$ , 并设  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$  是初值问题(2.28)的解. 记  $\tilde{U} = rU, \tilde{G} = rG, \tilde{H} = rH$ , 我们断言  $\tilde{U}$  是下面问题的解:

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0, & (r, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ \tilde{U} = \tilde{G}, \tilde{U}_t = \tilde{H}, & t = 0, r \in \mathbb{R} \\ \tilde{U} = 0, & r = 0, t > 0. \end{cases}$$

当然

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{tt} &= rU_{tt} = r \left[ U_{rr} + \frac{2}{r} U_r \right] \\ &= rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr}. \end{aligned}$$

注意到  $\tilde{G}_{rr}(0) = 0$ , 根据 d'Alambert 公式的改进版, 对于  $0 \leq r \leq t$ , 我们有

$$\tilde{U}(x; r, t) = \frac{1}{2} [\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)] + \frac{1}{2} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy.$$

根据  $U$  的定义式,  $u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} U(x; r, t)$ , 则对  $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$ ,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{U}(x; r, t)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y) dy \right] \\ &= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int_{\partial B(x,t)} g dS \right) + t \int_{\partial B(x,t)} h dS \\ &= \cdots = \frac{1}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int_{\partial B(x,t)} th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y-x) dS(y). \end{aligned}$$

上面省略号部分主要是对  $\tilde{G}$  求导, 与我们证 Euler-Poisson-Darboux 方程的解的思路类似. 这就是初值问题(2.28)的三维情形的 Kirchhoff 公式.

在 $n = 2$ 时没有形如 $\bar{U} = rU$ 的公式可以把Euler-Poisson-Darboux方程转化为一维波动方程. 我们不如把它看作 $n = 3$ 时的波动方程, 且第三个空间分量不会出现.

设 $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ 是 $n = 2$ 时问题(2.28)的解, 写

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) \triangleq u(x_1, x_2, t),$$

则问题变为

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \Delta \bar{u} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ \bar{u} = \bar{g}, \bar{u}_t = \bar{h}, & x \in \mathbb{R}^3, t = 0. \end{cases}$$

这里 $\bar{g}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)$ ,  $\bar{h}(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2)$ . 如果我们记 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\bar{x} = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$ , 则根据Kirchhoff公式(的化简过程中某一步), 有

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \bar{u}(\bar{x}, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial \bar{B}(\bar{x}, t)} \bar{g} d\bar{S} \right) + t \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial \bar{B}(\bar{x}, t)} \bar{h} d\bar{S}, \end{aligned}$$

这里是 $\bar{B}(\bar{x}, t)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中以 $\bar{x}$ 为中心、 $t$ 为半径的球,  $d\bar{S}$ 是球面 $\partial \bar{B}(\bar{x}, t)$ 的二维表面.

回顾第一型曲面积分, 下面我们对上式化简.

$$\frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial \bar{B}(\bar{x}, t)} \bar{g} d\bar{S} = \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B(x, t)} g(y) (1 + |D\gamma(y)|^2)^{1/2} dy,$$

这里 $\gamma(y) = \sqrt{t^2 - |y - x|^2}$ . 这里多了系数2是因为球有上下表面. 注意 $(1 + |D\gamma(y)|^2)^{1/2} = t(t^2 - |y - x|^2)^{-1/2}$ , 因此

$$\frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial \bar{B}(\bar{x}, t)} \bar{g} d\bar{S} = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy.$$

则

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\pi} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy \right) + \frac{1}{2} \int_{B(x, t)} \frac{h(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy$$

由于

$$\begin{aligned} & \partial \partial t \left( \frac{1}{\pi} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{B(0, 1)} \frac{g(x + tz)}{(1 - |z|^2)^{1/2}} dz \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{B(0, 1)} \frac{g(x + tz)}{(1 - |z|^2)^{1/2}} dz + \frac{t}{\pi} \int_{B(0, 1)} \frac{Dg(x + tz) \cdot z}{(1 - |z|^2)^{1/2}} dz \\ &= \frac{1}{\pi t} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy + \frac{1}{\pi t} \int_{B(x, t)} \frac{Dg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy. \end{aligned}$$

因此我们得到: 对 $x \in \mathbb{R}^2, t > 0$ ,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x, t)} \frac{g(y) + th(y) + Dg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy$$

这就是二维情形下问题(2.28)的Poisson公式. □

上面把 $n = 3$ 变成 $n = 2$ 的trick叫“method of descent”(降维打击法)

## 2.4.4 (\*) 高维波动方程的解

下面我们用Euler-Poisson-Darboux方程解决 $n \geq 3$ 的波动方程.

**引理 2.4.3** 设  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是  $C^{k+1}$  的, 则对于  $k = 1, 2, \dots$ , 我们有

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}\right) \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} (r^{2k-1} \phi(r)) = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k \left(r^{2k} \frac{d\phi}{dr}(r)\right),$$

以及

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} (r^{2k-1} \phi(r)) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \frac{d^j \phi}{dr^j}(r),$$

其中常数  $\beta_j^k (j = 0, 1, \dots, k-1)$  与  $\phi$  无关. 特别地,

$$\beta_0^k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) = (2k-1)!!.$$

**证明:** 用归纳法证明, 留作习题. □

下面设  $n \geq 3$  是奇数, 写  $n = 2k+1 (k \geq 1)$ , 又设  $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  是波动方程的解:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g, u_t = h, & x \in \mathbb{R}^n, t = 0. \end{cases}$$

则如下定义的  $U$  也是  $C^{k+1}$  的.

$$U(x; r, t) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) dS(y),$$

类似我们定义

$$\begin{aligned} G(x; r) &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} g(y) dS(y), \\ H(x; r) &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} h(y) dS(y), \end{aligned}$$

我们记

$$\begin{aligned} \tilde{U}(r, t) &\triangleq \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} (r^{2k-1} U(x; r, t)) \\ \tilde{G}(r) &\triangleq \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} (r^{2k-1} G(x; r)) \\ \tilde{H}(r) &\triangleq \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} (r^{2k-1} H(x; r)). \end{aligned}$$

$$\text{则 } \tilde{U}(r, 0) = \tilde{G}(r), \tilde{U}_t(r, 0) = \tilde{H}(r).$$

下面我们把 Euler-Poisson-Darboux 方程变为波动方程.

**引理 2.4.4** ( $\tilde{U}$  是一维波动方程的解) 我们有

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0, & (r, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ \tilde{U} = \tilde{G}, \tilde{U}_t = \tilde{H}, & t = 0, r > 0, \\ \tilde{U} = 0, & r = 0, t > 0. \end{cases}$$

**证明:** 如果  $r > 0$ , 则

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{rr} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} (r^{2k-1} U) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^k (r^{2k} U_r) \quad \text{【前面引理】} \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left[ r^{2k-1} \left( U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} (r^{2k-1} U_{tt}) \quad \text{【E-P-D方程】} \\ &= \tilde{U}_{tt}. \end{aligned}$$

同样可以验证在  $\{r = 0\}$  区域内  $\tilde{U} = 0$ . □

根据d'Alembert公式, 对于 $0 \leq r \leq t$ 我们有

$$\tilde{U}(r, t) = \frac{1}{2}[\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)] + \frac{1}{2} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y) dy.$$

上式对所有 $r \in \mathbb{R}, t \geq 0$ 都成立. 回顾 $u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U(x; r, t)$ , 根据

$$\begin{aligned} \tilde{U}(r, t) &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} (r^{2k-1} U(x; r, t)) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \frac{\partial^j}{\partial r^j} U(x; r, t), \end{aligned}$$

则

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{U}(r, t)}{\beta_0^k r} = \lim_{r \rightarrow 0} U(x; r, t) = u(x, t).$$

即

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\beta_0^k} \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y) dy \right] \\ &= \frac{1}{\beta_0^k} [\tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t)]. \end{aligned}$$

于是我们得到了如下的 $n = 2k + 1$ 维的解的表示公式: ( $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ ).

$$u(x, t) = \frac{1}{(n-2)!!} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{1}{n\alpha(n)t} \int_{\partial B(x,t)} g dS \right) + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{1}{n\alpha(n)t} \int_{\partial B(x,t)} h dS \right) \right]$$

只需验证这个式子是否满足我们要解的方程. 代回去算就行了, 下面就不展示过程了.

**定理 2.4.5 (奇数维波动方程的解)** 设 $n \geq 3$ 是奇数,  $g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n), h \in C^m(\mathbb{R}^n)$ , 这里 $m = \frac{n+1}{2}$ . 定义 $u$ 如上式, 则:

- (1)  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ .
- (2)  $u_{tt} - \Delta u = 0, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ,
- (3)  $\lim_{(x,t) \rightarrow (x^0,0)} u(x, t) = g(x^0), \lim_{(x,t) \rightarrow (x^0,0)} u_t(x, t) = h(x^0), x \in \mathbb{R}^n, t > 0$  对所有的点 $x^0 \in \mathbb{R}^n$ 都成立.

**证明:** 我们只证明(2): 先设 $g \equiv 0$ .

利用前面几节差不多的思路, 可以计算得

$$H_t = \frac{1}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int_{B(x,t)} \Delta h dy.$$

根据前面引理, 计算得

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \frac{1}{(n-2)!!} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} (t^{n-1} H_t) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)(n-2)!!} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left( \int_{B(x,t)} \Delta h dy \right) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)(n-2)!!} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{1}{t} \int_{\partial B(x,t)} \Delta h dS \right). \end{aligned}$$

另一方面,

$$\Delta H(x; t) = \Delta_x \frac{1}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int_{\partial B(0,t)} h(x+y) dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int_{\partial B(x,t)} \Delta h dS.$$

根据上面的计算可得 $u_{tt} - \Delta u = 0$ . 类似设 $h \equiv 0$ 过程一样. □

注:  $u(x, t)$  只涉及到  $g, h$  与它们的导数在  $\partial B(x, t)$  的值, 而不是整个球  $B(x, t)$ .

在后面算偶数维的情况下我们会发现需要  $u = g, u_t = h$  在所有  $B(x, t)$  的值, 不仅仅是球面  $\partial B(x, t)$ .

注: 用热传导方程也可以推  $n = 2k + 1$  维的解的表示公式! 详细看Evans书.

下面设  $n$  是偶数,  $u \in C^m$  是方程(2.28)的解,  $m = \frac{n+2}{2}$ , 像前一节那样, 用降维打击法. 定义

$$\bar{u}(x_1, \dots, x_{n+1}, t) \triangleq u(x_1, \dots, x_n, t)$$

满足  $\mathbb{R}^{n+1} \times (0, \infty)$  波动方程的解, 初始条件是

$$\bar{u} = \bar{g}, \bar{u}_t = \bar{h}, (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \{t = 0\}.$$

由于  $n + 1$  是奇数, 利用前面的表示公式即可把解写出来.

固定  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ , 记  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . 则根据奇数维表示公式有

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{(n-1)!!} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( \frac{1}{(n+1)\alpha(n+1)t} \int_{\partial \bar{B}(\bar{x}, t)} \bar{g} d\bar{S} \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( \frac{1}{(n+1)\alpha(n+1)t} \int_{\partial \bar{B}(\bar{x}, t)} \bar{h} d\bar{S} \right) \right] \end{aligned}$$

其中  $\bar{B}(\bar{x}, t)$  是以  $\bar{x}$  为中心、 $t$  为半径的  $n + 1$  维球,  $d\bar{S}$  是  $n$  维球  $\partial \bar{B}(\bar{x}, t)$  表面的测度. 仿照二维的情形(第一型曲面积分, 变成两个半球等思路), 最终可以得到(如果感兴趣可以翻Evans的书, 步骤与  $n = 2$  情形几乎一样)

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{n!!} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( \frac{t}{n\alpha(n)} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( \frac{t}{n\alpha(n)} \int_{B(x, t)} \frac{h(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy \right) \right] \end{aligned}$$

上面  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ .

只需验证这个式子是否满足我们要解的方程. 代回去算就行了, 下面就不展示过程了.

**定理 2.4.6 (偶数维波动方程的解)** 设  $n \geq 2$  是偶数,  $g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n), h \in C^m(\mathbb{R}^n)$ , 这里  $m = \frac{n+2}{2}$ . 定义  $u$  如上式, 则:

- (1)  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ .
- (2)  $u_{tt} - \Delta u = 0, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ,
- (3)  $\lim_{(x, t) \rightarrow (x^0, 0)} u(x, t) = g(x^0), \lim_{(x, t) \rightarrow (x^0, 0)} u_t(x, t) = h(x^0), x \in \mathbb{R}^n, t > 0$  对所有的点  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  都成立.

注: 需要知道  $B(x, t)$  上所有  $u = g, u_t = h$  信息才能计算  $u(x, t)$ , 与奇数维有所不同.

**Huygens原理:** 比较奇数维与偶数维的表示公式, 我们观察到如果  $n \geq 3$  是奇数, 则  $g, h$  在给定的点  $x \in \mathbb{R}^n$  只在圆锥  $C = \{(y, t) : t > 0, |x - y| < t\}$  的边界  $\{(y, t) : t > 0, |x - y| = t\}$  影响  $u$  的值. 另一方面, 若  $n$  是偶数, 则  $g, h$  在圆锥  $C$  的内部都会影响  $u$  的值换句话说, 在  $x$  点处的“扰动”在奇数维中会沿着一个尖锐的前阵面(wavefront)传播(无后效现象), 但在偶数维中“扰动”会在前阵面经过以后持续带来影响(弥漫, 有后效现象). 这就是Huygens原理.

在三维情形中的无后效现象解释了我们在谈话时对方可以清晰听到自己在讲话, 而在二维空间(平面)上, 波的传播有后效现象, 把石头扔在水中以后在湖面上会有层层浪花.

### 2.4.5 非齐次波动方程的解

下面看非齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = 0, u_t = 0, & t = 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

用Duhamel原理, 我们定义  $u = u(x, t; s)$  满足

$$\begin{cases} u_{tt}(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (s, \infty) \\ u(\cdot; s) = 0, u_t(\cdot; s) = f(\cdot, s), & x \in \mathbb{R}^n, t = s. \end{cases}$$

设

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds, x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0,$$

则Duhamel 原理断言这是下方程的解:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = 0, u_t = 0, & t = 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

回顾含参变量的积分:

$$F(y) = \int_0^y f(x, y) dx \Rightarrow F'(y) = \int_0^y f_y(x, y) dx + f(y, y).$$

推广:

$$F(y) = \int_0^{b(y)} f(x, y) dx \Rightarrow F'(y) = \int_0^{b(y)} f_y(x, y) dx + f(b(y), y) b'(y).$$

利用这两条式子不难验证非齐次方程的解.

下面看几个特殊情形:

(1)  $n = 1$  时, 根据d'Alembert公式有

$$u(x, t; s) = \frac{1}{2} \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y, s) dy = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y, s) dy ds,$$

即

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-s}^{x+s} f(y, t-s) dy ds, x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

(2)  $n = 3$  时, Kirchhoff公式有

$$u(x, t; s) = \frac{1}{4\pi(t-s)} \int_{\partial B(x, t-s)} f(y, s) dS,$$

即

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t (t-s) \left( \frac{1}{4\pi(t-s)} \int_{\partial B(x, t-s)} f(y, s) dS \right) ds \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{\partial B(x, r)} \frac{f(y, t-r)}{r} dS dr \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{B(x, t)} \frac{f(y, t-|y-x|)}{|y-x|} dy, x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0. \end{aligned}$$

上面最后一步恰好是余面积公式. □

## ◆习题 3

1. (Evans, 2.19题)回答下面问题:

(1)证明方程 $u_{xy} = 0$ 的通解是 $u(x, y) = F(x) + G(y)$ , 函数 $F, G$ 是任意的.

(2)作变量代换 $\xi = x + t, \eta = x - t$ , 证明 $u_{tt} - u_{xx} = 0 \Leftrightarrow u_{\xi\eta} = 0$ .

(3)根据(1)(2)推导d'Alembert's公式.

(4) $g, h$ 在什么情况下方程的解 $u$ 是右行波(right-moving wave)? 左行波(left-moving wave)呢?

2. (Evans, 2.18题)Stokes规则. 设 $u$ 是初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = 0, u_t = h, & x \in \mathbb{R}^n, t = 0. \end{cases}$$

的解, 证明 $v := u_t$ 是下面问题的解:

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ v = h, v_t = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t = 0. \end{cases}$$



## 第3章 PDE中的重要方法

### § 3.1 能量方法

我们将介绍“能量方法”(energy method), 即利用一些技术处理各种表达式的 $L^2$ 范数.

#### 3.1.1 位势方程

考虑位势方程边界问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in U \\ u = g, & x \in \partial U. \end{cases} \quad (3.1)$$

我们曾经用最大值原理来证明唯一性, 但是我们现在打算用另外一种方式证明解的唯一性. 设 $U$ 是有界开集且 $\partial U$ 是 $C^1$ 的.

**定理 3.1.1 (位势方程解的唯一性)** 方程(3.1)至多存在一个解 $u \in C^2(\overline{U})$ .

**证明:** 设 $u, v$ 都是解, 记 $w = u - \bar{u}$ , 则 $w$ 是方程

$$\begin{cases} -\Delta w = 0, & x \in U \\ w = 0, & x \in \partial U. \end{cases} \quad (3.2)$$

的解. 由分部积分公式,

$$0 = - \int_U w \Delta w dx = \int_U |Dw|^2 dx.$$

则 $Dw \equiv 0$ 在 $U$ 内恒成立. 由于 $w = 0$ 在 $\partial U$ 上恒成立, 则 $w \equiv 0$ . □

下面我们要证明位势方程(Poisson方程)可以被刻画为一个泛函的极小值. 我们定义能量泛函

$$I[w] \triangleq \int_U \frac{1}{2} |Dw|^2 - w f dx,$$

这里 $w$ 属于容许集(admissible set)

$$\mathcal{A} \triangleq \{w \in C^2(\overline{U}) | w = g, x \in \partial U\}.$$

**定理 3.1.2 (Dirichlet原理)** 设 $u \in C^2(\overline{U})$ 为Poisson方程(3.1)的解, 则

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w].$$

相反, 如果 $u \in \mathcal{A}$ 满足上式, 则 $u$ 是方程(3.1)的解.

**证明:** (1)选 $w \in \mathcal{A}$ , 则式(3.1)推出

$$\begin{aligned} 0 &= \int_U (-\Delta u - f)(u - w) dx \\ &= \int_U Du \cdot D(u - w) - f \cdot (u - w) dx \quad \text{【分部积分, } u - w = 0, x \in \partial U\text{】} \\ \Rightarrow \int_U |Du|^2 - u f dx &= \int_U Du \cdot Dw - w f dx \\ &\leq \int_U \frac{1}{2} |Du|^2 dx + \int_U \frac{1}{2} |Dw|^2 - w f dx. \quad \text{【Cauchy-Schwarz】} \end{aligned}$$

因此 $I[u] \leq I[w], w \in \mathcal{A}$ .

(2)反过来, 设  $I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w]$ , 任意固定  $v \in C_c^\infty(U)$  并记

$$i(t) := I[u + tv], t \in \mathbb{R},$$

由于对每个  $t$ ,  $u + tv \in \mathcal{A}$ , 则标量函数  $i(\cdot)$  在 0 处取最小值, 则如果有导数, 则必有

$$i'(0) = 0, \left( ' = \frac{d}{dt} \right),$$

但是

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_U \frac{1}{2} |Du + tDv|^2 - (u + tv)f dx \\ &= \int_U \frac{1}{2} |Du|^2 + tDu \cdot Dv + \frac{t^2}{2} |Dv|^2 - (u + tv)f dx. \\ \Rightarrow i'(t) &= \int_U Du \cdot Dv + t|Dv|^2 - v f dx. \end{aligned}$$

因此

$$0 = i'(0) = \int_U Du \cdot D - v f dx = \int_U (-\Delta u - f)v dx.$$

这个函数对任意的  $v \in C_c^\infty(U)$  都成立, 则  $-\Delta u = f, x \in U$  成立.  $\square$

注: Dirichlet 原理是变分法用在 Laplace 方程的情况.

### 3.1.2 热传导方程

设  $U \subset \mathbb{R}^n$  为有界开集, 固定时间  $T > 0$ .

**定义 3.1.1** 把 **抛物柱面** (parabolic cylinder) 定义为  $U_T = U \times (0, T]$ . 把  $U_T$  的 **抛物边界** 定义为  $\Gamma_T = \bar{U}_T - U_T$ .

考虑问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & x \in U_T \\ u = g, & x \in \Gamma_T \end{cases} \quad (3.3)$$

我们之前用最大模原理证明了唯一性, 现在我们像位势方程那样用分部积分证明唯一性.

**定理 3.1.3 (热传导方程唯一性)** 方程 (3.3) 只存在一个解  $u \in C_1^2(\bar{U}_T)$ .

**证明:** 如果有两个解  $u, v$ , 则  $w = u - v$  是下面问题的解.

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0, & x \in U_T \\ w = 0, & x \in \Gamma_T \end{cases} \quad (3.4)$$

设

$$e(t) \triangleq \frac{1}{2} \int_U w^2(x, t) dx, 0 \leq t \leq T.$$

则

$$\begin{aligned} e'(t) &= \int_U w w_t dx \left( ' = \frac{d}{dt} \right) \\ &= \int_U w \Delta w dx \\ &= - \int_U |Dw|^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

因此  $e(t) \leq e(0) = 0, 0 \leq t \leq T$ . 而  $e(t) \geq 0$ , 则  $w \equiv 0, x \in U_T$ .  $\square$

热传导方程的另一个比较神奇的问题是关于时间反向的唯一性. 设 $u, v$ 都是热传导方程在 $U_T$ 的光滑解, 且边界 $\partial U$ 上的条件相等:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in U_T \\ u = g, & x \in \partial U \times [0, T], \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0, & x \in U_T \\ v = g, & x \in \partial U \times [0, T], \end{cases} \quad (3.6)$$

注意我们没有在设在时间 $t = 0$ 处 $u = v$ . (与前一个定理相比, 这里少了 $t = 0$ 与 $t = T$ 处区域 $U$ 的边界条件. 也就是说, 在下面的定理中我们不知道 $w(x, 0)$ 在 $U$ 上的值, 不能像前一个定理那么简单)

**定理 3.1.4 (热传导方程反向唯一性(Backwards uniqueness))** 设 $u, v \in C^2(\overline{U}_T)$ 满足上面两个方程, 如果

$$u(x, T) = v(x, T) (x \in U),$$

则 $u \equiv v$ 在 $U_T$ 内成立.

换句话说, 如果 $U$ 上的两个温度分布在某个时间 $T > 0$ 相等, 且在 $0 \leq t \leq T$ 范围内有相同边界值, 则这两个温度分布在 $U$ 内的所有 $T$ 时刻之前都一定相等, 这一点都不显然.

**证明:** 记 $w = u - v$ , 仿照前面证明, 记

$$e(t) \triangleq \frac{1}{2} \int_U w^2(x, t) dx, (0 \leq t \leq T),$$

则

$$e'(t) = - \int_U |Dw|^2 dx,$$

另外(注意 $w_t = \Delta w$ )

$$e''(t) = -2 \int_U Dw \cdot Dw_t dx = 2 \int_U \Delta w w_t dx = 2 \int_U (\Delta w)^2 dx.$$

由于 $w = 0$ 在 $\partial U$ 成立, 则分部积分得

$$\int_U |Dw|^2 dx = - \int_U w \Delta w dx \leq \left( \int_U w^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_U (\Delta w)^2 dx \right)^{1/2}.$$

回顾 $e(t), e'(t), e''(t)$ 的表达式, 得

$$(e'(t))^2 \leq e(t) e''(t) (0 \leq t \leq T).$$

如果 $e(t) = 0$ 对所有 $0 \leq t \leq T$ 成立, 则我们证完了. 若不然, 存在区间 $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ 使得 $e(t) > 0, t_1 \leq t < t_2, e(t_2) = 0$ . 记

$$f(t) = \log e(t), t_1 \leq t < t_2,$$

则

$$f''(t) = \frac{e''(t)}{e(t)} - \frac{e'(t)^2}{e(t)^2} \geq 0.$$

所以在区间 $(t_1, t_2)$ 为凸函数, 因此对于 $0 < \lambda < 1, t_1 < t < t_2$ , 有

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)t_1 + \lambda t) &\leq (1-\lambda)f(t_1) + \lambda f(t), \\ \Leftrightarrow e((1-\lambda)t_1 + \lambda t) &\leq e(t_1)^{1-\lambda} e(t)^\lambda. \\ \Rightarrow 0 &\leq e((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) \leq e(t_1)^{1-\lambda} e(t_2)^\lambda. \end{aligned}$$

但是由 $e(t_2) = 0$ 可知 $e(t) = 0$ 在 $t_1 \leq t \leq t_2$ 成立, 矛盾. □

### 3.1.3 波动方程

在之前我们用d'Alembert公式说明了解的存在性, 那这个解是否唯一呢?

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, 且在边界处光滑. 又设 $U_T = U \times (0, T]$ ,  $\Gamma_T = \overline{U}_T - U_T$ ,  $T > 0$ . 看初始边界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & x \in U_T, \\ u = g, & x \in \Gamma_T, \\ u_t = h, & x \in U \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (3.7)$$

**定理 3.1.5 (波动方程的解的唯一性)** 上述方程至多存在一个解 $u \in C^2(\overline{U}_T)$ .

**证明:** 设 $u, v$ 都是解, 则 $w = u - v$ 是方程

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0, & x \in U_T, \\ w = 0, & x \in \Gamma_T, \\ w_t = 0, & x \in U \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (3.8)$$

的解. 定义

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_U w_t^2(x, t) + |Dw(x, t)|^2 dx, 0 \leq t \leq T.$$

则根据分部积分和边界条件, 可得

$$e'(t) = \int_U w_t w_{tt} + Dw \cdot Dw_t dx = \int_U w_t (w_{tt} - \Delta w) dx = 0.$$

则 $\forall 0 \leq t < T, e(t) = e(0) = 0, w_t, Dw \equiv 0$ 在 $U_T$ 内成立. 又由于 $w = 0$ 在 $U \times \{t = 0\}$ 成立, 则 $w \equiv 0$ 在 $U_T$ 内成立.

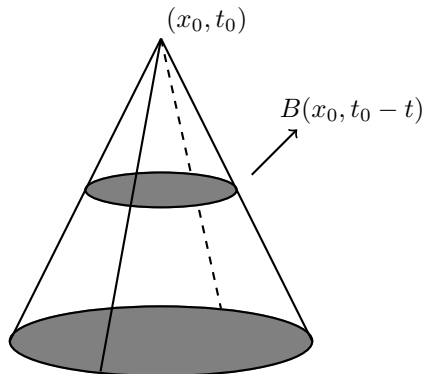
□

**注:** 证唯一性的关键是一开始构造的“能量”函数 $e(t)$ . 如果齐次方程有 $w_t$ , 则 $e(t)$ 里面含有 $w^2(x, t)$ ; 如果有 $w_{tt}$ , 则 $e(t)$ 里面含有 $w_t^2(x, t)$ . 如果要证 $w_{tt} - \Delta w + cw = 0$ 的唯一性, 可以考虑定义

$$e(t) = \int_U w_t^2(x, t) + |Dw(x, t)|^2 + w^2(x, t) dx, 0 \leq t \leq T.$$

下面我们看区域的独立性(依赖性). 设 $u \in C^2$ 满足 $u_{tt} - \Delta u = 0, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ , 固定 $x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0$ 并考虑反向的波形锥体, 顶点为 $(x_0, t_0)$ :

$$K(x_0, t_0) := \{(x, t) | 0 < t < t_0, |x - x_0| \leq t_0 - t\}.$$



**定理 3.1.6 (有限传播速度)** 若  $u \equiv u_t \equiv 0$  在  $B(x_0, t_0) \times \{t = 0\}$  成立, 则  $u \equiv 0$  在整个锥体  $K(x_0, t_0)$  成立.

特别地, 我们注意到任何  $B(x_0, t_0)$  外部的“扰动”都不会影响  $K(x_0, t_0)$  的解, 因此传播速度有限. 我们已经在  $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$  时  $g = u, h = u_t$  充分光滑的情况下, 通过前面的表示公式知道这个事实. 关键要用能量方法来提供更简单的证明.

**证明:** 定义局部能量

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0-t)} u_t^2(x, t) + |Du(x, t)|^2 dx, 0 \leq t \leq t_0.$$

则

$$\begin{aligned} e'(t) &= \int_{B(x_0, t_0-t)} u_t u_{tt} + Du \cdot Du_t dx - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} u_t^2 + |Du|^2 dS \\ &= \int_{B(x_0, t_0-t)} u_t (u_{tt} - \Delta u) dx + \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u_t dS \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} u_t^2 + |Du|^2 dS \\ &= \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u_t - \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} |Du|^2 dS. \end{aligned}$$

由于

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u_t \right| \leq |u_t| |Du| \leq \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} |Du|^2,$$

则  $e'(t) \leq 0 \Rightarrow e(t) \leq e(0) = 0, \forall 0 \leq t \leq t_0 \Rightarrow u_t, Du \equiv 0$ , 则  $u \equiv 0$  在圆锥  $K(x_0, t_0)$  内成立.  $\square$

**例 3.1.1 (能量的均分)** 设  $u$  是下面一维波动方程的解:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g, u_t = h, & x \in \mathbb{R}, t = 0. \end{cases}$$

并设  $g, h$  有紧支集. 动能为

$$k(t) \triangleq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) dx,$$

势能为

$$p(t) \triangleq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x, t) dx.$$

证明: (1)  $k(t) + p(t)$  关于  $t$  是个常数; (2)  $k(t) = p(t)$  对所有充分大的时间  $t$  成立.

**证明:** (1) 根据 d'Alembert 公式

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy, x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

由于  $g, h$  具有紧支集, 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} u = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} u_t = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} u_x = 0$ .

$$\begin{aligned} e(t) &\triangleq k(t) + p(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) dx \\ \Rightarrow e'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) u_{tt}(x, t) + u_x(x, t) u_{xt}(x, t) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) u_t(x, t) dx + u_x u_t \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) (u_{tt} - u_{xx}) dx + 0 \quad \text{【g, h 有紧支集】} \\ &= 0 \end{aligned}$$

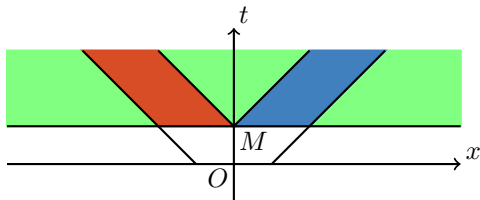
则  $k(t) + p(t)$  是一个常数.

(2)事实上这个命题想表达的是 $g, h$ 非零的部分对整个解的影响有限(前面的定理).

$g, h$ 具有紧支集, 则存在 $M$ 使得当 $t > M$ 时 $g = h = 0$ . 根据d'Alembert公式,

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{2}[g'(x+t) - g'(x-t)] + \frac{1}{2}[h(x+t) + h(x-t)], \\ u_x &= \frac{1}{2}[g'(x+t) + g'(x-t)] + \frac{1}{2}[h(x+t) - h(x-t)]. \end{aligned}$$

固定 $t > M$ , 我们现在要证 $u_t^2 = u_x^2$ , 于是讨论 $x$ 与 $t$ 的关系.



(i)  $-M \leq x-t \leq M$  即  $0 < t-M \leq x \leq t+M$  时,  $h(x+t) = g(x+t) = 0$ , 则

$$u_t^2 = \frac{1}{4}g'(x-t)^2 + \frac{1}{4}h(x-t)^2 - \frac{1}{2}g'(x-t)h(x-t) = u_x^2.$$

(ii)  $-M \leq x+t \leq M$  即  $-t-M \leq x \leq -t+M < 0$  时,  $h(x-t) = g(x-t) = 0$ , 则

$$u_t^2 = \frac{1}{4}g'(x-t)^2 + \frac{1}{4}h(x+t)^2 + \frac{1}{2}g'(x+t)h(x+t) = u_x^2.$$

(iii) 在其余情况:  $g' = h = 0$ .

因此当 $t > M$ 时 $k(t) = p(t)$ . □

## § 3.2 分离变量法

我们先回顾求初边值问题的波动方程的步骤. 为了简单起见, 仅对Dirichlet 初值条件问题求解, 而Robin条件、Neumann条件可以参考Strauss的偏微分方程书.

**例 3.2.1 (波动方程)** 考虑下面问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0. \end{cases}$$

**Step 1.** 考虑如下形式的变量分离形式:  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . 首先我们找出尽可能多的变量分离解. (显然我们不希望搞出 $X(x)T(t) \equiv 0$ , 这样没意义). 把这个式子代入原问题, 可得

$$XT'' = c^2 X''T \iff -\frac{T''}{c^2 T} = -\frac{X''}{X} = \lambda.$$

后面取 $= \lambda$ , 是因为 $-\frac{T''}{c^2 T}$ 是关于 $t$ 的函数, 而 $-\frac{X''}{X}$ 是关于 $x$ 的函数, 它们相等, 则必为常数. 事实上,  $\lambda > 0$ , 我们在稍后会指出. 记 $\beta^2 = \lambda, \beta > 0$ , 则有如下ODE:

$$X'' + \beta^2 X = 0, T'' + c^2 \beta^2 T = 0,$$

它们的通解为(这里 $A, B, C, D$ 为常数)

$$\begin{aligned} X(x) &= C \cos \beta x + D \sin \beta x, \\ T(t) &= A \cos \beta c t + B \sin \beta c t, \end{aligned}$$

**Step 2.**把边界条件 $X(0) = 0, X(l) = 0$ 代进 $X(x)$ , 可以得到

$$0 = X(0) = C, 0 = X(l) = D \sin \beta l.$$

我们对零解不感兴趣, 则 $\beta l = n\pi$ 为非零解, 因此

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, 3, \dots$$

是特解. 于是我们找到无限多个分离变量形式的解, 为

$$u_n(x, t) = \left( A_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, 3, \dots$$

这里 $A_n, B_n$ 是常数. 把它们叠加起来, 有

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, 3, \dots$$

**Step 3.**代入初始条件, 有

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_n A_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \\ \psi(x) &= \sum_n \frac{n\pi c}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned}$$

这个形式非常的特殊, 可以想到Fourier展开. 能否用 $\phi, \psi$ 表示 $A_n, B_n$ 呢? (在这里)能, 但是在这里关于Fourier展开的内容就不提了, 这是属于数学分析B的内容.

最终我们可以得到

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \\ B_n &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

其实更关键的是利用了三角函数作为正交函数系的特点, 前面提到过的Robin初值问题得到的一系列函数不是正交的, 所以要作进一步讨论(见Strauss).

我们还要讨论收敛性和无穷级数的可微性(Sturm-Liouville理论), 这部分证明比较简单, 不断分部积分就行了, 可以参考姜礼尚等编著的《数学物理方程》. 在此不做展示.

**注:** 如果问题是非齐次的, 即

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t), 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0. \end{cases}$$

这时用Duhamel原理, 先拆成两个方程

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t), 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0. \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0. \end{cases}$$

第二个问题与前面的一样, 第一个问题只需考虑

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx}, 0 < x < l, t > \tau \\ w(x, \tau) = \varphi(x), w_t(x, \tau) = f(x, \tau), \\ w(0, t) = 0, u(l, t) = 0. \end{cases}$$

用Duhamel原理,  $u_1(x, t) = \int_0^t w(x, t, \tau) d\tau$  就是拆分之后第一个问题的解. 注意求解w需要作变量代换  $t' = t - \tau$ .

**例 3.2.2 (热传导问题)** 考虑如下问题:

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \phi(x). \end{cases}$$

同样, 考虑  $u = T(t)X(x)$ , 这时得到

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

则  $T' = -\lambda kT$ , 它的通解为  $T(t) = Ae^{-\lambda kt}$ . 另外,  $-X'' = \lambda X, X(0) = X(l) = 0$ , 这个和前面波动方程一模一样, 因此仿照前面,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi/l)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

代入初始条件, 可得

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \implies A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

我们再次用Fourier的三角级数展开得到了分离变量的解.

**注:**  $\lambda_n = (n\pi/l)^2$  叫特征值, 特征函数是  $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$ . 这么称呼是有原因的, 它们满足

$$-\frac{d^2}{dx^2} X = \lambda X, X(0) = X(l) = 0.$$

记  $A$  代表算子  $-\frac{d^2}{dx^2}$ , 它作用于满足Dirichlet边界条件的函数. 则这个ODE形如  $AX = \lambda X$ . 类比线性代数中的特征值即可, 只不过这个矩阵  $A$  不是  $N$  阶方阵, 而是无穷阶方阵, 它的特征值是  $\frac{\pi^2}{l^2}, \frac{4\pi^2}{l^2}, \frac{9\pi^2}{l^2}, \dots$ , 所以你完全可以说自己在处理无穷维的线性代数问题.

**注:** 现在来解释为什么前面两个例子中的特征值为正.

(1) 若特征值为0, 则  $X'' = 0, X(x) = C + Dx$ , 但  $X(0) = X(l) = 0$ , 则  $C = D = 0$ , 则  $X \equiv 0$ , 不满足特征向量(特征函数)非零的条件.

(2) 若  $\lambda$  是负数, 则可以写  $\lambda = -\gamma^2$ , 则  $X(x) = C \cosh \gamma x + D \sinh \gamma x$ , 而  $0 = X(0) = C, 0 = X(l) = D \sinh \gamma l$ , 则  $D = 0$ , 因为  $\sinh \gamma l \neq 0$ , 从而  $X \equiv 0$ , 不满足.

(3) 若  $\lambda$  是复数, 记  $\pm \gamma$  是  $-\lambda$  的两个平方根, 则  $X(x) = Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x}$ , 则  $0 = X(0) = C + D, 0 = Ce^{\gamma l} + De^{-\gamma l}$ , 则  $e^{2\gamma l} = 1$ , 则  $\text{Re}(\gamma) = 0, 2l\text{Im}(\gamma) = 2\pi n$ , 则  $\gamma = n\pi i/l, \lambda = -\gamma^2 = n^2\pi^2/l^2$ , 这是正实数, 矛盾.



### 3.2.1 二维情形

**例 3.2.3** 考虑矩形膜的振动问题,  $u = u(x, y, t)$ ,  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ ,  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ :

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, x \in \Omega \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), u_t|_{t=0} = \psi(x, y) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

首先分离 $t, x, y$ :  $u(x, y, t) = T(t)v(x, y)$ , 原问题变成

$$T''v = T(v_{xx} + v_{yy}) \Rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{v_{xx} + v_{yy}}{v} = -\lambda,$$

这里 $\lambda > 0$ (仿照前面分析), 则

$$T'' + \lambda T = 0, v_{xx} + v_{yy} + \lambda v = 0,$$

进一步作分离变量:  $v(x, y) = X(x)Y(y)$ , 则

$$X''Y + Y''X + \lambda XY = 0, \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0.$$

记 $-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} + \lambda = \alpha$ . 另外, 边界条件可以化为 $X|_{x=0} = X|_{x=a} = Y|_{y=0} = Y|_{y=b} = 0$ , 解 $X(x), Y(y)$ 的ODE, 得到

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \\ \beta_n &= \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, Y_m(y) = D_m \sin \frac{m\pi y}{b}. \end{aligned}$$

由于 $\lambda_{nm} = \alpha_n + \beta_m = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$ , 则可以得到通解

$$\begin{aligned} T_{nm}(t) &= \tilde{c}_{nm} \cos \sqrt{\lambda_{nm}}t + \tilde{d}_{nm} \sin \sqrt{\lambda_{nm}}t, \\ \Rightarrow u_{nm}(x, y, t) &= X_n(x)Y_m(y)T_{nm}(t), \\ \Rightarrow u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{nm}(x, y, t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_{nm} \cos \left( \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} t \right) + D_{nm} \sin \left( \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} t \right) \right] \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \end{aligned}$$

根据初始条件, 可以得到(步骤略)

$$\begin{aligned} C_{nm} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \varphi(\xi, \zeta) \sin \frac{n\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi\zeta}{b} d\xi d\zeta, \\ D_{nm} &= \frac{4}{\pi \sqrt{n^2 b^2 + m^2 a^2}} \int_0^a \int_0^b \psi(\xi, \zeta) \sin \frac{n\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi\zeta}{b} d\xi d\zeta. \end{aligned}$$

**注:** 如果给定的区域 $\Omega$ 是个圆盘, 这时需要极坐标变换, 可能要用到Bessel函数有关的内容. 这部分就跳过了.

**例 3.2.4 (Laplace方程)** 分离变量法推导圆盘上的Poisson公式: 其中 $u = u(x, y)$ ,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ .

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x^2 + y^2 \leq l^2, \\ u|_{x^2+y^2=l^2} = f(\theta). \end{cases}$$

作变量代换后, 问题变成

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \\ u|_{r=l} = f(\theta). \end{cases}$$

设  $u = R(r)T(\theta)$ , 则可化为  $\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{T''}{T} = \lambda$ ,  $\lambda$  是常数. 注意  $T(\theta)$  是  $2\pi$  周期函数. 根据  $\Delta u = 0 \Rightarrow |u(0)| < +\infty \Rightarrow |R(0)| < +\infty$ .

若  $\lambda = 0$ , 则  $T = B_0\theta + \frac{A_0}{2}$ , 而  $T$  为周期函数, 则  $B_0 = 0$ .

若  $\lambda < 0$ , 则  $T = Ae^{\sqrt{-\lambda}\theta} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$ , 不可能为周期函数 (否则  $T \equiv 0$ )

若  $\lambda > 0$ , 则  $T = A \cos \sqrt{\lambda}\theta + B \sin \sqrt{\lambda}\theta$ , 根据周期性可知  $n\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} = 2\pi, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda_n = n^2$ . 于是对应的特征函数是  $T_n = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$ .

注意  $r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$  是 Euler 方程, 作代换  $r = e^s$ , 最终可以解得  $R_n = C_n r^n + D_n r^{-n}$ , 但是  $|R_n(0)| < +\infty \Rightarrow D_n = 0$ . 因此, 有如下通解:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n.$$

根据边界条件可知

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi l^n} \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos n\xi d\xi, \\ b_n &= \frac{1}{\pi l^n} \int_0^{2\pi} f(\xi) \sin n\xi d\xi, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(\xi - \theta) \left(\frac{r}{l}\right)^n d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [e^{in(\xi-\theta)} + e^{-in(\xi-\theta)}] \left(\frac{r}{l}\right)^n d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{l} e^{i(\xi-\theta)}\right)^n + \left(\frac{r}{l} e^{-i(\xi-\theta)}\right)^n d\xi \\ &= \cdots = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{l^2 - r^2}{l^2 - 2rl \cos(\theta - \xi) + r^2} f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

再次得到了 Poisson 公式.

**例 3.2.5 (Evans, 4.1题)** 用分离变量法寻找满足下面偏微分方程的一个特解.

$$u_{x_1}^2 u_{x_1 x_1} + 2u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2} + u_{x_2}^2 u_{x_2 x_2} = 0, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

这里没有给任何边界条件, 而我们只是在求一个特解, 所以在求解过程中可以加条件. 作变量分离  $u = F(x_1) + G(x_2)$ , 代入原方程得  $(F')^2 F'' + (G')^2 G'' = 0$ , 则  $((F')^3)' = -((G')^3)' = \lambda$ , 从而

$$\begin{aligned} (F')^3 &= \lambda x_1 + b_1, (G')^3 = -\lambda x_2 + b_2, \\ \Rightarrow F' &= \sqrt[3]{\lambda x_1 + b_1}, G' = -\sqrt[3]{\lambda x_2 - b_2}, \end{aligned}$$

为了方便, 取  $b_1 = b_2 = 0, \lambda = 1$ , 则

$$F = x_1^{4/3}, G = -x_2^{4/3},$$

于是找到一组特解

$$u(x_1, x_2) = x_1^{4/3} - x_2^{4/3}.$$

注: 问题出自 G. Aronsson, Manuscripta Math. 47 (1984). 地址: <https://link.springer.com/article/>

10.1007/BF01174590

### 3.2.2 高维情形

**例 3.2.6 (高维热传导方程)** 设  $U \subset \mathbb{R}^n$  为有界开集, 边界光滑. 考虑下面的初边值热传导方程

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, x \in U, t > 0, \\ u = 0, x \in \partial U, t \geq 0, \\ u = g, x \in U, t = 0. \end{cases}$$

其中  $g: U \rightarrow \mathbb{R}$  给定.

我们猜测存在如下变量分离形式的解:

$$u(x, t) = v(t)w(x), x = (x_1, \dots, x_n) \in U, t \geq 0.$$

代入原问题, 得

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{\Delta w(x)}{w(x)}, \forall x \in U, t > 0,$$

所以等号两边都是常数, 记为  $-\lambda$ .

### ◆习题 4

1. (Strauss, 4.1.4题) 考虑如下在抵抗介质下波动方程:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} - r u_t, 0 < x < l, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

其中  $r$  为常数,  $0 < r < \frac{2\pi c}{l}$ . 求分离变量形式的解.

2. (Strauss, 4.1.6题) 考虑如下问题

$$\begin{cases} t u_t = u_{xx} + 2u, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

证明这个问题有无数多个解.

注: 一般来讲  $u$  关于  $t$  有几阶导数就有几个初始条件, 这题也是如此, 但解却没有唯一性.

3. (Strauss, 4.2.1题) 求下面混合边界条件的热传导方程的通解. (不知道初始条件)

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, 0 < x < l, \\ u(0, t) = u_x(l, t) = 0. \end{cases}$$

4. (Strauss, 4.2.2题) 求下面混合边界条件的波动方程的通解. (不知道初始条件)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, 0 < x < l, \\ u_x(0, t) = u(l, t) = 0. \end{cases}$$

5. (沙玛耶夫, P.100) 设  $Q = (0, l) \times (0, T)$ . 考虑边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( (\cos x + 2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left( \sin \frac{\pi x}{l} \right) u, x \in Q, \\ u|_{t=0} = \sin \frac{\pi x}{l}, u_t|_{t=0} = 0, 0 \leq x \leq l, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

(1) 求上面问题的解的 Fourier 展式.

(2)证明: 下面表达式与时间无关.

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^l \left[ (\cos x + 2)(u_x)^2 + \left( \sin \frac{\pi x}{l} \right) u^2 + (u_t)^2 \right] dx$$

6. (Strauss, 4.3.14题) 假设  $\lambda > 1$ . 求解下面的Euler方程:  $x^2 u'' + 3xu' + \lambda u = 0, 1 < x < e, u(1) = u(e) = 0$ .

7. (Strauss, 6.3.3题) 设  $D = \{0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$ , 求解

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u_y|_{y=0} = u_y|_{y=\pi} = 0, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = \cos^2 y. \end{cases}$$

8. (Strauss, 6.4.3题) 设  $r = \sqrt{x^2 + y^2}, u = u(x, y)$ , 求解

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < a \\ u|_{r=a} = \sin^3 \theta. \end{cases}$$

提示: 恒等式  $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ .

9. (陈学长PDE补充题) 二维Klein-Gordon方程. 设  $v(x, t) = v(x_1, x_2, t)$ , 寻找下面问题的一组特解.

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \Delta v - m^2 a^2 v, x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ v|_{t=0} = \varphi(x), v_t|_{t=0} = \psi(x), x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

其中  $a, m$  是正的常数.

10. (Evans, 4.2题) 考虑下面的Laplace方程:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{x_2=0} = 0, u_{x_2}|_{x_2=0} = \frac{1}{n} \sin(nx_1). \end{cases}$$

用分离变量法推导解  $u = \frac{1}{n^2} \sin(nx_1) \sinh(nx_2)$ ,

注:  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

11. 考虑下面的多孔介质方程(porous medium equation):

$$u_t = \Delta(u^\gamma) = 0, x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

这里  $u \geq 0$ , 且  $\gamma > 1$  为常数. 这是个非线性的扩散方程.

**例 3.2.7 (Hamilton-Jacobi方程)** 考虑  $u_t + H(Du) = 0, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . 其中  $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ .

下面寻找形如  $u(x, t) = w(x) + v(t)$  的解. 两边求导

$$u_t(x, t) = v'(t), Du = Dw, \Rightarrow 0 = u_t(x, t) + H(Du(x, t)) = v'(t) + H(Dw(x)).$$

从而(左边只和  $x$  有关, 右边只和  $t$  有关)

$$H(Dw(x)) = \mu = -v'(t), \exists \mu$$

可以推出:  $u(x, t) = w(x) - \mu t + b$  满足  $u_t + H(Du) = 0$ . □

例 3.2.8 (沙玛耶夫3.6题) 设  $u(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0$  满足 *Cauchy* 条件

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = (1+x^2)^\alpha e^{\beta x^2}, \end{cases}$$

求所有的  $\alpha, \beta$  使得  $\sup_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} |u(x, t)| < +\infty$ .

解: 由 d'Alembert 公式,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (1+\xi^2)^\alpha e^{\beta \xi^2} d\xi$$

若  $\beta > 0$ , 固定  $t$ , 令  $x \rightarrow \infty$ , 则  $u(x, t) \rightarrow \infty$ .

若  $\beta = 0$ , 考虑瑕点  $x-t=0$  处, 则有  $\alpha < -\frac{1}{2}$ .

若  $\beta < 0$ , 则  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

例 3.2.9 (沙玛耶夫, P121) 求解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, 0 < x < 1, 0 < y < 1, t > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0, \\ u|_{t=0} = \sin 3\pi x \sin 7\pi y, u_t|_{t=0} = -2 \sin \pi x \sin 4\pi y. \end{cases}$$

例 3.2.10 (沙玛耶夫, P112) 考虑边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, x \in [0, 1], t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=1} = f(t), \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

其中  $\varphi(x), \psi(x)$  光滑且有紧支集. 证明: 存在光滑函数  $f(t)$ , 使得这个问题的解  $u(t, x)$  在带形  $[0, 1] \times (0, \infty)$  中是无界函数.

例 3.2.11 (沙玛耶夫, P119) 设  $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < \pi, t > 0\}$ ,  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  满足

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, (x, t) \in \Omega, \\ u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=\pi} = f(t), \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

其中  $f \in C^\infty([0, \infty))$ ,  $f(0) = 0$ ,  $\sup_{t \in [0, \infty)} |f(t)| < +\infty$ . 问  $\sup_{\overline{\Omega}} |u(x, t)| < +\infty$  是否成立?

解: 设  $v = u - xf(t)$  (设  $v = u + p(x)f(t)$  代入边界条件可求  $p$ ), 则根据条件,  $v$  满足

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = -xf''(t), (x, t) \in \Omega, \\ v|_{x=0} = v_x|_{x=\pi} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, v_t|_{t=0} = -xf'(0), \end{cases}$$

把它拆成两个方程

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, (x, t) \in \Omega, \\ v|_{x=0} = v_x|_{x=\pi} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, v_t|_{t=0} = -xf'(0), \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = -xf''(t), (x, t) \in \Omega, \\ v|_{x=0} = v_x|_{x=\pi} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, v_t|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

第一个问题的解记为 $v_1$ , 第二个问题的解记为 $v_2$ . 为了方便起见, 考虑

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, (x, t) \in \Omega, \\ v|_{x=0} = v_x|_{x=\pi} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, v_t|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

的解为 $M(\psi)$ , 则 $v_1 = M(-xf'(0))$ ,  $v_2 = \int_0^t M(-xf''(t-\tau))d\tau$ . 下面设 $w = M(\psi)$ ,

$$w = X(x)T(t), \Rightarrow XT'' - a^2 X''T = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda,$$

这里 $\lambda > 0$ (原因看课堂笔记吧),  $X = A \sin \sqrt{\lambda}x + B \cos \sqrt{\lambda}x$ . 代入 $v|_{x=0} = 0$ 可得 $B = 0$ , 代入 $v_x|_{x=\pi} = 0$ 可得 $\cos \sqrt{\lambda}\pi = 0$ , 所以 $\sqrt{\lambda}\pi = -\frac{\pi}{2} + n\pi$ ,

于是, 特征值为 $\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2, n = 1, 2, \dots$ , 对应特征函数为 $X_n = A_n \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x$ .

由于 $T_n = C_n \sin(a\sqrt{\lambda_n}t) + D_n \cos(a\sqrt{\lambda_n}t)$ , 所以

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} X(x)T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \sin(a\sqrt{\lambda_n}t) + d_n \cos(a\sqrt{\lambda_n}t)\right) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x$$

由于 $w|_{t=0} = 0$ , 所以 $d_n \equiv 0$ ; 由于 $w_t|_{t=0} = \psi(x)$ , 则

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a\sqrt{\lambda_n}c_n \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x &= \psi(x) \\ \Rightarrow a\sqrt{\lambda_n}c_n \int_0^{\pi} \sin^2\left(n - \frac{1}{2}\right)xdx &= \int_0^{\pi} \psi(x) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)xdx \\ \Rightarrow c_n &= \frac{4}{(2n-1)a\pi} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)xdx. \end{aligned}$$

因此

$$M(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)a\pi} \left(\int_0^{\pi} \psi(\xi) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\xi d\xi\right) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right).$$

且我们有

$$\begin{aligned} v_1 = M(-xf'(0)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4f'(0)}{(2n-1)a\pi} \left(\int_0^{\pi} -\xi \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\xi d\xi\right) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16f'(0)(-1)^n}{(2n-1)^3a\pi} \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

它是收敛的, 当然有界. 另一方面,

$$\begin{aligned} v_2 &= \int_0^t M(-xf''(t-\tau))d\tau \\ &= \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4f''(0)}{(2n-1)a\pi} \left(\int_0^{\pi} (-\xi f''(t-\tau)) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\xi d\xi\right) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)d\tau \end{aligned}$$

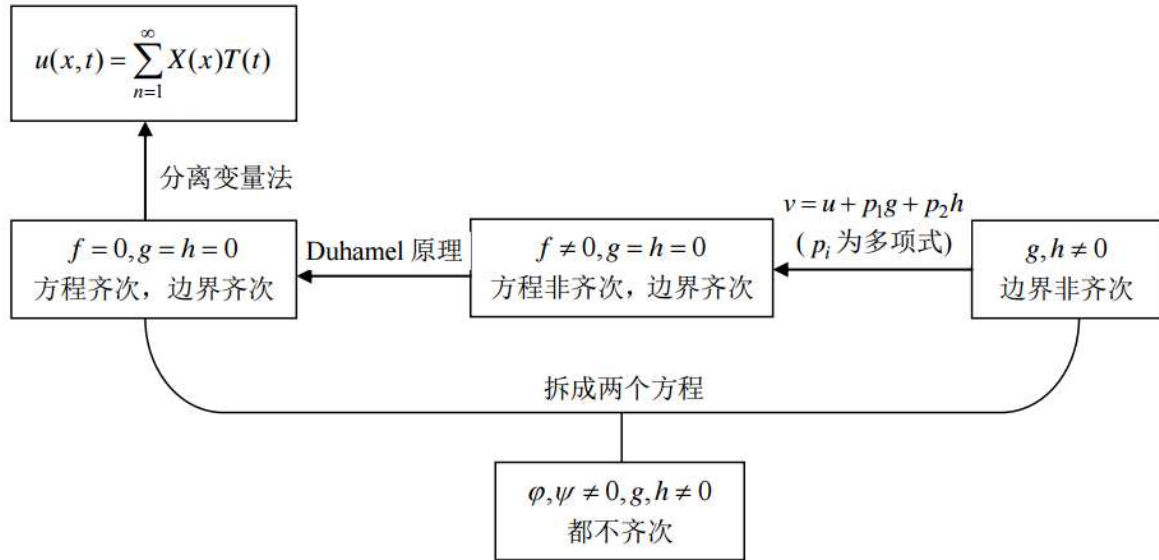
.....(计算量太大, 不算了)

小结:

考虑方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), \\ u|_{x=0} = g(t), u|_{x=l} = h(t). (\text{Cauchy初值}) \end{cases}$$

上面Cauchy初值改为Neumann初值条件或者Robin初值条件(详情见Strauss的偏微分方程书)



### § 3.3 Cole-Hopf变换

Cole-Hopf变换可以有效把非线性PDE 变成线性PDE.

**例 3.3.1** 求解下面的拟线性PDE

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u + b|Du|^2 = 0, x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u|_{t=0} = g(x), \end{cases}$$

其中 $a > 0$ . 这种非线性PDE在随机最优控制(stochastic optimal control)理论出现.

**解:** 不妨设 $u$ 是光滑解, 考虑形如

$$w := \phi(u)$$

的解. 这里 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑函数, 且表达式待定, 最终选择 $\phi$ 使得 $w$ 是个线性方程的解. 我们有

$$w_t = \phi'(u)u_t, \Delta w = \phi'(u)\Delta u + \phi''(u)|Du|^2.$$

所以方程化为

$$w_t = a\Delta w - [a\phi''(u) + b\phi'(u)]|Du|^2,$$

令 $a\phi'' + b\phi' = 0$ , 则

$$\phi(z) = e^{-\frac{bz}{a}} \text{ (Cole-Hopf变换)}$$

且问题化为

$$\begin{cases} w_t - a\Delta w = 0, x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ w|_{t=0} = e^{-\frac{bg(x)}{a}}, \end{cases}$$

根据热传导方程的基本解的公式, 可得

$$w(x, t) = \frac{1}{(4\pi at)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4at}} e^{-\frac{b}{a}g(y)} dy, x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

由于  $w = \phi(u) \Rightarrow u = -\frac{a}{b} \log w$ , 则

$$u(x, t) = -\frac{a}{b} \log \left( \frac{1}{(4\pi at)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4at}} e^{-\frac{b}{a}g(y)} dy \right), x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

是问题解. □

**例 3.3.2 (粘性Burgers方程)** 求解维数  $n = 1$  的初值问题

$$\begin{cases} u_t - au_{xx} + uu_x = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u|_{t=0} = g. \end{cases}$$

**解:** 设  $\boxed{u = w_x}$ , 则问题变为

$$\begin{cases} w_t - aw_{xx} + \frac{1}{2}w_x^2 = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ w_x|_{t=0} = g(x) \Leftrightarrow w|_{t=0} = \int g(x)dx, \end{cases}$$

变成了前一个例子. 设  $h(x) = \int g(x)dx + C$ , 则解为

$$w(x, t) = -2a \log \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left( -\frac{|x-y|^2}{4at} - \frac{h(y)}{2a} \right) dy \right)$$

则

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-y}{t} \exp \left( -\frac{|x-y|^2}{4at} - \frac{h(y)}{2a} \right) dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{|x-y|^2}{4at} - \frac{h(y)}{2a} \right) dy}$$

是问题的解. □

## ◆习题 5

### 1. 求解PDE

$$\begin{cases} u_t + (u_x)^2 = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = -x^2. \end{cases}$$

证明解在  $t = \frac{1}{4}$  处为无穷.

注: 参考: <https://math.stackexchange.com/questions/1655956/>.



## § 3.4 特征线法

### 3.4.1 基本理论

考虑一阶PDE

$$F(Du, u, x) = 0, x \in \Omega, \quad (3.9)$$

赋予边界条件

$$u = g, x \in \Gamma, \text{ 其中 } \Gamma \subseteq \partial\Omega, g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}.$$

不妨设  $F, g$  光滑.

特征线法是把PDE转化为ODE. 设  $u$  是解, 固定  $x \in \Omega$ , 我们想要通过寻找  $\Omega$  内曲线计算  $u(x)$ , 也就是说通过这个曲线, 如果知道一个点  $x^0$  上的值, 则这条曲线上所有函数值都知道. 事实上在边界上就可以知道这个值了, 所以关键在于找曲线.

设曲线  $\mathbf{x}(s) = (x_1(s), \dots, x_n(s))$ , 其中参数  $s \in I \subset \mathbb{R}, I$  是区间. 设  $u \in C^2$  是方程(??)的解, 定义

$$U(s) := u(\mathbf{x}(s)), \mathbf{p}(s) := Du(\mathbf{x}(s)),$$

这里  $\mathbf{p}(s) = (p_1(s), \dots, p_n(s)), p_i(s) = u_{x_i}(\mathbf{x}(s))$ . 则  $U(\cdot)$  记录了  $u$  在曲线上的值,  $\mathbf{p}(\cdot)$  记录了  $Du$  的值. 我们要选择函数  $\mathbf{x}(\cdot)$  使得  $U(\cdot), \mathbf{p}(\cdot)$  可以计算.

对  $\mathbf{p}(s)$  求导有

$$p'_i(s) = \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j}(\mathbf{x}(s)) x'_j(s)$$

这个表达式不够漂亮, 因为它包括了  $u$  的二阶导数. 另一方面, 我们可以对PDE(??)关于  $x_i$  求导, 可得

$$\sum_{j=1}^n F_{p_j}(Du, u, x) u_{x_j x_i} + F_U(Du, u, x) u_{x_i} + F_{x_i}(Du, u, x) = 0.$$

利用这个式子, 如果满足

$$\frac{dx_j(s)}{ds} = F_{p_j}(\mathbf{p}(s), U(s), \mathbf{x}(s))$$

则可以去掉二阶导数项, 并计算  $x = \mathbf{s}$  处的值. 则

$$p'_i(s) = -F_{x_i}(\mathbf{p}(s), U(s), \mathbf{x}(s)) - F_U(\mathbf{p}(s), U(s), \mathbf{x}(s)) p_i(s).$$

另外, 对  $U(s) := u(\mathbf{x}(s))$  求导可得

$$U'(s) = \sum_{j=1}^n u_{x_j}(\mathbf{x}(s)) x'_j(s) = \sum_{j=1}^n p_j(s) F_{p_j}(\mathbf{p}(s), U(s), \mathbf{x}(s)).$$

总结:

$$s \in I: \begin{cases} \mathbf{p}'(s) = -D_x(\mathbf{p}(s), U(s), \mathbf{x}(s)) - D_U F(\mathbf{p}(s), U(s), \mathbf{x}(s)) \mathbf{p}(s), \\ U'(s) = D_p(\mathbf{p}(s), U(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s), \\ \mathbf{x}'(s) = D_p(\mathbf{p}(s), U(s), \mathbf{x}(s)), \\ F(\mathbf{p}(s), U(s), \mathbf{x}(s)) \equiv 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

上面的  $p, U, x$  都叫特征. 其中  $x = x(s)$  是关于参数  $s$  的特征线.

### 3.4.2 线性的例子

先研究几个特别的例子. 设 $F$ 是线性的(一阶线性PDE): 考虑

$$F(Du, u, x) = \mathbf{b}(x) \cdot Du(x) + c(x)u(x) = 0, x \in U.$$

于是,  $F(p, U, x) = \mathbf{b}(x) \cdot p + c(x)U$ ,  $D_p F = \mathbf{b}(x)$ . 式(3.10)的第二、第三条式子变成

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s)) \\ U'(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) = -c(\mathbf{x}(s))U(s). \end{cases}$$

**例 3.4.1** 求PDE的通解:  $u_x + yu_y = 0$ .

**解:** 仿照前面的分析, 有

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \dot{y} = y, \\ \dot{U} = 0 \end{cases}$$

所以  $x = s, y = x_0 e^s, U(x(s), y(s)) = U(s, x_0 e^s) \equiv C_0$ , 取  $s = 0$  可得  $C_0 = U(0, x_0)$ . 则  $y = x_0 e^x, u(x, y) = U(x(s), y(s)) = U(0, e^{-x}y)$ .  $\square$

**注:** 曲线  $\begin{cases} x = s, \\ y = x_0 e^s \end{cases}$  即  $y = x_0 e^x$  就是特征线, 它经过  $(0, x_0)$ .

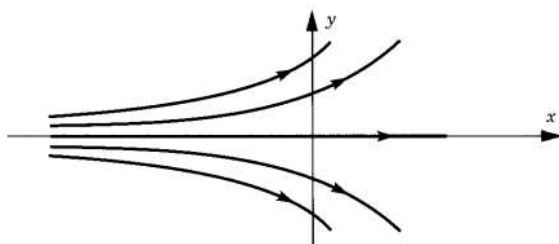


Figure 3

**例 3.4.2** 求解下面PDE:

$$\begin{cases} x_1 u_{x_2} - x_2 u_{x_1} = u, x_1 > 0, x_2 > 0, \\ u|_{x_2=0} = g(x_1), x_1 > 0. \end{cases}$$

**解:** 仿照前面的分析, 有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{U} = U \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1(s) = C \cos s, x_2(s) = C \sin s, \\ U(s) = C_0 e^s, C_0 = g(x_1)|_{s=0} = g(C). \end{cases}$$

其中  $C \geq 0$  是常数,  $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$ . 下面我们选择  $s > 0, C > 0$  使得  $(x_1, x_2) = (C \cos s, C \sin s)$ . 取  $C = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, s = \arctan \frac{x_2}{x_1}$ , 则

$$u(x_1, x_2) = U(s) = g(C)e^s = g\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) e^{\arctan \frac{x_2}{x_1}}.$$

代回原方程验证可得这个确实是解.  $\square$

例 3.4.3 求解下面的PDE:

$$\begin{cases} x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + u_t + u = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2). \end{cases}$$

解: 记  $\frac{d}{ds}$ , 则仿照前面的分析, 设

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = x_2, (\dot{t} = 1 \text{ 可以省略, 改为把 } x_1, x_2 \text{ 看作 } t \text{ 的函数}) \\ \dot{U} = -U \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^t, x_2 = C_2 e^t, \\ U = C_0 e^{-t}, C_0 = \varphi(x_1, x_2)|_{t=0} = \varphi(C_1, C_2). \end{cases}$$

取  $C_1 = x_1 e^{-t}, C_2 = x_2 e^{-t}$ , 则

$$u(x_1, x_2, t) = U(t) = \varphi(x_1 e^{-t}, x_2 e^{-t}) e^{-t}.$$

代入原方程验证成立. □

注: 变式: 把方程改为  $x_2 u_{x_1} + x_1 u_{x_2} + u_t + u = 0$  你会做吗? 我做出来的结果是

$$u(x_1, x_2, t) = \varphi(x_1 \cosh t - x_2 \sinh t, x_2 \cosh t - x_1 \sinh t) e^{-t}$$

$$\text{其中 } \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

### 3.4.3 拟线性的例子

下面看F是拟线性(关于最高阶导数是线性): 形如

$$F(Du, u, x) = \mathbf{b}(x, u(x)) \cdot Du(x) + c(x, u(x)) = 0.$$

这样,  $F(p, U, x) = \mathbf{b}(x, U) \cdot p + c(x, U)$ , 则  $D_p F = \mathbf{b}(x, U)$ . 所以

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s), U(s)) \\ \dot{U}(s) = -c(\mathbf{x}(s), U(s)). \end{cases}$$

这是拟线性一阶PDE的特征方程.

例 3.4.4 求解下面的PDE:

$$\begin{cases} u_x + u_t = u^2, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = g(x). \end{cases}$$

解: 这里对应前面的  $\mathbf{b} = (1, 1), c = -U^2$ . 则

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \dot{t} = 1, \\ \dot{U} = U^2. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x(s) = x_0 + s, t(s) = s, \\ U(s) = \frac{U_0}{1 - sU_0} = \frac{g(x_0)}{1 - sg(x_0)}. \end{cases}$$

这里  $x_0 \in \mathbb{R}, s \geq 0$ . 固定一点  $(x, t) \in U$ , 选  $s > 0, x_0 \in \mathbb{R}$  使得  $(x, t) = (x_0 + s, s)$ , 我们取  $x_0 = x - t, s = t$ , 则

$$u(x) = u(x(s), t(s)) = U(s) = \frac{g(x - t)}{1 - tg(x - t)}.$$

当  $1 - tg(x, t) \neq 0$  时解有意义. □

例 3.4.5 求解完全非线性PDE

$$\begin{cases} u_{x_1}u_{x_2} = u, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > 0 \\ u|_{x_1=0} = x_2^2, x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

解: 这里  $F(p, U, x) = p_1p_2 - U$ , 特征方程为

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = p_1, \dot{p}_2 = p_2, \\ \dot{U} = 2p_1p_2, \\ \dot{x}_1 = p_2, \dot{x}_2 = p_1. \end{cases}$$

求解得

$$\begin{cases} x_1(s) = c_2(e^s - 1), x_2(s) = x_0 + c_1(e^s - 1), \\ U(s) = z_0 + c_1c_2(e^{2s} - 1), \\ p_1(s) = c_1e^s, p_2(s) = c_2e^s. \end{cases}$$

其中  $x_0 \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}, z_0 = (x_0)^2$ . 我们要确定  $(c_1, c_2)$  的值. 由于  $u|_{x_1=0} = x_2^2$ , 则  $c_2 = u_{x_2}(0, x_0) = 2x_0$ , 而原来PDE可以推出  $c_1c_2 = z_0 = (x_0)^2$ , 则  $c_1 = \frac{x_0}{2}$ . 所以

$$\begin{cases} x_1(s) = 2x_0(e^s - 1), x_2(s) = \frac{x_0}{2}(e^s + 1), \\ U(s) = (x_0)^2e^{2s}, \\ p_1(s) = \frac{x_0}{2}e^s, p_2(s) = 2x_0e^s. \end{cases}$$

下面固定  $(x_1, x_2) \in U$ , 选择  $s, x_0$  使得  $(x_1, x_2) = (2x_0(e^s - 1), \frac{x_0}{2}(e^s + 1))$ . 等式推出

$$x_0 = \frac{4x_2 - x_1}{4}, e^s = \frac{x_1 + 4x_2}{4x_2 - x_1}.$$

所以

$$u(x) = u(x_1(s), x_2(s)) = U(s) = \frac{(x_1 + 4x_2)^2}{16}.$$

再验证这是解即可. □

## ◆习题 6

例 3.4.6 (Evans, 3.4题) 求解下面的非齐次输运方程:

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = f(x, t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u|_{t=0} = g(x). \end{cases}$$

其中  $b \in \mathbb{R}^n$ .

解: 设  $= \frac{d}{dt}$ . 考虑

$$\begin{cases} \dot{x}_i = b_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ \dot{U} = f, U|_{t=0} = g(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} x_i = b_i t + C_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ U = g(C) + \int_0^t f(C + sb, s) ds \end{cases}$$

其中  $C = (C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{R}^n$ , 所以  $C = x - bt$ , 于是解为

$$u(x, t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (s - t)b, t) ds.$$

这与我们之前推导的时候得到的解一样. (之前推导是设  $U(s) = u(x + sb, t + s)$ )  $\square$

**例 3.4.7 (Evans, 2.1题)** 求解下面的PDE:

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du + cu = 0, x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u|_{t=0} = g(x). \end{cases}$$

其中  $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$  是常数.

**解:** 设  $U(s) = u(x + sb, t + s)$  得到  $\dot{U} = -cU$ , 用特征线法求解也一样. 最终结果为  $u(x, t) = g(x - tb)e^{-ct}$ .  $\square$

**例 3.4.8 (Evans, 3.5(1)题)** 用特征线法求解:

$$\begin{cases} x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = 2u, \\ u|_{x_2=1} = g(x_1). \end{cases}$$

**解:** 设  $= \frac{d}{ds}$ . 考虑

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = x_2, \\ \dot{U} = 2U, \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^s, x_2 = c_2 e^s. \\ U = C_0 e^{2s}, \end{cases}$$

由于  $x_2 = 1$  时  $e^s = \frac{1}{c_2}$ , 则  $C_0 c_2^{-2} = U|_{x_2=1} = g\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$ , 下面选  $s, c_1, c_2$  使得  $(x_1, x_2) = (c_1 e^s, c_2 e^s)$ . 取  $c_1 = x_1, c_2 = x_2, s = 0$ , 则

$$u(x_1, x_2) = U(s) = c_2^2 g\left(\frac{c_1}{c_2}\right) e^{-2s} = x_2^2 g\left(\frac{x_1}{x_2}\right).$$

代入原方程可以验证这是解.  $\square$

**例 3.4.9 (Evans, 3.5(3)题)** 用特征线法求解:

$$\begin{cases} uu_{x_1} + u_{x_2} = 1, \\ u|_{x_2=x_1} = \frac{1}{2}x_1. \end{cases}$$

**解:** 设  $= \frac{d}{ds}$ . 考虑

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = U, \dot{x}_2 = 1, \\ \dot{U} = 1, \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} U = s + z_0, \\ x_1 = \frac{1}{2}s^2 + z_0 s + \frac{1}{2}C_0, \\ x_2 = s \end{cases}$$

其中 $C_0, z_0$ 是常数( $C_0$ 系数为1/2是为了计算方便) 如果 $x_2 = x_1$ , 则

$$\frac{1}{2}s^2 + (z_0 - 1)s + \frac{1}{2}C_0 = 0, \Rightarrow s = -(z_0 - 1) + \sqrt{(z_0 - 1)^2 - C_0}.$$

则

$$\begin{aligned} U|_{s=-(z_0-1)+\sqrt{(z_0-1)^2-C_0}} \\ = u(-(z_0-1) + \sqrt{(z_0-1)^2 - C_0}, -(z_0-1) + \sqrt{(z_0-1)^2 - C_0}) \\ = -\frac{1}{2}(z_0-1) + \frac{1}{2}\sqrt{(z_0-1)^2 - C_0}. \end{aligned}$$

即 $\frac{1}{2}(z_0-1) - \frac{1}{2}\sqrt{(z_0-1)^2 - C_0} = z_0$ , 所以 $z_0 = -\frac{C_0}{4}$ .

下面选择 $s, C_0 > 0$ 使得 $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}s^2 - \frac{C_0}{4}s + \frac{C_0}{2}, s\right)$ . 则

$$\begin{cases} s = x_2, \\ C_0 = \frac{2x_2^2 - 4x_1}{x_2 - 2}. \end{cases}$$

因此

$$u(x_1, x_2) = U(x_1(s), x_2(s)) = x_2 - \frac{x_2^2 - 2x_1}{2x_2 - 4}.$$

验证它满足原问题. □

**例 3.4.10 (沙玛耶夫, P115)** 求解边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, t < 2x, x > 0, \\ u|_{t=2x} = \sin x, x > 0, \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

**解:** 用特征线法. 设 $v = u_t + u_x$ , 则 $v_t - v_x = 0, v|_{t=0} = u_t|_{t=0} + u_x|_{t=0} = 1$ . 记 $x = -t + c, V(t) = v(-t + c, t)$ , 则

$$\frac{dV}{dt} = -v_x + v_t = 0,$$

于是 $V(t) \equiv V(0) = v(c, 0) = 1$ , 则 $v(x, t) = 1, u_t + u_x = 1$ . 问题变成

$$\begin{cases} u_t + u_x = 1, t < 2x, x > 0, \\ u|_{t=2x} = \sin x, x > 0, \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

下面, 记 $x = t + c, U(t) = u(t + c, t)$ , 则

$$\frac{dU}{dt} = u_x + u_t = 1, U(t) = t + C_1.$$

下面用上边界条件. 让 $t = 2x$ , 则 $c = -x, t = -2c, c < 0$ 即 $x - t < 0$ , 则

$$U(-2c) = u(-c, -2c) = -\sin c.$$

所以 $C_1 = 2c - \sin c$ , 从而

$$u(x, t) = 2x - t - \sin(x - t).$$

而当 $x > t$ 时, 要用初始条件. 由 $U(0) = 0$ 可得 $C_1 = 0$ , 从而 $u(x, t) = t$ .

$$\text{综上, } u(x, t) = \begin{cases} 2x - t - \sin(x - t), & x < t, \\ t, & x \geq t. \end{cases}$$

□

**错解:** 用特征线法. 设  $v = u_t - u_x$ , 则  $v_t + v_x = 0, v|_{t=0} = u_t|_{t=0} - u_x|_{t=0} = 1$ . 记  $x = t + c, V(t) = v(t + c, t)$ , 则

$$\frac{dV}{dt} = v_x + v_t = 0,$$

于是  $V(t) \equiv V(0) = v(c, 0) = 1$ , 则  $v(x, t) = 1, u_t - u_x = 1$ .

下面, 记  $x = -t + c, U(t) = u(-t + c, t)$ , 则

$$\frac{dU}{dt} = -u_x + u_t = 1, U(t) = t + C_1.$$

下面用上边界条件. 让  $t = 2x$ , 则  $c = 3x, t = \frac{2}{3}c$ , 则

$$U\left(\frac{2}{3}c\right) = u\left(\frac{1}{3}c, \frac{2}{3}c\right) = \sin \frac{c}{3}.$$

所以  $C_1 = \sin \frac{c}{3} - \frac{2c}{3}$ .

$$\text{综上, } u(x, t) = \sin \frac{x+t}{3} + \frac{t-2x}{3}.$$

**例 3.4.11 (沙玛耶夫, P116)** 求解边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ (u_x + 2u)|_{x=0} = \sin t, & t > 0, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

**解:** 这是个半无界问题. 先把边界条件变成0. 设  $v = u + p(x) \sin t$ , 待定  $p(x)$  多项式, 则

$$(v_x + 2v)|_{x=0} = (u_x + 2u)|_{x=0} + p'(0) \sin t + 2p(0) \sin t = \sin t(1 + p'(0) + 2p(0)) = 0,$$

令  $p(x) = x - 1$  满足上面条件. 因此考虑  $v = u + (x - 1) \sin t$ . 则问题变成

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = -(x - 1) \sin t, & x > 0, t > 0, \\ (v_x + 2v)|_{x=0} = 0, & t > 0, \\ v|_{t=0} = 0, v_t|_{t=0} = x - 1. \end{cases}$$

记  $f(x, t) = -(x - 1) \sin t, \psi(x) = x - 1$ , 拆成两个方程:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ (v_x + 2v)|_{x=0} = 0, & t > 0, \\ v|_{t=0} = 0, v_t|_{t=0} = x - 1. \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = -(x - 1) \sin t, & x > 0, t > 0, \\ (v_x + 2v)|_{x=0} = 0, & t > 0, \\ v|_{t=0} = 0, v_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

对第一个问题, 作奇延拓:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ -\psi(-x), & x \leq 0. \end{cases} = \begin{cases} x - 1, & x > 0, \\ x + 1, & x \leq 0. \end{cases}$$

考虑

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}^1, t > 0, \\ U|_{t=0} = 0, U_t|_{t=0} = \Psi(x). \end{cases}$$

用d'Alembert公式可得

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(x) dx.$$

对第二个问题用Duhamel原理, 作奇延拓并用类似于第一个问题的方法来做即可. 最后复原为原来的 $u$ .  $\square$

例 3.4.12 (沙玛耶夫, P117) 求解混合条件的半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x > 0, t > 0, \\ (u_x + (\sin t)u)|_{x=0} = \sin t, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

## ◆习题 7

1. 求下面PDE的通解:

$$u_t + u_x + u^2 = 0$$

证明: 若  $0 < u|_{t=0} = f(x) \leq M < +\infty$ , 则  $\forall t > 0$  解都存在, 且  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0$ .

注: 参考<https://math.stackexchange.com/questions/3358358/general-solution-of-u-t-u-x-u^2>

2. 分别求下面PDE的解:

$$\begin{aligned} u_t + \frac{1}{3}u_x^3 &= 0, \\ u_t + \frac{1}{3}u_x^3 &= -cu, \end{aligned}$$

赋予初值

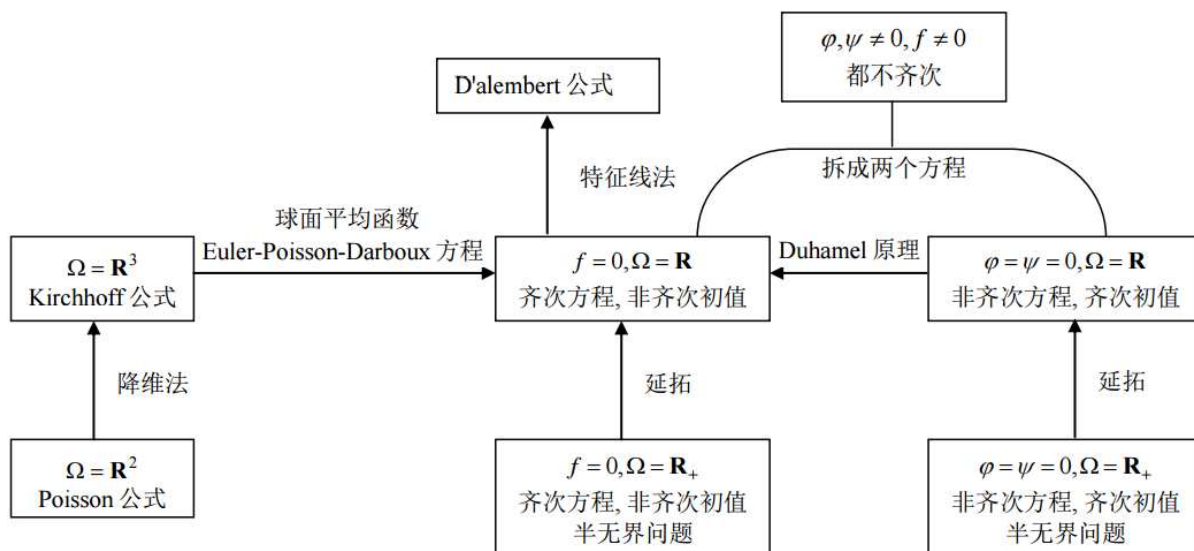
$$u(x, 0) = h(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{for } x < 0 \\ e^{-x} - 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

注: 参考<https://math.stackexchange.com/questions/2969684/ivp-for-nonlinear-pde-u-t-frac{1}{3}u-x^3-cu>

小结:

考虑波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), x \in \Omega, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$





### § 3.5 Fourier变换

**定义 3.5.1** 设  $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , 定义 *Fourier* 变换为

$$\hat{u}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} u(x) dx, y \in \mathbb{R}^n.$$

它的逆变换是

$$\check{u}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y} u(x) dx, y \in \mathbb{R}^n.$$

由于  $|e^{\pm ix \cdot y}| = 1, u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , 则两个积分都是收敛的.

下面先复习一下实变函数.

对于满足  $\phi \geq 0, \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$  的函数  $\phi$ , 记

$$\phi_k(x) = k^n \phi(kx).$$

根据变量代换可知  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(x) dx = 1$ .

**定理 3.5.1** 若  $1 \leq p < \infty, f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , 则  $f * \phi_k \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , 且  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f * \phi_k - f\|_p = 0$ .

**证明:** 参考周民强《实变函数论》第三版的定理6.22. □

**推论 3.5.2** 具有紧支集且无穷次可微的函数类  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  在  $L^p(\mathbb{R}^n)$  中稠密.

**注:**  $L^p$  函数在无穷处为0, 可以用具有紧支集的函数来逼近.

**定理 3.5.3 (微分性质)** 设  $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , 对任意多重指标  $\alpha$  都有  $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , 则  $(D^\alpha u)^\wedge = (iy)^\alpha \hat{u}$ .

**证明:** 若  $u$  光滑且具有紧支集, 则

$$\begin{aligned} (D^\alpha u)^\wedge(y) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} D^\alpha u(x) dx \\ &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha (e^{-ix \cdot y}) u(x) dx \text{ (分部积分 } |\alpha| \text{ 次)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} (iy)^\alpha u(x) dx \\ &= (iy)^\alpha \hat{u}(y). \end{aligned}$$

对于  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , 用紧支集函数来逼近即可. (可能说得不太清楚) □

**定理 3.5.4 (卷积性质)** 若  $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , 则  $u * v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , 且  $(u * v)^\wedge = (2\pi)^{n/2} \hat{u} \hat{v}$ .

**证明:** (1) 注意到

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt \right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)g(t)| dt dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \text{ (积分的平移不变性)} \\ &= \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty. \end{aligned}$$

所以  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

(2)注意到

$$\begin{aligned}
 (u * v)^\wedge(y) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} \int_{\mathbb{R}^n} u(z)v(x-z)dzdx \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz \cdot y} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-z) \cdot y} u(z)v(x-z)dzdx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz \cdot y} u(z)dz \cdot \hat{v}(y) \text{ (积分平移不变性)} \\
 &= (2\pi)^{n/2} \hat{u}(y) \hat{v}(y)
 \end{aligned}$$

证明完毕. □

注: 关于卷积, 还有如下性质. (证明略)

- 交换律:  $f * g = g * f$ .
- 结合律:  $f * (g * h) = (f * g) * h$ .
- 求导:  $(f * g)' = f' * g = f * g'$ .
- 用Dirac函数卷积表示导数:  $\delta * f = f, \delta' * f = f'$ .

**例 3.5.1 (Strauss, 12.4.4题)** 若 $p(x)$ 是多项式,  $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 $g(x) = \int_a^b p(x-s)f(s)ds$ 也是多项式.

**证明:** 补充定义 $F(x) = f(x)\chi_{[a,b]}$ , 则 $F$ 是可积的. 不妨设 $p(x)$ 是 $n$ 次多项式, 则 $g(x) = p * F$ , 利用卷积的求导性质, 当 $k \geq n+1$ 时,  $(p * F)^{(k)} = p^{(k)} * F = 0$ , 所以 $p * F$ 是不超过 $n$ 次的多项式. □

**定理 3.5.5 (反演公式)** 设 $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , 则 $u = (\hat{u})^\vee$ .

下面, 如果 $n=1$ 即 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 它的Fourier变换是 $\hat{f}(y)$ , 则有如下性质:

- 线性性:  $(\alpha f + \beta g)^\wedge = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$ .
- 乘多项式性质:  $(x^k f)^\wedge = i^k \frac{d^k}{dy^k} \hat{f}(y)$ .
- 平移性质:  $(f(x-a))^\wedge = e^{-ia y} \hat{f}(y)$ .
- 逆平移性质:  $(e^{ia x} f(x-a))^\wedge = \hat{f}(y-a)$ .
- 伸缩性质:  $(f(ax))^\wedge = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{y}{a}\right) (a \neq 0)$ .

**例 3.5.2** Dirac函数 $\delta(x)$ 的Fourier变换与三角函数的关系. 根据平移性质,  $(\delta(x-a))^\wedge = e^{-ia y} \delta(y)$ . 所以

$$\left( \frac{1}{2} \delta(x+a) + \frac{1}{2} \delta(x-a) \right)^\wedge = \cos ay.$$

**例 3.5.3** 设 $f(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$ . 求 $\hat{f}(y) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{y^2}{4}}$ .

解: 代入表达式可得

$$\begin{aligned}
 \hat{f} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-ixy} dx \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{iy} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} d e^{-ixy} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{y} [e^{-x^2} e^{-ixy}]_{-\infty}^{+\infty} + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} e^{-ixy} dx \\
 &= \frac{2i}{y} (x e^{-x^2})^\wedge = -\frac{2}{y} \hat{f}'.
 \end{aligned}$$

求解ODE, 并利用

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

可知 $\hat{f}(y) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{y^2}{4}}$ . □

注: 一个有用的积分: (事实上是对 $e^{-x^2}$ 作Fourier逆变换中间得到的式子)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax-bx^2} dx = e^{-a^2/4b} \left(\frac{\pi}{b}\right)^{1/2}. \quad (3.11)$$

于是

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y - t|y|^2} dy = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_j y_j - t y_j^2} dy_j = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

例 3.5.4 (Bessel位势) 考虑如下PDE:

$$-\Delta u + u = f, x \in \mathbb{R}^n.$$

其中 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .

解: 对 $u$ 作Fourier变换, 利用微分性质可得

$$(1 + |y|^2) \hat{u}(y) = \hat{f}(y), y \in \mathbb{R}^n.$$

所以根据反演公式可得 $u = \left(\frac{\hat{f}}{1 + |y|^2}\right)^\vee$ .

当然得到这个式子是不够的, 还是有必要把表达式写清楚. 设 $\hat{B} = \frac{1}{1 + |y|^2}$ , 则由卷积性质,

$$u = \frac{f * B}{(2\pi)^{n/2}}.$$

所以现在的关键是把 $B$ 求出来. 根据 $\frac{1}{1 + |y|^2} = \int_0^\infty e^{-t(1 + |y|^2)} dt$ , 我们有:

$$\begin{aligned} B(x) &= \left(\frac{1}{1 + |y|^2}\right)^\vee = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1 + |y|^2} \cdot e^{iy \cdot x} dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty e^{-t} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y - t|y|^2} dy \right) dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dt \quad \text{【式(3.11)】} \\ &= \frac{1}{2^{n/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-t - \frac{|x|^2}{4t}}}{t^{n/2}} dt. \end{aligned}$$

把 $B$ 称作Bessel位势. 于是得到如下公式:

$$u = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-t - \frac{|x-y|^2}{4t}}}{t^{n/2}} f(y) dy dt.$$

例 3.5.5 (热传导方程) 考虑初值问题的热传导方程

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u = g, x \in \mathbb{R}^n, t = 0. \end{cases}$$

解: 对 $u$ 关于 $x$ 作Fourier变换得(用微分性质)

$$\begin{cases} \hat{u}_t - |y|^2 \hat{u} = 0, t > 0, \\ \hat{u} = \hat{g}, t = 0. \end{cases}$$

求解ODE可得 $\hat{u} = e^{-t|y|^2} \hat{g}$ . 因此(仿照前一例题)

$$u = \frac{g * F}{(2\pi)^{n/2}}.$$

其中 $\hat{F} = e^{-t|y|^2}$ , 根据式(3.11),

$$F = (e^{-t|y|^2})^\vee = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y - t|y|^2} dy = \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

由卷积公式可得

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy, x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

所以, 用Fourier变换再次得到了热传导方程的基本解.  $\square$

**定理 3.5.6 (Plancherel定理/Parseval恒等式)** 设  $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ , 则  $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , 且

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

**证明:** 若  $v, w \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , 由定义, 则  $\hat{v}, \hat{w} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , 则  $v\hat{w}, w\hat{v} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , 即  $e^{-ix \cdot y} v(x) w(y)$  是可积的. 由Fubini定理,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v(x) \hat{w}(x) dx &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} v(x) w(y) dy dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} v(x) w(y) d(x, y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} v(x) w(y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(x) w(x) dx \end{aligned}$$

根据式(3.11), 对  $\varepsilon > 0$ ,  $v_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon|x|^2}$ , 我们有  $\hat{v}_\varepsilon(y) = \frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}}$ . 因此用  $v_\varepsilon(x)$  代替前面的  $v(x)$  可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(y) e^{-\varepsilon|y|^2} dy = \frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x) e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}} dx.$$

.....

注: 在证明过程中, 我们推导的下面这个式子也挺实用的.

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x) \hat{w}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(x) w(x) dx$$

## ◆习题 8

1. (Strauss, 12.4.1题) 求解带对流的热传导方程

$$\begin{cases} u_t = \kappa u_{xx} + \mu u_x, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x). \end{cases}$$

其中  $u$  有界且  $\kappa > 0$ .

2. (Strauss, 12.3.9题) 用Fourier变换求解ODE:  $-y'' + a^2 y = \delta(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . 其中  $\delta(x)$  是Dirac函数.  
3. (Strauss, 12.4.3题) 求下面方程的有界解,  $m > 0, x \in \mathbb{R}^3$ .

$$-\Delta u + m^2 u = \delta(x).$$

4. (Strauss, 12.4.6题) 设  $x, y \in \mathbb{R}$ , 求解PDE

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, 0 < y < 1, -\infty < x < \infty. \\ u|_{y=0} = 0, u|_{y=1} = f(x). \end{cases}$$

5. (沙玛耶夫, 4.37) 考虑  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$  的PDE

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - nu, x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u|_{t=0} = e^{-(x_1+x_2+\dots+x_n)}. \end{cases}$$

求解这个PDE, 并求  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$ . (答案:  $u(t, x) = e^{-(x_1+x_2+\dots+x_n)}$ )

## 第4章 更多补充习题

### § 4.1 更多补充习题

例 4.1.1 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^N(N \geq 2)$ 中的光滑有界区域, 函数 $u, v$ 满足方程组

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ v_t = \Delta v - v + u, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

且 $u, v$ 充分光滑使得对 $(x, t)$ 的各阶求导可与积分号交换. 证明:

(1) 函数 $u$ 满足质量守恒性质: ( $u$ 的 $L_1$ 积分不随时间变化), 即证明 $u$ 满足

$$\int_{\Omega} u_0(x) dx = \int_{\Omega} u(x, t) dx, t > 0.$$

(2) 设泛函 $W(t) = \int_{\Omega} \left( u \ln u - uv + \frac{1}{2} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2} v^2 \right) dx$ , 充分利用方程组中第一个方程的结构与分部积分, 结合方程组, 证明 $W(t)$ 满足下面的等式关系:

$$\frac{dW}{dt}(t) = - \int_{\Omega} (v_t)^2 dx - \int_{\Omega} u |\nabla (\ln u - v)|^2 dx.$$

提示:  $\Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v) = \nabla \cdot \left( u \left( \frac{\nabla u}{u} - \nabla v \right) \right) = \nabla \cdot (u \nabla (\ln u - v))$ .

证明: (1) 设 $F(t) = \int_{\Omega} u(x, t) dx$ . 根据提示与散度定理,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_{\Omega} u_t dx = \int_{\Omega} \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v) dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} (\nabla u - u \nabla v) \cdot \nu dS \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS = 0. \end{aligned}$$

所以 $F(t)$ 是常数, 故 $F(t) = F(0)$ .

(2) 由于

$$W'(t) = \int_{\Omega} (u_t \ln u + u_t - u_t v - v_t u + \nabla v \cdot \nabla v_t + v v_t) dx,$$

我们分别计算其中各项即可. 由分部积分公式,

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v_t dx = - \int_{\Omega} v_t \Delta v dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} v_t \frac{\partial v}{\partial \nu} dS}_{\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0} = - \int_{\Omega} v_t (v_t + v - u) dx$$

所以

$$W'(t) = \int_{\Omega} [u_t (\ln u - v) + u_t] dx - \int_{\Omega} (v_t)^2 dx.$$

再计算第一项. 由(1)可知  $\int_{\Omega} u_t dx = 0$ . 令  $w = \ln u - v$ , 则  $\nabla w = \nabla(\ln u) - \nabla v = \frac{\nabla u}{u} - \nabla v$ , 所以

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t (\ln u - v) dx &= \int_{\Omega} (\Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v)) (\ln u - v) dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla (\ln u - v)) (\ln u - v) dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla w) w dx = \int_{\Omega} w \nabla u \cdot \nabla w + u w \Delta w dx. \quad (\text{展开}) \end{aligned}$$

在分部积分公式

$$\boxed{\int_{\Omega} u_{x_i} v dx = - \int_{\Omega} u v_{x_i} dx + \int_{\partial \Omega} u v \nu^i dS, i = 1, 2, \dots, n.}$$

中, 取  $v = w w_{x_i}$ , 可得

$$\int_{\Omega} u_{x_i} w w_{x_i} dx = - \int_{\Omega} \underbrace{u (w w_{x_i})_{x_i}}_{=u(w_{x_i} w_{x_i} + w w_{x_i x_i})} dx + \int_{\partial \Omega} u w w_{x_i} \nu^i dS, i = 1, 2, \dots, n.$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w \nabla u \cdot \nabla w dx &= - \int_{\Omega} (u |\nabla w|^2 + u w \Delta w) dx + \int_{\partial \Omega} u w \nabla w \cdot \boldsymbol{\nu} dx \\ &= - \int_{\Omega} (u |\nabla w|^2 + u w \Delta w) dx + \int_{\partial \Omega} u w \left( \frac{\nabla u}{u} - \nabla v \right) \cdot \boldsymbol{\nu} dx \\ &= - \int_{\Omega} (u |\nabla w|^2 + u w \Delta w) dx. \quad (\text{边界处法向导数为0}) \end{aligned}$$

最后再作整理即可得欲证式子. □