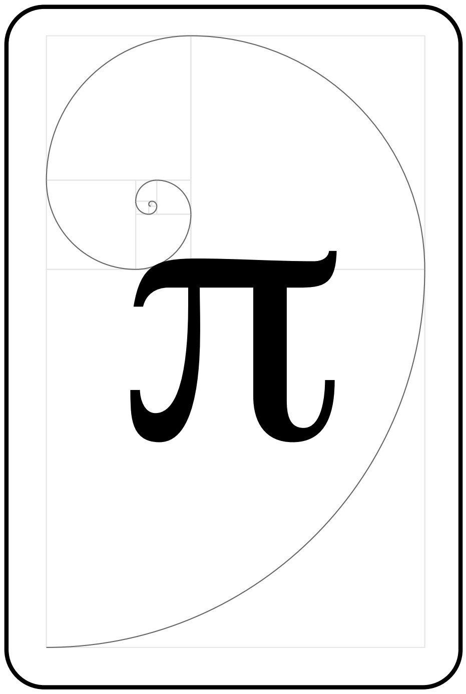


数学笔记

目录

第一章 LaTeX

§1.1 符号定义

1.1.1 常用符号

代码(小写)	代码(大写)	符号	名称	代码(小写)	代码(大写)	符号	名称
`\a`	`A`	α A	alpha	`\n`	`N`	ν N	nu
`\b`	`B`	β B	beta	`\x`	`\Xi`	ξ Ξ	xi
`\g`	`\Gamma`	γ Γ	gamma	`o`	`O`	o O	omicron
`\d`	`\Delta`	δ Δ	delta	`\pi`	`\Pi`	π Π	pi
`\e`	`E`	ϵ E	epsilon	`\r`	`P`	ρ P	rho
`\z`	`Z`	ζ Z	zeta	`\s`	`\Sigma`	σ Σ	sigma
`\h`	`H`	η H	eta	`\t`	`T`	τ T	tau
`\q,\th`	`\Theta`	θ Θ	theta	`\u`	`\Upsilon`	υ Υ	upsilon
`\i`	`I`	ι I	iota	`\f`	`\Phi`	ϕ Φ	phi
`\ka`	`K`	κ K	kappa	`\c`	`X`	χ X	chi
`\l`	`\Lambda`	λ Λ	lambda	`\y`	`\Psi`	ψ Ψ	psi
`\m`	`M`	μ M	mu	`\o,\w`	`\Omega`	ω Ω	omega

表 1.1: 希腊字母

代码	符号	意义
`\p`	π	圆周率
`\ee`	e	自然常数
`\ii`	i	虚数单位
`\dd`	d	微分
`\pd`	∂	偏微分
`\vd`	δ	变分
`\abs{x}`	$\lvert x\rvert$	绝对值

表 1.2: 运算符、常数、函数

代码	符号	意义
`x`	x	变量
`\mathrm{x}`	x	符号
`\sR`	$\mathcal{R}$	手写体
`\vec{a}`	$\vec{a}$	向量(形式 A)
`\vecb{a}`	$\boldsymbol{a}$	向量(形式 B)
`\R`	$\mathbb{R}$	实数集

表 1.3: 修饰符

§1.2 环境

1.2.1 公式

定义	用法	说明
`mytable|`	<对齐方式><标题><内容>|	用于生成一个简单的三线表格。
`vuyi|`	<内容>|	用于生成一段注意的内容。
`liti|`	<内容>|	用于生成一道例题。

代码	符号	名称	代码	符号	名称
\ve	ε	epsilon	\Q,\Th	$\varTheta$	theta
\vq,\vth	ϑ	theta	\L	$\varLambda$	lambda
\vk	$\varkappa$	kappa	\X	$\varXi$	xi
\vp	ϖ	pi	\P	$\varPi$	pi
\vr	ϱ	rho	\vS	$\varSigma$	sigma
\vs	ς	simga	\U	$\varUpsilon$	upsilon
\j,\vf	φ	phi	\F	$\varPhi$	phi
\G	$\varGamma$	gamma	\Y	$\varPsi$	psi
\D	$\varDelta$	delta	\O,\W	$\varOmega$	omega

表 1.4: 希腊字母变体

定义	用法	说明
mytable	{<对齐方式>}{<标题>}{<内容>}	用于生成一个简单的三线表格。
vuyi	{<内容>}	用于生成一段注意的内容。
liti	{<内容>}	用于生成一道例题。

表 1.5: 环境

定义	用法	说明
fm	<空>	在一个段落前面产生一个标记。
dfa	{<定义>}	用于标明一个定义。

表 1.6: 命令

第二章　高等数学

§2.1　微积分纵览

2.1.1　高等数学的主要内容

一元函数微分学、一元函数积分学、矢量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程.

2.1.2　计算平面图形的面积

计算半径为 r 的圆的面积:

假设圆的半径为 r, 内接正 n 边形, 每条边所对的圆的弧度为 $\frac{2\pi}{n}$, 根据三角形的面积公式, 每个三角形的面积为 $r^2\sin\frac{2\pi}{n}$, 所以正 n 边形的面积为 $nr^2\sin\frac{2\pi}{n}$. 当 $n\to\infty$ 时, 正 n 边形的面积等于圆形的面积. 则有:

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}=\pi r^2\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}=\pi r^2 \tag{2.1}$$

求解以抛物线和 x 轴所围成的图形的面积:

将要求的区间进行 n 等分, 则产生了 $n+1$ 个横坐标, 分别是 $0, 1/n, 2/n, \cdots, 1$. 每个小矩形的宽为 $1/n$, 每个小矩形的高为其左端或右端的函数值. 所以有左和和右和之分. 左和为($k=0,1,2,\cdots,n$):

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{2.2}$$

同理, 右和为:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{2.3}$$

显然, 曲边图形的面积介于左和与右和之间, 当 $n\to\infty$ 时, 三者的大小相等, 即为图形的面积.

思考: 如何求证圆锥的体积为 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$?

2.1.3　计算无穷个数的和

求三角形数($1, 3, 6, 10, \cdots$)的倒数和 $s=1/1+1/3+1/6+\cdots$:

2.1.4　如何学习微积分

明确学习微积分的目的: 从实际问题抽象出数学模型的能力、计算与分析的能力、了解和使用现代数学语言和符号的能力、使用数学软件学习和应用数学的能力.

数学的三大特点: 研究对象的抽象性、论证方法的演绎性以及应用的广泛性.

怀着浓厚的兴趣学习数学: 数学本身体现体现着美的神奇——和谐、简洁、对称. 因为数学是美丽的, 所以需要欣赏; 因为数学是有趣的, 故而数学可以欣赏; 因为数学是有用的, 因此数学值得欣赏.

§2.2 如何用 Mathematica 做微积分

2.2.1 Mathematica 基本操作

操作	键盘快捷方式
执行一个单元	`Shift+Enter`
停止一个单元	`Alt+.`

表 2.1: 基本操作快捷方式

输入	意义
`Pi`	圆周率
`Degree`	角度(角度制)
`E`	自然常数
`Infinity`	无穷大
`I`	虚数单位

表 2.2: 数学常数

§2.3 集合与映射

2.3.1 集合的概念与运算

自然数集 $\mathbb{N}$,整数集 $\mathbb{Z}$,有理数集 $\mathbb{Q}$(分子、分母都是整数的小数,分母不为 0),实数集 $\mathbb{R}$,复数集 $\mathbb{C}$.

❐ **例** 证明:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

$\boxed{\forall x\in A\cap(B\cup C)}\Rightarrow\boxed{x\in A\text{ 且 }x\in B\cup C}\Rightarrow\boxed{x\in A\text{ 且 }x\in B\text{ 或 }x\in C}\Rightarrow\boxed{x\in A\cap B\text{ 或 }x\in A\cap C}$
$\Rightarrow\boxed{x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)}\Rightarrow\boxed{A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)}$;

$\boxed{\forall x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)}\Rightarrow\boxed{x\in A\cap B\text{ 或 }x\in A\cap C}\Rightarrow\boxed{x\in A\text{ 且 }x\in B\text{ 或 }x\in A\text{ 且 }x\in C}$
$\Rightarrow\boxed{x\in A\text{ 且 }x\in B\text{ 或 }x\in C}\Rightarrow\boxed{x\in A\text{ 且 }x\in B\cup C}\Rightarrow\boxed{x\in A\cap(B\cup C)}\Rightarrow\boxed{(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)}$.

综上,$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 成立.

❖ **直积**(笛卡尔积):$A\times B=\{(x,y)|x\in A,y\in B\}$.
已知 $A=\{1,2\}$,$B=\{2,3,4\}$,那么 A 与 B 的直积为 $A\times B=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$.

2.3.2 确界与连续性公理

❇ **上界** 设 E 是一个非空实数集,M 是一个实常数,如果对于 E 中的任何元素 x,均有 $x\leqslant M$,则称 M 为数集 E 的一个上界,并称 E 有上界。上界中最小的为上确界,记为 $\sup E$。

❇ **下界** 设 E 是一个非空实数集,m 是一个实常数,如果对于 E 中的任何元素 x,均有 $x\geqslant M$,则称 M 为数集 E 的一个下界,并称 E 有下界。上界中最大的为下确界,记为 $\inf E$。

➽ **注意** 上下界不一定是属于集合的一部分,它只是边界。

2.3.3 映射

❇ **像和原像** 当 $f:x\mapsto y$ 时,称 y 为 x 的像,记作 $y=f(x)$,并称 x 为 y 的原像。
图:单射和满射和双射

2.3.4 集合的比较

等势 设 A、B 是两个集合,若存在一个一一映射 $\varphi : A \to B$,则称集 A 和集 B 是等势的。

两个有限集是等势的,当且仅当它们的元素个数相等。

注意 有理数集与无理数集是不等势的。

§2.4 函数的概念与性质

2.4.1 函数的概念

一元函数 设 D 是中的非空子集,称映射 $f : D \to R$ 为定义在 D 上的一元函数。

2.4.2 函数的例子

函数	函数表达式
常值函数	$y = C$
绝对值函数	$y = \|x\|$
符号函数	$y = \operatorname{sgn} x$
取整函数	$y = [x]$
狄利克雷函数	$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

表 2.3: 函数的例子

2.4.3 函数的运算

复合函数 设有两个函数 $f : A \to B_1$ 与 $g : B \to C$,且满足 $B_1 \subset B$,函数 $h : A \to C$ 定义为:对任意 $x \in A$,有 $h(x) = g(f(x))$。称 h 为 f 与 g 的复合函数,记作:$h = g \circ f$。

函数 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图形是同一个。并非是关于原点对称,当交换了位置以后($y = f^{-1}(x)$)两个函数关于原点对称。

严格单调增加(减少)函数的反函数也是严格单调增加(减少)。

注意 因为有理数和一个有理数的和是一个有理数,有理数和无理数的和是无理数,所以狄利克雷函数是一个以任意有理数为周期的周期函数。因为在数轴上关于原点对称的两个点的性质相同,所以该函数也是一个偶函数。

例 证明函数 $f(x) = x - [x]$ 为周期函数,且 $T = 1$ 是它的最小正周期。

$f(x+1) = (x+1) - [x+1] = (x+1) - ([x]+1) = x - [x] = f(x)$

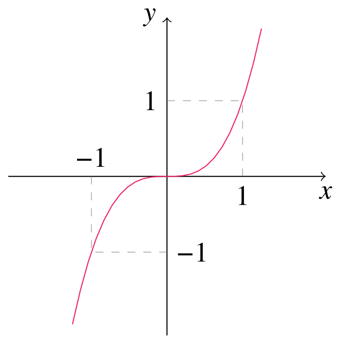
所以 $T = 1$ 是 $f(x) = x - [x]$ 的一个周期。

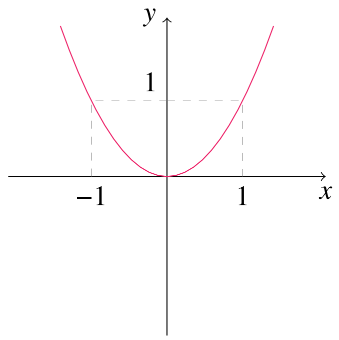
下面证明 $T = 1$ 是 $f(x)$ 的最小正周期。如果 $T = 1$ 不是 $f(x)$ 的最小正周期,则存在 $r \in (0, 1)$ 使得 $f(x + r) = f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 成立。取 $x = 0$,则有 $f(x) = f(0)$,即 $r = 0$,矛盾! 所以 $T = 1$ 是 $f(x)$ 的最小正周期。

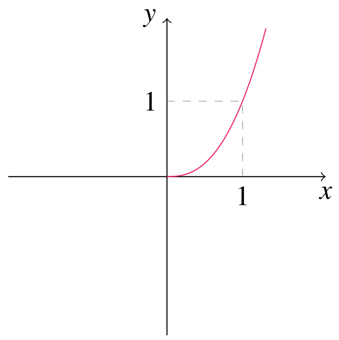
§2.5 初等函数

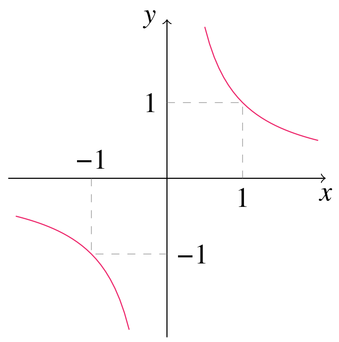
2.5.1 基本初等函数

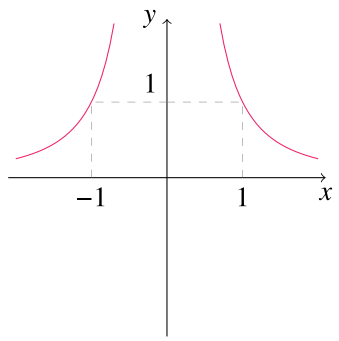
幂函数

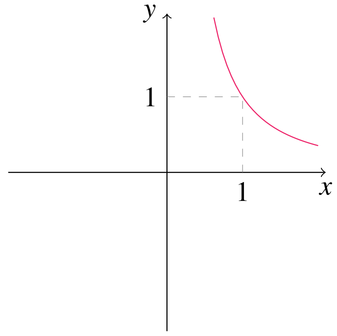


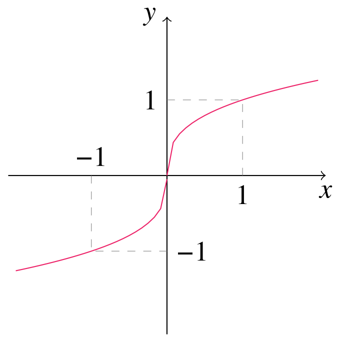


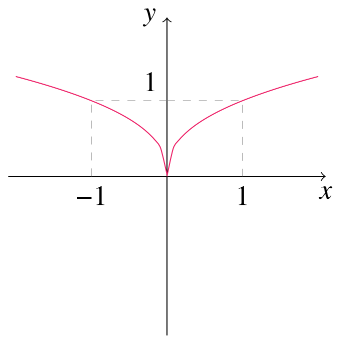


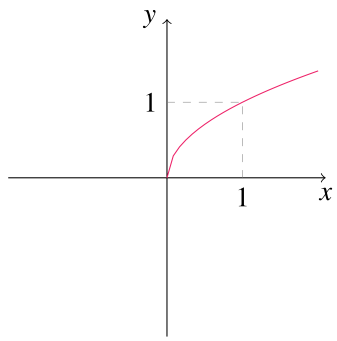





y
1
1
x


y
1
−1
1
x
−1


y
1
−1
1
x


y
1
1
x

§2.6 曲线的参数方程与极坐标方程

§2.7 数列极限的概念

§2.8 数列极限的性质

§2.9 数列收敛的判定方法

§2.10 子数列与聚点原理

§2.11 无穷级数的概念与运算性质

§2.12 正项级数收敛性判别方法

§2.13 变号级数收敛性判别方法

§2.14 函数极限的概念

§2.15 函数极限的性质与运算法则

§2.16 函数极限存在性的判定准则

§2.17 无穷小量与无穷大量

§2.18 函数连续的概念

§2.19 连续函数的运算

§2.20 闭区间上连续函数的性质

§2.21 函数的一致连续性

第三章　数学思想

§3.1　比喻

3.1.1　类比

比如用学号到名字的对应关系称为一种映射, 并且这种映射是一种双射。而学号到性别之间的关系是一种满射。诸如此类, 还有很多可以类比的例子。使用类比可以降低对新东西的陌生感, 更快地理解, 并且可以加强记忆。

Times New Roman

§3.2　数形结合

§3.3　抽象