# 概率论笔记

Ver 1.3

Fiddie

2023 年 2 月 27 日

# Contents

**注:** 这是2018-2019春季学期大二**数学系《概率论基础》课程**笔记, 上课老师是宋玉林, 笔记包括他上课的内容(并作了重新组织)以及丘赛试题、MSE上的题等等.

本人水平有限, 内容难免有错, 如果遇到有疑问的地方可以加微信Fiddie_Math进行交流, 如果需要下面的参考书, 也可以加微信交流.

参考书:

- 李贤平《概率论基础》(第三版), 复旦. (我们的教材)
- 陈希孺《概率论与数理统计》. (据说不错)
- 盛骤《概率论与数理统计》(第四版), 浙大. (可以简单看看它的习题集)
- 严加安, 《测度论基础》. (学到后面条件期望可以选看, 但下个学期不讲条件期望, 不作要求)
- Dekking. A modern Introduction to Probability and Statistics.
- **(推荐)**Grimmet, Stirzaker,. One Thousand Exercises in Probability. (里面有很多不错的题, 建议挑一些题来做)
- **(推荐)**Ash. Probability & Measure Theory, Second Edition. (这本书也有不错的例子, 也有习题. 太深的内容可以不看)

学习方法:

- 所有定理的思想都要掌握(尤其是Chebyshev不等式、Nice引理、Borel-Cantelli引理等等).
- 重要的定义都要牢记(尤其是概率的公理化定义、分布函数、数学期望的定义).
- 适当做题来练习, 但不需要做太多.

特别鸣谢: 感谢南京大学17级数学系的myh同学以及18级数学系的zst同学指出了许多本笔记出现的笔误!

# 第1章　Kolmogorov概率公理化定义

## §1.1　$\sigma$-代数的定义

设$\Omega$是个抽象集合, $\mathscr{F}$是$\Omega$上一些子集构成的集类(即: 由一些集合构成的集合)

**定义 1.1.1 ($\sigma$-代数)** *如果集类$\mathscr{F}$满足:*

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$,

(2) *(对逆运算封闭) 如果*$A \in \mathscr{F}$, *则*$\overline{A} \in \mathscr{F}$,

(3) *(对可列并运算封闭) 如果*$\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathscr{F}$, *则*$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathscr{F}$,

*则把集类$\mathscr{F}$称为$\Omega$上的**$\sigma$-代数($\sigma$-域)**.*

**注:** 如果$X \in \mathscr{F}$, 则意味着$X$就是个事件. 而$(\Omega, \mathscr{F})$是个样本空间.

**定理 1.1.1** *$\sigma-$代数满足下面的性质.*

- *上面条件(1)可以由$\varnothing \in \mathscr{F}$代替, 这是因为有(2).*
- *上面条件(3)可以由下面的(3')代替:*

  *(对可列交运算封闭) 如果$\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathscr{F}$, 则$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.*

  *这是因为De Morgan律$\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \in \mathscr{F}$, 再利用(2)即可.*
- *对于某个$N$, 让(3)中的$A_n = \varnothing, (n \geq N)$, 即可推出$\sigma$-代数对有限并运算封闭,*
- *对于某个$N$, 让(3')中的$A_n = \Omega, (n \geq N)$, 即可推出$\sigma$-代数对有限交运算封闭.*
- *$\sigma$-代数对减法运算封闭.*

**定理 1.1.2** *如果$\{\mathscr{F}_i\}_{i\in I}$是一族$\sigma-$代数, 则$\bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{F}_i$还是$\sigma-$代数.*

**证明:** 根据定义来验证. (1)$\Omega \in \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{F}_i$, 是显然的.

(2)对取逆运算封闭: 若$A \in \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{F}_i$, 则$A \in \mathscr{F}_i, \forall i \in I$, 则$\overline{A} \in \mathscr{F}_i, \forall i \in I$, 所以$\overline{A} \in \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{F}_i$.

(3)对可列并运算封闭: 若$\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{F}_i$, 则$\{A_n\} \subset \mathscr{F}_i, \forall i \in I$. 注意到$\mathscr{F}_i (i \in I)$是$\sigma-$代数, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}_i, \forall i \in I,$$

所以$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{F}_i$. □

**定义 1.1.2 (生成的最小$\sigma$-代数)** *设$\mathscr{C}$是$\Omega$的一个集类, 称包含$\mathscr{C}$的所有$\sigma-$代数之交为$\mathscr{C}$生成的最小$\sigma-$代数, 记为$\sigma(\mathscr{C})$.*

为了方便, 对于$a,b\in\mathbb{R}^n$, 记$a<b$为$[a_i<b_i,\forall 1\le i\le n]$. 记$[a,b)$为$\{(x_1,\cdots,x_n)|a_i\le x_i<b_i,1\le i\le n\}$.

**定义 1.1.3 (Borel $\sigma$-代数)** *记$\mathscr{C}=\{[a,b)|a,b\in\mathbb{R}^n,a<b\}$. 称$\sigma(\mathscr{C})$是$\mathbb{R}^n$上的Borel $\sigma-$代数. 通常记为$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.*

**注:** 上面的$\mathscr{C}$是个集类, 但不是$\sigma$-代数, 它不含空集和全集.
根据$\sigma-$代数的性质, 可以推出:

**定理 1.1.3** *$\forall x,y\in\mathbb{R}^n$, 都有$\{x\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[x,x+\dfrac{1}{n}\right)\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. 且$[x,y],(x,y],[x,y)\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.*

**注:** $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$就是由$\mathbb{R}^n$的所有子集构成的集类.
下面的定理说明对任何区间$[a,b)$(其中方括号和圆括号可换), 由它生成的最小$\sigma-$代数都是$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

**定理 1.1.4** *令$\mathscr{C}_1=\{A|A$是$\mathbb{R}^n$中开集$\}$, $\mathscr{C}_1=\{A|A$是$\mathbb{R}^n$中闭集$\}$, $\sigma(\mathscr{C}_1)=\sigma(\mathscr{C}_2)=\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.*

## § 1.2 概率的定义

当映射$f:A\to B$中的$A$是个集类(由若干个集合构成的集合), 则说$f$是个集函数.

1933年, Kolmogorov提出了如下的概率论的公理化定义. 教我们概率论基础的宋玉林老师说: 如果这个都不会就很丢脸了.

把$(\Omega,\mathscr{F})$称为**可测空间**, $\mathscr{F}$中元素为**可测集**, 也叫**(随机)事件**.

**定义 1.2.1 (Kolmogorov)** *称$\mathscr{F}$上集函数$P$为概率, 如果$P$满足*

(1) *非负性, 即$\forall A\in\mathscr{F}$, $P(A)\ge 0$.*

(2) *规范性, 即$P(\Omega)=1$.*

(3) *可列可加性($\sigma$可加性), 设$\{A_n\}_{n\ge1}(\subset\mathscr{F})$之间的交集为空集, 则$P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)$.*

**注:** $P$是定义域为集类的函数, 取值是实数. $\mathscr{F}$为定义域. 若定义域为集类的函数可取无穷, 则一般只能从$+\infty$与$-\infty$取一个, 不能都取. 这是因为正无穷大与负无穷大之和没有定义.

**注:** 概率定义在$\sigma-$代数上, 而不是定义在事件空间上.

**性质 1.2.1** *$P(\varnothing)=0$.*

**证明:** 对(3)取$A_1=\Omega,A_2=A_3=\cdots=\varnothing$. 则由$P(\Omega)=1$得$0=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}P(A_n)$. 由非负性得$P(\Omega)=0$. □

**性质 1.2.2 (有限可加性)** *设$\{A_i\}_{i=1,\cdots,n}(\subset\mathscr{F})$之间的交集为空集, 则$P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_n\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_n)$.*

**证明:** 只需取$A_{n+1}=\cdots=\varnothing$即可. □

**性质 1.2.3 (对减法封闭)** *如果$A,B\in\mathscr{F}$且$A\subset B$, 则$P(B\setminus A)=P(B)-P(A)$.*

**证明:** 作**不交并处理**, 即$B=A\cup(B\setminus A)$, 则由有限可加性得$P(B)=P(A)+P(B\setminus A)$. □

**性质 1.2.4 (单调性)** 如果$A, B \in \mathscr{F}$且$A \subset B$, 则$P(A) \le P(B)$.

**证明:** 作**不交并处理**, $B = A \cup (B \setminus A)$, 由有限可加性得$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \ge P(A)$. □

**性质 1.2.5 (从下连续性)** 对$\{A_n\}_{n\ge1} \subset \mathscr{F}$, 若$\{A_n\}$单调递增趋于$A$, 即$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots \subset A$且$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$, 则$P(A_n)$单调递增趋于$P(A)$.

**证明:** 作**不交并处理**, 注意到$A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup \bigcup\limits_{n=2}^{+\infty}(A_n \setminus A_{n-1})$, 而诸$A_n \setminus A_{n-1}$之间两两不交, 所以根据可列可加性得

$$\begin{aligned} P(A) =& P\left(A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{+\infty}(A_n \setminus A_{n-1})\right) \\ =& P(A_1) + \sum_{n=2}^{+\infty} P(A_n \setminus A_{n-1}) \\ =& P(A_1) + \sum_{n=2}^{+\infty}(P(A_n) - P(A_{n-1})) \\ =& \lim_{N\to\infty}\left[P(A_1) + \sum_{n=2}^{N}(P(A_n) - P(A_{n-1}))\right] \\ =& \lim_{N\to\infty} P(A_N). \end{aligned}$$

上面第3个等号$P(A_n \setminus A_{n-1}) = P(A_n) - P(A_{n-1})$是因为有限可加性($A_n - A_{n-1}$与$A_{n-1}$不交). □

**性质 1.2.6 (从上连续性)** 对$\{A_n\}_{n\ge1} \subset \mathscr{F}$, 若$\{A_n\}$单调递减趋于$A$, 即$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots \supset A$且$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$, 则$P(A_n)$单调递减趋于$P(A)$.

**证明:** 注意到$A_n$单调递减趋于$A$, 则$\overline{A_n}$单调递增趋于$\overline{A}$. 根据从下连续性,

$$\lim_{n\to\infty}(1 - P(A_n)) = \lim_{n\to\infty} P(\overline{A_n}) = P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$. □

**性质 1.2.7 (次$\sigma$可加性)** 对$\{A_n\}_{n\ge1} \subset \mathscr{F}$, $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \le \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$.

**证明:** 作**不交并处理**, 令

$$\boxed{\begin{aligned} &B_1 = A_1, \\ &B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \\ &\quad (= A_n \cup \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}) \end{aligned}}$$

则$B_n \subset A_n \in \mathscr{F}$, 且$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$, 且$\{B_n\}$两两不交. 根据单调性, 有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) \le \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

□

**定理 1.2.1** 设$P$是$\mathscr{F}$上满足$P(\Omega)=1$的非负集函数, 则下面命题等价:

*(1)* $P$具有$\sigma-$可加性.

*(2)* $P$具有有限可加性且$P$从下连续.

**证明:** (1) ⇒ (2)已证. 下面看(2) ⇒ (1).

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\lim_{m\to\infty}\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right)\\
&=\lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) && \text{(从下连续性)}\\
&=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} P(A_n) && \text{(有限可加性)}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).
\end{aligned}
$$

□

**定理 1.2.2** 设$A,B\in\mathscr{F}$, 则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

**证明:** 作不交并处理.

$$A\cup B=A\cup(B\setminus A)=A\cup(B\setminus A)=A\cup(B\cap\overline{A})=A\cup(B\setminus AB).$$

. 根据有限可加性和可减性得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B\setminus AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

□

**推论 1.2.3 (Bonferroni不等式)** 设$A,B\in\mathscr{F}$, 则$P(A\cup B)\geq P(A)+P(B)-1$.

**定理 1.2.4** 设$\{A_i\}_{1\leq i\leq n}\subset\mathscr{F}$, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

## §1.3 条件概率、独立性

**定义 1.3.1 (条件概率)** 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间, $B\in\mathscr{F}$, 满足$P(B)>0$. 对$\forall A\in\mathscr{F}$, 称$P(A|B)\triangleq\dfrac{P(AB)}{P(B)}$为事件$A$在$B$发生条件下发生的概率.

**注:** $P(A|B)$与$P(A)$无大小关系.

容易验证$P(\bullet|B)$是$\mathscr{F}\to[0,1]$上的概率测度(用定义, 留作习题).

**注:** 稍微作移项可以得到**乘法公式**: $P(AB) = P(B)P(A|B)$. 若$P(B) = 0$, 可规定$P(AB) = 0$. 可以推广到多元情形:

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\cdots A_n) &= P(A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}) \\ &= P(A_1A_2\cdots A_{n-2})P(A_{n-1}|A_1\cdots A_{n-2})P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}) \\ &= \cdots \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}). \end{aligned}$$

为了把全概率公式和Bayes公式展示出来, 先引入个定义.

**定义 1.3.2 (可数分割)** 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是概率空间, $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathscr{F}$两两不交, 且$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \Omega$, 则把$\{A_n\}_{n\geq 1}$叫$\Omega$的一个可数分割.

**定理 1.3.1 (全概率公式)** 设$\{A_n\}_{n\geq 1}$是$\Omega$的一个可数分割, $B \in \mathscr{F}$. 则$P(B) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)$.

**证明:** 利用概率的可列可加性,

$$P(B) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_nB\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_nB) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n).$$

**注:** 特别地, $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})$. □

**定理 1.3.2 (Bayes公式)** 设$\{A_n\}_{n\geq 1}$是$\Omega$的一个可数分割, $B \in \mathscr{F}$且$P(B) > 0$. 则

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)}.$$

**证明:** 用乘法公式+全概率公式即可. □

**注:** 特别地, 利用

$$P(BA) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

可以推得

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Bayes公式又称“由结果推原因”. 这里把$P(A_i)$叫先验概率(是已知的), $P(A_i|B)$是后验概率.

**定义 1.3.3 (独立性)** 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是概率空间, 若$A, B \in \mathscr{F}$有$P(AB) = P(A)P(B)$, 则称$A$与$B$**独立**.

**定义 1.3.4** $(\Omega, \mathscr{F}, P)$是概率空间, 称集类$\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$独立, 如果$\forall A \in \mathscr{C}_1, B \in \mathscr{C}_2$, $A$与$B$独立.

对于独立性, 有如下性质.

**性质 1.3.1** 设$P(B) > 0$, 则$A, B$独立的充分必要条件是$P(A|B) = P(A)$.

**证明:** 由条件概率的定义立得. □

**性质 1.3.2** 若$A,B$独立, 则$A$与$\overline{B}$, $\overline{A}$与$B$, $\overline{A}$与$\overline{B}$独立.

**证明:** $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)P(\overline{B})$. □

**性质 1.3.3** 零概率事件及其对立事件与任一事件独立.

**证明:** 设$N,A\in\mathscr{F}$, $P(N)=0$. 则$NA\in\mathscr{F}$且$NA\subset N$. 根据概率的单调性, $P(NA)\le P(N)=0$, 从而由非负性, $P(NA)=0=P(N)P(A)$, 从而零概率事件与任一事件独立. 由第2个性质, 对于它的对立事件也正确. □

**定义 1.3.5 ($n$个事件相互独立)** 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间, $\{A_i\}_{1\le i\le n}\subset\mathscr{F}$. 称$\{A_i\}_{1\le i\le n}$**相互独立**, 若

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k}A_{i_j}\right)=\prod_{j=1}^{k}P(A_{i_j}),1\le i\le n.$$

其中$\{A_{i_j}\}_{1\le j\le k}\subset\{A_i\}_{1\le i\le n}$.

**注:** 上面有$2^n-n-1$条式子.

**注:** 设$\{\mathscr{C}_i\}$为一族集类, $\{\mathscr{C}_i\}\subset\mathscr{F},\forall i\in I$. 若对任意$A_i\in\mathscr{C}_i$, $\{A_i\}_{i\in I}$相互独立, 则称$\{\mathscr{C}_i\}$之间相互独立.

**注:** 注意区分相互独立(所有合在一起是独立的)与两两独立(任取两个都独立).

## §1.4 (*)独立类扩张定理简介

**定义 1.4.1 ($\pi$类)** 若集类$\mathscr{C}$关于有限交运算封闭, 即$A,B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{C}$, 则称$\mathscr{C}$是$\pi$类.

**定义 1.4.2 ($\lambda$类)** 若集类$\mathscr{C}$满足下面三个条件:

(1)$\Omega\in\mathscr{C}$;

(2)对减法封闭, 即$A,B\in\mathscr{C},B\subset A\Rightarrow A-B\in\mathscr{C}$.

(3)对单调增运算封闭, 即$\{A_n\}\subset\mathscr{C},A_n\nearrow A\Rightarrow A\in\mathscr{C}$. 则称$\mathscr{C}$是$\lambda$类.

**定理 1.4.1** $\mathscr{F}$是$\sigma-$代数$\Leftrightarrow$ $\mathscr{F}$既为$\pi$类又为$\lambda$类.

**证明:** "$\Rightarrow$", $\mathscr{F}$是$\pi$类显然, 且$\Omega\in\mathscr{F}$显然.

若$A,B\in\mathscr{F}$, 且$B\subset A$, 则$A-B=AB^c\in\mathscr{F}$.($\sigma$-代数对有限交运算封闭)

若$\{A_n\}\in\mathscr{F}$, $A_n\nearrow A$, 则$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n=A\subset\mathscr{F}$. 所以$\mathscr{F}$是$\lambda$类.

"$\Leftarrow$", 只需证$\mathscr{F}$关于可列并运算封闭. 构造一个具有单调性的$\{B_n\}$即可运用$\lambda$类定义中的第3个条件. 令

$$B_1=A_1,B_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i.$$

则$B_n\nearrow A$. 因为$\overline{B_n}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$, 根据$\pi$类有限交运算封闭的条件, $\overline{B_n}\in\mathscr{F}$, 则$B_n\in\mathscr{F}$. 根据$\lambda$类的条件(3), 由$B_n\nearrow A$, 则$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}B_n=A\in\mathscr{F}$ 则$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}B_n=A\in\mathscr{F}$, 证完. □

回顾: 称包含$\mathscr{C}$的所有$\sigma-$代数之交为$\mathscr{C}$生成的最小$\sigma-$代数, 记为$\sigma(\mathscr{C})$.

**定理 1.4.2 (独立类扩张定理)** 设$\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2$为$\pi$类，若$\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2$独立，则$\sigma(\mathscr{C}_1),\sigma(\mathscr{C}_2)$独立.

如果$\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2$都是$\sigma-$代数, 则不需要证了.

**证明:** 只需证$\sigma(\mathscr{C}_1),\mathscr{C}_2$独立, 可立即推出$\sigma(\mathscr{C}_1),\sigma(\mathscr{C}_2)$独立.

令$\mathscr{G}=\{A\in\sigma(\mathscr{C}_1)|P(AB)=P(A)P(B),\forall B\in\mathscr{C}_2\}$. 则$\mathscr{C}_1\subset\mathscr{G}$. ($\mathscr{G}$表示花体的G). 下证$\sigma(\mathscr{C}_1)\subset\mathscr{G}$, 即可完成证明.

先证$\mathscr{G}$是$\lambda$类, 事实上

(1)$\Omega\in\mathscr{G}$(不妨设$\Omega\in\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2$, 全集对独立性没有影响)

(2)若$A_1,A_2\in\mathscr{G},A_2\subset A_1$, 下证$A_1-A_2\in\mathscr{G}$即$P((A_1-A_2)B)=P(A_1-A_2)P(B)$.

$$\begin{aligned}P((A_1-A_2)B)=&P(A_1B)-P(A_2B) && \text{(概率的可减性)}\\ =&P(A_1)P(B)-P(A_2)P(B) && (\mathscr{G}\text{的定义})\\ =&P(A_1-A_2)P(B) && \text{(概率的可减性)}.\end{aligned}$$

所以$A_1-A_2\in\mathscr{G}$.

(3)若$\{A_n\}\in\mathscr{G}$且$A_n\nearrow A$, 下证$A\in\mathscr{G}$.

$$\begin{aligned}P(AB)=&\lim_{n\to\infty}P(A_nB) && \text{(从下连续性)}\\ =&\lim_{n\to\infty}P(A_n)P(B) && (\mathscr{G}\text{的定义})\\ =&P(A)P(B) && \text{(从下连续性)}\end{aligned}$$

所以$\mathscr{G}$是$\lambda$类. <u>由于$\mathscr{C}_1\subset\mathscr{G}$, 则$\lambda(\mathscr{C}_1)=\sigma(\mathscr{C}_1)\subset\mathscr{G}$. 所以$\mathscr{G}=\sigma(\mathscr{C}_1)$, 则$\sigma(\mathscr{C}_1)$和$\mathscr{C}_2$独立.</u> $\square$

**注:** $A\subset B$, 则B为$\lambda$类不可推出A为$\lambda$类. (反例：A只有1个元素)

# 第 2 章 随机变量与分布

## § 2.1 随机变量、分布、分布函数的定义

**定义 2.1.1 (随机变量)** *设$(\Omega, \mathscr{F})$是个样本空间, 把$X: \Omega \to \mathbb{R}$称为$(\Omega, \mathscr{F})$上的随机变量(random variable, 简称r.v.), 如果对于任意集合$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\} \subseteq \mathscr{F}.$$

根据定义, r.v.的定义与概率无关.

**注:** $X^{-1}(B)$表示$B$在$X$上的原像, 而不是取逆(倒数)运算. 回忆Borel代数定义, 这里的$B$是$\mathbb{R}$中的任意一个子集.

**定义 2.1.2 (分布)** *令$X$是r.v., 那么*

$$P \circ X^{-1}(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B) = P(\{\omega | X(\omega) \in B\}),$$

*称$P \circ X^{-1}$是样本空间$(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$上的概率, 称为**$X$在$P$下的分布**.*

**注:** 对于相同的r.v., 不同的P表示不同的分布.

称$\xi, \eta$**同分布**, 指对任意$A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $P(\xi \in A) = P(\eta \in A)$, 即$P \circ \xi^{-1} = P \circ \eta^{-1}$, 两个测度一样.

下面定理将会展示: 分布就是概率!

**定理 2.1.1** *设$X$是r.v., 则$P \circ X^{-1}$是个概率测度.*

**证明:** 按照概率的公理化定义, 对三个条件一一验证即可.

(1)非负性: 由概率的非负性可保证, $P(X^{-1}(B)) \geq 0, \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

(2)规范性: $\Omega = \mathbb{R}$, 注意到$P \circ X^{-1}(\Omega) = P(X \in \Omega) = 1$. ($X \in \mathbb{R}$是必然事件)

(3)可列可加性: $\forall \{B_n\}_{n \geq 1} \subset \mathscr{F}$,其中$B_m \cap B_n = \varnothing, \forall m \neq n$. 要证

$$P \circ X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P \circ X^{-1}(B_n)$$

即证

$$P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right)\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} X^{-1}(B_n)\right).$$

由于$\bigcup_{n=1}^{+\infty} X^{-1}(B_n)$ 相当于把所有满足$\omega \in B_n, n = 1, 2, \cdots$的$\omega$都并起来, 由诸$B_n$不交, 则

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} X^{-1}(B_n) = \left\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \sum_{n=1}^{\infty} B_n\right\} = X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right)$$

等号两边求概率即可证完. □

**例 2.1.1** 设$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$是$(\Omega, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$上的$r.v.$, $\Omega = \mathbb{R}$. 如果对任意的$x \in \Omega$都有$X(x) \equiv C$, 则

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \mathbb{R}, & C \in B, \\ \varnothing, & C \notin B. \end{cases}$$

这部分我一开始被老师绕糊涂了, 下面按照我的理解解释一遍:

如果$C \in B$, 则$B$在$X$中的原像恰好为整个$\Omega = \mathbb{R}$, 也就是说$X(\Omega) \equiv \{C\} \subset B$恒成立.

如果$C \notin B$, 则$\forall x \in \Omega$, $X(x)$都不在$B$内, 即$B$在$X$中的原像为空集, 也就是说$X(\Omega) \equiv \{C\} \cap B = \varnothing$.

**定义 2.1.3 (分布函数)** 设$X$是概率空间$(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), P)$中$r.v.$, 定义$F(x) = P(X \le x), \forall x \in \mathbb{R}$是$X$的分布函数*(distribution function)*.

**注:** $P(X \le x)$表示事件$[X \le x]$发生的概率.

**注:** 如果定义成$P(X < x)$, 对它的性质有影响.

**注:** 易知$F$是$F : \mathbb{R} \to [0, 1]$函数.

**注:** 分布函数与分布的关系: $F(x) = P(X \le x) = P(X \in (-\infty, x]) = P \circ X^{-1}((-\infty, x])$.【重要】

下面介绍分布函数的性质(事实上, 把满足下面三个性质的函数都叫**分布函数**). 设$\xi$是r.v.

**性质 2.1.1** $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

**证明:** 用从上、下连续性.

$$\lim_{n \to -\infty} P \circ \xi^{-1}((-\infty, -n]) = P \circ \xi^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}(-\infty, -n]\right) = 0.$$
$$\lim_{n \to +\infty} P \circ \xi^{-1}((-\infty, m]) = P \circ \xi^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(-\infty, m]\right) = P \circ \xi^{-1}(\mathbb{R}) = 1.\Box$$

**性质 2.1.2 (单调不降性)** $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$, 则$F(x_1) \le F(x_2)$.

**证明:** 用概率的单调性并注意到$(-\infty, x_1] \subset (-\infty, x_2]$即可. □

**性质 2.1.3 (右连续)** 即$F(x + 0) = F(x)$.

**证明:** 只需证$x_n \searrow x$时$F(x_n) \to F(x)$. 用概率的从上连续性,

$$\begin{aligned}\lim_{n \to \infty} F(x_n) = &\lim_{n \to \infty} P \circ \xi^{-1}((-\infty, x_n]) \\ =&P \circ \xi^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}(-\infty, x_n]\right) \\ =&P \circ \xi^{-1}((-\infty, x]) = F(x).\end{aligned}$$

□

**注:** (1)$F(x)$的不连续点个数至多可数.

**注:** (2)$\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}(-\infty, x_n] = (-\infty, x]$用相互包含可证.

**注:** (3)$\{x|F(x) \ne F(x-0)\} = \{x|F(x) - F(x-0) > 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\{x|F(x) - F(x-0) \ge \dfrac{1}{n}\}$, 其中集合$\{x|F(x) - F(x-0) \ge \dfrac{1}{n}\}$的元素只有有限个(不多于$n$个, 考虑到概率的规范性$P(\Omega) = 1$).

# § 2.2 离散型随机变量

## 2.2.1 离散型随机变量的分布列与分布函数的关系

设$X$为离散型r.v., 其可能取值为$\{x_k\}_{k\geq 1}$, 且$P(X=x_k)=p_k, 0\leq p_k\leq 1$, 则分布函数是

$$F(x)=P(X\leq x)=\sum_{x_i\leq x}P(X=x_i)=\sum_{x_i\leq x}p_i.$$

另外,

$$p_k=P(X=x_k)=P(X\leq x_k)-P(X<x_k)=F(x_k)-F(x_k-0),$$

可以观察出$F(x)$是个阶梯函数, 在$x_k$处跳的高度是$p_k$. 它有左极限且右连续.

## 2.2.2 几个重要的离散型随机变量分布

下面记$q=1-p$.

**定义 2.2.1** *若随机试验只有两种可能结果$A$或$\overline{A}$, 则称该试验为**Bernoulli试验**. 将Bernoulli试验**独立**出来进行$n$次, 称为**$n$重Bernoulli试验**, 记为$E^n$.*

$n$重Bernoulli试验的特点: ①每次试验只有两种可能结果: $A$或$\overline{A}$; ②$A$在每次试验中出现的概率$p$不变; ③共进行$n$次相同的试验(相互独立).

**例 2.2.1 (Bernoulli分布, 两点分布, 0-1分布)** *若只进行一次Bernoulli试验, 如果成功记为1, 失败记为0, r.v.$X$满足*

$$P(X=1)=P(A)=p\in(0,1),$$

*则称$X$服从参数$p$的Bernoulli 分布.*

**例 2.2.2 (二项分布)** *$X\sim b(n,p)$. 把$n$重Bernoulli试验中事件$A$出现$k$次的概率记为$b(k;n,p)$, 记$X$为$n$次试验中事件$A$发生的次数, 则*

$$P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k}.$$

**例 2.2.3 (几何分布)** *记$X$为Bernoulli试验中$A$首次发生的时刻, 由$[X=k]=[$前$k-1$次未发生, 第$k$次发生$]$, 则*

$$P(X=k)=q^{k-1}p.$$

**注:** 几何分布具有无记忆性, 已知前$m$次试验中$A$未发生, 记$\xi$为$A$首次发生还需等待的时间. 则

$$P(\xi=k)=P(X=m+k|X>m)=\frac{P(X=m+k)}{P(X>m)}=\cdots=P(X=k).$$

**例 2.2.4 (Pascal分布)** *在Bernoulli试验中, 需进行多少次试验, 事件$A$第$r$次出现. 记$X$为事件$A$第$r$次发生的时刻. 则前$k-1$次试验中事件$A$发生了$r-1$次, 第$k$次试验中事件$A$发生.*

$$P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}p^rq^{k-r}.$$

**例 2.2.5 (多项分布)** 做$n$重独立试验，每次试验有若干结果出现．设$P(A_i)=p_i, 1\le i\le r$且$p_1+p_2+\cdots+p_r=1, p_i\in(0,1)$．记$X_i$为$n$重独立试验中$A_i$发生的次数，则$(X_1,\cdots,X_r)$服从如下多项分布：

$$P(X_1=k_1,X_2=k_2,\cdots,X_r=k_r)=\frac{n!}{k_1!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}, k_i\ge 0, \sum_{k=1}^{r}k_i=n.$$

**例 2.2.6 (Poisson分布)** $X\sim P(\lambda)$．若离散型$r.v.$ $X$满足$P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}, \lambda>0$，则称$X$服从参数为$\lambda$的$Poisson$分布．

**定理 2.2.1 (二项分布逼近Poisson分布)** 在独立试验中，以$p_n$代表事件$A$在试验中发生的概率，它与试验总数$n$有关．若$\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda$，则

$$b(k;n,p)=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}\to\frac{e^{-\lambda}}{k!}\lambda^k.$$

**证明:** 注意到

$$\begin{aligned}
&C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}\\
=&\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{np_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^{n-k}\\
=&\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k k!}(np_n)^k\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^{n-k}\\
\to&\frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}(n\to\infty).
\end{aligned}$$

### 2.2.3 一些例子

**例 2.2.7** 在$N$件产品中有$M$件次品，进行$n$次有放回的抽样调查．问：抽得$k$件次品的概率是多少？

**解:** 设$X$为$n$次抽检中次品件数, 则$P(X=k)=C_n^k\left(\dfrac{M}{N}\right)^k\left(1-\dfrac{M}{N}\right)^{n-k}$.

**例 2.2.8** 一个醉汉开门，共有$n$把钥匙，其中仅有一把能将门打开，他随机选取1把钥匙开门．此人在第$k$次开时首次成功的概率是

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}.$$

**例 2.2.9 (Banach火柴盒)** 一个数学家的左、右口袋各放一盒装有$N$根火柴的盒，每次抽烟时以$\dfrac{3}{5}$的概率拿左盒并用1根．求发现一盒用完时，另一盒有$r$根的概率．

**解:** 先求左边空、右边剩$r$根的概率: 此时左边摸了$N+1$次, 右边摸了$N-r$次, 共$2N-r+1$次. 记$A$: 从左袋取一根火柴, 则所求概率$P_1$为事件$A$第$N+1$次发生的时刻为$2N+1-r$的概率. 则

$$P_1=C_{2N-r}^N\left(\frac{3}{5}\right)^{N+1}\left(\frac{2}{5}\right)^{N-r}.$$

同样有

$$P_2=C_{2N-r}^N\left(\frac{2}{5}\right)^{N+1}\left(\frac{3}{5}\right)^{N-r}.$$

所以发现一盒用完时, 另一盒有$r$根的概率为$P_1+P_2$. □

**例 2.2.10 (直线上的随机游动)** 设$S_n$为$n$时刻所在位置, $S_0=0$, 每次以相等的概率向直线的左或右边移动, $S_n=k$表示在$n$时刻与0时刻相比向右走了$k$个单位. 求$P(S_n=k)$.

**解:** 容易知道向右比向左多走$k$次. 设$x,y$为向右、向左次数, 则$x-y=k$且$x+y=n$, 所以$x=\dfrac{k+n}{2}, y=\dfrac{n-k}{2}$. 当$n,k$奇偶性不同时,

$$P(S_n=k)=0;$$

当$n,k$奇偶性相同时,

$$P(S_n=k)=C_n^{\frac{n+k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

**例 2.2.11 (平面上的随机游动)** 质点在平面上等可能向上、下、左、右移动, 每次移动距离为1, 求经过$2n$次移动回到原点的概率.

**解:** $p_{\text{上}}=p_{\text{下}}=p_{\text{左}}=p_{\text{右}}=\dfrac{1}{4}$. 记$k$为向上运动次数, 则向下运动了$k$次、向左、右都移动了$n-k$次. 则

$$\begin{aligned}P&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\\&=\frac{(2n)!}{4^{2n}}\cdot\frac{1}{(n!)^2}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=\frac{1}{4^{2n}}(C_{2n}^n)^2.\end{aligned}$$

其中用到了$\sum\limits_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^n$, 对$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$两端展开即可.

**定理 2.2.2 (二项分布中最可能成功次数)** 证明当$k=[(n+1)p]$时$b(k;n,p)$取最大值.

**证明:** 只需考察$\dfrac{b(k;n,p)}{b(k-1;n,p)}=1+\dfrac{(n+1)p-k}{kq}$与1的大小关系. 若$(n+1)p$为整数, 则$b((n+1)p;n,p)=b(np;n,p)$为最大值;

否则, 当$k=[(n+1)p]$时, $b(k;n,p)$取最大值. 这是因为

$$(n+1)p-[(n+1)p]>0>(n+1)p-[(n+1)p]-1.$$

取$k\le[(n+1)p]$时, $\dfrac{b(k;n,p)}{b(k-1;n,p)}>1$; 取$k>[(n+1)p]$时, $\dfrac{b(k;n,p)}{b(k-1;n,p)}<1$. □

**例 2.2.12** 设某种疾病的发病率是0.01, 则在500人的社区中进行普查最可能的发病人数是$[(n+1)p]=[5.01]=5$.

**例 2.2.13** 某公司制造某种芯片, 次品率为0.001, 各芯片成为次品相互独立. 求在1000次产品抽检中至少有2个次品的概率.

**解:** $n=1000, p=0.001$, 则$\lambda=np=1$. 则所求概率是

$$P=1-C_{1000}^{1}0.001\times0.999^{999}-C_{1000}^{0}0.999^{1000}\approx1-\frac{1^1}{1!}e^{-1}-\frac{1^0}{0!}e^{-1}=1-\frac{2}{e}.$$

## § 2.3 连续型随机变量

**定义 2.3.1 (概率密度函数)** 对于连续型$r.v.$ $X$的分布函数$F(x)$, 若存在非负可积函数$p(x)$使得

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(y)\mathrm{d}y,$$

则称$p(x)$为$X$的**概率密度函数**(*density function*).

**注:** (1)这里积分是Lebesgue积分, d$y$表示测度. $p(x)$中不大于0的点放在一起构成Lebesgue测度上的零测度集.

**注:** (2)这里$F$连续但不一定可导, 只有当p连续时F才可导.

**注:** (3)一般给的$p$都较好, 可以当作Riemann积分来做.

**定理 2.3.1 (积分的绝对连续性)** 设$f\in L^1(X,\mu)$, 则$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 若$E$可测且$\mu(E)<\delta$, 则$\int_E|f|d\mu<\varepsilon$.

**证明:** 实变讲义. □

**定理 2.3.2** 对于连续型$r.v.$ $X$, 概率密度函数有如下性质.

(1) $p(x)\geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1$;

(3) $\forall a,b\in\mathbb{R},a<b,\int_a^b p(x)dx=F(b)-F(a)$.

(4) $\forall a\in\mathbb{R},P(X=a)=0$.

**证明:** (4)$0\leq P(X=a)\leq P(a-h<x\leq a)=\int_{a-h}^{a}p(x)dx$, 根据**积分的绝对连续性**, 即当$h\to 0$时$[a-h,a]$的测度趋于0, 从而Lebesgue积分趋于0, 对最右边式子取极限得

$$0\leq P(X=a)\leq\lim_{h\to 0}\int_{a-h}^{a}p(x)dx=0. \qquad \square$$

**例 2.3.1** 设随机变量$X$具有概率密度

$$p(x)=\begin{cases}kx, & 0\leq x<3,\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leq x<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)确定常数$k$; (2)求$x$的分布函数; (3)求$P\left(1\leq x\leq\dfrac{7}{2}\right)$.

**解:** (1)利用$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\mathrm{d}x=1$求得$k=\dfrac{1}{6}$. (2)$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(y)\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{12}x^2, & 0\leq x<3,\\ 2x-\dfrac{x^2}{4}-3, & 3\leq x\leq 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$

(3)计算$F\left(\dfrac{7}{2}\right)-F(1)$.

**例 2.3.2** 设连续性随机变量$X$的密度函数

$$p(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},$$

求常数$a\in\mathbb{R}$使得$P(X>a)=P(X<a)$.

**解:** 相当于$P(X>a)=P(X<a)=\frac{1}{2}$. 只需要解方程$\int_{-\infty}^{a}4x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

**注:** 把满足$P(X>a)=P(X<a)$的$a$叫**中位数**.

### 2.3.1 几种重要的连续型分布

传统的几个连续型分布为:

| 名称 | 记号 | 密度函数 |
|---|---|---|
| $[a,b]$上的均匀分布 | $X\sim U[a,b]$ | $p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ |
| 指数分布$(\lambda>0)$ | $X\sim E(\lambda)$ | $p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ |
| $\Gamma$分布$(\lambda>0)$ | $X\sim\Gamma(r,\lambda)$ | $p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ |
| 参数为$\mu,\sigma$的正态分布 | $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ | $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},(\sigma>0,\mu\in\mathbb{R})$ |
| Cauchy分布 | | $p(x)=\frac{\theta}{\pi(x^2+\theta^2)},\theta>0.$ |

**一些补充说明:**

(1)**均匀分布(uniform density)**中的概率仅与区间测度有关, 与区间位置无关. 均匀分布的分布函数是

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leq x\leq b\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

(2)**指数分布(exponential density)**的分布函数是

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

指数分布的一些性质如下:

**定理 2.3.3 (指数分布的无记忆性)** 若$X\sim E(\lambda)$, 则$P(X>t+s|X>s)=P(X>t)$.

**证明:** $P(X>t+s|X>s)=\frac{P(X>t+s)}{P(X>s)}=\frac{1-(1-e^{-(t+s)\lambda})}{1-(1-e^{s\lambda})}=P(X>t)$. □

$\Gamma$分布中, $X\sim\Gamma(r,\lambda)$中的$r$叫**形状系数**, $\lambda$叫**尺度参数**. 回顾

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

满足$\Gamma(n)=(n-1)!$, 则当$r=1$时, $\Gamma$分布变成指数分布.

**定理 2.3.4 (指数分布变成$\Gamma$分布)** *设$\xi_1,\cdots,\xi_n$是独立同分布的随机变量, 且$\xi_i\sim E(\lambda)$, 则*

$$\xi_1+\cdots+\xi_n\sim\Gamma(n,\lambda).$$

**注:** 要注意分布相同不代表随机变量相同, 分布相同指的是$P\circ\xi_i^{-1}$测度相同!

**定理 2.3.5 (指数分布与Poisson分布的关系)** *设脑子在任何长为$t$的时间$[0,t]$内短路的次数$N(t)$服从参数为$\lambda t$的$Poisson$分布, 则相继两次短路之间的时间间隔$T$服从参数为$\lambda$的指数分布.*

**证明:** $P(N(t)=k)=\dfrac{e^{-\lambda t}}{k!}(\lambda t)^k$. 注意到$\boxed{[T>t]=[N(t)=0]}$, 因此

$$P(T>t)=P(N(t)=0)=e^{-\lambda t},\Rightarrow P(T\le t)=1-e^{-\lambda t},\forall t>0.$$

这就是指数分布的分布函数. □

(3)**正态分布(normal density)**又称**Gauss分布**. 当$\mu=0,\sigma=1$即$X\sim N(0,1)$时, 又称**标准正态分布**, 此时

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(4)**关于正态分布的密度函数, 有如下几个性质:**

①$p(x)$关于$x=\mu$对称, 即$P(\mu-h<x\le\mu)=P(\mu\le x<\mu+h)$.

②当$\sigma$小的时候, 波动小, 图像尖; 当$\sigma$大的时候, 波动大, 图像平. 波动越大, $\displaystyle\int_t^{t+\Delta t}p(x)\mathrm{d}x$越大, 数据越分散.

③$p(x)$在$x=\mu$处取最大值.

④$p(x)$在$x=\mu\pm\sigma$处取拐点, 且以$x$轴为渐近线.

**定理 2.3.6 (标准正态分布与一般正态分布的关系)** *有如下结论:*

(1)设$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则$\dfrac{\xi-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

(2)设$\eta\sim N(0,1)$, 则$\sigma\eta+\mu\sim N(\mu,\sigma^2)$.

(3)定义**标准正态分布函数**为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,$$

那么$\Phi(-x)+\Phi(x)=1$.

**注:** 根据这个结论, 若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则

$$P(X\le x)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

可以查正态分布函数表来计算. 此外有

$$P(a\le X\le b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

# § 2.4 多维随机变量

## 2.4.1 随机向量的定义

**定义 2.4.1 (随机向量)** 设$\xi_1,\cdots,\xi_n$是定义在$(\Omega,\mathscr{F})$上的随机变量, 则称$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$为$n$元随机变量（$n$元随机向量）.

**注:** $\xi_i$是定义在同一个可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的随机变量. 若不然, $\xi_i$是不同的可测空间$(\Omega_i,\mathscr{F}_i)$上的随机变量, 那么就需要在$\left(\prod_{i=1}^n\Omega_i,\prod_{i=1}^n\mathscr{F}_i\right)$上考虑随机向量$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$.

**注:** 一个等价定义: 对于$\xi:\Omega\to\mathbb{R}^n$, 若对任意$B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, 都有$[\xi\in B]\in\mathscr{F}$(即任意Borel可测集的原像都在$\mathscr{F}$里), 则称$\xi$为**随机向量**.

**定义 2.4.2 (联合分布函数)** 设$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量. 称

$$F(x_1,\cdots,x_n)=P(\xi_1\le x_1,\cdots,\xi_n\le x_n)$$

为$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$的**联合分布函数**.

**性质 2.4.1** 联合分布函数有如下性质:

(1)单调性: 关于每一个变量单调不减.

(2)连续性: 关于每一个分量连续.

(3)$0\le F\le 1$且让某个分量趋于$-\infty$得到

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},\infty,x_{i+1},\cdots,x_n)=0,$$

所有分量趋于$+\infty$得到

$$F(+\infty,\cdots,+\infty)=1.$$

(4)对任意满足$a_i<b_i(1\le i\le n)$的$a=(a_1,\cdots,a_n),b=(b_1,\cdots,b_n)$,

$$P(\xi\in(a,b])=\Delta^{(1)}_{(b_1,a_1)}\cdots\Delta^{(n)}_{(b_n,a_n)}F.$$

其中, $\xi\in(a,b]$指$\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n:a_i<x_i\le b_i,1\le i\le n\}$, 而

$$\Delta^{(i)}_{(b_i,a_i)}F=F(x_1,\cdots,x_{i-1},b_i,x_{i+1},\cdots,x_n)-F(x_1,\cdots,x_{i-1},a_i,x_{i+1},\cdots,x_n).$$

**注:** 一般来说,

$$P(\xi\in(a,b])\neq\prod_{i=1}^n P(\xi_i\in(a_i,b_i]).$$

特别地当$n=2$时,

$$P((x,y)\in(a_1,b_1]\times(a_2,b_2])=F(b_1,b_2)-F(a_1,b_2)-F(b_1,a_2)+F(a_1,a_2)\ge 0.$$

$n=2$时, 把**联合密度**定义为

$$p(x,y)\triangleq\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y).$$

**定义 2.4.3** 称$(x_1,\cdots,x_n)$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的**连续型随机变量**, 若存在非负可积函数$p:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$, 使得对任意$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 有

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}p(y_1,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n.$$

或记为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(y)\mathrm{d}y.$$

**性质 2.4.2** 联合密度函数的性质:

(1)$p\geq 0, a.s.$

(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}p(x)\mathrm{d}x=1.$

(3)对任意$D\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$有

$$P(x\in D)=\int_D p(x)\mathrm{d}x.$$

**注:** $\{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n:\forall i,A_i\in\mathscr{B}(\mathbb{R})\}$不构成$\sigma$-代数. 即

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)\neq\{A_1\times A_2:A_1,A_2\in\mathscr{B}(\mathbb{R})\}.$$

但是,

$$\sigma(\{A_1\times\cdots\times A_n:\forall i,A_i\in\mathscr{B}(\mathbb{R})\})=\sigma(\{(a,b]:a,b\in\mathbb{R}^n,a<b\}).$$

**例 2.4.1** 设二维随机变量$(X,Y)$有如下的密度:

$$p(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求分布函数$F(x,y)$并求$P(X\leq Y)$.

**解:** 代入公式即可, 得到

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

**例 2.4.2 (均匀分布)** 若$G\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$且$m(G)>0$, 称多元随机变量$X=(X_1,\cdots,X_n)$服从$G$上均匀分布, 若

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m(G)}, & x\in G,\\ 0, & x\notin G.\end{cases}$$

**例 2.4.3 (多元正态分布)** 若$X=(X_1,\cdots,X_n)$的密度函数是

$$p(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n(\det\Sigma)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{\frac{1}{2}(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)^T\right\}.$$

其中$\mu\in\mathbb{R}^n,\Sigma$是$n$阶正定矩阵. 则称$X$服从参数为$\mu,\Sigma$的正态分布, 记为

$$(x_1,\cdots,x_n)\sim N(\mu,\Sigma).$$

### 2.4.2 边际分布

**定义 2.4.4 (边际分布)** 设$(X,Y)$是二维随机变量, 称$P\circ X^{-1}$与$P\circ Y^{-1}$为$(x,y)$的边际分布.

**注:** $P\circ (X,Y)^{-1}$是$\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$上的分布.

我们用$F(x,y)$表示$(X,Y)$的联合分布函数, 那么也有**边际分布函数**:

$$F_X(x)\triangleq \lim_{y\to+\infty}F(x,y)=P(X\le x,Y\le+\infty)=P(X\le x).$$
$$F_Y(y)\triangleq \lim_{x\to+\infty}F(x,y)=P(X\le+\infty,Y\le y)=P(Y\le y).$$

若连续性随机变量$(X,Y)$的密度函数为$p(x,y)$, 则

$$F_X(x)=P(X\le x,Y\le+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u.$$

这样也可以定义**边际密度函数**:

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y,$$
$$p_Y(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x,$$

若$(X,Y)$是离散型随机变量, 其联合分布列定义为$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$, 那么$(X,Y)$的**边际分布列**定义为:

$$p_{i\bullet}\triangleq P(X=x_i)=\sum_j P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_j p_{ij}.$$
$$p_{\bullet j}\triangleq P(Y=y_j)=\sum_i P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_i p_{ij}.$$

**例 2.4.4** 设$(X,Y)$的联合密度为$p(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,|y|<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$, 那么

$$p_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} p_Y(y)=\begin{cases}1-|y|, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

**例 2.4.5** 二维正态分布的边际分布是正态分布.

二维正态分布中$\rho$表示$X,Y$之间的相关性, 这是因为边际分布得到的正态分布没有$\rho$. 若$\rho=0$, 则$X,Y$独立.

**注:** 二维正态分布: 若二维随机变量$(X,Y)\sim N(\mu,\Sigma)$, 其中

$$\mu=(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2,\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix},\sigma_1,\sigma_2>0,\rho\in(-1,1).$$

那么二维正态分布的联合密度函数是

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}.$$

### 2.4.3 条件分布

首先考虑离散型随机变量的条件分布, 下面设$j$满足$p_{\bullet j} > 0$. 考虑在$[Y = y_j]$的条件下$[X = x_i]$发生的概率, 即求

$$P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} = \frac{p_{ij}}{\sum_k p_{kj}}.$$

易知上述条件概率的分布列满足:

- $P(X = x_i|Y = y_j) \geq 0, \forall i.$
- $\sum\limits_i P(X = x_i|Y = y_j) = 1.$

**定义 2.4.5 (条件分布列)** *设$(X, Y)$是离散型随机变量, 对固定的$j$, 若$P(Y = y_j) > 0$, 则称$\left\{\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}\right\}_{i\geq 1}$为$y = y_j$条件下随机变量$X$的条件分布列.*

下面看连续型随机向量的条件分布: 设$(X, Y)$是连续型随机向量, 如何定义在$Y = y$条件下$X$的条件分布$F(x|y)$? 若定义

$$F(x|y) = P(X \leq x|Y = y) = \frac{P(X \leq x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

这是不可以的, 因为$P(Y = y) = 0$. 所以我们换种方式定义如下:

$$\begin{aligned}
F(x|y) &= P(X \leq x|Y = y) \\
&\triangleq \lim_{h\to 0^+} P(X \leq x|y \leq Y \leq y + h) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{P(X \leq x, y \leq Y \leq y + h)}{P(y \leq Y \leq y + h)} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}u \int_{y}^{y+h} p(u, v)\mathrm{d}v}{\int_{y}^{y+h} p_Y(v)\mathrm{d}v} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{x} p(u, y)\mathrm{d}u}{p_Y(y)} \qquad \text{(积分中值定理)} \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{p(u, y)}{p_Y(y)}\mathrm{d}u = \frac{\int_{-\infty}^{x} p(u, y)\mathrm{d}u}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

**定义 2.4.6 (条件分布)** *把条件分布函数与条件密度函数分别定义为:*

$$F(x|y) \triangleq \frac{\int_{-\infty}^{x} p(u, y)\mathrm{d}u}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\mathrm{d}x} = \frac{F(x, y)}{F_Y(y)},$$

$$p(x|y) \triangleq \frac{p(u, y)}{p_Y(y)}.$$

**注:** 根据此定义,

$$F(x|y) = \int_{-\infty}^{x} p(u|y)\mathrm{d}u.$$

此外, 我们有:

$$\boxed{p(x, y) = p(x|y)p_Y(y)}.$$

即边际密度函数×条件密度函数=联合密度函数!

**例 2.4.6** 二维正态分布的条件分布也是正态分布.

**证明:** 容易计算得到

$$p(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[y-\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)\right]^2\right\}.$$

那么$p(y|x)$对应的是$N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$的密度函数. □

**例 2.4.7** 设$(X,Y)$服从$G=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$上的均匀分布, 求$p(x|y)$.

**解:** $p(x,y)=\frac{1}{\pi}I_G$, 那么

$$\begin{aligned}p_Y(y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}I_{[-1,1]},\\ p(x|y)&=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}I_G.\end{aligned}.$$

**例 2.4.8** 设随机变量$X\sim U(0,1)$. 观察到$X=x(0<x<1)$时, 随机变量$Y\sim U(x,1)$, 求$Y$的概率密度$P_Y(y)$.

**解:** 由条件, $P_X(x)=I_{[0,1]}$, 而当$x\in(0,1)$时, $p(y|x)=\frac{1}{1-x}I_{[x,1]}$. 因此

$$p(x,y)=p_X(x)p(y|x)=\frac{1}{1-x}I_{[0<x<y<1]}.$$

所以

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,Y)\mathrm{d}x=-\ln(1-y)I_{[0,1]}.$$

**例 2.4.9 (既非离散又非连续的例子)** 设$\xi\sim U(0,1)$, $\eta=\xi^2$, 则二维随机变量$(\xi,\eta)$没有密度函数.

**证明:** (反证)若$\eta$有密度函数, 记为$p(x,y)$, 则

$$P((\xi,\eta)\in B)=\int_B p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

选$B=\{(x,y):y=x^2,\forall x\in\mathbb{R}\}$, 则$B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, 于是$1=P((\xi,\eta)\in B)$, 但是$m(B)=0$, 故

$$\int_B p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

矛盾. □

**注:** 最后用了测度的绝对连续性, 参考实变函数书.

**连续与离散之间的关系:**

(1)$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}p_Y(y)p(x|y)\mathrm{d}y$, 对应全概率公式$P(A)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(B_i)P(A|B_i)$.

(2)$p(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}=\frac{p(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}p_Y(y)p(x,y)\mathrm{d}y}$. 对应于Bayes公式$P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)}$.

**注:** 求和与积分是同一回事.

## § 2.5 随机变量的独立性

**定义 2.5.1** 设$X_1,\cdots,X_n$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量, 若$\sigma(X_1),\cdots,\sigma(X_n)$相互独立, 则称$X_1,\cdots,X_n$**相互独立**, 即对任意$B_1,\cdots,B_n\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$,都有

$$P(X_1\in B_1,\cdots,X_n\in B_n)=\prod_{i=1}^n P(X_i\in B_i).$$

**注:** $\sigma(X_i)$是$\mathscr{F}$的子$\sigma-$代数.

等价定义: **联合分布等于边际分布的乘积**, 即

$$\begin{array}{ccc} F(x_1,\cdots,x_n) & = & F_{X_1}(x_1)_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n) \\ \| & & \| \\ P(X_1\in(-\infty,x_1),\cdots,X_n\in(-\infty,x_n)) & = & \displaystyle\prod_{i=1}^n P(X_i^{-1}((-\infty,x_i])) \end{array}$$

其中用到了$\mathscr{C}_i\triangleq\{X_i^{-1}((-\infty,x]):x\in\mathbb{R}\}$是一个$\pi$类, 且$\sigma(\mathscr{C}_i)=\sigma(X_i)$, 再用独立类扩张定理.

特别地, 若$(X_1,\cdots,X_n)$有联合密度$p(x_1,\cdots,x_n)$, 则

$$X_1,\cdots,X_n\text{相互独立}\Leftrightarrow p(x_1,\cdots,x_n)=p_{X_1}(x_1)\cdots p_{X_n}(x_n),\forall x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

此时

$$\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}p(y_1,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n=\prod_{i=1}^n\int_{-\infty}^{x_i}p_{X_i}(y_i)\mathrm{d}y_i.$$

**注:** 离散随机变量的独立性的定义是类似的: 对于离散随机变量$X,Y$, 这两个随机变量是独立的等价于$(X,Y)$的联合分布列为边际分布列的乘积.

关于随机变量的独立性, 有如下几个性质:

**性质 2.5.1** 若$\xi,\eta\in\mathbb{R}$是独立的, 那么

$$P(\xi\le x|\eta=y)=P(\xi\le x).$$

特别地, 如果$(\xi,\eta)$为连续型随机变量, 那么

$$p(x|y)=p_X(x).$$

**性质 2.5.2** 若$\xi,\eta$为$\mathbb{R}^n$上独立的随机向量, 那么

$$P(\xi\in A,\eta\in B)=P(\xi\in A)P(\eta\in B),A,B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n).$$

**注:** 分量之间不一定独立, 仅为向量之间的独立.

**性质 2.5.3** 若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立, 则其中任意$r$个仍相互独立.

**证明:** 让其中的$n-r$个$B_i=\mathbb{R}$即可. □

**定义 2.5.2** 称$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是***Borel*可测**的, 若对任意$B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$, 都有$f^{-1}(B)\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

**注:** 连续函数都是Borel可测的.

**性质 2.5.4** 若$\xi,\eta$相互独立, $g,h$都是从$\mathbb{R}^n$映往$\mathbb{R}$的$Borel$可测函数, 那么$h(\xi),g(\eta)$也相互独立.

**证明:** 利用Borel可测的定义即可:

$$\begin{aligned}P(h(\xi)\in B_1,g(\eta)\in B_2)&=P(\xi\in h^{-1}(B_1),\eta\in g^{-1}(B_2))\\&=P(\xi\in h^{-1}(B_1))P(\eta\in g^{-1}(B_2))\qquad(\text{独立性})\\&=P(h(\xi)\in B_1)P(g(\eta)\in B_2).\end{aligned}$$

**例 2.5.1** 设$(\xi,\eta)\sim N(\mu,\Sigma)$. 则$\xi$与$\eta$相互独立等价于相关系数$\rho=0$.

**注:** 正态分布满足$\rho=0$等价于相互独立, 但是其他分布不一定有此性质! 一般来说, 若$(\xi,\eta)$的相关系数为0, 那么$\xi,\eta$未必独立; 但是如果$\xi,\eta$相互独立, 则相关系数为0.

**例 2.5.2** 若$(\xi,\eta)$服从$G=\{(x,y):a\le x\le b,c\le y\le d\}$上的均匀分布, 则$\xi\sim U(a,b),\eta\sim U(c,d)$, 且$\xi,\eta$相互独立.

**证明:** 易知$p(x,y)=\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}I_G(x,y)$, 则

$$\begin{aligned}p_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{b-a}I_{[a,b]}(x),\\p_Y(y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x=\frac{1}{d-c}I_{[c,d]}(y),\end{aligned}$$

故$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$, 从而$\xi,\eta$相互独立. □

**例 2.5.3** 若$(X,Y)$的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y\le 1,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

问$X,Y$是否独立.

**解:** 容易求得

$$\begin{aligned}p_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y=4x(1-x^2)I_{[0,1]}(x),\\p_Y(y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x=4y^3I_{[0,1]}(y),\end{aligned}$$

所以$p_X(x)p_Y(y)\ne p(x,y)$, 故$X,Y$不独立. □

## § 2.6 随机变量的函数及其分布

设$\xi$是随机变量, $g$是$\mathbb{R}$上的函数, 问$g(\xi)$何时是个随机变量.

**定义 2.6.1** 设$(\Omega,\mathscr{F})$和$(E,\mathscr{E})$是两个可测空间, $f:\Omega\to E$是映射. 若对任意$B\in\mathscr{E}$都有$f^{-1}(B)\in\mathscr{F}$, 称$f$为$\mathscr{F}/\mathscr{E}$**可测的**.

特别地, 若$(\Omega,\mathscr{F})=(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$, $(E,\mathscr{E})=(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$, 那么$f$为***Borel*可测函数**.

若$\xi$是随机变量, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是Borel可测函数, 那么$g(\xi)$就是随机变量! 即对任意$B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$, $[g(\xi)\in B]=[\xi\in g^{-1}(B)]\in\mathscr{F}$.

**例 2.6.1** 分段连续函数、分段单调函数（如分布函数）都是*Borel*可测函数.

**命题 2.6.1** 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是个函数, 下面命题等价:

(1)$f$为可测函数.

(2)$\forall a\in\mathbb{R},[f<a]\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. （这里$[f<a]$表示$(-\infty,a)$在$f$上的原像, $f^{-1}(-\infty,a)$. ）

(3)$\forall a\in\mathbb{R},[f\le a]\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

(4)$\forall a\in\mathbb{R},[f\ge a]\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

(5)$\forall a\in\mathbb{R},[f>a]\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

(6)$\forall a,b\in\mathbb{R}$且$a<b$, 都有$[a<f\le b]\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

**注:** 这与Borel $\sigma$-代数的生成很像.

### 2.6.1 离散型随机变量函数的分布

若离散型随机变量$\xi$的分布列为$\{x_i;p_i\}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为Borel可测函数, 那么$g(\xi)$是离散型随机变量, 分布列为$\{g(x_i);p_i\}$. 若$g$不是单射, 可以合并其中的相同项.

**定理 2.6.2 (离散卷积公式)** 若$\xi,\eta$是相互独立的随机变量, **且取非负整数值**, 分布列分别为$\{k;a_k\}$和$\{k;b_k\}$. 则随机变量$\zeta=\xi+\eta$的分布列为$P(\zeta=k)=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}$. 这叫**卷积公式**.

**证明:** 只需注意到$[\zeta=k]=[\xi=0,\eta=k]+[\xi=1,\eta=k-1]+\cdots+[\xi=k,\eta=0]$. □

**例 2.6.2 (Poisson分布可加性)** 设$X\sim P(\lambda_1),Y\sim P(\lambda_2)$, 且$X,Y$相互独立, 证明: $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

**证明:** $P(X=k)=\dfrac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1},P(Y=k)=\dfrac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}$, 由卷积公式,

$$
\begin{aligned}
P(X+Y=k)&=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(X=k-i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}\\
&=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}k!\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}k!}{i!(k-i)!}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}k!(\lambda_1+\lambda_2)^k.(\text{二项式展开})\square
\end{aligned}
$$

**注:** 推广：有限个独立Poisson分布随机变量之和的分布仍为Poisson分布:

$$P(\lambda_1)*\cdots*P(\lambda_n)=P(\lambda_1+\cdots+\lambda_n).$$

### 2.6.2 连续型随机变量函数的分布

已知$\xi$的分布函数$F(x)$或密度函数$p(x)$, 求$\eta=g(\xi)$的分布函数$G(y)$或密度函数$\varphi(y)$. 注意到

$$P(\eta\le y)=P(g(\xi)\le y)=P(\xi\in g^{-1}(-\infty,y])=\int_{g^{-1}(-\infty,y]}p(x)\mathrm{d}x=\int_{\{g(x)\le y\}}p(x)\mathrm{d}x.$$

**命题 2.6.3** *设$\xi$为连续型随机变量, 密度函数为$p(x)$. 若$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$严格单调, 且其反函数$g^{-1}$有连续导数, 则$\eta=g(\xi)$是密度为$p(g^{-1}(y))|g^{-1}(y)'|$连续型$r.v.$.*

**证明:** 对任意$y\in\mathbb{R}$, 不妨设$g$严格单调递增, 则

$$P(\eta\le y)=P(g(\xi)\le y)=\int_{\{g(x)\le y\}}p(x)\mathrm{d}x\overset{t=g(x)}{=\!=\!=}\int_{-\infty}^{y}p(g^{-1}(t))|g^{-1}(t)'|\mathrm{d}t.\qquad\square$$

**例 2.6.3** *若随机变量$\xi$的密度函数为$p(x)$, 令$\eta=a\xi+b, a\ne 0$, 求$\eta$的密度函数$q(y)$.*

**解:** $g^{-1}(y)=\dfrac{y-b}{a}$, 则$q(y)=p\left(\dfrac{y-b}{a}\right)\dfrac{1}{|a|}$. □

**例 2.6.4** *设$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$, 求$\eta=e^{\xi}$的密度函数.*

**解:** $g^{-1}(y)=\ln y(y>0)$, 则$p_\eta(y)=p(\ln y)\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\dfrac{1}{y}, y>0$. 这叫**对数正态分布**. □

**例 2.6.5** *设$\theta\sim U\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\psi=\tan\theta$, 求$\psi$的密度函数.*

**解:** $g^{-1}(x)=\arctan x$, 则$p_\psi(y)=p(\arctan y)\dfrac{1}{1+y^2}=\dfrac{1}{\pi(1+y^2)}, y\in\mathbb{R}$. 称$\psi$符合**Cauchy分布**.

**命题 2.6.4** *设随机变量$\xi$的密度函数为$p(x)$, $g$在互不相交的区间$I_1,\cdots,I_n$上分段严格单调, 且反函数分别为$h_1,\cdots,h_n$, 满足$h_1',\cdots,h_n'$连续, 则$\eta=g(\xi)$的密度函数为$\sum\limits_{i=1}^{n}p(h_i(y))|h_i'(y)|$.*

**证明:** 对任意$y\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}P(\eta\le y)=P(g(\xi)\le y)&=\int_{\{g(x)\le y\}}p(x)\mathrm{d}x=\int_{\sum\limits_{i=1}^{n}[g(x)\le y]\cap I_i}p(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^{n}\int_{[g(x)\le y]\cap I_i}p(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y}p(h_i(y))|h_i'(y)|\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{y}\sum_{i=1}^{n}p(h_i(y))|h_i'(y)|\mathrm{d}y.\qquad\square\end{aligned}$$

**例 2.6.6** *设$\xi\sim N(0,1)$, 求$\eta=\xi^2$的密度函数.*

**解:** 【方法一】直接运用前一命题, 可得: 当$y>0$时, $p_\eta(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$; 当$y\le 0$时, $p_\eta(y)=0$.

【方法二】直接计算也行: 当$y\le 0$时, $P(\xi^2\le y)=0$, 则$p_{\xi^2}(y)=0$. 当$y>0$时, $P(\xi^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le\xi\le\sqrt{y})=F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y})$; 求导得

$$p_{\xi^2}(y)=p(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}+p(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}=\cdots.$$

**注:** 对$\Gamma$分布取$r = \dfrac{n}{2}, \lambda = \dfrac{1}{2}$可以得到$\chi^2$**分布**: $\Gamma\left(\dfrac{n}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0$. 而$\chi^2$分布取$n = 1$可以本例子的分布.

**注:** $n$个i.i.d.标准正态分布的平方和为$\chi^2$分布.

### 2.6.3 随机向量的函数的分布

假定$(\xi_1, \cdots, \xi_n)$的联合密度为$p(x_1, \cdots, x_n)$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$为Borel可测函数, 下面讨论$\eta = g(\xi_1, \cdots, \xi_n)$的分布函数或密度函数.

$$G(y) = P(\eta \leq y) = P(g(\xi_1, \cdots, \xi_n) \leq y) = \int_{[g(x_1, \cdots, x_n) \leq y]} p(x_1, \cdots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

**1. 和的分布**

设$(\xi_1, \xi_2)$的联合密度为$p(x_1, x_2)$, 求$\eta = \xi_1 + \xi_2$的密度.

$$\begin{aligned} G(y) = P(\xi_1 + \xi_2 \leq y) &= \int_{x_1 + x_2 \leq y} p(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_2 \int_{-\infty}^{y - x_2} p(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_2 \int_{-\infty}^{y} p(x_1 - x_2, x_2) \mathrm{d}x_1 \\ &= \int_{-\infty}^{y} \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1 - x_2, x_2) \mathrm{d}x_2. \end{aligned}$$

因此

$$p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(y - x, x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y - x) \mathrm{d}x.$$

当$\xi_1, \xi_2$独立时,

$$p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(y - x) p_2(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x) p_2(y - x) \mathrm{d}x.$$

这就是连续型随机变量的**卷积公式**.

**例 2.6.7 (正态分布可加性)** 设$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且$X, Y$独立, 则

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

**注:** 不可以不独立, 例如$X \sim N(0, 1), Y = -X \sim N(0, 1)$, 但$X + Y$恒为0.

**证明:** 记$A = \dfrac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, B = \dfrac{y - \mu_1}{\sigma_1^2} + \dfrac{\mu_2}{\sigma_2^2}$. 用卷积公式,

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(y - x - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[A\left(x - \frac{B}{A}\right)^2 + A(y - \mu_1 - \mu_2)^2\right]\right\} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{A}{2}(y - \mu_1 - \mu_2)^2\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[A\left(x - \frac{B}{A}\right)^2\right]\right\} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left\{-\frac{A}{2}(y - \mu_1 - \mu_2)^2\right\}. \end{aligned}$$

因此根据独立性即可得$p(x, y) = p_X(x) p_Y(y)$, 从而$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. □

**注:** 可以推广到$n$个的情形!

**例 2.6.8** **($\Gamma$分布的可加性)** 设$X \sim \Gamma(r_1, \lambda), Y \sim \Gamma(r_2, \lambda)$, 且$X, Y$独立. 则

$$X + Y \sim \Gamma(r_1 + r_2, \lambda).$$

**证明:** 设$Z = X + Y$. 当$z \leq 0$时, $p(z) = 0$. 当$z > 0$时, 用卷积公式,

$$\begin{aligned}
p(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(z-x)p_Y(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^z p_X(z-x)p_Y(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda^{r_1+r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^z (z-x)^{r_1-1}x^{r_2-1}e^{-\lambda(z-x)}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda^{r_1+r_2}e^{-\lambda z}z^{r_1+r_2-1}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \underbrace{\int_0^1 (1-t)^{r_1-1}t^{r_2-1}\mathrm{d}t}_{Beta\text{函数}} \\
&= \frac{\lambda^{r_1+r_2}}{\Gamma(r_1+r_2)}e^{-\lambda z}z^{r_1+r_2-1}.
\end{aligned}$$

最后用了Beta函数与$\Gamma$函数关系式:

$$B(r_1, r_2) = \frac{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}{\Gamma(r_1+r_2)}.$$

**注:** (1)$\underbrace{E(\lambda) * E(\lambda) * \cdots * E(\lambda)}_{m\text{个}} = \Gamma(m, \lambda)$.

(2)$m$个独立的$\chi^2$分布之和仍为$\chi^2$分布: 即

$$\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

**2. 商的分布**

若$(\xi_1, \xi_2)$的联合密度为$p(x_1, x_2)$, 令$\eta = \dfrac{\xi_1}{\xi_2}$, 求$\eta$的密度函数. 对任意$y \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}
F_\eta(y) &= P(\eta \leq y) = P\left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \leq y\right) \\
&= \int_{\left\{\frac{x_1}{x_2} \leq y\right\}} p(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x_2 \int_{yx_2}^{+\infty} p(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x_2 \int_{-\infty}^{yx_2} p(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x_2 \int_y^{+\infty} x_2 p(x_2 t, x_2)\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x_2 \int_{-\infty}^y x_2 p(x_2 t, x_2)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{+\infty} |x_2| p(x_2 t, x_2)\mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

则

$$p_\eta(y) = F'_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_2| p(x_2 y, x_2)\mathrm{d}x_2.$$

**3. 顺序统计量的分布**

若$\{\xi_i\}_{i\le n}$是i.i.d., 分布函数$F(x)$, 密度函数$p(x)$. 令

$$\xi_n^* = \max\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}, \xi_1^* = \min\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}.$$

则$\xi_1 \vee \xi_2(\omega) \le \max\{\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)\}$, 它是Borel可测的, 因为

$$[\xi_1 \vee \xi_2 \in B] \in \mathscr{F} \Leftrightarrow [\xi_1 \le x 且 \xi_2 \le x] \in \mathscr{F}, \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}.$$

同理, $\xi_1 \wedge \xi_2(\omega)$也是Borel可测的, 回顾Borel可测的等价命题.

下面考虑$\xi_1^*$和$\xi_2^*$的密度函数.

(1)对任意$y \in \mathbb{R}$, 由独立性,

$$P(\xi_n^* \le y) = P(\xi_1 \le y, \cdots, \xi_n \le y) = P(\xi_1 \le y)P(\xi_2 \le y)\cdots P(\xi_n \le y) = (F(y))^n.$$

从而

$$p_{\xi_n^*}(y) = n(F(y))^{n-1}p(y).$$

(2)对任意$y \in \mathbb{R}$, 由独立性,

$$P(\xi_1^* \le y) = 1 - P(\xi_1^* > y) = 1 - P(\xi_1 > y)P(\xi_2 > y)\cdots P(\xi_n > y) = 1 - (1 - F(y))^n.$$

所以

$$p_{\xi_1^*}(y) = n(1 - F(y))^{n-1}p(y).$$

(3)$(\xi_1^*, \xi_n^*)$的联合分布. 令$G(x, y) = P(\xi_1^* \le x, \xi_n^* \le y)$为联合分布函数.

若$x \ge y$, 则

$$G(x, y) = P(\xi_n^* \le y) = F^n(y).$$

若$x \le y$, 则根据事件的关系式$AB = A - A\overline{B}$可得

$$G(x, y) = P(\xi_n^* \le y) - P(\xi_n^* \le y, \xi_1^* > x) = F^n(y) - (F(y) - F(x))^n.$$

所以

$$p_{(\xi_1^*, \xi_n^*)}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \ge y, \\ n(n-1)[F(y) - F(x)]^{n-2}p(x)p(y), & x < y. \end{cases}$$

(4)$Y = \xi_n^* - \xi_1^*$的联合分布:

$$G(y) = P(\xi_n^* - \xi_1^* \le y) = \int_{\{x_2 - x_1 \le y\}} p_{(\xi_1^*, \xi_n^*)}(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

再利用(3)的结论即可得到.

### 2.6.4 随机向量的变量替换

**命题 2.6.5** 假设$(\xi,\eta)$的联合密度函数为$p(x,y)$, 则

$$\xi\text{与}\eta\text{独立} \Leftrightarrow \text{存在可测函数}h,g:\mathbb{R}\to[0,+\infty), p(x,y)=h(x)g(y).$$

**证明:** "$\Rightarrow$": 记$h(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y, g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x$, 由$\xi,\eta$独立, 故

$$p(x,y)=h(x)g(y).$$

"$\Leftarrow$": 由于

$$p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y=h(x)\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)\mathrm{d}y$$
$$p_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x=g(y)\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)\mathrm{d}x$$

且

$$p_\xi(x)p_\eta(y)=h(x)g(y)\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=h(x)g(y)\cdot 1=p(x,y).$$

结论证完. □

**注:** 注意这里$h,g$并不是密度函数, 它们与密度函数相差了个常数.

下面设$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$的密度函数为$p(x)\triangleq p(x_1,\cdots,x_n)$, 其中$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. 且$g_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是Borel可测函数, $1\le i\le m$. 令$\eta_i\triangleq g_i(\xi_1,\cdots,\xi_n), 1\le i\le m$. 则

$$P(\eta_1\le y_1,\cdots,\eta_n\le y_n)=\int_{\{x:g_i(x)\le y_i,1\le i\le m\}}p(x)\mathrm{d}x.$$

若$g_i^{-1}$存在且有连续偏导数, 且$\boxed{m=n}$, 此时令

$$u_i=g_i(x)=g_i(x_1,\cdots,x_n), 1\le i\le n,$$

那么$x_i=g_i^{-1}(u_1,\cdots,u_n), 1\le i\le n$. 从而

$$P(\eta_1\le y_1,\cdots,\eta_n\le y_n)=\int_{-\infty}^{y_1}\cdots\int_{-\infty}^{y_n}p\left(g_1^{-1}(u_1,\cdots,u_n),\cdots,g_n^{-1}(u_1,\cdots,u_n)\right)|\det J|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n.$$

其中,

$$J=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g_1^{-1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1^{-1}}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial g_n^{-1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_n^{-1}}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

所以

$$p_{(\eta_1,\cdots,\eta_n)}(y_1,\cdots,y_n)=\begin{cases}p(g_1^{-1}(y_1,\cdots,y_n),\cdots,g_n^{-1}(y_1,\cdots,y_n))|\det J|, & y_i\in g_i(\mathbb{R}),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

**例 2.6.9 (2019期末)** 假定随机向量$(\xi_1,\xi_2)$的联合密度函数为$p(x_1,x_2)$, 令

$$\eta_1 = a\xi_1 + b\xi_2, \eta_2 = c\xi_1 + d\xi_2,$$

其中$ad-bc\neq 0$, 求$(\eta_1,\eta_2)$的密度函数$q(y_1,y_2)$.

**解:** 易知$g_1(x_1,x_2)=ax_1+bx_2, g_2(x_1,x_2)=cx_1+dx_2$, 所以

$$\begin{aligned} g_1^{-1}(y_1,y_2) &= \frac{d}{ad-bc}y_1 - \frac{b}{ad-bc}y_2 \\ g_2^{-1}(y_1,y_2) &= -\frac{c}{ad-bc}y_1 + \frac{a}{ad-bc}y_2. \end{aligned}$$

从而

$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}.$$

故

$$q(y_1,y_2) = p\left(\frac{d}{ad-bc}y_1 - \frac{b}{ad-bc}y_2, -\frac{c}{ad-bc}y_1 + \frac{a}{ad-bc}y_2\right)\frac{1}{|ad-bc|}.$$

**例 2.6.10** 若$\xi\sim\chi^2(m), \eta\sim\chi^2(n)$, 且$\xi,\eta$独立. 求$\alpha=\xi+\eta$和$\beta=\frac{\frac{\xi}{m}}{\frac{\eta}{n}}$的密度函数$q(u,v)$.

**解:** 由题设可知

$$p_{(\xi,\eta)}(x,y) = p_\xi(x)p_\eta(y) = \left(2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1} x^{\frac{m}{2}-1}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x+y}{2}} (x,y>0).$$

作$u=x+y, v=\frac{\frac{x}{m}}{\frac{y}{n}}$, 则$x=\frac{muv}{n+mv}, y=\frac{nu}{n+mv}$, 从而

$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = -\frac{m}{n}\frac{u}{1+(\frac{m}{n}v)^2}.$$

故

$$q(u,v) = \underbrace{\left(2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\right)^{-1} u^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}}_{u\text{的函数},\sim\chi^2(m+n)} \cdot \underbrace{\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}v^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}v\right)^{\frac{m+n}{2}}}}_{v\text{的函数}}.$$

**注:** 根据$q(u,v)$表达式的构成, $\alpha,\beta$是独立的.

对$\xi_1,\cdots,\xi_n$, $\eta_i=g_i(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $1\le i\le m$, 当$m<n$时无法定义$g_i^{-1}$. 可以重新定义

$$\bar{\eta}_i = \begin{cases} \eta_i, & 1\le i\le m, \\ f_i(\xi_1,\cdots,\xi_n), & m+1\le i\le n, \end{cases}$$

那么$\{\bar{\eta}_i\}$有$n$个: $g_1,\cdots,g_m,f_{m+1},\cdots,f_n$. 若$\{\bar{\eta}_i\}$都有反函数且它们的导数连续, 可考虑算$(\bar{\eta}_1,\cdots,\bar{\eta}_n)$的联合密度, 自然知道$\bar{\eta}_1,\cdots,\bar{\eta}_n$的密度.

**例 2.6.11** 设$\xi \sim N(0,1), \eta \sim \chi^2(n)$且$\xi$与$\eta$独立. 令$T = \dfrac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{n}}}$, 求$T$的密度函数.

**解:** 令$S = \eta$. 作$t = \dfrac{x}{\sqrt{y/n}}, s = y$, 则$x = t\left(\dfrac{s}{n}\right)^{1/2}, y = s, J = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \left(\dfrac{s}{n}\right)^{1/2}$ 从而

$$p_{(S,T)}(s,t) = p_{\xi,\eta}\left(t\left(\frac{s}{n}\right)^{1/2}, s\right)|J| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2 s}{2n}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}s^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{s}{2}}\left(\frac{s}{n}\right)^{1/2}.$$

则$T$的密度函数为

$$p_T(t) = \int_0^{\infty} p_{(S,T)}(s,t)\mathrm{d}s = \cdots = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

(复习Gamma函数的一些性质!) 称$T$符合**自由度是$t$的分布**. □

下面设$F$是分布函数, 令

$$F^{-1}(y) = \sup\{x | F(x) < y\}, y \in (0,1).$$

**引理 2.6.6** $F^{-1}(y) \le x \Leftrightarrow y \le F(x)$.

**证明:** 这个命题不显然!

"$\Leftarrow$": 由$y > F(x)$与$F$的右连续性可知存在$\delta > 0$, 使得$y > F(x+\delta)$. 由$F^{-1}$定义可知$x + \delta \le F^{-1}(y)$, 因此$x \le F^{-1}(y) - \delta \le F^{-1}(y)$.

"$\Rightarrow$": 由$x < F^{-1}(y)$可知存在$x^* \in \{x|F(x) < y\}$使得$x < x^*$, (若不然, $x = F^{-1}(y)$, 那么$x$就是$\{x|F(x) < y\}$的上确界). 从而$F(x) \le F(x^*) < y$. □

**定理 2.6.7** 设$F(x)$是随机变量$X$的分布函数, $X \sim U(0,1)$, 那么$F^{-1}(X)$的分布函数为$F(x)$.

**证明:** $P(F^{-1}(X) \le y) = P(X \le F(y))$,
若$y < 0$, 则$F(y) = 0$, 此时$P(X \le 0) = F(0) = 0$.
若$y > 1$, 则$F(y) = 1$, 此时$P(X \le 1) = F(1) = 1$.
若$0 \le y \le 1$, 则$F(y) = y$, $P(X \le y) = F(y)$, 则$P(X \le F(y)) = F(y)$. □

**定理 2.6.8** 设随机变量$\xi$具有连续的分布函数$F(x)$, 则$\theta = F(\xi)$服从均匀分布$U[0,1]$.

**证明:** 由于$F(x)$单调不减且连续, 所以

$$P(\theta < y) = P(F(\xi) < y) = P(\xi < F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y.$$

因此$\theta \sim U[0,1]$. □

**注:** $F^{-1}$的分析性质:

- $F(F^{-1}(y)) \ge y$;
- $F^{-1}(F(x)) \le x$;
- 若$F$在$x = F^{-1}(y)$处连续, 则$F(F^{-1}(y)) = y$;
- $F^{-1}$是左连续的.

## § 2.7 习题

1. 已知随机向量$(X,Y)$的联合密度

$$p(x,y)=\begin{cases}6e^{-2x-3y}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases},$$

求$P(X<1,Y>1)$与$P(X>Y)$.

2. **(2019期末)**已知随机向量$(X,Y)$的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求$P(X>2Y)$.

3. 一射手进行射击, 击中目标的概率为$p(0<p<1)$. 射击直至击中目标两次为止. 设$X$表示首次击中目标所进行的射击次数, 以$Y$表示总的进行射击的次数. 试求$X$与$Y$的联合分布列与条件分布列. (提示: $X$服从几何分布)
4. 设随机变量$X,Y$独立, 且$X\sim U(0,1),Y\sim E(1)$, 求$P(Y\le X)$与$P(X+Y\le 1)$.
5. (二项分布的可加性)设$X\sim b(n,p),Y\sim b(m,p)$, 且$X,Y$相互独立. 证明: $X+Y\sim b(n+m,p)$.
6. 若$\xi,\eta$是相互独立的随机变量, $\xi\sim N(0,1),\eta\sim N(0,1)$.
   (1) **(2019期末)**求$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$的密度.
   (2) **(2012期中)**证明: $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$与$\varphi=\arctan\dfrac{\eta}{\xi}$是相互独立的.
7. **(2022某校推免)**设$X,Y$为独立同分布的随机变量, 且$X$服从参数为1的指数分布, 求$\dfrac{X}{X+Y}$的密度函数. (这是李贤平《概率论基础》第四章38题的简化版. )
8. **(2022某校推免)**设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为独立同分布随机变量, 且$X_1$的密度函数为$p(x)$. 证明:
   (1) $P(\max\{X_1,\cdots,X_n\}=X_1)=\dfrac{1}{n}$;
   (2) 随机变量$\max\{X_1,\cdots,X_n\}$与$I_{[X_1=\max\{X_1,\cdots,X_n\}]}$相互独立.
9. **(难)**设$\xi$是随机变量（不知道是离散还是连续）, $\eta\sim N(0,1)$, 且$\xi$与$\eta$独立, 则$\xi+\eta$为连续型随机变量. (即有密度函数).
   **注:** 可以推出$\xi+\dfrac{1}{n}\eta$也有密度, 以后学联合分布积分就可以做.
10. **(2022年丘成桐大学生数学竞赛决赛)** 设$\mathcal{N}=\{1,2,3,4,\cdots\}$表示正整数全体, $\mathcal{P}=\{2,3,5,7,\cdots\}$表示素数全体. 记$a\mid b$表示$a$整除$b$. 固定实数$s>1$, 令$\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-s}$, 定义$\mathcal{N}$上的概率测度为$P_s(\{n\})=\dfrac{1}{\zeta(s)}n^{-s},n\in\mathcal{N}$. 对任意$p\in\mathcal{P}$, 定义$\mathcal{N}$上的随机变量$X_p$为$X_p(n)=\mathbf{1}_{\{p|n\}}(n)$, $n\in\mathcal{N}$, 其中$\{p|n\}$表示事件$\{n:p|n\}\subset\mathcal{N}$.
    (1)集合$\{X_p:p\in\mathcal{P}\}$中的随机变量在$P_s$的意义下是否相互独立？
    (2)用概率方法证明Euler恒等式$\dfrac{1}{\zeta(s)}=\prod\limits_{p\in\mathcal{P}}(1-p^{-s})$.

# 第 3 章　数字特征与特征函数

## § 3.1　数学期望

**定义 3.1.1 (离散型随机变量的数学期望)** 设$\xi$是离散型随机变量, 分布列为$\{x_i : p_i\}_{i\geq 1}$. 若级数$\sum\limits_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$绝对收敛, 则称该级数为$\xi$的**数学期望(均值)**, 记为$\mathbb{E}\xi$.

当$\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i = \infty$时, 称$\xi$的数学期望不存在. 期望由分布决定, 如果两个随机变量的分布一样, 那么数学期望也一样.

**例 3.1.1** 常见离散型随机变量分布的分布列与数学期望, 其中$p+q=1$. （请自行证明, 复习一下级数计算）

| 名称 | 记号 | 分布列 | 数学期望 | 方差 |
|---|---|---|---|---|
| 两点分布 | $\xi \sim b(1,p)$ | | $p$ | $pq$ |
| 二项分布 | $\xi \sim b(n,p)$ | $P(x=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ | $np$ | $npq$ |
| Poisson分布 | $\xi \sim P(\lambda)$ | $P(x=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ | $\lambda$ | $\lambda$ |
| 几何分布 | $\xi \sim g(k,p)$ | $P(x=k) = q^{k-1}p$ | $\dfrac{1}{p}$ | |

**定义 3.1.2 (连续型随机变量的数学期望)** 设$\xi$是密度函数为$p(x)$的随机变量. 若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x) \mathrm{d}x < \infty,$$

称$\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) \mathrm{d}x$为$\xi$的数学期望, 记为$\mathbb{E}\xi$.

**例 3.1.2** 常见连续型随机变量的密度函数与数学期望.

| 名称 | 记号 | 密度函数 | 数学期望 | 方差 |
|---|---|---|---|---|
| 均匀分布 | $X \sim U[a,b]$ | $p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ | $\dfrac{b+a}{2}$ | $\dfrac{(b-a)^2}{12}$ |
| 指数分布 | $X \sim E(\lambda)$ | $p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ | $\dfrac{1}{\lambda}$ | |
| $\Gamma$分布 | $X \sim \Gamma(r,\lambda)$ | $p(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ | | |
| 正态分布 | $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ | $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$ | $\mu$ | $\sigma^2$ |
| Cauchy分布 | | $p(x) = \dfrac{\theta}{\pi(x^2+\theta^2)}, \theta > 0.$ | 不存在 | 不存在 |

**期望的最本质定义**是:

$$\boxed{\mathbb{E}\xi \triangleq \int_\Omega \xi(\omega)P(\mathrm{d}\omega)}$$

这是随机变量关于概率测度的积分.

设$\xi$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量, $F(x)$是$\xi$的分布函数. 下面用$I_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$为示性函数.

**定义 3.1.3 (非负简单函数)** 指形如$\sum\limits_{i=1}^n a_iI_{A_i}$的函数, 其中$A_i$是$Borel$可测集, $a_i\geq 0, 1\leq i\leq n$.

对于Lebesgue可测的非负函数$f(x)$, 可以找一列简单函数$\{f_n\}\nearrow f$. 把$f_n$的测度定义为

$$\lambda(f_n)\triangleq\sum_{i=1}^n a_i\lambda(A_i), \text{其中}\lambda(A)\triangleq\int_{I_A(x)}\mathrm{d}x.$$

如此定义, 在不同$\{f_n\}$的极限都相同, 把这个极限定义为

$$\lambda(f)\triangleq\lim_{n\to\infty}\lambda(f_n).$$

我们把它写成一个定理如下:

**定理 3.1.1 (可测函数构造)** 设$X$是可测空间, $f\geq 0$是$X$上$Lebesgue$可测函数（其中$f$可以取正无穷）, 则存在$X$上的非负简单函数序列$\{f_n\}$满足: $f_n$关于$n$单调上升, 且

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x), \forall x\in X.$$

特别地, 若$f$有界, 则上述收敛是一致的.

**证明:** 构造性证明. 定义

$$f_n=\sum_{i=0}^{n\cdot 2^{n-1}}\frac{i}{2^n}I_{E_{n_i}}+nI_{F_n}.$$

其中,

$$E_{n_i}=f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}\right]\right), F_n=f^{-1}[n,+\infty).$$

它们分别用来处理有界部分与无穷部分. 按照此定义, 显然有$f_n$关于$n$单调上升.

(1)当$f(x)<\infty$时, 对充分大的$n$, $F_n=\varnothing$, 所以

$$f_n(x)\leq f(x)\leq f_n(x)+\frac{1}{2^n}, \Leftrightarrow |f(x)-f_n(x)|\leq\frac{1}{2^n}.$$

从而$f_n(x)\to f(x)$且为一致收敛.

(2)当$f(x)=\infty$时, 对充分大的$n$, $S_n(x)=n\to\infty=f(x)(n\to\infty)$.

综上, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. □

**注:** 一般地, $\lambda(f)=\lambda(f^+)-\lambda(f^-)$. (正负与负部相减). 这里$\lambda(f)$可以为无穷.

下面再回来考虑概率空间与概率测度, 把上面的$f_n$换成$\xi_n$, 把$f$换成$\xi$, 那么

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi &= \sum_{i=0}^{n\cdot 2^{n-1}} \frac{i}{2^n}\mathbb{E}I_{E_{n_i}} + n\mathbb{E}I_{F_n} \\
&= \sum_{i=0}^{n\cdot 2^{n-1}} \frac{i}{2^n}\left[F\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - F\left(\frac{i}{2^n}\right)\right] + n(1-F(n)),
\end{aligned}
$$

(注意均匀分布$\mathbb{E}I_A = P(A)$), 当$n\to\infty$时, 这就是个积分.

**注:** 回忆

$$F(x) = P(\xi \le x) = P\circ\xi^{-1}((-\infty, x]),$$

利用Lebesgue-Stieltjes积分来重写期望就是:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi &\triangleq \int_\Omega \xi(\omega)P(\mathrm{d}\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}F(x) \qquad \text{(Lebesgue-Stieltjes积分)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot P\circ\xi^{-1}(\mathrm{d}x).
\end{aligned}
$$

若$\xi = I_A\cdot A\in\mathscr{F}$, 则

$$\mathbb{E}\xi \triangleq \int_\Omega \xi(\omega)P(\mathrm{d}\omega) = P(A).$$

(1)若$F(x)$是阶梯状函数, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}F(x) = \sum_i x_i(F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_i x_i p_i.$$

其中$x_i$是$f$的跳跃点.

(2)若$F(x)$有导数$p(x)$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x$$

其中$p(x)$是关于Lebesgue测度$F$的导数.

(3)**线性性**: 利用Lebesgue-Stieltjes积分的线性性可得

$$\mathbb{E}(a_1f_1(\xi) + a_2f_2(\xi)) = a_1\mathbb{E}f_1(\xi) + a_2\mathbb{E}f_2(\xi).$$

(4)**积分区间的可加性**:

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x) = \int_a^c g(x)\mathrm{d}F(x) + \int_c^b g(x)\mathrm{d}F(x).$$

(5)若$g(x)\ge 0, F(x)$非减, $b\ge a$, 则$\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x)\ge 0$.

**注:** $\mathrm{d}F(x)$与$F(\mathrm{d}x)$表示的都一样, $F$是测度. 例如$\xi\sim N(0,1)$, 那么方框内的部分看作测度:

$$\mathbb{E}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x}$$

**定理 3.1.2** 设$\xi$是随机变量, $g$是$Borel$可测函数, 令$\eta = g(\xi)$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \mathrm{d}F_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \mathrm{d}F_{\xi}(x).$$

**证明:** 要用到实变函数. 标准方法是对示性函数验证, 然后简单函数逼近. □

**注:** 事实上,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \mathrm{d}F_{\xi}(x) = \mathbb{E}g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \mathrm{d}F_{\xi}(x).$$

下面把数学期望推广到多维:

**定理 3.1.3** 设$(\xi_1, \cdots, \xi_n)$的联合分布函数为$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是$Borel$可测的, 且

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x_1, \cdots, x_n)| \mathrm{d}F(x_1, \cdots, x_n) < \infty,$$

则

$$\boxed{\mathbb{E}g(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \cdots, x_n) \mathrm{d}F(x_1, \cdots, x_n)}.$$

**注:** $\mathbb{E}(\xi_1, \cdots, \xi_n) \triangleq (\mathbb{E}\xi_1, \cdots, \mathbb{E}\xi_n)$. 方框部分的$F$不是函数, 而是由函数定义出来的测度.

基本性质:

(1)边际分布的期望: 让$g(x) = x_1$, 其中$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 那么

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} x_1 \mathrm{d}F(x_1, \cdots, x_n) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{d}F(x_1, \cdots, x_n) \right)}_{\xi_1\text{边际分布}} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}F_{\xi_1}(x).
\end{aligned}$$

(2)若$n = 2, g(x, y) = xy$且$\xi_1, \xi_2$独立, 则$\mathrm{d}F(x, y) = \mathrm{d}F_X(x)\mathrm{d}F_Y(y)$, 从而

$$\mathbb{E}(\xi_1\xi_2) = \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2.$$

(乘积的期望等于期望的乘积)

(3)数学期望有**线性性**: 若$g(x, y) = ax + by$, 则

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(aX + bY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (ax + by) \mathrm{d}F(x, y) \\
&= a \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F(x, y) + b \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y \mathrm{d}F(x, y) \\
&= a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y.
\end{aligned}$$

(4)若一维随机变量$X, Y$满足$X \le Y$, 则$\mathbb{E}X \le \mathbb{E}Y$.

## § 3.2 方差

**定义 3.2.1** 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是概率空间, $\xi$是随机变量. 称$\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^2$是$\xi$的**方差*(variance)***, 记为$\mathbb{D}\xi$或$\mathrm{Var}(\xi)$. 把$\sqrt{\mathbb{D}\xi}$叫$\xi$的**标准差**.

**注:** 标准差的定义是为了保证量纲与$\xi$一致. 方差与标准差都是刻画了随机变量与均值之间的偏离程度.

**注:** 一个重要的公式:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^2 &= \mathbb{E}(\xi^2-2\xi\mathbb{E}\xi+(\mathbb{E}\xi)^2)\\ &= \mathbb{E}(\xi^2)-2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\xi+(\mathbb{E}\xi)^2\\ &= \mathbb{E}(\xi^2)-(\mathbb{E}\xi)^2.\end{aligned}$$

写成积分:

$$\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F(x)\right)^2\mathrm{d}F(x).$$

方差只与$F$有关, 与$\xi$无关. (分布决定方差, 与随机变量无关).

**性质 3.2.1** 若$\xi\equiv C$, 则$\mathbb{D}\xi=0$.

**性质 3.2.2** $\mathbb{D}(\xi+c)=\mathbb{D}(\xi)$, 其中$c$是任意常数.

**注:** 方差与随机变量无关.

**性质 3.2.3** $\mathbb{D}(c\xi)=c^2\mathbb{D}(\xi)$, 其中$c$是任意常数.

**注:** 方差无线性性, 标准差也没有线性性: $\sqrt{\mathbb{D}(c\xi)}=|c|\sqrt{\mathbb{D}\xi}$.

**性质 3.2.4** $\mathbb{D}(\xi)=\inf\limits_{c\in\mathbb{R}}\mathbb{E}(\xi-c)^2$.

**证明:** 【方法一】利用$\mathbb{E}(\xi+c)=\mathbb{E}\xi+c$与$\mathbb{D}(\xi+c)=\mathbb{D}(\xi)$, 可得

$$\mathbb{D}\xi=\mathbb{D}(\xi-c)=\mathbb{E}(\xi-c)^2-(\mathbb{E}(\xi-c))^2\le\mathbb{E}(\xi-c)^2.$$

等号成立条件是$\mathbb{E}\xi=c$.

【方法二】利用

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi-c)^2 &= \mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi+\mathbb{E}\xi-c)^2\\ &= \mathbb{D}\xi+2\mathbb{E}[(\xi-\mathbb{E}\xi)(\mathbb{E}\xi-c)]+(\mathbb{E}\xi-c)^2\\ &= \mathbb{D}\xi+(\mathbb{E}\xi-c)^2.\end{aligned}$$

**性质 3.2.5** 若$\xi,\eta$**独立**, 则$\mathbb{D}(\xi+\eta)=\mathbb{D}\xi+\mathbb{D}\eta$.

**证明:** 用定义验证, 独立性用在了“乘积的期望等于期望的乘积”一处. □

## § 3.3 重要不等式

**定理 3.3.1 (Chebyshev)** 设$\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$, 则$\forall \varepsilon > 0, P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2}$.

**证明:** 注意到$\dfrac{(\xi - \mathbb{E}\xi)^2}{\varepsilon^2} \geq 1$以及$I_A \leq 1$, 则

$$\begin{aligned} P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon) &= \mathbb{E}I_{[|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon]} \quad (\text{看作均匀分布}) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\frac{(\xi - \mathbb{E}\xi)^2}{\varepsilon^2} I_{[|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon]}\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\frac{(\xi - \mathbb{E}\xi)^2}{\varepsilon^2}\right) = \frac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2}. \quad \square \end{aligned}$$

**定理 3.3.2 (推广的Chebyshev不等式)** $\forall \varepsilon > 0, P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^p}{\varepsilon^p}$.

**证明:** 思路是同上的, 只需注意到$\dfrac{(\xi - \mathbb{E}\xi)^p}{\varepsilon^p} \geq 1$即可. □

**注:** 此不等式又叫**Markov不等式**.

**例 3.3.1** 设$\xi$是$r.v.$, 若$\mathbb{D}\xi = 0$, 则$P(\xi = c) = 1$. (即$\xi$几乎处处是同一常数)

**证明:** 主要思路是利用$\{x : x > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x : x \geq \frac{1}{n}\}$. 记$c = \mathbb{E}\xi$, 则

$$\begin{aligned} P(\xi \neq c) &= P(|\xi - c| > 0) \\ &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[|\xi - c| \geq \frac{1}{n}\right]\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|\xi - c| \geq \frac{1}{n}\right) \quad (\text{次}\sigma\text{可加性}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2\mathbb{D}\xi = 0. \quad (\text{前面定理}) \end{aligned}$$

**注:** 可以推广为$P(\xi = c) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{E}|\xi - c|^p = 0, (p > 0)$. □

**定理 3.3.3 (Cauchy-Schwarz不等式)** 设$r.v.\xi, \eta$满足$\mathbb{E}\xi^2 < +\infty, \mathbb{E}\eta^2 < +\infty$. 则

$$\mathbb{E}|\xi\eta| \leq (\mathbb{E}\xi^2)^{1/2}(\mathbb{E}\eta^2)^{1/2}.$$

**证明:** 考虑二次函数$f(t) = \mathbb{E}(t|\xi| + |\eta|)^2 \geq 0$, 则它的判别式$\Delta = (2\mathbb{E}|\xi\eta|)^2 - 4\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2 \leq 0$. □

**定理 3.3.4 (正态分布估计)** 若$X$是标准正态分布$r.v.$, 则$P(|X| \geq t) \leq \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{e^{-t^2/2}}{t}, t > 0$.

**证明:** 利用正态分布的对称性, 只需证其中一边. 利用$X \geq t$, 有

$$P(X \geq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty} e^{-x^2/2}dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty} \frac{x}{t}e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-t^2/2}}{t}.$$

这样, $P(|X| \geq t) = 2P(X \geq t) \leq \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{e^{-t^2/2}}{t}$. □

**定理 3.3.5 (多项式逼近)** 设$f \in C^0[0,1]$, 令

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} f\left(\frac{m}{n}\right),$$

则$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$

**证明:** $\forall x \in [0,1]$, 设$\{x_i\}$为i.i.d.r.v., 满足$P(\xi_1 = 1) = x, P(\xi_1 = 0) = 1 - x$. (两点分布) 则

$$\mathbb{E}f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \sum_{m=0}^{n} P\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i = m\right) f\left(\frac{m}{n}\right) = f_n(x).$$

由于$f$是一致连续的, 则$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, y \in [0,1]$, 如果$|x - y| \leq \delta$, 则有$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. 从而(记$\|f\|_\infty \triangleq \sup f$)

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left|\mathbb{E}f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) - f(x)\right| \\
&\leq \left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) - f(x)\right] I_{\left[\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i - x\right| \geq \delta\right]}\right| \\
&\quad + \left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) - f(x)\right] I_{\left[\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i - x\right| < \delta\right]}\right| \\
&\leq 2\|f\|_\infty \mathbb{E}I_{\left[\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i - x\right| \geq \delta\right]} + \varepsilon \quad \text{(对前一行分别作放缩)} \\
&= 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - x\right| \geq \delta\right) + \varepsilon \\
&\leq 2\|f\|_\infty \frac{1}{n\delta^2} n\mathbb{D}\xi_1 + \varepsilon \quad \text{(用Chebyshev不等式)} \\
&= 2\|f\|_\infty \frac{1}{n\delta^2} x(1-x) + \varepsilon \\
&\leq 2\|f\|_\infty \frac{1}{n\delta^2} \cdot \frac{1}{4} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

这样$\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} + \varepsilon$, 两边取$n \to \infty$以及利用$\varepsilon$的任意性即可证完. □

**定理 3.3.6 (Young不等式)** 设$1 < p < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. 则$ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}, \forall a, b > 0$.

**定理 3.3.7 (Hölder不等式)** 设$1 < p < +\infty$. 且$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. 若$\mathbb{E}|\xi|^p < +\infty$且$\mathbb{E}|\eta|^q < +\infty$, 则

$$\mathbb{E}|\xi\eta| \leq (\mathbb{E}|\xi|^p)^{1/p} (\mathbb{E}|\eta|^q)^{1/q}.$$

**证明:** 不妨设$\mathbb{E}|\xi|^p = \mathbb{E}|\eta|^q = 1$(否则可以乘一个倍数). 由Young不等式,

$$\mathbb{E}|\xi\eta| \leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{p}|\xi|^p + \frac{1}{q}|\eta|^q\right) = \frac{1}{p}\mathbb{E}|\xi|^p + \frac{1}{q}\mathbb{E}|\eta|^q = 1 = (\mathbb{E}|\xi|^p)^{1/p} (\mathbb{E}|\eta|^q)^{1/q}.$$

□

## § 3.4 协方差、相关系数、矩

**定义 3.4.1** 设$(X,Y)$是二维随机变量，若$\mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y))$存在，则称它为$(X,Y)$的**协方差*(covariance)***，记为$\mathrm{cov}(X,Y)$.

若$\mathrm{cov}(X,Y)>0$，称$X,Y$**正相关**.

若$\mathrm{cov}(X,Y)<0$，称$X,Y$**负相关**.

若$\mathrm{cov}(X,Y)=0$，称$X,Y$**不相关**.

**性质 3.4.1** $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}X\mathbb{E}Y$.

**证明:** $\mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y))=\mathbb{E}(XY-X\mathbb{E}Y-Y\mathbb{E}X+\mathbb{E}X\mathbb{E}Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}X\mathbb{E}Y$. □

**注:** 若$X$与$Y$不相关, 则$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, 不代表$X,Y$独立! 独立⇒不相关, 但不相关不能推出独立.

**例 3.4.1** 设$X\sim N(0,1), Y=X^2$，则

$$P(X\in(0,1),Y\in(2,3))=0\neq P(X\in(0,1))P(Y\in(2,3)).$$

故$X,Y$不独立. 但

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\mathbb{E}X^3-\mathbb{E}X\mathbb{E}(X^2)=0.$$

这是因为$X^3$与$X$都是奇函数. 故$X,Y$不相关.

**性质 3.4.2** $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$.

**性质 3.4.3** $\mathbb{D}(X\pm Y)=\mathbb{D}X\pm 2\mathrm{cov}(X,Y)+\mathbb{D}(Y)$.

**性质 3.4.4** $\mathrm{cov}(aX+b,Y)=a\mathrm{cov}(X,Y)$. $\mathrm{cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{cov}(X_1,Y)+\mathrm{cov}(X_2,Y)$.

**注:** 协方差有双线性函数的味道.

**例 3.4.2** 设$(\xi,\eta)$的联合密度为$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0\le y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，求$\mathrm{cov}(\xi,\eta)$.

**解:** 由于

$$\mathbb{E}\xi=\int_0^1\int_0^x x\cdot(3x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{3}{4},$$
$$\mathbb{E}\eta=\int_0^1\int_0^x y\cdot(3x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{8},$$
$$\mathbb{E}(\xi\eta)=\int_0^1\int_0^x xy\cdot(3x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{3}{10},$$

所以$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\dfrac{3}{160}$. 根据计算结果, $\xi,\eta$正相关, 当然不独立. □

**注:** 牢记

$$\mathbb{E}f(x_1,x_2)=\int_{\mathbb{R}^2}f(x_1,x_2)p(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

**定义 3.4.2 (相关系数)** 设$(\xi,\eta)$是二维随机变量, 满足$\mathbb{D}\xi>0,\mathbb{D}\eta>0$, 则称

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}\sqrt{\mathbb{D}\eta}}$$

为$(\xi,\eta)$的**相关系数**.

**注:** 相关系数的引入是为了让协方差与$\xi,\eta$量纲保持一致, 便于比较!

标准化的协方差:

$$\rho(\xi,\eta)=\operatorname{cov}\left(\frac{\xi-\mathbb{E}\xi}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}},\frac{\eta-\mathbb{E}\eta}{\sqrt{\mathbb{D}\eta}}\right).$$

其中, $\dfrac{\xi-\mathbb{E}\xi}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}}$是期望为0, 方差为1的随机变量.

**例 3.4.3** 二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$的相关系数是$\rho$.

**注:** 二维正态分布中, 独立⇔不相关⇔ $\rho=0$.

**性质 3.4.5** 相关系数不超过1.

**证明:** 注意

$$|\operatorname{cov}(\xi,\eta)|=|\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)(\eta-\mathbb{E}\eta)|\le\mathbb{E}|(\xi-\mathbb{E}\xi)(\eta-\mathbb{E}\eta)|\le\sqrt{\mathbb{D}\xi}\sqrt{\mathbb{D}\eta},$$

最后一个不等号用了Cauchy-Schwarz不等式. □

**性质 3.4.6** $\rho(\xi,\eta)=\pm1\Leftrightarrow\exists a\neq0,b\in\mathbb{R},P(a\xi+b=\eta)=1$. (即几乎必然有$a\xi+b=\eta$.) 特别地, 若$\rho=1$则$a>0$; 若$\rho=-1$则$a<0$.

**注:** 如果$\mathbb{E}|\xi|^p=0$, 则$P(\xi=0)=1$, 用Chebyshev不等式可以验证如下:

$$\begin{aligned}P(|\xi|>0)&=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[|\xi|\ge\frac{1}{n}\right]\right)\\&\le\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|\xi|\ge\frac{1}{n}\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}n^p\mathbb{E}|\xi|^p=0.\end{aligned}$$

**例 3.4.4** 随机变量不相关但也可能会有非线性的关系.

**答:** 考虑$\theta\sim(0,2\pi),\xi=\cos\theta,\eta=\cos(\theta+a),a$是常数. 则

$$\mathbb{E}\xi=0,\mathbb{E}\eta=0,\mathbb{E}\xi^2=\frac{1}{2},\mathbb{E}\eta^2=\frac{1}{2},\mathbb{E}\xi\eta=\frac{1}{2}\cos a.$$

所以相关系数为

$$\rho=\frac{\mathbb{E}\xi\eta}{\sqrt{\mathbb{E}\xi^2-(\mathbb{E}\xi)^2}\sqrt{\mathbb{E}\eta^2-(\mathbb{E}\eta)^2}}=\cos a.$$

(1)当$a=\dfrac{\pi}{2}$或$\dfrac{3\pi}{2}$时, $\rho=0$, 此时$\xi$与$\eta$不相关, 但此时$\xi^2+\eta^2=1$, $\xi,\eta$不独立, 且有非线性的关系.

(2)当$a=0$时, $\rho=1,\xi=\eta$; 当$a=\pi$时,$\rho=-1,\xi=-\eta$, 此时有线性关系. □

**例 3.4.5** 袋中有$N$张卡片, 各记以标号$x_1, x_2, \cdots, x_N$, 不放回从中抽$n$张, 求其和的期望与方差.

**解:** 当$n=1$时, $\xi$表示抽中卡片的数字, 则$\xi$的分布列为

$$\left\{x_i : \frac{1}{N}\right\}_{1\le i\le N}.$$

所以

$$\mathbb{E}\xi = \frac{x_1+\cdots+x_N}{N} = \bar{x}, \mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\xi-\bar{x})^2 = \sigma^2.$$

当$n>1$时, 用$\xi_i$表示第$i$次抽中卡片上的数字, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sum_{i=1}^{n}\xi_i &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\xi_i = \sum_{i=1}^{n}\bar{x} = n\bar{x},\\ \mathbb{D}\sum_{i=1}^{n}\xi_i &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2 - \left(\mathbb{E}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}(\xi_i) + \sum_{i\neq j}\mathrm{cov}(\xi_i,\xi_j)\\ &= n\sigma^2 - \frac{n(n-1)}{N-1}\sigma^2 = n\frac{(N-n)}{N-1}\sigma^2.\end{aligned}$$

注意

$$\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2) = -\frac{\sigma^2}{N-1}.$$

当$n=N$时,

$$\mathbb{D}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = 0 = N\sigma^2 + N(N-1)\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2),$$

**定义 3.4.3 (矩)** 对任意非零正整数$k$, 把$\mathbb{E}\xi^k$称为$\xi$的$k$阶**原点矩**, 把$\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^k$称为$\xi$的$k$阶**中心矩**.

**注:** 用二项式展开可以把$k$阶原点矩与中心矩进行相互转换.
如果高阶矩存在, 那么低阶矩也存在, 即$p>q>0$时,

$$\mathbb{E}|\xi|^p < +\infty \Rightarrow \mathbb{E}|\xi|^q < +\infty.$$

**例 3.4.6** 若$\xi \sim N(0,\sigma^2)$, 则

$$\mathbb{E}\xi^k = \begin{cases} 0, & k\text{为奇数},\\ \sigma^k(k-1)!!, & k\text{为偶数}.\end{cases}$$

**证明:** $k$为奇数时显然, 只看$k$为偶数: 事实上

$$\mathbb{E}\xi^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x \overset{\text{换元}}{=\cdots=} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^k 2^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right).$$

**注:** 回顾$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, 而且$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$用余元公式$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$可证明.

## § 3.5 特征函数

**定义 3.5.1 (特征函数)** 设$r.v.\xi$的分布是$F(x)$, 称

$$f(t) \triangleq \mathbb{E}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\mathrm{d}F(x)$$

为$\xi$的**特征函数*(characteristic function)***.

**注:** 特征函数只与分布相关, 因此也称为某个分布函数的特征函数.

**注:** 容易观察有如下性质: $f(0) = 1, |f(t)| \leq 1, f(-t) = \overline{f(t)}$.

**引理 3.5.1 (控制收敛定理)** 设$(\Omega, \mathscr{F})$是可测空间, $\mu$是它上的测度, $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$. 若存在可测函数$f \geq 0$使得$|f_n| \leq f, \forall n \geq 1$（即$f$控制$f_n$）, 同时

$$\int_{\Omega} |f(x)|\mu(\mathrm{d}x) < +\infty, f_n \xrightarrow{a.s.} f,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n(x)\mu(\mathrm{d}x) = \int_{\Omega} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mu(\mathrm{d}x).$$

**定理 3.5.2 (特征函数的一致连续性)** 特征函数$f$有如下的增量不等式:

$$|f(t) - f(t+u)|^2 \leq 2(1 - Re[f(u)]), \forall t, u \in \mathbb{R}$$

由于$Re[f(u)]$是连续的, 从而$f(t)$一致连续.

**证明:** 作如下放缩:

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(t+u)|^2 &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - e^{i(t+u)x})\mathrm{d}F(x)\right|^2 \\
&= \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(1 - e^{iux})\mathrm{d}F(x)\right|^2 \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}|^2 dF(x) \int_{-\infty}^{\infty} |1 - e^{iux}|^2\mathrm{d}F(x) \text{ (Cauchy-Schwarz)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [(1 - \cos ux)^2 + \sin^2 ux]\mathrm{d}F(x) \\
&= 2 - 2\int_{-\infty}^{\infty} \cos ux\mathrm{d}F(x) = 2(1 - Re[f(u)]).
\end{aligned}$$

只需要看$Re[f(u)]$有没有被控制住. 由于

$$\lim_{\delta u\to 0} Re[f(u+\delta u)] - Re[f(u)] = \lim_{\delta u \to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(u+\delta u)x - \cos ux\mathrm{d}F(x),$$

由$|\cos(u + \Delta u)x - \cos ux| \leq 2$以及控制收敛定理可知上述积分与极限可交换顺序, 再由$\cos x$的连续性可知$Re[f(u)]$是连续的, 从而$f(t)$一致连续. □

**定理 3.5.3 (非负定性)** $\forall n \geq 2, t_1 \cdots, t_n \in \mathbb{R}, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_k - t_j)\alpha_k\overline{\alpha_j} \geq 0.$$

**证明:** 利用$\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$即可. □

**定理 3.5.4** 若$\xi, \eta$独立, 则$\mathbb{E}e^{i(\xi+\eta)t} = \mathbb{E}e^{it\xi}\mathbb{E}e^{it\eta}$.

**证明:** 注意到对于所有的$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$的Borel可测函数$g, h$, 都有$g(\xi), h(\eta)$独立. □

**注:** 利用该性质可以推出二项分布、Poisson分布、正态分布、Gamma分布的再生性. 这里从略.

**定理 3.5.5** 若$\exists n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}|\xi|^n < +\infty$, 则$\mathbb{E}e^{it\xi}$关于自变量$t$是$n$阶可导的, 且$\forall k \leq n, f^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}\xi^k$.

**证明:** 利用导数的定义以及控制收敛定理即可. □

**注:** 若$\mathbb{E}X^2 < +\infty, f(x)$是特征函数, 则$\mathbb{E}X = -if'(0), \mathrm{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = -f''(0) + (f'(0))^2$.

**定理 3.5.6** 设$\eta = a\xi + b, a, b \in \mathbb{R}$, 则$f_\eta(t) = e^{ibt}f_\xi(at)$.

**定理 3.5.7 (逆转公式)** 设分布函数$F(x)$的特征函数是$f(t), x_1, x_2$是$F$的连续点, 则

$$F(x_2) - F(x_1) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it}f(t)\mathrm{d}t.$$

进一步, 若$f$在$(-\infty, +\infty)$上是*Lebesgue*可积的, 即$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t < +\infty$, 则函数

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}f(t)\mathrm{d}t$$

是$F$的密度函数.

**证明:** 套定义验证即可, 其中要用到控制收敛定理.

**注:** 定理表明分布函数与特征函数可以相互转化.

## § 3.6 习题

1. **(Mills's ratio)**设$\phi(x)$表示标准正态分布的密度函数, 证明$\phi'(x)+x\phi(x)=0$, 并证明
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}<\frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)}<\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^5}, x>0.$$
这个估计式我们非常感兴趣, 因为$\Phi(x)$没有封闭形式的表达式.
2. 在长为$a$的线段上任取两点$X$和$Y$, 求此两点之间的平均长度. (即求距离的期望值)
3. 设$X_1, X_2$是独立同分布的随机变量, $X_1\sim E(\lambda_1)$. 求$Y=\max\{X_1,X_2\}$的数学期望.
4. **(2019期末)**$X, Y$是独立的随机变量, $\mathbb{E}X=0$, $\mathbb{E}|Y|<+\infty, \mathbb{E}(|X+Y|)<+\infty$. 证明:
$$\mathbb{E}(|Y|)\le\mathbb{E}(|X+Y|).$$
5. **(2022某校推免)**假定随机变量$X$服从参数为1的泊松分布, 现在对其独立观测$n$次, 设$Y_n$为$X$大于1的次数, 求$Y_n^2$的期望.
6. 设随机变量$X, Y$的期望分别为$-2, 2$, 方差分别为$1, 4$, 且$\mathbb{E}(X+2)(Y-2)=-1$. 请用所学知识给出$P(|X+Y|\ge 6)$的一个非平凡上界.
7. 整理并列出常见离散型随机变量与连续型随机变量分布的特征函数.
8. **(2022某校推免)**设$\xi$为取自然数值的随机变量, $\varphi$为其特征函数, 证明:
$$P(\xi=k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}\varphi(t)\mathrm{d}t, \qquad k=0,1,2,\cdots.$$
9. 如果$X$是取非负整数值的r.v., 则
$$\mathbb{E}X=\sum_{n=0}^{\infty}P(X\ge n).$$
10. **(2019期末)**假定$X$是非负r.v., $p\ge 1$为常数, 则
$$\mathbb{E}X^p=p\int_0^{\infty}y^{p-1}P(X>y)dy.$$
11. 设$X\ge 0, Y\ge 0$是随机变量, $p>1$. 证明: $\mathbb{E}((X+Y)^p)\le 2^{p-1}(\mathbb{E}(X^p)+\mathbb{E}(Y^p))$.
参考: https://math.stackexchange.com/questions/1532907/
12. **(123 Theorem)**设$X, Y$是i.i.d.r.v., 证明$P[|X-Y|\le 2]<3P[|X-Y|\le 1]$.
13. **(2016丘赛Team)**在单位圆$x^2+y^2=1$均匀随机取$n$个点$(n\ge 2)$, 这$n$个点可以把单位圆分成$n$段圆弧. 求包含点$(1,0)$的圆弧的长度的数学期望.

# 第 4 章　随机变量的收敛性

## § 4.1　几种收敛性的定义

记$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是概率空间, $\{X_n\}_{n\geq 1}$是r.v.列.

**定义 4.1.1 (几乎必然收敛)** 如果$\exists A \in \mathscr{F}$满足$P(A) = 0$（即$A$是个零测集）, 使得$\forall \omega \in A^c, \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$, 则称$\xi_n$几乎必然收敛到$\xi$, 或者记为$\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi(n \to \infty)$.

**定义 4.1.2 (依概率收敛)** 如果$\forall \varepsilon > 0$都有$\lim\limits_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = 0$, 则称$\xi_n$依概率收敛到$\xi$, 或者记为$\xi_n \xrightarrow{P} \xi(n \to \infty)$.

**定义 4.1.3 (依分布收敛)** $\forall f \in C^0(\mathbb{R}), |f| < +\infty$, 如果有$Ef(\xi_n) \longrightarrow Ef(\xi)$, 则称$\{\xi_n\}$依分布收敛到$\xi$, 记为$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

**注:** 这里的$\{\xi_n\}$可能不是定义在同一个概率空间上, 但是依概率收敛中的r.v.必定定义在同一个概率空间上.

$L^p(\Omega, \mathscr{F}, P) \triangleq \{\xi : \mathscr{F}$可测且$E|\xi|^p < +\infty\}$.

**定义 4.1.4 (概率空间上的范数)** 设$p \in (0, +\infty)$, 令$L^p(\Omega, \mathscr{F}, P) \triangleq \{\xi : E|\xi|^p < +\infty\}$, 这里$\xi$是$r.v.$, 定义$\|\xi\|_p \triangleq (E|\xi|^p)^{1/p}$, 则$\|\cdot\|_p$是$L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的范数.

这里的范数满足一般范数的三条性质(非负性、齐次性、三角不等式), 且$(L^p(\Omega, \mathscr{F}, P), \|\cdot\|_p)$是Banach space.

**定义 4.1.5 (p阶收敛($L^p$收敛))** 设$\{\xi_n; \xi\} \subset L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$, 若$\lim\limits_{n\to\infty} \|\xi_n - \xi\|_p = 0$, 则称$\{\xi_n\}$为$p$阶收敛（或称$L^p$收敛）于$\xi$, 记为$\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$.

**定义 4.1.6 (上极限集与下极限集)** (1)把

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \{\omega : \omega\text{在无穷多个}A_n\text{中}\} = \{\omega : \forall j \in \mathbb{N}, \exists k \geq j (x \in A_k)\}$$

称为$A_n$的上极限集, 记为$\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

(2)把

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \{\omega : \omega\text{不在至多有限个}A_n\text{中}\} = \{\omega : \exists j_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq j_0 (x \in A_k)\}$$

称为$A_n$的下极限集, 记为$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$.

**注:** 显然$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

## § 4.2 几个重要的定理

下面这个定理很Nice, 所以在这里暂时叫做Nice引理.

**引理 4.2.1 (Nice)** 假定$Y$是非负$r.v.$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Y \geq n) \leq EY \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(Y \geq n) + 1.$$

**证明:** 主要思想是根据概率的非负性, 从而对级数进行顺序交换, 以及利用$P(A) = I_A$的思想(均匀分布).

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P(Y \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P(m \leq Y < m+1) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} P(m \leq Y < m+1) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} mP(m \leq Y < m+1) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} mEI_{[m \leq Y < m+1]} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} EYI_{[m \leq Y < m+1]} \ (Y \geq m) \\
&\leq \boxed{\text{EY}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} EYI_{[m \leq Y < m+1]} \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)P(m \leq Y < m+1) \ (Y < m+1) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} mP(m \leq Y < m+1) + \sum_{m=0}^{\infty} P(m \leq Y < m+1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(Y \geq n) + P(Y \geq 0) \ (\text{凑出欲证命题的式子}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(Y \geq n) + 1. \square
\end{aligned}$$

**定理 4.2.2 (Borel-Cantelli)** (1)我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty \Longrightarrow P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

即$A_n$不可能发生无穷多次.

(2)若$\{A_n\}$相互独立, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty \Longrightarrow P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

即$A_n$必然发生无穷多次.

**证明:** (1)只需注意到

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)=\lim_{k\to\infty}P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)\quad(\text{序列}\{\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\}_{k\geq 1}\text{单调递减})$$
$$\leq\lim_{k\to\infty}\sum_{n=k}^{\infty}P(A_n)\qquad(\text{次}\sigma\text{-可加性})$$
$$\leq 0.\qquad(\text{利用条件以及Cauchy准则})$$

(2)欲证命题可以作如下转化:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)=1$$
$$\Longleftrightarrow\lim_{k\to\infty}P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)=1$$
$$\Longleftrightarrow P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)=1,\forall k\geq 1\quad(\text{单调递减趋于1, 只能为1})$$
$$\Longleftrightarrow P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n^c\right)=0,\forall k\geq 1.\quad(\text{de Morgan})$$

事实上,

$$0\leq P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n^c\right)=\lim_{m\to\infty}P\left(\bigcap_{n=k}^{m}A_n^c\right)\quad(\text{从下连续性})$$
$$=\lim_{m\to\infty}\prod_{n=k}^{m}(1-P(A_n))\quad(\text{独立性})$$
$$\leq\lim_{m\to\infty}\prod_{n=k}^{m}(e^{-P(A_n)})\quad(e^{-x}\geq -x+1)$$
$$=\exp\left(-\lim_{m\to\infty}\sum_{n=k}^{m}P(A_n)\right)=0.$$

根据夹逼定理可以证明完毕. □

**注:** 如果把相互独立减弱为两两不相关或者两两负相关, 结论仍成立.

**注:** Borel-Cantelli给出了几乎处处收敛的充分条件(把上述$A_n\triangleq[|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon]$). 另外如果加上相互独立又给出了个几乎处处收敛的必要条件. 常用这个定理来证几乎处处收敛.

下面给出一个换了一种高大上表述的“推论”——Borel 0-1律.

**推论 4.2.3 (Borel 0-1律)** 若$\{A_n\}$相互独立, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty\Longrightarrow P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)=0.$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=+\infty\Longrightarrow P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)=1.$$

**定理 4.2.4 (Lévy)** 设分布函数列$\{F_n\}$弱收敛到分布函数$F$, 则相应的特征函数$\{f_n\}$点点收敛到$f$, 且在$t$的任一有限区间上一致收敛. 反之, 若$\{f_n\}$逐点收敛到一个复值函数$f$, 且$f$在$t=0$处连续, 则$f$为其分布函数$F$的特征函数, 且$F_n\xrightarrow{W}F$.

定理的证明要用到Helly定理, 如果展开来写的话篇幅过长, 在这儿从略.

**注:** 定理揭示了分布函数列弱收敛与对应特征函数逐点收敛的关系.

## § 4.3 几种收敛性的关系

**注:** 利用极限的唯一性可以证明依概率收敛与a.s.收敛的极限几乎必然唯一.

下面两个定理很重要, 它刻画了几乎必然收敛与依概率收敛.

**定理 4.3.1 (几乎必然收敛的刻画)**

$$\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi \iff \forall \varepsilon > 0, P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}[|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon]\right) = 0.$$

**证明:** 只需利用$\{x : x < \varepsilon\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x : x \geq \frac{1}{n}\}$, 并注意到

$$\begin{aligned}
\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi &\iff P\left(\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi\right) = 1 \\
&\iff P(\{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\}) = 1 \\
&\iff P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}\left[|\xi_i - \xi| < \frac{1}{k}\right]\right) = 1 \\
&\iff P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\left[|\xi_i - \xi| \geq \frac{1}{k}\right]\right) = 0 \\
&\iff P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\left[|\xi_i - \xi| \geq \frac{1}{k}\right]\right) = 0, \forall k \geq 1 (\text{次}\sigma\text{可加性与单调性}) \\
&\iff P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}[|\xi_i - \xi| \geq \varepsilon]\right) = 0, \forall \varepsilon > 0. \square
\end{aligned}$$

**定理 4.3.2 (依概率收敛的刻画)**

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi \iff \text{对}\{\xi_n\}\text{的任一子列}\{\xi'_n\}\text{, 都存在它的子列}\{\xi'_{n_k}\}_{k\geq 1}\text{, 使得}\xi'_{n_k} \xrightarrow{a.s.} \xi.$$

**证明:** "$\Rightarrow$": 假定$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, 根据定义, 对它的任一子列$\{\xi'_n\}$都有$\xi'_n \xrightarrow{P} \xi$, 从而$\forall k \geq 1, \exists\{\xi_{n'_k}\} \subset \{\xi'_n\}$, 使得

$$\begin{aligned}
&P\left(|\xi'_{n_k} - \xi| \geq \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{2^k} \\
\Rightarrow &P\left(\bigcup_{k=m}^{\infty}\left[|\xi'_{n_k} - \xi| \geq \frac{1}{k}\right]\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}}.
\end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$, 取$m$充分大, 使得$\varepsilon > \frac{1}{k}, k = m, m+1, \cdots$, 则对于$j \geq \max\left\{m, \left\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor + 1\right\}$, 有

$$\begin{aligned}
&P\left(\bigcup_{k=m}^{\infty}\left[|\xi'_{n_k} - \xi| > \varepsilon\right]\right) \leq \frac{1}{2^{j-1}} \\
\Longrightarrow &\lim_{j\to\infty} P\left(\bigcup_{k=j}^{\infty}\left[|\xi'_{n_k} - \xi| \geq \varepsilon\right]\right) = 0 \\
\iff &P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\left[|\xi'_{n_k} - \xi| \geq \varepsilon\right]\right) = 0.
\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" (反证)假设$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$不成立, 即$\exists\varepsilon_0 > 0, \delta > 0$以及$\{\xi_{n_m}\} \subset \{\xi_n\}$, 使得

$$P(|\xi_{n_m} - \xi| \geq \varepsilon_0) > \delta > 0, \forall n \geq 1.$$

(即这个子列不是依概率收敛). 对此子列而言,

$$\begin{aligned} & P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=k}^{\infty}[|\xi_{n_m} - \xi| \geq \varepsilon_0]\right) \\ = & \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{m=k}^{\infty}[|\xi_{n_m} - \xi| \geq \varepsilon_0]\right) \\ \geq & \limsup_{m\to\infty} P(|\xi_{n_m} - \xi| \geq \varepsilon_0) > \delta > 0, \end{aligned}$$

与$\xi'_{n_k} \xrightarrow{a.s.} \xi$矛盾. □

**注:** 以后将会频繁利用上面两个定理, 尤其是几乎必然收敛的刻画. 利用这个刻画再结合概率测度的从上(下?)连续性可以进行放缩.

**例 4.3.1** 设$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$连续, 则$f(\xi_n) \xrightarrow{P} f(\xi)$.

**证明:** $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, 则$\forall\{\xi'_n\} \subset \{\xi_n\}, \exists\{\xi'_{n_k}\} \subset \{\xi'_n\}$, 使得$\xi'_{n_k} \xrightarrow{a.s.} \xi$. 由于$f \in C(\mathbb{R})$, 故$f(\xi'_{n_k}) \xrightarrow{a.s.} f(\xi)$ (复合函数连续性, 可参考数学分析书), 即得$f(\xi_n) \xrightarrow{P} f(\xi)$. □

**注:** a.s.收敛可推出依概率收敛, 反之不成立. 见下面定理与例子:

**定理 4.3.3** 如果$\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi(n \to \infty)$, 则$\xi_n \xrightarrow{P} \xi(n \to \infty)$.

**证明:** 利用几乎必然收敛的刻画, 即

$$\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}[|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon]\right) = 0.$$

由于$\forall\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}[|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon]\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}[|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon]\right) = 0,$$

所以$\xi_n \xrightarrow{P} \xi(n \to \infty)$. □

**例 4.3.2** 令$\Omega = (0, 1], \mathscr{F} = (0, 1] \cap \mathscr{B}(\mathbb{R})$是个$Borel$-$\sigma$代数. 把$P$取为$\mathscr{B}(\mathbb{R})$上的$Lebesgue$测度. 令

$$\eta_{ki}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \left(\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right] \\ 0, & \omega \notin \left(\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right] \end{cases}$$

这里$k = 1, 2, \cdots; i = 1, 2, \cdots, k$, 先取定$k$再取定$i$. 定义$\xi_n \triangleq \eta_{ki}, n = i + \dfrac{k(k-1)}{2}$, 该定义合理（没重复的$n$对应不同的$k$,$i$）.

注意到$\forall\omega \in \Omega$, 必有无穷个n使得$\xi_n(\omega) = 0$, 也有无穷多个m使得$\xi_m(\omega) = 1$, 所以不可能几乎必然收敛为0, 即

$$\xi_n \stackrel{a.s.}{\nrightarrow} 0(n \to \infty).$$

另一方面,

$$\forall\varepsilon \in (0, 1), P(\xi_n(\omega) > \varepsilon) = P(\eta_{ki}(\omega) > \varepsilon) = P\left(\frac{i-1}{k} < \omega \leq \frac{i}{k}\right) = \frac{1}{k},$$

让$n \to \infty$, 则根据$n = i + \dfrac{k(k-1)}{2} \leq \dfrac{k(k+1)}{2}$可知$k \to \infty$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} P(\xi_n > \varepsilon) = 0$. 从而

$$\xi_n \xrightarrow{P} 0(n \to \infty).$$

**定理 4.3.4** *r.v.列$\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$, 等价于"$\xi_n$依概率收敛到$\xi$, 且$E|\xi_n|^p \to E|\xi|^p$."*

**证明:** "$\Rightarrow$": 利用Chebyshev不等式, $\forall \varepsilon > 0$,

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} E|\xi_n - \xi|^p = \frac{1}{\varepsilon^p} \|\xi_n - \xi\|_p^p \to 0(n \to \infty).$$

所以$\xi_n$依概率收敛到$\xi$. 而根据范数的三角不等式有

$$|\|\xi_n\|_p - \|\xi\|_p| \leq \|\xi_n - \xi\|_p \to 0(n \to \infty),$$

则$E|\xi_n|^p \to E|\xi|^p$.

"$\Leftarrow$":（本科范围内不作要求.）需要先证明下面的定理:

**定理 4.3.5 (推广的控制收敛定理)** *设$\{f_n\}$是$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$上的可测实值函数, 且$f_n \xrightarrow{a.s.} f$或$f_n \xrightarrow{\mu} f$. 又设$g_n$是非负实值函数, 满足$g_n \xrightarrow{a.s.} g$或$g_n \xrightarrow{\mu} g$. 若$g$以及每个$g_n$都可积, $\mu(g_n) \to \mu(g)$, 且$|f_n| \leq g_n, a.e., \forall n \geq 1$, 则$\lim\limits_{n \to \infty} \mu(|f_n - f|) = 0$. 特别地, $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(f_n) = \mu(f)$.*

其中$\mu(f) = \int_\Omega f \mathrm{d}\mu$. 用概率测度的语言来写就是: (注意a.s.收敛可以推出依概率收敛)

设$\{X_n\}$是$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的r.v.列, 且$X_n \xrightarrow{P} X$. 又设$\{Y_n\}$是非负r.v.列, 满足$Y_n \xrightarrow{P} Y$. 若$\lim\limits_{n \to \infty} EY_n = EY$, 且$|X_n| \leq Y_n, a.e., \forall n \geq 1$, 则$\lim\limits_{n \to \infty} E|X_n - X| = 0$.

由于

$$|\xi_n - \xi|^p \leq 2^{p-1}(|\xi_n|^p + |\xi|^p),$$

对$X_n = (\xi_n - \xi)^p, Y_n = 2^{p-1}(|\xi_n|^p + |\xi|^p)$使用前面的定理即可:

由条件, $X_n \xrightarrow{P} 0$, $\{Y_n\}$是非负r.v.列, $Y_n \xrightarrow{P} 2^p|\xi|^p \triangleq Y$, 且

$$EY_n = 2^{p-1}(E|\xi_n|^p + E|\xi|^p) \to 2^p E|\xi|^p = EY,$$

由推广的控制收敛定理, 则$E|X_n| \to 0$, 即$\|\xi_n - \xi\|_p \to 0$. □

**注:** "推广的控制收敛定理"证明过程参考严加安的《测度论讲义》.

**定理 4.3.6 (控制收敛定理)** *$\{\xi_n, \xi\}$是r.v., $\eta$为r.v., 满足:*

①$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$或$\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi$,

②$|\xi_n| \leq \eta, \forall n \geq 1$, *a.s.*,

③$\eta$可积$(E|\eta| < +\infty)$.

则$\lim\limits_{n \to \infty} E\xi_n = E\xi$.

**定理 4.3.7** *$X_n \xrightarrow{P} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{d} X$.*

利用控制收敛定理立即得证. 反之不成立, 见下面例子.

**例 4.3.3 (反例)** 设$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}, P(\omega_1)=P(\omega_2)=\dfrac{1}{2}$. 令

$$\xi(\omega)=\begin{cases}1, & \omega=\omega_1,\\ -1, & \omega=\omega_2.\end{cases},$$

此时$\{\xi_n\}_{n\geq 1}$同分布, 但是$P(|\xi_n-\xi|=2)=1$, 不依概率收敛.

**定理 4.3.8** 如果$\{\xi_n\}$是单调下降$r.v.$正序列, 且$\xi_n\xrightarrow{P}\xi(n\to\infty)$, 则$\xi_n\xrightarrow{a.s.}\xi(n\to\infty)$.

**证明:** 此时在前面定理中,

$$\lim_{n\to\infty}P(|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon)=\lim_{k\to\infty}P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}[|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon]\right),$$

(即第2条式子的第一个不等号可以变为等号). □

**定理 4.3.9** 如果$\xi_n\xrightarrow{P}\xi(n\to\infty)$, 则$\xi_n\xrightarrow{L}\xi(n\to\infty)$.

**证明:** $\forall f\in C(\mathbb{R}),|f|<\infty$, 有

$$\xi_n\xrightarrow{P}\xi\Rightarrow f(\xi_n)\xrightarrow{P}f(\xi).$$

根据控制收敛定理, 可得

$$Ef(\xi_n)\xrightarrow{P}Ef(\xi).$$

根据Levy定理, 可得$\xi_n\xrightarrow{L}\xi(n\to\infty)$. □

**注:** Levy定理可以用来处理依分布收敛.

**定理 4.3.10** $\xi_n\xrightarrow{P}C(n\to\infty)$ 的充分必要条件是$\xi_n\xrightarrow{L}C(n\to\infty)$.

**证明:** "$\Rightarrow$": 前面定理已证.

"$\Leftarrow$": $\forall\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned}&P(|\xi_n-c|\geq\varepsilon)\leq P(\xi_n\geq C+\varepsilon)+P(\xi_n\leq C-\varepsilon)\\=&1-P(\xi_n<C+\varepsilon)+P(\xi_n\leq C-\varepsilon)\\\leq&1-P(\xi_n\leq C+\varepsilon/2)+P(\xi_n\leq C-\varepsilon)\\=&1-F_n(C+\varepsilon/2)+F_n(C-\varepsilon)\\\to&1-F(C+\varepsilon/2)+F(C-\varepsilon)=1-1+0=0(n\to\infty).\end{aligned}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}P(|\xi_n-c|\geq\varepsilon)=0$. □

**例 4.3.4** 设$\Omega=[0,1],(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间, $\Omega(\omega)\equiv 0$, 且

$$\xi_n(\omega)=\begin{cases}n^{1/r}, & 0<\omega\leq\dfrac{1}{n}\\ 0, & \dfrac{1}{n}<\omega<1\end{cases},$$

则$\forall\omega\in\Omega,\xi_n(\omega)\to\xi(\omega)$, 即$\xi_n\xrightarrow{a.s}\xi$. 又$\forall\varepsilon>0$,

$$P(|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\geq\varepsilon)\leq\frac{1}{n},$$

因此$\xi_n\xrightarrow{P}\xi$, 然而$E|\xi_n-\xi|^p=(n^{1/r})^r\cdot\frac{1}{n}=1$, 故不是$p$阶收敛.

**定理 4.3.11** $\xi_n\xrightarrow{L^{p+1}}\xi\Rightarrow\xi_n\xrightarrow{L^p}\xi$.

**证明:** 记$a_k=E|\xi|^k$, 下面我们证$\sqrt[k]{a_k}\leq\sqrt[k+1]{a_{k+1}}$. 利用Cauchy-Schwarz不等式有

$$\left|E|\xi|^{\frac{k-1}{2}}|\xi|^{\frac{k+1}{2}}\right|^2\leq E|\xi|^{k-1}E|\xi|^{k+1},$$

即$a_k^2\leq a_{k-1}a_{k+1}$. 于是$a_k^{2k}\leq a_{k-1}^k a_{k+1}^k$. 由于$a_0=1$, 取$k=1,2,\cdots,n$有

$$a_1^2\leq a_2^1\qquad a_2^4\leq a_1^2a_3^2\qquad a_3^6\leq a_2^3a_4^3\qquad\cdots\cdots\qquad a_n^{2n}\leq a_{n-1}^n,a_{n+1}^n$$

把上面n个不等式相乘, 可得

$$a_1^2a_2^4a_3^6\cdots a_{n-1}^{2n-2}a_n^{2n}\leq a_1^2a_2^4a_3^6\cdots a_{n-1}^{2n-2}a_n^{n-1}a_{n+1}^n,$$

即$a_n^{2n}\leq a_n^{n-1}a_{n+1}^n\Leftrightarrow a_n^{n+1}\leq a_{n+1}^n\Leftrightarrow\sqrt[k]{a_k}\leq\sqrt[k+1]{a_{k+1}}$. □

## §4.4 习题

1. 设$\{X_n\}$是r.v.列, 满足两点分布, 且$P(X_n=1)=\frac{1}{n^2}$. 证明: $\{X_n\}$几乎必然收敛到0.
2. **(2019期末)**设$\{X_n\}$相互独立, 则对任意$\varepsilon>0$,

$$P(\lim_{n\to\infty}X_n=0)=1\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}P(|X_n|\geq\varepsilon)<+\infty.$$

3. 设$\{X_n\}$是i.i.d.r.v, $X_1\sim U(0,1)$. 令$Z_n=\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{1/n}$, 证明; 存在$C$使得$Z_n\xrightarrow{P}C$.
4. 如果$\sum_{n=1}^{\infty}\|\xi_n-\xi\|_p^p<+\infty$, 则$\xi_n\xrightarrow{a.s}\xi$.
5. **(2019期末)**设$\xi$是随机变量. 证明: $E\xi^2<\infty$当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}nP(|\xi|>n)<\infty$.
6. 让$\{X_n\}$为正r.v.列, 并假定$X_n\xrightarrow{P}0$且$\lim_{n\to\infty}EX_n=2$. 证明$\lim_{n\to\infty}E|X_n-1|$存在, 并求这个值.
7. **(2019期末)** 设$\{X_n\}$是两两不相关, $\sum_{n=1}^{+\infty}nD(X_n)<+\infty$. 证明: $S_n=\sum_{i=1}^n(X_i-EX_i)$几乎必然收敛.
8. **(2014丘赛Individual)**设$\{X_n\}$是一列不相关的r.v.列且均值为0, 满足$\sum_{n=1}^{\infty}nE|X_n|^2<\infty$. 则$S_n=\sum_{i=1}^n X_i$几乎必然收敛.

9. **(2016丘赛Team)**让$\{X_n\}_{n\geq 1}$为i.i.d.实值r.v.列, 证明或否定: 若$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|X_n|}{n}\leq 1$,a.s., 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|\geq n)<\infty.$$

10. **(2019丘赛Team)**假定$\{X_n\}_{n\geq 1}$是i.i.d.r.v.列且共同分布是参数为1的指数分布, 则

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\log n}=1\right)=1.$$

11. 设$\{X_n:n\geq 1\}$是独立的$N(0,1)$随机变量, 证明:
(1) $P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{|X_n|}{\sqrt{\log n}}=\sqrt{2}\right)=1;$
(2) $P\left(X_n>a_n\quad i.o.\right)=\begin{cases}0, & 若\sum_n P(X_1>a_n)<\infty,\\ 1, & 若\sum_n P(X_1>a_n)=\infty,\end{cases}$
(提示: 可以用Mills's Ratio来估计$\Phi(x)$. )

12. **(2019丘赛Individual)**设$\{X_n\}_{n\geq 1}$是一列正r.v., 存在常数$C>0$使得

$$EX_n\leq C, E\max\{0,-\log X_n\}\leq C, \forall n\geq 1.$$

则$\limsup_{n\to\infty}X_n^{\frac{1}{n}}=1$.

13. **(2019期末)**设$f:(0,\infty)\to(0,\infty)$单调不降, 若随机变量序列$\{X_n,X\}_{n\geq 1}$满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}Ef(|X_n-X|)<\infty,$$

证明: $X_n\xrightarrow{a.s.}X$.

14. **(2010期末)**设$\{\xi_n\}$为独立随机变量序列, $P(\xi_n=0)=\frac{1}{2}=P(\xi_n=1)$. 令$\eta_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i}{2^i}$, 证明$\eta_n$依分布收敛于$(0,1)$的均匀分布. (提示: 可以考虑特征函数. )

15. **(2013年丘成桐大学生数学竞赛团体赛)** 设实数$\varepsilon>0$, 证明: 对几乎所有的$x\in[0,1]$, 只有有限个有理数$\frac{p}{q}\in(0,1)$(其中$p,q\in\mathbb{N}^+$)满足

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2(\log q)^{1+\varepsilon}}.$$

# 第5章　大数定律与极限定理

## §5.1　大数定律

**定理 5.1.1 (Chebyshev弱大数定律)** 设$\{x_n\}_{n\geq 1}$是两两不相关的$r.v.$序列, 且$\sup\limits_n D\xi_n$有界, 则$\forall\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E\xi_i)\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

**证明:** 利用Chebyshev不等式, 得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E\xi_i)\right| \geq \varepsilon\right) \leq & \frac{1}{\varepsilon^2}D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E\xi_i)\right)\\ =&\frac{1}{n^2\varepsilon^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E\xi_i)\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon}\sup_i D\xi_i \to 0(n\to\infty).\end{aligned}$$

**定理 5.1.2 (Borel强大数定律)** 设$\mu_n$是事件$A$在$n$次独立试验中出现的次数, $p$是$A$在每次试验中发生的概率, 则$\dfrac{\mu_n}{n} \xrightarrow{a.s.} p$.

**证明:** $\forall\varepsilon > 0$, 根据几乎必然收敛的刻画, 我们只需要证

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\left[\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right]\right) = 0.$$

再根据Borel-Cantelli引理, 我们只需证

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) < \infty.$$

记$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{第i次A发生} \\ 0, & \text{第i次A不发生}\end{cases}$, 则$E\xi_i = p$, $\dfrac{\mu_n}{n} - p = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - p)$, 相当于作了中心化处理. 由于$\{\xi_n\}$之间相互独立, 则有

$$E(\xi_i - p)(\xi_j - p) = E(\xi_i - p)E(\xi_j - p) = 0, \forall i \neq j.$$

根据推广Chebyshev不等式以及题目所给的i.i.d条件,

$$\begin{aligned}P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq & \frac{1}{\varepsilon^4}E\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right|^4\\ =&\frac{1}{\varepsilon^4 n^4}E\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - p)\right)^4\\ =&\frac{1}{\varepsilon^4 n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}E(\xi_i - p)(\xi_j - p)(\xi_k - p)(\xi_l - p)\\ =&\frac{1}{\varepsilon^4 n^4}\left[nE|\xi_i - p|^4 + \mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_4^2 E(\xi_1 - p)^2(\xi_2 - p)^2\right]\\ =&\frac{1}{\varepsilon^4 n^4}\left[npq(p^3 + q^3) + 3n(n-1)p^2q^2\right] \leq \frac{Cn^2}{\varepsilon^4 n^4} = \frac{C}{n^2\varepsilon^4}, \text{for some C.}\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{C}{\varepsilon^4}\cdot\frac{\pi^2}{6} < +\infty.$$

证明完毕. □

事实上, Borel-Cantelli引理还应用于Komogorov强大数定律,

**定理 5.1.3 (Kolmogorov不等式)** 设$X_1,\cdots,X_n$独立且$E|X_i|<+\infty$, 令

$$S_n=\sum_{i=1}^n X_i, i=1,2,\cdots,n,$$

则$\forall\varepsilon>0$, 有

$$P\left(\max_{1\le k\le n}|S_k-ES_k|\ge\varepsilon\right)\le\frac{1}{\varepsilon^2}DS_n.$$

**证明:** 令

$$\lambda_j=\left[\max_{1\le k\le j-1}|S_k-ES_k|<\varepsilon,|S_j-ES_j|\ge\varepsilon\right],\forall j=1,2,\cdots,n,$$

并约定$\lambda_1=0$, 则$\lambda_j\in\sigma(x_1,\cdots,x_j)$（由$x_1,\cdots,x_j$生成的sigma-代数）易知$\lambda_j$与$\sigma(x_{j+1},\cdots,x_n)$相互独立, 且$\lambda_j$之间两两不交(作了不交并处理), 且满足下面的等式:

$$\sum_{j=1}^n\lambda_j=\bigcup_{j=1}^n[|S_j-ES_j|\ge\varepsilon]=\left[\max_{1\le j\le n}|S_j-ES_j|\ge\varepsilon\right].$$

记$\lambda=\sum_{j=1}^n\lambda_j\subset\Omega$, 于是

$$\begin{aligned}
DS_n&=E(S_n-ES_n)^2\\
&\ge\int_\lambda(S_n-ES_n)^2dP\\
&=\sum_{j=1}^n\int_{\lambda_j}(S_n-ES_n)^2dP\ \text{(之前作了不交并处理)}\\
&=\sum_{j=1}^n\int_{\lambda_j}[(S_n-ES_n)-(S_j-ES_j)+(S_j-ES_j)]^2dP\\
&=\sum_{j=1}^n\int_\Omega\left[\left(\sum_{i=j+1}^n(X_i-EX_i)\right)+(S_j-ES_j)\right]^2I_{\lambda_j}dP\\
&\ge\sum_{j=1}^n\int_\Omega 2\sum_{i=j+1}^n(X_i-EX_i)(S_j-ES_j)I_{\lambda_j}+(S_j-ES_j)^2I_{\lambda_j}dP\\
&=\sum_{j=1}^n\int_\Omega(S_j-ES_j)^2I_{\lambda_j}dP\ \text{(前一行中第一项为0, 由独立性)}\\
&\ge\sum_{j=1}^n\int_{\lambda_j}\varepsilon^2dP\ (\lambda_j\text{定义})\\
&=\varepsilon^2\sum_{j=1}^nP(\lambda_j)\ \text{(概率定义)}\\
&=\varepsilon^2P\left(\max_{1\le k\le n}|S_k-ES_k|\ge\varepsilon\right).\square
\end{aligned}$$

**注:** 令$n=1$可得Chebyshev不等式.

**定理 5.1.4** 设$\{X_n\}_{n\geq 1}$是独立$r.v.$序列, 且期望有限, 若$\sum_{n=1}^{\infty} DX_n < +\infty$,则$\sum (X_n - EX_n)$几乎必然收敛.

**证明:** 不妨设$EX_n = 0, \forall n \geq 1$. 令$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \forall n \geq 1$. 先对欲证命题进行转化:

$$
\begin{aligned}
& S_n\text{a.s.收敛} \\
\Leftrightarrow & S_n - S_m \xrightarrow{a.s.} 0(n, m \to \infty) \ \text{(Cauchy准则)} \\
\Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0, P\left( \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m,n=k}^{\infty} [|S_n - S_m| \geq \varepsilon] \right) = 0 \ \text{(a.s.收敛刻画)} \\
\Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\left( \bigcup_{m,n=k}^{\infty} [|S_n - S_m| \geq \varepsilon] \right) = 0 \qquad \text{(单调性)} \\
\Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0, P\left( \bigcup_{l=1}^{\infty} [|S_{l+k} - S_k| \geq \varepsilon] \right) \to 0(k \to \infty).
\end{aligned}
$$

固定上面的k, 注意到

$$
\begin{aligned}
& P\left( \bigcup_{l=1}^{\infty} [|S_{l+k} - S_k| \geq \varepsilon] \right) \\
= & \lim_{m\to\infty} P\left( \bigcup_{l=1}^{m} [|S_{l+k} - S_k| \geq \varepsilon] \right) \ \text{(从下连续性)} \\
= & \lim_{m\to\infty} P\left( \max_{1\leq l\leq m} |S_{l+k} - S_k| \geq \varepsilon \right) \\
\leq & \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} D(S_{m+k} - S_k) \ \text{(前一定理)} \\
= & \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{m\to\infty} \sum_{i=k+1}^{k+m} DX_i \\
= & \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=k+1}^{\infty} DX_i \to 0(k \to \infty). \ \text{(Cauchy准则)}
\end{aligned}
$$

这样证明已完成. □

**引理 5.1.5 (Kronecker)** 设$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$存在, 且$\{p_n\}$单调递增趋于正无穷, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n}{p_n} = 0.$$

**证明:** 略.

**定理 5.1.6 (Kolmogorov强大数定律)** 设$\{X_n\}_{n\geq 1}$为独立$r.v.$列, $\{b_n\}$单调递增趋于正无穷, 若

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D(X_n)}{b_n^2}<+\infty,$$

则$\displaystyle\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)\xrightarrow{a.s.}0.$

**证明:** 根据定理5.1.4, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{b_n}$几乎必然收敛. 根据Kronecker引理,

$$\frac{S_n-ES_n}{b_n}=\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k-EX_k}{b_k}\right)b_k\xrightarrow{a.s.}0.$$

□

**推论 5.1.7** 设$\{X_n\}_{n\geq 1}$相互独立$r.v.$列, 且有相同的均值与方差, 则$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{a.s.}EX_1.$

**证明:** 在Kolmogorov强大数定律中令$b_n=n, D(X_n)=C$即可. □

**例 5.1.1** 设$\{\xi_n\}_{n\geq 1}$是$i.i.d.r.v.$列, 则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\xrightarrow{a.s.}a(<+\infty)\Leftrightarrow E|\xi_1|<+\infty\text{且}a=E\xi_1.$$

**证明:** “$\Rightarrow$”: 如下.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\xrightarrow{a.s.}a\Rightarrow&\frac{\xi_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\right)\xrightarrow{a.s.}0\\
\Rightarrow&P\left(\left[\left|\frac{\xi_n}{n}\right|\geq 1\right]\text{发生无穷次}\right)=0\qquad\text{(a.s.收敛的刻画)}\\
\Rightarrow&\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left|\frac{\xi_n}{n}\right|\geq 1\right)<+\infty\qquad\text{(独立性, Borel-Cantelli)}\\
\Rightarrow&\sum_{n=1}^{\infty}P(|\xi_n|\geq n)<+\infty\qquad\text{(同分布)}\\
\Rightarrow&E|\xi_1|\leq\sum_{n=1}^{\infty}P(|\xi_n|\geq n)+1<+\infty.\qquad\text{(Nice引理)}
\end{aligned}$$

另外,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\xrightarrow{a.s.}a\Rightarrow E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\xrightarrow{a.s.}Ea=a,$$

根据同分布可得$E\xi_i\xrightarrow{a.s.}a$, 而$E\xi_i$是常数, 所以$E\xi_i=a$. □

“$\Leftarrow$”: 不妨设$E\xi_1=0$(否则可以作中心化处理). 令$\eta_i=\xi_iI_{[|\xi_i|<i]},\forall i\geq 1$(作了一个截断, 留下$-i<\xi_i<i$部分), 则

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}P(\xi_n\neq\eta_n)\leq&\sum_{n=1}^{\infty}P(|\xi_n|\geq n)\ \text{(i.i.d)}\\
\leq&E|\xi_1|<\infty\ \text{(Nice引理)}.
\end{aligned}$$

根据Borel-Cantelli引理, 可得$P(\xi \neq \eta_i$发生无穷多次$) = 0$. 也就是说只有有限个$\xi_i \neq \eta_i$, 于是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \xrightarrow{a.s.} 0\\
\Leftrightarrow&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i \xrightarrow{a.s.} 0\\
\Leftrightarrow&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\eta_i - E\eta_i) \xrightarrow{a.s.} 0.
\end{aligned}$$

考虑到

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}D\eta_n < \infty\\
\Rightarrow&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_n - E\eta_n}{n}\text{a.s.} \qquad (\text{定理5.1.4})\\
\Rightarrow&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\eta_i - E\eta_i) \xrightarrow{a.s.} 0. \quad (\text{Kronecker})
\end{aligned}$$

只需证$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}D\eta_n < \infty$. 事实上,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}D\eta_n\\
\leq&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}E\xi_n^2 I_{[|\xi_n|<n]} && (\text{方差定义})\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}E\xi_n^2 I_{[k\leq|\xi_n|<k+1]}\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}E\xi_n^2 I_{[k\leq|\xi_n|<k+1]} && (\text{正项级数换序})\\
<&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n-1)}E\xi_n^2 I_{[k\leq|\xi_n|<k+1]}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}E\xi_n^2 I_{[0\leq|\xi_n|<1]} && (\text{提取}k=0)\\
\leq&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}E\xi_n^2 I_{[k\leq|\xi_n|<k+1]}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} && (\text{因为}|\xi_n|<1)\\
\leq&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(k+1)^2}{k}P(k\leq|\xi_n|<k+1)\right)+\frac{\pi^2}{6} && (\text{因为}|\xi_n|<k+1)\\
\leq&3\sum_{k=1}^{\infty}kP(k\leq|\xi_n|<k+1)+\frac{\pi^2}{6}\\
\leq&3\sum_{k=1}^{\infty}E|\xi_n|I_{[k\leq|\xi_n|<k+1]}+\frac{\pi^2}{6} && (\text{因为}k\leq|\xi_n|)\\
\leq&3E|\xi_n|+\frac{\pi^2}{6}<+\infty.\square
\end{aligned}$$

## § 5.2 中心极限定理

**定理 5.2.1 (Lindberg-Lévy)** 设$\{\xi_n\}_{n\geq 1}$是$i.i.d.r.v.$列, 且$E\xi_1=\mu,\sigma^2=D\xi_1<+\infty$, 令

$$\eta_n \triangleq \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)$$

（相当于标准化）, 则

$$\lim_{n\to\infty}P(\eta_n\leq y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-x^2/2}dx(=\Phi(y)).$$

**注:** 结论等价于$\eta_n\xrightarrow{L}\mu$, 或者用Lévy定理,

$$Ef(\eta_n)\to\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx.$$

**证明:** 设$g(t)$是$\xi_1-\mu$的特征函数, 记

$$\varphi_n(t)\triangleq Ee^{i\eta_n t}=\cdots=\left[g\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)\right]^n.$$

利用特征函数的性质, $g(0)=1,g'(0)=iE(\xi_1-\mu)=0,g''(0)=i^2E(\xi_1-\mu)^2=-D\xi_1$. 当t充分小时, 我们有

$$g(t)=g(0)+g'(0)t+\frac{1}{2}g''(0)t^2+o(t^2)=1-\frac{\sigma^2}{2}t^2+o(t^2).(t\to 0)$$

特别地, 对任一固定$t\in\mathbb{R}$以及充分大的$n$, 都有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[g\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)\right]\\ =&\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{\sigma^2}{2}\frac{t^2}{n\sigma^2}+o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)\right]^n\\ =&\exp\left(\lim_{n\to\infty}n\left[-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)\right]\right)=e^{-t^2/2}.\end{aligned}$$

由于$t\mapsto e^{-t^2/2}$是连续的, 利用Lévy定理可得$P(\eta_n\leq y)\xrightarrow{W}\Phi(y)$. □

**注:** (1) 如果一个量由大量相互独立的随机因素所构成, 而每一个个别因素所起到的作用不是很大, 则这个量近似正态分布.

(2)中心极限定理比大数定律要精细, 事实上,

$$\begin{aligned}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\mu\right|<\varepsilon\right)&=P\left(\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}\left|\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)\right|\leq\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right)\\&=P\left(-\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\leq\eta_n\leq\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right)\\&\sim\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right)\\&=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right)-1.\end{aligned}$$

这给了个定量估计, 但是大数定律只给了定性估计.

下面的例子很有意思，把区间[0,1]中的数的二进制表示与概率论结合起来.

**例 5.2.1 (Borel)** *若$\{x_n\}_{n\geq 1}$为$i.i.d.r.v.$列，且有相同的分布：$P(\xi_n=1)=P(\xi_n=0)=\dfrac{1}{2}$. 令$\eta_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\xi_k}{2^k}$，则$\eta_n$的分布收敛于$[0,1]$上的均匀分布.*

**证明:** 用Lévy定理, 只需转化为特征函数. $[0,1]$上的均匀分布的分布函数是$F(x)=1, x\in[0,1]$, 则它的特征函数为

$$f(t)=Ee^{i\xi t}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}dF(x)=\int_{0}^{1}e^{ixt}dx=\frac{1-e^{it}}{it}.$$

而$\eta_n$的特征函数为

$$\begin{aligned}
f_n(t)&=Ee^{i\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{2^k}t}\\
&=\prod_{k=1}^{n}Ee^{i\frac{\xi_k}{2^k}t}\\
&=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{0}{2^k}t}+e^{i\frac{1}{2^k}t}\right)\\
&=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{t}{2^k}+i\sin\frac{t}{2^k}\right)\\
&=\prod_{k=1}^{n}\left(\cos^2\frac{t}{2^{k+1}}+i\sin\frac{t}{2^{k+1}}\cos\frac{t}{2^{k+1}}\right)\\
&=\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{t}{2^{k+1}}e^{\frac{it}{2^{k+1}}}\\
&=\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{t}{2^{k+1}}\prod_{k=1}^{n}e^{\frac{it}{2^{k+1}}}\\
&\to\frac{2}{t}\sin\frac{t}{2}e^{\frac{it}{2}}=\frac{1-e^{it}}{it}.(n\to\infty)\square
\end{aligned}$$

**例 5.2.2** *用特征函数法证明二项分布的$Poisson$逼近定理.*

**证明:** 同样用Lévy定理来证明. 设$\eta_n\sim B(n,p)$. 又记$\eta\sim P(\lambda)$, 则$P(\eta=k)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, 则$\eta$的特征函数是

$$f(t)=E^{i\eta t}=\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikt}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\cdots=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

另外, $\eta_n$的特征函数是

$$f_n(t)=Ee^{i\eta t}=\sum_{k=0}^{n}e^{itk}\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}=(pe^{it}+1-p)^n=\left[1+\frac{np(e^{it}-1)}{n}\right]^n$$

这样, 如果$np\to\lambda(n\to\infty)$, 则$f_n(t)\to f(t)$. $\square$

**例 5.2.3** *用特征函数法证明泊松分布当$\lambda\to\infty$时, 渐近正态分布.*

**证明:** 同样用Lévy定理来证明. 设$\eta_\lambda\sim P(\lambda)$, 则$P(\eta_\lambda=k)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, 则$\eta_\lambda$的特征函数是

$$f_\lambda(t)=E^{i\eta t}=\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikt}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\cdots=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

又设$\xi \sim N(0,1)$, 则$\eta = \sigma\xi + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\xi$的特征函数是

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{-x^2/2} dx.$$

所以

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(-\sin tx) e^{-x^2/2} dx = \cdots = -tf(t).$$

解微分方程并且由$f(0) = 1 \Rightarrow f(t) = e^{-t^2/2}$. $\eta$的特征函数是$g(t) = e^{i\mu t} f(t) = e^{i\mu t} e^{-\sigma^2 t^2/2}$. 取$\mu = \lambda, \sigma = \sqrt{\lambda}$即可. □

下面记

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

是标准正态分布函数, $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$是一列独立r.v.列, 均值与方差有限, 记

$$a_k = E\xi_k, b_k^2 = D\xi_k, B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

记$\eta_k = \frac{1}{B_k} \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - a_i)$为标准化的r.v.

**Lindberg条件**指的是对于$\forall \varepsilon > 0$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{[x-a_k|\geq \varepsilon B_k]} (x-a_k)^2 dF_k(x) = 0$,

**Feller条件**指的是$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{B_n} \max\limits_{1\leq k\leq n} b_k = 0$.

**定理 5.2.2 (Lindberg-Feller中心极限定理)**

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} P(\eta_n \leq y) = \psi(y) \\ \{\xi_n\}\text{满足}Feller\text{条件} \end{cases} \Leftrightarrow \{\xi_n\}\text{满足}Lindberg\text{条件}.$$

**定理 5.2.3 (Lyapunov)** *记$\{\xi_n\}$是独立$r.v.$列. 若$\exists \delta > 0$, 使得*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E(\xi_k - a_k)^{2+\delta} = 0,$$

*则$P(\eta_n \leq x) \to \Phi(x)$.*

**证明:** 利用Lindberg-Feller中心极限定理以及Chebyshev不等式即可.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{[|x-a_k|\geq \varepsilon B_n]} (x-a_k)^2 dF_k(x) \\ \leq &\frac{1}{\varepsilon^\delta B_n^{\delta+2}} \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} (x-a_k)^{2+\delta} dF_k(x) \\ = &\frac{1}{\varepsilon^\delta B_n^{\delta+2}} \sum_{k=1}^{n} E(\xi_k - a_k)^{2+\delta} \to 0 (n\to\infty). \end{aligned}$$

## § 5.3 习题

1. **(2019期末)**某车间有同型号的机床200台, 在1小时内每台机床约有70%时间是工作的. 假定每个机床工作是相互独立的, 工作时每台机床要消耗电能15千瓦, 问至少要多少电能才可以有95%可能性保证此车间正常生产?

   $(\Phi(1.645) = 0.95)$.
2. **(2019期末)**一个复杂系统由100个相互独立工作的部件组成, 每个部件正常工作的概率为0.9. 已知整个系统中至少有85个部件正常工作时系统才正常工作, 求系统正常工作的概率.

   $(\Phi(1.83) = 0.9656, \Phi(1.67) = 0.9525)$.
3. 设$X_2, X_3, \cdots$是i.i.d.r.v., 满足

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\log n}, P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}.$$

   通过验证$\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} X_i$依概率收敛到0而不几乎处处收敛到0, 来证明这个序列满足弱大数定律, 但不满足强大数定律.
4. 构造一列i.i.d.r.v$\{X_r : r \geq 1\}$, 满足下列条件:

   (1) $EX_r = 0, \forall r \geq 1$;

   (2) $\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_r \xrightarrow{a.s.} -\infty (n \to \infty)$.
5. 设$\xi_1, \xi_2, \cdots$是i.i.d, 证明: 如果对某个$\alpha \in (0, 1)$, 有$E|\xi_1|^\alpha < \infty (\forall n)$, 则$\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}$几乎必然收敛到0; 如果对某个$\beta \in [1, 2)$有$E|\xi_1|^\beta < \infty$, 则$\frac{S_n - nE\xi_1}{n^{1/\beta}}$几乎必然收敛到0.
6. 设$\xi_1, \xi_2, \cdots$是i.i.d, 且$E|\xi_n| = \infty (\forall n)$, 证明:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{S_n}{n} - a_n\right| = \infty (a.s.)$$

   对任意序列$\{a_n\}$都成立.

# 第 6 章　(*)条件期望

## § 6.1　条件期望的定义

条件期望是现代概率论的基础.

回顾: 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间, 若$A\in\mathscr{F},P(A)>0$, 定义$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)},\forall B\in\mathscr{F}$, 则$P(\cdot|A):\mathscr{F}\to[0,1]$是个概率测度. $E(\xi|A)=\displaystyle\int_\Omega\xi dP(\cdot|A)=\frac{E(\xi I_A)}{P(A)}$.

最简单的情况: 设$\mathscr{C}=\{\Omega,\varnothing,A,A^c\}$, 满足$P(A)>0,P(A^c)>0$, 则定义条件期望$E(\xi|\mathscr{C})\triangleq E(\xi|A)I_A+E(\xi|A^c)I_{A^c}$, 注意$I_A,I_{A^c}$都是r.v., 因此$E(\xi|\mathscr{C})$也是r.v.

推广最简单的情况: 设$\{A_n\}_{n\geq1}\subset\mathscr{F}$是个划分, 即满足$\displaystyle\bigcup_n A_n=\Omega$且诸$A_i$两两不交, $P(A_n)>0$, 记$\mathscr{C}=\sigma(\{A_n\}_{n\geq1})$为包含$\{A_n\}$的最小$\sigma-$代数, 定义

$$E(\xi|\mathscr{C})\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}E(\xi|A_n)I_{A_n},$$

满足:

①$E(\xi|\mathscr{C})$关于$\mathscr{C}$可测,

②$\forall B\in\mathscr{C}$, $\displaystyle\int_B E(\xi|\mathscr{C})dP=\int_B\xi dP$.(重要性质)

推广到更一般的sigma代数:

**定义 6.1.1 (条件期望)** *设$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$为$\sigma-$代数, $\xi$是可积r.v., 称(关于)$\mathscr{C}$可测的r.v.$\eta$为$\xi$关于$\mathscr{C}$的条件期望, 若*

$$\int_B\xi dP=\int_B\eta dP,\forall B\in\mathscr{C}.$$

*此时记$\eta=E(\xi|\mathscr{C})$.*

**注:** ①存在性: 用Radon-Nikodym定理可以证明. ②唯一性成立(在$P|_{\mathscr{C}}$几乎处处定义, 即$\eta,\xi$差一个关于$\mathscr{C}$可测的零测集都成立)

**注:** 如果$E\xi$存在, 则$\xi$关于$\mathscr{C}$的$\sigma-$代数的条件期望存在(可测).

**性质 6.1.1** *$E(E(\xi|\mathscr{C}))=E\xi$.*

**性质 6.1.2** *若$\xi$关于$\mathscr{C}$可测, 则$E(\xi|\mathscr{C})=\xi\ a.s.$, 即上面的唯一性.*

**性质 6.1.3** *若$c_1,c_2\in\mathbb{R}$, 且$c_1\xi_1+c_2\xi_2,\xi_1,\xi_2$期望都存在, 则(期望存在意味着期望的正部或者负部都存在)*

$$E(c_1\xi_1+c_2\xi_2|\mathscr{C})=c_1E(\xi_1|\mathscr{C})+c_2E(\xi_2|\mathscr{C}),a.s.$$

用定义验证即可, 结果很平凡.

**性质 6.1.4** *若$X\geq Y\ a.s.$, 则$E(X|\mathscr{C})\geq E(Y|\mathscr{C})\ a.s.$.*

**证明:** $\forall B\in\mathscr{C},X\geq Y\Rightarrow\cdots\Rightarrow\displaystyle\int_B E(X|\mathscr{C})dP\geq\int_B E(Y|\mathscr{C})dP.$ □

**性质 6.1.5** $|E(\xi|\mathscr{C})| \le E(|\xi||\mathscr{C})$ *a.s.*.

**性质 6.1.6** 设$\{\xi_n\}$为非负*r.v.*列, 且$\xi_n \le \xi_{n-1}$ *a.s.*, 则$\lim\limits_{n\to\infty} E(\xi_n|\mathscr{C}) = E\left(\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n\middle|\mathscr{C}\right)$, *a.s.*.

**性质 6.1.7 (硬性质, 不能忘)** 设$\xi,\xi\eta$的期望均存在且$\eta$关于$\mathscr{C}$可测, 则

$$E(\xi\eta|\mathscr{C}) = \eta E(\xi|\mathscr{C})\, a.s.$$

(让$\xi=1$可推出性质②)

**证明:** 证明思路: 证r.v.成立, 先证对示性函数成立, 再证对非负简单函数成立. 相关定义请回顾《概率论基础》的笔记并回顾《概率论基础》的$Ef(\xi)=\int_\Omega f(x)dF(x)$的证明过程.

先设$\eta = I_A, A\in\mathscr{C}$, 即证$E(\xi I_A|\mathscr{C}) = I_A E(\xi|\mathscr{C})$ a.s.成立. 由于$I_AE(\xi|\mathscr{C})$是可测的, (这是因为$I_A$与$E(\xi|\mathscr{C})$都关于$\mathscr{C}$可测, 它们的乘积也可测),

$\forall B\in\mathscr{C}$, 由于

$$\int_B \xi I_A dP = \int_{A\cap B}\xi dP = \int_{A\cap B} E(\xi|\mathscr{C})dP = \int_B I_A E(\xi|\mathscr{C})dP,$$

根据性质②, 则$E(\xi I_A|\mathscr{C}) = I_AE(\xi|\mathscr{C})$ a.s.成立.

下面再证非负简单的情形$\eta = \sum\limits_{i=1}^n a_i I_{A_i}, a_i\ge 0$, 且$A_i\in\mathscr{C}$两两不交, 用线性性(性质③)可知这是成立的.

然后证$\eta$是非负且关于$\mathscr{C}$可测成立, 用非负简单可测r.v.列$\{\eta_n\}$逼近即可(性质⑥).

对于一般的$\eta$, 记为$\eta=\eta^+-\eta^-$(正部与负部)就OK了. □

**性质 6.1.8** 若$\xi,\mathscr{C}$独立, 则$E(\xi|\mathscr{C}) = E\xi$, *a.s.*.

(回顾前面的《概率论基础》, r.v.$\xi,\mathscr{C}$独立指由$\xi$生成的sigma-代数$\sigma(\xi),\mathscr{C}$这两个集类独立, 即从这两个集类中任选一个集合, 这两个集合是独立的),

**证明:** $\forall B\in\mathscr{C}$,

$$\begin{aligned}\int_B E(\xi|\mathscr{C})dP = E(E(\xi|\mathscr{C})I_B) &= E(E(\xi I_B|\mathscr{C})) \qquad (\text{B是可测的})\\ &= E(\xi I_B) \qquad (\xi, I_B\text{独立})\\ &= E\xi EI_B = E\xi\int_B 1dP = \int_B E\xi dP.\end{aligned}$$

这里$E\xi$是常数, 当然是可测的, 根据性质②, $E(\xi|\mathscr{C}) = E\xi$. □

$\xi$积分存在指$E\xi^+<+\infty$或$E\xi^-<+\infty$, $\xi$可积指$E\xi^+<+\infty$且$E\xi^-<+\infty$, 即$E|\xi|<+\infty$, 从而$|X|<+\infty$, a.s..

**性质 6.1.9 (平滑性)** 设$\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2\subset\mathscr{F}$是$\sigma$-代数, 且$\mathscr{C}_1\subset\mathscr{C}_2$, 则

$$E(\xi|\mathscr{C}_1) = E[E(\xi|\mathscr{C}_2)|\mathscr{C}_1], a.s..$$

**证明:** $\forall A\in\mathscr{C}_1$, 根据定义有

$$\int_A E[E(\xi|\mathscr{C}_2)|\mathscr{C}_1]dP = \int_A E(\xi|\mathscr{C}_2) = \int_A \xi dP.$$

**注:** 这个性质是很好的. 根据证明过程不难知道, 类似可以证明如果$\mathscr{C}_2 \subset \mathscr{C}_1$, 则$E(\xi|\mathscr{C}_2) = E[E(\xi|\mathscr{C}_2)|\mathscr{C}_1]$, a.s.. 因此让$\xi$对$\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$分别取条件期望(无论顺序), 得到的一定是较小sigma-代数的条件期望.

下面把实变函数的部分定理推广到条件期望上来.

**定理 6.1.1 (控制收敛定理)** *设$\{X_n\}_{n\geq 1}$是r.v.序列, $\xi$是可积r.v.. 若$X_n \xrightarrow{a.s.} X$或$X_n \xrightarrow{P} X$, 且$|X_n| \leq \xi, \forall n \geq 1$, a.s., 则*

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathscr{C}) = E(\lim_{n\to\infty} X_n|\mathscr{C}) = E(X|\mathscr{C}).$$

**定理 6.1.2 (Fatou)** *设$\{X_n\}$是r.v.序列, 且$EX_n (n = 1, 2, \cdots)$存在.*

*(1)若存在r.v. $Y$, 使得$EY > -\infty$, 且对每个$n \geq 1$有$X_n \geq Y$, a.s., 则$\liminf_{n\to\infty} X_n$的期望存在, 且满足*

$$E(\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathscr{C}) \leq \liminf_{n\to\infty} E(X_n|\mathscr{C}).$$

*(2)若存在r.v. $Y$, 使得$EY < +\infty$, 且对每个$n \geq 1$有$X_n \leq Y$, a.s., 则$\limsup_{n\to\infty} X_n$的期望存在, 且满足*

$$E(\limsup_{n\to\infty} X_n|\mathscr{C}) \geq \limsup_{n\to\infty} E(X_n|\mathscr{C}).$$

**定理 6.1.3 (Hölder不等式)** *$\forall p, q > 1$满足$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则*

$$\mathbb{E}(|\xi\eta||\mathscr{C}) \leq \mathbb{E}\left(|\xi|^p|\mathscr{C}\right)^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}\left(|\xi|^q|\mathscr{C}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

**注:** 当$p = q = 2$时为Cauchy-Schwarz不等式.

**定理 6.1.4 (Jensen不等式)** *设$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是连续凸函数, r.v.$\xi$满足$f(\xi)$积分存在, 则*

$$f(E\xi) \leq Ef(\xi), f(E(\xi|\mathscr{C})) \leq E(f(\xi)|\mathscr{C}), a.s..$$

**注:** 特别地取$f(x) = |x|$显然成立(便于记忆). 取$f(x) = x^2$恰好是Cauchy-Schwarz不等式.

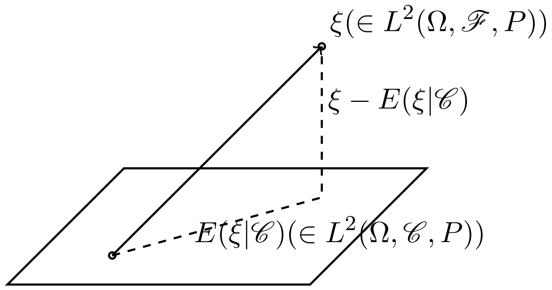
## § 6.2 条件期望的几何意义

记

$$L^2(\Omega, \mathscr{F}, P) = \{\xi : \xi\text{为}\mathscr{F}\text{中的可测r.v., 且}E\xi^2 < +\infty\},$$
$$L^2(\Omega, \mathscr{C}, P) = \{\xi : \xi\text{为}\mathscr{C}\text{中的可测r.v., 且}E\xi^2 < +\infty\}.$$
$$\langle \xi, \eta \rangle_{L^2} = E(\xi\eta).$$
$$\|\xi\|_{L^2} = \langle \xi, \xi \rangle_{L^2}^{\frac{1}{2}} = (E\xi^2)^{\frac{1}{2}}.$$

则$L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$和内积$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$一起构成Hilbert空间, $L^2(\Omega, \mathscr{C}, P)$是$L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$的闭子空间(要证一下),

**定理 6.2.1** *$\forall \xi \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$, 可对$\xi$做如下的正交分解: $\xi = E(\xi|\mathscr{C}) + (\xi - E(\xi|\mathscr{C}))$.*




**注:** $E(\xi|\mathscr{C})\in L^2(\Omega,\mathscr{C},P)$是因为$E(\xi|\mathscr{C})$可测, 且$E(E(\xi|\mathscr{C})^2)\le E(E(\xi^2|\mathscr{C}))=E\xi^2<+\infty$(Jensen不等式).

**证明:** 先验证垂直, 再证距离最短.

$$\begin{aligned}\langle E(\xi|\mathscr{C}),\xi-E(\xi|\mathscr{C})\rangle_{L^2}=&E\left[E(\xi|\mathscr{C})\cdot(\xi-E(\xi|\mathscr{C}))\right]\\=&E\left\{E\left[E(\xi|\mathscr{C})\cdot(\xi-E(\xi|\mathscr{C}))|\mathscr{C}\right]\right\}\text{【性质①】}\\=&E\left\{E(\xi|\mathscr{C})E\left[\xi-E(\xi|\mathscr{C})|\mathscr{C}\right]\right\}\text{【}E(\xi|\mathscr{C})\text{可测, 性质⑦】}\\=&E\left\{E(\xi|\mathscr{C})[E(\xi|\mathscr{C})-E(\xi|\mathscr{C})]\right\}\text{【性质③(线性性), 性质②】}\\=&0.\end{aligned}$$

下面验证距离最短: 即验证

$$E(\xi-E(\xi|\mathscr{C}))^2=\inf_{y\in L^2(\Omega,\mathscr{C},P)}\{E(\xi-y)^2|y\in L^2(\Omega,\mathscr{C},P)\}.$$

事实上, $\forall y\in L^2(\Omega,\mathscr{C},P)$,

$$\begin{aligned}E(\xi-E(\xi|\mathscr{C}))^2&=E(\xi-E(\xi|\mathscr{C})-y+y)^2\\&=E(\xi-y)^2-2E[(\xi-y)(E(\xi|\mathscr{C})-y)]+E[E(\xi|\mathscr{C})-y]^2\\&=E(\xi-y)^2-2E\{E[(\xi-y)(E(\xi|\mathscr{C})-y)|\mathscr{C}]\}+E[E(\xi|\mathscr{C})-y]^2\text{【性质①】}\\&=E(\xi-y)^2-E[E(\xi|\mathscr{C})-y]^2\text{【}E(\xi|\mathscr{C})-y\text{可测, 性质⑦】}\\&\le E(\xi-y)^2.\end{aligned}$$

根据y的任意性, 对上式取下确界即可. □

下面举几个例子.

**例 6.2.1** 设$X,Y\in L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$满足$E(Y|X)=X, E(X|Y)=Y$, 则$X=Y$, *a.s.*.

**证明:** 注意到

$$\begin{aligned}0\le E(X-Y)^2&=EX^2-2EXY+EY^2\\&=EX^2-2E[E(XY|X)]+EY^2\text{【性质①】}\\&=EX^2-2E(XE(Y|X))+EY^2\text{【性质⑦】}\\&=EY^2-EX^2.\end{aligned}$$

同理, 如果对上面第二行的式子改为作用Y的条件期望, 可得$E(X-Y)^2=EX^2-EY^2$. 一个数同时等于另一个数与它的相反数, 则这个数只能为0, 即$E(X-Y)^2=0$, 则$X=Y$, a.s..

**例 6.2.2** *设$X, Y \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$满足$E(Y|X) = X, E(X|Y) = Y$, 则$X = Y$, a.s..*

提示: 只需考虑$E(X-Y)(\arctan X - \arctan Y)$, 这个依然是非负的, 而且$\arctan x$有界, 则$(X - Y)(\arctan X - \arctan Y)$必定可积.

**例 6.2.3** *已知$X$是一可积r.v., $\mathscr{C}$是$\mathscr{F}$的子sigma代数. 令$Y = E(X|\mathscr{C})$, 假定$X$与$Y$同分布, 证明:*
*(1)若$X$平方可积, 则$X = Y$, a.s..*
*(2)若$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$, 有$(X \vee a) \wedge b = (Y \vee a) \wedge b$, a.s., 则$X = Y$, a.s..*

**证明:** (1)注意到

$$\begin{aligned}E(X-Y)^2 &= EX^2 - 2EXY + EY^2 = 2EY^2 - 2EXY\text{【同分布】}\\&= 2EY^2 - 2E[E(XY|\mathscr{C})]\text{【性质①】}\\&= 2EY^2 - 2E(YE(X|\mathscr{C}))\text{【性质⑦】}\\&= 2EY^2 - 2EY^2\text{【题目条件】}\\&= 0, \Rightarrow X = Y, a.s..\end{aligned}$$

(2)下证$E(X \vee a|\mathscr{C}) = Y \vee a (= E(X|\mathscr{C}) \vee a), \forall a \in \mathbb{R}$, 则$E[(X \vee a) \wedge b|\mathscr{C}] = (Y \vee a) \wedge b, a.s., \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$. (把并的证明推广到交的证明, 结果是一样的, 所以下面只证明并的情况)

首先考虑到函数$f(x) = x \vee a$是凸的, 根据Jensen不等式有

$$E(X \vee a|\mathscr{C}) \geq E(X|\mathscr{C}) \vee a, a.s..$$

只需证$P[E((X \vee a)|\mathscr{C}) > (E(X|\mathscr{C}) \vee a)] = 0$. 事实上,

$$\begin{aligned}E[(X \vee a)|\mathscr{C} - (E(X|\mathscr{C}) \vee a)] &= E[E(X \vee a - E(X|\mathscr{C}) \vee a|\mathscr{C})]\text{【性质①】}\\&= E(X \vee a - E(X|\mathscr{C}) \vee a)\text{【线性性】}\\&= EX \vee a - E(E(X|\mathscr{C}) \vee a)\\&= EX \vee a - EY \vee a = 0.\text{【同分布】}\end{aligned}$$

证明完毕. □

一些常用的测度: 比如$(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$上的测度:

①$p\delta_1 + q\delta_0$, 两点分布的分布函数;

②$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, Gauss测度;

③$\lambda e^{-\lambda x}I_{[0,+\infty)}(x)dx$.

对于$(\Omega, \mathscr{F})$中的测度$\mu, \nu$, 若$A \in \mathscr{F}, \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$, 则称$\nu$关于$\mu$**绝对连续**, 记为$\nu \ll \mu$.

若$\nu \ll \mu, \mu \ll \nu$, 则称$\nu, \mu$**等价(相互绝对连续)**.

**Radon-Nikodym定理:** 若$\nu \ll \mu$, $\mu$是$\sigma-$有限测度, $\nu$是符号测度(不一定$\sigma-$有限), 则存在一个关于$\nu$积分存在的可测函数g, 使得$\nu(A) = \int_A g(x)\mu(dx)$. (把$g(x)\mu(dx)$看作$d\mu$) 称g为$\nu$关于$\mu$的Radon-Nikodym导数, 记为$\dfrac{d\nu}{d\mu}$(不是微分, 是形式上的符号).

例如, $\nu \triangleq P \circ \xi^{-1}$为Gauss测度, $\nu(dx) = dx$为Lebesgue测度, 则$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

**例 6.2.4** 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间, $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$为子$sigma$代数, $\Gamma\in\mathscr{F}$是事件, 证明以下等价:
*(1)*$\Gamma,\mathscr{C}$独立;
*(2)*任一概率测度$Q\ on\ (\Omega,\mathscr{F})$, $Q$与$P$等价, 且$\dfrac{dQ}{dP}$为$\mathscr{C}$可测, 则$Q(\Gamma)=P(\Gamma)$.

**证明:** “(1)⇒(2)”: $Q(A)=\displaystyle\int_A\frac{dQ}{dP}(w)P(dw)$, 这里$\dfrac{dQ}{dP}(w)$是个r.v.. 记$E_Q$是关于$Q$积分的期望, $E_P$是关于$P$积分的期望.

$\Gamma,\mathscr{C}$独立$\Leftrightarrow P(\Gamma\cap B)=P(\Gamma)P(B),\forall B\in\mathscr{C}$, 而

$$\begin{aligned}Q(\Gamma)=\int_\Gamma dQ=\int_\Omega I_\Gamma dQ=\int_\Omega I_\Gamma\frac{dQ}{dP}dP\ &\text{【形式上的转化】}\\ =E_P\left(I_\Gamma\frac{dQ}{dP}\right)&\\ =E_P(I_\Gamma)E_P\left(\frac{dQ}{dP}\right)\ &\text{【独立性】}\\ =P(\Gamma)\int_\Omega\frac{dQ}{dP}dP=P(\Gamma)\int_\Omega dQ=P(\Gamma).&\end{aligned}$$

“(1)⇐(2)”: 要证$P(\Gamma\cap B)=P(\Gamma)P(B),\forall B\in\mathscr{C}$. 事实上, 令$\boxed{dQ=\dfrac{I_B+1}{P(B)+1}dP}$(+1为了保证分子分母不为0, 除以$(P(B)+1)$这一常数是为了归一化). 下面验证$Q$是概率测度: 根据定义验证.

$1^\circ$非负性: $Q(A)=\displaystyle\int_A\frac{I_B+1}{P(B)+1}=\int_\Omega I_A\frac{I_B+1}{P(B)+1}dP\geq0$, 这里$I_A\geq0,\dfrac{I_B+1}{P(B)+1}>0$.

$2^\circ$可列可加性: $\forall\{A_n\}_{n\geq1}\subset\mathscr{F},A_n\cap A_m=\varnothing,\forall n\neq m$, 我们有:

$$\begin{aligned}Q\left(\sum_n A_n\right)&=\int_{\sum_n A_n}\frac{I_B+1}{P(B)+1}dP\\ &=\int_\Omega I_{\sum_n A_n}\frac{I_B+1}{P(B)+1}dP\\ &=\int_\Omega\sum_n\left(I_{A_n}\frac{I_B+1}{P(B)+1}\right)dP\text{【两两不交】}\\ &=\sum_n\int_{A_n}\frac{I_B+1}{P(B)+1}dP\text{【非负, 积分与求和可调换次序】}\\ &=\sum_n Q(A_n).\end{aligned}$$

$3^\circ$规范性: $Q(\Omega)=\displaystyle\int_\Omega\frac{I_B+1}{P(B)+1}dP=\frac{1}{P(B)+1}(P(B)+1)=1.$

根据Radon-Nikodym定理, 因此$\dfrac{dQ}{dP}$是$\mathscr{C}$可测的, 根据条件,

$$\begin{aligned}Q(\Gamma)=\int_\Gamma\frac{I_B+1}{P(B)+1}dP=P(\Gamma)&\Longleftrightarrow\frac{\int_\Omega I_\Gamma(I_B+1)dP}{P(B)+1}=P(\Gamma)\\ &\Longleftrightarrow\int_\Omega I_{\Gamma\cap B}dP+P(\Gamma)=P(\Gamma)(P(B)+1)\\ &\Longleftrightarrow P(\Gamma\cap B)=P(\Gamma)P(B),\forall B\in\mathscr{C}.\end{aligned}$$

证完. □

**例 6.2.5** 设$X,Y,Z$是$r.v.$且$Y$可积, 证明若$(X,Y)$与$Z$独立, 则$E(Y|X,Z)=E(Y|X)$.

**注:** $E(Y|X_1,X_2)$表示关于由$X_1,X_2$生成的sigma-代数$\sigma(X_1,X_2)=\sigma(\sigma(X_1)\cup\sigma(X_2))$的条件期望. $(X,Y)$与$Z$独立指$\sigma(Z),\sigma(X,Y)$独立.

**证明:** 只需证

$$\begin{aligned}
&\int_A YdP=\int_A E(Y|X)dP,\forall A\in\sigma(X,Z)\\
\Longleftrightarrow&\int_A YdP=\int_A E(Y|X)dP,\forall A\in\sigma(X)\cup\sigma(Z) \text{【单调类定理】}\\
&\qquad\text{【不需对所有都进行验证, 只需要看子类,}\\
&\qquad\quad \sigma(X)\cup\sigma(Z)=\{X^{-1}(B),Z^{-1}(C):B,C\in\mathscr{B}(\mathbb{R})\}\text{】}\\
\Longleftrightarrow&\int_\Omega I_{X^{-1}(B)}I_{Z^{-1}(C)}YdP=\int_\Omega E(Y|X)I_{X^{-1}(B)}I_{Z^{-1}(C)}dP,\forall B,C\in\mathscr{B}(\mathbb{R})\\
&\qquad\text{【}I_{X^{-1}(B)}\text{即}I_B(X)\text{】}
\end{aligned}$$

事实上,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega I_B(X)I_C(Z)YdP&=P(Z\in C)\int_\Omega I_B(X)YdP \text{【}X,Z\text{独立】}\\
&=P(Z\in C)E(I_B(X)Y)\\
&=P(Z\in C)E(E(I_B(X)Y|X)) \text{【条件期望的期望=无条件期望】}\\
&=EI_C(Z)E(I_B(X)E(Y|X)) \text{【}I_B(X)\text{关于}X\text{可测】}\\
&=E(I_B(X)E(Y|X)I_C(Z)) \text{【独立性】}\\
&=\int_\Omega E(Y|X)I_B(X)I_C(Z)dP.
\end{aligned}$$

证完. □

**例 6.2.6** 设一列$r.v.\{X_n\}$依分布收敛于一个$r.v.\ X$, 记$\{N_t\}_{t\geq 0}$是一列正整数$r.v.$集合, 与$\{X_n\}$独立且依概率收敛为$\infty(t\to\infty)$. 证明: $X_{N_t}\xrightarrow{d}X,(t\to\infty)$.

**证明:** 固定$c\in\mathbb{R}$, 记$a_n=Ee^{icX_n},a=Ee^{icx}$, 由于$X_n\xrightarrow{d}X,(t\to\infty)$, 则$a_n\to a(n\to\infty)$. (依概率收敛与特征函数收敛是一一对应的!)

即$\forall\varepsilon>0,\exists M\in\mathbb{N}$, 使得当$n\geq M$时, 有$|a_n-a|\leq\varepsilon$. 因此

$$[|a_{N_t}-a|\leq\varepsilon]\supset[N_t\geq M],\Longleftrightarrow[|a_{N_t}-a|>\varepsilon]\subset[N_t<M].$$

则$P(|a_{N_t}-a|>\varepsilon)\leq P(N_t<M)\to 0(t\to\infty)$, (因为$\{N_t\}$依概率收敛为$\infty$). 则$a_{N_t}\xrightarrow{d}a,(t\to\infty)$.

下面用条件期望: 注意到(把$a_{N_t}$看作关于r.v.$N_t$的随机函数. 根据后面“注”的定理,

$$\begin{aligned}
Ea_{N_t}&=E[E(a_{N_t}|N_t)] \text{【取条件期望】}\\
&=E[(Ea_n)|_{n=N_t}]=Ea_{N_t} \text{【“注”的定理】}
\end{aligned}\tag{6.1}$$

则$Ea_{N_t}\to a=Ea$. 又由于$|a_{N_t}|\leq 1$, 根据控制收敛定理, $a_{N_t}\xrightarrow{L^1}a$, 特别地$Ea_{N_t}\to a(t\to\infty)$, 则$X_{N_t}\xrightarrow{d}X$.

**注:** 式(6.1)成立是因为下面定理成立:（研究生教材有）

**定理 6.2.2** 设$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$可测, $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$是$\sigma-$代数. $X,Y$是$r.v.$, 满足$X$关于$\mathscr{C}$可测, $Y$与$\mathscr{C}$独立, 且$E|g(X,Y)|<+\infty$, 则【把$g(x,Y)|_{x=X}$看作与$Y$有关的$r.v.$】

$$E[g(X,Y)|\mathscr{C}]=Eg(x,Y)|_{x=X}$$

例如: $g(x,y)=xy$, 则$E(XY|\mathscr{C})=XEY$, 恰好是条件期望的性质⑦(回顾前面).

**例 6.2.7 (习题)** 记$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间, $\mathscr{C}$是$\mathscr{F}$的子$\sigma-$代数, 记$P,Q$是两个在$\mathscr{F}$中相互绝对连续（即等价）的概率测度, $X_0$是$Q$关于$P$在$\mathscr{F}$上的*Radon-Nikodym density*, 证明下面性质成立:

(1)$0<E_P(X_0|\mathscr{C})<+\infty$, *a.s.*.

(2)对每个$\mathscr{F}$可测的非负$r.v.f$, $E_P(fX_0|\mathscr{C})=E_Q(f|\mathscr{C})E_P(X_0|\mathscr{C})$.

# 第 7 章　部分习题的参考答案

## § 7.1　第二章习题

**例 7.1.1** 已知随机向量$(X,Y)$的密度函数的分布为

$$p(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$P(X>2Y)$.

提示: $P(X>2Y)=\mathbb{E}I_A(x,y)=\int_A p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 其中$A=\{(x,y):x>2y\}\subset\mathbb{R}^2$.
复习: $\mathbb{E}f(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}F_\xi(x)$. 其中$\xi$是$n$维向量.

**例 7.1.2 (2012期中)** 若$\xi,\eta$是相互独立的随机变量, $\xi\sim N(0,1),\eta\sim N(0,1)$, 则$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$与$\varphi=\arctan\frac{\eta}{\xi}$是相互独立的.

**证明:** 令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$, 则$r=\sqrt{x^2+y^2},J=r$, 且

$$\theta=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x>0,\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi, & x<0,\end{cases}, \theta\in[-\pi/2,3\pi/2].$$

从而$(\rho,\varphi)$的密度函数为

$$q(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}re^{-\frac{r^2}{2}}, r>0.$$

而$\rho$的密度为

$$R(r)=\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\frac{1}{2\pi}re^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}\theta=re^{-\frac{r^2}{2}},$$

$\theta$的密度为

$$p(\theta)=\int_0^\infty\frac{1}{2\pi}re^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r=\frac{1}{2\pi}.$$

所以$q(r,\theta)=R(r)p(\theta)$, 从而$\theta,\rho$独立. □

**例 7.1.3 (2022某校推免)** 设$X,Y$为独立同分布的随机变量, 且$X$服从参数为*1*的指数分布, 求$\frac{X}{X+Y}$的密度函数.

**解:**【正解】$X\sim E(1)$, 则$X$的密度函数是$p(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

$\alpha=X+Y$的密度函数是

$$p_{X+Y}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(y-x)p(x)\mathrm{d}x.$$

当$y<0$时, $p_\alpha(y)=0$. 当$y\geq 0$时, $p_\alpha(y)=\int_0^y e^{-(y-x)}e^{-x}\mathrm{d}x=ye^{-y}$. 所以

$$p_\alpha(y)=\begin{cases} ye^{-y}, & y\geq 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

把$\beta=\dfrac{X}{X+Y}$的密度函数记为$p_\beta(y)$. 令$u=x+y$, $v=\dfrac{x}{x+y}$, 则$x=uv$, $y=u(1-v)$, 并且Jacobi矩阵为

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{bmatrix} v & u\\ 1-v & -u\end{bmatrix},\qquad |\det J|=u.$$

根据联合密度的替换公式, $u,v$的联合密度是

$$\begin{aligned} q(u,v)&=p(x)p(y)|\det J|\\ &=e^{-x}I_{[x\geq 0]}\cdot e^{-y}I_{[y\geq 0]}\cdot u\\ &=ue^{-u}I_{[x\geq 0,y\geq 0]}.\end{aligned}$$

注意当$x,y\geq 0$时, $u=x+y\geq 0$, 从而由$x=uv$, $y=u(1-v)$可得$v\in[0,1]$. 反之, 当$u\geq 0$, $v\in[0,1]$时, 也可以推出$x,y\geq 0$. 所以

$$I_{[x\geq 0,y\geq 0]}=I_{[u\geq 0]}I_{[0\leq v\leq 1]}.$$

故

$$q(u,v)=p_\alpha(u)I_{[0\leq v\leq 1]}.$$

从而根据上式可得$\alpha,\beta$独立, 并且$\beta$的密度函数是$p_\beta(v)=I_{[0\leq v\leq 1]}$, 即$\beta$服从$[0,1]$上的均匀分布. □

【错解. 错因是什么?】$X\sim E(1)$, 则$X$的密度函数是$p(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

$X+Y$的密度函数是

$$p_{X+Y}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(y-x)p(x)\mathrm{d}x.$$

当$y<0$时, $p_{X+Y}(y)=0$. 当$y\geq 0$时, $p_{X+Y}(y)=\int_0^y e^{-(y-x)}e^{-x}\mathrm{d}x=ye^{-y}$. 所以

$$p_{X+Y}(y)=\begin{cases} ye^{-y}, & y\geq 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

随机变量$Z=\dfrac{X}{X+Y}$的密度函数是

$$p_Z(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p(xy)p_{X+Y}(x)\mathrm{d}x.$$

当$y<0$时, $p_Z(y)=0$. 当$y\geq 0$时,

$$p_Z(y)=\int_0^{+\infty}|x|e^{-xy}\cdot xe^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2e^{-(y+1)x}\mathrm{d}x=\frac{2}{(y+1)^3}.$$

所以$\dfrac{X}{X+Y}$的密度函数是

$$p_Z(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{(y+1)^3}, & y\geq 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

**例 7.1.4 (2022某校推免)** *设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为独立同分布随机变量，且$X_1$的密度函数为$p(x)$. 证明:*

*(1) $P(\max\{X_1,\cdots,X_n\}=X_1)=\dfrac{1}{n}$;*

*(2) 随机变量$\max\{X_1,\cdots,X_n\}$与$I_{[X_1=\max\{X_1,\cdots,X_n\}]}$相互独立.*

**证明:** (1)由于$X_1,\cdots,X_n$是独立同分布的, 所以

$$P(\max\{X_1,\cdots,X_n\}=X_1)=P(\max\{X_1,\cdots,X_n\}=X_2)=\cdots=P(\max\{X_1,\cdots,X_n\}=X_n).$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{n}P(\max\{X_1,\cdots,X_n\}=X_k)=1,$$

所以$P(\max\{X_1,\cdots,X_n\}=X_1)=\dfrac{1}{n}$.

(2) 记$F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}p(t)\mathrm{d}t$. 注意到由于$X_1,\cdots,X_n$是独立同分布的, 故对任意实数$x\in\mathbb{R}$,

$$P(\max\{X_1,\cdots,X_n\}\leq x)=P(X_1\leq x,\cdots,X_n\leq x)=[P(X_1\leq x)]^n=[F(x)]^n$$

并且由(1),

$$P(I_{[X_1=\max\{X_1,\cdots,X_n\}]}=1)=P(X_1=\max\{X_1,\cdots,X_n\})=\frac{1}{n}$$

并且

$$\begin{aligned}&P(\max\{X_1,\cdots,X_n\}\leq x,I_{[X_1=\max\{X_1,\cdots,X_n\}]}=1)\\=&P(X_1\leq x,X_1=\max\{X_1,\cdots,X_n\})\\=&P(X_1\leq x,X_2\leq X_1,\cdots,X_n\leq X_1)\\=&\int_{-\infty}^{x}p(x_1)\left(\int_{-\infty}^{x_1}p(x_2)\mathrm{d}x_2\cdots\int_{-\infty}^{x_1}p(x_n)\mathrm{d}x_n\right)\mathrm{d}x_1\\=&\int_{-\infty}^{x}p(x_1)F(x_1)^{n-1}\mathrm{d}x_1=\int_{-\infty}^{x}F(x_1)^{n-1}\mathrm{d}F(x_1)\\\xlongequal{y=F(x_1)}&\int_{-\infty}^{F(x)}y^{n-1}\mathrm{d}y=\frac{1}{n}[F(x)]^n.\end{aligned}$$

于是我们证明了

$$P(\max\{X_1,\cdots,X_n\}\leq x,I_{[X_1=\max\{X_1,\cdots,X_n\}]}=1)=P(\max\{X_1,\cdots,X_n\}\leq x)P(I_{[X_1=\max\{X_1,\cdots,X_n\}]}=1),$$

从而随机变量$\max\{X_1,\cdots,X_n\}$与$I_{[X_1=\max\{X_1,\cdots,X_n\}]}$相互独立.

**例 7.1.5 (2022年丘成桐大学生数学竞赛(决赛)概率与统计部分)** *设$\mathcal{N}=\{1,2,3,4,\cdots\}$表示正整数全体, $\mathcal{P}=\{2,3,5,7,\cdots\}$表示素数全体. 记$a\mid b$表示$a$整除$b$. 固定实数$s>1$, 令$\zeta(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$,*

定义$\mathcal{N}$上的概率测度为$P_s(\{n\}) = \dfrac{1}{\zeta(s)}n^{-s}, n \in \mathcal{N}$. 对任意$p \in \mathcal{P}$, 定义$\mathcal{N}$上的随机变量$X_p$为$X_p(n) = \mathbf{1}_{\{p|n\}}(n)$, $n \in \mathcal{N}$, 其中$\{p|n\}$表示事件$\{n : p|n\} \subset \mathcal{N}$.

*(1)集合$\{X_p : p \in \mathcal{P}\}$中的随机变量在$P_s$的意义下是否相互独立?*

*(2)用概率方法证明Euler恒等式$\dfrac{1}{\zeta(s)} = \prod\limits_{p\in\mathcal{P}}(1 - p^{-s})$.*

**证明:** 我们省略下标$s$.

(1)对$p, q \in \mathcal{P}(p \neq q)$, 有

$$P(X_p = 1) = P(\{n : p|n\}) = P(\{pk : k = 1, 2, \cdots\}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\{pk\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(s)}(kp)^{-s} = p^{-s}.$$

并且

$$\begin{aligned} P(X_p = 1\text{且}X_q = 1) &= P(\{n : p|n\text{且}q|n\}) = P(\{pqk : k = 1, 2, \cdots\}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\{pqk\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(s)}(kpq)^{-s} = (pq)^{-s}. \end{aligned}$$

因此$P(X_p = 1\text{且}X_q = 1) = P(X_p = 1)P(X_q = 1)$. 利用$P(AB) = P(B) - P(\overline{A}B)$可证明对$x, y \in \{0, 1\}$都有

$$\begin{aligned} P(X_p = 0\text{且}X_q = 1) &= P(X_q = 1) - P(X_p = 1\text{且}X_q = 1) \\ &= q^{-s} - (pq)^{-s} = (1 - p^{-s})q^{-s} \\ &= P(X_p = 0)P(X_q = 1). \end{aligned}$$

其他两个是类似的. 故$\{X_p : p \in \mathcal{P}\}$中的随机变量都是相互独立的.

(2)为方便起见, 把素数从小到大排列为$\mathcal{P} = \{p_i : i = 1, 2, \cdots\}$. 于是由独立性可知, 对任意正整数$N$, 有

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{N}[X_{p_k} = 0]\right) = \prod_{k=1}^{N} P(X_{p_k} = 0) = \prod_{k=1}^{N}(1 - p_k^{-s}).$$

下面记$A_N = \bigcap\limits_{k=1}^{N}[X_{p_k} = 0]$, $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[X_{p_k} = 0]$, 则$A_N$单调递减趋于$A$. (即$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_N \supset \cdots \supset A$且$\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} A_N = A$)

注意到, $n \in A_N = \bigcap\limits_{k=1}^{N}[X_{p_k} = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{N}\{n : p_k \nmid n\}$ 等价于$p_k \nmid n$对任意正整数$k = 1, 2, \cdots, N$成立.

根据大于1的正整数必定可以分解成一些素数的乘积, 即对任意$n > 1$, 存在$p_m \in \mathcal{P}$使得$p_m|n$, 于是$n \notin \bigcap\limits_{k=1}^{m}[X_{p_k} = 0] = A_m$, 所以$n \notin A(A \subset A_m$, $A$是个更小的集合). 于是必有

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty}[X_{p_k} = 0] = \{1\}.$$

从而根据从上连续性,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = P(\{1\}) = P(A) = \lim_{N\to\infty} P(A_N) = \lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}(1 - p_k^{-s}) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - p_k^{-s}).$$

这就完成了证明. □

## § 7.2 第三章习题

**例 7.2.1** *在长为$a$的线段上任取两点$X$和$Y$, 求此两点之间的平均长度.*

**解:** $X \sim U(0,a), Y \sim U(0,a)$, 且$X,Y$独立, 则

$$\mathbb{E}|X-Y| = \int_{\mathbb{R}^2} |x-y|\mathrm{d}F(x,y) = \int_0^a \int_0^a |x-y|\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \cdots = \frac{a}{3}.$$

**注:** $\mathrm{d}F(x,y) = p_X(x)p_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**例 7.2.2 (2022某校推免)** *假定随机变量$X$服从参数为1的泊松分布, 现在对其独立观测$n$次, 设$Y_n$为$X$大于1的次数, 求$Y_n^2$的期望.*

**解:** $X \sim P(1)$, 则$P(X=k) = e^{-1}\frac{1}{k!}$, $k = 0,1,\cdots$. 所以

$$P(X>1) = 1-2e^{-1}.$$

由于每次观测都是独立的, 所以$Y_n \sim b(n, 1-2e^{-1})$, 即$Y_n$服从二项分布. 故$\mathbb{E}Y_n = (1-2e^{-1})n$, $\mathbb{D}Y_n = 2e^{-1}(1-2e^{-1})n$. 注意到恒等式

$$\mathbb{D}Y_n = \mathbb{E}(Y_n)^2 - (\mathbb{E}Y_n)^2,$$

所以$Y_n^2$的期望为

$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \mathbb{D}Y_n + (\mathbb{E}Y_n)^2 = 2e^{-1}(1-2e^{-1})n + (1-2e^{-1})^2n^2.$$

**例 7.2.3 (2019期末)** *$X,Y$是独立的随机变量, $EX=0$, $E|Y|<+\infty, E(|X+Y|)<+\infty$. 证明:*

$$E(|Y|) \le E(|X+Y|).$$

**证明:** $EX = 0 \Rightarrow |y| = |E(X+y)|$. 所以

$$\begin{aligned} E|Y| = \int_{\mathbb{R}} |y|\mathrm{d}F_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} |E(y+X)|\mathrm{d}F_Y(y) \\ &\le \int_{\mathbb{R}} E|y+X|\mathrm{d}F_Y(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |y+x|\mathrm{d}F_X(x)\mathrm{d}F_Y(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |x+y|\mathrm{d}F_{(X,Y)}(x,y) \qquad (\text{独立性}) \\ &= E|X+Y|. \end{aligned}$$

**例 7.2.4** *设随机变量$X,Y$的期望分别为$-2,2$, 方差分别为$1,4$, 且$\mathbb{E}(X+2)(Y-2)=-1$. 请用所学知识给出$P(|X+Y|\ge 6)$的一个非平凡上界.*

**证明:** 【方法一】注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X+Y|\geq 6) &\leq \frac{\mathbb{D}(X+Y)}{36}\\ &= \frac{1}{36}\left(\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2+2\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)]+\mathbb{E}(Y-\mathbb{E}Y)^2\right)\\ &= \frac{1}{36}(\mathbb{D}X+\mathbb{D}Y-2)=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

【方法二】对任意$p\in(0,2)$,

$$P(|X+Y|\geq 6)\leq \frac{1}{6^p}\mathbb{E}|X+Y|^p\leq \frac{1}{6^p}(\mathbb{E}|X+Y|^2)^{p/2}=\frac{1}{6}^p\cdot 3^{p/2}=\frac{1}{12^{p/2}}<1.$$

**注:** 方法二用了Holder不等式.

**例 7.2.5 (2022某校推免)** 设$\xi$为取自然数值的随机变量, $\varphi$为其特征函数, 证明:

$$P(\xi=k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}\varphi(t)\mathrm{d}t,\qquad k=0,1,2,\cdots.$$

**证明:** 根据特征函数的定义,

$$\varphi(t)=\mathbb{E}e^{it\xi}=\sum_{j=0}^{\infty}e^{ijt}P(\xi=j).$$

注意到Fourier基函数具有正交性, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(k-j)t}\mathrm{d}t=\begin{cases}2\pi, & k=j,\\ 0, & k\neq j,\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}\varphi(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}\sum_{j=0}^{\infty}e^{ijt}P(\xi=j)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{\infty}P(\xi=j)\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}e^{ijt}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi P(\xi=k)=P(\xi=k).\end{aligned}$$

其中级数和积分可交换是因为有控制收敛定理, 并且

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}e^{ijt}P(\xi=j)\right|\leq\sum_{j=0}^{\infty}P(\xi=j)=1.$$

而1在$[-\pi,\pi]$上的积分有界, 即常函数1是可积的. □

**例 7.2.6** 如果$\{X_n\}$是一列非负整数值$r.v.$, 则

$$EX=\sum_{n=0}^{\infty}P(X\geq n).$$

**证明:** 注意到

$$
\begin{aligned}
EX &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(X=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P(X=n) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty} P(X=n) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i). \qquad \square
\end{aligned}
$$

**例 7.2.7** 假定$X$是非负$r.v.$, $p \geq 1$为常数, 则$\mathbb{E}X^p = p\int_0^\infty y^{p-1}P(X>y)dy$.

**证明:** 注意到Fubini定理,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X^p &= \int_0^\infty x^p dF(x) \\
&= \int_0^\infty \int_0^x py^{p-1}dydF(x) \qquad \text{(不可以用Newton-Leibniz公式)} \\
&= p\int_0^\infty \int_y^\infty df(x)dy \qquad \text{(被积函数非负可换序)} \\
&= p\int_0^\infty y^{p-1}P(X>y)dy.
\end{aligned}
$$

**注:** 特别地, 当$p=1$时, 可以变成如下等式: $EX = \int_0^\infty P(X>y)dy$.

**例 7.2.8 (2016丘赛Team)** 在单位圆$x^2+y^2=1$上按均匀分布随机取$n$个点$(n \geq 2)$, 这$n$个点可以把单位圆分成$n$段圆弧. 求包含点$(1,0)$的圆弧的长度的数学期望和方差.

**解:** 圆上的点可由其极坐标的角度唯一决定, 故可设$\xi_1, \cdots, \xi_n \sim U[0,2\pi]$是$n$个独立同分布的随机变量. 记$\xi_1^* = \min\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$, $\xi_n^* = \max\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$. 于是包含点$(1,0)$的圆弧长度是一个随机变量, 如下定义:

$$X = 2\pi + \xi_1^* - \xi_n^*.$$

为了求$X$的数学期望, 只需求$\xi_1^*$和$\xi_n^*$的数学期望, 这可以让我们联想到顺序统计量的分布. 当$0 \leq x \leq 2\pi$时, 我们有

$$
\begin{aligned}
& P(\xi_1^* > x) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i \geq x) = \left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^n, \\
& P(\xi_n^* \leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i \leq x) = \left(\frac{x}{2\pi}\right)^n, \\
\Rightarrow \quad & P(\xi_n^* > x) = 1-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^n.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi_1^* &= \int_0^{2\pi} P(\xi_1^*>x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^n \mathrm{d}x = -\frac{2\pi}{n+1}\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^{n+1}\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{n+1}, \\
\mathbb{E}\xi_n^* &= \int_0^{2\pi} P(\xi_n^*>x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} 1-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^n \mathrm{d}x = 2\pi - \frac{2\pi}{n+1}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{n+1}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi - \frac{2\pi}{n+1},
\end{aligned}
$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \mathbb{E}(2\pi+\xi_1^*-\xi_n^*)\\ &= 2\pi+\mathbb{E}\xi_1^*-\mathbb{E}\xi_n^* = 2\pi+\frac{2\pi}{n+1}-\left(2\pi-\frac{2\pi}{n+1}\right)=\frac{4\pi}{n+1}.\end{aligned}$$

计算方差稍微麻烦一点，因为$\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}X)^2$，而$X^2$展开后会得到$\xi_1^*\xi_n^*$，我们需要计算$\mathbb{E}(\xi_1^*\xi_n^*)$，就要知道联合密度是什么. 首先，当$0<x<y<2\pi$时，

$$P(x<\xi_1^*,\xi_n^*\le y)=\prod_{i=1}^n P(x<\xi_i\le y)=\left(\frac{y-x}{2\pi}\right)^n.$$

因此联合分布函数是

$$F(x,y)=P(\xi_1^*\le x,\xi_n^*\le y)=P(\xi_n^*\le y)-P(x<\xi_1^*,\xi_n^*\le y)=\left(\frac{y}{2\pi}\right)^n-\left(\frac{y-x}{2\pi}\right)^n.$$

所以密度为

$$p(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\frac{n(n-1)}{(2\pi)^n}(y-x)^{n-2}I_{[0\le x<y\le 2\pi]}.$$

所以

$$\mathbb{E}(\xi_1^*\xi_n^*)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\int_0^y xy\cdot\frac{n(n-1)}{(2\pi)^n}(y-x)^{n-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{(2\pi)^2}{n+2}.$$

(中间用一下换元$x=yt$会方便一点) 另外，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\xi_1^*)^2] &= \int_0^{2\pi}2xP(\xi_1^*>x)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}2x\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^n\mathrm{d}x=\frac{2(2\pi)^2}{(n+1)(n+2)}\\ \mathbb{E}[(\xi_n^*)^2] &= \int_0^{2\pi}2xP(\xi_n^*>x)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}2x-2x\left(\frac{x}{2\pi}\right)^n\mathrm{d}x=(2\pi)^2-\frac{2(2\pi)^2}{n+2}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbb{D}X &= \mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2\\ &= \mathbb{E}[(2\pi)^2+4\pi\xi_1^*-4\pi\xi_n^*+(\xi_1^*)^2+(\xi_n^*)^2-2\xi_1^*\xi_n^*]-\left(\frac{4\pi}{n+1}\right)^2\\ &= (2\pi)^2+4\pi\cdot\frac{2\pi}{n+1}-4\pi\cdot\left(2\pi-\frac{2\pi}{n+1}\right)\\ &\quad+\frac{2(2\pi)^2}{(n+1)(n+2)}+\left[(2\pi)^2-\frac{2(2\pi)^2}{n+2}\right]-\frac{2(2\pi)^2}{n+2}-\frac{4(2\pi)^2}{(n+1)^2}\\ &= \frac{8\pi^2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)}.\end{aligned}$$

## § 7.3 第四章习题

**例 7.3.1** 设$\{X_n\}$是*i.i.d.r.v*, $X_1\sim U(0,1)$. 令$Z_n=\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{1/n}$，证明；存在$C$使得$Z_n\xrightarrow{P}C$.

**证明:** 注意到

$$Z_n = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right) \xrightarrow{P} e^{E\ln x_1}.$$

(最后一步用了弱大数定律). □

**注:** $X_n$依概率收敛, $f$连续, 则$f(X_n)$也依概率收敛.

**例 7.3.2** 如果$\sum_{n=1}^{\infty}\|\xi_n-\xi\|_p^p < +\infty$, 则$\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi$.

**证明:** 根据几乎必然收敛的刻画, 以及概率测度的单调性、从上连续性, 可以把欲证命题进行等价转化:

$$\begin{aligned}\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi &\iff \forall\varepsilon>0, P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}[|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon]\right)=0\\ &\iff \forall\varepsilon>0, \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}[|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon]\right)=0.\end{aligned}$$

利用Cauchy准则, 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\xi_n-\xi\|_p^p < +\infty \iff \lim_{k\to\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\|\xi_n-\xi\|_p^p = 0.$$

则

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}[|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon]\right) &\leq \sum_{n=k}^{\infty}P[|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon] \quad (\text{次}\sigma\text{可加性})\\ &\leq \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^p}E|\xi_n-\xi|^p \quad (\text{Chebyshev不等式})\\ &\to 0(k\to\infty)\end{aligned}$$

**例 7.3.3** 让$\{X_n\}$为正$r.v.$列, 并假定$X_n \xrightarrow{P} 0$且$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}X_n = 2$. 证明$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_n-1|$存在, 并求这个值.

**证明:** $E|X_n-1| = E(1-X_n)I_{[X_n\leq 1]} + E(X_n-1)I_{[X_n>1]}$. 而

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(1-X_n)I_{[X_n\leq 1]} &= P(X_n\leq 1) - \mathbb{E}X_nI_{[X_n\leq 1]}\\ &= 1-P(X_n>1)-\mathbb{E}X_nI_{[X_n\leq 1]}\\ &\to 1(n\to\infty).\end{aligned}$$

上面$P(X_n>1)\to 0$是因为题目条件的依概率收敛, 而$\mathbb{E}X_nI_{[X_n\leq 1]}\to 0$的原因请自己思考.

另一方面,

$$\begin{aligned}E(X_n-1)I_{[X_n>1]} &= EX_nI_{[X_n>1]} - P(X_n>1)\\ &= EX_n - EX_nI_{[X_n\leq 1]} - P(X_n>1) \to 2(n\to\infty).\end{aligned}$$

则$\lim_{n\to\infty}E|X_n-1| = 3$. □

**例 7.3.4 (2014个人)** *设$\{X_n\}$是一列不相关的$r.v.$列且均值为0, 满足*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nE|X_n|^2 < \infty.$$

*则$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$几乎必然收敛.*

**证明:** 易知$S_n \xrightarrow{L^2} S \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} X_i$, 这是因为

$$E\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = E\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} X_i\right)^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} EX_i^2 \to 0(n \to \infty).$$

这里最后一个等号用到了不相关性($EXY = EXEY$), 以及$EX_k = 0, k \in \mathbb{N}$.

从而$\forall \varepsilon > 0$,

$$P(|S_n - S| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E|S_n - S|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} E|X_i|^2.$$

故

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n - S| \geq \varepsilon) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} E|X_i|^2 \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{i-1} E|X_i|^2 \text{ 【非负, 可换求和次序】} \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=2}^{\infty} (i-1) E|X_i|^2 \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} iE|X_i|^2 < \infty \text{ 【条件】}.
\end{aligned}$$

根据Borel-Cantelli引理, $P([|S_n - S| \geq \varepsilon] i.o.) = 0$, 则$S_n \xrightarrow{a.s.} S$. □

**例 7.3.5** *设$\{X_n\}$两两不相关, 且$\sum_{n=1}^{+\infty} nD(X_n) < +\infty$. 证明: $S_n = \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i)$几乎必然收敛.*

**证明:** 由两两不相关性,

$$E|S_m - S_n|^2 = E\left(\sum_{i=n+1}^{m} (X_i - EX_i)\right)^2 = \sum_{i=n+1}^{m} DX_i \to 0(n, m \to +\infty).$$

则$S_n \xrightarrow{L^2} S$. 由Chebyshev不等式,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n - S| \geq \varepsilon) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\left|\sum_{i=n+1}^{+\infty} (X_i - EX_i)\right| \geq \varepsilon\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=n+1}^{+\infty} DX_i \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=2}^{+\infty} \sum_{n=1}^{i-1} DX_n \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=2}^{+\infty} iDX_i < +\infty.
\end{aligned}$$

由Borel-Cantelli引理, $P(|S_n - S| \ge \varepsilon, i.o.) = 0$. 则$S_n \xrightarrow{a.s.} S$. □

**例 7.3.6 (2016Team,4)** *让$\{X_n\}_{n\ge1}$为i.i.d.实值r.v.列, 证明或否定: 若$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|X_n|}{n} \le 1, a.s.$, 则*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \ge n) < \infty.$$

**证明:** 主要用两次Nice引理. 根据i.i.d.条件,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \ge n) \le E|X_1| \le \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \ge n) + 1.$$

用$\frac{1}{2}|X_1|$代替$|X_1|$有(事实上, 换成$k|X_1|, 0 < k < 1$都行)

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \ge 2n) \le \frac{1}{2}E|X_1| \le \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \ge 2n) + 1.$$

(反证)若

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \ge n) = \infty,$$

则根据前面的两个Nice不等式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \ge 2n) = \infty,$$

根据Borel-Cantelli引理, $P\left(\frac{|X_n|}{n} \ge 2, i.o.\right) = 1$. 则$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|X_n|}{n} \ge 2$, a.s., 与条件矛盾. □

**例 7.3.7 (2019Team,1)** *假定$\{X_n\}_{n\ge1}$是i.i.d.r.v.列且共同分布是参数为1的指数分布, 则*

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\log n} = 1\right) = 1.$$

**注:** $X_n$的分布函数是$p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$. 我们的想法是用Borel-Cantelli引理. 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{X_n}{\log n} \ge a\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 \ge a\log n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a\log n}^{\infty} e^{-x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} = \begin{cases} < +\infty, & a > 1, \\ = +\infty, & a \le 1. \end{cases}\end{aligned}$$

则当$a > 1$时,

$$P\left(\frac{X_n}{\log n} \ge a, i.o.\right) = 0 \Longleftrightarrow P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\left[\frac{X_n}{\log n} < a\right]\right) = 1.$$

即从某个$n$以后所有事件$\left[\frac{X_n}{\log n} < a\right]$都发生, 则根据$a > 1$是任意的, 必有$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{X_n}{\log n} \le 1$, a.s..

当$a \le 1$时, 由Borel-Cantelli引理以及题目中i.i.d条件, $P\left(\frac{X_n}{\log n} \ge a, i.o.\right) = 1$. 因此$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{X_n}{\log n} \ge 1$, a.s..

综上, $P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\log n}=1\right)=1.$. □

**例 7.3.8** 设$f$单调不降, $\sum_{n=1}^{\infty}Ef(|X_n-X|)<\infty$. 证明: $X_n\xrightarrow{a.s.}X$.

**注:** 考虑Chebyshev不等式与Borel-Cantelli引理.

**证明:** $\forall\varepsilon>0$, 由几乎必然收敛刻画, 只需证

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty}[|X_k-X|\geq\varepsilon]\right)=0.$$

由Borel-Cantelli引理, 只需证

$$\sum_{n=1}^{+\infty}P(|X_n-X|\geq\varepsilon)<+\infty.$$

事实上, 由Chebyshev不等式的思想,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}P(|X_n-X|\geq\varepsilon)\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{f(\varepsilon)}Ef(|X_n-X|)<+\infty.$$

**例 7.3.9 (2013年丘成桐大学生数学竞赛团体赛)** 设实数$\varepsilon>0$, 证明: 对几乎所有的$x\in[0,1]$, 只有有限个有理数$\frac{p}{q}\in(0,1)$(其中$p,q\in\mathbb{N}^+$)满足

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2(\log q)^{1+\varepsilon}}.$$

**注:** Dirichlet定理: 对任意实数$\theta$, 存在无穷多个既约有理数$\frac{p}{q}$满足

$$\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

**证明:** 记$P$表示$[0,1]$上的概率测度, 那么本题意思是要证明

$$P\left(\left\{x\in[0,1]\middle|\text{只有有限个有理数}\frac{p}{q}\in(0,1)(\text{其中}p,q\in\mathbb{N}^+)\text{满足}\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2(\log q)^{1+\varepsilon}}.\right\}\right)=1.$$

首先注意到

对几乎所有的$x\in[0,1]$, 只有有限个有理数$\frac{p}{q}\in(0,1)$, 使得$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2(\log q)^{1+\varepsilon}}$.

$\Leftrightarrow$对几乎所有的$x\in[0,1]$, 只对有限个正整数$q\geq2$, 存在$p\in\{1,2,\cdots,q-1\}$, 使得$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2(\log q)^{1+\varepsilon}}$.

$\Leftrightarrow$事件$A_q=\left\{x\in[0,1]\middle|\text{存在}p\in\{1,2,\cdots,q-1\}, \text{使得}\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2(\log q)^{1+\varepsilon}}.\right\}$发生无限多次的概率为0.

所以我们只需要用Borel-Cantelli引理来说明最后的事实即可.

事实上,

$$\begin{aligned}P(A_q) &\leq P\left(\bigcup_{p=1}^{q-1}\left[\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2(\log q)^{1+\varepsilon}}\right]\right)\\ &\leq \sum_{p=1}^{q-1}P\left(\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2(\log q)^{1+\varepsilon}}\right)\\ &=(q-1)\cdot\frac{2}{q^2(\log q)^{1+\varepsilon}}<\frac{2}{q(\log q)^{1+\varepsilon}},\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{q=2}^{\infty}P(A_q)\leq\sum_{q=2}^{\infty}\frac{2}{q(\log q)^{1+\varepsilon}}<\infty.$$

这个级数收敛可以利用积分判别法来说明:

$$\sum_{q=3}^{\infty}\frac{2}{q(\log q)^{1+\varepsilon}}\leq\sum_{q=3}^{\infty}\int_{q-1}^{q}\frac{2}{t(\log t)^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}t=\int_{2}^{\infty}\frac{2}{t(\log t)^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}t=\frac{2}{\varepsilon\cdot(\log 2)^{\varepsilon}}.$$

这就完成了证明. □

**注:** 辛钦(Khintchine)在1924年[①]给出如下结论: 若$\psi:\mathbb{N}\to(0,+\infty)$是单调函数, 且$P$是$[0,1]$上的Lebesgue测度. 记集合

$$L_\psi=\left\{x\in[0,1]\middle|\text{有无限多个有理数}\frac{p}{q}\in(0,1)\text{满足}\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{\psi(q)}{q}\right\}$$

则

$$P\left(L_\psi\right)=\begin{cases}0, & \text{若}\sum\limits_{q=1}^{\infty}\psi(q)<\infty,\\ 1, & \text{若}\sum\limits_{q=1}^{\infty}\psi(q)=\infty.\end{cases}$$

关于它的介绍可参见[V. Bernik, V. Beresnevich, F. Götze, O. Kukso, 2013, Distribution of Algebraic Numbers and Metric Theory of Diophantine Approximation.]

## § 7.4 第五章习题

回顾前面笔记没提到的de Movir-Laplace定理(可以用Lindberg-Lévy推导):

**定理 7.4.1 (de Movir-Laplace)** *在$n$重Bernoulli试验中, 事件$A$在每次试验中出现的概率为$p(0<p<1)$, 记$y_n$为$n$次试验中事件$A$出现的次数, $y_n^*=\dfrac{y_n-np}{\sqrt{npq}}$*(**标准化**), *则*

$$\lim_{n\to\infty}P(y_n^*\leq y)=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\Phi(y),\forall y\in\mathbb{R}.$$

[①] A.Ya. Khintchine, Einige Satzeüber Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen. Math. Ann. 92, 115–125 (1924)

**注:** 我们有

$$P(k_1 \le y_n \le k_2) = P\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{y_n-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

有时候修正0.5更精确: 采用$\Phi\left(\frac{k_2-np+0.5}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np-0.5}{\sqrt{npq}}\right)$.

当$np>5$且$n(1-p)>5$时, 用正态分布近似二项分布.

**例 7.4.1** *某车间有同型号的机床200台, 在1小时内每台机床约有70%时间是工作的. 假定每个机床工作是相互独立的, 工作时每台机床要消耗电能15千瓦, 问至少要多少电能才可以有95%可能性保证此车间正常生产? ($\Phi(1.645)=0.95$).*

**解:** $n=200, p=0.7, \beta=95\%$, 记$y$为台数. 则

$$P\left(\frac{y_n-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{y}{\sqrt{npq}} - \frac{np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi\left(\frac{y-np-0.5}{\sqrt{npq}}\right) \ge 95\%,$$

等价于

$$\Phi\left(\frac{y-140-0.5}{\sqrt{42}}\right) \ge 95\%, \Rightarrow \frac{y-140-0.5}{\sqrt{42}} \ge 1.645, \Rightarrow y \ge 150.16.$$

于是$15y \ge 2252.4$(千瓦), 至少要2252.4千瓦的电能才可以有95%可能性保证此车间正常生产.

**例 7.4.2** *设$X_2, X_3, \cdots$是i.i.d.r.v., 满足*

$$P(X_n=n)=P(X_n=-n)=\frac{1}{2n\log n}, P(X_n=0)=1-\frac{1}{n\log n}.$$

*通过验证$\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} X_i$依概率收敛到0而不几乎处处收敛到0, 来证明这个序列满足弱大数定律, 但不满足强大数定律.*

**提示:** 设$S_n = X_1 + \cdots + X_n$, 则

$$E(S_n^2) = \sum_{i=2}^{n} \frac{i}{\log i} \le \frac{n^2}{\log n}.$$

因此

$$P\left(\frac{S_n}{n} \ge \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{D}\left(\frac{S_n}{n}\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon^2\log n} \to 0 (n\to\infty).$$

另一方面, $\sum_{i=2}^{n} P(|X_i| \ge i) = \sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i\log i} = +\infty$, 由Borel-Cantelli引理可知$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}[|X_n|\ge n]\right)=1$. 对某个$i$, 我们有$|X_i| = |S_i - S_{i-1}| \ge i$, 推出$\frac{S_n}{n}$几乎必然不收敛. □

**例 7.4.3** *构造一列i.i.d.r.v$\{X_r : r \ge 1\}$, 满足下列条件:*

*(1)$EX_r = 0, \forall r \ge 1$;*

*(2)$\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_r \overset{a.s.}{\Longrightarrow} -\infty (n\to\infty)$.*

**提示:** 构造
$$P(X_n=-n)=1-\frac{1}{n^2}, P(X_n=n^3-n)=\frac{1}{n^2}.$$
那么$X_n$的期望为0. 但是
$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\frac{X_n}{n}\neq -1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty.$$
由Borel-Cantelli引理, $P(X_n/n\to -1)=1$.

根据数学分析, 若$x_n\to -1$, 则$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\to -1$, 从而推出(2). □