

# Circuitos de Segunda Ordem Gerais (Genéricos)

Jupyter Notebook desenvolvido por Gustavo S.S. (<https://github.com/GSimas>)

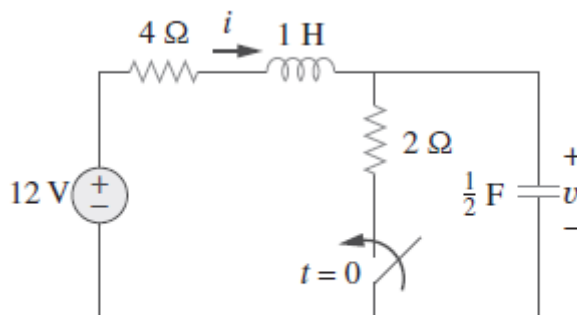
Dado um circuito de segunda ordem, determinamos sua resposta a um degrau  $x(t)$  (que pode ser tensão ou corrente), conforme as quatro etapas descritas a seguir:

1. Determinamos as condições iniciais  $x(0)$  e  $dx(0)/dt$  e o valor final  $x(\infty)$
2. **Desativamos as fontes independentes e obtemos Equação Diferencial de Segunda Ordem**
3. Determinamos raízes características e encontramos a forma da resposta transiente  $x_t(t)$ .
4. **Dependendo se a resposta for com amortecimento supercrítico, com amortecimento crítico ou com subamortecimento, obtemos  $x_t(t)$  com duas constantes desconhecidas**
5. Obtemos a resposta de estado estável  $x_{ss}(t) = x(\infty)$
6. **A resposta total agora é encontrada como a soma das respostas transiente e de estado estável**
7. Finalmente, estabelecer as constantes associadas com a resposta transiente impondo as condições iniciais  $x(0)$  e  $dx(0)/dt$ , determinadas no item 1.

Podemos aplicar esse procedimento geral para encontrar a resposta a um degrau de um circuito de segunda ordem, inclusive aqueles com amplificadores operacionais.

## Exemplo 8.9

Determine a resposta completa  $v$  e, em seguida,  $i$  para  $t > 0$  no circuito da Figura 8.25.



**Figura 8.25** Esquema para o Exemplo 8.9.

In [6]:

```
print("Exemplo 8.9\n")

from sympy import *

t = symbols('t')

V = 12
C = 1/2
L = 1

#Para  $t < 0$ 
i0 = 0
```

```

v0 = V

print("i(0):",i0,"A")
print("v(0):",v0,"V")

#Para t = oo
i_f = V/(4 + 2)
vf = V*2/(4 + 2)

print("i(oo):",i_f,"A")
print("v(oo):",vf,"V")

#Para t > 0
#desativar fontes independentes

#i = v/2 + C*dv/dt

#4i + L*di/dt + v = 0
#4*(v/2 + 1/2*dv/dt) + d(v/2 + 1/2*dv/dt)/dt + v = 0
#2v + 2dv/dt + 1/2*dv/dt + 1/2*d^2v/dt^2 + v = 0
#d^2v/dt^2 + 5dv/dt + 6v = 0

#s^2 + 5s + 6 = 0
s1 = -2
s2 = -3

#Raizes reais e negativas: Superamortecido

#vn(t) = A1*exp(-2t) + A2*exp(-3t)
#vss(t) = v(oo) = 4

#v(t) = 4 + A1*exp(-2t) + A2*exp(-3t)

#dv(0)/dt = -2A1 - 3A2 = ic(0)/C
#ic(0) = -6
#C = 1/2
#-2A1 - 3A2 = -12
#2A1 + 3A2 = 12

#v(0) = 4 + A1 + A2 = 12
#A1 + A2 = 8

#2(8 - A2) + 3A2 = 12
A2 = -4
A1 = 12

v = A1*exp(s1*t) + A2*exp(s2*t) + vf

print("Resposta completa v(t):",v,"V")

#i = v/2 + C*dv/dt

i = v/2 + C*diff(v,t)

print("i(t):",i,"A")

```

**Exemplo 8.9**

$$i(0): 0 \text{ A}$$

$$v(0): 12 \text{ V}$$

$$i(\infty): 2.0 \text{ A}$$

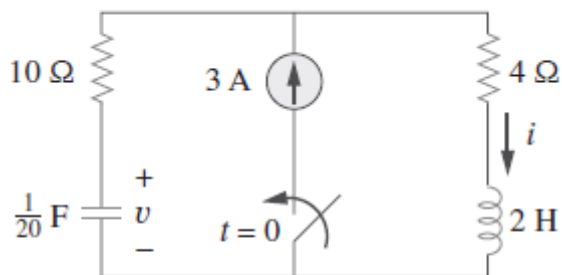
$$v(\infty): 4.0 \text{ V}$$

$$\text{Resposta completa } v(t): 4.0 + 12 \cdot \exp(-2 \cdot t) - 4 \cdot \exp(-3 \cdot t) \text{ V}$$

$$i(t): 2.0 - 6.0 \cdot \exp(-2 \cdot t) + 4.0 \cdot \exp(-3 \cdot t) \text{ A}$$

**Problema Prático 8.9**

Determine  $v$  e  $i$  para  $t > 0$  no circuito da Figura 8.28. (Ver comentários sobre fontes de corrente no Problema prático 7.5.)



**Figura 8.28** Esquema para o Problema prático 8.9.

In [36]:

```
print("Problema Prático 8.9")

s = symbols('s')

C = 1/20
L = 2
Is = 3

#Para t < 0
v0 = 0
i0 = 0

print("v(0):",v0,"V")
print("i(0):",i0,"A")

#Para t = oo
i_f = Is
vf = 4*Is

print("i(oo):",i_f,"A")
print("v(oo):",vf,"V")

#Para t > 0
dv0 = Is/C
di0 = 10*Is/L

print("dv(0)/dt:",dv0,"V/s")
print("di(0)/dt:",di0,"A/s")
```

```

#desativar fontes indep.

#4i + L*di/dt - v + 10i = 0
#i = -C*dv/dt
#14(-1/20*dv/dt) + 2(-1/20*d^2v/dt^2) - v = 0
#-1/10*d^2v/dt^2 - 7/10*dv/dt - v = 0
#d^2v/dt^2 + 7*dv/dt + 10v = 0

#s^2 + 7s + 10 = 0
r = solve(s**2 + 7*s + 10,s)
s1,s2 = r[0],r[1]

print("Raízes s1 e s2: {0} , {1}".format(s1,s2))

#Raízes reais e negativas: Superamortecido

#v(t) = vf + A1*exp(-5t) + A2*exp(-2t)
#v0 = A1 + A2 = -12
#A1 = -12 - A2
#dv0/dt = -5A1 - 2A2 = 60
#-5A1 - 2(-12 - A1) = 60
A1 = (60-24)/(-3)
A2 = -12 - A1

print("Constantes A1 e A2: {0} , {1}".format(A1,A2))

v = A1*exp(s1*t) + A2*exp(s2*t) + vf

print("Resposta completa v(t):",v,"V")

#3 = C*dv/dt + i
i = 3 - C*diff(v,t)

print("Resposta i(t):",i,"A")

```

#### Problema Prático 8.9

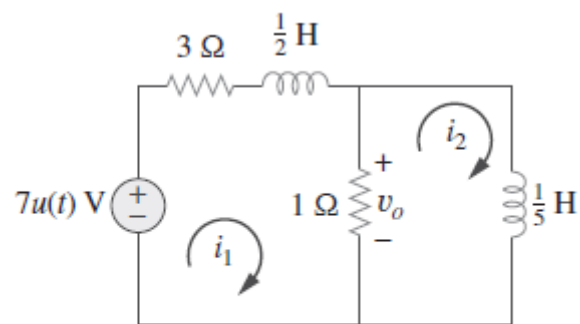
```

v(0): 0 V
i(0): 0 A
i(oo): 3 A
v(oo): 12 V
dv(0)/dt: 60.0 V/s
di(0)/dt: 15.0 A/s
Raízes s1 e s2: -5 , -2
Constantes A1 e A2: -12.0 , 0.0
Resposta completa v(t): 12 - 12.0*exp(-5*t) V
Resposta i(t): 3 - 3.0*exp(-5*t) A

```

**Exemplo 8.10**

Descubra  $v_o(t)$  para  $t > 0$  no circuito da Figura 8.29.



**Figura 8.29** Esquema para o Exemplo 8.10.

In [37]:

```

print("Exemplo 8.10\n")

V = 7
L1 = 1/2
L2 = 1/5

#Para t < 0
i1_0 = 0
i2_0 = 0

print("i1(0):",i1_0,"A")
print("i2(0):",i2_0,"A")

#Para t = oo
i_f = V/3

print("i(oo):",i_f,"A")

#Para t > 0
#di1(0)/dt = vL/L1
di1 = V/L1
#di2(0)/dt = vL/L2
di2 = 0/L2

print("di1(0)/dt:",di1,"A/s")
print("di2(0)/dt:",di2,"A/s")

#desligar fontes indep.
#3i1 + 1/2*di1/dt + (i1 - i2) = 0
#4i1 + 1/2*di1/dt - i2 = 0
#1/5*di2/t + i2 - i1 = 0
#4/5*di1/dt + 1/10*d^2i1/dt^2 + 4i1 + 1/2*di1/dt - i1 = 0
#d^2i1/dt^2 + 13di1/dt + 30i1 = 0

#s^2 + 13s + 30 = 0

r = solve(s**2 + 13*s + 30,s)
s1,s2 = r[0],r[1]

```



```

print("Raizes s1 e s2: {0} , {1}".format(s1,s2))

#raizes reais e negativas: Superamortecido

#i1(t) = 7/3 + A1*exp(-10t) + A2*exp(-3t)
#i1(0) = 7/3 + A1 + A2 = 0
#A1 = -7/3 - A2
#di1(0)/dt = -10A1 - 3A2 = 14
#-10(-7/3 - A2) - 3A2 = 14
A2 = (14 - 70/3)/7
A1 = -7/3 - A2

print("Constantes A1 e A2: {0} , {1}".format(A1,A2))

i1 = i_f + A1*exp(s1*t) + A2*exp(s2*t)

print("i1(t):",i1,"A")

#V = 3i1 + L1*di1/dt + (i1 - i2)
i2 = 3*i1 + L1*diff(i1,t) + i1 - V

print("i2(t):",i2,"A")

vo = i1 - i2

print("V0(t):",vo,"V")

```

#### Exemplo 8.10

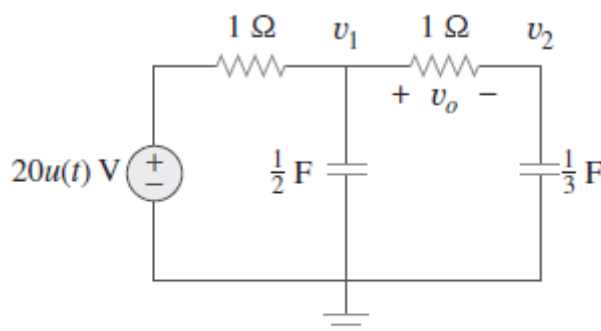
```

i1(0): 0 A
i2(0): 0 A
i(oo): 2.3333333333333335 A
di1(0)/dt: 14.0 A/s
di2(0)/dt: 0.0 A/s
Raizes s1 e s2: -10 , -3
Constantes A1 e A2: -1.0000000000000002 , -1.3333333333333333
i1(t): 2.333333333333333 - 1.333333333333333*exp(-3*t) - 1.0*exp(-10*t) A
i2(t): 2.333333333333333 - 3.333333333333333*exp(-3*t) + 1.0*exp(-10*t) A
V0(t): -4.44089209850063e-16 + 2.0*exp(-3*t) - 2.0*exp(-10*t) V

```

#### Problema Prático 8.10

Para  $t > 0$ , obtenha  $v_o(t)$  no circuito da Figura 8.32. (Sugestão: Determine primeiro  $v_1$  e  $v_2$ .)



**Figura 8.32** Esquema para o Problema prático 8.10.