UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

EEL7045 – Circuitos Elétricos A - Laboratório

AULA 09 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

1 INTRODUÇÃO

Nas aulas anteriores de laboratório de circuitos elétricos foram usados instrumentos analógicos e digitais para medir tensão, corrente e resistência. Estes instrumentos permitem apenas medir a amplitude de um sinal, normalmente seu valor médio ou eficaz. A forma deste sinal no tempo não foi possível monitorar com os instrumentos utilizados.

Esta aula e a próxima farão uso de um instrumento muito versátil e de crucial importância, tanto para o estudo, como para a prática da engenharia elétrica. Este instrumento é o osciloscópio e os detalhes de seu funcionamento podem ser encontrados no material anexo (apostilas, manuais do fabricante, etc.).

Nesta primeira aula o objetivo principal será aprender a medir tensões contínuas e alternadas e alterar os ajustes do osciloscópio para realizar a medição de amplitude, freqüência, valor médio, eficaz e de pico a pico.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS PARA O ENSAIO

Para a realização do ensaio de laboratório são necessários alguns fundamentos teóricos importantes, descritos a seguir.

2.1 Defasagem e fator de potência

A Figura 1 mostra duas formas de onda senoidais, defasadas de um ângulo Ø.

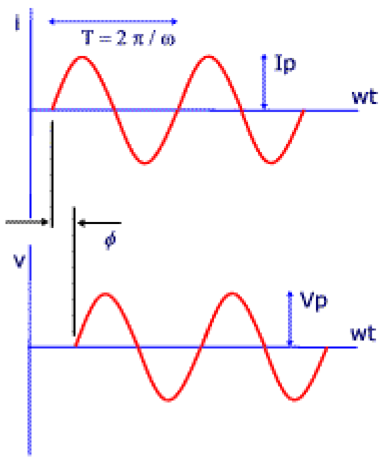

Figura 1 – Formas de onda senoidais de tensão e corrente com defasagem.

Onde:
I = corrente;
V = tensão;

T = tempo;
V_p = valor de pico da onda de tensão;
I_p = valor de pico da onda de corrente;
$\varnothing$ = ângulo de defasagem entre as ondas;
ω = freqüência angular calculada em função do período (T) ou da freqüência (f) da onda $\left(\omega = 2\pi \cdot f \text{ ou } \omega = 2\pi \cdot 1/T\right)$

Essas formas de onda podem ser descritas, utilizando as mesmas variáveis definidas para a Figura 1, pelas equações (1) e (2):

$$i = I_p \cdot sen(\omega t) \tag{1}$$

$$v = V_p \cdot sen(\omega t + \phi) \tag{2}$$

Dado um circuito em que tensão e corrente na carga estejam defasadas desse ângulo $\varnothing$, a potência instantânea dissipada nessa carga é dada por:

$$p = v \cdot i \tag{3}$$

Onde: v = tensão e i = corrente.

A potência média, por sua vez, é dada por:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T v \cdot i \cdot dt \tag{4}$$

Onde: v = tensão, i = corrente e T = período.

Substituindo os valores de v e i pelas equações (1) e (2) e resolvendo a integral, tem-se que:

$$P = V_e \cdot I_e \cdot cos\left(\phi\right) \tag{5}$$

Onde: V_e = valor eficaz da onda de tensão e I_e = valor eficaz da onda de corrente.

O valor eficaz de uma onda senoidal é o valor associado à energia útil que o sinal produz. Para uma onda de tensão senoidal, o valor eficaz é dado por $V_p/\sqrt{2}$. Assim, a energia deste sinal, em um dado intervalo de tempo, é a mesma de uma onda contínua com amplitude igual ao valor eficaz. Detalhes do cálculo do valor eficaz de uma onda podem ser encontrados em [1]. Na equação (5), a quantidade "*cos(ø)*" é chamada de fator de potência, e é característica de uma determinada carga que causa uma defasagem $\varnothing$ entre a tensão e a corrente.

Isto significa que, em um circuito de corrente senoidal alternada, se não há defasagem ($\varnothing = 0°$), toda a potência é transferida para a carga (como no caso de uma resistência). Caso a carga contenha indutores ou capacitores, essa potência começa a diminuir, podendo inclusive ser nula se $\varnothing = \pm 90°$ (casos onde a carga só contém indutores ou capacitores). Este conceito é muito importante na geração, transformação e distribuição de energia elétrica. Na prática, revela quanto da energia fornecida é realmente utilizada. Essa quantidade, embora usualmente chamada apenas de potência, é chamada de potência ativa de uma carga. A parcela de potência fornecida pela carga que não é convertida em energia útil, é chamada de potência reativa.

A seguir, serão definidos capacitores e indutores e a razão porque eles defasam tensões e correntes.

2.2 Capacitores (C), indutores (L) e cargas RLC

Capacitores são elementos basicamente formados por duas superfícies condutoras separadas por uma camada isolante. Quando uma tensão elétrica é aplicada entre as mesmas, provocará uma atração entre pólos opostos e repulsão entre pólos iguais, caracterizando-os com a propriedade de armazenar carga elétrica. Em um capacitor a carga elétrica armazenada é proporcional à tensão aplicada: $q = C \cdot V$. Onde o fator de proporcionalidade C é denominado capacitância (unidade Farad-F). Como a corrente é dada por *dq/dt*, temos:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dv}{dt} = C \cdot \frac{d\left(V_p \cdot sen(\omega t + \phi)\right)}{dt}$$

$$i = \omega \cdot C \cdot V_p \cdot cos\left(\omega t\right) = \omega \cdot C \cdot V_p \cdot sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (6)$$

Assim, a corrente é senoidal e adiantada de 90º em relação à tensão. Esta equação pode ser calculada em valores eficazes e então:

$$V_e = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_e \qquad (7)$$

Indutores são condutores dispostos em forma de espiral nos quais os campos eletromagnéticos formados geram correntes que tendem a se opor às variações da corrente aplicada nos mesmos. Em um indutor a relação entre tensão e corrente é dada por:

$$v = L\frac{di}{dt}$$

Onde o fator L é denominado indutância (unidade Henry - H).

Substituindo a corrente na expressão anterior por (1) tem-se:

$$v = L\frac{d\left(I_p \cdot sen(\omega t)\right)}{dt} = \omega \cdot L \cdot I_p \cdot cos\left(\omega t\right)$$

$$v = \omega \cdot L \cdot I_p \cdot sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (8)$$

Portanto, a corrente é atrasada de 90º em relação à tensão.

De forma similar ao caso do capacitor, tem-se:

$$V_e = \omega \cdot L \cdot I_e \qquad (9)$$

No caso de circuitos contendo resistores associados em série com capacitores ou indutores, a defasagem irá depender da freqüência, e dos valores de R, L, e C. O item seguinte introduz o conceito de impedância, para análise desse tipo de situação.

2.3 Impedância (resistência e reatância)

A impedância de um resistor é o próprio valor da sua resistência, que relaciona a tensão com a corrente no circuito $v = R \cdot i$. De forma similar, a impedância de um capacitor, observando-se a equação (7), é dada por $X_C = 1/\left(\omega \cdot C\right)$. X_c é chamada de reatância capacitiva. É importante lembrar que como $\omega = 2\pi \cdot f$, a reatância depende da freqüência.

O nome reatância é dado para a parte da impedância de uma carga que causa defasagem entre as ondas de tensão e corrente. A parte da impedância que não causa essa defasagem é chamada de resistência.

No caso de um indutor, observando-se a equação (9), tem-se que a reatância é dada por $X_L = \omega \cdot L$, onde X_L é a reatância indutiva.

Para cargas contendo um resistor associado em série com um indutor, como no primeiro circuito a ser montado na aula de laboratório, a impedância total será dada pela seguinte expressão:

$$Z_L = R + j \cdot \omega \cdot L \qquad (10)$$

Onde Z_L = Impedância da carga.

O operador "j", que vem da teoria dos números complexos, indica que a quantidade $(\omega \cdot L)$ está 90º adiantada em relação à componente R, conforme ilustra a Figura 2:

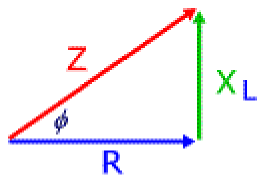

Figura 2 - Impedância de uma associação série resistor-indutor.

Assim, a defasagem que a carga de impedância *Z* mostrada na Figura 2 iria produzir entre as formas de onda de tensão e corrente seria dada pelo ângulo Ø (cujo cosseno é o fator de potência da carga). Da trigonometria, pode-se concluir que o módulo da impedância mostrada na Figura 8 é dado por:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L{}^2} \qquad (11)$$

Como o módulo depende de X_L, ele depende também da freqüência do sinal senoidal. Esse conceito, juntamente com o conceito de defasagem serão importantes na realização do ensaio de laboratório descrito a seguir.

2.4 Análise de resposta em freqüência

Entende-se como resposta em freqüência a resposta em regime estacionário de um sistema de entrada senoidal onde variamos a freqüência do sinal de entrada em uma faixa de interesse e estudamos a resposta em freqüência resultante.

Verificamos que um sistema linear, estável, invariante no tempo e sujeito a uma entrada senoidal possuirá, em regime permanente, uma saída senoidal com a mesma freqüência da entrada. Porém, a amplitude e o ângulo de fase da saída, em geral, serão diferentes daqueles da entrada, conforme a Figura 3. Com base no exposto, obtemos este importante resultado, para entradas senoidais:

$|G(j\omega)| = \left|\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right|$; relação de amplitude da onda senoidal da saída para a onda senoidal de entrada.

$\angle G(j\omega) = \angle \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$; defasagem da onda senoidal de saída com respeito à onda senoidal de entrada.

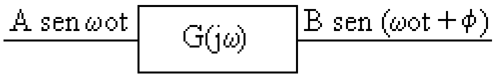

Figura 3 - Relação entrada-saída para um sistema linear.

Onde:

$B = A \cdot \left| G(j\omega) \right|_{\omega=\omega_o}$

$\phi = \angle G(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_o}$

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

Portanto, as características de resposta de um sistema para entrada senoidal podem ser obtidas diretamente de:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \qquad (12)$$

A função $G(j\omega)$ chamada função de transferência senoidal, e é a relação entra a saída $Y(j\omega)$ e a entrada $X(j\omega)$, é uma grandeza complexa que pode ser representada pelo módulo e ângulo de fase, tendo a freqüência como variável ou parâmetro.

Muitas vezes $G(j\omega)$ é representada por dois gráficos, um de módulo e outro de fase. Para acomodar informações em uma faixa ampla de freqüências é comum usar-se escala logarítmica.

3 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] HAYT, Willian H.; KEMMERLY, J. E. Análise de Circuitos em Engenharia. McGraw-Hill. São Paulo, 1975.

[2] OGATA, Katsuhiko. Engenharia de Controle Moderno, PHB. Rio de Janeiro, 1990.

[3] KUO PENG, Patrick. Apostila de Circuitos Elétricos I. Departamento de Engenharia Elétrica, UFSC. Florianópolis, 2003.

4 PARTE EXPERIMENTAL

Montar os circuitos ilustrados na Figura 4. Para cada circuito, variar a freqüência da onda senoidal de entrada em valores compreendidos na faixa de 10 Hz a 100kHz e medir para cada variação, as tensões de entrada e saída indicadas no circuito.

Utilizar o gerador de funções disponível no laboratório que apresenta resistência de saída de 50 ohms.

Utilize uma tensão de alimentação com amplitude de 5 V de pico, ou seja, 10 V pico a pico.

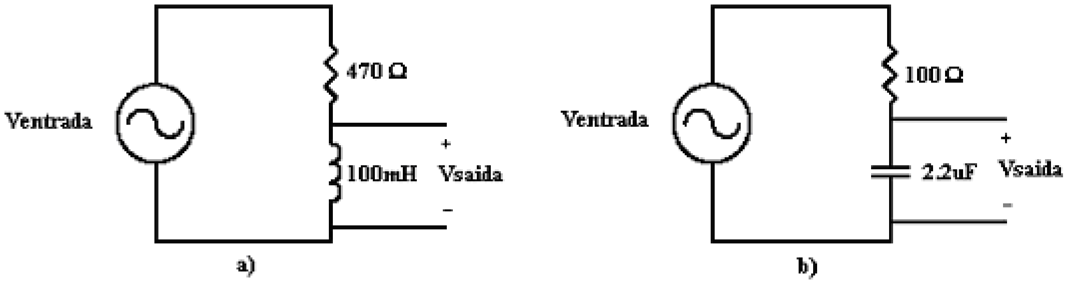

Figura 4 - Circuitos a serem montados.

Anotar os dados obtidos nas tabelas fornecidas em anexo.

Determinar:

a. Indicar na Figura 5 a relação de amplitude da entrada em relação à saída do circuito RL (Figura 4a);

b. Indicar na Figura 6 a defasagem angular da saída em relação à entrada do circuito RL (Figura 4a);

c. Indicar na Figura 7 a relação de amplitude da entrada em relação à saída do circuito RC (Figura 4b);

d. Indicar na Figura 8 a defasagem angular da saída em relação à entrada do circuito RC (Figura 4b).

Apresentar no relatório as tabelas com os dados e os gráficos obtidos, traçados a mão ou em *software* adequado. Comentar a respeito do funcionamento das variáveis de cada circuito.

Para informações adicionais sobre o funcionamento dos circuitos consultar [1] e [3].

O módulo de $G(j\omega)$ é calculado usando a expressão:

$$G(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{V_{indutor/capacitor}(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

$$\left|G(j\omega)\right| = 20 \cdot \log\left(\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{V_{indutor/capacitor}(j\omega)}{V_i(j\omega)}\right)$$

Já a fase é calculada como:

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \angle \frac{V_{indutor\_capacitor}(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \angle \frac{V_{indutor\_capacitor}(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

No osciloscópio será medida a defasagem no tempo. Estes valores em segundos, milisegundos ou microsegundos deverão ser convertidos para graus, posteriormente.

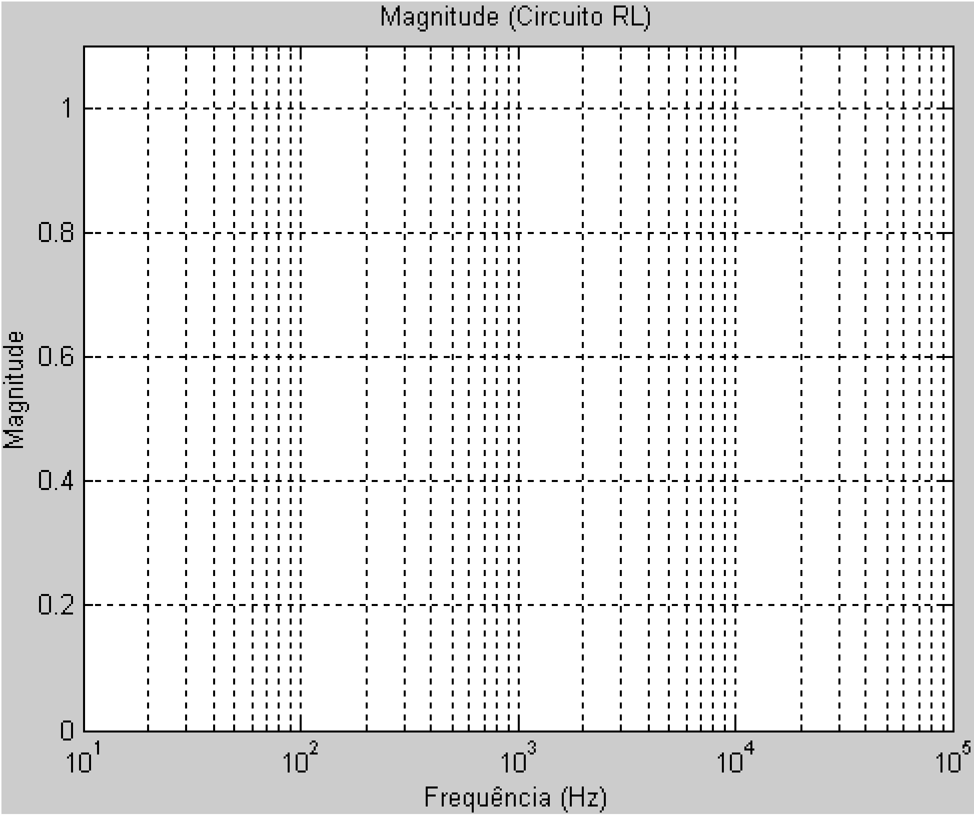

Figura 5 - Relação de amplitude da saída em relação à entrada.

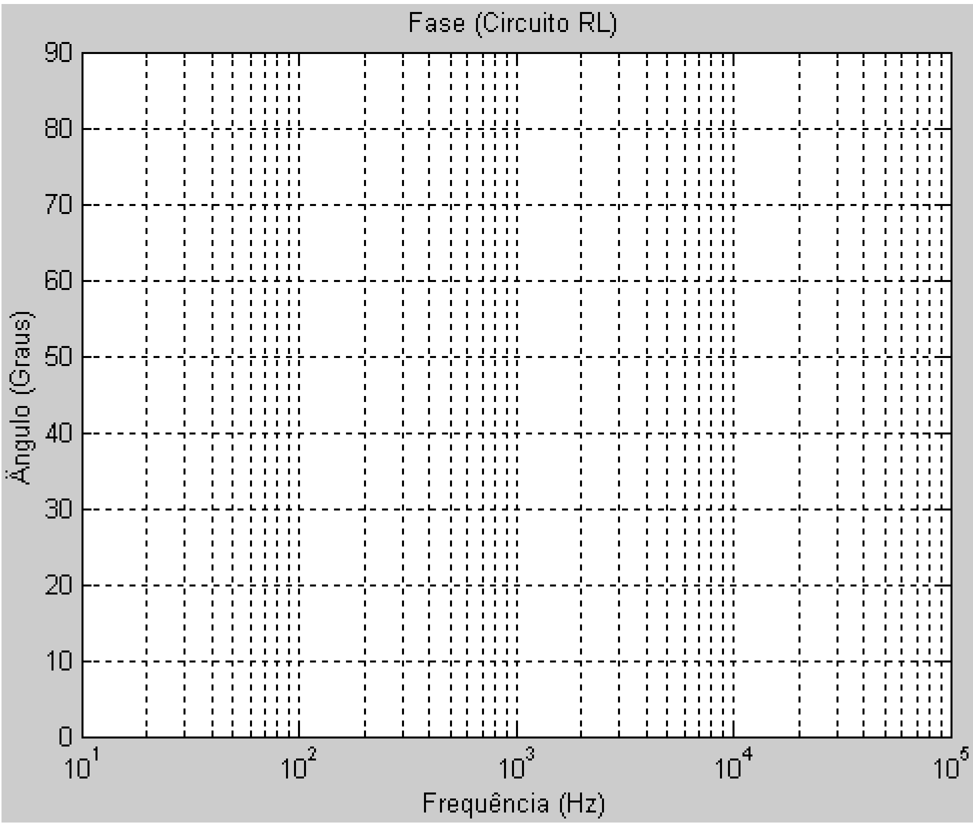

Figura 6 – Defasagem angular da saída em relação à entrada.

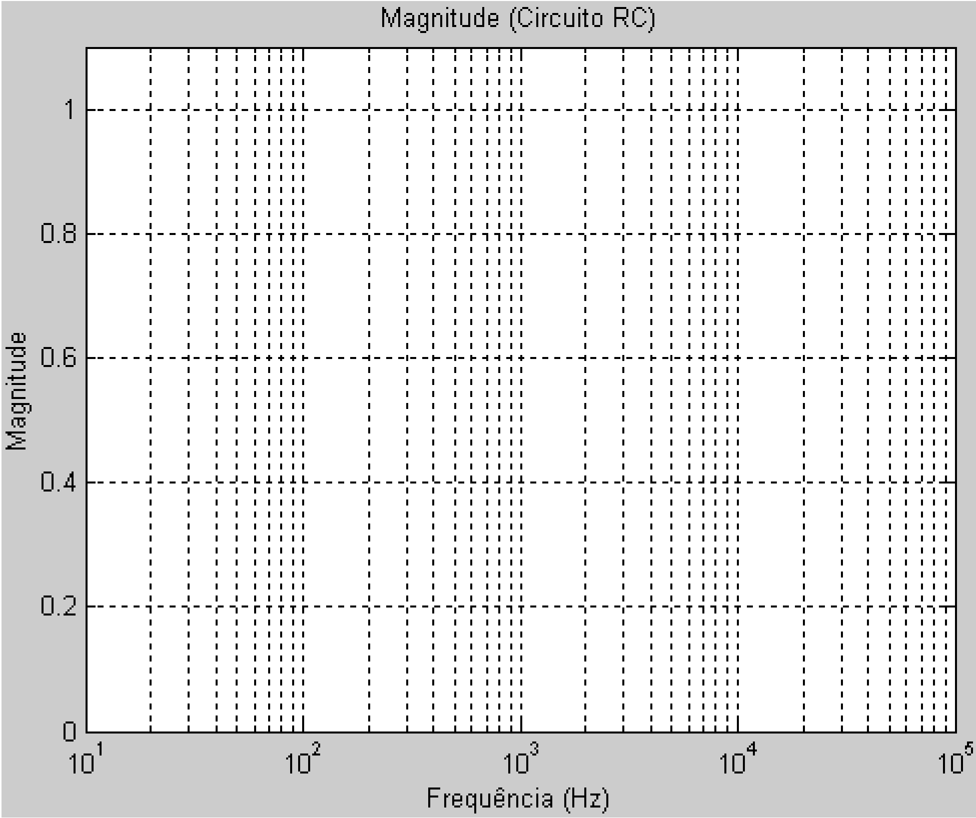

Figura 7 - Relação de amplitude da saída em relação à entrada.

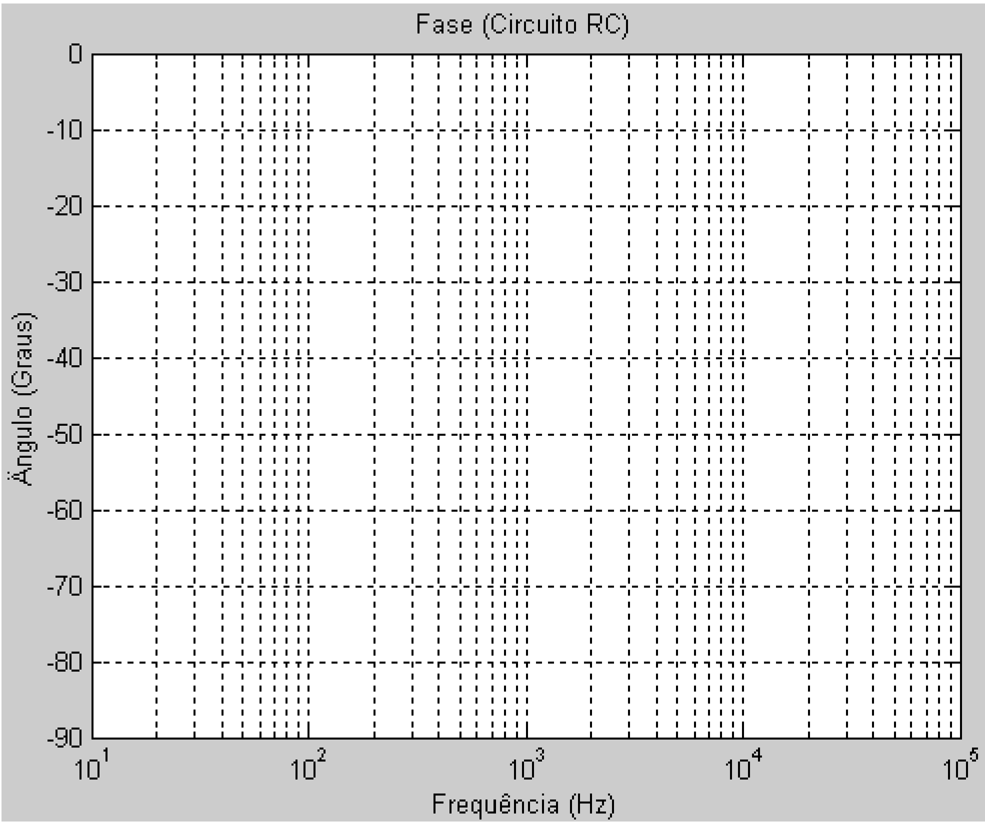

Figura 8 – Defasagem angular da saída em relação à entrada.

5 FOLHA DE DADOS (ALUNOS)

Equipe Aula: ________ Data: _____/_____/_____

Nome: ____

Nome: ____

Instrumentos utilizados ____

Tabela 1 – Circuito RL (Figura 4a).

Freqüência (fonte) [Hz]	Tensão Entrada (fonte) [V ou mV]	Tensão Saída (indutor) [V ou mV]	Defasagem (fonte – saída) [ms, µs ou s]	Módulo de G(jω) [dB]	Fase de G(jω) [graus]
10					
100					
500					
600					
700					
800					
900					
1 000					
1 100					
1 200					
1 300					
1 400					
1 500					
2 000					
2 500					
3 000					
5 000					
10 000					
30 000					
50 000					
70 000					
90 000					
100 000					
Medido na aula				Calculado após a aula	

Tabela 2 – Circuito RC (Figura 4b).

Freqüência (fonte) [Hz]	**Tensão Entrada (fonte) [V ou mV]**	**Tensão Saída (capacitor) [V ou mV]**	**Defasagem (fonte – saída) [ms, μs ou s]**	**Módulo de G(jω) [dB]**	**Fase de G(jω) [graus]**
10					
100					
500					
600					
700					
800					
900					
1 000					
1 100					
1 200					
1 300					
1 400					
1 500					
2 000					
2 500					
3 000					
5 000					
10 000					
30 000					
50 000					
70 000					
90 000					
100 000					
Medido na aula				Calculado após a aula	

6 FOLHA DE DADOS (PROFESSOR)

Equipe Aula: ________ Data: _____/_____/_____

Nome: ____

Nome: ____

	Circuito RL			Circuito RC		
Freqüência (fonte) [Hz]	**Tensão Entrada (fonte) [V ou mV]**	**Tensão Saída (indutor) [V ou mV]**	**Defasagem (fonte – saída) [ms, µs ou s]**	**Tensão Entrada (fonte) [V ou mV]**	**Tensão Saída (capacitor) [V ou mV]**	**Defasagem (fonte – saída) [ms, µs ou s]**
10						
100						
500						
600						
700						
800						
900						
1 000						
1 100						
1 200						
1 300						
1 400						
1 500						
2 000						
2 500						
3 000						
5 000						
10 000						
30 000						
50 000						
70 000						
90 000						
100 000						