Resposta a Degrau

Jupyter Notebook desenvolvido por [Gustavo S.S. (https://github.com/GSimas)](https://github.com/GSimas)

Resposta a um degrau de um circuito RC

Quando a fonte CC de um circuito RC for aplicada repentinamente, a fonte de tensão ou de corrente pode ser modelada como uma função degrau, e a resposta é conhecida como resposta a um degrau.

A resposta a um degrau de um circuito é seu comportamento quando a excitação for a função degrau, que pode ser uma fonte de tensão ou de corrente.

$$v(0^-) = v(0^+) = V_0$$

A resposta completa (ou resposta total) de um circuito RC à aplicação súbita de uma fonte de tensão CC, partindo do pressuposto de que o capacitor esteja inicialmente carregado, é dada como:

$$v(t) = \begin{cases} V_0, & t < 0 \\ V_S + (V_0 - V_S)e^{-t/\tau}, & t > 0 \end{cases}$$

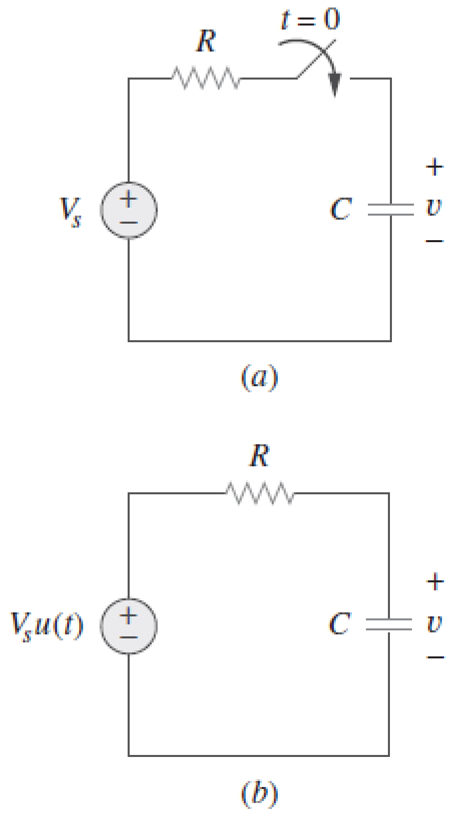

Figura 7.40 Circuito *RC* com entrada de degrau de tensão.

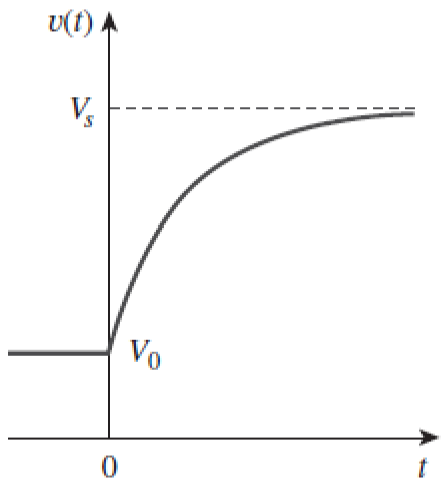

Figura 7.41 Resposta de um circuito *RC* com capacitor inicialmente carregado.

Se considerarmos que o capacitor esteja inicialmente **descarregado**, fazemos que V0 = 0

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ V_S(1 - V_S)e^{-t/\tau}, & t > 0 \end{cases}$$

que pode ser escrito de forma alternativa como:

$$v(t) = V_S(1 - e^{-t/\tau})u(t)$$

A corrente através do capacitor é obtida usando-se i(t) = C dv/dt. Obtemos:

$$i(t) = \frac{V_S}{R} e^{-t/\tau} u(t)$$

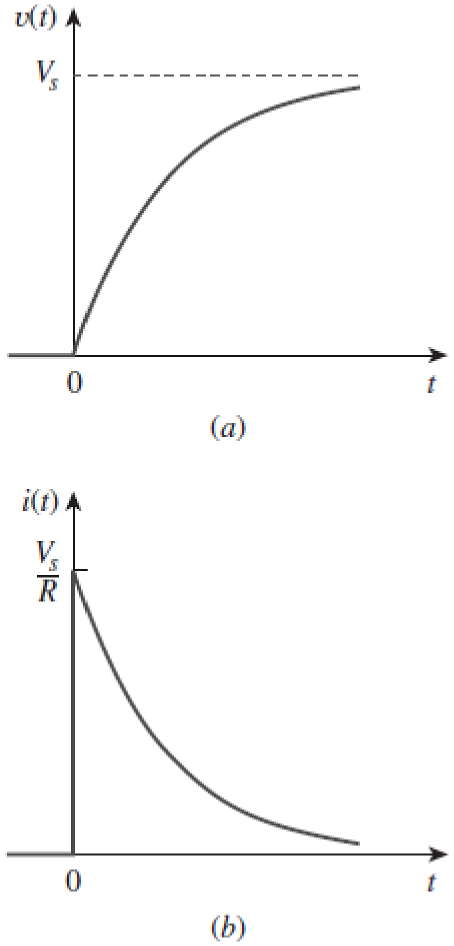

Figura 7.42 Resposta a um degrau de um circuito *RC* com capacitor inicialmente descarregado: (*a*) resposta em tensão; (*b*) resposta em corrente.

Assim:

$$v = v_n + v_f$$
$$onde$$
$$v_n = V_0 e^{-t/\tau}$$
$$v_f = V_S(1 - e^{-t/\tau})$$

Em palavras:

$$\text{Resposta completa} = \underbrace{\text{resposta natural}}_{\text{energia armazenada}} + \underbrace{\text{resposta forçada}}_{\text{fonte independente}}$$

$$\text{Resposta completa} = \underbrace{\text{resposta transiente}}_{\text{parte temporária}} + \underbrace{\text{resposta em regime estacionário}}_{\text{parte permanente}}$$

Resposta transiente é a resposta temporária do circuito que se extinguirá com o tempo.

Resposta em regime estacionário é o comportamento do circuito um longo tempo após a excitação externa ter sido aplicada.

Seja lá qual for o modo que a examinamos, a resposta completa pode ser escrita como:

$$v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-t/\tau}$$

Portanto, encontrar a resposta a um degrau de um circuito RC requer três coisas:

1. A tensão v(0) no capacitor
2. A tensão final v (∞) no capacitor
3. A constante de tempo τ

Exemplo 7.10

A chave da Figura 7.43 se encontra na posição A há um bom tempo. Em t = 0, a chave é mudada para a posição B. Determine v(t) para t > 0 e calcule seu valor em t = 1 s e 4 s.

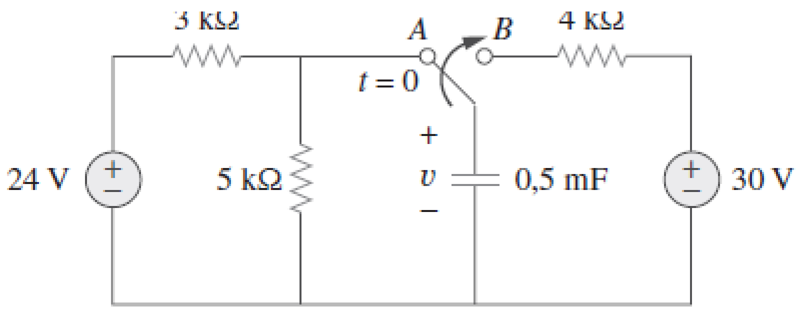

Figura 7.43 Esquema para o Exemplo 7.10.

In [1]:

```
print("Exemplo 7.10")
from sympy import *

m = 10**(-3)
k = 10**3
C = 0.5*m

Vc0 = 24*5*k/(3*k + 5*k) #tensao no capacitor em condicao inicial v0
Vcf = 30 #tensao no capacitor em condicao final

tau = 4*k*C

t = symbols('t')

v = Vcf + (Vc0 - Vcf)*exp(-t/tau)

print("Tensão v(t):",v,"V")
```

```
Exemplo 7.10
Tensão v(t): 30 - 15.0*exp(-0.5*t) V
```

Problema Prático 7.10

Determine v(t) para t > 0 no circuito da Figura 7.44. Suponha que a chave esteja aberta há um longo período e que é fechada em t = 0. Calcule v(t) em t = 0,5.

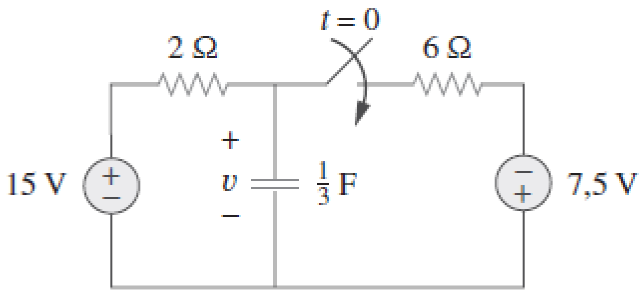

Figura 7.44 Esquema para o Problema prático 7.10.

In [8]:

```
print("Problema Prático 7.10")

C = 1/3

Vc0 = 15
Vcf = (15 + 7.5)*6/(6 + 2) - 7.5

R = 6*2/(6 + 2)
tau = R*C

v = Vcf + (Vc0 - Vcf)*exp(-t/tau)
print("Tensão v(t):",v,"V")

print("Tensão v(0.5):",v.subs(t,0.5),"V")
```

```
Problema Prático 7.10
Tensão v(t): 9.375 + 5.625*exp(-2.0*t) V
Tensão v(0.5): 11.4443218565894 V
```

Exemplo 7.11

Na Figura 7.45, a chave foi fechada há um longo tempo e é aberta em t = 0. Determine i e v durante todo o período.

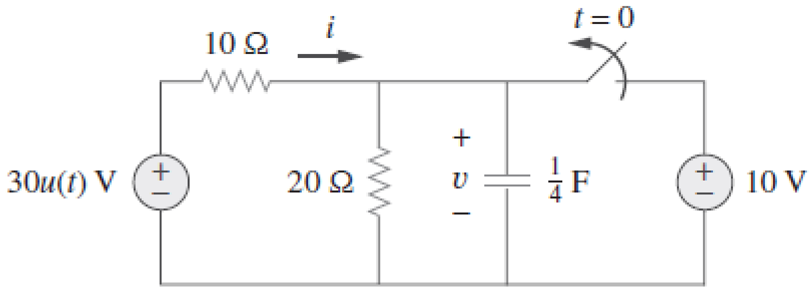

Figura 7.45 Esquema para o Exemplo 7.11.

In [22]:

```
print("Exemplo 7.11")

C = 1/4

Vc0 = 10
Vcf = 30*20/(20 + 10)

R = 10*20/(10 + 20)
tau = R*C

print("Tensão v0:",Vc0,"V")

v = Vcf + (Vc0 - Vcf)*exp(-t/tau)
print("Tensão v(t):",v,"V")

i0 = -10/10
print("Corrente i0:",i0,"A")

i2 = v/20 + C*diff(v,t)
print("Corrente i(t):",i2,"A")
```

```
Exemplo 7.11
Tensão v0: 10 V
Tensão v(t): 20.0 - 10.0*exp(-0.6*t) V
Corrente i0: -1.0 A
Corrente i(t): 1.0 + 1.0*exp(-0.6*t) A
```

Problema Prático 7.11

A chave na Figura 7.47 é fechada em t = 0. Determine i(t) e v(t) para todo o período. Observe que u(–t) = 1 para t < 0 e 0 para t > 0. Da mesma forma, u(–t) = 1 – u(t).

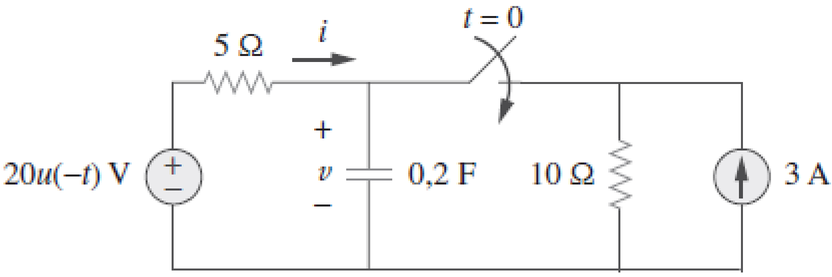

Figura 7.47 Esquema para o Problema prático 7.11.

In [39]:

```
print("Problema Prático 7.11")

C = 0.2

vs = 20
tau = 5*C

#Para t < 0

v1 = vs*(1 - exp(-t/tau))
print("Tensão v(t) para t < 0:",v1,"V")
v0 = v.subs(t,oo)
print("v0:",v0,"V")

i1 = (20 - v1)/5
print("Corrente i(t) para t < 0:",i1,"A")
i0 = i1.subs(t,oo)
print("i0:",i0)

#Para t > 0

i2 = 3*10/(5 + 10)
Vcf = i2*5

R = 5*10/(5 + 10)
tau = R*C

v = Vcf + Vcf*exp(-t/tau)
print("Tensão v(t) para t > 0:",v,"V")

i = -v/5
print("Corrente i(t) para t > 0:",i,"A")
```

```
Problema Prático 7.11
Tensão v(t) para t < 0: 20 - 20*exp(-1.0*t) V
v0: 10.0000000000000 V
Corrente i(t) para t < 0: 4*exp(-1.0*t) A
i0: 0
Tensão v(t) para t > 0: 10.0 + 10.0*exp(-1.5*t) V
Corrente i(t) para t > 0: -2.0 - 2.0*exp(-1.5*t) A
```

Resposta a um degrau de um circuito RL

A resposta pode ser a soma da resposta transiente e a resposta em regime estacionário:

$$i = i_t + i_{ss}$$

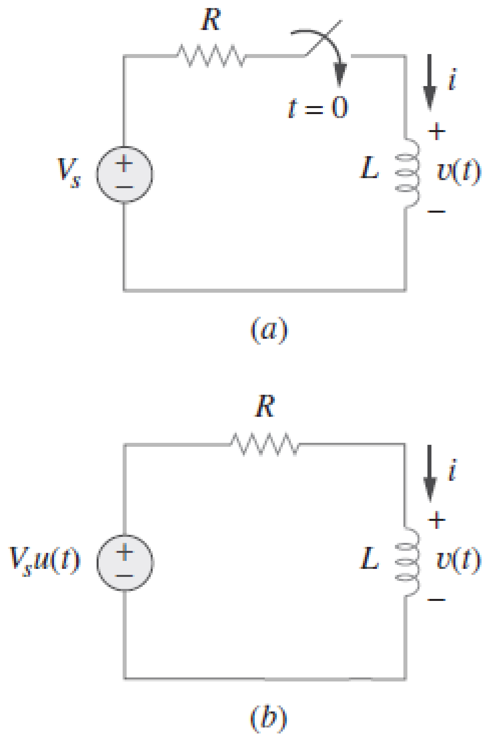

Figura 7.48 Circuito *RL* com tensão de entrada em degrau.

É sabido que a resposta transiente sempre é uma exponencial em queda, isto é:

$$i_t = Ae^{-t/\tau}$$
$$\tau = \frac{L}{R}$$

A resposta em regime estacionário é o valor da corrente um bom tempo depois de a chave da Figura 7.48a ser fechada. Consequentemente, a resposta em regime estacionário fica:

$$i_{ss} = \frac{V_S}{R}$$

Façamos que I0 seja a corrente inicial pelo indutor, que pode provir de uma fonte que não seja Vs. Uma vez que a corrente pelo indutor não pode mudar instantaneamente:

$$i(0^+) = i(0^-) = i(0)$$

Assim, obtemos:

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + (I_0 - \frac{V_S}{R})e^{-t/\tau}$$

Que pode ser escrita como:

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau}$$

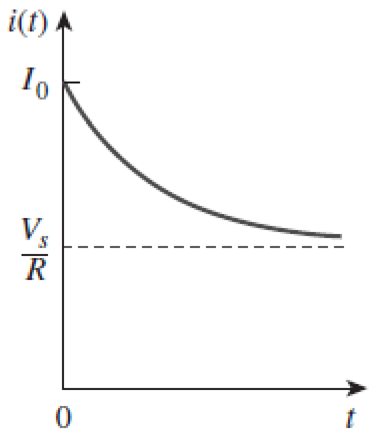

Figura 7.49 Resposta total do circuito RL com corrente inicial I_0 no indutor.

Portanto, determinar a resposta a um degrau de um circuito RL requer três coisas:

1. A corrente inicial i(0) no indutor em t = 0
2. A corrente final no indutor i(∞)
3. A constante de tempo τ

Novamente, se a mudança ocorrer em t = t0 em vez de t = 0, temos:

$$i(t) = i(\infty) + [i(t_0) - i(\infty)]e^{-(t-t_0)/\tau}$$

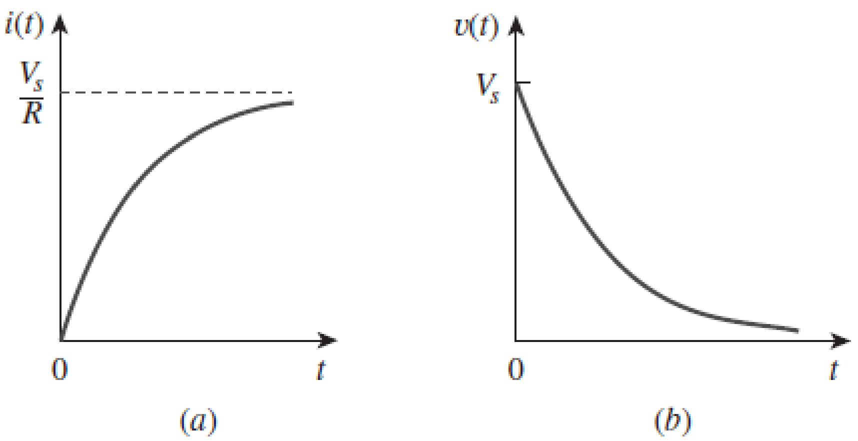

Figura 7.50 Respostas a um degrau com corrente inicial nula no indutor: (*a*) resposta da corrente; (*b*) resposta da tensão.

Exemplo 7.12

Determine i(t) no circuito da Figura 7.51 para t > 0. Suponha que a chave tenha sido fechada há um bom tempo.

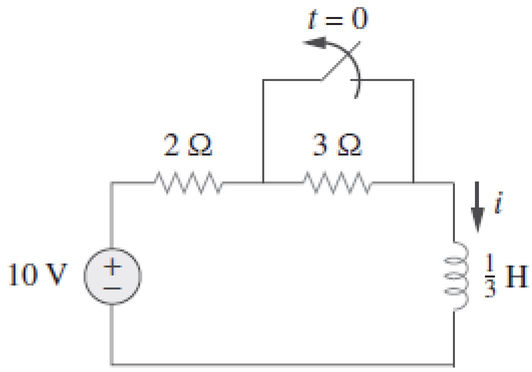

Figura 7.51 Esquema para o Exemplo 7.12.

In [2]:

```
print("Exemplo 7.12")

from sympy import *

L = 1/3
Vs = 10

t = symbols('t') #transforma t em uma variavel (sympy)

#Para t < 0
i0 = Vs/2

#Para t > 0
R = 2 + 3
tau = L/R
i_f = Vs/R
i = i_f + (i0 - i_f)*exp(-t/tau)

print("Corrente i(t) para t > 0:",i,"A")
```

```
Exemplo 7.12
Corrente i(t) para t > 0: 2.0 + 3.0*exp(-15.0*t) A
```

Problema Prático 7.12

A chave na Figura 7.52 foi fechada por um longo tempo, sendo aberta em t = 0. Determine i(t) para t > 0.

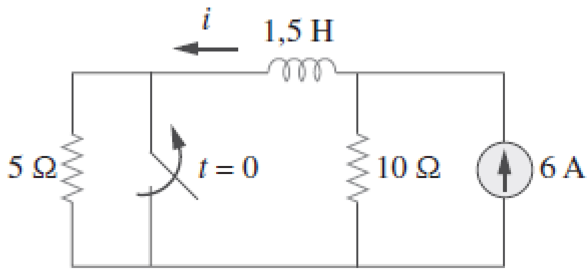

Figura 7.52 Esquema para o Problema prático 7.12.

In [3]:

```
print("Problema Prático 7.12")

L = 1.5
Cs = 6

#Para t <0
i0 = Cs

#Para t > 0
i_f = Cs*10/(5 + 10)
R = 5 + 10
tau = L/R
i = i_f + (i0 - i_f)*exp(-t/tau)

print("Corrente i(t) para t > 0:",i,"A")
```

```
Problema Prático 7.12
Corrente i(t) para t > 0: 4.0 + 2.0*exp(-10.0*t) A
```

Exemplo 7.13

Em t = 0, a chave 1 na Figura 7.53 é fechada e a chave 2 é fechada 4 s depois. Determine i(t) para t > 0. Calcule i para t = 2 s e t = 5 s.

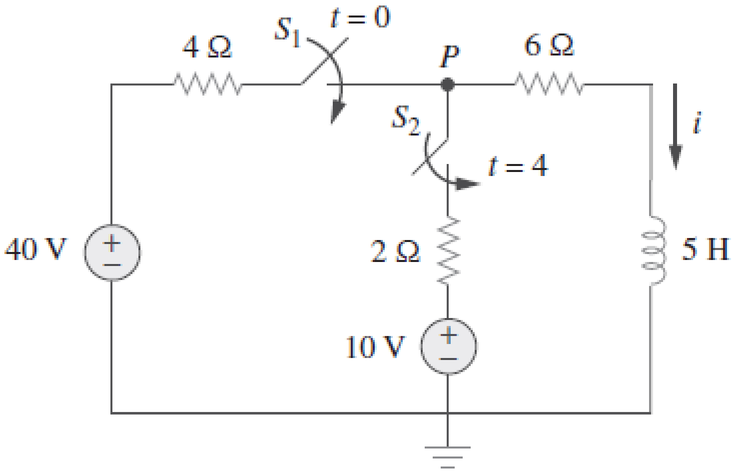

Figura 7.53 Esquema para o Exemplo 7.13.

In [7]:

```
print("Exemplo 7.13")

L = 5
V1 = 40
V2 = 10

#Para t < 0
i0 = 0
print("Corrente i0 para t < 0:",i0,"A")

#Para 0 < t < 4
R = 4 + 6
i_f = V1/R
tau = L/R
i = i_f + (i0 - i_f)*exp(-t/tau)
print("Corrente i(t) para 0 < t < 4:",i,"A")

i2 = i.subs(t,2)

#Para t > 4
i0 = i.subs(t,4)
R2 = (4*6)/(4+6) + 2 # resistencia equivalente vista pela fonte 10V
iv2 = V2/R2 * 4/(4 + 6)#corrente causada pela fonte 10V
R1 = (2*6)/(2 + 6) + 4 # req vista pela fonte 40V
iv1 = V1/R1 * 2/(2 + 6) #corrente causada pela fonte 40V
i_f = iv1 + iv2
R = (4*2)/(4 + 2) + 6 #req vista pelo indutor
tau = L/R
i = i_f + (i0 - i_f)*exp(-t/tau)
print("Corrente i(t) para t > 4:",i,"A")

i5 = i.subs(t,1)

print("Corrente i(2):",i2,"A")
print("Corrente i(5):",i5,"A")
```

```
Exemplo 7.13
Corrente i0 para t < 0: 0 A
Corrente i(t) para 0 < t < 4: 4.0 - 4.0*exp(-2.0*t) A
Corrente i(t) para t > 4: 2.72727272727273 + 1.27138542221566*exp(-1.46666
666666667*t) A
Corrente i(2): 3.92673744444506 A
Corrente i(5): 3.02057267619623 A
```

Problema Prático 7.13

A chave S1 da Figura 7.54 é fechada em t = 0 e a chave S2 é fechada em t = 2 s. Calcule i(t) para qualquer t. Determine i (1) e i (3).

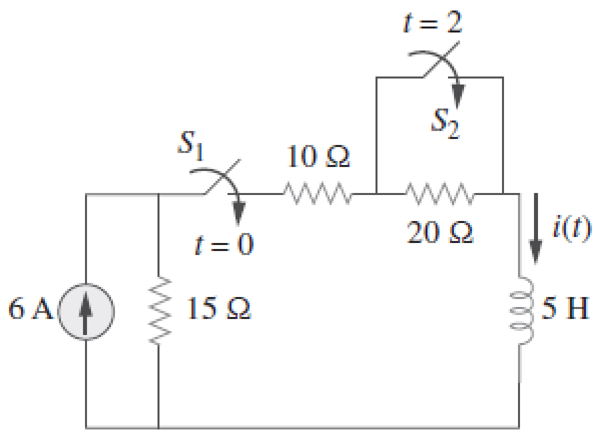

Figura 7.54 Esquema para o Problema prático 7.13.

In [11]:

```
print("Problema Prático 7.13")

Cs = 6
L = 5

#Para t < 0
i0 = 0
print("Corrente i para t < 0:",i0,"A")

#Para 0 < t < 2
R = 15 + 10 + 20
tau = L/R
i_f = Cs*15/R
i = i_f + (i0 - i_f)*exp(-t/tau)
print("Corrente i(t) para 0 < t < 2:",i,"A")

i1 = i.subs(t,1)

#Para t > 2
i0 = i.subs(t,2)
R = 15 + 10
tau = L/R
i_f = Cs*15/R
i = i_f + (i0 - i_f)*exp(-t/tau)
print("Corrente i(t) para t > 2:",i,"A")

i3 = i.subs(t,1)

print("Corrente i(1)",i1,"A")
print("Corrente i(3)",i3,"A")
```

```
Problema Prático 7.13
Corrente i para t < 0: 0 A
Corrente i(t) para 0 < t < 2: 2.0 - 2.0*exp(-9.0*t) A
Corrente i(t) para t > 2: 3.6 - 1.60000003045996*exp(-5.0*t) A
Corrente i(1) 1.99975318039183 A
Corrente i(3) 3.58921928459623 A
```

Resumo

1. Um circuito é de primeira ordem, pois seu comportamento é descrito por uma **equação diferencial de primeira ordem**. Ao analisar circuitos RC e RL, sempre se deve ter em mente que o **capacitor é um circuito aberto em condições de regime estacionário CC**, enquanto o **indutor é um curto-circuito em condições de regime estacionário CC**.

2. A resposta natural é obtida quando não há nenhuma fonte independente. Ela apresenta a forma geral:

$$x(t) = x(0)e^{-t/\tau}$$

onde x representa a corrente (ou tensão) através de um resistor, capacitor ou indutor, e x(0) é o valor inicial de x.

3. A constante de tempo τ é o tempo necessário para uma resposta de decaimento para 1/e de seu valor inicial. Para circuitos RC, τ = RC e para circuitos RL, τ = L/R.

4. Entre as funções de singularidade, temos as funções degrau unitário, rampa unitária e impulso unitário.

A função degrau unitário u(t) é:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

A função impulso unitário é:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Indefinido, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

A função rampa unitária é

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$

5. Resposta em regime estacionário é o comportamento do circuito após uma fonte independente ter sido aplicada por um longo período. A resposta transiente é a componente da resposta completa que se extingue com o passar do tempo.

6. A resposta total ou completa é formada pela resposta em regime estacionário e pela resposta transiente.

7. Determinar a resposta a um degrau de um circuito de primeira ordem requer o valor inicial x(0+), o valor final x(□) e a constante de tempo t. De posse desses três itens, obtemos a resposta a um degrau, como segue:

$$x(t) = x(\infty) + [x(0) - x(\infty)]e^{-t/\tau}$$

Uma forma mais genérica dessa equação é:

$$x(t) = x(\infty) + [x(t_0^+) - x(\infty)]e^{-(t-t_0)/\tau}$$

Ou poderíamos escrevê-la como:

$$\text{Valor instantâneo} = \text{Valor final} + [\text{Valor inicial} - \text{Valor final}]\ e^{-(t-t_0)/\tau}$$