Circuitos CA

Jupyter Notebook desenvolvido por Gustavo S.S. (https://github.com/GSimas)

Senoides e Fasores

A análise em Corrente Alternada (CA) é a análise de circuitos nos quais a fonte de tensão ou de corrente varia com o tempo. Os circuitos acionados por fontes de tensão ou de corrente senoidais são chamados circuitos CA.

Senoide é um sinal que possui a forma da função seno ou cosseno.

Consideremos a tensão senoidal:

$$v(t) = V_m sen(\omega t)$$

onde

Vm = amplitude da senoide (V)

ω = frequência angular (rad/s)

ωt = argumento da senoide (rad)

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

A senoide é mostrada na Figura 9.1a em função de seu argumento e na Figura 9.1b em função do tempo.

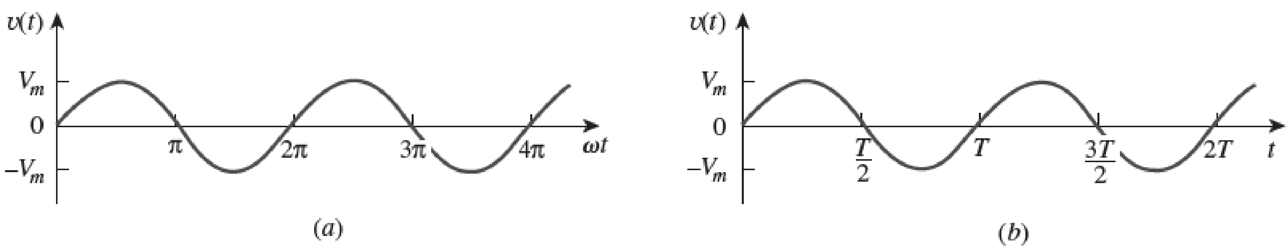

Figura 9.1 Esboço de V_m sen ωt: (*a*) em função de ωt; (*b*) em função de *t*.

O fato de v(t) repetir-se a cada T segundos é demonstrado substituindo-se t por t + T. Portanto:

$$v(t + T) = v(t)$$

Função periódica é aquela que satisfaz f(t) = f(t + nT), para todo t e para todos os inteiros n.

Conforme mencionado anteriormente, o período T da função periódica é o tempo de um ciclo completo ou o número de segundos por ciclo. O inverso desse valor é o número de ciclos por segundo, conhecido como frequência cíclica f da senoide. Consequentemente,

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi f$$

Uma expressão mais genérica para a senoide:

$$v(t) = V_m sen(\omega t + \phi)$$

onde ϕ é a fase.

Consideremos duas senoides, sendo:

$$v_1(t) = V_m sen(\omega t)$$
$$v_2(t) = V_m sen(\omega t + \phi)$$

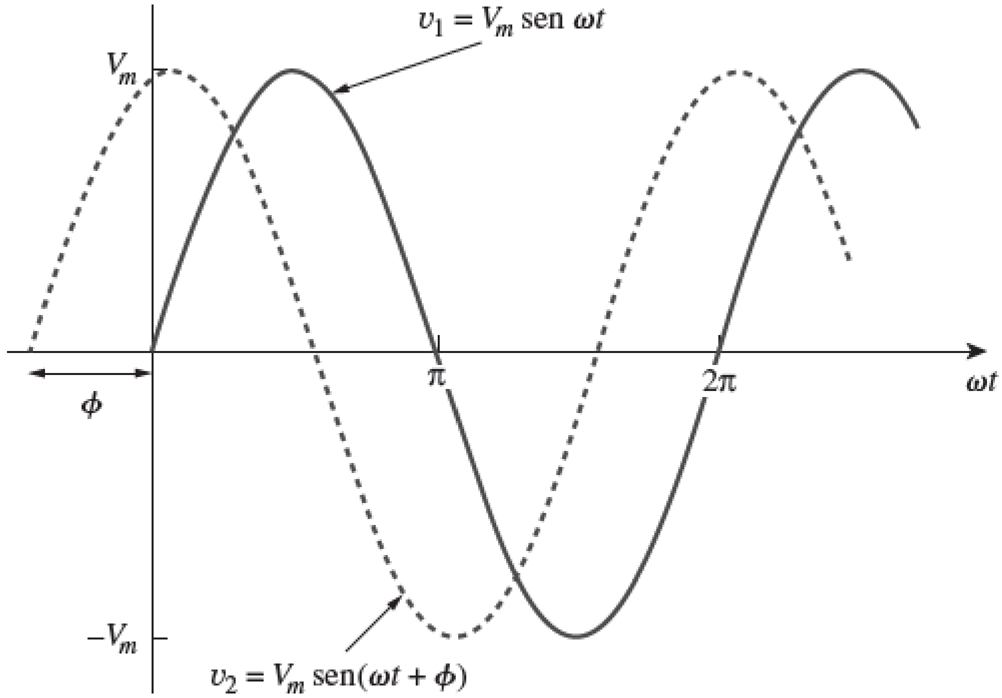

Figura 9.2 Duas senoides com fases distintas.

Uma senoide pode ser expressa em termos de seno ou de cosseno. Isso pode ser conseguido usando-se as seguintes identidades trigonométricas:

$$sen(A \pm B) = sen(A)cos(B) \pm sen(B)cos(A)$$
$$cos(A \pm B) = cos(A)cos(B) \mp sen(A)sen(B)$$

Com essas identidades, fica fácil demonstrar que:

$$sen(\omega t \pm 180º) = -sen(\omega t)$$
$$cos(\omega t \pm 180º) = -cos(\omega t)$$
$$sen(\omega t \pm 90º) = \pm cos(\omega t)$$
$$cos(\omega t \pm 90º) = \mp sen(\omega t)$$

Usando essas relações, podemos transformar uma senoide na forma de seno para uma na forma de cosseno, ou vice-versa.

A magnitude e o argumento da senoide resultante na forma de cosseno são imediatamente obtidos do triângulo. Portanto:

$$Acos(\omega t) + Bsen(\omega t) = rcos(\omega t - \theta)$$
$$r = \sqrt{A^2 + B^2}$$
$$\theta = arctg\frac{B}{A}$$

Exemplo 9.1

Determine a amplitude, a fase, o período e a frequência da senoide

v(t) 12 cos(50 t + 10º)

In [3]:

```
print("Exemplo 9.1")

import numpy as np

Vm = 12
phi = 10
omega = 50
T = 2*np.pi/omega
f = 1/T

print("Amplitude:",Vm,"V")
print("Fase:",phi,"º")
print("Frequência angular:",omega,"rad/s")
print("Período:",T,"s")
print("Frequência:",f,"Hz")
```

```
Exemplo 9.1
Amplitude: 12 V
Fase: 10 º
Frequência angular: 50 rad/s
Período: 0.12566370614359174 s
Frequência: 7.957747154594767 Hz
```

Problema Prático 9.1

Dada a senoide 30 sen(4pit – 75°), calcule sua amplitude, fase, frequência angular, período e frequência

In [4]:

```
print("Problema Prático 9.1")

Vm = 30
#30sin(4*pi*t - 75º) = 30cos(4*pi*t + 165º)
phi = -75
omega = 4*np.pi
T = 2*np.pi/omega
f = 1/T

print("Amplitude:",Vm,"V")
print("Fase:",phi,"º")
print("Frequência angular:",omega,"rad/s")
print("Período:",T,"s")
print("Frequência:",f,"Hz")
```

```
Problema Prático 9.1
Amplitude: 30 V
Fase: -75 º
Frequência angular: 12.566370614359172 rad/s
Período: 0.5 s
Frequência: 2.0 Hz
```

Exemplo 9.2

Calcule o ângulo de fase entre v1 = –10 cos(wt + 50°) e v2 = 12 sen(wt – 10°). Indique qual senoide está avançada.

In [7]:

```
print("Exemplo 9.2")

#v1 = -10cos(wt + 50º) = 10cos(wt + 50 - 180) = 10cos(wt - 130º)
#v2 = 12sen(wt - 10º) = 12cos(wt - 100º)
#-130 - (-100) = -30

phi = 30

print("v2 esta avancada em {}º em relação a v1".format(phi))
```

```
Exemplo 9.2
v2 esta avancada em 30º em relação a v1
```

Problema Prático 9.2

Determine o ângulo de fase entre

i1(t) = -4sen(377t + 55º)

e

i2(t) = 5cos(377t - 65º)

In [10]:

```
print("Problema Prático 9.2")

#i1 = -4sen(377t + 55) = 4sen(377t + 55 + 180) = 4sen(377t + 235) = 4cos(377t + 145)
#i2 = 5cos(377t - 65)
phi = 145 - (-65)

print("i1 esta avancada em {}º em relação a i2".format(phi))
```

```
Problema Prático 9.2
i1 esta avancada em 210º em relação a i2
```

Fasores

Fasor é um número complexo que representa a amplitude e a fase de uma senoide

Os fasores se constituem de maneira simples para analisar circuitos lineares excitados por fontes senoidais; encontrar a solução para circuitos desse tipo seria impraticável de outro modo. A noção de resolução de circuitos CA usando fasores foi introduzida inicialmente por Charles Steinmetz em 1893.

Um número complexo z pode ser escrito na forma retangular como

$$z = x + jy$$
$$j = \sqrt{-1}$$

O número complexo z também pode ser escrito na forma polar ou exponencial:

$$z = r\angle\phi = re^{j\phi}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\phi = arctg(\frac{y}{x})$$

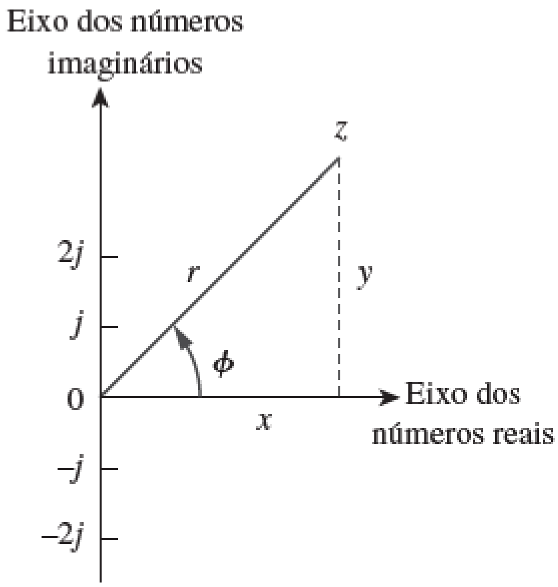

Figura 9.6 Representação de um número complexo $z = x + jy = r\underline{/\phi}$.

Por outro lado, se conhecermos r e f, podemos obter x e y como:

$$x = rcos(\phi)$$
$$y = rsen(\phi)$$

Operações com Complexos

As seguintes operações são importantes.

Adição

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

Subtração

$$z_1 + z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Multiplicação

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle \phi_1 + \phi_2$$

Divisão

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \phi_1 - \phi_2$$

Inverso

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \angle - \phi$$

Raiz Quadrada

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \angle \phi/2$$

Conjugado Complexo

$$z* = x - jy = r \angle - \phi = re^{-j\phi}$$

A ideia da representação de fasor se baseia na identidade de Euler. Em geral:

$$e^{\pm j\phi} = cos(\phi) \pm jsen(\phi)$$

Assim, podemos escrever:

$$cos(\phi) = Re(e^{j\phi})$$
$$sen(\phi) = Im(e^{j\phi})$$

Dada a senoide v(t) = Vm cos(vt + Φ), podemos representar como:

$$v(t) = Re(Ve^{j\omega t})$$
$$V = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi$$

V é, portanto, a representação fasorial da senoide v(t)

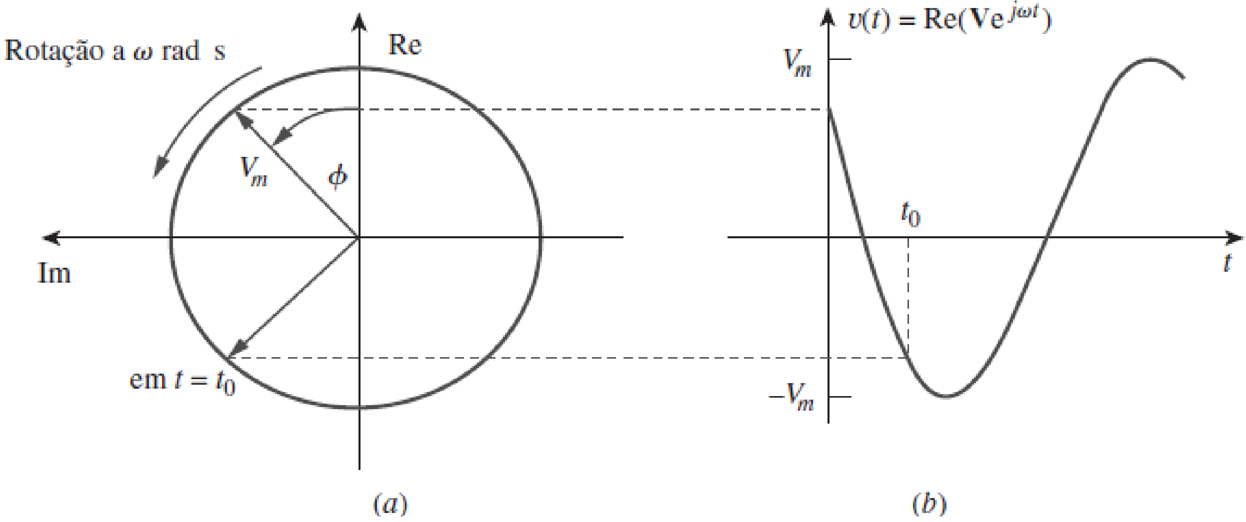

Figura 9.7 Representação de $\mathbf{V}e^{j\omega t}$ (a) seno fasorial girando no sentido anti-horário; (b) sua projeção no eixo real, em função do tempo.

Derivada e Integral de Fasores

A derivada de v(t) é transformada para o domínio dos fasores como jwV:

$$\frac{dv}{dt} = -\omega V_m sen(\omega t + \phi) = \omega V_m cos(\omega t + \phi + 90^o)$$
$$= Re(\omega V_m e^{j\omega t} e^{j\omega} e^{j90^o} = Re(j\omega V e^{j\omega t})$$

Assim:

$$\frac{dv}{dt} = j\omega V$$
$$\int vdt = \frac{V}{j\omega}$$

As diferenças entre v(t) e V devem ser enfatizadas:

1. v(t) é a representação instantânea ou no domínio do tempo, enquanto **V** é a representação em termos de frequência ou no domínio dos fasores.
2. v(t) é dependente do tempo, enquanto V não é.
3. v(t) é sempre real sem nenhum termo complexo, enquanto **V** geralmente é complexo.

Exemplo 9.4

Transforme as senoides seguintes em fasores:

(a) i = 6cos(50t - 40º) A

(b) v = -4sen(30t + 50º) V

In [13]:

```
print("Exemplo 9.4")

#6cos(50t - 40)
#r = 6
#phi = -40

#-4sen(30t + 50) = 4sen(30t + 50 + 180) = 4cos(30t + 140)
#r = 4
#phi = 140

print("I: 6[-40º]")
print("V: 4[140º]")
```

```
Exemplo 9.4
I: 6[-40º]
V: 4[140º]
```

Problema Prático 9.4

Expresse as senoides seguintes na forma de fasores:

(a) v = 7cos(2t + 40º) V

(b) i = -4sen(10t + 10º) A

In [14]:

```
print("Problema Prático 9.4")

#7cos(2t + 40)
#r = 7
#phi = 40

#-4sen(10t + 10) = 4sen(10t + 10 + 180) = 4cos(10t + 100)
#r = 4
#phi = 100

print("V: 7[40º]")
print("I: 4[100º]")
```

```
Problema Prático 9.4
V: 7[40º]
I: 4[100º]
```

Exemplo 9.5

Determine as senoides representadas pelos fasores seguintes:

(a) I = -3 + j4

(b) V = j8e^(-j20º)

In [36]:

```
print("Exemplo 9.5")

import numpy as np

r = np.sqrt((-3)**2 + 4**2)
phi = np.arctan(4/(-3))*180/np.pi + 180

print("I: {}[{}º]".format(r,phi))

#j = 1[90º]
#V = 8e^(-j20) = 8[-20º]
#jV = 1*8 [90 -20] = 8[70º]

print("V: 8[70º]")
```

```
Exemplo 9.5
I: 5.0[126.86989764584402º]
V: 8[70º]
```

Problema Prático 9.5

Determine as senoides correspondentes aos fasores seguintes:

(a) V = -25[40º]

(b) I = j(12 - j5)

In [38]:

```
print("Problema Prático 9.5")

print("v(t) = 25cos(wt + 220)")

#j(12 - j5) = 5 + 12j

r = np.sqrt(5**2 + 12**2)
phi = np.arctan(12/5)*180/np.pi

print("I: {}[{}º]".format(r,phi))
```

```
Problema Prático 9.5
v(t) = 25cos(wt + 220)
I: 13.0[67.38013505195958º]
```

Exemplo 9.6

Dados i1(t) = 4 cos(wt + 30°) A e i2(t) = 5 sen(wt + 20°) A, determine sua soma.

In [60]:

```
print("Exemplo 9.6")

#4cos(wt + 30) = 4[30]
#5sen(wt + 20) = 5cos(wt + 70) = 5[-110]

x = 4*np.cos(30*np.pi/180) + 5*np.cos(-110*np.pi/180)
y = 4*np.sin(30*np.pi/180) + 5*np.sin(-110*np.pi/180)

print("i1 + i2: {} + j{}".format(x,y))

r = np.sqrt(x**2 + y**2)
phi = np.arctan(y/x)*180/np.pi

print("I: {}[{}]".format(r,phi))
print("i(t): {}cos(wt + {})".format(r,phi))
```

```
Exemplo 9.6
i1 + i2: 1.7540008985094113 + j-2.6984631039295426
I: 3.218419219934048[-56.976134221108644]
i(t): 3.218419219934048cos(wt + -56.976134221108644)
```

Problema Prático 9.6

Se v1(t) = –10 sen(vt – 30°) V e v2(t) = 20 cos(vt + 45°), determine v = v1 + v2.

In [61]:

```
print("Problema Prático 9.6")

#-10sen(wt - 30) = 10sen(wt + 150) = 10sen(wt + 60) = 10[60]
#20cos(wt + 45) = 20[45]

x = 10*np.cos(60*np.pi/180) + 20*np.cos(45*np.pi/180)
y = 10*np.sin(60*np.pi/180) + 20*np.sin(45*np.pi/180)

print("v1 + v2: {} + j{}".format(x,y))

r = np.sqrt(x**2 + y**2)
phi = np.arctan(y/x)*180/np.pi

print("V: {}[{}]".format(r,phi))
print("v(t): {}cos(wt + {})".format(r,phi))
```

```
Problema Prático 9.6
v1 + v2: 19.14213562373095 + j22.802389661575337
V: 29.771972230868872[49.98723472563248]
v(t): 29.771972230868872cos(wt + 49.98723472563248)
```

Exemplo 9.7

Usando o método de fasores, determine a corrente i(t) em um circuito descrito pela equação diferencial

$$4i + 8\int idt - 3\frac{di}{dt} = 50cos(2t + 75)$$

In [64]:

```
print("Exemplo 9.7")

#4I + 8I/jw - 3jwI = 50[75]
#4I -4jI - 6jI = 50[75]
#I = 50[75] / (4 - j10)

r = np.sqrt(4**2 + (-10)**2)
phi = np.arctan((-10)/4)*180/np.pi

R = 50/r
Phi = 75 - phi

print("Fasor I: {}[{}]".format(R,Phi))
print("i(t) = {}cos(wt + {}º)".format(R,Phi))
```

```
Exemplo 9.7
Fasor I: 4.642383454426297[143.19859051364818]
i(t) = 4.642383454426297cos(wt + 143.19859051364818º)
```

Problema prático 9.7

Determine a tensão v(t) em um circuito descrito pela equação integro-diferencial a seguir:

$$2\frac{dv}{dt} + 5v + 10\int vdt = 50cos(5t - 30^{o})$$

In [66]:

```
print("Problema Prático 9.7")

#2Vjw + 5V + 10v/jw = 50[-30]
#5V -2jV + 10jV = 50[-30]
#V = 50[-30] / (5 + j8)

r = np.sqrt(5**2 + 8**2)
phi = np.arctan(8/5)*180/np.pi

R = 50/r
Phi = -30 - phi

print("Fasor I: {}[{}]".format(R,Phi))
print("i(t) = {}cos(wt + {}º)".format(R,Phi))
```

```
Problema Prático 9.7
Fasor I: 5.299989400031801[-87.9946167919165]
i(t) = 5.299989400031801cos(wt + -87.9946167919165º)
```