2018～2019学年离散数学笔记

南京大学数学系孙智伟老师授课
Fiddie整理
Ver 1.1

2022 年 2 月 28 日

Contents

特别鸣谢

由于本人精力有限, 难免在编辑过程中有笔误, 而南京大学数学系2018级的zst同学、Vanch同学、2019级的zyzmoonlight同学、2020级的zjq同学指出了许多处错误, 在此表示衷心的感谢!

第1章 数学基础与一阶逻辑

离散数学(discrete mathematics)包括: 数理逻辑、组合数学与图论、初等数论、可计算性理论、格与布尔代数、编码理论、集合论、抽象代数. 离散数学研究离散的数学结构, 与分析相对立, 于20世纪30年代兴起. Paul Erdos(1913-1996)对离散数学的发展作出重大贡献. 有人提出了Erdos Number来衡量人与Erdos的距离. R.L. Graham和他的夫人Fan Chung Graham都作了很大贡献. W.T. Gowers用Ramsay定理解决泛函分析问题.

D.E.Knuth发明了LaTeX, 他的《程序设计技巧》(The art of computer programming) 是全20世纪最伟大的计算机著作, 与数论有很大关系. **做这份离散数学笔记的语言正是LaTeX**. 而写这份离散数学笔记的人正是我——某名**NJU数学系学子**, 我参与运营的微信公众号**"数学兔的极大理想"**经常分享数学笔记! 如果您喜欢我的笔记, 不妨进行打赏, 以后我会分享更多的数学笔记! 本人QQ: 444631982, 如果有误欢迎指出!

支付宝 (fjddy) 微信 (fjddy)

§ 1.1 集合论的创立与第三次数学危机

1.1.1 Cantor集合论

集合论的创始人: Georg Cantor(1845-1918), 他生于圣彼得堡, 和Schwarz是朋友, 在1862年上大学, 1867成为数论方向博士. 1869年, Heine建议Cantor证明Fourier展式唯一性(1870年证出)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

上式收敛仍可能有间断点, 于是Cantor研究这些间断点构成的集合, 又转而研究集合论.

Cantor对集合的定义: 所谓集合, 就是把我的直观或思维中确定的相互间有明确区别的那些对象(叫集合的元素)看作一个整体来考虑.

定义 1.1.1 *如果存在集合X和Y的一一对应, 则称这两个集合是***等势***的$(X\approx Y)$, 或者说X与Y有相同的***基数***(cardinality), 即$|X|=|Y|$. 如果$A\approx\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$, 则称$A$是***可数的(可列的)***.*

例 1.1.1 *可数的例子.*

(1) $\{0,2,4,6,\cdots\}$可数, 因为可取$n\longmapsto 2n,\mathbb{N}\to 2\mathbb{N}$.

(2) 如果A,B可数, 则$A\cup B$可数: $\{a_0,b_0,a_1,b_1,\cdots\}$(重复删掉).

(3) 整数集$\mathbb{Z}$可数: $\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots\}$.

(4) 有理数集$\mathbb{Q}$可数: 分子+分母小的先数, 对$\dfrac{p}{q}$, 若$p+q$相同, 分子小的先数. 重复的删掉(方框部分):

$$\left\{\frac{0}{1},\boxed{\frac{0}{2}},\frac{1}{1},-\frac{1}{1},\boxed{\frac{0}{3}},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{2}{1},-\frac{2}{1},\cdots\right\}$$

名人语录:
(1)数学的精髓在于自由. ——Cantor
(2)Cantor的贡献可能是这一时代所能夸耀的最巨大的工作. ——Russell

例 1.1.2 (旅馆问题) 有可数个房间且住满人, 若再来一个客人, 可以让n号房间的人搬到$n+1$号, 让客人去0号房; 若再来可数个客人, 可让n号房间的人搬到$2n$号.

定义 1.1.2 所有有理系数非零多项式$P(x)$中, $P(x)$的零点叫**代数数**, 非代数数的复数叫**超越数**.

例 1.1.3 代数数与超越数例子.

(1) $r\in\mathbb{Q}$是$x-r=0$的根, 所以有理数必为代数数.
(2) 实的超越数是无理数.
(3) 已知π, e等少量几个是超越数.
(4) 定义$P(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k$的**高**(height)为:

$$h(p)=n+\sum_{k=0}^{n}|a_k|.$$

则$h(p)\le$常数c的$\mathbb{Z}[x]$只有有限个. $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$中, 高小的先数, 则$\mathbb{Z}[x]$可数, 它有n个根. 如果把它们列一下, 则全体代数数都可数.

Cantor用集合论证明了超越数比代数数多. 1873年, Cantor考虑实数集是否可数.

(1)小区间与大区间可以一一对应: $[0,1]\approx[a,b]$. 只需让$f(x)=a+(b-a)x$, 它是单射也是满射.

(2)开区间与闭区间一一对应: $[0,1]\approx(0,1]\approx[0,1)\approx(0,1)$. 让

$$f(0)=\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}(n=1,2,\cdots), 0<x<1.$$

且当x^{-1}不为2的幂次时$f(x)=x$. 则$f(x)$是$[0,1)$到$(0,1)$的一一对应.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{8} & & \cdots \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ 0 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{8} & & \cdots \end{array}\quad \text{(其他不动)}$$

同理, $[a,b]\approx[a,b)\approx(a,b]\approx(a,b)$.

(3)无穷区间与有限区间对应:

①$y=\tan x$是从$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 到$(-\infty,+\infty)$的一一对应;

②$f(x)=\dfrac{1}{1-x}, x\in[0,1)$是从$[0,1)$到$[1,+\infty)$的一一对应.

定理 1.1.1 实数轴上任意两端区间等势.

证明: 根据前面的(1)(2)(3)可得. □

定理 1.1.2 (Cantor,1873) 实数集$\mathbb{R}$不可数.

证明: 根据上面定理, $\mathbb{R} \approx [0,1]$. 假设$[0,1]$可数, 即$[0,1] \approx \mathbb{N}$, f是$\mathbb{N} \to [0,1]$的一一对应, 把$f(n)$写成

$$x_n = 0.x_{n_0}x_{n_1}x_{n_2}\cdots(\text{十进制})$$

其中$x_{n_i} \in \{0,1,\cdots,9\}$. 则

$$x_0 = 0.x_{00}x_{01}x_{02}x_{03}\cdots$$
$$x_1 = 0.x_{10}x_{11}x_{12}x_{13}\cdots$$
$$x_2 = 0.x_{20}x_{21}x_{22}x_{23}\cdots$$
$$x_3 = 0.x_{30}x_{31}x_{32}x_{33}\cdots$$
$$\cdots$$

取$a_n \in \{1,2,\cdots,8\}$使得$a_n \neq x_{nn}$ (不取0与9是防止有两种表示) 考虑$a = 0.a_0a_1a_2\cdots$(每一位都不是0或9), 则$a \in [0,1]$, 但是$a_n \neq x_{nn}, \forall n$, 则$a \neq x_n$, 这与$[0,1] = \{x_0,x_1,x_2,\cdots\}$矛盾. □

注: 上面的证明方法叫**对角线方法**. 定理表明, 实数集基数比自然数集基数大. 把$|\mathbb{N}|$记为$\aleph_0$(阿列夫零), 把$|\mathbb{R}|$记为$\aleph$(阿列夫). Crelle的杂志上记载了上面论文.

推论 1.1.3 实的超越数不可数.

注: (1)实的代数数可数.

注: (2)一条线上的点与n维立方体$[0,1]^n$上的点可以一一对应.

Kronecker(Crelle杂志的编辑)对集合论很抨击, 后来很多人反对集合论, Cantor很难发文章. 有数学家反对集合论是因为“信口开河”, 没给出一个超越数, 基数的概念是“雾中之雾”. 后来Cantor进了精神病院.

名人名言: 集合论是一种疾病. ——Poincaré

Cantor连续统假设: 没有集合X使$\aleph_0 < |X| < \aleph_1$.

定义 1.1.3 如果A与B的一个子集一一对应, 则说$A \preccurlyeq B(|A| \leq |B|)$. 如果$A \preccurlyeq B$但$A, B$不一一对应, 则说$A \prec B(|A| < |B|)$.

1.1.2 算术(自然数理论)是否自相矛盾

从集合论可以定义自然数$0 = \varnothing, 1 = \{0\}, 2 = \{0,1\}$. 1902年Russell发现Cantor的朴素(naive)集合论自相矛盾. 第三次数学危机与数学根基有关.

Russell悖论(Paradox): 如果$\{$集合$x : x \notin X\}$是个集合X, 则$X \in X \Leftrightarrow X \notin X$, 根据排中律, $X \in X$或$X \notin X$, 无论出现哪种情况都会有矛盾.

Cantor集合论中概括原理: $\{$集合$x : x$具有某种性质$\varphi(x)\}$是个集合.

定理 1.1.4 不存在基数最大的集合.

证明: Cantor发现$X \prec D(X) = \{X$的子集$\}$, 如果把所有集合拿来, 基数比原来就会大, 矛盾. □

理发师悖论: 南大仙林校区的理发师给且只给南大仙林校区不自己理发的人理发. 他该不该给自己理发?

说谎悖论: "我在说谎"对不对?

Perry悖论: 汉字只有有限个(不超过一百个汉字的句子有有限个), 而自然数有无限个, 故存在不能用不超过一百个汉字的句子描述的自然数, 有"不能用不超过一百个汉字的句子描述的最小的自然数", 小于一百个汉字描述了那个特定的自然数.

Gödel不完备定理(1931) 在一个相容的公理可数的包含算术的公理系统中, 无法证明其相容性, 且此系统有个命题α, 使得α与非α在系统中都不可证. (要相容性就没完备性)

1.1.3 关于数学基础形成的三个流派

1. 罗素为代表的逻辑主义（不是很成功）
2. Kronecker, Brouwer为代表的直觉主义（不接受排中律）
3. Hilbert为代表的形式主义：集合不应下定义(最基本的概念没法定义), 他主张建立公理系统, 但最终没建立, 因为要过分追求完美. 好的公理化系统要求: (1)公理之间独立, 不可互推. (2)相容性(不自相矛盾), (3)完备性(对的都有证明).

例 1.1.4 (公理化) *以Euclid平面几何为例.*

平行线公理: 过直线外一点可作唯一的一条直线与之平行(三角形内角和为180度用了此公理).

1830年Janos Bolyai设这个公理不成立, 推出了许多古怪定理, 但与前4个公理不矛盾.

1813年Gauss考虑过这个问题, 但因害怕被嘲讽而没公开.

Lobachevsky, 大学校长, 俄国人, 要发展一种新的几何, 保留前4个公理但第5个公理改成: "过直线外一点, 可作这条直线的至少两条平行线. "在他的大学校报公开发表, 这种几何叫Lobachevsky几何.

1850年Riemann发展了Riemann几何, 改为了"过直线外一点, 一条平行线都作不出来". 这是广义相对论的几何框架.

1866年证明了非欧几何不矛盾等价于Euclid几何不矛盾.

§1.2 命题联结词与合式公式

名人名言: 逻辑是不可战胜的, 因为要反对逻辑还得使用逻辑. ——R. Boutoux

数学根基在于一阶逻辑之上, 先讲命题验算(proposition calculus).

定义 1.2.1 (命题) *陈述客观世界事情的陈述句叫**命题**(proposition), 其特征性质是可分真假.*

命题的"真值"有两种: 真(true,T,1)、假(false,F,0), 常用$p, q, r \cdots$表示命题.

由简单命题造复杂命题时常用命题联结词: 如果..则.., 如果(如果(如果..则..)则..)则.., 但用文字写很难看, 故用符号$((p \to q) \to r) \to s$.

定义 1.2.2 (命题联结词) *有下面5种.*

1. **否定词(negation)**命题p的否定记为$\neg p$(非p).

$$\neg p\text{真} \Leftrightarrow p\text{假}.$$

例如: 若"$2+3=7$"表示p, 则$\neg p$表示$2+3\neq 7$.

2. **析取词(disjunction)**: $p\vee q$(p或q).

$$p\vee q\text{真} \Leftrightarrow p\text{真或}q\text{真}.$$

例如: p :It's a cat. q :It's a tiger. 则$p\vee q$:It's either a cat or a tiger or both.

3. **合取词(junction)**: $p\wedge q$(p并且q).

$$p\wedge q\text{真} \Leftrightarrow p,q\text{都真}.$$

例如: p :He can sing songs. q :She can dance well. 则$p\wedge q$:He can sing songs while she can dance well.

4. **蕴含词(implication)**$p\to q$(p蕴涵q, p only if q).

$$p\to q\text{真} \Leftrightarrow p\text{假}, \text{或}p,q\text{都真}.$$

$p\to q$成立时, p为q的充分条件(sufficient condition), q为p的必要条件(necessary condition).

5. **等价词(equivalence, biconditional)**$p\leftrightarrow q$ (当且仅当, 等价, if and only iff, iff).
$p\leftrightarrow q$真, 指p,q同时真或者同时假, 相当于$p\to q$(p only if q)且$q\to p$(p if q). 此时p是q的充分必要条件. 例如: p :You can take the flight. q :You buy a ticket. $p\leftrightarrow q$:You can take the flight if and only if you buy a ticket.

1.2.1 命题演算中的合式公式

(1)命题符号是合式公式.
(2)如果α是合式公式, 则$\neg\alpha,\alpha\vee\beta,\alpha\wedge\beta,\alpha\to\beta,\alpha\leftrightarrow\beta$也是.
(3)合式公式仅限于上法所得.
省略括号时, 规定否定词级别最高, 如$(\neg\alpha)\to\beta$即$\neg\alpha\to\beta$.
讨论两个命题的关系不用联结词, 比如$p\leftrightarrow q\Leftrightarrow(p\to q)\wedge(q\to p)$.
$p\to q$的逆命题指的是$q\to p$, 逆否命题指的是$\neg q\to\neg p$.

例 1.2.1 *p与q恰好有一个成立, 可表示为$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$.*

George Boole(1815-1866)首先引入了命题联结词, 讨论命题验算. 1854年《The Law of Thought》是他的成名作, 把命题逻辑代数化.

习题 1 (Week 2) *将下列语句翻译成命题逻辑表达式. (用p,q,r表示命题, 再写好合式公式)*

(1)You can access the Internet from campus only if you are in computer science major or you are not a freshman.

(2)You are not a top student, unless you can work out this problem.

§ 1.3 命题的等价与永真公式

定义 1.3.1 设命题(合式公式)φ中共有n个命题变元$p_1, \cdots, p_n$, 对$p_1, \cdots, p_n$分别指定真值$\delta_1, \cdots, \delta_n (\delta_i \in \{0,1\})$, 则称$\varphi$有个**赋值(指派)**$(p_1, \cdots, p_n) = (\delta_1, \cdots, \delta_n)$.

如果此赋值使得φ真, 则称它为φ的**成真赋值**. 如果此赋值使得φ假, 则称它为φ的**成假赋值**. 如果在任何赋值下φ都真, 则称φ为**永真公式(重言式)**. 如果φ有成真公式, 则称φ为**可满足的**. φ永真时, 称φ为**逻辑规律**.

对于命题公式α与β, 如果在任何赋值之下, α, β同真假, 则称α与β**等价**, 记为

$$\alpha \equiv \beta,$$

相当于$\alpha \leftrightarrow \beta$永真.

注: $\alpha \equiv \beta$表示的是两个命题之间的关系, 而$\alpha \leftrightarrow \beta$只是一个命题.

真值表(truth table):

	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	p
2^n个	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	

例 1.3.1 最简单的命题联结词的真值表.

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

1.3.1 命题演算的一些基本的逻辑规律

注: 画真值表可以严格证明.

1. 关于否定词:
   (1) $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$.
   (2) $\alpha \vee \neg\alpha$.(排中律)
   (3) $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$.(矛盾律)
   (4) $(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$.
2. 关于蕴含词:
   (1) $\alpha \to \alpha$.
   (2) $\alpha \to (\alpha \to \beta) \equiv \alpha \to \beta$.
   (3) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$.
   (4) $(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$.
3. 关于等价词:
   (1) $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$(非常好用).
   (2) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \leftrightarrow \beta))$.

4. 关于析取词与合取词:
   (1) $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$.(幂等律)
   (2) $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha, \alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$.(交换律)
   (3) $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma), (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.(结合律)
   (4) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha, \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$. (吸收律)
   (5) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma), \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \beta)$.
   (6) $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta, \neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.(de Morgan律,好用) either or的否定是neither nor
   (7) $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$. (好用)
   (8) $(\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma) \equiv \alpha \to (\beta \wedge \gamma)$, $(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \to \gamma$,
   $(\alpha \to \beta) \vee (\alpha \to \gamma) \equiv \alpha \to (\beta \vee \gamma)$, $(\alpha \to \gamma) \vee (\beta \to \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \to \gamma$.

例 1.3.2 *证明de Morgan律.*

证明: 只需要注意到:

$$\neg(\alpha \vee \beta)\text{真} \Leftrightarrow \alpha \vee \beta\text{假} \Leftrightarrow \alpha, \beta\text{都假} \Leftrightarrow \neg\alpha, \neg\beta\text{都真} \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta\text{真}.$$
$$\neg(\alpha \wedge \beta)\text{假} \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta\text{真} \Leftrightarrow \alpha, \beta\text{都真} \Leftrightarrow \neg\alpha, \neg\beta\text{都假} \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta\text{假}.$$

注: 第一行证明完以后, $\alpha \vee \beta \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$, 把$\alpha$换为$\neg\alpha$,$\beta$换为$\neg\beta$即可证出第二行.

例 1.3.3 *证明$(\alpha \to \gamma) \vee (\beta \to \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \to \gamma$.*

证明:

$$\begin{aligned}
(\alpha \to \gamma) \vee (\beta \to \gamma) &\equiv (\neg\alpha \vee \gamma) \vee (\neg\beta \vee \gamma) && (\text{用}4(7)) \\
&\equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta) \vee \gamma && (\text{结合律}) \\
&\equiv \neg(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma && (\text{de Morgan}) \\
&\equiv (\alpha \wedge \beta) \to \gamma.\square && (\text{用}4(7))
\end{aligned}$$

□

例 1.3.4 *证明$\alpha \to (\beta \to \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \to \gamma$.*

证明:

$$\begin{aligned}
\alpha \to (\beta \to \gamma) &\equiv \neg\alpha \vee (\neg\beta \vee \gamma) && (\text{用}4(7)) \\
&\equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta) \vee \gamma && (\text{结合律}) \\
&\equiv \neg(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma && (\text{de Morgan}) \\
&\equiv (\alpha \wedge \beta) \to \gamma. && (\text{用}4(7))
\end{aligned}$$

□

例 1.3.5 *证明Pierce律, 即$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$永真.*

证明: 方法一:

$$\begin{aligned}
((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha &\equiv \neg(\neg(\alpha \to \beta) \vee \alpha) \vee \alpha && (\text{用2次}4(7)) \\
&\equiv ((\alpha \to \beta) \wedge (\neg\alpha)) \vee \alpha && (\text{de Morgan}) \\
&\equiv ((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha)) \vee \alpha && (\text{用}4(7)) \\
&\equiv \neg\alpha \vee \alpha \equiv 1. && (\text{排中律})
\end{aligned}$$

方法二: 反证, 若$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$假, 则$(\alpha \to \beta) \to \alpha$真且$\alpha$假, 则$\alpha \to \beta$假且$\alpha$假, 这是不可能发生的. □

注: 对于方法二, 回顾前面的那个真值表.

五个联结词本质上可只采用$\neg$与$\vee(\wedge, \to)$. 例如

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &\equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \\ \alpha \vee \beta &\equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \\ \alpha \to \beta &\equiv \neg\alpha \vee \beta \\ \alpha \leftrightarrow \beta &\equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \\ \alpha \vee \beta &\equiv \neg\alpha \to \beta. \end{aligned}$$

习题 2 (Week 2)

1. 证明如下命题.

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \neg\alpha \to \alpha \\ (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma) &\equiv (\alpha \vee \beta) \to \gamma \\ \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) &\equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \\ \alpha \vee (\alpha \wedge \beta) &\equiv \alpha. \end{aligned}$$

2. 证明de Morgan律的广义形式: (这里省略了括号是因为有交换律与结合律.)

$$\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \neg\alpha_n) \equiv \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2 \vee \cdots \vee \neg\alpha_n,$$
$$\neg(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \neg\alpha_n) \equiv \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \cdots \wedge \neg\alpha_n.$$

§ 1.4 析取范式与合取范式

定义 1.4.1 *命题变元或其否定叫***准变元***.*
*由有限个准变元作析取而得的析取式叫***析基(或简单析取式)***,*
*由有限个准变元作合取而得的合取式叫***合基(或简单合取式)***.*
*有限个合基的析取式叫***析取范式***. 有限个析基的合取式叫***合取范式***.*

注: 按照合(析)取范式易知成假(真)赋值.

例 1.4.1 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg s) \vee (\neg q \wedge \neg r)$*是析取范式.*

例 1.4.2 $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg q \vee \neg r)$*是合取范式.*

定理 1.4.1 *对任一个命题公式φ, 都可以找到一个等价于它的析取范式, 也可以找到它的合取范式.*

证明: 步骤如下.

Step 1: 利用$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ 以及$\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$, 可以去掉$\leftrightarrow$与$\to$.

Step 2: 否定词往里走, 用$\neg\neg\alpha \equiv \alpha$以及de Morgan律. 准否定词深入到命题变元里面.

Step 3: 用分配律求得所要的析取范式与合取范式. □

例 1.4.3 把公式$\varphi = (p \to q) \leftrightarrow r$化成等价于它的析取范式与合取范式.

$$\begin{aligned}
\varphi &\equiv ((p \to q) \wedge r) \vee (\neg(p \to q) \wedge \neg r) \\
&\equiv ((\neg p \vee q) \wedge r) \vee (\neg(\neg p \vee q) \wedge \neg r) \\
&\equiv (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r), \\
\varphi &\equiv ((p \to q) \to r) \vee (\neg(p \to q) \to \neg r) \\
&\equiv ((\neg(p \to q) \vee r) \wedge (\neg r \vee (p \to q))) \\
&\equiv (\neg(\neg p \vee q) \vee r) \wedge (\neg r \vee (\neg p \vee q)) \\
&\equiv ((p \wedge \neg q) \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \\
&\equiv (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r).
\end{aligned}$$

定义 1.4.2 (k进制) 对大于1的整数g, 自然数n可唯一表示成$\sum\limits_{i=0}^{k} a_i g^i$, 这儿$a_i \in \{0, 1, \cdots, g-1\}$, 此时说$n$的$g$进制表示为$a_k \cdots a_2 a_1 a_0$.

例 1.4.4 十进制$101 = 1 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 1 \times 10^0$, 二进制$101 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 5_{10\text{进制下}}$.

定义 1.4.3 设$p_1, \cdots, p_n$是n个不同的命题符号, p_i'是p_i或$\neg p_i$. 设$\delta_i = \begin{cases} 1, & p_i'\text{为}p_i \\ 0, & p_i'\text{为}\neg p_i \end{cases}$, 且$\delta_i' = 1 - \delta_i$.
$m = p_1' \wedge p_2' \wedge \cdots p_n'$是一个**极小项**, 它唯一的成真赋值是$(p_1, \cdots, p_n) = (\delta_1, \cdots, \delta_n)$.
$M = p_1' \vee p_2' \vee \cdots \vee p_n'$是一个**极大项**, 它唯一的成假赋值是$(p_1, \cdots, p_n) = (\delta_1', \cdots, \delta_n')$.
设二进制的$\delta_1, \cdots, \delta_n$表示数$i$, 则把上述极小项记为$m_i$, 把上述极大项记为$M_i (0 \le i \le 2^n - 1)$.

例 1.4.5 $m_4 = p \wedge \neg q \wedge \neg r$的成真赋值是$(1, 0, 0)$, $M_4 = \neg p \vee q \vee r$的成假赋值是$(1, 0, 0)$.

根据de Morgan律不难知道$\neg m_i = M_i$. 即m_i的成真赋值对应于M_i的成假赋值.

定义 1.4.4 合基都为极小项的析取范式叫**主析取范式**, 析基都为极大项的合取范式叫**主合取范式**.

例 1.4.6 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge r) \vee (p \wedge r)$不是主析取范式.
$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$是主析取范式.

由主析取范式可知成真赋值, 由主合取范式可知成假赋值.

例 1.4.7 $(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$三个有一个为假即可.

注: 永真公式无主合取范式(为1); 永假公式无主析取范式(为0).

定理 1.4.2 对任一命题公式φ, 有唯一的与之等价的主析取范式, 也有唯一与之等价的主合取范式. *(有统一办法找到它们)*.

证明: (1)先找φ的析(合)取范式, 再用$\alpha\vee\alpha=\alpha\wedge\alpha=\alpha$, $\alpha\wedge\neg\alpha=0, \alpha\vee\neg\alpha=1$. 如果有项没出现, 用$\alpha\vee\neg\alpha$与$\alpha\wedge\neg\alpha$. 如

$$\alpha\wedge\beta=\alpha\wedge\beta\wedge(\gamma\vee\neg\gamma)=(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma)\vee(\alpha\wedge\beta\wedge\neg\gamma),$$
$$\alpha\vee\beta=\alpha\vee\beta\vee(\gamma\wedge\neg\gamma)=(\alpha\vee\beta\vee\gamma)\wedge(\alpha\wedge\beta\wedge\neg\gamma).$$

从而把析取范式化成主析取范式, 把合取范式化成主合取范式.

(2)如果有两个不同的主析取范式φ_1,φ_2, 则φ_1的某个极小项在φ_2中没出现, 它对应的成真赋值使φ_1真但φ_2假. 矛盾. (合取同理) □

例 1.4.8 求公式$\varphi=\neg(r\to p)\vee(q\wedge(p\vee r))$的主析取范式.

解:

$$\begin{aligned}\varphi&\equiv\neg(\neg r\vee p)\vee(q\wedge(p\vee r))\\&\equiv(\neg p\wedge r)\vee(p\wedge q)\vee(q\wedge r)\\&\equiv(\neg p\wedge r\wedge(\neg q\vee q))\vee(p\wedge q\wedge(r\vee\neg r))\vee((p\vee\neg p)\wedge q\wedge r)\\&\equiv\cdots(\text{分配律})\\&\equiv(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r).(\text{重复的干掉})\end{aligned}$$

或者写$\varphi=m_1\vee m_3\vee m_6\vee m_7$. 成真赋值是$(p,q,r)=(0,1,1),(0,0,1),(1,1,1),(1,1,0)$.

例 1.4.9 把$\varphi=(p\wedge(q\to r))\to s$化为主合取范式, 求成假赋值.

解:

$$\begin{aligned}\varphi&\equiv\neg(p\wedge(\neg q\vee r))\vee s\\&\equiv\neg p\vee(q\wedge\neg r)\vee s\ (\text{析取, 不是我们要的})\\&\equiv(\neg p\vee s)\vee(q\wedge\neg r)\ (\text{交换律})\\&\equiv(\neg p\vee s\vee q)\wedge(\neg p\vee s\vee\neg r)\ (\text{分配律})\\&\equiv(\neg p\vee q\vee s\vee(r\wedge\neg r))\wedge(\neg p\vee\neg r\vee s\vee(q\wedge\neg q))\equiv\cdots\\&\equiv(\neg p\vee q\vee r\vee s)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r\vee s)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r\vee s).\end{aligned}$$

或者写成$\varphi=M_8\wedge M_{10}\wedge M_{14}$, 成假赋值为$(p,q,r,s)=(1,0,0,0),(1,0,1,0),(1,1,1,0)$.

例 1.4.10 某科研所要从A,B,C三名骨干中选取1至2人出国进修, 选派满足:

(1)A去则C去;

(2)B去则C不去;

(3)C不去则A或B可去.

问: 如何选派?

解: 让p,q,r分别表示A,B,C, 需要求公式

$$\begin{aligned}\varphi&=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge(\neg r\to(p\vee q))\\&\equiv(\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge(r\vee p\vee q).\end{aligned}$$

把$\vee$看成$+$, $\wedge$看成$\times$, $\bar{p}$看成$\neg p$, 用分配律:

$$\begin{aligned}\varphi &= (\bar{p}+r)(\bar{q}+\bar{r})(p+q+r) = \cdots \\ &= \bar{p}\bar{q}r + \bar{p}q\bar{r} + p\bar{q}r + \bar{q}r \\ &= \bar{p}\bar{q}r + \bar{p}q\bar{r} + p\bar{q}r + \bar{q}r(p+\bar{p}) \\ &= \cdots \\ &= \bar{p}\bar{q}r + \bar{p}q\bar{r} + p\bar{q}r \\ &= (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r).\end{aligned}$$

成真赋值是$(p,q,r)=(0,0,1),(0,1,0),(1,0,1)$. 可以选派B去,或C去,或AC都去.

习题 3 (Week 3)

1. 求下列公式的主析取范式, 并求成真赋值.
   (1) $(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$
   (2) $(\neg p \to q) \wedge (q \wedge r)$
   (3) $(p \vee (q \wedge r)) \to (p \vee q \vee r)$
2. 求下列公式的主合取范式, 并求成假赋值.
   (1) $\neg(q \to \neg p) \wedge \neg p$
   (2) $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee r)$
   (3) $(p \to (p \vee q)) \vee r$
3. 在某班班委成员选举中, 已知王小红、李强、丁金生三位同学被选进了班委会. 该班的甲, 乙, 丙三名学生预言:
   甲说：王小红为班长，李强为生活委员.
   乙说：丁金生为班长，王小红为生活委员.
   丙说：李强为班长，王小红为学习委员.
   班委会分工名单公布后发现, 甲、乙、丙三人都恰好猜对了一半. 问王小红、李强、丁金生各任何职(用等值等演求解)?
4. **【选做】**8年前(2011), 孙智伟提出了如下的猜想(收敛很快). 前3个问题每个悬赏300美元.
   (1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{66k+17}{(2^{11}3^3)^k}T_k^3(10,11^2)=\dfrac{540\sqrt{2}}{11\pi}$.
   (2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{126k+31}{(-80)^{3k}}T_k^3(22,11^2)=\dfrac{880\sqrt{5}}{21\pi}$.
   (3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{3990k+1147}{(-288)^{3k}}T_k^3(62,95^2)=\dfrac{432}{95\pi}(195\sqrt{14}+94\sqrt{2})$.
   (4) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{24k+5}{28^{2k}}\dbinom{2k}{k}T_k^2(4,9)=\dfrac{49}{9\pi}(\sqrt{3}+\sqrt{6})$.
   (5) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{2800512k+435257}{434^{2k}}\dbinom{2k}{k}T_k^2(73,576)=\dfrac{10406669}{2\sqrt{6}\pi}$.
   其中, $T_k(b,c)$表示$(x^2+bx+c)^k$展开式中x^k项系数.

§ 1.5 公理系统与形式演绎

定义 1.5.1 给了公式集Γ及一些推理规则, 若用Γ中公式及特定的推理规则可得到α, 则说**从Γ可推出α. 记为**$\Gamma \vdash \alpha$. 这样公理系统中Γ的公式叫**公理*(axiom)***. 对$\vdash$的语法赋上语义, 记为$\models$, 当$\Gamma \models \alpha$时称α为该系统的**定理*(theorem)***.

常用的推理规则为下述**分离规则**:

(1)$\alpha \to \beta$则$\alpha \vdash \beta$.

(2)$\gamma \vdash \alpha \to \beta$且$\gamma \vdash \alpha$, 则$\gamma \vdash \beta$.

例 1.5.1 利用两个真值联结词$\to, \vee$, 公理集γ由下面四条公理组成:

(a) $(\alpha \vee \alpha) \to \alpha$,

(b) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$,

(c) $(\alpha \vee \beta) \to (\beta \vee \alpha)$,

(d) $(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \gamma))$.

且推理规则只有分离规则. 证明$\alpha \to \neg\neg\alpha, \neg\neg\alpha \to \alpha$.

证明: 由公理(d)有: (1)$(\beta \to \gamma) \to ((\neg\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \vee \gamma))$,

即(1')$(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$.

由(1')得(2)$((\alpha \vee \alpha) \to \alpha) \to ((\alpha \to (\alpha \vee \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$.

由分离规则分(2)为(a)(3), 其中(3)$(\alpha \to (\alpha \vee \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$.

由公理(b)再分离有(4)$(\alpha \to \alpha)$, 即$(\neg\alpha \vee \alpha)$.

由公理(c)得(5)$(\neg\alpha \vee \alpha) \to (\alpha \vee \neg\alpha)$.

分离(5)(4)得(6)$\alpha \vee \neg\alpha$.

由(6)得(7)$\neg\alpha \vee \neg\neg\alpha \equiv \alpha \to \neg\neg\alpha$.

由(7)得(8)$\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha$.

由公理(d)得(9)$((\neg\alpha) \to (\neg\neg\neg\alpha)) \to ((\alpha \vee \neg\alpha) \to (\alpha \vee \neg\neg\neg\alpha))$.

分离(9)(8)得(10)$(\alpha \vee (\neg\alpha)) \to (\alpha \vee \neg\neg\neg\alpha)$.

分离(10)(6)得(11)$\alpha \vee \neg\neg\neg\alpha$,

由公理(c)得(12)$(\alpha \vee \neg\neg\neg\alpha) \to (\neg\neg\neg\alpha \vee \alpha)$.

分离(12)(11)得$\neg\neg\neg\alpha \vee \alpha$, 则$\varphi : \neg\neg\alpha \to \alpha$. □

定理 1.5.1 上述永真公式公理系统是相容的, 该系统中定理还是可判定的(有统一办法).

证明: (1)该系统导出的都是永真公式, 易见公理(a)-(d)为永真公式, $\alpha \to \beta, \alpha \vdash \beta, \alpha \to \beta$与$\alpha$均为永真公式时, 由分离规则可知$\beta$为永真公式. 而$\alpha$永真时$\neg\alpha$不永真, 故该系统不能既推出$\alpha$又推出$\neg\alpha$, 相容性成立.

(2)对于命题演算公式φ, 有个可行的办法把φ化成等价于它的主合取范式ψ, 即$\varphi \leftrightarrow \psi$. (把中间各种律用有限步可以证出来, 再证系统中两个命题等价) 是否为公理, 看有无成假赋值, 把$\varphi \leftrightarrow \psi$化成主合取范式, 最终化为1, 则它是定理($\varphi$永真当且仅当$\psi$为1, 有统一办法证). □

§ 1.6 一阶逻辑语言

定义 1.6.1 对于n元**函词符号**f, 当填入n个个体$a_1, \cdots, a_n$后, 得到的$f(a_1, \cdots, a_n)$是个**个体**. 对于n元**谓词符号**p, 当填入n个个体$a_1, \cdots, a_n$后, 得到的$p(a_1, \cdots, a_n)$是个**命题**.

例 1.6.1 他打你的妹妹. a表示他, b表示你, $f(b) : b$的妹妹. $p(x, y)$指x打y. 则"他打你的妹妹"为$p(a, f(b))$.

定义 1.6.2 设p为一元谓词, $p(a)$成立时, 称a**具有性质**p. 设R为n元谓词, $R(a_1, \cdots, a_n)$成立时, 称个体$a_1, \cdots, a_n$**具有**n**元关系**R.

函词符号有三种方法: (1)前置法: 如$\sin\dfrac{\pi}{3}, \ln x$. (2)中置法: 如$x + 3, x \times y$. (3)后置法: 如$n!$.

采用中置法需要一些辅助括号, 如$5 \div ((x + 2) \times 3 - y)$. 用前置与后置法可不加括号, 顺序不会乱. 比如逆波兰式$\div 5 - \times + x23y$.

下面引入"量词"(quantifier)的概念.

定义 1.6.3 (存在量词(existential quantifier)) $\exists x\ \varphi(x)$, 指有个个体a使$\varphi(a)$成立. ($\varphi(a)$是个公式).

定义 1.6.4 (全称量词(universal quantifier)) $\forall x\ \varphi(x)$ 指有对个体域中每个个体a, $\varphi(a)$成立.

有下列关系:

$$\neg\exists x\ \varphi(x) \equiv \forall x\ \neg\varphi(x)$$
$$\forall x\ \varphi(x) \equiv \neg\exists x\ \neg\varphi(x)$$
$$\neg\forall x\ \varphi(x) \equiv \exists x\ \neg\varphi(x)$$
$$\exists x\ \varphi(x) \equiv \neg\forall x\ \neg\varphi(x)$$

定义 1.6.5 (项) (1)个体变元为项; (2)个体常量为项; (3) f为n元函词符号且$t_1, \cdots, t_n$为项时, $f(t_1, \cdots, t_n)$为项. (4)项仅由上法所得.

定义 1.6.6 (原子公式) (1) t_1, t_2为项时$t_1 = t_2$为原子公式. (2) p为n元谓词符号且$t_1, \cdots, t_n$为项时, $p(t_1, \cdots, t_n)$为原子公式. (3)原子公式仅由上法所得.

定义 1.6.7 (公式) (1)原子公式是最简单的公式. (2) φ是公式时, $\forall x\ \varphi(x)$与$\exists x\ \varphi(x)$与$\neg\varphi(x)$也是公式. (3) φ, ψ为公式时, $\varphi \vee \psi, \psi \wedge \varphi, \varphi \to \psi$也是公式. (4) 公式仅由上法所得.

例 1.6.2 $\forall x \exists y (x + y = 3y - 5)$为一个公式.

为方便起见, 约定一阶逻辑公式中量词里, 否定词优先级高于$\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$. 例如$\exists\underline{\forall x\ \varphi(x)} \to (\exists y\ \underline{\psi(y) \wedge \alpha(x, y)})$.

例 1.6.3 几个例子.

(1)存在唯一的x使$\varphi(x)$成立, 即$\exists! x\ \varphi(x)$, 相当于$\exists x(\varphi(x) \wedge \forall y(\varphi(y) \to y = x))$.

(2)$\exists x \in X\ \varphi(x)$指$\exists x(x \in X \wedge \varphi(x))$.

(3)$\forall x \in X\ \varphi(x)$指$\forall x(x \in X \to \varphi(x))$.

(4)$\neg\forall x \in X\ \varphi(x)$指$\neg\forall x(\neg(x \in X) \vee \varphi(x)) \equiv \exists x((x \in X) \wedge \neg\varphi(x)) \equiv \exists x \in X \neg\varphi(x)$. (用了de Morgan律)

例 1.6.4 更多例子.

(1)$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$相当于$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x(0<|x-a|<\delta\to|f(x)-A|<\varepsilon)$.
(2)函数$f(x)$在区间I上一致连续指$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in I\forall y\in I(|x-y|<\delta\to|f(x)-f(y)|<\varepsilon)$.
(3)函数$f(x)$在区间I上不一致连续: (作否定)

$$\begin{aligned}&\neg\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in I\forall y\in I(|x-y|<\delta\to|f(x)-f(y)|<\varepsilon)\\ \equiv&\exists\varepsilon>0\forall\delta>0\exists x\in I\exists y\in I\neg(\neg(|x-y|<\delta)\vee|f(x)-f(y)|<\varepsilon)\\ \equiv&\exists\varepsilon>0\forall\delta>0\exists x\in I\exists y\in I(|x-y|<\delta\wedge|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon).\end{aligned}$$

其中第2行的否定词不断后移, 并用了$p\to q\equiv\neg p\vee q$, 第3行用了de Morgan律.

定义 1.6.8 设ρ为量词($\forall$或$\exists$), $\rho x\ \ \varphi(x)$时称变元$\varphi(x)$, x 受量词ρ约束, 叫**约束变元**. 不受约束的叫**自由出现(自由变元)**.

例 1.6.5 在$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$中, $x, f(x)$都是约束出现, a, A都是自由出现.

例 1.6.6 在$\forall x(\varphi(x)\wedge x+y=5)\vee x\neq 3\vee\exists y(y^2=y)$中, 前三个$x$是约束变元, 第一个$y$是自由变元, 最后的$x$是自由变元, 最后三个$y$是约束变元.

一个变元既有约束又有自由不好, 而约束变元可以改名, 或改成与已有自由变元不同名的新变元. (即: 不改变自由变元的名称, 且不把约束变元的名称改为已有的自由变元的名称)

上一例子可改为

$$\forall t(\varphi(t)\wedge t+y=5)\vee x\neq 3\vee\exists u(u^2=u).$$

例 1.6.7 $\int_0^{x^2} f(x)dx$可以改为$\int_0^{x^2} f(t)dt$.

注: 一阶逻辑中量词只作用于个体变元上(而不是量词或谓词).

§ 1.7 谓词演算中公式的等价与Skolem前束范式

一些基本的等价式如下:

$$\begin{aligned}&\neg\exists x\ \varphi(x)\equiv\forall x\ \neg\varphi(x).\\ &\neg\forall x\ \varphi(x)\equiv\exists x\ \neg\varphi(x).\\ &\forall x(\varphi(x)\wedge\psi(x))\equiv\forall x\ \varphi(x)\wedge\forall x\ \psi(x).(\text{“任意”对应“且”})\\ &\exists x(\varphi(x)\vee\psi(x))\equiv\exists x\ \varphi(x)\vee\exists x\ \psi(x).(\text{“存在”对应“或”})\end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned}&\exists x(\varphi(x)\wedge\psi(x))\to\exists x\ \varphi(x)\wedge\exists x\ \psi(x).(\leftarrow\text{不成立})\\ &\forall x(\varphi(x)\vee\psi(x))\leftarrow\forall x\ \varphi(x)\vee\forall x\ \psi(x).(\to\text{不成立})\end{aligned}$$

例如: $\varphi(x): x$为奇数; $\psi(x): x$为偶数.

例 1.7.1 设$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$. 则$\forall$可视为广义析取词, $\exists$可视为广义合取词, 即

$$\forall x\in X\ \varphi(x)\equiv\varphi(x_1)\wedge\varphi(x_2)\cdots\wedge\varphi(x_n).$$
$$\exists x\in X\ \varphi(x)\equiv\varphi(x_1)\vee\varphi(x_2)\cdots\vee\varphi(x_n).$$

例 1.7.2 证明$\exists x(\varphi(x)\to\psi(x))\equiv\forall x\ \varphi(x)\to\exists x\ \psi(x)$.

证明: 左边$\equiv\exists x(\neg\varphi(x)\vee\psi(x))\equiv\exists x\ \neg\varphi(x)\vee\exists x\ \psi(x)\equiv\neg\forall x\ \varphi(x)\vee\exists x\ \psi(x)\equiv$右边. □

设x不在ψ中自由出现, 则

$$\forall x(\varphi(x)\vee\psi)\equiv\forall x\ \varphi(x)\vee\psi,$$
$$\exists x(\varphi(x)\wedge\psi)\equiv\exists x\ \varphi(x)\wedge\psi.$$

例 1.7.3 设x不在ψ中自由出现. 证明$\forall x(\varphi(x)\to\psi)\equiv\exists x\ \varphi(x)\to\psi$, $\forall x(\psi\to\varphi(x))\equiv\psi\to\forall x\ \varphi(x)$.

证明: 注意

$$\forall x(\varphi(x)\to\psi)\equiv\forall x(\neg\varphi(x)\vee\psi)\equiv\forall x\ \neg\varphi(x)\vee\psi\equiv\neg\exists x\ \varphi(x)\vee\psi\equiv\exists x\ \varphi(x)\to\psi,$$
$$\forall x(\psi\to\varphi(x))\equiv\forall x(\neg\psi\vee\varphi(x))\equiv\neg\psi\vee\forall x\ \varphi(x)\equiv\psi\to\forall x\ \varphi(x).$$

定义 1.7.1 (Skolem前束范式) 形如$\rho_1x_1\rho_2x_2\cdots\rho_nx_n\varphi(x_1,\cdots,x_n)$. 这儿$\rho_i$为$\forall$或$\exists$, 且$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$不含量词.

定理 1.7.1 任何一个一阶公式可化为一个等价于它的$Skolem$前束范式.

证明: Step 1. $\alpha\to\beta\equiv\neg\alpha\vee\beta$, $\alpha\leftrightarrow\beta\equiv(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)\equiv(\alpha\wedge\beta)\vee(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$.

Step 2. 将否定词深入到原子公式前, 用$\neg\neg\alpha\equiv\alpha$, $\neg\forall x\ \varphi(x)\equiv\exists x\ \neg\varphi(x)$, $\neg\exists x\ \varphi(x)\equiv\forall x\ \neg\varphi(x)$.

Step 3. 把量词朝外放. $\forall x\ \varphi(x)\wedge\forall x\ \psi(x)\equiv\forall x(\varphi(x)\wedge\psi(x))$, $\exists x\ \varphi(x)\vee\exists x\ \psi(x)\equiv\exists x(\varphi(x)\vee\psi(x))$. 如果$x$不在$\psi$中自由出现, 则用$\forall x(\varphi(x)\vee\psi)\equiv\forall x\ \varphi(x)\vee\psi$, $\exists x(\varphi(x)\wedge\psi)\equiv\exists x\ \varphi(x)\wedge\psi$. □

例 1.7.4 把$\forall x\ \varphi(x)\vee\neg\exists x\ \psi(x)$化为$Skolem$前束范式.

解:

$$\begin{aligned}\forall x\ \varphi(x)\vee\neg\exists x\ \psi(x)&\equiv\forall x\ \varphi(x)\vee\forall x\ \neg\psi(x) &&\text{(否定词放前面)}\\&\equiv\forall x\ \varphi(x)\vee\forall y\ \neg\psi(y) &&\text{(变为与}x\text{无关)}\\&\equiv\forall x(\varphi(x)\vee\forall y\ \neg\psi(y)) &&(x\text{不在后面公式自由出现})\\&\equiv\forall x\forall y(\varphi(x)\vee\neg\psi(y)).\end{aligned}$$

例 1.7.5 求$\forall x\ \varphi(x,y)\to\exists y\ \psi(x,y)$的$Skolem$前束范式.

解:

$$\begin{aligned}\forall x\ \varphi(x,y)\to\exists y\ \psi(x,y)&\equiv\forall u\ \varphi(u,y)\to\exists v\ \psi(x,v) &&\text{(改名, 防混)}\\&\equiv\neg\forall u\ \varphi(u,y)\vee\exists v\ \psi(x,v)\\&\equiv\exists u\neg\varphi(u,y)\vee\exists v\ \psi(x,v)\\&\equiv\exists u(\neg\varphi(u,y)\vee\psi(x,u)) &&\text{(可以把v换成u)}\end{aligned}$$

事实上可以写为$\exists u\exists v(\neg\varphi(u,y)\vee\psi(x,v))$, 但字母能少用就少用.

习题 4 (Week 4)

1. 将$\exists x\ \varphi(x) \to \forall x\ \psi(x)$化为Skolem前束范式.
2. 将$\exists x(\neg\exists y\ P(x,y)) \to (\exists z\ Q(z) \to R(x))$化为Skolem前束范式. (P,Q,R为谓词).

§ 1.8 语义与模型

注: 有自由变元的不好谈真假, 例如$x+3=5$.

定义 1.8.1 (模型) *无自由变元的一阶公式叫**闭公式或断定**. 取定非空集D作为个体域. **"解释"I**把φ中常量符号C解释为D中具体个体(记为$C^{\mathcal{U}}$). 把φ中n元函词符号f解释成$D\times\cdots\times D$(笛卡尔积)到D中函数, 把φ中n元谓词符号P解释成D中一个具体的n元谓词($P^{\mathcal{U}}$). 把φ解释成$\varphi^{\mathcal{U}}$后, $\forall x\ \varphi(x)$指对每一个$a\in D$有$\varphi^{\mathcal{U}}(a)$. $\exists x\ \varphi(x)$指有一个个体$a\in D$使$\varphi^{\mathcal{U}}(a)$. $\neg\varphi$指$\varphi^{\mathcal{U}}$不成立. ……如上解释后φ成真时, $\mathcal{U}=(D,I)$称为φ的一个**模型** (记为$\mathcal{U}\vDash\varphi$). 如果$\mathcal{U}=(D,I)$是闭公式集Σ中每个σ的模型, 则称$\mathcal{U}$为Σ的一个**模型(model)**.*

例 1.8.1 *在群中, 群的公理Σ为: ($\circ$为二元函词符号)*

$$\forall x\forall y\forall z((x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)). \qquad (\text{结合律})$$
$$\forall x(e\circ x = x). \qquad (\text{左单位元})$$
$$\forall x\exists y(y\circ x = e). \qquad (\text{左逆元})$$

其中e为常量符号.

定义 1.8.2 对于一阶闭公式φ, 如果任何$\mathcal{U}=(D,I)$为它的模型, 则称φ**永真**.

例 1.8.2 *$\exists x(x=x)$永真; $\exists x\exists y(x\neq y)$不永真(当只有一个个体的时候不对); $\exists x\exists y\ \varphi(x,y)\leftrightarrow\exists y\exists x\ \varphi(x,y)$永真; $\forall x\exists y\ \varphi(x,y)\leftrightarrow\exists y\forall x\ \varphi(x,y)$不永真, 一般不可调序.*

模型实际上就是提供例子.

例 1.8.3 *在群中, 取$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 赋予下列解释$I$: ①把$e$解释为1; ②把$\circ$解释为实数乘法. 如此$\mathcal{U}=(D,I)$为$\Sigma$的一个模型.*

例 1.8.4 *在群中, 取$D=\mathbb{Z}$, 赋予下列解释I: ①把e解释为整数中零; ②把$\circ$解释为整数加法. 如此$\mathcal{U}=(D,I)$为Σ的一个模型.*

可选几个一阶公式作为公理, 采用分离规则, 如此公理系统相容, 推出的都永真. ("永真"的判定要看语义, 与定理(语法)不同, 语义和语法要吻合)

Gödel证明了这样的系统完备, 但不可判定(无统一的办法证明定理).

§ 1.9 可计算性理论

以后再补充吧, 孙老师上课会简单介绍, 这里就不记笔记了. 如果感兴趣可以选计科开的相关课程.

第 2 章　图论初步

§ 2.1　图论的起源与基本概念

图论(graph theory)属于组合数学, 目前(2019)南大做图论的有陈耀俊、周国飞(张高飞的学生)、张运清(陈的老婆)他们都比孙智伟小, 许多人都在做图论. 最好的杂志为J. Combine Theory Ser. A(组合), J. Combine Theory Ser. B(图论).

定义 2.1.1 *设V是个有限非空集, 集合E与V不相交, 且有一个关联函数$\psi : E \to \{\{x,y\} : x,y \in V\}$(无序对)或$\{\langle x,y\rangle : x,y \in V\}$(有序对). 则称$G = \langle V,E\rangle$是个**图(graph)**, 把$V$中元素叫**顶点(vertex)**, E中元素叫**边(edge)**. 如果$e \in E$且$\psi(e) = \{x,y\}$或$\langle x,y\rangle$, 则说x,y是e的**端点**, e关联顶点x,y(或说边e连接顶点x,y).*

通常把V中元用平面上的点表示, 边e连接点x,y时, 用一条x到y的连线表示这样的边, $\psi(e)$为有序对$\langle x,y\rangle$时, 用从x指向y的连线表示这样的边e(叫**有向边/弧**).

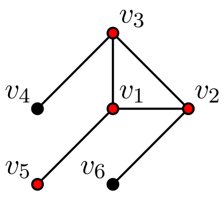
注: 边的曲直与长度不重要, 重要的是关系.

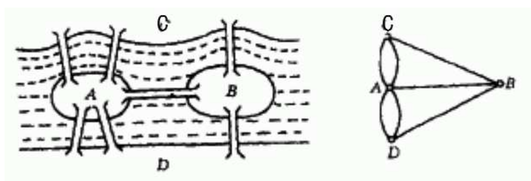
定义 2.1.2 *没有方向的边叫**无向边**, 各边都是无向边的图叫**无向图(undirected graph)**, 各边均为有向边的图叫**有向图(directed graph)**. 图G中, 两个端点重合的边叫**环**. 连接两点x,y的边不止一条时, 称它们为**平行边或多重边**. 有平行边的图叫**多重图**, 既无环又无平行边的无向图叫**简单图(simple graph)**. 图G中有边e连接顶点x,y时, 称x,y**相邻(adjacent)**, 无向图中有公共顶点的两条边叫**相邻的边**, 有向图中边e_1的终点与边e_2的起点相同时称e_1,e_2**相邻(adjacent)**.*

注: 这里的“环”与抽象代数是两码事.

定义 2.1.3 *对于图G, 用$V(G)$表示G的顶点集, 用$E(G)$表示G的边集. 把$v \in V(G)$的**邻域**定义为$N_G(v) = \{u \in V(G) \setminus \{v\} : u$与$v$相邻$\}$. 把$N_G(v) \cup \{v\}$叫$v$的**闭邻域**.*

下图中, $N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_5\}$.





Euler考虑哥尼斯堡(Königsberg)七桥问题: 能否从图中某一地出发, 经过每座桥各一次又回到原来的陆地如果把每块陆地用平面上的点表示, 边代表桥, 则它无解.

四色猜想: (de Morgan的学生Francis Guthrie 在1852/10/23提出) 在一张平面地图上, 不论有多少个国家, 也不论它们如何分布, 只用四种颜色画图, 就可使不同相邻国家颜色不同. de Morgan不会做, 给了Hamilton, 但他对这个问题不感兴趣. 问Cayley(1878)也没做出来, (还写了篇文章说难在哪里). Einstein的老师Minkowski说不难, 是因为没一流的数学家研究, 后来他也没做出来. 1879年Kempe宣布做了出来, 发表文章在Amer. I. Math得到很多荣誉(包括英国皇家), 但1890年P. J. Heawood发现了漏洞（只能证5种颜色的情况）. 1976年Appel与Haken用计算机证明四色猜想(用了穷举方法, 运行几个月), 到目前无人工可解决的证明.

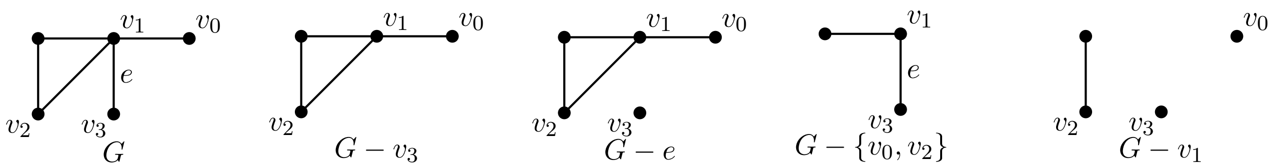
定义 2.1.4 设$G_1,\cdots,G_n$为图，顶点集$V(G_1),\cdots,V(G_n)$两两不交. 则称

$$G=\langle\bigcup_{i=1}^{n}V(G_i),\bigcup_{i=1}^{n}E(G_i)\rangle$$

为G_1, $\cdots$, G_n的**并**.

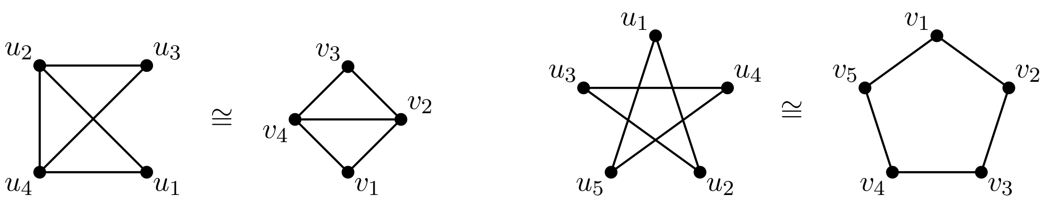
定义 2.1.5 设G为图. $V_0\subseteq V(G),E_0\subseteq E(G)$. 从$G$中删去属于$V_0$的顶点及其关联的边后所得的图记为$G-V_0$. 当$V_0=\{v_0\}$时也写$G-v_0$. 从$G$中删去属于$E_0$的边所得的图为$G-E_0$, 当$E_0=\{e\}$时也写$G-e_0$. 如果在$G$上添加上两个端点属于$V(G)$的新边$e_1,\cdots,e_n$后所得的图记为$G+e_1+\cdots+e_n$.

例 2.1.1 如下图.



定义 2.1.6 设G与H是两个图，如果存在$V(G)$与$V(H)$的一一对应f以及$E(G)$到$E(H)$的一一对应g，使得G中边e连接顶点$u,v\Leftrightarrow H$中$g(e)$连接$f(u),f(v)$，则称G与H**同构**，记为$G\cong H$*(G is isomorphic to H)*.

例 2.1.2 两个同构的例子，其中u_i与v_i一一对应.



Ulam同构猜想: 假设G与H都是具有$p\geq 3$个顶点的无向图, $V(G)=\{u_1,\cdots,u_p\}$, $V(H)=\{v_1,\cdots,v_p\}$. 如果对$i=1,\cdots,p$都有$G-u_i\cong H-v_i$, 则$G\cong H$. (现在(2019年)还没解决)

§ 2.2 子图、补图、完全图与二部图

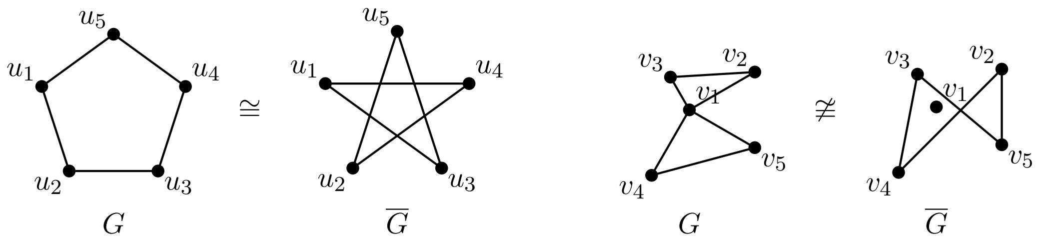
定义 2.2.1 (子图) 设G,H为图，如果$V(H)\subseteq V(G),E(H)\subseteq E(G)$，则称$H$是$G$的**子图**. 如果$V(H)=V(G),E(H)\subseteq E(G)$，则称$H$是$G$的**生成子图(支撑子图)**.

注: $V_0\subseteq V(G)$时, $G-V_0$是G的子图; $E_0\subseteq E(G)$时, $G-E_0$是G的生成子图.

定义 2.2.2 (导出子图) 设G为图，$V_0\subseteq V(G)$，以V_0为顶点集，以端点全为V_0中的边的全体为边的集合的图叫V_0在G中的**导出子图**($G[V_0]$)，也叫G在V_0上的**限制**. $E_0\subseteq E(G)$，以E_0为边集，以E_0中边的端点作为顶点集的图叫E_0在G中的**边导出子图**($G[E_0]$)，也叫G在E_0上的**限制**.

定义 2.2.3 (补图) 对于简单图G，它的**补图*(complement)***$\overline{G}$顶点集仍为$V(G)$. 对不同的$u,v\in V(G)=V(\overline{G})$，$G$中有边连接$u,v\Leftrightarrow\overline{G}$中无边连接$u,v$. 如果$G\cong\overline{G}$，则称$G$为**自补图**.

例 2.2.1 自补图与非自补图的例子. 注意第2个图的$\overline{G}$有个孤立点, 故不是自补图.



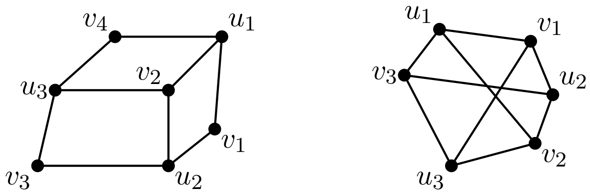
定义 2.2.4 (完全图) 恰有n个顶点的图叫n**阶图**, 边数最多的n阶简单图K_n叫n**阶完全图**.

由于n阶完全图中任意两个不同顶点都恰好有一条边, 则

$$|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

定义 2.2.5 (二部图) 设G为无向图, 若$V(G) = V_1 \cup V_2$, V_1, V_2非空但$V_1 \cap V_2 = \varnothing$, 且每条边$e \in E(G)$的两个端点中一个在$V_1$中, 另一个在$V_2$中, 则称$G$为具有**二分类**$(V_1, V_2)$**的二部图**.

例 2.2.2 二部图例子. 这里u, v分开.



定义 2.2.6 (完全二部图) 设G为具有二分类(V_1, V_2)的二部图. 如果对$u \in V_1, v \in V_2$, G中恰有一条边连接u, v, 则称G为**完全二部图**. 若$|V_1| = m, |V_2| = n$时, 这样的完全二部图记为$K_{m,n}$, 它有mn条边.

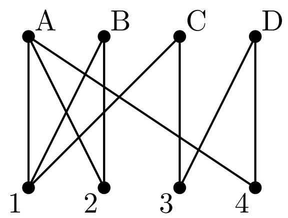
例 2.2.3 今有A, B, C, D四个老师, 欲安排他们上数分、组合、近代、数论四门课, 每个老师上一门他胜任的课程. 已知: A能教数分、组合、数论, B能教数分、组合, C能教数分、近代, D能教近代、数论. 怎么安排他们上课?

解: 用1,2,3,4分别表示数分、组合、近代、数论, 要在二部图中找四条不相邻的边.

(1) $A_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow C_3 \Rightarrow D_4$;

(2) $A_2 \Rightarrow B_1 \Rightarrow C_3 \Rightarrow D_4$;

(3) $A_4 \Rightarrow D_3 \Rightarrow C_1 \Rightarrow B_2$, 共3种方案.

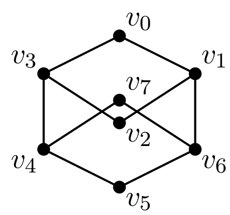


§ 2.3 迹、路、圈

定义 2.3.1 设G为无向图，边e_i连接$v_{i-1}, v_i(i = 1, 2, \cdots, n)$. 则称$v_0e_1v_1e_2v_2\cdots v_{n-1}e_nv_n$为一条$v_0$到$v_n$的**途径**. 当$e_1, \cdots, e_n$不是环也不是多条边时，简记此途径为$v_0v_1\cdots v_n$. 所含边数$n$叫**途径长度**. 一条$v_0 - v_n$途径所含边各不相同时，称之为$\mathbf{v_0 - v_n}$**迹*(trace)***. 一条$v_0 - v_n$的迹经过的点$v_0, \cdots, v_n$两两不同时，称之为$\mathbf{v_0 - v_n}$**路*(path)***. 如果$v_0 - v_n$迹中$v_0 = v_n$但$v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}$两两不同，则称它为一个$\mathbf{n}-$**圈*(circle)***. 用$C_n$表示有$n$个顶点的圈. (它们是同构的)

定义 2.3.2 (距离) 设G为无向图，$u, v \in V(G)$. 如果$u = v$，则说u, v的**距离**$d(u, v) = 0$. (有时用$d_G(u, v)$). $u \neq v$时，如果存在$u - v$路，则最短$u - v$路的长度叫u, v之间的距离$d(u, v)$. 如果没有$u - v$路，则$d(u, v) = \infty$.

例 2.3.1 给定一个图. 该图中，

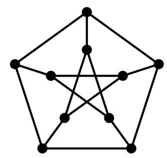


(1) $v_0v_1v_2v_1v_6$是长为4的路径.
(2) $v_0v_3v_4v_5v_6v_7v_4$是长为6的$v_0 - v_4$迹. (边不一样, 点有重复)
(3) $v_0v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7$是长为7的路.
(4) $v_4v_5v_6v_7v_4$是长为4的圈(4-圈).
(5) $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$是长为6的圈(6-圈).
(6) $d(v_0, v_5) = 3$.

定义 2.3.3 (围长) 设G是没有环的无向图，G含圈时，G所含圈的长度最小值叫G的**围长*(girth)***.

注: G不含圈的时候称G的$g(G)$为$+\infty$.

例 2.3.2 (Petersen图,1898) 该图在图论中很重要，常被用来举例子和反例.



不难发现右图$g(G) = 5$.

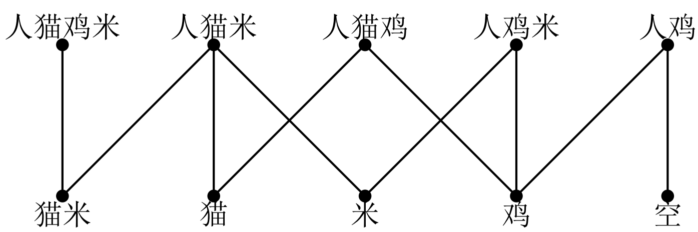
例 2.3.3 设G为简单图，每个顶点至少关联$k(\geq 1)$条边，则G必含长为k的路.

证明: 设$p = v_1v_2\cdots v_nv_{n+1}$是$G$中具有最大长度的路. 只需证$n \geq k$. 如果$n \geq k$，则$G$有长为$k$的路$v_1v_2\cdots v_kv_{k+1}$.

(反证)假如$n < k$，则v_1必与$v_2, \cdots, v_{n+1}$之外某个顶点v_0相连. 于是$v_0v_1\cdots v_{n+1}$是比P更长的路，矛盾. □

例 2.3.4 一个人带着猫、鸡、米，欲从河的左岸到右岸，每次只能带一件东西过河. 猫与鸡、鸡与米不能在无人看管的情况下放在一起. 问：至少需要多少次渡河才能把这些全带到对岸？

解: 用线表示过河, 点表示左岸剩余物品. 共有2种方案.



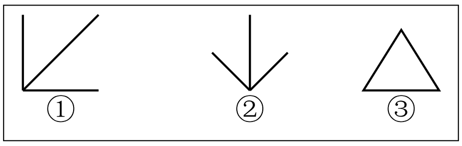
习题 5 (Week 5)

1. 设G是n阶自补图, 证明$n=4k$或$n=4k+1$, 其中k为正整数.
2. 设$2 \le r \le s$, 问完全二部图$K_{r,s}$中,
   (1) 含多少种非同构的圈?
   (2) 至多有多少个顶点彼此不相邻?
   (3) 至多有多少条边彼此不相邻?
   (4) 点连通度κ为几? 边连通度λ为几?
3. 设G是6阶无向简单图. 证明G或它的补图$\overline{G}$中存在3个顶点彼此相邻.
4. **(2.2)**设G是二部图, 证明: $|E(G)| \le \dfrac{|V(G)|^2}{4}$.
5. **(2.3)**设G是无向简单图, $\delta(G) \ge 2$. 证明: G中存在长度大于或等于$\delta(G)+1$的圈.
6. **(2.3)**证明围长为5的$k-$正则图G至少有k^2+1个顶点.

§ 2.4 图的连通性

定义 2.4.1 *无向图G**连通(connected)**指对任一对不同顶点$u, v \in V(G)$, G中有$u-v$路. 在无向图G中, 如果对$u, v \in V(G)$有$u=v$或G含$u-v$路, 则说$u \sim v$.*

易见$\sim$是$V(G)$上等价关系.(自反、对称、传递性) 把相互等价的归入一类叫**等价类**, 不同的等价类无公共顶点. 比如: 下图①②③中的点是三个等价类.



G(不连通)

定义 2.4.2 (连通分支) *每个这样的一个等价类中顶点导出的子图叫G的一个**连通分支**(也叫**极大连通子图**). 用$\omega(G)$表示G的**连通分支数**. 对于有向图G, 如果把边的方向去掉后的无向图连通, 则称G是**弱连通图**. 如果对有向图G中任一对不同顶点u, v, G中有$u-v$路或$v-u$路, 则称G为**单向连通图**. 双向连通图叫**强连通图**. 注意有向图的$u-v$路是从u指向v.*

定义 2.4.3 *设G为无向图, $e \in E(G)$. 如果$\omega(G-e) > \omega(G)$, 则称e是个**桥**或**割边**.*

由于$\omega(G) = \omega((G-e)+e) \ge \omega(G-e)-1$, 则$e$为割边时, $\omega(G-e) = \omega(G)+1$.

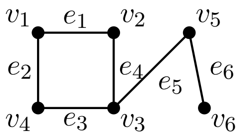
定义 2.4.4 *设$G = \langle V, E\rangle$为无向图. 如果$\varnothing \ne E_0 \subseteq E, \omega(G-E_0) > \omega(G)$, 但$E_1 \subset E_0$时$\omega(G-E_1) = \omega(G)$, 则称$E_0$为$G$的**边割集**. 把$G$为边割集基数最小的记为$\lambda(G)$, 这叫$G$的**边连通度**.*

当$\lambda(G) \ge r$时, 称G为$r-$边连通图(割小于r条边不改变连通分支数). 当G不连通时, 约定$\lambda(G)=0$. 根据定义, 边e为G的割边等价于$E_0 = \{e\}$为G的边割集.

定义 2.4.5 *设$G = \langle V, E\rangle$为无向图, 若$\varnothing \ne V_0 \subseteq V, \omega(G-V_0) > \omega(G)$, 但$V_1 \subset V_0$时$\omega(G-V_1) = \omega(G)$, 则称$V_0$为$G$的**点割集**. $V_0 = \{v\}$为点割集时称v为**割点**. 记**连通度**$\kappa(G)$为G中点割集基数最小者.*

$\kappa(G) \ge k$时称G为$k-$(点)连通图. 当G不连通时记$\kappa(G)=0$. 约定$\kappa(K_n) = n-1$.
注: 接下来会证明$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$. 定义在后面.

例 2.4.1 下图中e_5, e_6为割边, $\{e_2, e_3\}$为边割集; e_5为割边; $\{v_2, v_4\}$为点割集. 注意$\{v_3, v_5\}$不是点割集.



定理 2.4.1 设G是无向图, $e \in E(G)$. 则e为G的割边$\Leftrightarrow$ e不在所有圈上.

证明: e为环时, 左右两边都不成立. 下设e不为环, u, v为它的两个端点.
e为割边$\Leftrightarrow$ $G-e$中u, v处于不同连通分支$\Leftrightarrow$ $G-e$中无$u-v$路, u, v不等价$\Leftrightarrow$ e不在圈上. □
注: 最后一步中, u, v不等价$\Rightarrow$ e不在圈上显然, 反过来, 如果$G-e$中有$u-v$路, 则该$u-v$路加上边e就得到了一个圈.

下面定义$e(G) = |E(G)|$为G的**边数**.

定理 2.4.2 连通分支数为k的p阶简单图的边数最大者为
$$\binom{p-k+1}{2} = \frac{(p-k)(p-k+1)}{2}.$$

证明: 对于一个由$p-k+1$阶完全图K_{p-k+1}与$k-1$个孤立点组成的图G, 有
$$e(G) = \frac{(p-k)(p-k+1)}{2}.$$
任给一个有k个连通分支的p阶简单图G, 设$G_1, \cdots, G_k$为G的k个连通分支, 记$n_i = |V(G_i)|$. 则
$$\boxed{e(G) = \sum_{i=1}^{k} e(G_i) \le \sum_{i=1}^{k} \binom{|V(G_i)|}{2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(n_i-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i^2 - \frac{1}{2}p.}$$
其中用到了$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = p$. 记$x_i = n_i - 1 \ge 0$. 则$x_1 + \cdots + x_k = p + k - 1$, 且
$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i+1)^2 \le (x_1 + \cdots + x_k + 1)^2 + k - 1.$$
故$e(G) \le \dfrac{(p-k+1)^2 + k - 1 - p}{2} = \dfrac{(p-k+1)(p-k)}{2}$. □
注: 最后用到了下面的引理.

引理 2.4.3 对非负实数$x_1, \cdots, x_k$, $(x_1+1)^2 + \cdots + (x_k+1)^2 \le (x_1 + \cdots + x_k + 1)^2 + k - 1$.

证明: 用数学归纳法, $k=1$显然. $k=2$易证. 假如k的情况成立, 看$k+1$的情况, 结合$k=2$的情况以及k的情况立证. □

推论 2.4.4 设G是p阶简单图, 如果$e(G) > \dbinom{p-1}{2} = \dfrac{(p-1)(p-2)}{2}$, 则$G$必连通.

证明: G连通等价于G的连通分支数为1. 假如G的连通分支数$k \ge 2$, 根据上述引理,
$$e(G) \le \frac{(p-k)(p-k+1)}{2} \le \frac{(p-2)(p-2+1)}{2},$$
矛盾. □

§ 2.5 二部图的判别条件

定义 2.5.1 n为奇数时, $n-$圈叫奇圈. n为偶数时, $n-$圈叫偶圈.

引理 2.5.1 G为二部图$\Leftrightarrow$ 每个连通分支为二部图.

证明: "$\Rightarrow$": 设G具二分类(V_1, V_2), 则G的每个连通分支G_i是具二分类$(V(G_i)\cap V_1, V(G_i)\cap V_2)$的二部图.

"$\Leftarrow$": 设G有k个连通分支$G_1, \cdots, G_k$. G_i是具有二分类$(V_i^{(1)}, V_i^{(2)})$的二部图.
则G是具有二分类$\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i^{(1)}, \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i^{(2)}\right)$ 的二部图. □

定理 2.5.2 无向图G为二部图$\Leftrightarrow$ G不含奇圈.

证明: 根据前面引理, 只需证连通的情况. 不妨设G连通.

"$\Rightarrow$" 设G为具二分类(V_1, V_2)的连通二部图. 若G含n-圈$v_1v_2\cdots v_nv_1$, 则$v_1, v_3, \cdots$同属V_1或V_2; $v_2, v_4, \cdots$同属V_2或V_1. 如果n是奇数, 则v_n与v_1同属V_1或V_2, 与二部图定义矛盾. (二部图每个分类中顶点彼此不相邻)

"$\Leftarrow$" 设连通图G不含奇圈, 我们来说G是二部图. 由于G不含奇圈, G无环, 任取$v\in V(G)$, 让

$$V_0 = \{u\in V(G) : 2|d(u,v)\},$$
$$V_1 = \{u\in V(G) : 2\nmid d(u,v)\}.$$

下证G是具二分类(V_0, V_1)的二部图. 对不同于v的两个顶点u, u'(任取), 设P是v到u的最短路, P'是v到u'的最短路, w是P与P'最后一个公共顶点, 则P与P'中$v-w$路都为最短, 且长度相同.

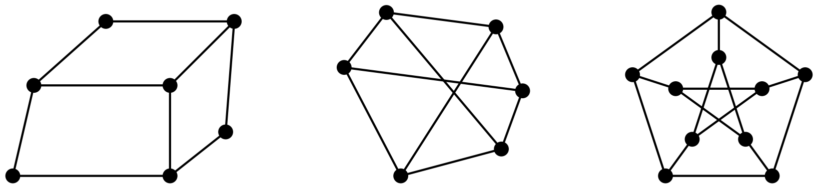
如果u, u'同属V_0或V_1, 则P与P'长度的奇偶性相同, 从而P中$w-u$路与P'中$w-u'$路长度的奇偶性相同.

如果uu'为边, 则此边与$w-u$路以及$w-u'$路构成奇圈. 因G不含奇圈, 则无边连接u与u'. (要注意u, u'任取).

由上, G为有二分类(V_0, V_1)的二部图. □

注: $u=v\neq u'$时, 如果uu'为边, 则$u\in V_0, u'\in V_1$, 不可能u, u'同属V_0或V_1.

例 2.5.1 下面的图中, 前2个图没有奇圈, 是二部图; 最后一个图叫***Peterson*图**, 它有奇圈, 不是二部图.



§ 2.6 图的顶点次数

定义 2.6.1 *设G为无向图, $v \in V(G)$, $d_G(v)$指v关联的边的条数, 又称v**的次数/度**.*

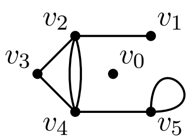
注: 与v关联的边为环时算两次.

当$d_G(v) = n$时称v为n次点, 0次点又叫**孤立点**. 1次点叫**悬挂点**.

把$\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$叫$G$的**最大次数**, $\delta(G) = \min\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$叫$G$的**最小次数**.

如果所有$d_G(v)(v \in V(G))$为同一个值k, 则G叫$k-$**正则图**.

例如: 下图中$d(v_0) = 0, d(v_1) = 1, d(v_2) = 4, d(v_3) = 2, d(v_4) = 4, d(v_5) = 3$, $\Delta(G) = 4, \delta(G) = 0$.



下面看一个“朋友问题”.

例 2.6.1 *在$p \geq 2$个人的人群中必有两个人在本群中朋友个数相同.*

证明: 用平面上p个点$v_1, \cdots, v_p$表示p个人. 如果第i个人与第j个人是朋友, 则作一条边连接v_i与v_j. $d_G(v_i)$表示第i个人的朋友个数. 下面证$d(v_1), \cdots, d(v_p)$中必有2个相同.

(反证)假如它们两两不等, 则由正整数性质, $\{d(v_1), \cdots, d(v_p)\}$中最大的数比$p-1$大, 即$\Delta(G) \geq p-1$. 但由于$\Delta(G) \leq p-1$, 则有一个顶点$v_s$次数恰好为$p-1$. 从而第$s$个人与其他人都是朋友. 从而$d(v_1), \cdots, d(v_p)$都大于0. 由于它们两两不同, 又由正整数性质, $\Delta(G) \geq p$, 与$\Delta(G) \leq p-1$矛盾. □

定理 2.6.1 (Euler,1736) *设G为无向图, 则*

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2e(G).$$

证明: 设$V(G) = \{v_1, \cdots, v_p\}, E(G) = \{e_1, \cdots, e_q\}$. 让

$$N(v_i, e_j) = \begin{cases} 0, & v_i\text{不是}e_j\text{的端点}. \\ 1, & v_i\text{是}e_j\text{的端点, 而}e_j\text{不是环}. \\ 2, & v_i\text{是环}e_j\text{的端点}. \end{cases}$$

则

$$\sum_{i=1}^{p} d_G(v_i) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} N(v_i, e_j) = \underline{\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} N(v_i, e_j) = \sum_{j=1}^{q} 2} = 2q = 2e(G). \quad \square$$

注: 该定理又称**”握手定理”**.

推论 2.6.2 *无向图G有偶数个奇次点.*

证明: 根据上个定理, 把所有奇次点选出来, 有(注意一个数加偶数不改变奇偶性)

$$\sum_{v \in V(G), 2 \nmid d_G(v)} d_G(v) \equiv 0 \pmod 2.$$

上述$d_G(v)$都是奇数! 而需要有偶数个奇数加起来才为偶数, 故G有偶数个奇次点. □

定义 2.6.2 对于具有p个顶点$v_1,\cdots,v_p$的无向图G, $\{d_G(v_p)\}_{i=1}^p$叫G的一个**度序列**.

定理 2.6.3 设$d_1,\cdots,d_p\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$, 则$\{d_i\}_{i=1}^p$为一个无向图度序列的充分必要条件是

$$d_1+\cdots+d_p\equiv 0(\mod 2).$$

证明: "⇒" 即定理2.6.1(trivial!)

"⇐" 设$d_1,\cdots,d_p\in\mathbb{N}$, 且$d_1+\cdots+d_p$为偶数, 则$d_1,\cdots,d_p$中是奇数的有偶数个. 设其中的$d_{i_1},d_{i_2},\cdots,d_{i_{2k}}$为奇数($1\le i_1<i_2<\cdots<i_{2k}\le p$), 取不同顶点$v_1,\cdots,v_p,1\le i\le p$, 以$v_i$为端点作$\left\lfloor\dfrac{d_i}{2}\right\rfloor$个环. (也就是说$d_i$为奇数时少了一条边) 当$j\ne i_1,\cdots,i_{2k}$时, $2\left\lfloor\dfrac{d_j}{2}\right\rfloor=d_j$. 作边$v_{i_1}v_{i_2}$, $v_{i_3}v_{i_4}$, $\cdots,v_{2k-1}v_{2k}$. (刚刚作环时少了个degree, 这里连一下就凑够degree) 由此便作出了一个度序列为$\{d_i\}_{i=1}^p$的无向图. □

注: 作出来的图是这样子的:

定理 2.6.4 设G为p阶简单图, 顶点次数依次为$d_1,\cdots,d_p$. 则$d_1+\cdots+d_p\equiv 0(\mod 2)$且当$1\le k\le p$时,

$$\sum_{i=1}^k d_i\le k(k-1)+\sum_{k\le i\le p}\min\{d_i,k\}.$$

证明: (1)前面定理已证.

(2)把p个点分成两部分: $V_1=\{v_1,\cdots,v_k\}$, $V_2=\{v_{k+1},\cdots,v_p\}$. 在$V_1$内, 最多连$k(k-1)$条边. 而$V_2$中的点往$V_1$连, 最多只能连$k$条. 且由于顶点次数的限制, 最多只能连$d_i$条. 所以$V_2$中的点最多连$\min\{d_i,k\}$条. □

注: 1960年Erdös与T. Gallai证明了上面的逆命题成立. 即如果

$$\sum_{i=1}^k d_i\le k(k-1)+\sum_{k\le i\le p}\min\{d_i,k\}.$$

则自然数序列$\{d_i\}_{i=1}^p$也是个简单图度序列.

例 2.6.2 判断$(6,6,5,4,3,3,1)$是不是某个简单图的度序列.

解法一: 假如有个7阶简单图G使其顶点$v_1,\cdots,v_7$次数依次为6,6,5,4,3,3,1, 由$d(v_1)=d(v_2)=6$知v_1,v_2与其他顶点都连, 从而v_1v_7,v_2v_7都为边. 然而$d(v_7)=1$, 矛盾. 所以它不是一个简单图度序列.

解法二: 用定理2.6.4, 6+6+5+4+3+3+1是个偶数, 但

$$21=6+6+5+4\not\le 4(4-1)+\min\{3,4\}+\min\{3,4\}+\min\{1,4\}=19,$$

不满足定理2.6.4, 故不是一个简单图度序列. □

习题 6 (Week 6)

1. 一次舞会上有7对男女参加, 且舞体互为异性, 会后统计出各人跳舞次数为:

$$6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 5, 3, 3, 3, 3, 3.$$

证明统计必有错误.

2. 设G是n阶无向图, $n \geq 3$为奇数. 证明G与$\overline{G}$中奇度顶点个数相等.
3. 设G是n阶m条边的无向连通图, 证明$m \geq n-1$.
4. **(2.4)**设$e=(u,v)$为无向图G中的割边, 证明: u是割点当且仅当u不是悬挂顶点.
5. **(2.4)**证明: $n(n \geq 2)$阶简单连通图G中至少有两个顶点不是割点.
6. **(2.4)**若G为$k \geq 2$的$k-$正则二部图, 则G没有割边.
7. **(2.6)**设n阶图G中有m条边, 证明: $\delta(G) \leq \dfrac{2m}{n} \leq \Delta(G)$.
8. **(2.6)**设9阶无向图G中, 每个顶点的度数不是5就是6. 证明G中至少有5个6度顶点或至少有6个5度顶点.
9. **(2.6)**设G是n阶无向简单图, $n \geq 3$为奇数, 证明G与$\overline{G}$中奇度顶点个数相等.
10. **(2.6)**设G是n阶$n+1$条边的无向图, 证明G中存在顶点v, 使得$d(v) \geq 3$.
11. **(2.6)**若无向图G中恰有两个奇度顶点, 证明这两个奇度顶点必连通.
12. **(2.6)**设$v_1, \cdots, v_n$为平面上n个不同的点, 任两点的距离(通俗的距离)至少是1. 证明至多有$3n$对这样的点使每对点距离恰好为1.

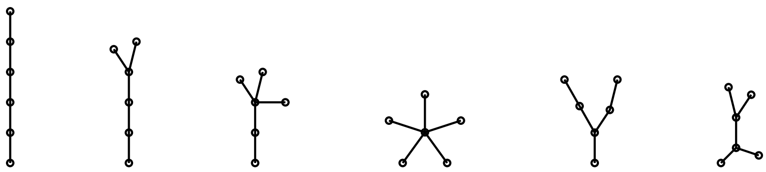
§ 2.7 树、生成树与赋权图的最小树

定义 2.7.1 (树) *无圈的连通无向图叫**树(tree)**. 只有一个顶点的树叫**平凡树**, 树中1次点叫**树叶(leaf)**.*

注: 显然, 树必定为简单图.

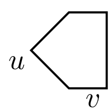
定义 2.7.2 *把每个连通分支都为树的图叫**森林**.*

例 2.7.1 *互不同构的6阶树共6种.*



定理 2.7.1 *设G为简单图, 则: G为树$\Leftrightarrow$对任何不同的$u, v \in V(G)$, G有唯一的$u-v$路.*

证明: "$\Leftarrow$" 由条件知G必连通. 因为G为简单图, G无环, 若G含圈C, 则C上至少有两个不同顶点至少有两条路连接它们(如右图, u, v都在圈上, 它们之间至少有两条路连接), 这与只有唯一的$u-v$路矛盾. 故G为树.



"$\Rightarrow$" 设G为树, u, v为G中不同顶点. 因为G连通, 则必有$u-v$路. 假如有两条不同的$u-v$路P_1与P_2, 而$E(P_1) \neq E(P_2)$, 不妨设$e \in E(P_1)$但$e \notin E(P_2)$. 则$(P_1 \cup P_2)-\{e\}$连通. 记v_1, v_2是e的两个端点, 则$(P_1 \cup P_2)-\{e\}$中必有v_1-v_2路. 此路加上边e便构成G中圈, 与树G不含圈矛盾. □

推论 2.7.2 设u,v是树T的两个不相邻的点, 则$T+uv$恰有一个圈.

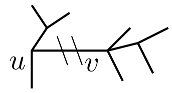
注: 这里uv表示边.

证明: 树T无圈, 则$T+uv$的圈必含边uv. 由T中$u-v$路唯一(前面定理), 故这样的圈唯一. □

定理 2.7.3 若T为树, 则

$$e(T)=|V(T)|-1.$$

证明: 对$p=|V(T)|$进行归纳. $p=1$时, T只有一个点, 无边. 则$e(T)=0=|V(T)|-1$.



假设$p\le n$结论正确, 下证$p=n+1$时结论正确. 由于$p+1\ge 2$且T连通, T必有边.

设uv为T的一条边, 则uv是T中唯一的$u-v$路. 所以$(T-uv)$中无$u-v$路.

设$T-uv$中含u的连通分支为T_u, 含v的连通分支为T_v. 下面证明只有2个连通分支: 假如顶点w不在T_u与T_v中, 则$T-uv$中无$w-u$路也无$w-v$路. 从而T中无$w-u$路也无$w-v$路(w与uv边无关, 把uv边加上不改变w的连通性质), 这与T连通矛盾. 因而每个顶点只能在T_u或T_v里, $T-uv$只有2个连通分支.

下面证明T_u与T_v都为树: 由于T_u,T_v都是连通分支, 当然连通. 而T不含圈, 则T_u,T_v都不含圈, 故T_u,T_v均为树. 所以$|V(T_u)|$与$|V(T_v)|$都比$n+1$小. 根据归纳假设, $e(T_u)=|V(T_u)|-1, e(T_v)=|V(T_v)|-1$. 于是$e(T)=e(T_u)+e(T_v)+1=|V(T_u)|+|V(T_v)|-1=|V(T)|-1$. □

注: 连通图T为树$\Leftrightarrow$ T的每条边不在圈上$\Leftrightarrow$ T每条边都为割边.

定理 2.7.4 非平凡树T至少有两片树叶.

证明: 设T有p个顶点, $v_1,\cdots,v_p$恰有r片树叶, 则

$$2(p-1)=2e(T)=\sum_{i=1}^{p}d(v_i)=r+\sum_{v_i\text{不是树叶}}d(v_i)\ge r+2(p-r)=2p-r,$$

则$2(p-1)\ge 2p-r,\Leftrightarrow r\ge 2$. □

例 2.7.2 今有n个乒乓球选手, 参加单打淘汰赛, 要决出冠军, 需打多少场比赛?

解: 两个选手间有比赛就连条边, 它不会有圈, 可形成树, 共打$n-1$场. (一个树加上一个点与连这个点的一条边仍然为树). □

定义 2.7.3 (生成树) 如果无向图G的一个生成子图为树T, 则称T为G的一个生成树（支撑树）.

定理 2.7.5 无向图G有生成树$\Leftrightarrow$ G连通.

证明: "$\Rightarrow$" 设G有生成树T, 对不同的$u,v\in V(G)=V(T)$, T中有唯一的$u-v$路, 从而G中有$u-v$路, G连通.

"$\Leftarrow$" 设G是p阶连通图, 如果G本身是树, 则G为G的生成树.

假如G不是树, 但G连通, 则G有圈C_1, C_1上的边e_1不是割边, 则$\omega(G-e_1)=\omega(G)=1$. 如果$G-e_1$是树, 则$G-e_1$是$G$的生成树. 如果$G-e_1$不是树, 它仍连通, 它包含圈$C_2$, C_2上边e_2不是割边, 则$G-e_1-e_2$仍连通, 同样方法进行下去, 如果有边$e_1,\cdots,e_k$使$G-\{e_1,\cdots,e_k\}$为树, 这就是G的生成树. □

注: 该过程不可以无限进行下去, 因为边数有限，一定会终止.

推论 2.7.6 设G是p阶连通图，则$e(G) \geq p-1$且：$e(G) = p-1 \Leftrightarrow G$为树.

证明: G为树时, $e(G) = |V(G)| - 1 = p - 1$.

G不为树时, 则G有圈, 适当割去$k \geq 1$条边$e_1, \cdots, e_k$后, $T = G - \{e_1, \cdots, e_k\}$为生成树. 所以

$$e(T) = |V(T)| - 1 = p - 1$$

所以

$$e(G) = e(T) + k > e(T) = p - 1.$$

□

定义 2.7.4 对于无向连通图G, 对各边$e \in E(G)$赋以权$w(e) > 0$, 所得图叫**赋权图**, 把

$$w(G) \triangleq \sum_{e \in E(G)} w(e)$$

叫G的**权*(weight)***.

定义 2.7.5 (最小生成树) 实际问题中, 往往找赋权图G的一个权最小的连通生成子图T, 这样的T必为树, 叫G的**最小生成树**.

注: 若这样的T不是树, 它有生成树T', $w(T') < w(T)$, 当然T'也是G的生成树(连通生成子图), 这与T的选取矛盾.

注: 把最小生成树比作"城市间通高铁"即可.

2.7.1 找赋权连通图的最小树的两个算法

算法1 (Kruskal避圈法)招工, 先找要价低的工人, 小团体(平行边)中赶剩一个.

先取G中权最小的一条边e_1, 再在$G - e_1$找权尽可能小的边e_2, 使e_1, e_2不构成圈. 一般地, 选好$e_1, \cdots, e_k$后, 再在$G - \{e_1, \cdots, e_k\}$找权尽可能小的边e_{k+1}, 使得$\{e_1, \cdots, e_{k+1}\}$的边导出子图中不含圈, 如此进行下去, 最后可以找到边$e_1, \cdots, e_{p-1}$, 使得这$p-1$条边连同G全部p个顶点构成的子图T为最小树.

T无圈, 它的每个连通分支都为树. 当

$$p - 1 = e(T) = p - \omega(T) \Rightarrow \omega(T) = 1,$$

则T连通. 而当$k < p-1$时, $e_1, \cdots, e_k$与p个顶点构成图T_k满足

$$k = e(T_k) = p - \omega(T_k) \Rightarrow \omega(T_k) = p - k > 1.$$

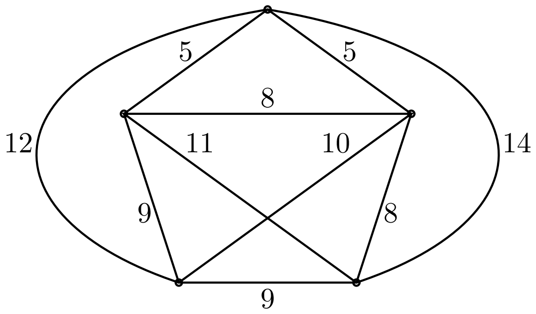
此时T_k不连通. 所以T_k的两个连通分支间在G中有路相连, 可从G中找一条边连接两个连通分支, 从而可找e_{k+1}使得$\{e_1, \cdots, e_{k+1}\}$的边导出子图不含圈.

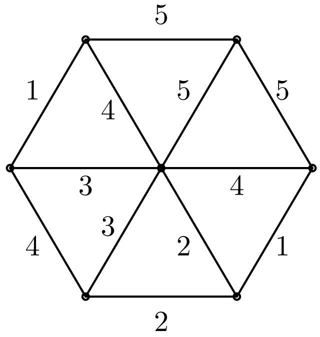
算法2 (求最小树的破圈法)招工, 把人全部放进来, 再把要价高的请出去.

若G不含圈, 则G为最小树. 若G含圈, 任取圈C, 把权最大的边割掉, 仍连通. 如果$G - e$为树, 则它为最小树. 如果$G - e$有圈C', 再取C'权最大的边割掉(它仍连通). 同样方法进行下去, 最后得最小树T.

习题 7 (Week 7)

1. 求下图中两个带权图的最小生成树.





2. 设T为非平凡的无向树, $\Delta(T) \geq k$, 证明T至少有k片树叶.
3. **(2.7)**设G是树, $\Delta(G) \geq k$, 则G至少有k个顶点的度为1.
4. **(2.7)**设T是$k+1$阶无向树, $k \geq 1$. G是无向简单图, 已知$\delta(G) \geq k$, 证明G中存在与T同构的子图.
5. **(2.7)**设G为$n(n \geq 5)$阶简单图, 证明G或$\overline{G}$中必含圈.
6. **【选做】优美树猜想:** 设T是n阶树, 可把这n个顶点适当标号为$1, \cdots, n$, 使得割边标号两两不同(即跑遍$1, \cdots, n-1$). 边ij的标号指$|i-j|$.
7. **【选做】1-2-3猜想:** 对不含孤立边的无向图, 可把每条边适当赋一个属于$\{1,2,3\}$的权使得u, v为相邻顶点时, 加权的$d_G(u)$与$d_G(v)$不等. (目前已经解决了$\{1,2,3,4,5\}$的情况.)
8. **【选做】猜想(孙,2013):** 任给n个不同实数$a_1, \cdots, a_n$, 可把它重新排列为$b_1, \cdots, b_n$但使$a_1 = b_1$, 使得$|b_1 - b_2|, |b_2 - b_3|, \cdots, |b_{n-1} - b_n|$两两不同. (当$a_1$为最小/最大已证; 米兰的一个博士生证明了$a_1, \cdots, a_n$成等差数列的情况)

§ 2.8 Euler图与Hamilton图

2.8.1 Euler图

定义 2.8.1 *设G是有边的无向连通图, 如果存在一个起点与终点相同且经过所有边的迹各一次(该迹叫闭**Euler迹**), 则称G为**Euler图**.*

显然Euler图无孤立点.

定理 2.8.1 (Euler) *设G是个非平凡的连通图, 则: G为Euler图$\Leftrightarrow$ G的每个顶点都是偶次点.*

证明: "$\Rightarrow$" 设w为G中一条闭Euler迹. 由于G中每个点至少关联一条边, w经过G每个顶点, 如果顶点v在w中出现k次, 则$d_G(v) = 2k$.

"$\Leftarrow$" 设G各顶点均为偶次点, G不可能是树. (因为树有至少2个1次点) 而G连通, 则G必含圈. 设C_1为G的一个圈, 则$G - E(C_1)$中各个顶点仍为偶次点(全部圈上的点都少2度, 奇偶性不变). 若$G - E(C_1)$还有边, 则$G - E(C_1)$各边连通分支都不是树, 则它还有圈C_2. $G - E(C_1) - E(C_2)$中各顶点仍为偶次点. 如此下去可知G是若干个边不相交的圈的并(对圈的个数归纳), 从而有闭Euler迹. □

注: 非平凡指的是不止一个顶点.

定义 2.8.2 *对连通图G, 起点与终点不同且经过所有边各一次的迹叫开**Euler迹**.*

注: 闭Euler迹与开Euler迹经过的点是可以重复的.

注意连通图G含u到v的开Euler迹$\Leftrightarrow$ $G+uv$为Euler图$\Leftrightarrow$ G中仅有u,v为奇次点, 其他点为偶次点. 故有:

定理 2.8.2 *连通图G有开Euler迹$\Leftrightarrow$ G中恰有两个奇次点.*

定义 2.8.3 *含开或闭Euler迹的连通图叫**一笔画图**.*

2.8.2 Hamilton图

1859年, Hamilton发明了个游戏: 正十二面体有20个顶点(视为城市), 要求从某个城市出发, 经过所有其它城市各一次又回到原来的城市.

定义 2.8.4 *设G为无向图, G的包含所有顶点的圈叫**Hamilton圈**, 含Hamilton圈的图叫**Hamilton图**.*

到目前为止没有一个令人满意的判断Hamilton图的充分必要条件.

定理 2.8.3 *设G是Hamilton图, 则当$\varnothing \neq S \subseteq V(G)$时, $\omega(G-S) \leq |S|$.*

证明: 设C为G的Hamilton圈. 则$C-S$是$G-S$的生成子图(顶点没少, 少了些边). $G-S$是由$C-S$加上端点属于$V(C-S)$的一些边构成, 故$\omega(G-S) \leq \omega(C-S)$. (当加上一条边后, 连通分支可能会少1条或不变!)

只需要证$\omega(C-S) \leq |S|$. 设$V(G)=V(C)=\{v_1,\cdots,v_r\}$, 则

$$\omega(C-v_1)=1=\{v_1\}.$$

对删去顶点个数归纳. 假设$\omega(C-v_1-v_2-\cdots-v_s) \leq s$对, 则

$$\omega(C-v_1-v_2-\cdots-v_s-v_{s+1}) \leq \omega(C-v_1-\cdots-v_s)+1 \leq s+1.$$

(删去原本在圈中的一个点, 连通分支数多0或1) □

例 2.8.1 *在4×4棋盘中跳马.*

v_1			v_2
	v_5	v_6	
	v_7	v_8	
v_4			v_3

视小方格为顶点, 如果马可以从一小方格跳到另一个小方格, 则在相应顶点图连条边. 如此可得一个简单图G. 下面看G是否为Hamilton图:

让$S=\{v_5,v_6,v_7,v_8\}$, 在G中把S拿掉后v_1,v_2,v_3,v_4变为孤立点,

$$|V(G-S)|=12, \omega(G-S) \geq 5 > |S|=4.$$

违背了定理2.8.3的必要条件. 故G不是Hamilton图, 故不可以跳满棋盘.

注: Petersen图满足定理2.8.3的必要条件, 但不是Hamilton图. (图参见前几节)

定理 2.8.4 (Ore,1960) 设G为$p \geq 3$阶简单图. 且对G的任一对不相邻顶点u, v, 有

$$d_G(u) + d_G(v) \geq p.$$

则G为*Hamilton*图.

证明: 先证G连通. 若不然, 则有两个不同顶点u, v使G无$u - v$路. 特别地, u, v不相邻. 假如u所在连通分支为G_1, v所在连通分支为G_2, 则

$$d_G(u) + d_G(v) \leq |V(G_1)| - 1 + |V(G_2)| - 1 \leq |V(G)| - 2 < p.$$

这与$d_G(u) + d_G(v) \geq p$矛盾, 故G连通.

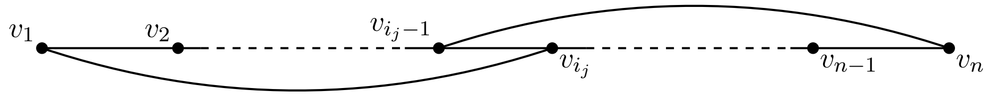
设$P = v_1 v_2 \cdots v_n$是G中一条最长路, 则$n \leq p$. v_1的相邻顶点只能在$v_2, \cdots, v_n$中, 否则可以延长. 同样v_n的相邻顶点只能在$v_1, \cdots, v_{n-1}$中. 下证: P全部n个顶点$v_1, \cdots, v_n$是个n-圈的所有顶点. (该圈不一定每个v_{i-1}连着v_i)

如果v_1与v_n相邻, 则$v_1 \cdots v_n v_1$是个n-圈.

如果v_1与v_n不相邻, 设v_1的相邻的点是$v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k} (2 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n)$. 若$v_{i_1 - 1}$, $v_{i_2 - 1}$, $\cdots, v_{i_k - 1}$都不是v_n的相邻点, 则

$$d_G(v_1) + d_G(v_n) \leq k + (n - 1 - k) < n \leq p,$$

与条件矛盾. 故有$1 \leq j \leq k$使$v_{i_j - 1}$与v_n相邻. 如此, $v_1 v_2 \cdots v_{i_j - 1} v_n v_{n-1} \cdots v_{i_j} v_1$是个$n$-圈, $v_1, \cdots, v_n$是它的全部顶点. 该圈上每个点可看做最长路的起点.



下证$n = p$: 当$1 \leq i \leq n$时, v_i的相邻点都在C上. 如果$n \leq p$(即$n < p$), 则有个顶点u不在圈上. 但v_i的相邻点都在C上, 不与z连. (否则如果与u连, 由$v_1, \cdots, v_n$构成的路不是最长) 但由连通性, u与圈上的点之间有路, 矛盾. 故C为G的Hamilton圈, G是Hamilton图. □

推论 2.8.5 (Dirac,1952) 设G为$p \geq 3$阶简单图, 若$\forall v \in V(G)(d_G(v) \geq \frac{p}{2})$, 则$G$为*Hamilton*图.

证明: 对一对不相邻顶点u, v,

$$d_G(u) + d_G(v) \geq \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p.$$

由Ore定理, G为Hamilton图. □

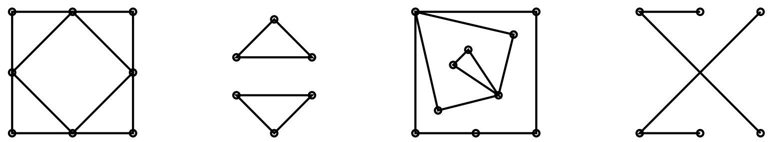
注: 范更毕于1984年推广了Ore定理. 他对Hamilton图研究很深.

例 2.8.2 一国王要召集他的$2n(n \geq 2)$个大臣议事. 每位大臣与另外的$2n-1$个大臣中至多$n-1$个不和. 能否安排这$2n$个大臣围绕圆桌而坐, 使得不和的大臣不坐在一起（不相邻）?

解: 把大臣记为顶点, 和谐的大臣间连条边. 如此得一个$2n$阶简单图G. 对于顶点v, $d_G(v) \geq n = \frac{2n}{2}$. 由上述推论, G为Hamilton图. 可安排这些大臣依Hamilton图上顶点顺序坐下.

习题 8 (Week 7)

1. 判断下图中哪些是Euler图, 对不是Euler图的至少加多少条边才能成为Euler图?

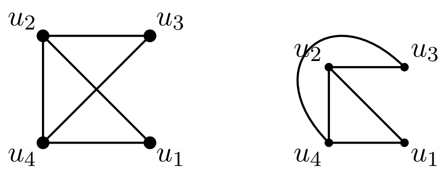


2. **(2.8)**说明$n(\geq 2)$阶无向树不是Euler图, 也不是Hamilton图; 任意无向树T都是二部图.
3. **(2.8)**设G是无向简单图, 证明: 若G中有割边或割点, 则G不是Hamilton图.
4. **(2.8)**完全图$K_n(n \geq 3)$都是Hamilton图吗?
5. **(2.8)**设G为$n(n \geq 3)$阶无向简单图, $e(G) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$, 证明$G$是Hamilton图.
6. **(2.8)**Petersen图既不是Euler图又不是Hamilton图, 至少加几条新边才会成为Euler图? 至少加几条新边才会成为Hamilton图?
7. **(2.8)**设G是具有二分类(V_1, V_2)的二部图, $|V_1| \neq |V_2|$, 证明: G不是Hamilton图.

§ 2.9 平面图

定义 2.9.1 *设G为无向图. 若可把G画在平面上使得任两边不在顶点之外的地方相交, 则称G为**(可)平面图**. 这种画法叫G的一个**平面嵌入**.*

例 2.9.1 *平面图的例子: 左边可以变为右边, 把一条边拉出来, 所以是平面图.*

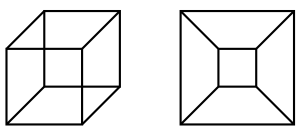


例 2.9.2 *二部图$K_{2,n}$是平面图, 其中n是正整数. 设二部图有二分类(V_1, V_2), $|V_1| = 2$, 把V_1的点拉到V_2两端即可.*

由于用LaTeX画图太辛苦太麻烦, 这次就不画图了.

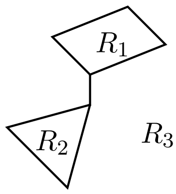
定理 2.9.1 (剥橘子) *一个无向图为平面图$\Leftrightarrow$可把此图画到球面上, 使得任意两边(球面弧)不在端点以外的地方相交.*

例 2.9.3 *凸多面体. 以凸多面体的顶点为图的顶点, 多面体的棱作为图的边. 把多面体包在球里, 以多面体内部任一点作为光源, 投射到球面上, 所得图的弧不相交, 则多面体是平面图. 下图是六面体(左边变为右边):*



定义 2.9.2 *平面图G的边把平面分成若干个区域, 每个这样的区域叫一个**面(face)**. 面积无限的面叫**外面**, 面积有限的面(封闭区域)叫**内部面**. 包围每个面的所有边组成的叫该面的**边界**. 面R的**次数**$\deg(R)$指它边界上边的条数. 如果一个边的两侧是同一个面R, 则计算$\deg(R)$时此边算两次.*

例 2.9.4 下图中$\deg(R_1)=4, \deg(R_2)=3, \deg(R_3)=9$.



注: 类似于握手定理, 对于平面图G, 有如下定理:

定理 2.9.2 $\sum\limits_{R为G的面}\deg(R)=2e(G)$.

定理 2.9.3 (Euler) 设连通平面图G恰有p个顶点, q条边, r个面, 则$p-q+r=2$.

证明: 通过割去圈上边可得G的生成树T(构造没有圈的图), 割去圈上一条边时, 边数少1, 面数小1. (两个面被打通了) 边数与面数之差不变, 故$q-r=e(T)-T$的面数$=p-1-1=p-2$. □

注: 易知树T的面数都是1. 另外定理2.7.3表明$e(T)=p-1$.

推论 2.9.4 (Euler多面体公式) 设一凸多面体顶点数为V, 棱数为E, 面数为F, 则$V-E+F=2$.

定理 2.9.5 设G为p阶平面图, 每个面次数至少为$n(\geq 3)$, 则

$$q=e(G)\leq \frac{n}{n-2}(p-2).$$

证明: 先设G连通, G恰有r个面$R_1,\cdots,R_r$, 则

$$2q=\sum_{i=1}^{r}\deg(R_i)\geq rn.$$

由Euler公式, $p-q+r=2$, 则

$$2q\geq(2+q-p)n\Leftrightarrow q\leq\frac{n}{n-2}(p-2).$$

当G每个面的次数都为n时取等号.

假如G不连通, $G_1,\cdots,G_k$为所有连通分支, 作边e_i连接G_i中一个顶点与G_{i+1}中一个顶点, 所得的图G'连通, 由刚才所证, $q=e(G)\leq e(G')\leq\dfrac{n}{n-2}(p-2)$. □

推论 2.9.6 $K_{3,3}$与K_5不是平面图.

证明: 对$G=K_{3,3}$, 顶点数$p=6$, 边数$q=9$. G为奇圈, 假如G是可平面图, 每个面次数至少为4. (至少4条边才能围成一个圈) 然而$9\not\leq\dfrac{4}{4-2}(6-2)=8$, 与上面定理矛盾.

对$G=K_5$, 顶点数$p=5$, 边数$q=10$. 假如K_5为平面图, 则每个面的次数至少为3. (至少3边才能围成一个圈) 而$q=10\not\leq\dfrac{3}{3-2}(5-2)=9$, 与上面定理矛盾. □

注: 平面图的子图仍然是平面图, 所以当$m\geq 3$且$n\geq 3$时, $K_{m,n}$不是平面图; 当$n\geq 5$时, K_n不是平面图.

定义 2.9.3 把uv边去掉, 引入w连接u, v, 称此操作为**插入二度点**w. 设w只和u, v相连, 删去点w, 引入uv边, 则称此操作为**消去二度点**w. 如果经过若干次插入或消去二度点可由图G得到图H, 则称G与H**同胚**.

波兰人Kuratowski在1930年得到如下定理来判别平面图: (比较难证)

定理 2.9.7 (Kuratowski) G为平面图$\Leftrightarrow$ G不含同胚于$K_{3,3}$的子图, 也不含同胚于K_5的子图.

例 2.9.5 (Euler) 正多面体只有5种.

证明: 把正多面体对应到平面图. 设一个正多面体的顶点数为p, 棱数为q, 面数为r, 根据Euler公式有$p - q + r = 2$. 设每个面为正$n \geq 3$边形, 每个顶点恰好在$k \geq 3$个棱上. 则

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{n}{n-2}(p-2) = q = \dfrac{1}{2}kp & (\text{定理}2.7.3) \\ 2q = rn & (\text{定理}2.9.2). \end{array}}$$

解得

$$p = \frac{4n}{2k-(k-2)n}, q = \frac{2kn}{2k-(k-2)n}, r = q + 2 - p = \frac{4k}{2k-(k-2)n}.$$

由于$p > 0$, 则$2k > (k-2)n \Rightarrow 3 \leq n < \dfrac{2k}{k-2} \Rightarrow 3k - 6 < 2k \Rightarrow k \leq 5$.

1° 当$k = 3$时, $3 \leq n < 6$, n可取$3, 4, 5$.

①$n = 3$时, $p = 4, q = 6, r = 4$.

②$n = 4$时, $p = 8, q = 12, r = 6$.

③$n = 5$时, $p = 20, q = 30, r = 12$. (Hamilton设计的游戏)

2° 当$k = 4$时, $3 \leq n < 4 \Rightarrow n = 3, p = 6, q = 12, r = 8$.

3° 当$k = 5$时, $3 \leq n < \dfrac{10}{3} \Rightarrow n = 3, p = 12, q = 30, r = 20$. □

2.9.1 其他拓展

下面定理与二部图的匹配问题有关：如果有n个男生、n个女生, A_k为第k个男生喜欢的女生的集合. Hall定理表明, 对于$\varnothing \neq I \subseteq \{1, \cdots, n\}$, 有: 任取若干男生, 把他们喜欢的女生放在一起, 女生的个数都多于选取的男生个数$\Leftrightarrow$每个男生可找到自己喜欢的女生做老婆.

定义 2.9.4 设$A_1, \cdots, A_n$为集合, 若$a_1 \in A_1, \cdot, a_n \in A_n$, 则称$\{a_i\}_{i=1}^n$为$\{A_i\}_{i=1}^n$的**一个代表系**, 若$a_1, \cdots, a_n$两两不同, 则称$\{a_i\}_{i=1}^n$为$\{A_i\}_{i=1}^n$的**一个相异代表系**, 简称***SDR(system of distinct representatives)***.

定理 2.9.8 (Hall, 1935) 集列$\{A_i\}_{i=1}^n$有SDR的充分必要条件是

$$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \geq |I|, \forall I \subseteq \{1, \cdots, n\}$$

证明: "$\Rightarrow$" 设$\{a_i\}_{i=1}^n$为$\{A_i\}_{i=1}^n$的一个SDR, 则$I \subseteq \{1, \cdots, n\}$时,

$$\bigcup_{i \in I} A_i \supseteq \{a_i : i \in I\} \Rightarrow \left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \geq |\{a_i : i \in I\}| = |I|.$$

"$\Leftarrow$": 可由下面定理推出.

定理 2.9.9 (孙, Proc AMS, 129(2001)p3129-3131) *设$A_1,\cdots,A_n(n\ge 1)$为X的子集, 且$\{a_i\}_{i=1}^n$为$\{A_i\}_{i=1}^n$的一个SDR, 则有$J\subseteq\{1,\cdots,n\}$使得$n\in J$, 并且*

$$\left|\{a\in X:\text{由}a\text{与}a_1,\cdots,a_{n-1}\text{适当排序后形成}\{A_i\}_{i=1}^n\text{的}SDR\text{ 且}i\notin J\text{时}A_i\text{的代表元为}a_i\}\right|=\left|\bigcup_{j\in J}A_j\right|-|J|+1.$$

根据上面定理, 由$n-1$的情况推n的情况(加元素并排序)就证出来了.

证明: 考虑一个连通图G, 顶点是$1,\cdots,n$, 且i,j之间有边当且仅当$i\ne n$且$a_i\in A_j$. 记

$$J=\{1\le j\le n:\text{存在}G\text{中}j\text{到}n\text{的通路}\}.$$

并记$A=\bigcup_{j\in J}A_j$. 对任意$i=1,2,\cdots,n-1$, 有:

$$\begin{aligned}a_i\in A&\Leftrightarrow a_i\in A_j,\text{对某个}j\in J\\&\Leftrightarrow\text{存在}G\text{中从}i\text{到某个}j\in J\text{的边}\\&\Leftrightarrow G\text{包含一个从}i\text{到}n\text{的路}\Leftrightarrow i\in J.\end{aligned}$$

所以$\{1\le i<n:a_i\in A\}=J\setminus\{n\}$.

记集合$B=A\setminus\{a_i:i\in J\setminus\{n\}\}$, 则$B\cup\{a_1,\cdots,a_{n-1}\}=\varnothing$且$|B|=|A|-|J|+1$. 让$a\in X$, 如果$a$和$a_1,\cdots,a_{n-1}$可以重新排列组成$\{A_i\}_{i=1}^n$的SDR, 其中$a_i$是$A_i$的代表元($i\notin J$), 则由于$a$是某个$A_j$的代表元($j\in J$), 则$a\in B$.

相反, 如果$a\in B$, 则对某个$j\in J$有$a\in A_j$. 如果$j=n$, 则$a_n=a\in A_n$, 所以$\{a_i\}_{i=1}^n$组成了$\{A_i\}_{i=1}^n$的SDR. 如果$j\ne n$, 则G包含从j到n的路$j_0j_1\cdots j_l$, 其中$j_0=j,j_l=n$. 注意$I=\{j_0,\cdots,j_l\}\subseteq J$. 令$b_{j_0},b_{j_1},\cdots,b_{j_l}$分别为$a,a_{j_0},\cdots,a_{j_{l-1}}$, 显然$b_i\in A_i,\forall i\in I$. 所以$\{b_i\}_{i=1}^n$ 是$\{A_i\}_{i=1}^n$的SDR, 这里我们有$b_i=a_i,i\notin I$. 证明完成. □

下面定理与组合数学密切相关:

定理 2.9.10 (Ramsey) *设$q_1,\cdots,q_t\ge r\ge 1$为整数. 一定存在一个N (把最小的这样的数记为$R_r(q_1,\cdots,q_t)$——Ramsey数), 使得对任给基数至少为N的集合S, 把S的所有r元子集随意分到t个抽屉中, 则有$1\le i\le t$, 使S有个q_i元子集, 其所有r元子集均在第i个抽屉中.*

注: 例如: $R_2(3,3)=6$, 6个人里必有3个人要么互相是朋友, 要么互相不是朋友. (看前面习题)

习题 9

1. **(2.9)**设G是$n(\ge 12)$阶无向简单图, 证明G或$\overline{G}$必为非平面图.
2. **(2.9)**设G是简单平面图, 面数$r<12,\delta(G)\ge 3$. 证明G中存在次数小于或等于4的面.
3. **(2.9)**设G是n阶m条边的简单平面图, 已知$m<30$, 证明$\delta(G)\le 4$.

第 3 章　ZFC公理集合论

§ 3.1　ZFC公理集合论的诞生

1874-1875年Cantor创立集合论.

1902年Russell悖论: 设由具有性质$x \notin x$(自己不属于自己)的集合x构成集合X, 则$X \in X \Leftrightarrow X \notin X$, 依排中律, $X \in X$或$X \notin X$, 总是矛盾.

集合论是绝大部分数学的基础, Cantor这种原始的集合论叫朴素(naive)集合论.

1908年意大利数学家Zermelo提出对集合不加定义, 只用公理来刻画, 把集合不看做什么整体, 而视为满足一些公理的对象.

名人名言: "这些原理应足够地狭窄, 以排除掉所有悖论, 同时又要足够地宽广, 以保留集合论中有价值的东西."

——Zermelo

Zermelo提出了集合论的7条公理.

1922-1923年德国Fraenkel改进Zermelo公理系统, 又用了一条公理, 这八条公理构成ZF集合论系统, 若再加上**选择公理(Axiom of Choice)**, 叫ZFC公理系统.

选择公理: 由一组两两不相交的集合中各取一个代表元, 可以构成一个新的集合.

ZFC公理系统采用带相等词"="的一阶逻辑语言, 个体变元为集合变元, 个体域非空(要有个集合), $x \in X$时称x为X的元素(element), 叫x**属于**X. 这里x与X均为集合.

§ 3.2　外延性公理、对偶公理及有序对

公理 1 (外延性公理(Axiom of extensionality))

$$\forall A \forall B(\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B).$$

为了方便, 可写为(省略$\forall A \forall B$)

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B.$$

对集合而言, 只要外延相同便认为集合相等而不必管内涵. 比如

$$\{\text{大于2的偶素数}\} = \{\text{小于0的自然数}\}$$

定义 3.2.1 *如果$\forall x(x \in A \to x \in B)$, 则说$A$为$B$的**子集(subset)**, 记为$A \subseteq B$. 也说$A$被$B$所**包含**. 如果$A \subseteq B \wedge A \neq B$, 则写$A \subset B$, 称为$A$被$B$**真包含**, A是B的**真子集(proper subset)**.*

$$\begin{aligned} \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) &\equiv \forall x((x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)) \\ &\equiv \forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x(x \in B \to x \in A) \\ &\equiv A \subseteq B \wedge B \subseteq A. \end{aligned}$$

注: 外延性公理相当于

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B.$$

公理 2 (对偶公理(pairing axiom))

$$\forall a \forall b \exists X \forall x (x \in X \leftrightarrow (x = a \vee x = b)).$$

注意这里a, b为集合.

假如$\forall x (x \in X \leftrightarrow (x = a \vee x = b)$且$\forall x (x \in Y \leftrightarrow (x = a \vee x = b)$, 则$\forall x (x \in X \leftrightarrow x \in Y)$. 根据外延性公理, $X = Y$. 因此给定集合a, b以后, 上述公理中X存在且唯一, 记之为$\{a, b\}$.

$\{a, b\} = \{b, a\}$, 这是因为

$$x \in \{a, b\} \Leftrightarrow x = a \vee x = b \Leftrightarrow x = b \vee x = a \Leftrightarrow x \in \{b, a\}.$$

这样, 我们把$\{a, b\} = \{b, a\}$叫**无序对**.

把$\{a, a\}$简记为$\{a\}$, 叫**独点集**.

$$x \in \{a\} \Leftrightarrow x \in \{a, a\} \Leftrightarrow x = a \vee x = a \Leftrightarrow x = a.$$

如何定义有序对? 有序对的特征是$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle x = u \wedge y = v$.

定义 3.2.2 (有序对) *把有序对$\langle x, y\rangle$定义为$\{\{x\}, \{x, y\}\}$.*

定理 3.2.1 (K. Kuratowsky, 1921) *在上述定义下, $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \Leftrightarrow (x = u) \wedge (y = v)$.*

证明: "$\Leftarrow$"显然. "$\Rightarrow$": 设$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$, 即$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$.

• 如果$\{u\} = \{x, y\}$, 则$u = x = y$, 则

$$\{u, v\} \in \langle u, v\rangle = \langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x\}\},$$

从而$\{u, v\} = \{x\}$, $u = v = x$, 从而$u = x, v = y$成立.

• 如果$\{x\} = \{u, v\}$, 则$x = u = v$, 则

$$\{x, y\} \in \langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle = \{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{u\}, \{u\}\},$$

从而$\{x, y\} = \{u\}$, $x = y = u$, 从而$u = x, v = y$成立.

• 下设$\{u\} \neq \{x, y\}$且$\{x\} \neq \{u, v\}$. 此时

$$\{u\} \in \{\{u\}, \{u, v\}\} = \langle u, v\rangle = \langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

而$\{u\} \neq \{x, y\}$, 必有$\{u\} = \{x\}$, $u = x$.

$$\{u, v\} \in \{\{u\}, \{u, v\}\} = \langle u, v\rangle = \langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\},$$

而$\{u, v\} \neq \{x\}$, 必有$\{u, v\} = \{x, y\}$, $v \in \{x, y\}$. 若$v \neq y$, 则$v = x = u$, 与$\{x\} \neq \{u, v\}$矛盾, 故$v = y$.

□

注: 推广到多维: $\langle x,y,z\rangle \triangleq \langle\langle x,y\rangle,z\rangle$,

$$\begin{aligned}\langle x_1,y_1,z_1\rangle=\langle x_2,y_2,z_2\rangle &\Leftrightarrow \langle\langle x_1,y_1\rangle,z_1\rangle=\langle\langle x_2,y_2\rangle,z_2\rangle\\ &\Leftrightarrow \langle x_1,y_1\rangle=\langle x_2,y_2\rangle\wedge z_1=z_2\\ &\Leftrightarrow x_1=x_2\wedge y_1=y_2\wedge z_1=z_2.\end{aligned}$$

设$\langle x_1,\cdots,x_{n-1}\rangle$有定义, 则$\langle x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\rangle$定义为$\langle\langle x_1,\cdots,x_{n-1}\rangle,x_n\rangle$, 这样

$$\langle x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\rangle=\langle y_1,\cdots,y_{n-1},y_n\rangle\Leftrightarrow\langle\langle x_1,\cdots,x_{n-1}\rangle,x_n\rangle=\langle\langle y_1,\cdots,y_{n-1}\rangle,y_n\rangle.$$

对n归纳易得

$$\langle x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\rangle=\langle y_1,\cdots,y_{n-1},y_n\rangle\Leftrightarrow x_1=y_1\wedge\cdots\wedge x_n=y_n.$$

把$\langle\langle x_1,\cdots,x_{n-1}\rangle,x_n\rangle$ 叫由$x_1,\cdots,x_n$构成的**有序n元组**或**n元矢量**.

§ 3.3 联集公理、分出公理与集合代数

公理 3 (联集公理(Axiom of union)) 任给集合X,

$$\exists Y\forall y(y\in Y\leftrightarrow\exists x(y\in x)\wedge x\in X).$$

(x是X儿子, y是X孙子)

根据外延性公理, 这样的Y存在唯一, 记为$\bigcup X$(X的联集).

$$y\in\bigcup X\Leftrightarrow\exists x\in X(y\in x).$$

对于集合A,B, $\bigcup\{A,B\}$记为$A\cup B$(A与B的并集). 注意

$$x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in\bigcup\{A,B\}\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B.$$

定义$\{x_1,x_2,x_3\}\triangleq\{x_1,x_2\}\cup\{x_3\}$, 则

$$x\in\{x_1,x_2,x_3\}\Leftrightarrow x=x_1\vee x=x_2\vee x=x_3,$$

定义$\{x_1,\cdots,x_n\}=\{x_1,\cdots,x_{n-1}\}\cup\{x_n\}$, 由归纳,

$$x\in\{x_1,\cdots,x_n\}\Leftrightarrow x=x_1\vee\cdots\vee x=x_n.$$

$\bigcup X$常记为$\bigcup\limits_{i\in I}X_i$. (如果$A=\{A_1,\cdots,A_n\}$, 则$\bigcup A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$).

$$x\in\bigcup_{i\in I}X_i\Leftrightarrow\exists i\in I(x\in X_i).$$

$$x\in\bigcup_{i=1}^{n}X_i\Leftrightarrow x\in X_1\vee x\in X_2\vee\cdots\vee x\in X_n.$$

Cantor朴素集合论中**概括原理**: 设φ为二阶公式, 则存在集合X, 使对任何集合x都有$x \in X \Leftrightarrow \varphi(x)$.

公理 4 (分出公理(Axiom of separation)) 设$\varphi(x)$是不以Y为自由变元的公式, 则

$$\exists Y \forall x (x \in Y \leftrightarrow (x \in X \wedge \varphi(x))).$$

注: 分出公理表明, 允许构造出一种带$\varphi(x)$性质的集合.

根据外延性公理, 这样的Y存在唯一, 记之为$\{x \in X : \varphi(x)\}$.

$$y \in \{x \in X : \varphi(x)\} \Leftrightarrow y \in X \wedge \varphi(y).$$

设X是个集合, 根据分出公理, $\{x \in X : x \neq x\}$也是个集合, 记为$\varnothing$. 显然$\forall x (x \notin \varnothing)$, $\varnothing$中没有元素, 叫做**空集(empty set)**.

定义 3.3.1 对集合X, 让

$$\bigcap X = \{y \in \bigcup X : \forall x \in X (y \in x)\}$$

表示交*(intersection)*,

把$\bigcap \{A, B\}$记为$A \cap B$. 当然$\bigcap \varnothing = \{y \in \bigcup \varnothing : \forall x \in \varnothing (y \in x)\} = \varnothing$.

把$\bigcap \{X\}$记为$\bigcap\limits_{x \in X} x$. 当$X = \{X_i : i \in I\}$时, $\bigcap X$常记为$\bigcap\limits_{i \in I} X_i$.

$$X \cap Y = \{x \in X : x \in Y\} = \bigcap \{X, Y\},$$

把$X \setminus Y = \{x \in X : x \notin Y\}$叫集合$X$与$Y$的**差**. $Y \subseteq X$时, $X \setminus Y$也记为$X - Y$.

定义 3.3.2 (对称差) $X \oplus Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

例 3.3.1 $X \oplus Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

证明: 任给集合x, 由外延性公理以及

$$\begin{aligned}
& x \in X \oplus Y \\
\Leftrightarrow & x \in X \setminus Y \vee x \in Y \setminus X \\
\Leftrightarrow & (x \in X \wedge x \notin Y) \vee (x \in Y \wedge x \notin X) \\
\Leftrightarrow & (x \in X \vee x \in Y) \wedge \underline{(x \in X \vee x \notin X)} \wedge \underline{(x \notin Y \vee x \in Y)} \wedge (x \notin Y \vee x \notin X) \\
\Leftrightarrow & (x \in X \cup Y) \wedge \neg (x \in X \cap Y).
\end{aligned}$$

于是$X \oplus Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$. $\square$

关于对称差, 有如下性质:

$$\begin{aligned}
& A \oplus B = B \oplus A \\
& (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) \\
& \varnothing \oplus A = A \oplus \varnothing = A \\
& A \oplus A = \varnothing.
\end{aligned}$$

例 3.3.2 $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

证明: 用外延性公理以及

$$\begin{aligned} & x \in A \cup (B \setminus A) \\ \Leftrightarrow & x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A) \\ \Leftrightarrow & (x \in A \vee x \in B) \wedge \underline{(x \in A \vee x \notin A)} \\ \Leftrightarrow & x \in A \vee x \in B \\ \Leftrightarrow & x \in A \cup B. \end{aligned}$$

所以$A \cup (B \setminus A) = A \cup B$. □

基数: $A \cap B = \varnothing$时, $|A| + |B| \triangleq |A \cup B|$. 此外

$$|A \cup B| = |A \cup (B \setminus A)| = |A| + |B \setminus A| \leq |A| + |B|.$$

(注意$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$)

当A, B有穷时, $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$, 则$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

当A, B, C有穷时, $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

定理 3.3.1 (容斥原理(Inclusion-Exclusive Principle)) 设$S_1, \cdots, S_n$是有穷集, 则

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^{n} S_i \right| = & \sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |S_i \cap S_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |S_i \cap S_j \cap S_k| / \\ & - \cdots + (-1)^{n-1} |S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n|. \end{aligned}$$

关于集合$\cup, \cap, \setminus$的集合代数中基本规律:

幂等律: $A \cup A = A, A \cap A = A$.

交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

证明: 用外延性公理以及

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) & \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ & \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ & \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

吸收律: $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$.

de Morgan律: $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B), X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

分配律也可以推广为$A \cap \bigcup\limits_{i \in I} B_i = \bigcup\limits_{i \in I} (A \cap B_i), A \cup \bigcap\limits_{i \in I} B_i = \bigcap\limits_{i \in I} (A \cup B_i)$.

当$A \subseteq X$时, 称$X \setminus A$为A的**补集(complement)**, 有时记为$\overline{A}$.

$$B = A \cup B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing.$$

习题 10 (Week 11)

1. 已知$\langle x,y\rangle = z$, 求x,y. (把x,y用z以及$\cup,\cap,\setminus$等运算表达.) 注意不需要分类讨论, 要具有一般性. (如果$\{x\}=y$, 则$x=\bigcap y=\bigcup y$).
2. 证明容斥原理. 提示: 对n归纳证明, 考虑

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \left|S_n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} S_i\right|.$$

3. 证明de Morgan律推广形式:

$$X\setminus\bigcap_{i\in I}X_i=\bigcup_{i\in I}X\setminus X_i, X\setminus\bigcup_{i\in I}X_i=\bigcap_{i\in I}X\setminus X_i,$$

§ 3.4 幂集公理与笛卡尔积

公理 5 (幂集公理(Power set axiom)) 任给集合X,

$$\exists Y\forall y(y\in Y\leftrightarrow y\subseteq X).$$

由外延性公理, 这样的Y存在唯一, 记为$\mathcal{P}(X)$(X的**幂集(power set)**). 当$|X|=n$时, $|\mathcal{P}(X)|=2^n$.

定理 3.4.1 不存在集合X使得$\forall x(x\in X)$.

证明: 假如存在这样的X, 则依分出公理, $Y=\{x\in X: x\notin x\}$是个集合, 则

$$Y\in Y\Leftrightarrow Y\in X\wedge Y\notin Y\Leftrightarrow Y\notin Y,$$

导致矛盾. □

$\{$集合$x\}$不是集合, 而叫**类(class)**, 是class而不是set的叫**真类(proper class)**.

$\mathcal{P}(X)$由X的所有子集构成, $A\approx B$指存在A到B的一一对应f, $A\preccurlyeq B$指$|A|\le|B|$, 存在$B_0\subseteq B$使得$A\approx B$. $A\prec B$指$A\preccurlyeq B$但不成立$A\approx B$, 相当于$|A|<|B|$.

定理 3.4.2 对任何集合X, $X\prec\mathcal{P}(X)$, 即$|X|<|\mathcal{P}(X)|$.

证明: X中x对应$\mathcal{P}$中$\{x\}$, 则

$$X\approx\{\{x\}: x\in X\}\subseteq\mathcal{P}(X).$$

所以$|X|\le|\mathcal{P}(X)|$, 这里$\{\{x\}:x\in X\}$是个集合是因为由分出公理,

$$\{y\in\mathcal{P}(X): y\neq\varnothing\wedge\forall u\forall v(u\in y\wedge v\in y\to u=v)\}$$

是个集合.

下面证$X\approx\mathcal{P}(X)$不成立.(反证)若f是X到$\mathcal{P}(X)$的一一对应, 则由分出公理,

$$Y=\{y\in X: y\notin f(y)\}$$

是个集合, $Y\subseteq X$, 故$Y\in\mathcal{P}(X)$, 则有一个$x\in X$, 使得$f(x)=Y$. 从而

$$x\in f(x)\Leftrightarrow x\in Y\Leftrightarrow x\in X\wedge x\notin f(x)\Leftrightarrow x\notin f(x).$$

矛盾, 因此$X\preccurlyeq\mathcal{P}(X)$但$X\approx\mathcal{P}(X)$不成立, 即$X\prec\mathcal{P}(X)$. □

下面定义笛卡尔积, 想让$X\times Y$指$\{\langle x,y\rangle : x\in X\wedge y\in Y\}$. 当$x\in X$且$y\in Y$时,

$$\begin{aligned}\{x\},\{x,y\}\subseteq X\cup Y &\Rightarrow \{x\},\{x,y\}\in\mathcal{P}(X\cup Y)\\ &\Rightarrow \langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}\subseteq\mathcal{P}(X\cup Y)\\ &\Rightarrow \langle x,y\rangle\in\mathcal{P}\mathcal{P}(X\cup Y).\end{aligned}$$

定义 3.4.1 X,Y为集合时, $\{z\in\mathcal{P}\mathcal{P}(X\cup Y):\exists x\in X\exists y\in Y(\langle x,y\rangle=z)\}$也是个集合, 记为$X\times Y$, 叫集合$X$与$Y$的**笛卡尔积*(Decartesian product)***. $X\times Y$中的元素为**有序对**.

$$\langle x,y\rangle\in X\times Y\Leftrightarrow x\in X\wedge y\in Y.$$

注: $\exists x\in X\exists y\in Y(\langle x,y\rangle=z)$成立时, $z\in\mathcal{P}\mathcal{P}(X\cup Y)$自动成立, 上面是为了用分出公理说明$X\times Y$是个集合.

集合$X_1,X_2,\cdots,X_n$的笛卡尔积为

$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\{\langle x_1,\cdots,x_n\rangle : x_1\in X_1\wedge\cdots\wedge x_n\in X_n\}.$$

习题 11 (Week 12)

1. 证明$\mathcal{P}(X)=\mathcal{P}(Y)\Leftrightarrow X=Y$.
2. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是集合, 则有集合X使X中元为n元矢量$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$, 且
$$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle\in X\Leftrightarrow x_1\in X_1\wedge\cdots\wedge x_n\in X_n.$$
3. **(3.4)** 列出集合$X=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$的幂集$\mathcal{P}(X)$中的所有元素.
4. **(3.4)** 证明不存在集合X使得$\forall x(x\in X\leftrightarrow\neg\exists y(y\in x\wedge x\in y))$.

§ 3.5 关系与映射

定义 3.5.1 集合R为**关系*(relation)***指

$$\forall z(z\in R\rightarrow\exists x\exists y(\langle x,y\rangle=z))$$

的有序对构成的集合, 对于关系R, $\langle x,y\rangle\in R$也写xRy, 此时说x与y有关系R.

$\langle x,y\rangle\in R$时, 第一个分量是否构成集合? $\{\{x\},\{x,y\}\}\in R\Rightarrow\{x\},\{x,y\}\in\bigcup R\Rightarrow x,y\in\bigcup\bigcup R$. 对于关系$R$, 依分出公理, $\{x\in\bigcup\bigcup R:\exists y(xRy)\}$是个集合, 叫做$R$的**定义域(domain)**, 记为$Dom(R)$. $x\in Dom(R)\Leftrightarrow\exists y(xRy)$. 把$\{y\in\bigcup\bigcup R:\exists x(xRy)\}$叫$R$的**值域(range of R)**, 或叫**像集(image of R)**, 记为$Ran(R)$或$Im(R)$. $y\in Dom(R)\Leftrightarrow\exists x(xRy)$. 如果$R\subseteq A\times A$, 则称$R$为$A$上**关系**, 对于关系$R$, 让$A=Dom(R)\cup Ran(R)$, 则$R\subseteq A\times A$($R$为$A$上关系).

设R为关系, R在A上**限制**指

$$R\lceil A=R\cap(A\times Ran(R))=\{\langle x,y\rangle\in R;x\in A\}.$$

R之下A的**像集**指

$$R\lceil A]=Im(R\lceil A)=\{y\in Ran(R):\exists x\in A(xRy)\}.$$

下面给出一些基本性质.

定理 3.5.1 (1)$Dom(R_1 \cup R_2) = Dom(R_1) \cup Dom(R_2)$
(2)$Im(R_1 \cup R_2) = Im(R_1) \cup Im(R_2)$
(3)$Dom(R_1 \cap R_2) \subseteq Dom(R_1) \cap Dom(R_2)$ (交出来可能为空)
(4)$Im(R_1 \cap R_2) \subseteq Im(R_1) \cap Im(R_2)$
(5)$Dom(R_1) \setminus Dom(R_2) \subseteq Dom(R_1 \setminus R_2)$
(6)$Im(R_1) \setminus Im(R_2) \subseteq Im(R_1 \setminus R_2)$
(7)像集: $R\lceil A \cup B] = R\lceil A] \cup R\lceil B]$
(8)像集: $R\lceil A \cap B] \subset R\lceil A] \cap R\lceil B]$
(9)限制: $R\lceil (A \cup B) = R\lceil A \cup R\lceil B$

证明: 以(1)为例, 用外延性公理即可,

$$\begin{aligned} x \in Dom(R_1 \cup R_2) &\Leftrightarrow \exists y(\langle x, y\rangle \in R_1 \vee \langle x, y\rangle \in R_2) \\ &\Leftrightarrow \exists y(\langle x, y\rangle \in R_1) \vee \exists y(\langle x, y\rangle \in R_2) \\ &\Leftrightarrow x \in Dom(R_1) \vee x \in Dom(R_2) \Leftrightarrow x \in Dom(R_1) \cup Dom(R_2). \end{aligned}$$

其他类似. □

定义 3.5.2 (逆关系) $R^{-1} = \{\langle y, x\rangle \in Ran(R) \times Dom(R) : xRy\}$.

当R为关系时, $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x$, $(R^{-1})^{-1} = R$, $(A \times B)^{-1} = B \times A$, $Dom(R^{-1}) = Ran(R)$, $Ran(R^{-1}) = Dom(R)$, $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$, $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$, $(R_1 \setminus R_2)^{-1} = R_1^{-1} \setminus R_2^{-1}$.

定义 3.5.3 (复合) $R \times S = \{\langle x, z\rangle \in Dom(S) \times \mathrm{Im}(R) : \exists y(xSy \wedge yRz)\}$.

根据分出公理, 这是个集合,

$$\langle x, z\rangle \in R \circ S \Leftrightarrow \exists y(\langle x, y\rangle \in S \wedge \langle y, z\rangle \in R).$$

注: 类比在函数中, $f \circ g(x) = f(y) = z, y = g(x)$. 叔侄关系=父子关系∘兄弟关系, 爷孙关系=父子关系∘父子关系.

当R, S为关系时,

$$\begin{aligned} Dom(R \circ S) &= \{x \in Dom(S) : \exists y \in Dom(R)(xSy)\} \\ Ran(R \circ S) &= \{z \in Ran(R) : \exists y \in Ran(S)(yRz)\}. \end{aligned}$$

定理 3.5.2 设R, S, T为关系, 则

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}, (R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

证明: 用外延性公理来证. (1)两边元素都是有序对, 则

$$\langle x, y\rangle \in (R \circ S)^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in (R \circ S) \Leftrightarrow \exists z(ySz \wedge zRx) \Leftrightarrow \exists z(zS^{-1}y \wedge xR^{-1}z) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

(2)同理

$$\begin{aligned}\langle x,z\rangle\in(R\circ S)\circ T &\Leftrightarrow \exists y(xTy\wedge\langle y,z\rangle\in(R\circ S))\\ &\Leftrightarrow \exists y(xTy\wedge\exists w(ySw\wedge wRz))\\ &\Leftrightarrow \exists y\exists w(xTy\wedge ySw\wedge wRz)\\ &\Leftrightarrow \exists w(\exists y(xTy\wedge ySw)\wedge wRz)\\ &\Leftrightarrow \exists w(\langle x,w\rangle\in S\circ T\wedge wRz)\\ &\Leftrightarrow \langle x,z\rangle\in R\circ(S\circ T).\end{aligned}$$

3.5.1 映射或函数

定义 3.5.4 *F为**映射**(mapping)或**函数**(function), 指F为关系, 且对$x\in Dom(F)$, $\exists!y(xFy)$.*

注: $\exists!x\varphi(x)$指$\exists x(\varphi(x)\wedge\forall y(\varphi(y)\to y=x))$.

$x\in Dom(F)$且$\langle x,y\rangle\in F$时, 把这唯一的y记为$F(x)$, 叫函数F在x处的值. 当$x\notin Dom(F)$时, 称F在x处无定义.

当F为函数时, $F(x)=\bigcup F[\{x\}]$.

例 3.5.1 *$F=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$为函数. $Dom(F)=\{0,1,2\},F(0)=1,F(1)=3,F(2)=1$.*

当f与g为函数时, $\langle x,z\rangle\in f\circ g\Leftrightarrow\exists y(\langle x,y\rangle\in g\wedge\langle y,z\rangle\in f)$.

由于$Dom(f\circ g)=\{x\in Dom(g):g(x)\in Dom(f)\}$, 则$f\circ g$也是函数, 且$x\in Dom(f\circ g)$时, $f\circ g(x)=f(g(x))$.

当f,g为映射时, $f\cap g$也是, 但$f\cup g$不一定是. 但是当$Dom(f)\cap Dom(g)=\varnothing$时, $f\cup g$也是函数.

定义 3.5.5 *设X,Y为集合, 若f为映射, 且$Dom(f)=X,Ran(f)\subseteq Y$, 则说$f$**是$X$到$Y$中映射**, 记$f:X\to Y$. 对于$f:X\to Y$, 若*

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2),$$

*则称f是X到Y的**单射(injective mapping)**, 如果$Ran(f)=Y$, 即*

$$\forall y\in Y\exists x\in X(f(x)=y),$$

*则说f是X到Y的**满射(surjective mapping)**. 若$f:X\to Y$既是单射又是满射, 则说f是X到Y的**双射(bijective)**或**一一对应(one to one correspondence)**.*

$A\approx B(|A|=|B|)$指存在A到B的一一对应f, $A\preccurlyeq B(|A|\leq|B|)$指存在$A$到$B$的单射.

定理 3.5.3 *设$A\approx C,B\approx D,A\cap B=C\cap D=\varnothing$, 则$A\cup B\approx C\cup D$.*

注: $A\cap B=\varnothing$时, $|A\cup B|$只依赖于$|A|$与$|B|$, 与A,B的选取无关. $|A\cup B|=|A|+|B|$. (选取无关指的是换与A,B等势的C,D, $|\cdot|$不变.

当$A\cap B\neq\varnothing$时, $\{0\}\times A\approx A,\{1\}\times B\approx B$, 则$\{0\}\times A\cap\{1\}\times B=\varnothing$, 从而$|A|+|B|=|\{0\}\times A\cup\{1\}\times B|$.

定理 3.5.4 (集合乘法) $A \approx C$, $B \approx D$, 则$A \times B \approx C \times D$.

证明: 记$f : A \to C, g : B \to D$, 定义$h(\langle a, b\rangle) \triangleq \langle f(a), g(b)\rangle$即可.

注: 定理表明$|A \times B|$只与$|A|$与$|B|$有关, 与A, B的选取无关. $|A| \cdot |B| \triangleq |A \times B|$. (基数的乘法). 若$|A| = m, |B| = n$, 则$|A \times B| = mn$.

定义 3.5.6 (集合乘方) 定义$B^A \triangleq \{f : A \to B\} = \{f \in \mathcal{P}(A \times B) : f$为映射$\wedge Dom(f) = A\}$.

$f : A \to B \Rightarrow f \subseteq A \times B \Rightarrow f \in \mathcal{P}(A \times B)$. 用分出公理, B^A是集合. $|A| = m, |B| = n$, 则$|B^A| = n^m$.

定理 3.5.5 $A \approx C, B \approx D \Rightarrow B^A \approx D^C$.

证明: 设$F : A \to C, G : B \to D$为一一映射, 要定义$f \in B^A \longrightarrow \varphi(f) \in D^C$. 对$f \in B^A$及$c \in C, F^{-1}(c) \in A, f(F^{-1}(c)) \in B, G(f(F^{-1}(c))) \in D$,

定义$\varphi(f) : C \to D$为$\varphi(f)(c) = G \circ f \circ F^{-1}(c)$. 当$f \in B^A$时, $\varphi(f) \in D^C$, 所以φ是从B^A到D^C的映射.

下证φ是单射. 若$\varphi(f) = \varphi(f')$, $f, f' \in B^A$, 下证$f = f'$. 当$c \in C$时,

$$\begin{aligned}
\varphi(f)(c) = \varphi(f')(c) &\Leftrightarrow G \circ f \circ F^{-1}(c) = G \circ f' \circ F^{-1}(c) \\
&\Rightarrow G \circ f \circ F^{-1} = G \circ f' \circ F^{-1} \\
&\Rightarrow G \circ f \circ F^{-1} \circ F = G \circ f' \circ F^{-1} \circ F \\
&\Rightarrow G \circ f = G \circ f' \\
&\Rightarrow G^{-1} \circ G \circ f = G^{-1} \circ G \circ f' \Rightarrow f' = f.
\end{aligned}$$

下证φ是满射. 任给$g \in D^C$, 要找$f \in B^A$使得$\varphi(f) = g$. 而$G \circ f \circ F^{-1} = g \Rightarrow f = G^{-1} \circ g \circ F$, 若$a \in A$, 则

$$F(a) \in C \Rightarrow g(F(a)) \in D \Rightarrow G^{-1}(g(F(a))) \in B.$$

所以$f : A \to B$. □

注: $|B^A|$只依赖于$|A|$与$|B|$的选取, 与A, B的选取无关. $|B|^{|A|} \triangleq |B^A|$.

$\varnothing$是个函数(空函数).

定理 3.5.6 下面命题成立:

(1)$A^{\varnothing} = \{\varnothing\}$;

(2)$A \neq \varnothing \Rightarrow \varnothing^A = \varnothing$;

(3)$A^B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \wedge B \neq \varnothing$;

(4)$A^{\{x\}} = \{\{\langle x, y\rangle\} : y \in A\}$;

(5)$A \subseteq B \Rightarrow A^C \subseteq B^C$.

习题 12 (Week 12)

1. $B \cap C = \varnothing$时, $A^{B \cup C} \approx A^B \times A^C$.
2. $(A \times B)^C \approx A^C \times B^C$, $\forall A, B$.

3. **(3.5)** 设A, B, C为集合. 对$f \in (A^B)^C$, 让$\sigma(f): B \times C \to A$如下给出:

$$\sigma(f)(\langle b, c\rangle) = f(c)(b).(b \in B, c \in C).$$

证明σ是$(A^B)^C$到$A^{B\times C}$的双射.

4. **(3.5)** 设R为关系, 在ZF集合论中用分出公理证明有集合A(叫R的值域), 使得

$$y \in A \Leftrightarrow \exists x(xRy).$$

§ 3.6 等价关系与序结构

定义 3.6.1 (自反) *对A上关系R, 称R在A上**自反(reflective)**, 指$\forall x \in A(xRx)$, 等价于$I_A = \{\langle x, x\rangle : x \in A\} \subseteq R$. R自反指R在$A = Dom(R) \cup Ran(R)$上自反.*

注: 当R自反时, $xRx, xRx \Rightarrow xR \circ Rx$, 故$R \subseteq R \circ R$.

定义 3.6.2 (对称) *对A上关系R, 称R在A上**对称(symmetric)**, 指$\forall x \in A \forall y \in A(xRy \to yRx)$, R对称指*

$$\forall x \forall y(xRy \to yRx).$$

注: 当R自反时, 等价于$R = R^{-1}$.

定义 3.6.3 (传递) *对A上关系R, 称R在A上**传递(transitive)**, 指$\forall x \in A \forall y \in A \forall z \in A((xRy \wedge yRz) \to xRz)$, R传递指*

$$\forall x \forall y \forall z((xRy \wedge yRz) \to xRz).$$

注: 当R传递时, 等价于$R \circ R \subseteq R$.

定义 3.6.4 (反对称) *R反对称指$\forall x \forall y((xRy \wedge yRx) \to x = y)$, 相当于$x \neq y$时, xRy与yRx不同时成立.*

注: 当R反对称时, 等价于$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$. I_A指A上的恒等映射.

定理 3.6.1 *设诸$R_i(i \in I)$均自反(对称、传递), 则它们的交$\bigcap\limits_{i\in I} R_i$也自反(对称、传递), 即$\bigcap\{R_i : i \in I\}$自反(对称、传递).*

证明: 设$x \in Dom\left(\bigcap\limits_{i\in I} R_i\right)$, 则$i \in I$时, $x \in Dom(R_i)$. 如果每个R_i自反, 则xR_ix, 则$\langle x, x\rangle \in R_i \Rightarrow \langle x, x\rangle \in \bigcap\limits_{i\in I} R_i$. 类似地$Ran\left(\bigcap\limits_{i\in I} R_i\right)$的验证同理.

设诸$R_i(i \in I)$对称, $\langle x, y\rangle \in \bigcap\limits_{i\in I} R_i$, 则当$i \in I$时, $\langle x, y\rangle \in R_i \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R_i$. 则$\langle y, x\rangle \in \bigcap\limits_{i\in I} R_i$.

设诸$R_i(i \in I)$传递, $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in \bigcap\limits_{i\in I} R_i$, 则$i \in I$时, xR_iy且yR_iz, 由传递性可知xR_iz, 则$\langle x, z\rangle \in \bigcap\limits_{i\in I} R_i$. □

定义 3.6.5 设R为A上关系, 则

$$r(R) = \bigcap_{R\subseteq R'\subseteq A\times A, \text{且}R'\text{在}A\text{上自反}} R'$$

是包含R的最小的A上的自反关系, 叫R在A上的**自反闭包**.

$$s(R) = \bigcap_{R\subseteq R'\subseteq A\times A, \text{且}R'\text{在}A\text{上对称}} R'$$

是包含R的最小的A上的对称关系, 叫R在A上的**对称闭包**.

$$t(R) = \bigcap_{R\subseteq R'\subseteq A\times A, \text{且}R'\text{在}A\text{上传递}} R'$$

是包含R的最小的A上的传递关系, 叫R在A上的**传递闭包**.

事实上, $s(R) = R\cup R^{-1}$, $t(R) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R^n$. 对于第二条的证明, 若$R \subseteq t(R)$, 则$R^2 = R\circ R \subseteq t(R)\circ t(R) \subseteq t(R)$, 这样下去可推出

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \subseteq t(R).$$

只需再证$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R_n$有传递性: 设$\langle x,y\rangle \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R_n$, $\langle y,z\rangle \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R_n$, 则有$m,n\in\mathbb{N}^+$, 使得$\langle x,y\rangle \in R^m$, $\langle y,z\rangle \in R^n$. 于是

$$\langle x,z\rangle \in R^n\circ R^m = R^{n+m} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n.$$

定义 3.6.6 设R为A上关系, R是A上**等价关系**指(1)R自反、(2)R对称、(3)R传递. R为等价关系指R是$A = Dom(R)\cup Ran(R)$上的等价关系.

定义 3.6.7 π为集合X上的一个**分类*(partition)***, 指$\pi\subseteq\mathcal{P}(X)$, 且满足

(1)$\forall A\in\pi(A\neq\varnothing)$, 即每块非空;

(2)$\forall A\in\pi\forall B\in\pi(A\neq B\to A\cap B=\varnothing)$, 即不同两块之间不交.

(3)$\bigcup\pi = \bigcup\limits_{A\in\pi} A = X$, 即这些块拼起来为整体.

注: 等价关系很重要, 它与分类一一对应, 见下面定理.

定理 3.6.2 设X为非空集, 则$\{X\text{上分类}\}\approx\{X\text{上等价关系}\}$.

证明: (1)设π为X上一个分类, 对$x,y\in X$, 让xRy指$\exists A\in\pi(x\in A\wedge y\in A)$. 证它为等价关系. 记$R = \{\langle x,y\rangle\in X\times X : \exists A\in\pi(x\in A\wedge y\in A)\}$.

当$x\in X$时, 有$A\in\pi$使得$x\in A$, 而$x\in A\wedge y\in A\Rightarrow xRx$, 故$R$自反.

设xRy, 则有$A\in\pi$使得$x,y\in A$, 从而$y,x\in A$, 从而yRx, 故R对称.

设$xRy\wedge yRz$, 则有$A\in\pi$使得$x,y\in A$, 有$B\in\pi$使得$y,z\in B$. 从而$y\in A$且$y\in B$. 但是由分类的定义, 不同的集合无公共元素, 则$A=B$, 从而$x,z\in A, xRz$. 故R传递.

(2)设R为X上等价关系, 对$x \in X$, 记$[x]_R = \{y \in X : xRy\}$为$x$所在的$R$的等价类. 下证$\pi_R = \{[x]_R : x \in X\}$是$X$的一个分类(重复的只算一次), 设$x \in [x]_R$, 由于$xRx$, 则 $\bigcup_{x\in X}[x]_R \supseteq X = \bigcup_{x\in X}\{x\}$. 故 $\bigcup_{x\in X}[x]_R = X$. (验证了分类定义中的(1)(3))

下证不同两块之间没有共同元素. 设$z \in [x]_R \cap [y]_R$, 则xRz且yRz. 由对称性, $xRz \wedge zRy$, 由传递性, xRy. 任给$w \in X$, 当xRw时, $yRx \wedge xRw \Rightarrow yRw$, 而$yRw$时$xRy \wedge yRw \Rightarrow xRw$, 故$xRw \Leftrightarrow yRw$. 因此$[x]_R = \{w \in X : xRw\} = \{w \in X : yRw\} = [y]_R$, 即$xRy$时$[x]_R = [y]_R$. 故若$[x]_R \neq [y]_R$, 就有$[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$. 由上, $\pi_R = \{[x]_R : x \in X\}$是$X$的一个分类. □

例 3.6.1 矩阵相似是等价关系. $A \sim B$指$\exists P$可逆, $PAP^{-1} = B$.

例 3.6.2 $\mathbb{Z}$上模m同余关系为等价关系. $a \equiv b \pmod m$即$\exists q \in \mathbb{Z}(a - b = mq)$.

定义 3.6.8 设$\leq$是集合A上二元关系, 若它满足
(1)自反性: $\forall x \in A(x \leq x)$;
(2)反对称: $\forall x \in A \forall y \in A((x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y)$;
(3)传递性: $\forall x \in A \forall y \in A \forall z \in A(x \leq y \leq z \to x \leq z)$.
则称$\leq$为A上**半序**或**偏序*(partial order)***. 也说A按$\leq$构成**一个半序结构**.

定义 3.6.9 如果$\leq$为A上半序且还满足可比性, 即$\forall x \in A \forall y \in A(x \leq y \vee y \leq x$, 则称$\leq$为$A$上**全序**或**线性序*(linear ordering)***.

当$\leq$为A上半序时, $x < y$指$x \leq y \wedge x \neq y$, 它有如下性质:
(1)$\forall x \in A(x \not< x)$.
(2)$\forall x \in A \forall y \in A(x < y \to y \not< x)$.
(3)$\forall x \in A \forall y \in A \forall z \in A(x < y < z \to x < z)$.

例 3.6.3 设X为集合, $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$, 则被包含关系$\subseteq$为集合$\mathcal{P}(X)$上的半序.

若$X = \{0, 1, 2, \cdots\}$, 则$A_1 = \{0, 1\}$与$A_2 = \{1, 2\}$不能互相被包含.

例 3.6.4 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2\}$上$\leq$（小于或等于）是个全序. $\mathbb{N}$上整除关系是个半序.

定义 3.6.10 (界) 设$\leq$为A上半序, $B \subseteq A$, $a \in A$. 如果$\forall b \in B(b \leq a)$, 则称$a$为$B$的**上界**, 如果$\forall b \in B(a \leq b)$, 则称$a$为$B$的**下界**. 如果$a \in B$且$a$为$B$的上（下）界, 则称$a$是$B$的**最大（小）元**. 如果$a \in B$且$\forall b \in B(a \not< b)$, 则称$a$是$B$的**极大元**. 如果$a \in B$且$\forall b \in B(b \not< a)$, 则称$a$是$B$的**极小元**.

注: 若B有最大(小)元, 则最大(小)元唯一.
注: 若a, b都是B的最大元, 则$a \leq b, b \leq a$. 由对称性, $a = b$.

定义 3.6.11 (确界) 如果a为B的上界, 且当a'为B的上界时, $a \leq a'$, 则称a为B的**上确界**（最小的上界）, 记为$\sup B$.

如果a为B的下界, 且当a'为B的下界时, $a' \leq a$, 则称a为B的**下确界**（最大的下界）, 记为$\sup B$.

定义 3.6.12 (Hasse示意图) 设$\leq$是有限集X上的半序. 把X中元画成平面上的点, $x < y$时把y画到x的上方, 且画条x到y的连线. 当$x < y < z$时, 不画y到z的连线. 这样所得的图叫做***Hasse*示意图**.

(下面两个例子中请自行画Hasse示意图)

例 3.6.5 $X=\{0,1,2\}$时, $\mathcal{P}(X)$依$\subseteq$构成半序集.

$\varnothing$是X的最小元, $\{0,1,2\}$是X的最大元; $\varnothing$是X的下确界, $\{0,1,2\}$是X的上确界.

例 3.6.6 $X=\{1,2,\cdots,12\}$依整除关系构成半序集.

7,8,9,10,11,12是极大元, 1为极小元也是最小元.

定义 3.6.13 (良序) 设$\leq$是非空集X上半序, 若X的每个非空子集有关于序$\leq$的最小元, 则称$\leq$为X上的**良序*(well ordering)***.

注: 良序必为线性序. 因为$x,y\in X$时, $\{x,y\}$有最小元, 则$x\leq y$或$y\leq x$. $\leq$(实数下)是线性序, 但不是良序.

定理 3.6.3 (Zorn引理) 设X为非空半序集, 若X的每个全序子集（称为链*(chain)*）在X中有上确界, 则X必有极大元.

设$\mathscr{A}$为集合, 且对每个依被包含关系的链$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}$, 都有$\bigcup\mathscr{B}\in\mathscr{A}$, 则$\mathscr{A}$中有依被包含关系的极大元$M$.

§ 3.7 集合的等势、选择公理与连续统假设

$X\approx Y$指有X到Y的双射f.

既然$X\approx_{Id}X$, 且$X\approx_f Y\approx_g Z\Rightarrow X\approx_{g\circ f}Z$, 且$X\approx_f Y\Rightarrow Y\approx_{f^{-1}}X$. 但如果$\approx$是个关系, 则$\langle x,x\rangle\in\approx$. 从而每个集合在$\approx$的定义域里, 从而$\approx$由所有集合构成. 但所有集合不构成集合, 故$\approx$**不是关系**, 自然不是等价关系. (关系是个集合!!)

$X\leq Y$指存在X到Y的单射f, $|X|\leq|Y|$. 这相当于X与Y的一个子集等势.

$\preccurlyeq$**不是关系, 也不是半序**. 但是满足:

(1)$X\preccurlyeq X$(显然)

(2)$X\preccurlyeq Y\preccurlyeq Z\Rightarrow X\preccurlyeq Z$(显然)

(3)是否有$A\preccurlyeq B\preccurlyeq A\Rightarrow A\approx B$? Cantor提出了猜想, 后来Schröder与Bernstein在1890年代同时独立证明.

定理 3.7.1 (Schröder-Bernstein) $A\preccurlyeq B\preccurlyeq A\Rightarrow A\approx B$.

证明: (Fraenkel, 1954)设$A\approx_f B_0\subseteq B, B\approx_g A_0\subseteq A$. 令

$$\mathscr{C}=\{C\subseteq A: C\cup g\lceil B\setminus f\lceil C]]=\varnothing\}.$$

当$C\in\mathscr{C}$时,

$$\begin{aligned}C\subseteq\bigcup\mathscr{C}\subseteq A\Rightarrow & f\lceil C]\subseteq f\lceil\bigcup\mathscr{C}]\\ \Rightarrow & B\setminus f\lceil C]\supseteq B\setminus f\lceil\bigcup\mathscr{C}]\\ \Rightarrow & g\lceil B\setminus f\lceil C]]\supseteq g\lceil B\setminus f\lceil\bigcup\mathscr{C}]].\end{aligned}$$

因为$C\cap g\lceil B\setminus f\lceil C\rceil\rceil=\varnothing$, 则$C\cap g\lceil B\setminus f\lceil\bigcup C\rceil\rceil=\varnothing$. 则$C\subseteq A\setminus g\lceil B\setminus f\lceil\bigcup C\rceil\rceil=\varnothing\triangleq D$. 这样,

$$
\begin{aligned}
① \quad \bigcup_{c\in\mathscr{C}} C=\bigcup\mathscr{C}\subseteq D \Rightarrow & f\lceil\bigcup\mathscr{C}\rceil\subseteq f\lceil D\rceil \\
\Rightarrow & B\setminus f\lceil\bigcup\mathscr{C}\rceil\supseteq B\setminus f\lceil D\rceil \\
\Rightarrow & g\lceil B\setminus f\lceil\bigcup\mathscr{C}\rceil\rceil\supseteq g\lceil B\setminus f\lceil D\rceil\rceil.
\end{aligned}
$$

即

$$A\setminus D\supseteq g\lceil B\setminus f\lceil D\rceil\rceil\Rightarrow g\lceil B\setminus f\lceil D\rceil\rceil\cap D=\varnothing\Rightarrow D\in\mathscr{C}\Rightarrow D\subseteq\bigcup\mathscr{C}. \quad ②$$

由①②, $D=\bigcup\mathscr{C}$, 则$\mathscr{C}$中依被包含关系中D为最大元. 则$A\setminus D=g\lceil B\setminus f\lceil D\rceil\rceil$, 把$A$分为两块. 让$h=(f\lceil D)\cup(g\lceil(A\setminus D))$, 则定义域没有相同元, $A\approx_h b$. □

记$0=\varnothing,1=\{0\},2=\{0,1\}$.

定理 3.7.2 $\mathcal{P}(X)\approx 2^X$, 从而$|\mathcal{P}(X)|=2^{|X|}$.

证明: $2^X=\{$映射$f:X\to 2=\{0,1\}\}$. 对于$A\in\mathcal{P}(X)$, 让$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$为$A$的特征函数, 定义$\chi:\mathcal{P}(X)\to 2^X$如下: $\chi(A)=\chi_A$.

验证χ为单射: 若$A,B\in\mathcal{P}(X)$, 则

$$\chi(A)=\chi(B)\Rightarrow\chi_A=\chi_B\Rightarrow A=\{x\in X:\chi_A(x)=1\}=\{x\in X:\chi_B(x)=1\}=B.$$

验证χ为满射: 任给$f\in 2^X$, f是X到$2=\{0,1\}$的映射. 让$A=\{x\in X:f(x)=1\}$. 则$x\in X$时, $f(x)=1\Leftrightarrow x\in A\Leftrightarrow\chi_A(x)=1$. 故$f:\chi_A=\chi(A)\in Ran(\chi)$. 则$\chi$是$\mathcal{P}(X)$到$2^X$的满射.

从而χ是双射, $|\mathcal{P}(X)|=2^{|X|}$. □

定理 3.7.3 $\mathbb{R}\approx\mathcal{P}(\mathbb{N})\approx 2^{\mathbb{N}}$. 从而$\aleph=2^{\aleph_0}$.

证明: $\mathbb{R}\approx[0,1)$, 而$x\in[0,1)$可唯一表成二进制形式:

$$0.x_0x_1x_2\cdots,x_i\in\{0,1\}$$

且没有N使$x_N=x_{N+1}=\cdots=1$. (为了唯一起见, 后面不可以全为1, 如$0.100111\cdots=0.101$)

下证$[0,1)\approx 2^{\mathbb{N}}\setminus$可数集. (某项以后全是1的数可数!) 取$f\in 2^{\mathbb{N}},f:\mathbb{N}\to\{0,1\}$. 则$\mathbb{R}\approx\mathbb{R}\cup$可数集$\approx 2^{\mathbb{N}}$. □

注: (1)$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$可数, 相当于可数个可数集并起来还是可数.

数法: 横坐标+纵坐标小的先数, 故$\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$. 而$\aleph=|\mathbb{R}|=2^{\aleph_0}>\aleph_0$.

注: (2)$\aleph_0^{\aleph_0}=\aleph$, 这是因为由前一个注以及上面定理有: $2^{\aleph_0}\le\aleph_0^{\aleph_0}\le(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$,

Cantor连续统假设: 无集合X使得$\mathbb{N}\prec X\prec\mathbb{R}$, 即$\aleph_0<|X|<\aleph$.

广义连续统假设任给无穷集A, 无集合X使$A\prec X\prec\mathcal{P}(A)$, 即$|A|<|X|<|\mathcal{P}(A)|=2^{|A|}$.

公理 6 (选择公理(axiom of choice))

$$(X \neq \varnothing \wedge \forall x(x \neq \varnothing) \wedge \forall x \in X \forall y \in X(x \neq y \to x \cap y = \varnothing) \to (\exists Y \subseteq \bigcup X \forall x \in X \exists! y \in x(y \in Y)).$$

即, 有一个定义域为X的函数$f(x)$使得$\forall x \in X(f(x) \in x)$. $f = \{\langle x, y\rangle : x \in X\}, f(x) = y \in x$.

例 3.7.1 *设R为关系, $Dom(R) = X, Ran(R) \subseteq Y$, 用选择公理证明: 存在映射$F : X \to Y$使得$F \subseteq R$.*

证明: 对每个$x \in X, Y_x = \{y \in Y : xRy\} \neq \varnothing$. 则$\{\{x\} \times Y_x : x \in X\}$都两两不交, 即$\{x\} \times Y_x \cap \{x'\} \times Y_{x'} \neq \varnothing \Rightarrow x = x'$. 对集合$\{\{x\} \times Y_x : x \in X\}$用选择公理, $F = \{\langle x, y_x\rangle : x \in X\}$为函数, 则$F \subseteq R(y_x \in Y_x)$. □

注: 任一无穷集合都有可数子集.

选择公理的等价形式:

(1)(Zermelo)任一非空集都有个良序.

(2)Zorn引理

(3)(三分律)任给集合A, B, 则$A \prec B$或$B \prec A$或$A \approx B$.

(4)群的真子群必包含于一个极大真子群中.

(5)环的真理想必包含于一个极大真理想中.

进一步发展:

1924年, Banach, Tarski提出分球怪论.

1935年, Gödel证明了ZF相容⇒ ZF+AC相容, 且证明了ZF相容⇒ ZF+GCH相容.

1963年, Cohen(拿了2004Fields奖) ZF相容⇒ ZF+¬AC相容, 且证明了ZF相容⇒ZF+¬GCH相容.

1988年, Laczkovich $\cdots$

习题 13 (Week 13)

1. 设映射$f : X \to Y, g : Y \to X$满足$g \circ f = I_X, f \circ g = I_Y$. 证明$f$是$X$到$Y$的双射, 且$f^{-1} = g$.
2. 设R为关系. 证明:
$$R\text{是等价关系} \Leftrightarrow R^{-1} \circ R = R.$$
3. **(3.6)**如果$\leq$为集合W上的良序, 证明不存在序列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$使得$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$.
4. **(3.6)**设$\leq$为非空集合A上线性序, 且对任何一阶公式$\varphi(x)$都有
$$\forall a \in A(\forall x \in A(x < a \to \varphi(x)) \to \varphi(a)) \to \forall x \in A(\varphi(x)).$$
证明A的每个非空子集必有最小元.
5. **(3.7)**自然数集$\mathbb{N}$到$\mathbb{N}$的映射共有多少个?
6. **(3.7)**由全体从实数集$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的连续函数构成的集合的基数是多少?
7. **(3.7)**对于集合X, 证明幂集$\mathcal{P}(X)$与$2^X = \{\text{映射} f : X \to \{0, 1\}\}$等势.

§ 3.8 无穷公理与自然数系统

定义 3.8.1 对集合x, x的**后继(*successor*)**指$x' = x \cup \{x\}$. 集合A为**归纳集**指

$$0 = \varnothing \in A \wedge \forall x \in A(x' \in A).$$

公理 7 (无穷公理) 存在一个归纳集. 即

$$\exists A(0 \in A \wedge \forall a \in A(a' \in A)).$$

定义 3.8.2 属于每个归纳集的集合叫**自然数**. 设X为归纳集, 则

$$\{x \in X : \forall A(A\text{为归纳集} \to x \in A)\} = \mathbb{N}.$$

定理 3.8.1 自然数集$\mathbb{N}$是最小的归纳集.

证明: 根据分出公理, $A = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}$是个集合(定义). 故$\mathbb{N} \subseteq A$. 再证$\mathbb{N}$为归纳集. 0属于每个归纳集, 故$0 \in \mathbb{N}$. 若$n \in \mathbb{N}$, 则对任何归纳集$A, n \in A$. 从而$n' \in A$, 从而$n' \in \mathbb{N}$. 因此$\mathbb{N}$为归纳集. □

定理 3.8.2 (数学归纳法) 设$\varphi(0)$成立, $\forall n \in \mathbb{N}(\varphi(n) \to \varphi(n'))$, 则$\forall n \in \mathbb{N}\varphi(n)$对. 这儿$\varphi$为一阶公式.

证明: 依分出公理, $A = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}$是个集合, $A \subseteq \mathbb{N}$, 因为$\varphi(0)$成立, $0 \in A$, 若$n \in A$, 则$n \in \mathbb{N}$且$\varphi(n)$成立, 从而$\varphi(n')$成立. 而$n' \in \mathbb{N}$, 则$n' \in A$, 故A为归纳集. 根据定理3.8.1, A包含自然数集, 则$\mathbb{N} \subseteq A \subseteq \mathbb{N}$, 故$A = \mathbb{N}$. 即$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n)$成立. □

定理 3.8.3 $\forall n \in \mathbb{N}(n \neq 0 \to \exists m \in \mathbb{N}(m' = n))$. *(若$n \neq 0$, 它是某元素的后继)*

证明: 让$\varphi(n)$表示$n \neq 0 \to \exists m \in \mathbb{N}(m' = n)$, 则$\varphi(0)$成立. 若$n \in \mathbb{N}$且$\varphi(n)$成立, 则$\varphi(n')$也对. ($n'$为$n$的后继, 取上面的$m = n$即可) 根据定理3.8.2(数学归纳法), $\forall n \in \mathbb{N}\varphi(n)$也对. □

注: $0 = \varnothing, 1 = 0' = 0 \cup \{0\}, 2 = 1' = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}, 3 = 2' = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$.

用$\underline{\in}$表示属于或等于.

定理 3.8.4 对$m, n \in \mathbb{N}$, $m \underline{\in} n \Leftrightarrow m \subseteq n$.

证明: "$\Rightarrow$"先对n归纳. $m \underline{\in} 0 \Rightarrow m = 0 \subseteq m \subseteq 0$.

设已经有$m \underline{\in} n \Rightarrow m \subseteq n$, 今设$m \underline{\in} n' = n \cup \{n\}$, 如果$m \in n' = n \cup \{n\}$, 则$m = n$或$m \in n$, 即$m \underline{\in} n$, 根据归纳假设, $m \subseteq n \subseteq n'$. 如果$m = n'$, 则$m \subseteq n'$. 用数学归纳法证完.

"$\Leftarrow$"对n归纳. $m \subseteq 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow m \underline{\in} 0$.

设已有$m \subseteq n \Rightarrow m \underline{\in} n$, 现在设$m \subseteq n' = n \cup \{n\}$, 如果$m \subseteq n$, 由归纳假设, $m \underline{\in} n \Rightarrow m \in \{n\} \cup n = n'$. 下设$m \nsubseteq n$, 则$m$有个元素在$\{n\}$里, 则$n \in m$. 由"$\Rightarrow$"方向可知, $n \underline{\in} m \Rightarrow n \subseteq m$. 于是$n' = n \cup \{n\} \subseteq m \subseteq n'$, 故$m = n'$, 故$m \underline{\in} n'$. □

推论 3.8.5 $\forall n\in\mathbb{N}(n\notin n)$, 即$\forall n\in\mathbb{N}(n\neq n')$.

证明: 对n归纳证$n\neq n'$. $0'=0\cup\{0\}=\{0\}\neq\varnothing=0$. 设$n\neq n'$, 下证$n'\neq n''$. (反证)若$n'=n''=n'\cup\{n'\}$, 则$n'\in n'=n\cup\{n\}$. 而$n'\neq n$, 故$n'\in n$, 根据定理3.8.4, $n'\subseteq n\subseteq n'=n\cup\{n\}$. 故$n=n'$, 与归纳假设矛盾. □

注: "即"后面是因为$n'=n\subseteq\{n\}=n\Leftrightarrow n\in n$.

定理 3.8.6 对$m,n\in\mathbb{N}$, $m'=n'\Rightarrow m=n$.

证明: 设$m'=n'$但$m\neq n$, 则$m\in m'(=m\cup\{m\})=n'=n\cup\{n\}$. 根据定理3.8.4, 从而有$m\subseteq n$. 类似地, $n\in n'=m'=m\cup\{m\}\Rightarrow n\in m$. 根据定理3.8.4, $n\subseteq m$, 因而$m=n$. 矛盾. □

定理 3.8.7 任给$m,n\in\mathbb{N}$, 下述三者中恰有一个成立: $m\in n, m=n, n\in m$.

证明: 根据定理3.8.5, $n\notin n$, 则$m\in n$与$m=n$不同时成立, 且$n\in m$与$n=m$不同时成立.

如果$m\in n$且$n\in m$, 由定理3.8.4得$m\subseteq n\subseteq m$, 从而$m=n$, 与$n\notin n$矛盾. (从而三者至多只有一个成立)

下证恰有一个成立. 对m归纳证$m\in n\vee m=n\vee n\in m$. 由$0\subseteq n$, 则$0\in n$或$0=n$.

记$\varphi(m)\triangleq\forall n\in\mathbb{N}(m\in n\vee m=n\vee n\in m)$. 若$\varphi(m)$成立, 下证$\varphi(m')$成立, 即$\forall n\in\mathbb{N}(n\in m'\vee n=m'\vee m'\in n)$. 根据定理3.8.4, $0\subseteq m'\Rightarrow 0\underline{\in} m'$成立. 由定理3.8.3(非0自然数形如$n'$), 若$m=n$, 则$m'=n'$. 若$m\in n$, 则$m\subseteq n\subseteq n'$, $\{m\}\subseteq n\subseteq n'$, 则$m'=\{m\}\cup m\subseteq n'$. 若$n\in m$, 则$n\subseteq m\subseteq m'$, $\{n\}\subseteq m\subseteq m'$, 则$n'\subseteq m'$. 由归纳假设, $\varphi(m)$成立. □

定理 3.8.8 $\underline{\in}$ ($\subseteq$) 是$\mathbb{N}$上良序.

证明: 由定理3.8.7(可比性), 以及$\subseteq$(等价于$\underline{\in}$, 定理3.8.4)是$\mathbb{N}$上半序. 所以$\underline{\in}$是$\mathbb{N}$上良序. 再证$\mathbb{N}$的每个非空子集A必有最小元. 对n归纳. 设A无最小元, 则$0\notin A$, 不然0为A最小元. 让$\varphi(n)$表示$\forall m\leq n(m\notin A)$, 则$\varphi(0)$对.

(反证)设$\varphi(n)$成立但$\varphi(n')$不成立, 则$n'\in A$. 而A无最小元, 则n'不是最小元, 必有更小的$m\in A$使得$m<n'$, 于是$m\in n\cup\{n\}\Leftrightarrow m\underline{\in} n$, 即$m\leq n$. 由归纳假设$m\notin A$. 因$\varphi(n)$成立, 则$m\notin A$, 矛盾.

故对每个$n\in\mathbb{N}$都有$\forall m\leq n(m\notin A)$. 特别地$n\notin A$与$A\neq\varnothing$矛盾. □

3.8.1 Peano算术公理系统

1889年, Peano把算术公理化（摆开集合论）, 得到Peano算术公理系统.

(1)有个特殊的自然数0;

(2)n是自然数$\Rightarrow n'$(n的后继)也是自然数.

(3)$0\neq n'$. (0非后继)

(4)$m\neq n\Rightarrow m'\neq n'$. (后继映射是单射)

(5)(数学归纳法)若$\varphi(0)$成立且$\varphi(n)\to\varphi(n')$, 则对所有$n\in\mathbb{N}$, 有$\varphi(n)$.

ZF系统中定义的自然数$0=\varnothing, n'=n\cup\{n\}$满足Peano的5条公理. （数论是集合论的一部分）

下面可用Peano 5条公理发展算术. 在Peano算术中定义加、乘、乘方如下:

(1)$m+0=m, m+n'=(m+n)'$,

(2)$m0=0, mn'=mn+m$,

(3)$m^0=1, m^{n'}=m^n m$.

定理 3.8.9 *对$k,m,n\in\mathbb{N}$, 有*

(1)加法结合律: $(k+m)+n=k+(m+n)$;

(2)加法交换律: $m+n=n+m$;

(3)乘法分配律: $k(m+n)=km+kn$;

(4)乘法交换律: $mn=nm$;

(5)乘法结合律: $(km)n=k(mn)$;

(6)消去律: $k+m=k+n\Rightarrow m=n; km=kn\Rightarrow k=0\vee(m=n)$.

证明: (1)对n归纳. $(k+m)+0=k+m=k+(m+0)$. 假设$(k+m)+n=k+(m+n)$, 则$(k+m)+n'=((k+m)+n)'$(加法定义). 由归纳假设, $(k+(m+n))'=k+(m+n)'=k+(m+n')$.

(2)-(6)留作习题(**作业**). 注意要证$0+m=m$. □

Peano算术中$\le$如下定义: $m\le n$指$\exists d\in\mathbb{N}(m+d=n)$.

定理 3.8.10 *Peano算术中$\le$为$\mathbb{N}$上的半序.*

证明: (1)自反性: $n+0=n$, 故$n\le n$.

(2)反称性:

$$\begin{aligned} & m\le n\wedge n\le m \\ \Rightarrow\ & \exists d_1,d_2\in\mathbb{N}(m+d_1=n, n+d_2=m) \\ \Rightarrow\ & m+(d_1+d_2)=(m+d_1)+d_2=n+d_2=m=m+0 \\ \Rightarrow\ & d_1+d_2=0.(\text{消去律}) \end{aligned}$$

如果$d_2\neq 0$, 则有$d\in\mathbb{N}$使得$d_2=d'$(**重要处理方法**!!!!!!!!) 于是$d_1+d_2=d_1+d'=(d_1+d)'\neq 0$, 与$d_1+d_2=0$矛盾. 故$d_2=0$, $d_1+0=0+0\Rightarrow d_1=0$(消去律), 则$m=n$.

(3)传递性: 设$k\le m\le n$, 则有$d_1,d_2\in\mathbb{N}$, 使得$k+d_1=m, m+d_2=n$. 于是$k+(d_1+d_2)=(k+d_1)+d_2=m+d_2=n$, 则$k\le n$. □

定理 3.8.11 *在ZF集合论中, 对$m,n\in\mathbb{N}$有$m\le n\Leftrightarrow m\underline{\in}n\Leftrightarrow m\subseteq n$.*

证明: 只需证第一个$\Leftrightarrow$.(第二个已证).

(1)对n归纳证$m\underline{\in}\Leftrightarrow m\le n$. 当$n=0$时, $m\underline{\in}0\Rightarrow m=\varnothing=0\le n$. (在作业中已经证$0+n=n$)

设$m\underline{\in}n\Rightarrow m\le n$成立, 则$m=n'\Rightarrow m\le n'$①, 且$m\in n'\Rightarrow m\in n\cup\{n\}\Rightarrow m\underline{\in}n$. 由归纳假设, $m\le n\le n'$②. 由①②可知$m\le n'$, 归纳证完.

(2)下证$m\le n\Rightarrow m\underline{\in}n$, (反证)设$m\le n$但$m\underline{\notin}n$, 从而由定理3.8.7, $n\in m$. 由(1), $n\le m$. 利用$\le$反对称性可知$m=n$, 与$n\notin n$矛盾. □

注: $\underline{\in}$是个良序, 则定理表明$\le$也是个良序.

§ 3.9 整数、有理数、实数、复数的构造

3.9.1 用加法定义减法

在$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$上定义**差等价**$\sim$如下: $\langle k,l\rangle\sim\langle m,n\rangle$指$k+n=l+m$. 下面验证这是个等价关系.

(1)自反性: 由加法交换律可得$\langle m,n\rangle\sim\langle m,n\rangle$.

(2)对称性: $\langle k,l\rangle\sim\langle m,n\rangle$即$k+n=l+m$, 由加法交换律, $m+l=n+k$, 所以$\langle m,n\rangle\sim\langle k,l\rangle$.

(3)传递性: $\langle k,l\rangle\sim\langle m,n\rangle\sim\langle p,q\rangle$, 则$k+n=l+m, m+q=n+p$, 则$k+n+m+q=l+m+n+p$, 由交换律、结合律、消去律可得$k+q=l+p$, 即$\langle k,l\rangle\sim\langle p,q\rangle$.

3.9.2 整数

$\langle m,n\rangle$所在的等价类记为$[\langle m,n\rangle]$, 把它叫做**整数**. $\mathbb{Z}=\{[\langle m,n\rangle]:m,n\in\mathbb{N}\}=\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$. (这个符号表示$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$关于差等价$\sim$构成的集合)

在$\mathbb{Z}$上定义加乘法如下:

$$[\langle k,l\rangle]+[\langle m,n\rangle]\triangleq[\langle k+m,l+n\rangle]$$

$$[\langle k,l\rangle]\cdot[\langle m,n\rangle]\triangleq[\langle km+ln,kn+lm\rangle]$$

该定义合理(指换不同的代表元也一样), 证明留作习题.

$n\in\mathbb{N}$对应于$n_{\mathbb{Z}}=[\langle n,0\rangle]$, 所以$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$.

让$-n_{\mathbb{Z}}=[\langle 0,n\rangle]$, 则

$$n_{\mathbb{Z}}+(-n_{\mathbb{Z}})=[\langle n,n\rangle]=[\langle 0,0\rangle]=0_{\mathbb{Z}}$$

$$n+[\langle k,l\rangle]\triangleq[\langle n,0\rangle]+[\langle k,l\rangle]=[\langle n+k,l\rangle],$$

当$m,n\in\mathbb{N}$时, $m_{\mathbb{Z}}+(-n_{\mathbb{Z}})=[\langle m,0\rangle]+[\langle 0,n\rangle]=[\langle m,n\rangle]$.

3.9.3 有理数

让$\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, 在$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$上定义**商等价**$\sim$如下: $\langle a,b\rangle\sim\langle c,d\rangle$指$ad=bc$. 可以证$\sim$是$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$上的等价关系.

把$\langle a,b\rangle$所在的等价类记为$\frac{a}{b}$, 叫**有理数**. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\sim\langle c,d\rangle$. $\mathbb{Q}=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim=\left\{\frac{a}{b}:a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z}^*\right\}$.

定义$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, 易证它们定义合理（换代表元仍一样）.

由于整数a对应于有理数$\frac{a}{1}$, 所以$\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$. 当$a,b\in\mathbb{Z}^*$时, 有逆元: $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=\frac{1}{1}=1_{\mathbb{Q}}$.

3.9.4 实数

(1)Cantor构造方法：实数相当于收敛有理数列的极限. 有理数列$x_0,x_1,x_2,\cdots$相当于函数$s(n)=x_n, s:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$.

函数$s(n)=x_n$为Cauchy列, 指

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}^{\exists}N\in\mathbb{N}\forall m\geq N\forall n\geq N(|s(m)-s(n)|<\varepsilon).$$

Cauchy列r与s等价, 指

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}^{\exists}N\in\mathbb{N}\forall n\geq N(|r(n)-s(n)|<\varepsilon).$$

Cauchy列s所在的等价类记为$\lim\limits_{n\to\infty}s(n)$, 叫**实数**. $r\sim s\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}r(n)=\lim\limits_{n\to\infty}s(n)$.

(2)Dedekind分割构造: 指$\mathbb{Q}$的一个子集x满足: ①$\varnothing \neq x \neq \mathbb{Q}$; ②向下封闭, 即$r < q \in x$且$r \in \mathbb{Q} \Rightarrow r \in x$. ③$x$无最大元. 满足上面三个条件的$x$叫**Dedekind分割**.

Dedekind把Dedekind分割看作实数, $\mathbb{R}$为实数集. $x \leq_{\mathbb{R}} y$指$x \subseteq y$. 如果$x = (-\infty, \alpha) \cap \mathbb{Q}, y = (-\infty, \beta) \cap \mathbb{Q}$, 则定义$x + y \triangleq (-\infty, \alpha + \beta) \cap \mathbb{Q}$, $x +_{\mathbb{R}} y = \{r + s : r \in x, s \in y\}$. 定义$-x \triangleq \{r \in \mathbb{Q} : \exists s \in \mathbb{Q}(s > r \wedge -s \notin x)\}$(可画图辅助理解). 定义$|x| \triangleq x \cup -x$.

定理 3.9.1 (上确界原理) 实数集的每个有上界的非空子集A必在$\mathbb{R}$中有上确界.

只需证$\bigcap A = \bigcap\limits_{x \in A} x$是Dedekind分割. $\bigcap A$是包含A的所有元素的最小子集. 这里A在$\mathbb{R}$中为上确界.

3.9.5 复数

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$叫**复数集**. 定义

$$\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle = \langle a + b, c + d\rangle;$$

$$\langle a, b\rangle \cdot \langle c, d\rangle = \langle ac - bd, ad + bc\rangle,$$

实数a看作复数$\langle a, 0\rangle$, 故$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. i指$\langle 0, 1\rangle$; $i^2 = \langle 0, 1\rangle \cdot \langle 0, 1\rangle = \langle -1, 0\rangle = -1$.

当$a, b \in \mathbb{R}$时, $a + bi = \langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle \cdot \langle 0, 1\rangle = \langle 0, b\rangle$.

习题 14 (Week 14)

1. 证明整数的加乘法定义合理, 即: 设$k, l, \tilde{k}, \tilde{l}, m, n, \tilde{m}, \tilde{n} \in \mathbb{N}$, 满足$[\langle k, l\rangle] = [\langle \tilde{k}, \tilde{l}\rangle]$, $[\langle m, n\rangle] = [\langle \tilde{m}, \tilde{n}\rangle]$. 则: $[\langle k + m, l + n\rangle] = [\langle \tilde{k} + \tilde{m}, \tilde{l} + \tilde{n}\rangle]$, 且$[\langle km + ln, kn + lm\rangle] = [\langle \tilde{k}\tilde{m} + \tilde{l}\tilde{n}, \tilde{k}\tilde{n} + \tilde{l}\tilde{m}\rangle]$.
2. **(3.9)**让$C(\mathbb{R}) = \{$实数集$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的连续函数$\}$,
   (1) 证明f, g为$C(\mathbb{R})$中不同元素时, $f\lceil\mathbb{Q} \neq g\lceil\mathbb{Q}$.
   (2) 用(1)证明$|C(\mathbb{R})| = \aleph$.
3. **(3.9)**x为实数指它是一个Dedekind分割, 即x为有理数集$\mathbb{Q}$的无最大元的非空真子集, 且向下封闭(即x每个元之下的有理数也属于x), 设A为实数集$\mathbb{R}$的有上界的非空子集, 试证$\bigcup A$也是实数(从而它为A在$\mathbb{R}$中上确界).

第 4 章　格与布尔代数

§ 4.1　格的定义与运算的代数特性

定义 4.1.1 设$\leq$是非空集L上的半序, 若对任何$a, b \in L$, $\{a, b\}$在L中有上确界$\sup\{a, b\}$, 在L中有下确界$\inf\{a, b\}$, 则说L依$\leq$构成一个**格 (lattice)**. $\langle L, \leq\rangle$为**格结构**.

对于格L, 在L上定义运算$\vee$与$\wedge$. $a \vee b$指$\sup\{a, b\}$, $a \wedge b$指$\inf\{a, b\}$.

定理 4.1.1 设$\langle L, \leq\rangle$为格结构, 则

(1)$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$.

(2)交换律: $a \vee b = b \vee a, a \wedge b = b \wedge a$.

(3)结合律: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

(4)吸收律: $a \vee (a \wedge b) = a, a \wedge (a \vee b) = a$.

证明: (1)$a \wedge b = a \Leftrightarrow a \leq a$且$a \leq b \Leftrightarrow a \leq b$. 另外一个同理.

(2)显然.

(3)$a \leq a \vee b \leq (a \vee b) \vee c$①, 由

$$\begin{cases} b \leq a \vee b \leq (a \vee b) \vee c \\ c \leq (a \vee b) \vee c \end{cases} \Rightarrow b \vee c \leq (a \vee b) \vee c.②$$

由①②以及序的反对称性可得$a \vee (b \vee c) \leq (a \vee b) \vee c$. 同理可证$(a \vee b) \vee c \leq a \vee (b \vee c)$. 所以$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$. 类似可证$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

(4)$a \vee (a \wedge b) \geq a$①, 由$a \leq a, a \wedge b \leq a$, 所以$a \vee (a \wedge b) \leq a$②, 由①②和序的反对称性立证. 另一个类似. □

定理 4.1.2 设非空集上有两个运算$\vee, \wedge$. 它们满足交换律、结合律、吸收律. 则对$a, b \in L$, 有$a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a$. 定义$a \leq b$为$a \vee b = b$（或$a \wedge b = a$）, 则$L$按$\leq$形成格, 且

$$\sup\{a, b\} = a \vee b, \inf\{a, b\} = a \wedge b.$$

证明: 根据吸收律, $a \vee b \Rightarrow a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$. 根据交换律与吸收律, $a \wedge b \Rightarrow a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b \vee (b \wedge a) = b$. 故$a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$.

让$a \leq b$指$a \wedge b = a$(等价于$a \vee b = b$). 先证$\leq$为L上半序:

1°(自反性)$a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge a)) = a$, (用两次吸收律), 故$a \leq a$.

2°(反对称性)若$a \leq b \leq a$, 则$a = a \wedge b = b \wedge a = b$.

3°(传递性)设$a \leq b \leq c$, 则$a \wedge b = a$(即$a \leq b$)且$b \wedge c = b$(即$b \leq c$). 只需证$a \wedge c = a$(从而$a \leq c$). 根据结合律, $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$, 从而$a \leq c$.

因此$\leq$为L上的半序.

下面证$\sup\{a, b\} = a \vee b, \inf\{a, b\} = a \wedge b$.

1° 根据交换律与吸收律, $(a \wedge b) \vee a = a \vee (a \wedge b) = a$, 故$a \wedge b \leq a$. 同样$a \wedge b = b \wedge a \leq b$, 故$a \wedge b$为$a$与$b$的下界.

2° 设$c \in L$为$\{a,b\}$下界, 则$c \leq a, c \leq b$. 从而$c \wedge a = c, c \wedge b = c$. 于是$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge c = c$, 则$c \wedge (a \wedge b) = c$（交换律）. 则$c \leq a \wedge b$, 从而$a \wedge b$为$\inf\{a,b\}$.

3° 根据吸收律, $a \wedge (a \vee b) = a$, 故$a \leq a \vee b$, 同理$b \leq a \vee b$, 所以$a \vee b$为$\{a,b\}$的上界.

4° 设$c \in L$为$\{a,b\}$上界, 则$a \leq c, b \leq c$, 即$a \vee c = c$且$b \vee c = c$. 于是$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c = c$. 所以$a \vee b \leq c$. 从而$a \vee b$为$\sup\{a,b\}$. □

注: 定理表明, 用序或运算规律可定义一个格.

例 4.1.1 *$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$依$\subseteq$形成格.*

§ 4.2 对偶原理与分配不等式

格一般不成立分配律, 但有分配不等式.

定理 4.2.1 (分配不等式) *设$\langle L, \leq \rangle$为格结构, 则(1)$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$; (2)$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.*

证明: (1)$a \leq a \vee b$且$b \wedge c \leq b \leq a \vee b$, 则$a \vee (b \wedge c) \leq a \vee b$. 类似地, $a \vee (b \wedge c) \leq a \vee c$($b, c$调位置), 从而$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. □

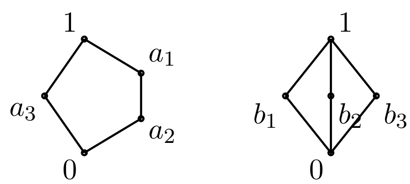
定义 4.2.1 (分配格) *若格L有分配律*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

*则称L为**分配格(distribute lattice)**.*

定义 4.2.2 (有界格) *若格L有最大元（记为1）也有最小元（记为0）, $0 \leq a \leq 1$, 则称格L为**有界格**.*

例 4.2.1 *下面的**五角格**与**钻石格**都不是分配格. 它们的Hasse示意图如下:*



证明: $a_1 \wedge (a_2 \vee a_3) = a_1 \wedge 1 = a_1$, 但$(a_1 \wedge a_2) \vee (a_1 \wedge a_3) = a_2 \vee 0 = a_2$.
$b_1 \wedge (b_2 \vee b_3) = b_1 \wedge 1 = b_1$, 但$(b_1 \wedge b_2) \vee (b_1 \wedge b_3) = 0 \vee 0 = 0$. □

定理 4.2.2 (格的对偶原理) *设关于一般格的公式φ（可能有$\wedge, \vee, \leq, \geq$）在任何格中成立, 则φ的对偶φ^*（指φ中$\vee$与$\wedge$对调, $\leq$与$\geq$对调所得）在任何格中成立.*

证明: 任给格结构$\langle L, \leq \rangle$, 则$\langle L, \geq \rangle$也是格. 当$a, b \in L$时, a, b在$\langle L, \geq \rangle$中的上(下)确界与$\langle L, \leq \rangle$中的下(上)确界一样. 而φ在$\langle L, \geq \rangle$中成立等价于φ^*在$\langle L, \leq \rangle$中成立, 根据$\langle L, \leq \rangle$的任意性, φ^*在任何格中成立. □

例 4.2.2 *分配不等式(1)(2)中两个命题互为对偶式.*

§4.3 格的同态与保序映射

定义 4.3.1 (子格) 设$\langle L,\leq\rangle$为格结构，若$K\subseteq L$且K依$\leq$在K上限制构成格，即$a,b\in K$时，$a\vee b\in K, a\wedge b\in K$. 则称$K$为$L$的**子格**.

定义 4.3.2 (同态与同构) 设$\langle L,\leq\rangle$和$\langle\mathscr{L},\preccurlyeq\rangle$为格结构，若映射$\sigma:L\to\mathscr{L}$满足$\sigma(a\vee b)=\sigma(a)\vee\sigma(b)$，则称$\sigma$是格$L$到$\mathscr{L}$的**同态**. 如果$\sigma:L\to\mathscr{L}$既是双射又是同态，则称$\sigma$是$L$到$\mathscr{L}$的**同构映射**.

注: $\sigma(a\vee b)=\sigma(a)\vee\sigma(b)$中，第一个$\vee$是$L$中的上确界，第二个$\vee$是$\mathscr{L}$中的上确界.

定理 4.3.1 (Birkhoff, 1934) 格L为分配格的充分必要条件是L不含五角子格，也不含钻石子格.（即不含同构于五角格或钻石格的子格）.【证明比较困难，不作要求. 详见可以看*GTM242*书的对应部分】

定义 4.3.3 (保序映射) 设$\langle L,\leq\rangle$和$\langle\mathscr{L},\preccurlyeq\rangle$为格结构，若$\sigma:L\to\mathscr{L}$满足

$$x\leq y\Rightarrow\sigma(x)\preccurlyeq\sigma(y),\forall x,y\in L,$$

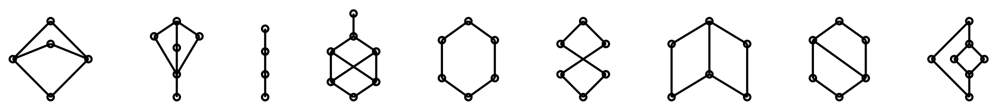
则称σ是**保序映射**.

定理 4.3.2 σ为格同态$\Rightarrow$ σ为保序映射.

证明: $x\leq y\Rightarrow x\vee y=y\Rightarrow\sigma(x)\vee\sigma(y)=\sigma(y)\Rightarrow\sigma(x)\preccurlyeq\sigma(y)$. □

习题 15 (Week 15)

1. **(4.1)**判断下图中哪些是格，哪些是分配格，哪些是有补格.



2. **(4.1)**设L是格，$a,b,c\in L$且$a\leq b\leq c$. 证明$a\vee b=b\wedge c$.
3. **(4.1)**设L为格，证明:
$$\forall a_i\in L,a_1\wedge\cdots\wedge a_n=a_1\vee\cdots\vee a_n\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n.$$
4. **(4.1)**设$\langle L,\leq\rangle$为格结构，$a,b,c,d\in L$满足$a\leq b,c\leq d$. 则$a\wedge c\leq b\wedge d,a\vee c\leq b\vee d$.
5. **(4.2)**设$\leq$是非空集L上全序，证明: L依$\leq$形成分配格.
6. **(4.2)**设L为分配格，$a,b,c\in L$，则
$$a\wedge b\leq c\leq a\vee b\Leftrightarrow c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)\vee(a\wedge b).$$
7. **(4.2)**证明L是分配格的充分必要条件是$\forall x,y,z\in L$,
$$(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)=(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x).$$
8. **(4.3)**设$\langle L,\leq\rangle$是格. 任取$a\in L$，令$S=\{x:x\in L\wedge x\leq a\}$. 证明$\langle S,\leq\rangle$是$L$的子格.
9. **(4.3)**设$\langle L,\leq\rangle$与$\langle L',\leq'\rangle$是格结构. σ是格L到L'的同态. 证明σ是保序映射，即$x\leq y\Rightarrow\sigma(x)\leq'\sigma(y)$.
10. **(4.3)**若φ为格L到L'之间的双射，且满足
$$\forall a,b\in L(a\leq b\leftrightarrow\varphi(a)\leq\varphi(b)),$$
则φ是格同构.

§4.4 布尔代数

把逻辑变成代数

定义 4.4.1 设L为有界格, 0为最小元, 1为最大元. 对于$a, b \in L$, $a \vee b = 1$且$a \wedge b = 0$, 则称a与b**互补**, b为a的**补元（余元）**.

0与1互补.

引理 4.4.1 设L为分配格, 则$a, b, c \in L$时,

$$\begin{cases} a \vee b = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{cases} \Rightarrow b = c.$$

证明: $b = b \wedge (a \vee b) = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c = (a \vee c) \wedge c = c$. 这里用了吸收律、分配律、交换律. □

定理 4.4.2 设L为有界分配格.

(1)如果$a \in L$有补元, 则此补元唯一, 记为$\overline{a}$.

(2)如果$a, b \in L$有补元, 则有下面的*de Morgan*律: ①$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$, ②$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{c}$.

证明: (1)设$\overline{a}$与a'都是a的补元, 则$a \vee a' = a \vee \overline{a} = 1$, 且$a \wedge a' = a \wedge \overline{a} = 0$. 根据前面引理, $\overline{a} = a'$. □

(2)用定义来验证.

$$\begin{aligned}(a \vee b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) &= (a \vee b \vee \overline{a}) \wedge (a \vee b \vee \overline{b}) \\ &= ((a \vee \overline{a}) \vee b) \wedge (a \vee (b \vee \overline{b}) \\ &= (1 \vee b) \wedge (a \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1.\end{aligned}$$

对于第二条式子验证方法也是展开. □

注: 不是分配格时补元可能不唯一, 见后面的习题.

定义 4.4.2 若有界格L中每个元都有补格, 则称L为**有补格（有余格）**. 有补的分配格叫**布尔代数*(Boolean algebra)***.

例 4.4.1 $B = \{0, 1\}$按$\leq$（小于或等于）构成布尔代数, 叫电路布尔代数.

例 4.4.2 在命题演算中, 用0表示假命题, 1为真命题, 等价的命题公式视为同一个. 让$\Gamma = \{$命题公式$\}$, 对$\alpha, \beta \in \Gamma$, 让$\alpha \leq \beta$指$\alpha \to \beta$永真. 则Γ为布尔代数.

先验证$\leq$是半序, 再验证它形成格, 再验证是否为有界分配格, 最后验证是否为有补格即可.

例 4.4.3 $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$依$\subseteq$构成布尔代数.

验证方法同上.

定理 4.4.3 (Huntington, 1904) 设集合B中有两个特殊元0与1, B上有$\vee$（加法）与$\wedge$（乘法）两种运算. 它们满足下面的*Huntington*公理：

(1)$\vee$与$\wedge$满足交换律, 且$\vee$对$\wedge$, $\wedge$对$\vee$有分配律.

(2)（同一律）$a\wedge 1=a, a\vee 0=a$.

(3)（有补律）对$a\in B$, 有$\overline{a}\in B$满足$a\vee\overline{a}=1, a\wedge\overline{a}=0$.

则B为布尔代数.

证明: Step 1: 证明$a\vee 1=1, a\wedge 0=0$. 事实上

$$a\vee 1=(a\vee 1)\wedge 1=(a\vee\overline{a})\wedge(a\vee 1)=a\vee(\overline{a}\wedge 1)=a\vee\overline{a}=1,$$

$$a\wedge 0=(a\wedge 0)\vee 0=(a\wedge 0)\vee(a\wedge\overline{a})=a\wedge(0\vee\overline{a})=a\wedge\overline{a}=0.$$

Step 2: 证明吸收律.

$$a\vee(a\wedge b)=(a\wedge 1)\vee(a\vee b)=a\wedge(1\vee b)=a\wedge 1=a,$$

$$a\wedge(a\vee b)=(a\vee 0)\wedge(a\vee b)=a\wedge(0\vee b)=a\vee 0=a.$$

Step 3: 证明$\begin{cases} a\vee b=a\vee c \\ \overline{a}\vee b=\overline{a}\vee c \end{cases}\Rightarrow b=c.$

$$b=0\vee b=(a\wedge\overline{a})\vee b=(a\vee b)\wedge(\overline{a}\vee b)=(a\vee c)\wedge(\overline{a}\vee c)=(a\wedge\overline{a})\vee c=0\vee c=c.$$

Step 4: 证明结合律. 下证$a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$. 让$L=a\wedge(b\wedge c), M=(a\wedge b)\wedge c$.

下面只需证$a\vee L=a\vee M, \overline{a}\vee L, \overline{a}\vee M$. 根据Step 2(吸收律), 有

$$a\vee L=a\vee(a\wedge(b\wedge c))=a,$$

$$a\vee M=a\vee((a\wedge b)\wedge c)=(a\vee(a\wedge b))\wedge(a\vee c)=a\wedge(a\vee c)=a.$$

所以$a\vee L=a\vee M$. 另外

$$\begin{aligned}\overline{a}\vee L=\overline{a}\vee(a\wedge(b\wedge c))=&(\overline{a}\vee a)\wedge(\overline{a}\vee(b\wedge c))\\ =&1\wedge(\overline{a}\vee(b\wedge c))=\overline{a}\vee(b\wedge c),\\ \overline{a}\vee M=\overline{a}\vee((a\wedge b)\wedge c)=&(\overline{a}\vee(a\wedge b))\wedge(\overline{a}\vee c)\\ =&((\overline{a}\vee a)\wedge(\overline{a}\vee b))\wedge(\overline{a}\vee c)\\ =&(1\wedge(\overline{a}\vee b))\wedge(\overline{a}\vee c)\\ =&(\overline{a}\vee b)\wedge(\overline{a}\vee c)\\ =&\overline{a}\vee(b\wedge c).\end{aligned}$$

所以$\overline{a}\vee L=\overline{a}\vee M$. 根据Step 3, 结合律证完.

Step 5: 仿照Step 3,Step 4证明$a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$.

由上, 关于$\vee$与$\wedge$有交换律、结合律、分配律, 故B为分配格. $a\leq b$相当于$a\vee b=b$(或$a\wedge b=a$). 由于$a\vee 1=1, 0\vee a=a$, 故$0\leq a\leq 1$, 故a有界. 根据条件(3), 每个元素都有补元, 则B为布尔代数. □

定义 4.4.3 (原子) 设L为格, 0为其最小元. 若$a\in L$为$L\setminus\{0\}$中极小元, 即$0<b\leq a\Rightarrow b=a$, 则称a为L中***原子(atom)***.

引理 4.4.4 设格L中有最小元0, 且a, b为不同原子, 则$a\wedge b=0$.

证明: $a\wedge b\leq a, a\wedge b\leq b$, 由于$a\neq b$, 所以$a\wedge b<a$且$a\wedge b<b$, 所以$a\wedge b=0$. (原子下面更小的只有0). □

引理 4.4.5 设B为有限布尔代数, 则B中非零元可唯一（不考虑顺序）表示成一些原子之和（上确界）.

证明: 设$x \in B \setminus \{0\}$. 让$T(x) = \{a \in B : a\text{为原子且}a \le x\} = \{a_1, \cdots, a_n\}$. （把$\le x$的原子都列出来）让$y = a_1 \vee \cdots \vee a_n$, 下证$x = y$.

Step 1: 由于$a_i \le x(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则$x$为诸$a_i$的上界, 故$y \le x$①.

Step 2: 下证$y \ge x$. 先证$x \wedge \overline{y} = 0$. (反证)假如$x \wedge \overline{y} \ne 0$, 则断言有个原子$a \le x \wedge \overline{y}$. (若$a$不是原子，则可以找更小的, 由于$B$有限, 故必能找到原子)

$a \le x \wedge \overline{y}$, 则$a \in \{a_1, \cdots, a_n\}$, 故有$i$使$a = a_i$. 由于$a \le \overline{y}$, 则

$a = a \wedge \overline{y} = a_i \wedge \overline{a_1 \vee \cdots \vee a_n} = a_i \wedge (\overline{a_1} \wedge \cdots \wedge \overline{a_n}) = (a_i \wedge \overline{a_i}) \wedge (\overline{a_1} \wedge \cdots \wedge \overline{a_{i-1}} \wedge \overline{a_{i+1}} \wedge \cdots \wedge \overline{a_n}) = 0.$

这与$a \ne 0$矛盾, 故$x \wedge \overline{y} = 0$. 于是

$$y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \overline{y}) = (y \vee x) \wedge (y \vee \overline{y}) = (x \vee y) \wedge 1 = x \vee y,$$

于是$x \le y$②. 根据①②可知$x = y = a_1 \vee \cdots \vee a_n$(原子和).

唯一性的证明: 若有另一组原子$b_1, \cdots, b_m$使$x = b_1 \vee \cdots \vee b_m$, (反证)若$a_i \notin \{b_1, \cdots, b_n\}$, 根据前面引理有:

$$a_i = a_i \wedge x = a_i \wedge (b_1 \vee \cdots \vee b_n) = (a_i \wedge b_1) \vee \cdots \vee (a_i \wedge b_m) = 0 \vee \cdots \vee 0 = 0.$$

矛盾. 故$a_i \in \{b_1, \cdots, b_m\}, \forall 1 \le i \le n$. 则$\{a_1, \cdots, a_n\} \subseteq \{b_1, \cdots, b_m\}$.

同理可证$\{b_1, \cdots, b_m\} \subseteq \{a_1, \cdots, a_n\}$. 故$\{a_1, \cdots, a_n\} = \{b_1, \cdots, b_m\}$. □

定义 4.4.4 (布尔代数同态) 设B_1, B_2是布尔代数, φ为B_1到B_2的映射, 若对任意$a, b \in B_1$, 有

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b), \varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b), \varphi(\overline{a}) = \overline{\varphi(a)},$$

则称φ是B_1到B_2的**同态**. 若φ又是同态又是单射, 则φ是B_1到B_2的**同构映射**. 此时称布尔代数B_1, B_2**同构**, 记为$B_1 \cong B_2$.

定理 4.4.6 (有限布尔代数表示定理) 设B为有限布尔代数, A为B中原子构成的集合, 则布尔代数B同构于幂集代数$\mathcal{P}(A)$.

证明: 对$x \in B$, 让$T(x) = \{B\text{中原子}a(\in A) : a \le x\} \subseteq A$. 则$T(x) \in \mathcal{P}(X)$①.

(1)下证T是同态: $\forall b \in B, x, y \in B$, 有

$b \in T(x \wedge y) \iff b \in A\text{且}b \le x \wedge y \iff b \le x\text{且}b \le y \iff b \in T(x) \wedge b \in T(y) \iff b \in T(x) \cap T(y).$

故由外延性公理, $T(x \wedge y) = T(x) \cap T(y)$. 另外$T(0 \vee x) = T(x) = T(x) \cup T(0), T(0) = \varnothing$. 如果$x, y \in B$非零, 设$T(x) = \{a_1, \cdots, a_n\}, T(y) = \{b_1, \cdots, b_m\}$.

$x \vee y = (a_1 \vee \cdots \vee a_n) \vee (b_1 \vee \cdots \vee b_m),$

$T(x \vee y) = \{a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m\} = \{a_1 \cdots, a_n\} \cup \{b_1, \cdots, b_m\}$(前一引理)$= T(x) \cup T(y).$

对$x \in B$, 有

$$T(x) \cup T(\overline{x}) = T(x \vee \overline{x}) = T(1) = A.(\le 1\text{的原子为}B\text{中所有原子})$$

$$T(x) \cap T(\overline{x}) = T(x \wedge \overline{x}) = T(0) = \varnothing.$$

则$T(x)$为$T(\overline{x})$在A中的补集. 由上, T为B到$\mathcal{P}(A)$的同态.

(2)下证T为双射. 满射: $\{b_1, \cdots, b_m\} \in \mathcal{P}(A)$, 则$\{b_1, \cdots, b_m\} \subseteq A$, $(b_1, \cdots, b_m$为原子). 让$x = b_1 \vee \cdots \vee b_m$, 则$T(x) = \{b_1, \cdots, b_m\}$. 故$T$为满射.

单射: $T(x) = T(y)$即$\{a_1, \cdots, a_n\} = \{b_1, \cdots, b_m\} \Rightarrow x = a_1 \vee \cdots \vee a_n = b_1 \vee \cdots \vee b_m = y$.

根据(1)(2), T为同构, 故$B \cong \mathcal{P}(A)$. □

注: 考试时布尔代数不会做的话就写成幂集代数, 变成并与交的问题, 再推广到一般布尔代数, 把符号换一换即可.

推论 4.4.7 任何有限布尔代数B_1, B_2, 如果B_1, B_2等势, 则B_1, B_2同构.

推论 4.4.8 任何有限布尔代数的基数为$2^n, n \in \mathbb{N}$.

习题 16 (Week 16)

1. **(4.4)**设B是布尔代数, $a, b \in B$, 证明
$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge \overline{b} = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \vee b = 1.$$
2. **(4.4)**设B是布尔代数, $a, b \in B$, 证明: $a \leq b \Leftrightarrow \overline{b} \leq \overline{a}$.
3. **(4.4)**设B是布尔代数, 证明下面的模律成立: 即
$$a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c.$$
4. **(4.4)**任给正整数N, N的全体正因子依整除关系是否构成布尔代数?
5. **(4.4)**(1)是否存在基数为36的布尔代数？(2)任两个有限布尔代数, 如果它们等势, 那么它们是否同构？
6. **(4.4)**设$A = \{1, \cdots, n\}, X = \{x_1, \cdots, x_n\}$是$n$元集. 证明布尔代数$\mathcal{P}(A)$同构于布尔代数$\mathcal{P}(X)$, 这儿$\mathcal{P}(X)$为$X$的幂集.
7. **(4.4)**设B为布尔代数, $u, v, w, x \in B$满足$w \vee x = u$且$w \wedge x = v$. 试用u, v, w以及B的运算来表示x, 并证明表达式的正确性.