Relações entre fasores para elementos de circuitos

Jupyter Notebook desenvolvido por Gustavo S.S. (https://github.com/GSimas)

Se a corrente através de um resistor R for i = Im cos(wt + ϕ), a tensão nele será dada pela lei de Ohm, como segue:

$$v(t) = iR = RI_m cos(\omega t + \phi)$$
$$V = RI_m \angle \phi$$
$$V = RI$$

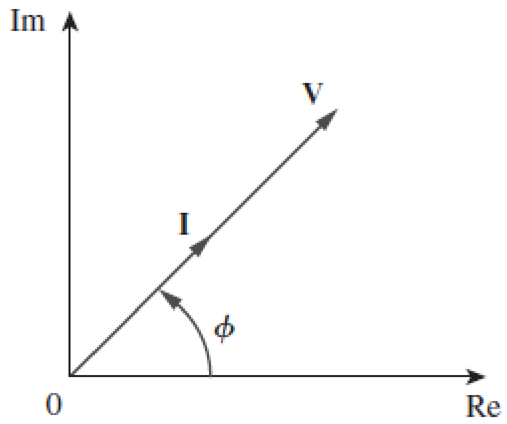

Figura 9.10 Diagrama fasorial para o resistor.

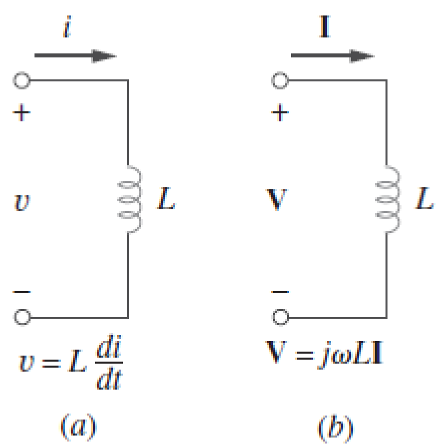

Figura 9.11 Relações tensão-corrente para um indutor: (*a*) no domínio do tempo; (*b*) no domínio da frequência.

Para o indutor L, suponha que a corrente através dele seja i = Im cos(wt + ϕ). A tensão no indutor é:

$$v(t) = L\frac{di}{dt} = -\omega LI_m sen(\omega t + \phi)$$
$$v(t) = \omega LI_m cos(\omega t + \phi + 90º)$$
$$V = \omega LI_m e^{j(\phi + 90º)} = \omega LI_m \angle \phi + 90º$$

A partir da equação da corrente no indutor, podemos escrever:

$$V = j\omega L I$$

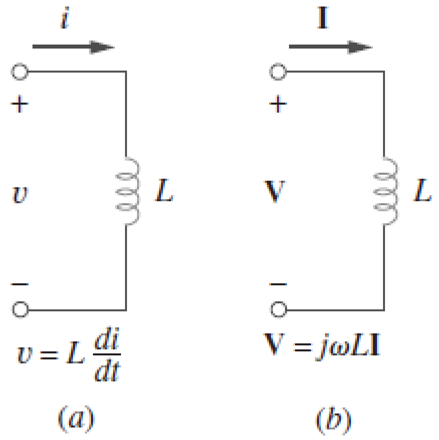

Figura 9.11 Relações tensão-corrente para um indutor: (*a*) no domínio do tempo; (*b*) no domínio da frequência.

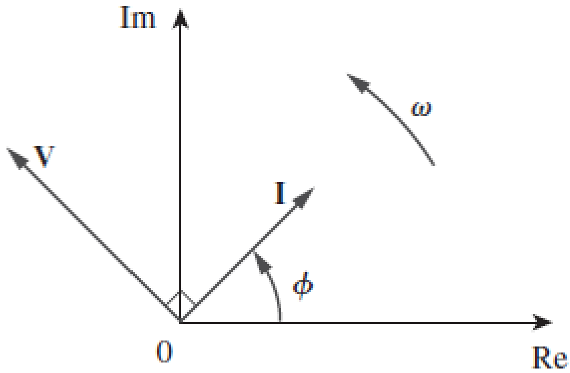

Figura 9.12 Diagrama fasorial para o indutor; **I** está atrasada em relação a **V**.

Para o capacitor C, suponha que a tensão nele seja v = Vm cos(wt + ϕ). A corrente através do capacitor é:

$$i(t) = C\frac{dv}{dt}$$

$$I = j\omega C V$$

$$V = \frac{I}{j\omega C}$$

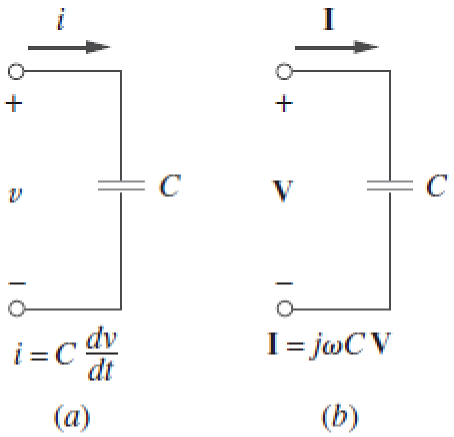

Figura 9.13 Relações tensão-corrente para um capacitor: (*a*) no domínio do tempo; (*b*) no domínio da frequência.

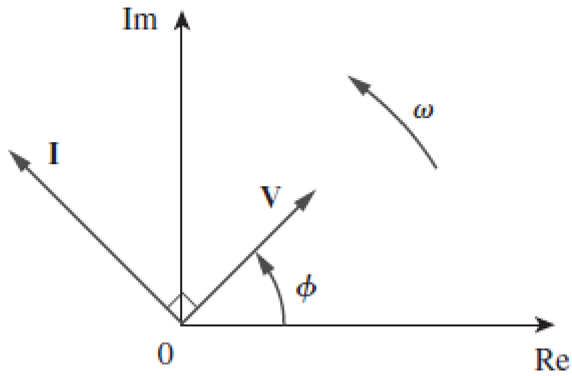

Figura 9.14 Diagrama fasorial para o capacitor; **I** está adiantada em relação a **V**.

Exemplo 9.8

A tensão v = 12 cos(60t + 45°) é aplicada a um indutor de 0,1 H. Determine a corrente em regime estacionário através do indutor.

In [2]:

```
print("Exemplo 9.8")

omega = 60
L = 0.1
V = 12

#v = 12[45º]
#I = V/jwL[45 - 90]
I = V/(omega*L)

phi = 45 - 90

print("Corrente fasorial: {}[{}]".format(I,phi))
print("Corrente temporal: {}cos({}t + {})".format(I,omega,phi))
```

```
Exemplo 9.8
Corrente fasorial: 2.0[-45]
Corrente temporal: 2.0cos(60t + -45)
```

Problema Prático 9.8

Se a tensão v = 10 cos(100t + 30°) for aplicada a um capacitor de 50 uF, calcule a corrente através do capacitor.

In [4]:

```
print("Problema Prático 9.8")

V = 10
u = 10**(-6)
C = 50*u
omega = 100

#I = jwCV[30 + 90]
I = omega*C*V
phi = 30 + 90

print("Corrente fasorial: {}[{}]".format(I,phi))
print("Corrente temporal: {}cos({}t + {})".format(I,omega,phi))
```

```
Problema Prático 9.8
Corrente fasorial: 0.049999999999999999[120]
Corrente temporal: 0.049999999999999999cos(100t + 120)
```

Impedância e Admitância

Das expressões de tensão e corrente fasorial que apresentamos, obtemos a lei de Ohm na forma fasorial para qualquer tipo de elemento:

$$Z = \frac{V}{I}$$

onde Z é um valor dependente da frequência conhecido como impedância e medido em ohms.

A impedância Z de um circuito é a razão entre a tensão fasorial V e a corrente fasorial I, medida em ohms (Ω).

A impedância representa a oposição que um circuito oferece ao fluxo de corrente senoidal. Embora seja a razão entre dois fasores, ela não é um fasor, pois não corresponde a uma quantidade que varia como uma senoide.

Tabela 9.3 • Impedância e admitância de elementos passivos.

Elemento	Impedância	Admitância
R	$\mathbf{Z} = R$	$\mathbf{Y} = \frac{1}{R}$
L	$\mathbf{Z} = j\omega L$	$\mathbf{Y} = \frac{1}{j\omega L}$
C	$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C}$	$\mathbf{Y} = j\omega C$

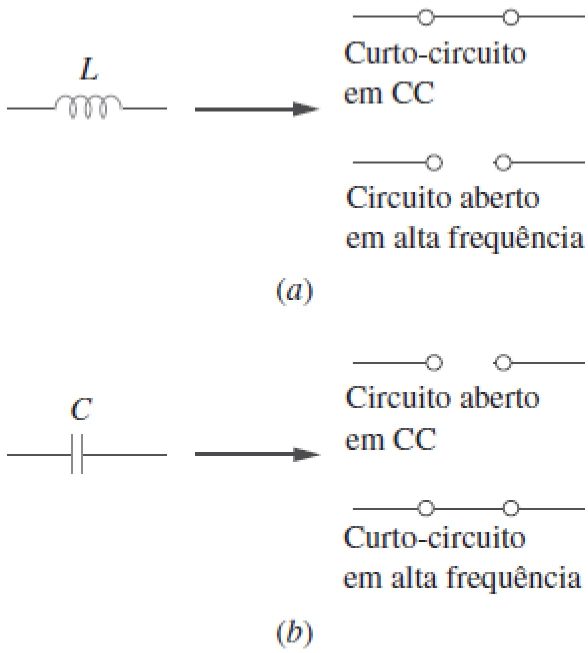

Figura 9.15 Circuitos equivalentes em CC e em alta frequência: (*a*) indutor; (*b*) capacitor.

Sendo um valor complexo, a impedância pode ser expressa na forma retangular como segue:

$$Z = R + jX$$

onde R = Re(Z) é a resistência e X = Im(Z) é a reatância. A reatância X pode ser positiva ou negativa. Dizemos que a impedância é indutiva quando X é positiva, ou capacitiva quando X é negativa.

A impedância também pode ser expressa na forma polar como:

$$Z = |Z|\angle\theta$$
$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$
$$\theta = arctg(\frac{X}{R})$$
$$R = |Z|cos(\theta)$$
$$X = |Z|sen(\theta)$$

A admitância Y é o inverso da impedância, medida em siemens (S).

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V}$$
$$Y = \frac{1}{|Z|}\angle - \theta$$
$$Y = G + jB$$

onde G = Re Y é chamada condutância e B = Im Y é denominada susceptância.

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$
$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$
$$B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

Exemplo 9.9

Determine v(t) e i(t) no circuito apresentado na Figura 9.16.

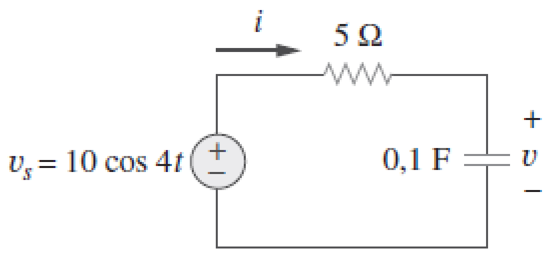

Figura 9.16 Esquema para o Exemplo 9.9.

In [20]:

```
print("Exemplo 9.9")

import numpy as np

V = 10
C = 0.1
R = 5
omega = 4

Zc = 1/(omega*C)

print("Impedância Z = {} - j{}".format(R,Zc))

Z = np.sqrt(R**2 + Zc**2)
theta = np.arctan(Zc/R)*180/np.pi
I = V/Z
phi = 0 - theta

print("I = {} [{}º]".format(I,phi))

V = I*Zc

print("V = {} [{}º]".format(V,phi - 90))
```

```
Exemplo 9.9
Impedância Z = 5 - j2.5
I = 1.7888543819998317 [-26.56505117707799º]
V = 4.47213595499958 [-116.56505117707799º]
```

Problema Prático 9.9

Consulte a Figura 9.17. Determine v(t) e i(t).

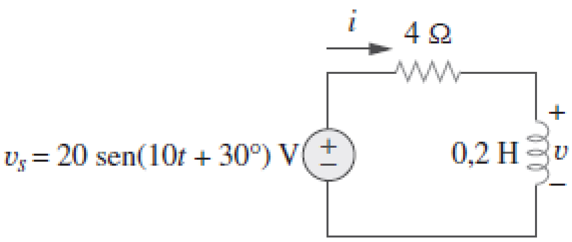

Figura 9.17 Esquema para o Problema prático 9.9.

In [26]:

```
print("Problema Prático 9.9")

V = 20
omega = 10
phi = 30
R = 4
L = 0.2

Zl = omega*L

print("Z = {} + j{}".format(R,Zl))

Z = np.sqrt(R**2 + Zl**2)
theta = np.arctan(Zl/R)*180/np.pi

I = V/Z
alpha = phi - theta

print("I = {}[{}º]".format(I,alpha))
print("i(t) = {}sen({}t + {}º)".format(I,omega,alpha))

Vl = Zl*I

print("V = {}[{}º]".format(Vl,alpha + 90))
print("v(t) = {}sen({}t + {}º)".format(Vl,omega, alpha + 90))
```

```
Problema Prático 9.9
Z = 4 + j2.0
I = 4.47213595499958[3.43494882292201º]
i(t) = 4.47213595499958sen(10t + 3.43494882292201º)
V = 8.94427190999916[93.43494882292201º]
v(t) = 8.94427190999916sen(10t + 93.43494882292201º)
```

Leis de Kirchhoff no Domínio da Frequência

As Leis de Kirchhoff (dos nós e das malhas) também se aplicam para a análise de circuitos no domínio da frequência (fasorial). A associação de impedâncias segue o mesmo cálculo para a associação de resistências e a associação de admitâncias segue a de condutâncias:

Em série

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N = \sum_{i=1}^{N} Z_i$$

Em Paralelo

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots + \frac{1}{Z_N}$$

$$Z_{eq} = (\sum_{i=1}^{N} Z_i^{-1})^{-1}$$