

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E ELETRÔNICA

MÁXIMA TRANSFERÊNCIA DE POTÊNCIA E
TEOREMA DA SUPERPOSIÇÃO

GUSTAVO SIMAS DA SILVA
HENRIQUE PICKLER DA SILVA

SETEMBRO, 2017

“Se você rouba ideias de um autor, é plágio, mas se você as rouba de muitos autores, é pesquisa”.

Wilson Mizner

ÍNDICE DE SÍMBOLOS, ABREVIATURAS E UNIDADES

i	-	Corrente elétrica
A	-	ampère (intensidade de corrente elétrica)
V	-	volt (diferença de potencial elétrico)
W	-	Watt (potência elétrica ativa)
CC, DC	-	corrente contínua
AC, CA	-	corrente alternada
Ω	-	ohm (resistência elétrica)
n	-	nano (10^{-9})
μ	-	micro (10^{-6})
m	-	mili (10^{-3})
k	-	quilo (10^3)
M	-	mega (10^6)

ÍNDICE DE FIGURAS, TABELAS E EQUAÇÕES

Figura 1 - Gráfico de Potência com variação de carga	7
Figura 2 - Circuito exemplo para superposição	9
Figura 3 - Fontes desligadas em circuito para superposição	9
Figura 4 – Circuito com Análise de Malhas	10
Figura 5 - Circuito 1 proposto	12
Figura 6 - Circuito 2 proposto	13
Figura 7 - Potência em função da Carga.....	13
Figura 8 - Circuito 3 proposto	15
 Tabela 1 - Valores para Máxima Transferência de Potência.....	14
Tabela 2 - Valores para Superposição	16
 Equação 1 - Máxima Transferência de Potência.....	8
Equação 2 - Soma de variáveis na Superposição	9

Sumário

1. INTRODUÇÃO E OBJETIVOS	6
2. BASE TEÓRICA.....	7
2.1 Máxima Transferência de Potência.....	7
2.2 Teorema da Superposição	8
3. RESULTADOS DE LABORATÓRIO	12
3.1 Materiais e Métodos	12
3.2 Máxima Transferência de Potência.....	12
3.3 Teorema da Superposição	15
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS	17
REFERÊNCIAS	18

1. INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

Este relatório visa demonstrar os conceitos vistos na Aula 4 de laboratório da disciplina EEL7045 - Circuitos Elétricos A dos cursos de Engenharia Elétrica e Eletrônica da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). O foco desta aula foi Máxima Transferência de Potência e Teorema da Superposição em circuitos lineares de corrente contínua (CC), tão como análise teórica, demonstração e comprovação destes por meio de montagem de circuito em matriz de contatos.

O trabalho contempla estes assuntos e evidencia as demonstrações feitas em aula, apresenta a base teórica e os dados coletados pelas medições realizadas, com conclusões acerca dos resultados e discussão sobre possíveis aprimoramentos na realização das atividades mencionadas.

2. BASE TEÓRICA

Para entendimento dos conceitos abordados no referente relatório, é apresentada uma base teórica com a explanação da teoria de Máxima Transferência de Potência e Superposição de Efeitos em circuitos lineares.

2.1 Máxima Transferência de Potência

O Teorema da Máxima Transferência de Potência diz que, para se obter máxima potência externa de uma fonte com resistência interna finita, é necessário que a resistência elétrica da carga (R_L) seja igual à da fonte em relação aos seus dois terminais.

O gráfico da Figura 1 abaixo apresenta a potência na carga (R_c) de acordo com a variação da mesma. Observa-se que o pico é atingido num valor aproximadamente central de resistência, o qual representa a mesma resistência interna da fonte.

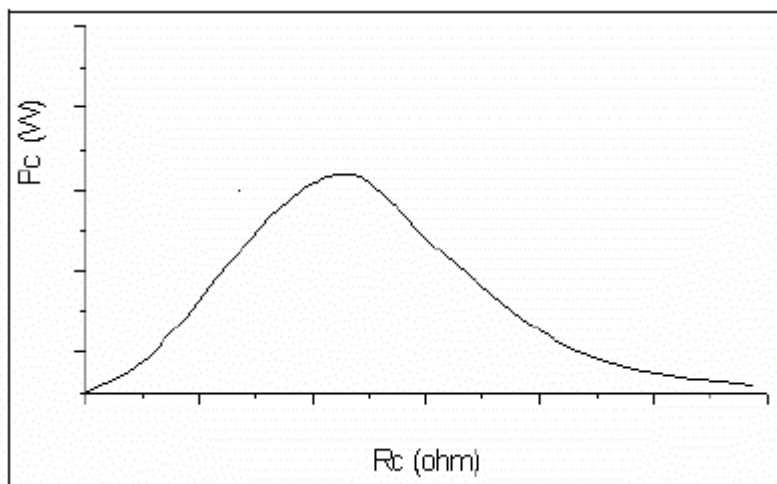


Figura 1 - Gráfico de Potência com variação de carga

Como podemos ver, a potência na carga aumenta até chegar num máximo. Isso acontece, pois pelo divisor de tensão, sabemos que a maior queda de tensão ocorre no resistor de maior resistência, por outro lado, a corrente do circuito é maior quando a resistência é menor. Em relação à fórmula $P = V \cdot i$, o maior valor da potência se dá quando esses dois efeitos se “equilibram” quando a resistência interna (R_i) for igual a resistência Máxima Transferência de Potência e Superposição

equivalente de carga ($R_i = R_L$). Esse ponto ocorre quando metade da potência da fonte vai para a carga, e isso é verificado no gráfico.

Assim, temos que a máxima transferência de potência ocorrerá de acordo com o desenvolvimento de divisor de tensão pela Equação 1, que segue:

$$P_{max} = R * i^2 = R_L * \left(\frac{V}{R_i + R_L} \right)^2 = R_L * \frac{V^2}{(2R_L)^2} \quad (1.1)$$

$$P_{max} = \frac{V^2}{4R_L} \quad (1.2)$$

Equação 1 - Máxima Transferência de Potência

2.2 Teorema da Superposição

O Teorema da Superposição estabelece que as grandezas lineares totais em qualquer ramo de um circuito linear são iguais à soma da contribuição de cada fonte atuando separadamente no circuito.

De maneira teórica, podemos propor um procedimento para análise de circuitos por Superposição, como visto em [3].

- 1)** Calcula-se a solução para o estado inicial, deligando as fontes independentes, curto-circuitando as fontes de tensão e abrindo as fontes de corrente (circuito aberto);
- 2)** Calcula-se a variável que se deseja para cada fonte, com as demais fontes anuladas (desligadas);
- 3)** Somam-se as soluções individuais para obter o valor resultante da variável desejada.

Podemos analisar o circuito exemplo da Figura 2:

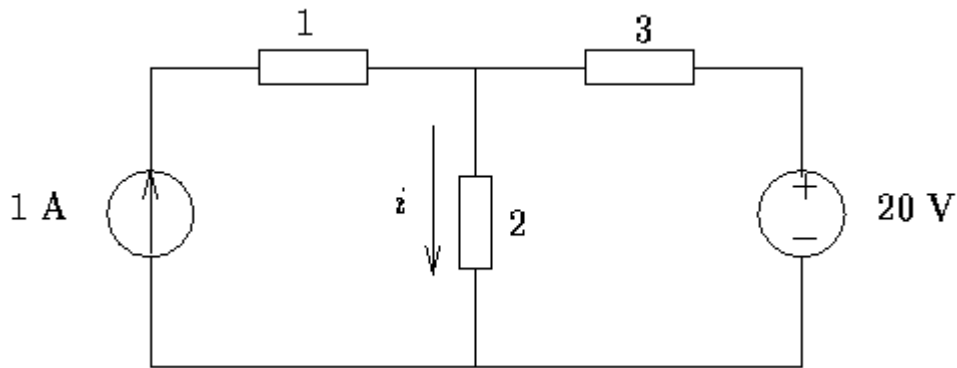


Figura 2 - Circuito exemplo para superposição

Verificamos que há a existência de três resistores com os valores de 1Ω , 2Ω e 3Ω . Além disso, o circuito possui duas fontes independentes, uma de tensão e outra de corrente (20V e 1 A, respectivamente). De acordo com o procedimento do Teorema de Superposição, analisamos primeiramente uma das fontes, desligando a outra.

Assim, consideramos i' como sendo a corrente elétrica que passa no ramo central (pelo resistor de 2Ω) devido à fonte de tensão, e i'' como a corrente devido à fonte de corrente. A Figura 3 exemplifica visualmente:

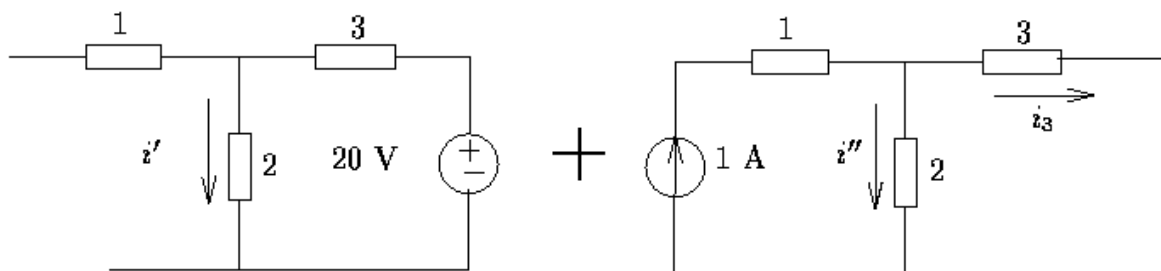


Figura 3 - Fontes desligadas em circuito para superposição

Deste modo temos a Equação 2.1:

$$i = i' + i'' \quad (2.1)$$

Equação 2 - Soma de variáveis na Superposição

$$i' = \frac{20}{2+3} = 4 \text{ A} \quad (2.2)$$

$$i'' = 1 * \frac{3}{2+3} = 0,6 \text{ A} \quad (2.3)$$

Substituindo (2.2) e (2.3) em (2.1):

$$i = 4 + 0,6 = 4,6A$$

Para comprovação do efeito, podemos averiguar o resultado da variável de corrente do mesmo circuito por meio de outro método de análise, através de correntes de malha. A Figura 4 apresenta o circuito com as correntes de malha circulando.

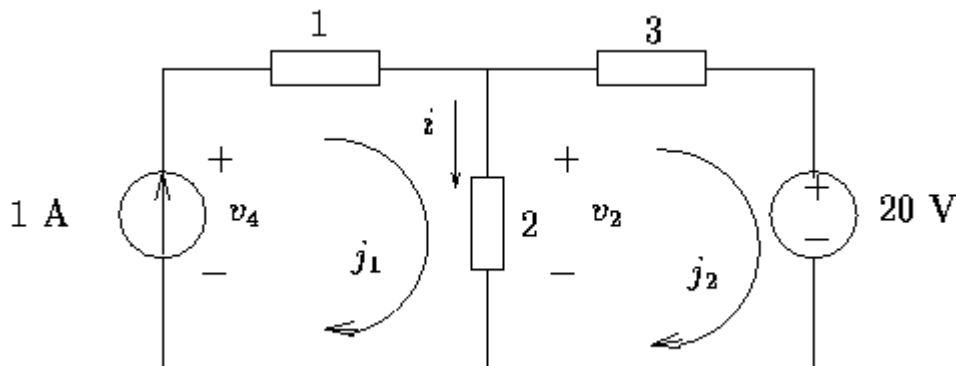


Figura 4 – Circuito com Análise de Malhas

Assim temos:

$$i = j_1 - j_2 \quad (3.1)$$

$$j_1 = 1A \quad (3.2)$$

$$2(j_2 - j_1) + 3j_2 = -20V \quad (3.3)$$

$$j_2 = \frac{-20+2}{5} = -3,6A \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) e (3.2) em (3.1):

$$i = 1 - (-3,6) = 4,6A$$

Assim, comprovamos que o Teorema da Superposição de Efeitos pode ser utilizado como um método de análise de circuitos lineares. Observa-se que para circuitos que possuem fontes de corrente dependentes, estas devem

permanecer intocadas, analisando as variáveis dependentes de acordo com o novo circuito tendo as outras fontes desligadas.

Salienta-se, também, que os teoremas supracitados só podem ser aplicados a sistemas lineares, isto é, aos circuitos que atendem os dois critérios de linearidade expostos a seguir, conforme [1]:

- i) Critério de Aditividade: Se $X_1(t) \rightarrow Y_1(t)$ e $X_2(t) \rightarrow Y_2(t)$, logo $X_1(t) + X_2(t) \rightarrow Y_1(t) + Y_2(t)$
- ii) Critério da Homogeneidade: Se $X_1(t) \rightarrow Y_1(t)$, então $aX_1(t) \rightarrow aY_1(t)$ onde “a” é uma constante.

3. RESULTADOS DE LABORATÓRIO

3.1 Materiais e Métodos

Para obter os resultados de laboratório, foram utilizados os seguintes instrumentos de medição: Multímetro Analógico (marca ICEL, modelo MA-100), Multímetro Digital (marca Minipa, modelo ET-2082C), além de demais materiais auxiliares como matriz de contato, jumpers (conectores), potenciômetro linear de $10k\ \Omega$, resistores de valores comerciais e precisão 5%, e fonte de tensão CC.

Avaliou-se o estado de conservações dos instrumentos e nenhum deles apresentou dano aparente ou qualquer falha mecânica/eletrônica de modo que comprometesse significativamente os procedimentos de laboratório.

3.2 Máxima Transferência de Potência

Seguindo o roteiro de laboratório proposto em [1], temos em 2.a, a Figura 5 apresentada a seguir:

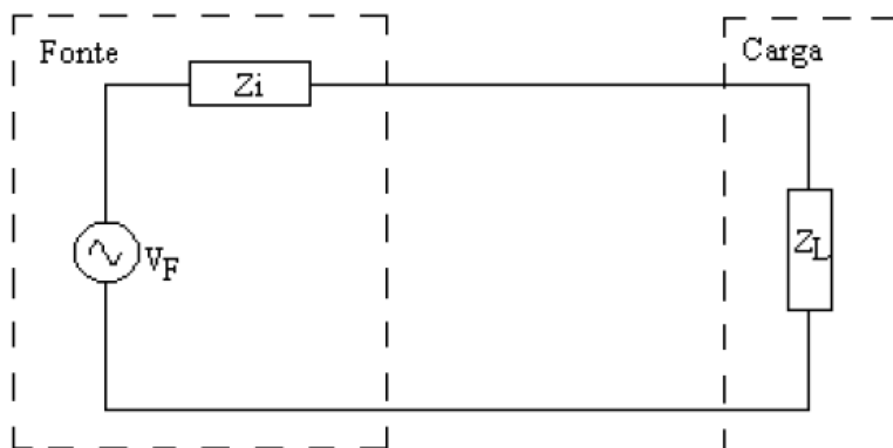


Figura 5 - Circuito 1 proposto

Assim sendo, a máxima transferência de potência ocorrerá quando a impedância de carga Z_L for igual à impedância interna da fonte Z_i .

Para o proposto no roteiro de laboratório, em 2.b, tem-se o circuito da Figura 6:

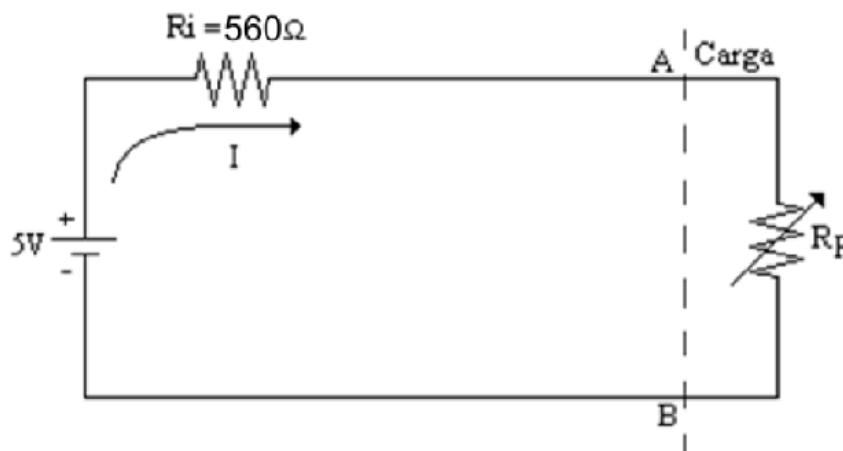


Figura 6 - Circuito 2 proposto

Assim, sendo, calculamos a função da potência em razão da resistência de carga R_P e, como esclarecido e esperado pela base teórica, tem-se o gráfico esboçado na Figura 7.

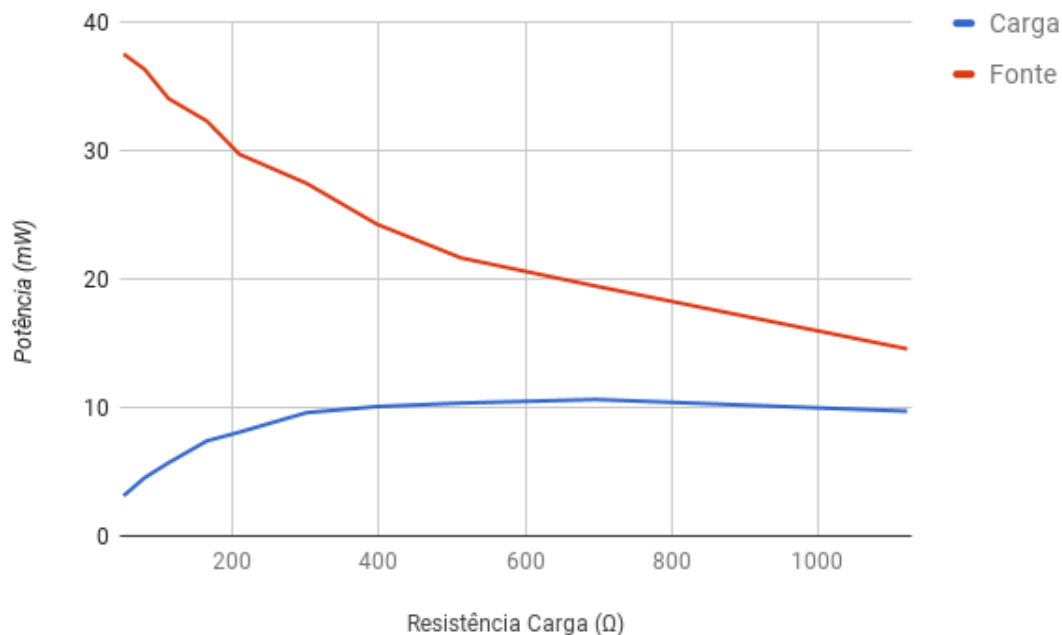


Figura 7 - Potência em função da Carga

Identifica-se pelo gráfico que a potência máxima ocorrerá aproximadamente quando a resistência for 560Ω .

Assim, a potência máxima no circuito referido será:

$$P_{max} = \frac{V^2}{4RL} = \frac{5^2}{4 * 560} = 11,16mW$$

Comenta-se que este valor se dá como o máximo possível de ser observado numa medição real do circuito, contudo podem haver inexatidões devido aos erros de medição, variáveis aleatórias, dentre outros elementos que podem moderar o ato de aferir os valores desejados, conforme é discutido nas Considerações Finais.

Após esta avaliação de cálculo e esboço de gráfico teórico da curva de potência na carga, foi montado o circuito da Figura 6, tendo se variada a resistência R_P por 10 valores distintos, incluindo o valor 560Ω para a máxima transferência. Seguem os resultados pela Tabela 1:

Tabela 1 - Valores para Máxima Transferência de Potência

Tensão V_{AB}	Corrente i	R_P (calculado)	Potência
$(4,6 \pm 0,1) V$	$(7,83 \pm 0,03) mA$	$51,08 \Omega$	3,13 mW
$(4,4 \pm 0,1) V$	$(7,53 \pm 0,03) mA$	$79,68 \Omega$	4,52 mW
$(4,2 \pm 0,1) V$	$(7,11 \pm 0,03) mA$	$112,52 \Omega$	5,69 mW
$(3,9 \pm 0,1) V$	$(6,67 \pm 0,03) mA$	$164,92 \Omega$	7,34 mW
$(3,7 \pm 0,1) V$	$(6,21 \pm 0,03) mA$	$209,34 \Omega$	8,07 mW
$(3,3 \pm 0,1) V$	$(5,64 \pm 0,03) mA$	$301,42 \Omega$	9,59 mW
$(3,0 \pm 0,1) V$	$(5,03 \pm 0,03) mA$	$397,61 \Omega$	10,06 mW
$(2,7 \pm 0,1) V$	$(4,49 \pm 0,03) mA$	$512,25 \Omega$	10,33 mW
$(2,3 \pm 0,1) V$	$(3,93 \pm 0,03) mA$	$687,02 \Omega$	10,61 mW
$(1,7 \pm 0,1) V$	$(2,94 \pm 0,03) mA$	1122,45	9,70 mW

Para todas as medições foi utilizado o Multímetro Analógico na escala de 10V/div para inferir a tensão entre os terminais da resistência de carga. Já o Multímetro Digital foi usado para se medir a corrente que circula na malha, com a escala de 20mA/div em todos os valores.

Percebe-se que, como esperado, a máxima potência medida em R_L se dá quando o valor de resistência está próximo de 560Ω . No entanto, devido

a arredondamentos, resolução do olho humano ao inferir o valor marcado pelo multímetro analógico, tão como ruídos no circuito e imprecisão do potenciômetro, tal dado se iguala quando a resistência é $687,02 \Omega$.

3.3 Teorema da Superposição

Para o requisitado no roteiro de laboratório em 3.b tem-se a determinação da tensão e corrente no resistor de carga R_L no circuito proposto e apresentado na Figura 8.

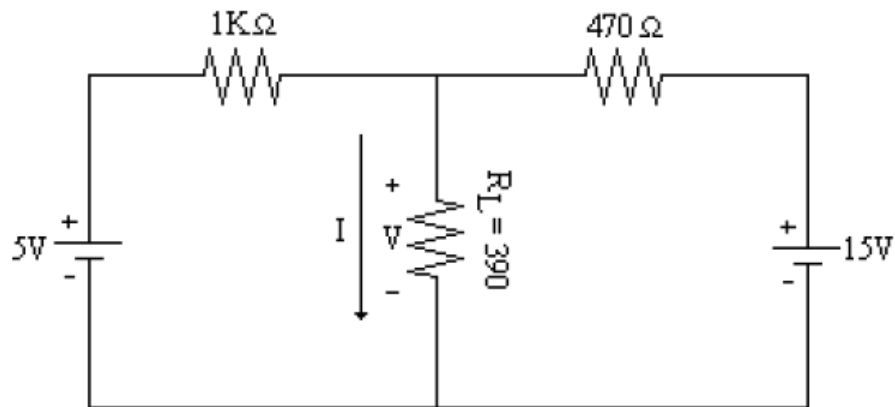


Figura 8 - Circuito 3 proposto

Pelos cálculos de superposição temos, em primeira instância, a análise da fonte de tensão independente de 5V.

$$Req' = \frac{390 \cdot 470}{390 + 470} = 213,14 \Omega \quad (4.1)$$

$$V' = 5 \cdot \frac{Req'}{Req' + 1k} = 5 \cdot \frac{213,14}{213,14 + 1000} = 0,878 V \quad (4.2)$$

$$i' = \frac{V'}{390} = \frac{0,878}{390} = 2,25 mA \quad (4.3)$$

Agora, analisando a fonte de tensão de 15V.

$$Req'' = \frac{390 \cdot 1k}{390 + 1k} = 280,58 \Omega \quad (4.4)$$

$$V'' = 15 \cdot \frac{Req''}{Req'' + 470} = 15 \cdot \frac{280,58}{280,58 + 470} = 5,61 V \quad (4.5)$$

$$i'' = \frac{V''}{390} = \frac{5,61}{390} = 14,38 mA \quad (4.6)$$

Somando-se os valores encontrados em (4.2) com (4.5) e (4.3) com (4.6):

$$i = i' + i'' = 2,25m + 14,38m = 16,63mA \quad (4.7)$$

$$V = V' + V'' = 0,878 + 5,61 = 6,488V \quad (4.8)$$

Podem ser comprovados os valores por meio da análise de malhas, como proposto:

$$1000i_1 + 390(i_1 - i_2) = 1390i_1 - 390i_2 = 5 \quad (5.1)$$

$$390(i_2 - i_1) + 470i_2 = -390i_1 + 860i_2 = -15 \quad (5.2)$$

Assim, resolvendo o sistema de equações, temos:

$$i_1 = -1,48mA \quad (5.3)$$

$$i_2 = -18,11mA \quad (5.4)$$

$$i = i_1 - i_2 = 18,11m - 1,48 = 16,63mA \quad (5.5)$$

Deste modo, verificamos que o resultado encontrado em (5.5) por análise de Malhas é igual ao (4.7) por superposição, confirmando o efeito.

Em prosseguimento das atividades, realizou-se a montagem prática do circuito proposto na Figura 8. Assim, medindo-se a tensão com o multímetro digital entre os terminais do resistor R_L , obteve-se o que é apresentado na Tabela 2:

Tabela 2 - Valores para Superposição

Configuração	V'	V''	Tensão V_{RL}	Escala
Duas fontes	-	-	$(6,4 \pm 0,2) V$	20 V/div
Fonte 5V	$(0,88 \pm 0,02)V$	-	-	2 V/div
Fonte 15V	-	$(5,5 \pm 0,2) V$	-	20 V/div
-	V' + V''		$(6,4 \pm 0,2) V$	-

Com isto, conclui-se o roteiro de laboratório proposto.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O princípio da Máxima Transferência de Potência é de grande importância para a Engenharia Elétrica e Eletrônica, pois a partir dele podem-se determinar métodos de transmitir informação ou energia de maneira mais eficiente, com o objetivo de se evitar perdas e alcançar o melhor aproveitamento possível da energia despendida no circuito.

A grande área de interesse do Teorema da Superposição não se vê apenas na teoria de circuitos de corrente contínua, mas também com CA, onde é um método eficaz e com poucas variáveis para a solução de circuitos com mais de uma fonte. Assim, se apresenta com grande relevância na análise de circuitos lineares.

Pelas medições realizadas, identifica-se que os possíveis erros e fatores passíveis de moderação dos dados são resolução do olho humano no momento de leitura do valor indicado pelo multímetro analógico, ruídos no sistema, arredondamentos em cálculos, imprecisão dos componentes e variação do valor de acordo com temperatura, imprecisão dos instrumentos, além de erros aleatórios.

No entanto, apesar de tais fatores e erros sistemáticos e residuais, foram obtidos valores próximos aos teóricos. Conclui-se que o objetivo do laboratório de averiguar e confirmar em prática a Máxima Transferência de Potência e o Teorema da Superposição foi alcançado,

REFERÊNCIAS

- [1] PENG, Patrick Kuo. **Aula 04 Máxima Transferência de Potência e Teorema da Superposição.** Disponível em: https://github.com/GSimas/EEL7045/blob/master/Lab/Aula04_M%C3%A1x.Tra%20nsf.Pot.%20e%20superposi%C3%A7%C3%A3o.pdf. Acesso em 3 set. 2017.
- [2] PETRY, Clovis Antônio. **Teoria de Erros, Medidas e Instrumentos de Medidas.** Disponível em: http://professorpetry.com.br/Ensino/Repositorio/Docencia_CEFET/Metodos_Tecnicas_Laboratorio/2013_1/Apresentacao_Aula_03.pdf. Acesso em 10 set. 2017.
- [3] UNICAMP. **Superposição – Teorema de Circuitos.** Disponível em: <http://www.dt.fee.unicamp.br/~www/ea612/node140.html>. Acesso em 10 set. 2017.
- [4] LEITHOLD, Angêlo Antônio. **Teorema da Máxima Transferência de Potência.** Disponível em: <https://sites.google.com/site/angeloleitholdpy5aal/home/pesquisas/wikipedia-edies-angeloleithold-at-2011/antenas-1/teorema-da-maxima-transferencia-de-potencia-py5aal>. Acesso em 10 set. 2017.