



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Δ.Π.Μ.Σ. Συστήματα Αυτοματισμού

Κατεύθυνση Β:

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και Ρομποτικής

Μεταπτυχιακό Μάθημα:

Ρομποτικά Συστήματα Ελέγχου

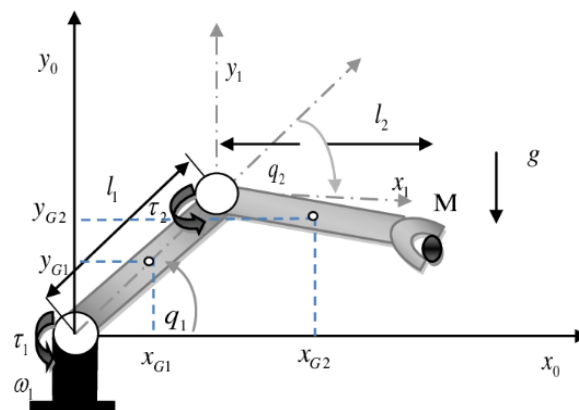
Εργασία Εξαμήνου

Βιομηχανικός Ρομποτικός Χειριστής

(KUKA Industrial Robot Manipulator)

Όνομα Φοιτητή - Α.Μ.:

Γεώργιος Κρομμύδας - 02121208



ΑΘΗΝΑ,

2023

Πίνακας περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων.....	3
Κατάλογος Πινάκων.....	4
Εισαγωγή.....	5
Μέρος Α – Θεωρητική Ανάλυση Ρομποτικού Χειριστή.....	6
Α.1 Μεθοδολογία Denavit – Hartenberg (D-H).....	6
Α.2 Ευθύ Κινηματικό Μοντέλο Ρομποτικού Χειριστή	7
Α.3 Ιακωβιανή Μήτρα Διαφορικού Κινηματικού Μοντέλου	10
Α.4 Αντίστροφο Διαφορικό Κινηματικό Μοντέλο	13
Α.5 Αντίστροφο Γεωμετρικό Κινηματικό Μοντέλο	17
Μέρος Β – Προσομοίωση Ρομποτικού Χειριστή.....	21
Β.1 Σχεδίαση Τροχιάς του Χώρου Εργασίας	21
Β.2 Προσομοίωση Ρομποτικού Χειριστή	26
Βιβλιογραφία.....	31

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1. Βιομηχανικός Ρομποτικός Χειριστής τύπου KUKA	5
Σχήμα 2. Άξονες και Διαστάσεις του Ρομποτικού Βιομηχανικού Χειριστή τύπου KUKA	5
Σχήμα 3. Κινηματική Δομή Ρομποτικού Χειριστή τύπου KUKA	6
Σχήμα 4. Τροχιά x – συνιστώσας από το σημείο p_A στο σημείο p_B	23
Σχήμα 5. Τροχιά x – συνιστώσας από το σημείο p_B στο σημείο p_A	23
Σχήμα 6. Τροχιά y – συνιστώσας από το σημείο p_A στο σημείο p_B	24
Σχήμα 7. Τροχιά y – συνιστώσας από το σημείο p_B στο σημείο p_A	25
Σχήμα 8. Διάγραμμα Διόρθωσης του αθροιστικού σφάλματος θέσης	26
Σχήμα 9. Διάγραμμα Ροής Αυξητικού αλγορίθμου	26
Σχήμα 10. Μπλοκ Διάγραμμα Τροποποιημένου Αυξητικού Αλγορίθμου	27
Σχήμα 11. Συσχέτιση Μεταξύ Επιθυμητής και Υπολογισμένης Θέσης του Τελικού Στοιχείου Δράσης	28
Σχήμα 12. Συσχέτιση μεταξύ Επιθυμητής Και Υπολογισμένης Γραμμικής Ταχύτητας Του Τελικού Στοιχείου Δράσης	28
Σχήμα 13. Θέσεις Αρθρώσεων Ρομποτικού Χειριστή	29
Σχήμα 14. Ταχύτητες Αρθρώσεων Ρομποτικού Χειριστή	29
Σχήμα 15. Προσομοίωση Ρομποτικού Χειριστή	30

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1. Διαστάσεις του Ρομποτικού Χειριστή (Μήκη των Συνδέσμων)	5
Πίνακας 2. Παραμετρικός Πίνακας Denavit - Hartenberg (D-H) του Ρομποτικού Χειριστή.	6

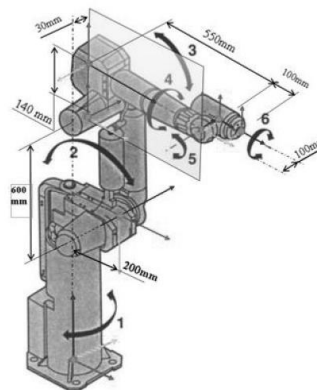
Εισαγωγή

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας δόθηκε για ανάλυση και προσομοίωση ένας βιομηχανικός ρομποτικός χειριστής έξι βαθμών ελευθερίας (6 DoF) τύπου KUKA. Ο βιομηχανικός ρομποτικός χειριστής αποτελείται από έξι αρθρώσεις, τον οποίο μπορούμε να δούμε και στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1. Βιομηχανικός Ρομποτικός Χειριστής τύπου KUKA

Στο Σχήμα 2 μπορούμε να διακρίνουμε και τους άξονες μαζί με τις διαστάσεις του συγκεκριμένου ρομπότ.



Σχήμα 2. Άξονες και Διαστάσεις του Ρομποτικού Βιομηχανικού Χειριστή τύπου KUKA

Με βάση το σχήμα 2, μπορούμε να περιγράψουμε την κινηματική του δομή και να την κατηγοριοποιήσουμε στην θεωρητική ανάλυση που αποτελείται από την ενότητα Μέρος Α και την σχεδίαση τροχιάς και προσομοίωσης του βραχίονα που αποτελεί το Μέρος Β. Οι διαστάσεις του ρομποτικού χειριστή αποτυπώνονται στον Πίνακα 1 (οι μονάδες του είναι σε mm).

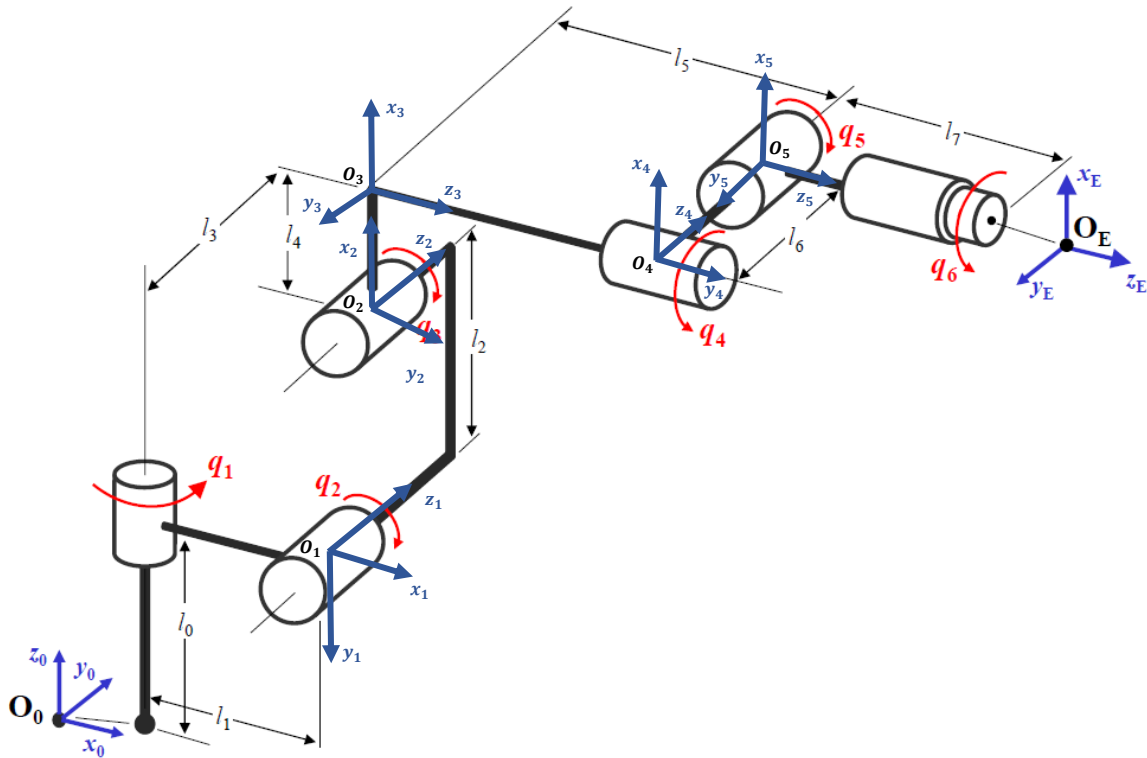
ℓ_0	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5	ℓ_6	ℓ_7
810	200	600	30	140	550	100	100

Πίνακας 1. Διαστάσεις του Ρομποτικού Χειριστή (Μήκη των Συνδέσμων)

Μέρος Α – Θεωρητική Ανάλυση Ρομποτικού Χειριστή

A.1 Μεθοδολογία Denavit – Hartenberg (D-H)

Στο παρών ερώτημα θα χρησιμοποιηθεί η μεθοδολογία *Denavit – Hartenberg* και θα παραχθεί ο αντίστοιχος πίνακας. Με βάση το Σχήμα 3, όπου περιγράφεται η κινηματική δομή του ρομποτικού χειριστή, θα τοποθετηθούν τα πλαίσια εντός του σχήματος και θα βρεθεί ο πίνακας των παραμέτρων κατά *Denavit – Hartenberg*.



Σχήμα 3. Κινηματική Δομή Ρομποτικού Χειριστή τύπου KUKA

Στο Σχήμα 3 παρατηρούμε τα πλαίσια αναφοράς ως προς κάθε άρθρωση. Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της μεθοδολογίας D-H.

Link i	\mathfrak{a}_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	ℓ_1	$-\pi/2$	ℓ_0	q_1
2	ℓ_2	0	ℓ_3	$q_2 - \pi/2$
3	ℓ_4	$-\pi/2$	0	q_3
4	0	$\pi/2$	ℓ_5	q_4
5	0	$-\pi/2$	ℓ_6	q_5
6	0	0	ℓ_7	q_6

Πίνακας 2. Παραμετρικός Πίνακας Denavit - Hartenberg (D-H) του Ρομποτικού Χειριστή

A.2 Ευθύ Κινηματικό Μοντέλο Ρομποτικού Χειριστή

Σε αυτό το ερώτημα έχουμε να υπολογίσουμε την ευθεία κινηματική του ρομποτικού βραχίονα. Καθώς έχει παραχθεί ο πίνακας *Denavit – Hartenberg(D-H)*, το επόμενο βήμα είναι να υπολογιστούν οι ομογενείς μετασχηματισμοί $A_i^{i-1}(q_i) \in SE(3)$. Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
 A_1^0(q_1) &= \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_1) & -\sin(\vartheta_1)\cos(a_1) & \sin(\vartheta_1)\sin(a_1) & a_1\cos(\vartheta_1) \\ \sin(\vartheta_1) & \cos(\vartheta_1)\cos(a_1) & -\cos(\vartheta_1)\sin(a_1) & a_1\sin(\vartheta_1) \\ 0 & \sin(a_1) & \cos(a_1) & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1)\cos(-\frac{\pi}{2}) & \sin(q_1)\sin(-\frac{\pi}{2}) & \ell_1\cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1)\cos(-\frac{\pi}{2}) & -\cos(q_1)\sin(-\frac{\pi}{2}) & \ell_1\sin(q_1) \\ 0 & \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) & \ell_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_1^0(q_1) &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & \ell_1 c_1 \\ s_1 & 0 & c_1 & \ell_1 s_1 \\ 0 & -1 & 0 & \ell_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2^1(q_2) &= \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_2) & -\sin(\vartheta_2)\cos(a_2) & \sin(\vartheta_2)\sin(a_2) & a_2\cos(\vartheta_2) \\ \sin(\vartheta_2) & \cos(\vartheta_2)\cos(a_2) & -\cos(\vartheta_2)\sin(a_2) & a_2\sin(\vartheta_2) \\ 0 & \sin(a_2) & \cos(a_2) & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_2 - \pi/2) & -\sin(q_2 - \pi/2)\cos(0) & \sin(q_2 - \pi/2)\sin(0) & \ell_2\cos(q_2 - \pi/2) \\ \sin(q_2 - \pi/2) & \cos(q_2 - \pi/2)\cos(0) & -\cos(q_2 - \pi/2)\sin(0) & \ell_2\sin(q_2 - \pi/2) \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_2^1(q_2) &= \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & \ell_2 s_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & -\ell_2 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}
 \end{aligned}$$

$$A_3^2(q_3) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_3) & -\sin(\vartheta_3)\cos(a_3) & \sin(\vartheta_3)\sin(a_3) & a_3\cos(\vartheta_3) \\ \sin(\vartheta_3) & \cos(\vartheta_3)\cos(a_3) & -\cos(\vartheta_3)\sin(a_3) & a_3\sin(\vartheta_3) \\ 0 & \sin(a_3) & \cos(a_3) & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \sin(q_3)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \ell_4 \cos(q_3) \\ \sin(q_3) & \cos(q_3)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\cos(q_3)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \ell_4 \sin(q_3) \\ 0 & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &A_3^2(q_3) = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 & \ell_4 c_3 \\ s_3 & 0 & c_3 & \ell_4 s_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &A_4^3(q_4) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_4) & -\sin(\vartheta_4)\cos(a_4) & \sin(\vartheta_4)\sin(a_4) & \mathfrak{a}_4 \cos(\vartheta_4) \\ \sin(\vartheta_4) & \cos(\vartheta_4)\cos(a_4) & -\cos(\vartheta_4)\sin(a_4) & \mathfrak{a}_4 \sin(\vartheta_4) \\ 0 & \sin(a_4) & \cos(a_4) & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_4) & -\sin(q_4)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin(q_4)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ \sin(q_4) & \cos(q_4)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\cos(q_4)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \ell_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &A_4^3(q_4) = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ell_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &A_5^4(q_5) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_5) & -\sin(\vartheta_5)\cos(a_5) & \sin(\vartheta_5)\sin(a_5) & \mathfrak{a}_5 \cos(\vartheta_5) \\ \sin(\vartheta_5) & \cos(\vartheta_5)\cos(a_5) & -\cos(\vartheta_5)\sin(a_5) & \mathfrak{a}_5 \sin(\vartheta_5) \\ 0 & \sin(a_5) & \cos(a_5) & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_5) & -\sin(q_5)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \sin(q_5)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ \sin(q_5) & \cos(q_5)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\cos(q_5)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \ell_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &A_5^4(q_5) = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ell_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_6^5(q_6) &= \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_6) & -\sin(\vartheta_6) \cos(a_6) & \sin(\vartheta_6) \sin(a_6) & a_6 \cos(\vartheta_6) \\ \sin(\vartheta_6) & \cos(\vartheta_6) \cos(a_6) & -\cos(\vartheta_6) \sin(a_6) & a_6 \sin(\vartheta_6) \\ 0 & \sin(a_6) & \cos(a_6) & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_6) & -\sin(q_6) \cos(0) & \sin(q_6) \sin(0) & 0 \\ \sin(q_6) & \cos(q_6) \cos(0) & -\cos(q_6) \sin(0) & 0 \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & \ell_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_6^5(q_6) &= \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.6}
 \end{aligned}$$

Έχουν υπολογιστεί όλοι οι ομογενής μετασχηματισμοί του παραπάνω συστήματος. Θέτουμε τις γωνίες περιστροφής ως $q_4=q_5=q_6=0$ σταθ.. Έτσι, θεωρούνται οι αρθρώσεις 4,5,6 ανενεργές. Οπότε, το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε το συνολικό ευθύ κινηματικό μοντέλο του ρομποτικού μηχανισμού. Συνδυάζουμε τις σχέσεις (1.1), (1.2) και (1.3) και προκύπτει ο ομογενής μετασχηματισμός της σχέσης (1.7)

$$\begin{aligned}
 A_3^0(q_1, q_2, q_3) &= A_1^0(q_1) A_2^1(q_2) A_3^2(q_3) \\
 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & \ell_1 c_1 \\ s_1 & 0 & c_1 & \ell_1 s_1 \\ 0 & -1 & 0 & \ell_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & \ell_2 s_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & -\ell_2 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 & \ell_4 c_3 \\ s_3 & 0 & c_3 & \ell_4 s_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 & \ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 - \ell_3 s_1 \\ s_1 s_2 & s_1 c_2 & c_1 & \ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_3 c_1 \\ c_2 & -s_2 & 0 & \ell_0 + \ell_2 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 & \ell_4 c_3 \\ s_3 & 0 & c_3 & \ell_4 s_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_1 s_2 c_3 + c_1 c_2 s_3 & s_1 & -c_1 s_2 s_3 + c_1 c_2 c_3 & \ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 - \ell_3 s_1 + \ell_4 c_1 s_2 c_3 + \ell_4 c_1 c_2 s_3 \\ s_1 s_2 c_3 + s_1 c_2 s_3 & -c_1 & -s_1 s_2 s_3 + s_1 c_2 c_3 & \ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_3 c_1 + \ell_4 s_1 s_2 c_3 + \ell_4 s_1 c_2 s_3 \\ c_2 c_3 - s_2 s_3 & 0 & -c_2 s_3 - s_2 c_3 & \ell_0 + \ell_2 c_2 + \ell_4 s_2 c_3 - \ell_4 c_2 s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_3^0(q_1, q_2, q_3) &= \begin{bmatrix} c_1 s_{23} & s_1 & c_1 c_{23} & \ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 - \ell_3 s_1 + \ell_4 c_1 s_{23} \\ s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 c_{23} & \ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_3 c_1 + \ell_4 s_1 s_{23} \\ c_{23} & 0 & -s_{23} & \ell_0 + \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.7}
 \end{aligned}$$

Συνδυάζουμε τις σχέσεις (1.4), (1.5) και (1.6) και προκύπτει ο ομογενής μετασχηματισμός της σχέσης (1.8)

$$A_6^3(q_4, q_5, q_6) = A_4^3(q_4) A_5^4(q_5) A_6^5(q_6)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ell_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ell_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\ell_6 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_6^3(q_4, q_5, q_6) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\ell_6 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_5 + \ell_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

Τέλος, πολλαπλασιάζουμε τις σχέσεις (1.7) και (1.8), με σκοπό να προκύψει ο τελικός ομογενής πίνακας μετασχηματισμού και η ευθεία κινηματική εξίσωση. Όποτε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 A_6^0(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) &= A_3^0(q_1, q_2, q_3) A_6^3(q_4, q_5, q_6) \\
 &= \begin{bmatrix} c_1 s_{23} & s_1 & c_1 c_{23} & \ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 - \ell_3 s_1 + \ell_4 c_1 s_{23} \\ s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 c_{23} & \ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_3 c_1 + \ell_4 s_1 s_{23} \\ c_{23} & 0 & -s_{23} & \ell_0 + \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\ell_6 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_5 + \ell_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_6^0(q) &= \begin{bmatrix} c_1 s_{23} & s_1 & c_1 c_{23} & \ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 + \ell_4 c_1 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_1 c_{23} - (\ell_3 + \ell_6) s_1 \\ s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 c_{23} & \ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_4 s_1 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) s_1 c_{23} + (\ell_3 + \ell_6) c_1 \\ c_{23} & 0 & -s_{23} & \ell_0 + \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

Η σχέση (1.9) αποτελεί τον συνολικό ομογενή μετασχηματισμό του ρομποτικού βραχίονα. Σύμφωνα με την σχέση (1.9) προκύπτει το Τελικό Στοιχείο Δράσης του ρομποτικού χειριστή το οποίο είναι

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) c_1 - (\ell_3 + \ell_6) s_1 \\ (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) s_1 + (\ell_3 + \ell_6) c_1 \\ \ell_0 + \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

A.3 Ιακωβιανή Μήτρα Διαφορικού Κινηματικού Μοντέλου

Χρησιμοποιώντας το ευθύ κινηματικό μοντέλο, μπορούμε να υπολογίσουμε την Ιακωβιανή μήτρα του διαφορικού κινηματικού μοντέλου. Χρησιμοποιώντας τον γεωμετρικό τρόπο επίλυσης, θα βρεθούν οι στήλες του ιακωβιανού πίνακα που αντιστοιχούν στις εκάστοτε ταχύτητες των αρθρώσεων, ως προς την γραμμική και την γωνιακή ταχύτητα αντίστοιχα.

Με βάση την γεωμετρική μέθοδο, θα υπολογίζεται ο άξονας περιστροφής ως προς την προηγούμενη άρθρωση και αντίστοιχα η απόστασή της από το τελικό στοιχείο δράσης.

Καθώς η ευθεία κινηματική παράχθηκε κατά την μεθοδολογία **D-H**, τότε αυτομάτως ο άξονας περιστροφής υπάγεται πάνω στον άξονα z. Έτσι, θα υπολογιστούν όλες οι στήλες της ιακωβιανής μήτρας. Θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής σχέσεις:

$$\hat{\mathbf{b}}_{i-1} = \mathbf{R}_{i-1}^0(\mathbf{q}_i) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

και

$$\begin{cases} J_{L_i} = \hat{\mathbf{b}}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,E} = S(\hat{\mathbf{b}}_{i-1})\mathbf{r}_{i-1,E} \\ J_{A_i} = \hat{\mathbf{b}}_{i-1} \end{cases}, \text{για στροφικές αρθρώσεις} \quad (1.12)$$

Οπότε θα υπολογιστούν όλες οι στήλες με βάση τις σχέσεις (1.11) και (1.12). Άρα έχουμε ότι:

Για $i = 1$:

Η άρθρωση είναι στροφική, επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω τύπους

$$\hat{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{R}_0^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{0,E} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Επομένως η πρώτη στήλη της ιακωβιανής κατά την γραμμική ταχύτητα, όσο και για την γωνιακή θα είναι:

$$J_{A_1} = \hat{\mathbf{b}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

και

$$\begin{aligned} J_{L_1} &= \hat{\mathbf{b}}_0 \times \mathbf{r}_{0,E} = S(\hat{\mathbf{b}}_0)\mathbf{r}_{0,E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_y \\ p_x \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ J_{L_1} &= \begin{bmatrix} -(\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23})s_1 - (\ell_3 + \ell_6)c_1 \\ (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23})c_1 - (\ell_3 + \ell_6)s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Για $i = 2$:

Η άρθρωση είναι στροφική, επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω τύπους

$$\hat{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{R}_1^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{1,E} = \mathbf{r}_{0,E} - \mathbf{r}_{0,1} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 \\ \ell_1 s_1 \\ \ell_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x - \ell_1 c_1 \\ p_y - \ell_1 s_1 \\ p_z - \ell_0 \end{bmatrix}$$

Επομένως η δεύτερη στήλη της ιακωβιανής κατά την γραμμική ταχύτητα, όσο και για την γωνιακή θα είναι:

$$\mathbf{J}_{A_2} = \hat{\mathbf{b}}_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{L_2} &= \hat{\mathbf{b}}_1 \times \mathbf{r}_{1,E} = \mathcal{S}(\hat{\mathbf{b}}_1) \mathbf{r}_{1,E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & s_1 \\ -c_1 & -s_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x - \ell_1 c_1 \\ p_y - \ell_1 s_1 \\ p_z - \ell_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1(p_z - \ell_0) \\ s_1(p_z - \ell_0) \\ -s_1(p_y - \ell_1 s_1) - c_1(p_x - \ell_1 c_1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ s_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ -s_1^2(\ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) - (\ell_3 + \ell_6) s_1 c_1 - c_1^2(\ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) + (\ell_3 + \ell_6) c_1 s_1 \end{bmatrix} = \\ &\mathbf{J}_{L_2} = \begin{bmatrix} c_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ s_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ -(\ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) \end{bmatrix} \quad (1.16) \end{aligned}$$

Για $i = 3$:

Η άρθρωση είναι στροφική, επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω τύπους

$$\hat{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{R}_2^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{2,E} = \mathbf{r}_{0,E} - \mathbf{r}_{0,2} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 - \ell_3 s_1 \\ \ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_3 c_1 \\ \ell_0 + \ell_2 c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x - (\ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 - \ell_3 s_1) \\ p_y - (\ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_3 c_1) \\ p_z - (\ell_0 + \ell_2 c_2) \end{bmatrix}$$

Συνεπώς η τρίτη στήλη της ιακωβιανής κατά την γραμμική ταχύτητα, όσο και για την γωνιακή θα είναι:

$$\mathbf{J}_{A_3} = \hat{\mathbf{b}}_2 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

και

$$\begin{aligned}
 J_{L_3} &= \hat{\mathbf{b}}_2 \times \mathbf{r}_{2,E} = S(\hat{\mathbf{b}}_2) \mathbf{r}_{2,E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & s_1 \\ -c_1 & -s_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x - (\ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 - \ell_3 s_1) \\ p_y - (\ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_3 c_1) \\ p_z - (\ell_0 + \ell_2 c_2) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} c_1(p_z - (\ell_0 + \ell_2 c_2)) \\ s_1(p_z - (\ell_0 + \ell_2 c_2)) \\ -s_1(p_y - (\ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_3 c_1)) - c_1(p_x - (\ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 - \ell_3 s_1)) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} c_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ s_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ -s_1(\ell_4 s_1 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) s_1 c_{23} + \ell_6 c_1) - c_1(\ell_4 c_1 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_1 c_{23} - \ell_6 s_1) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} c_1(\ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ s_1(\ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ -s_1^2(\ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) - \ell_6 s_1 c_1 - c_1^2(\ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) + \ell_6 s_1 c_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 J_{L_3} &= \begin{bmatrix} c_1(\ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ s_1(\ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ -(\ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) \end{bmatrix} \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

Επομένως, η συνολική Ιακωβιανή μήτρα θα είναι:

$$\begin{aligned}
 J^0(q) &= \begin{bmatrix} J_{L_1} & J_{L_2} & J_{L_3} \\ J_{A_1} & J_{A_2} & J_{A_3} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -(\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) s_1 - (\ell_3 + \ell_6) c_1 & c_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) & c_1(\ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) c_1 - (\ell_3 + \ell_6) s_1 & s_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) & s_1(\ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ 0 & -(\ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) & -(\ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

A.4 Αντίστροφο Διαφορικό Κινηματικό Μοντέλο

Στο προηγούμενο ερώτημα υπολογίστηκε η συνολική Ιακωβιανή μήτρα του ρομποτικού χειριστή. Στο παρών ερώτημα θα χρησιμοποιήσουμε τον υπό-πίνακα της Ιακωβιανής μήτρας που αντιστοιχεί στην γραμμική ταχύτητα \mathbf{v}_E . Για τον υπολογισμό του αντίστροφου διαφορικού κινηματικού μοντέλου ως προς την γραμμική ταχύτητα, θα υπολογίσουμε αρχικά την ορίζουσα της ιακωβιανής μήτρας για να βρούμε τα ιδιόμορφα σημεία της και στην συνέχεια θα την αντιστρέψουμε, εφόσον γίνεται, για να βρούμε το αντίστροφο διαφορικό κινηματικό μοντέλο.

Η ιακωβιανή ορίζουσα ως προς την γραμμική ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης είναι:

$$J_L(q) = [J_{L_1} \quad J_{L_2} \quad J_{L_3}]$$

$$= \begin{bmatrix} -(\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) s_1 - (\ell_3 + \ell_6) c_1 & c_1 (\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) & c_1 (\ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) c_1 - (\ell_3 + \ell_6) s_1 & s_1 (\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) & s_1 (\ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ 0 & -(\ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) & -(\ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) \end{bmatrix}$$

Με βάση αυτή θα γίνει η αντιστροφή του διαφορικού μοντέλου. Για λόγους συντομίας των πράξεων θα θέσουμε κάποιες μεταβλητές. Έστω ότι ορίζουμε τα παρακάτω

$$l = \ell_3 + \ell_6$$

$$d(q_2, q_3) = \ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23} \quad (1.20)$$

$$k(q_2, q_3) = \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}$$

Τότε, η ιακωβιανή μήτρα θα γίνει:

$$J_L(q) = \begin{bmatrix} -(ds_1 + lc_1) & c_1 k & c_1 (k - \ell_2 c_2) \\ dc_1 - ls_1 & s_1 k & s_1 (k - \ell_2 c_2) \\ 0 & -d + \ell_1 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Επομένως, θα υπολογίσουμε την ορίζουσα και θα βρούμε τα ιδιόμορφα σημεία της. Άρα, ισχύει ότι:

$$\det(J_L(q)) = \begin{vmatrix} -(ds_1 + lc_1) & c_1 k & c_1 (k - \ell_2 c_2) \\ dc_1 - ls_1 & s_1 k & s_1 (k - \ell_2 c_2) \\ 0 & -d + \ell_1 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix}$$

$$= -(ds_1 + lc_1) \begin{vmatrix} s_1 k & s_1 (k - \ell_2 c_2) \\ -d + \ell_1 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix} - (dc_1 - ls_1) \begin{vmatrix} c_1 k & c_1 (k - \ell_2 c_2) \\ -d + \ell_1 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix}$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τις υπό-ορίζουσες:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} s_1 k & s_1 (k - \ell_2 c_2) \\ -d + \ell_1 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix} &= s_1 k (\ell_1 + \ell_2 s_2 - d) - (s_1 (k - \ell_2 c_2)) (-d + \ell_1) \\ &= s_1 k \ell_1 + s_1 k \ell_2 s_2 - s_1 k d - s_1 (-k d + k \ell_1 + d \ell_2 c_2 - \ell_1 \ell_2 c_2) \\ &= s_1 k \ell_1 + s_1 k \ell_2 s_2 - s_1 k d + s_1 k d - s_1 k \ell_1 - s_1 d \ell_2 c_2 + s_1 \ell_1 \ell_2 c_2 \\ &= (k s_2 + \ell_1 c_2 - d c_2) \ell_2 s_1 \\ \begin{vmatrix} c_1 k & c_1 (k - \ell_2 c_2) \\ -d + \ell_1 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix} &= c_1 k (\ell_1 + \ell_2 s_2 - d) - c_1 (k - \ell_2 c_2) (-d + \ell_1) \\ &= c_1 k \ell_1 + c_1 k \ell_2 s_2 - c_1 k d - c_1 (-k d + k \ell_1 + d \ell_2 c_2 - \ell_2 c_2 \ell_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= c_1 k \ell_1 + c_1 k \ell_2 s_2 - c_1 k d + k d c_1 - c_1 k \ell_1 - c_1 d \ell_2 c_2 + c_1 \ell_2 c_2 \ell_1 \\
 &= c_1 k \ell_2 s_2 - c_1 d \ell_2 c_2 + c_1 \ell_2 c_2 \ell_1 \\
 &= (k s_2 + \ell_1 c_2 - d c_2) \ell_2 c_1
 \end{aligned}$$

Οπότε, τώρα μπορούμε να επιστρέψουμε στον υπολογισμό της ορίζουσας της ιακωβιανής:

$$\begin{aligned}
 \det(J_L) &= (-d s_1 - l c_1)(k s_2 + \ell_1 c_2 - d c_2) \ell_2 s_1 + (d c_1 - l s_1)(k s_2 + \ell_1 c_2 - d c_2) \ell_2 c_1 \\
 &= (k s_2 + \ell_1 c_2 - d c_2) \ell_2 ((-d s_1 - l c_1) s_1 + (d c_1 - l s_1) c_1) \\
 &= (k s_2 + \ell_1 c_2 - d c_2) \ell_2 (-d s_1^2 + l c_1 s_1 - d c_1^2 - l s_1 c_1) \\
 &= -(k s_2 + \ell_1 c_2 - d c_2) \ell_2 d \\
 &= -((\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) s_2 + \ell_1 c_2 - (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) c_2) \ell_2 d \\
 &= ((\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) c_2 - (\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) s_2 - \ell_1 c_2) \ell_2 d \\
 &= (\ell_1 c_2 + \ell_2 s_2 c_2 + \ell_4 c_2 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_2 c_{23} - \ell_2 s_2 c_2 - \ell_4 s_2 c_{23} + (\ell_5 + \ell_7) s_2 s_{23} \\
 &\quad - \ell_1 c_2) \ell_2 d \\
 &= (\ell_4 c_2 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_2 c_{23} - \ell_4 s_2 c_{23} + (\ell_5 + \ell_7) s_2 s_{23}) \ell_2 d \\
 &= (\ell_4 (c_2 s_{23} - s_2 c_{23}) + (\ell_5 + \ell_7) (c_2 c_{23} + s_2 s_{23})) \ell_2 d \\
 &= (\ell_4 (c_2 (s_2 c_3 + c_2 s_3) - s_2 (c_2 c_3 - s_2 s_3)) + (\ell_5 + \ell_7) (c_2 (c_2 c_3 - s_2 s_3) + s_2 (s_2 c_3 + c_2 s_3))) \ell_2 d \\
 &= (\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7) c_3) \ell_2 d \Rightarrow \\
 \det(J_L) &= \ell_2 (\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7) c_3) (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) \quad (1.22)
 \end{aligned}$$

Με βάση αυτό το αποτέλεσμα θα βρούμε τα ιδιόμορφα σημεία του ρομποτικού χειριστή. Για τα βρούμε, θα θέσουμε την ορίζουσα ίση με το μηδέν.

$$\begin{aligned}
 \det(J_L) &= 0 \\
 \Rightarrow \ell_2 (\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7) c_3) (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) &= 0 \\
 \Rightarrow \begin{cases} \ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7) c_3 = 0 \\ \ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23} = 0 \end{cases} & \quad (1.23)
 \end{aligned}$$

Οι τελικές εξισώσεις που προκύπτουν, χαρακτηρίζουν τις ιδιόμορφες διατάξεις του βραχίονα. Όταν ο βραχίονας βρεθεί σε κάποια θέση του χώρου όπου ισχύει μία από τις παραπάνω σχέσεις, τότε χάνεται ο αντίστοιχος βαθμός ελευθερίας της ρομποτικής διάταξης, με αποτέλεσμα, να μην είναι ελέγξιμη κάποια άρθρωση.

Καθώς έχουμε υπολογίσει τις ιδιόμορφες διατάξεις του ρομποτικού χειριστή, το επόμενο βήμα είναι να αντιστρέψουμε το διαφορικό μοντέλο.

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{J}_L(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \Rightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_L^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{v}_E \quad (1.24)$$

Οπότε, θα αντιστρέψουμε την ιακωβιανή μήτρα. Η αντίστροφη μήτρα είναι η εξής:

$$\mathbf{J}_L^{-1}(\mathbf{q}) = \frac{1}{|\mathbf{J}_L(\mathbf{q})|} \mathbf{adj}(\mathbf{J}_L(\mathbf{q})) \quad (1.25)$$

Αρχικά, θα υπολογίσουμε τον **adjoint** πίνακα της ιακωβιανής μήτρας ως προς την γραμμική ταχύτητα. Γνωρίζουμε πως ο πίνακας αυτός δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} \mathbf{adj}(\mathbf{J}_L(\mathbf{q})) &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} J_{L22} & J_{L23} \\ J_{L32} & J_{L33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} J_{L21} & J_{L23} \\ J_{L31} & J_{L33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} J_{L21} & J_{L22} \\ J_{L31} & J_{L32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} J_{L12} & J_{L13} \\ J_{L32} & J_{L33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} J_{L11} & J_{L13} \\ J_{L31} & J_{L33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} J_{L11} & J_{L12} \\ J_{L31} & J_{L32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} J_{L12} & J_{L13} \\ J_{L22} & J_{L23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} J_{L11} & J_{L13} \\ J_{L21} & J_{L23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} J_{L11} & J_{L12} \\ J_{L21} & J_{L22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} s_1 k & s_1(k - \ell_2 c_2) \\ -d + \ell_1 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} dc_1 - ls_1 & s_1(k - \ell_2 c_2) \\ 0 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} dc_1 - ls_1 & s_1 k \\ 0 & -d + \ell_1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} c_1 k & c_1(k - \ell_2 c_2) \\ -d + \ell_1 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -ds_1 - lc_1 & c_1(k - \ell_2 c_2) \\ 0 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -ds_1 - lc_1 & c_1 k \\ 0 & -d + \ell_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c_1 k & c_1(k - \ell_2 c_2) \\ s_1 k & s_1(k - \ell_2 c_2) \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -ds_1 - lc_1 & c_1(k - \ell_2 c_2) \\ dc_1 - ls_1 & s_1(k - \ell_2 c_2) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -ds_1 - lc_1 & c_1 k \\ dc_1 - ls_1 & s_1 k \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} (ks_2 + \ell_1 c_2 - dc_2)\ell_2 s_1 & -(dc_1 - ls_1)(\ell_1 + \ell_2 s_2 - d) & (\ell_1 + \ell_2 s_2 - d)(-d + \ell_1) \\ -(ks_2 + \ell_1 c_2 - dc_2)\ell_2 c_1 & -(dc_1 + ls_1)(\ell_1 + \ell_2 s_2 - d) & (dc_1 + ls_1)(-d + \ell_1) \\ 0 & (k - \ell_2 c_2)d & -dk \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{adj}(\mathbf{J}_L(\mathbf{q})) &= \begin{bmatrix} (ks_2 + \ell_1 c_2 - dc_2)\ell_2 s_1 & -(ks_2 + \ell_1 c_2 - dc_2)\ell_2 c_1 & 0 \\ -(dc_1 - ls_1)(\ell_1 + \ell_2 s_2 - d) & -(dc_1 + ls_1)(\ell_1 + \ell_2 s_2 - d) & (k - \ell_2 c_2)d \\ (\ell_1 + \ell_2 s_2 - d)(-d + \ell_1) & (dc_1 + ls_1)(-d + \ell_1) & -dk \end{bmatrix} \quad (1.26) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (1.26) στην (1.25), θα προκύψει η αντίστροφη Ιακωβιανή μήτρα. Επομένως:

$$\mathbf{J}_L^{-1}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7)c_3)\ell_2 d} \begin{bmatrix} (\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7)c_3)\ell_2 s_1 & -(\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7)c_3)\ell_2 c_1 & 0 \\ -(dc_1 - ls_1)(\ell_1 + \ell_2 s_2 - d) & -(dc_1 + ls_1)(\ell_1 + \ell_2 s_2 - d) & (k - \ell_2 c_2)d \\ (\ell_1 + \ell_2 s_2 - d)(-d + \ell_1) & (dc_1 + ls_1)(-d + \ell_1) & -dk \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

A.5 Αντίστροφο Γεωμετρικό Κινηματικό Μοντέλο

Σε αυτό το ερώτημα έχουμε να υπολογίσουμε το αντίστροφο γεωμετρικό κινηματικό μοντέλο του ρομποτικού χειριστή. Θα βασιστούμε στο ευθύ κινηματικό μοντέλο που περιγράφεται από την σχέση (1.10). Τώρα θα υπολογίσουμε το αντίστροφο κινηματικό μοντέλο για δεδομένο σημείο $\mathbf{p}_E = [p_x^*, p_y^*, p_z^*]^T$. Έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} p_x^* &= (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) c_1 - (\ell_3 + \ell_6) s_1 \\ p_y^* &= (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) s_1 + (\ell_3 + \ell_6) c_1 \\ p_z^* &= \ell_0 + \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Επίσης, έχουμε και τις σχέσεις που ορίσαμε στον υπολογισμό της ορίζουσας του προηγούμενου ερωτήματος

$$\begin{aligned} l &= \ell_3 + \ell_6 \\ d(q_2, q_3) &= \ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Θα αντικαταστήσουμε τις σχέσεις της (1.29) στις σχέσεις (1.28α) και (1.28β). Οπότε έχουμε ότι:

$$\begin{cases} p_x^* = dc_1 - ls_1 \\ p_y^* = ds_1 + lc_1 \end{cases}$$

Θα υψώσουμε στο τετράγωνο τις δύο αυτές σχέσεις και θα τις αθροίσουμε:

$$\begin{aligned} p_x^{*2} + p_y^{*2} &= (dc_1 - ls_1)^2 + (ds_1 + lc_1)^2 \\ \Rightarrow p_x^{*2} + p_y^{*2} &= d^2 c_1^2 - 2dc_1 ls_1 + l^2 s_1^2 + d^2 s_1^2 + 2ds_1 lc_1 + c_1^2 l^2 \\ \Rightarrow p_x^{*2} + p_y^{*2} &= d^2 (c_1^2 + s_1^2) + l^2 (c_1^2 + s_1^2) \\ \Rightarrow p_x^{*2} + p_y^{*2} &= d^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = p_x^{*2} + p_y^{*2} - l^2 \\ \Rightarrow d &= \pm \sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - l^2} \Rightarrow d = \pm \sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (1.28α) και (1.28β) και (1.30) για να βρούμε τις εξισώσεις που περιγράφουν την μεταβλητή της άρθρωσης q_1 .

$$\begin{cases} p_x^* = dc_1 - ls_1 \\ p_y^* = ds_1 + lc_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} d & -l \\ l & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Περιγράψαμε σε μητρική μορφή τις δύο σχέσεις. Θα αντιστρέψουμε τον 2x2 πίνακα ώστε να βρούμε μία σχέση για το \sin και το \cos . Οπότε έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{d^2 + l^2} \begin{bmatrix} d & l \\ -l & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{dp_x^* + lp_y^*}{d^2 + l^2} \\ s_1 = \frac{dp_y^* - lp_x^*}{d^2 + l^2} \end{cases}$$

Με βάση τις σχέσεις αυτές, θα υπολογίσουμε την q_1 . Οπότε ισχύει

$$q_1 = \text{atan2}(s_1, c_1) = \text{atan2}\left(\frac{dp_y^* - lp_x^*}{d^2 + l^2}, \frac{dp_x^* + lp_y^*}{d^2 + l^2}\right) = \text{atan2}(dp_y^* - lp_x^*, dp_x^* + lp_y^*) \quad (1.32)$$

Γνωρίζουμε ότι το d έχει δύο λύσεις. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως υπάρχουν δύο λύσεις για την στροφική άρθρωση q_1 , οι οποίες είναι:

$$\begin{cases} q_{1+} = \text{atan2}(\sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} p_y^* - (\ell_3 + \ell_6) p_x^*, \sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} p_y^* + (\ell_3 + \ell_6) p_x^*) \\ q_{1-} = \text{atan2}(-\sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} p_y^* - (\ell_3 + \ell_6) p_x^*, -\sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} p_y^* + (\ell_3 + \ell_6) p_x^*) \end{cases} \quad (1.33)$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε σχέσεις για τις υπόλοιπες δύο αρθρώσεις. Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (1.28c) και (1.29b) για να βρούμε μια σχέση για την άρθρωση q_3 . Άρα ισχύει ότι:

$$\begin{cases} p_z^* = \ell_0 + \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23} \\ d = \ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_z^* - \ell_0 = \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23} \\ d - \ell_1 = \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23} \end{cases}$$

Θα υψώσουμε τις σχέσεις αυτές στο τετράγωνο και θα τις αθροίσουμε:

$$\begin{aligned} & (p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 \\ &= (\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23})^2 + (\ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23})^2 \\ \Rightarrow & (p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 \\ &= \ell_2^2 + \ell_4^2 + (\ell_5 + \ell_7)^2 + 2\ell_2 \ell_4 c_2 c_{23} - 2\ell_2 (\ell_5 + \ell_7) c_2 c_{23} + 2\ell_2 \ell_4 s_2 s_{23} \\ &\quad - 2\ell_4 (\ell_5 + \ell_7) c_{23} s_{23} + 2\ell_2 (\ell_5 + \ell_7) s_2 c_{23} + 2\ell_4 (\ell_5 + \ell_7) c_{23} s_{23} \\ \Rightarrow & (p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 \\ &= \ell_2^2 + \ell_4^2 + (\ell_5 + \ell_7)^2 + 2\ell_2 \ell_4 (c_2 c_{23} + s_2 s_{23}) \\ &\quad + 2\ell_2 (\ell_5 + \ell_7) (s_2 c_{23} - c_2 s_{23}) \\ \Rightarrow & (p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 = \ell_2^2 + \ell_4^2 + (\ell_5 + \ell_7)^2 + 2\ell_2 \ell_4 c_3 - 2\ell_2 (\ell_5 + \ell_7) s_3 \\ \Rightarrow & (p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 - \ell_2^2 - \ell_4^2 - (\ell_5 + \ell_7)^2 = 2\ell_2 (\ell_4 c_3 - (\ell_5 + \ell_7) s_3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ell_4 c_3 - (\ell_5 + \ell_7) s_3 = \frac{(p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 - \ell_2^2 - \ell_4^2 - (\ell_5 + \ell_7)^2}{2\ell_2} \quad (1.34)$$

Έστω, ότι ορίζουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \ell_4 = \lambda c_\varphi \\ \lambda_2 &= \ell_5 + \ell_7 = \lambda s_\varphi \end{aligned} \quad (1.35)$$

Με το $\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \sqrt{\ell_4^2 + (\ell_5 + \ell_7)^2}$ και ορίζουμε μία γωνία φ , τέτοια ώστε να ισχύει το εξής:

$$\varphi = \text{atan2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda}, \frac{\lambda_1}{\lambda}\right) = \text{atan2}(\lambda_2, \lambda_1) = \text{atan2}(\ell_5 + \ell_7, \ell_4) \quad (1.36)$$

Οπότε, θα έχουμε

$$\lambda \cos(q_3 + \varphi) = m_0 \Rightarrow \cos(q_3 + \varphi) = \frac{m_0}{\lambda} \quad (1.37)$$

και

$$\sin(q_3 + \varphi) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{\lambda}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{\lambda^2 - m_0^2}{\lambda^2}} \quad (1.38)$$

$$\text{όπου το } m_0 = \frac{(p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 - \ell_2^2 - \ell_4^2 - (\ell_5 + \ell_7)^2}{2\ell_2}$$

Με βάσει τις σχέσεις αυτές, μπορούμε να βρούμε τις λύσεις για την άρθρωση q_3 , οι οποίες είναι:

$$q_3 = \text{atan2}(\sin(q_3 + \varphi), \lambda \cos(q_3 + \varphi)) = \text{atan2}(\pm \sqrt{\lambda^2 - m_0^2}, m_0) - \text{atan2}(\ell_5 + \ell_7, \ell_4) \quad (1.39)$$

Παρατηρούμε πως προκύπτουν τέσσερις λύσεις για αυτή την άρθρωση, οι οποίες είναι:

$$\begin{cases} q_{3+} = \text{atan2}\left(\sqrt{\ell_4^2 + (\ell_5 + \ell_7)^2 - \left(\frac{(p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 - \ell_2^2 - \ell_4^2 - (\ell_5 + \ell_7)^2}{2\ell_2}\right)^2}, \frac{(p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 - \ell_2^2 - \ell_4^2 - (\ell_5 + \ell_7)^2}{2\ell_2}\right) - \text{atan2}(\ell_5 + \ell_7, \ell_4) \\ q_{3-} = \text{atan2}\left(-\sqrt{\ell_4^2 + (\ell_5 + \ell_7)^2 - \left(\frac{(p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 - \ell_2^2 - \ell_4^2 - (\ell_5 + \ell_7)^2}{2\ell_2}\right)^2}, \frac{(p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 - \ell_2^2 - \ell_4^2 - (\ell_5 + \ell_7)^2}{2\ell_2}\right) - \text{atan2}(\ell_5 + \ell_7, \ell_4) \end{cases} \quad (1.40)$$

Τέλος, θα υπολογίσουμε για την δεύτερη περιστροφική άρθρωση, την αλγεβρική της σχέση που την συνδέει με το τελικό στοιχείο δράσης. Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (1.28c) και (1.29b):

$$\begin{cases} p_z^* = \ell_0 + \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23} \\ d = \ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_z^* - \ell_0 = \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23} \\ d - \ell_1 = \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \begin{cases} p_z^* - \ell_0 = \ell_2 c_2 + \ell_4 (c_2 c_3 - s_2 s_3) - (\ell_5 + \ell_7) (s_2 c_3 + c_2 s_3) \\ d - \ell_1 = \ell_2 s_2 + \ell_4 (s_2 c_3 + c_2 s_3) + (\ell_5 + \ell_7) (c_2 c_3 - s_2 s_3) \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} p_z - \ell_0 = \ell_2 c_2 + \ell_4 c_2 c_3 - \ell_4 s_2 s_3 - (\ell_5 + \ell_7) s_2 c_3 - (\ell_5 + \ell_7) c_2 s_3 \\ d - \ell_1 = \ell_2 s_2 + \ell_4 s_2 c_3 + \ell_4 c_2 s_3 + (\ell_5 + \ell_7) c_2 c_3 - (\ell_5 + \ell_7) s_2 s_3 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} p_z^* - \ell_0 = (\ell_2 + \ell_4 c_3 - (\ell_5 + \ell_7) s_3) c_2 - (\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7) c_3) s_2 \\ d - \ell_1 = (\ell_2 + \ell_4 c_3 - (\ell_5 + \ell_7) s_3) s_2 - (\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7) c_3) c_2 \end{cases} \quad (1.41)
 \end{aligned}$$

Καθώς έχουμε φτάσει σε αυτή την μορφή, το επόμενο βήμα είναι θέσουμε κάποιες βοηθητικές μεταβλητές, ώστε να το επιλύσουμε το πρόβλημα. Υποθέτουμε πως

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \ell_2 + \ell_4 c_3 - (\ell_5 + \ell_7) s_3 = d_3 \cos(a) \\
 d_2 &= \ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7) c_3 = d_3 \sin(a) \quad (1.42)
 \end{aligned}$$

$$\text{Επίσης έχουμε } d_3 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \sqrt{(\ell_2 + \ell_4 c_3 - (\ell_5 + \ell_7) s_3)^2 + (\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7) c_3)^2}$$

Έτσι, θα ορίσουμε την γωνία

$$a = \text{atan2}\left(\frac{d_2}{d_3}, \frac{d_1}{d_3}\right) = \text{atan2}(d_2, d_1) \quad (1.43)$$

Επομένως, η σχέση (1.41) θα γίνει ως εξής:

$$\begin{cases} p_z^* - \ell_0 = d_3 (c_2 c_a - s_2 s_a) = d_3 \cos(q_2 + a) \\ d - \ell_1 = d_3 (s_2 c_a + c_2 s_a) = d_3 \sin(q_2 + a) \end{cases} \quad (1.44)$$

Έτσι, θα βρούμε μία αλγεβρική σχέση και για την άρθρωση q_2 . Επομένως:

$$q_2 = \text{atan2}(d - \ell_1, p_z^* - \ell_0) - \text{atan2}(d_2, d_1) \quad (1.45)$$

Από αυτή την σχέση μπορούμε να διαπιστώσουμε αρχικά πως υπάρχουν δύο λύσεις λόγω του όρου d . Επίσης, διαπιστώνουμε πως θα έχει ακόμα δύο λύσεις, διότι τα d_1, d_2 εξαρτώνται από την στροφική άρθρωση q_3 που έχει δύο λύσεις. Συνεπώς, συνολικά η δεύτερη άρθρωση θα έχει τέσσερις αλγεβρικές λύσεις, οι οποίες είναι:

$$\begin{cases} q_{2++} = \text{atan2}\left(\sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} - \ell_1, p_z^* - \ell_0\right) - \text{atan2}(\ell_4 s_{q_{3+}} + (\ell_5 + \ell_7) c_{q_{3+}}, \ell_2 + \ell_4 c_{q_{3+}} - (\ell_5 + \ell_7) s_{q_{3+}}) \\ q_{2+-} = \text{atan2}\left(\sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} - \ell_1, p_z^* - \ell_0\right) - \text{atan2}(\ell_4 s_{q_{3-}} + (\ell_5 + \ell_7) c_{q_{3-}}, \ell_2 + \ell_4 c_{q_{3-}} - (\ell_5 + \ell_7) s_{q_{3-}}) \\ q_{2-+} = \text{atan2}\left(-\sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} - \ell_1, p_z^* - \ell_0\right) - \text{atan2}(\ell_4 s_{q_{3+}} + (\ell_5 + \ell_7) c_{q_{3+}}, \ell_2 + \ell_4 c_{q_{3+}} - (\ell_5 + \ell_7) s_{q_{3+}}) \\ q_{2--} = \text{atan2}\left(-\sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} - \ell_1, p_z^* - \ell_0\right) - \text{atan2}(\ell_4 s_{q_{3-}} + (\ell_5 + \ell_7) c_{q_{3-}}, \ell_2 + \ell_4 c_{q_{3-}} - (\ell_5 + \ell_7) s_{q_{3-}}) \end{cases} \quad (1.46)$$

Μέρος Β – Προσομοίωση Ρομποτικού Χειριστή

Β.1 Σχεδίαση Τροχιάς του Χώρου Εργασίας

Έχει αναλυθεί κινηματικά ο ρομποτικός χειριστής και έχουν παραχθεί οι εξισώσεις που τον χαρακτηρίζουν. Το επόμενο βήμα είναι να σχεδιαστούν οι τροχιές, έτσι ώστε να προσομοιωθεί ο βραχίονας κινηματικά. Οι τροχιές θα σχεδιαστούν στον καρτεσιανό χώρο και η πορεία που θα ακολουθεί θα σχηματίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο $p_A = [x_A \ y_A \ z_A]^T$ στο σημείο $p_B = [x_B \ y_B \ z_B]^T$. Η κίνηση που θα εκτελεί το τελικό στοιχείο δράσης O_E μεταξύ αυτών των δύο σημείων θα είναι περιοδική με περιοδικό χρόνο $T \text{ sec}$. Επίσης, κατά την κίνηση η z – συνιστώσα θα είναι σε σταθερό ύψος, με αποτέλεσμα να μην μεταβάλλεται χρονικά συγκριτικά με τις άλλες δύο. Συνεπώς, θα σχεδιαστούν συνολικά τέσσερις τροχιές δύο για κάθε συνιστώσα.

Πριν ξεκινήσει η σχεδίαση των τροχιών, θα πρέπει πρώτα να οριστούν τα σημεία A και B . Καθώς έχουμε σταθερό ύψος για το ΤΣΔ, τότε μία επιθυμητή τιμή θα είναι η

$$h = \ell_0 + \ell_2 + \ell_4 = 810 + 600 + 140 = 1550 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow h = 1.55 \text{ m}$$

Εν συνεχεία, θα πρέπει να οριστούν και τα αρχικά και τελικά σημεία των τροχιών. Οπότε, για την x – συνιστώσα, θα έχουμε το εξής αρχικό σημείο

$$x_0 = x(0) = \ell_1 + \ell_5 + \ell_7 = 200 + 550 + 100 = 850 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow x_0 = 0.85 \text{ m}$$

Αντίστοιχα, για την y – συνιστώσα, το αρχικό σημείο θα είναι

$$y_0 = y(0) = \ell_3 + \ell_6 = 30 + 100 = 130 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow y_0 = 0.13 \text{ m}$$

Έτσι, το σημείο A θα έχει συντεταγμένες

$$p_A = [x_A \ y_A \ z_A]^T \Rightarrow p_A = [0.85 \text{ m} \ 0.13 \text{ m} \ 1.55 \text{ m}]^T$$

Αντίστοιχα, για σημείο B θα πάρουμε τις εξής συντεταγμένες

$$p_B = [x_B \ y_B \ z_B]^T \Rightarrow p_B = [0.85 \text{ m} \ 0.26 \text{ m} \ 1.55 \text{ m}]^T$$

Με βάση τα σημεία p_A και p_B θα σχεδιαστούν οι τροχιές στον καρτεσιανό χώρο. Η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί για την σχεδίαση των τροχιών θα είναι ο αλγόριθμος αυξητικής παρεμβολής. Συγκεκριμένα θα γίνει χρήση πολυωνυμικών συναρτήσεων παρεμβολής. Καθώς στα σημεία A και B θέλουμε το τελικό στοιχείο δράσης να σταματά, τότε οι συνοριακές τιμές των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων θα πρέπει να μηδενίζονται και να έχουμε και συνέχεια ως προς την ταχύτητα. Επομένως, η τροχιά θα σχεδιαστεί με πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού, με τις εξής συνθήκες

$$\xi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (2.1)$$

$$\dot{\xi}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 \quad (2.2)$$

$$\ddot{\xi}(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 \quad (2.3)$$

όπου

$$\ddot{\xi}_0 = \ddot{\xi}_f = 0$$

$$\dot{\xi}_f = \dot{\xi}_0 = 0$$

$$a_0 = \xi_0$$

$$a_1 = \dot{\xi}_0 = 0$$

$$a_2 = \frac{\ddot{\xi}_f}{2} = 0 \quad (2.4)$$

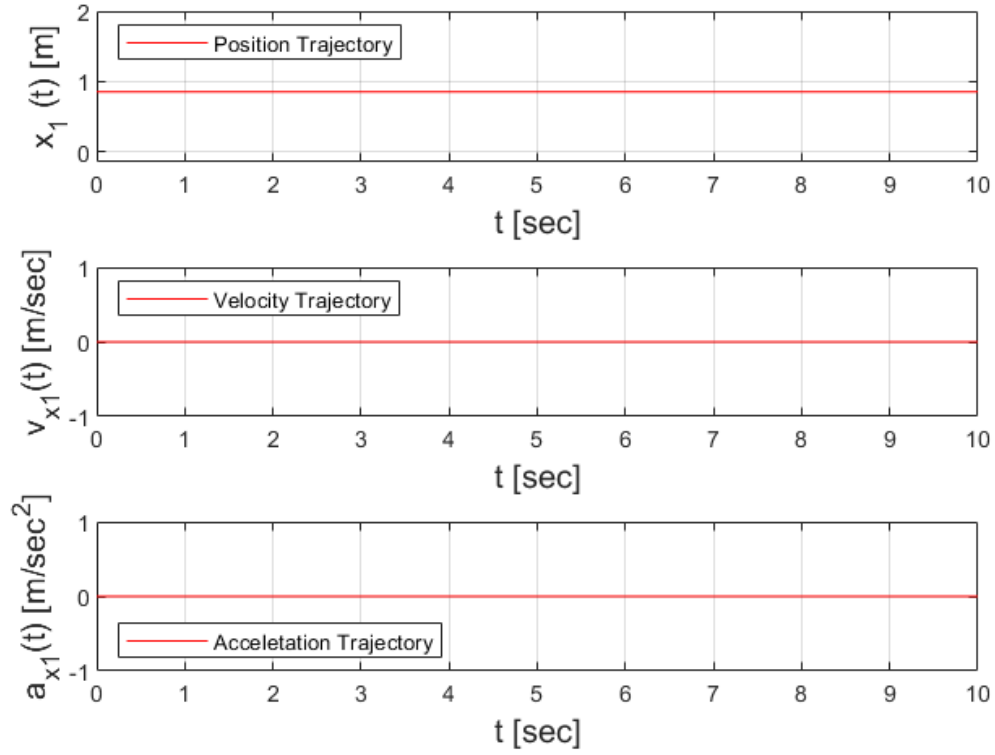
$$a_3 = \frac{10}{t_f^3} (\xi_f - \xi_0)$$

$$a_4 = -\frac{15}{t_f^4} (\xi_f - \xi_0)$$

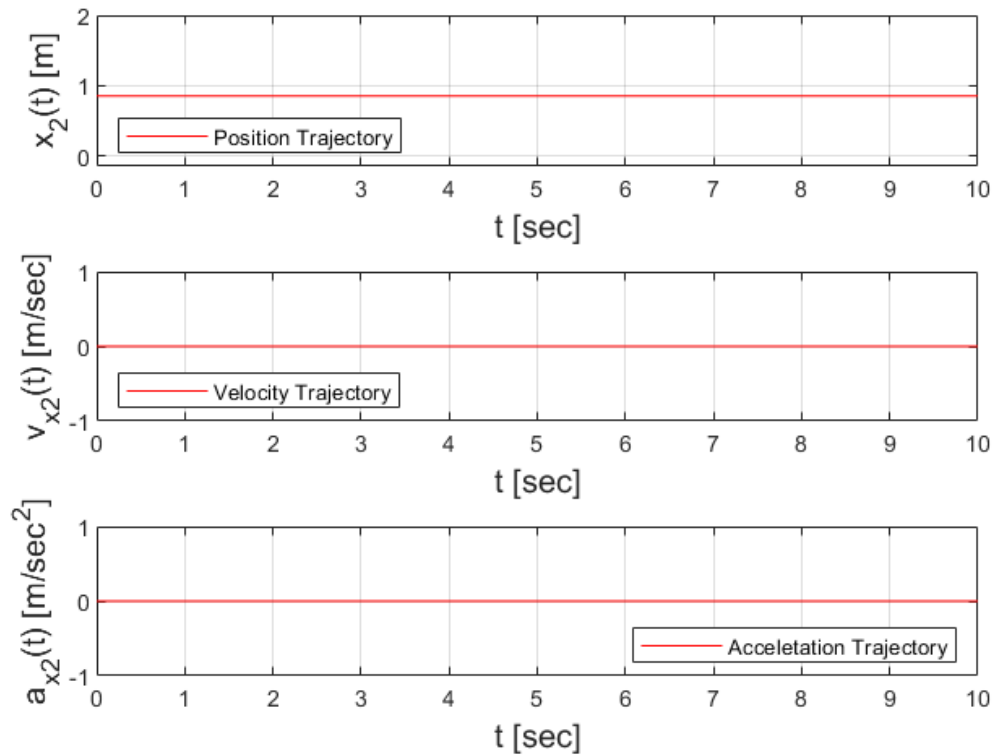
$$a_5 = \frac{6}{t_f^5} (\xi_f - \xi_0)$$

με χρονική διάρκεια της τροχιάς $t_f = T = 10 \text{ sec}$ και με την $t_0 = 0 \text{ sec}$. Οπότε, το επόμενο βήμα είναι να σχεδιαστούν οι τροχιές αυτές, καθώς έχουμε όλα τα απαραίτητα στοιχεία για την σχεδίαση.

Για την x – συνιστώσα δεν χρειάζεται να αναπτυχθεί καμία τροχιά, καθώς θέλουμε να παραμένει και αυτή σε σταθερή θέση. Επίσης, η ταχύτητά της θα είναι και αυτή 0 για όλη την χρονική στιγμή της προσομοίωσης.



Σχήμα 4. Τροχιά x – συνιστώσας από το σημείο p_A στο σημείο p_B



Σχήμα 5. Τροχιά x – συνιστώσας από το σημείο p_B στο σημείο p_A

Τώρα θα σχεδιάσουμε τις τροχιές για τις συνιστώσες y των δύο σημείων. Έχουμε ως αρχικό σημείο το $\xi(0) = \xi_0 = y_A = 0.13 \text{ m}$ και ως τελικό σημείο το $\xi(t_f) = \xi_f = y_B = 0.26 \text{ m}$. Επομένως, θα υπολογίσουμε με τους τύπους της σχέσης (2.4) τους συντελεστές του πολωνύμου. Οπότε έχουμε:

$$a_{1,0} = \xi_0 = 0.13$$

$$a_{1,1} = 0$$

$$a_{1,2} = 0$$

$$a_{1,3} = \frac{10}{10^3} (0.26 - 0.13) = \frac{0.13}{100} = 0.0013$$

$$a_{1,4} = -\frac{15}{10^4} (0.26 - 0.13) = -\frac{15}{10^4} 0.13 = -0.000195$$

$$a_{1,5} = \frac{6}{10^5} (0.26 - 0.13) = \frac{6}{10^5} 0.13 = 0.0000078$$

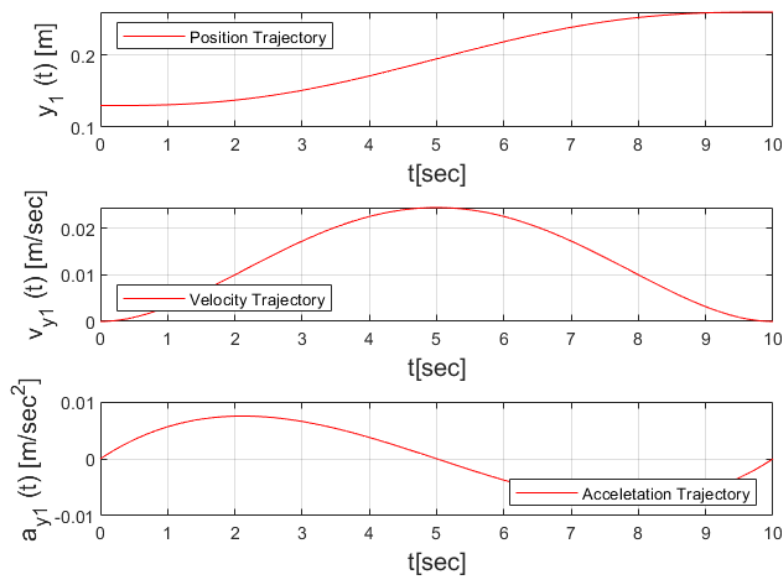
Επομένως, οι πολωνυμικές εξισώσεις για την κίνηση από το σημείο x_A στο x_B είναι

$$\xi_1(t) = 0.13 + 0.0013t^3 - 0.000195t^4 + 0.0000078t^5$$

$$\dot{\xi}_1(t) = 0.0039t^2 - 0.00078t^3 + 0.000039t^4$$

$$\ddot{\xi}_1(t) = 0.0078t - 0.00234t^2 + 0.000156t^3$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε και τις παραπάνω εξισώσεις με το Σχήμα 6.



Σχήμα 6. Τροχιά y –συνιστώσας από το σημείο p_A στο σημείο p_B

Τώρα, θα εξετάσουμε την αντίθετη πορεία ως προς αυτή την συνιστώσα. Έχουμε ως αρχικό σημείο το $\xi(0) = \xi_0 = y_B = 0.26 \text{ m}$ και ως τελικό σημείο το $\xi(t_f) = \xi_f = y_A = 0.13 \text{ m}$. Επομένως, θα υπολογίσουμε με τους τύπους της σχέσης (2.4) τους συντελεστές του πολυωνύμου. Οπότε έχουμε:

$$a_{2,0} = \xi_0 = 0.26$$

$$a_{2,1} = 0$$

$$a_{2,2} = 0$$

$$a_{2,3} = -\frac{10}{10^3} (0.26 - 0.13) = \frac{0.13}{100} = -0,0013$$

$$a_{2,4} = \frac{15}{10^4} (0.26 - 0.13) = -\frac{15}{10^4} 0.13 = 0,000195$$

$$a_{2,5} = -\frac{6}{10^5} (0.26 - 0.13) = -\frac{6}{10^5} 0.13 = -0,0000078$$

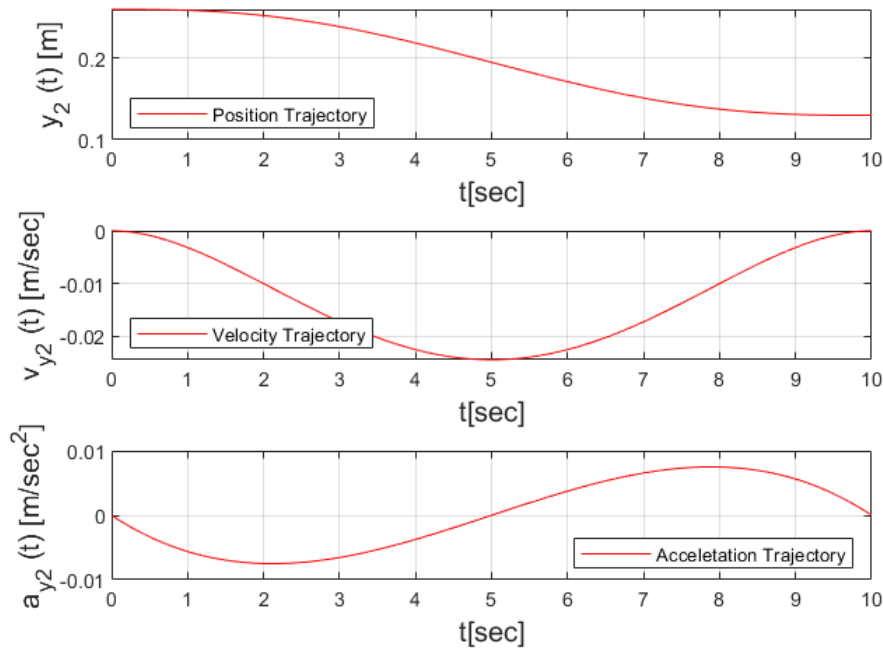
Επομένως, οι πολυωνυμικές εξισώσεις για την κίνηση από το σημείο y_B στο y_A είναι

$$\xi_2(t) = 0.26 - 0,0013t^3 + 0,000195t^4 - 0,0000078t^5$$

$$\dot{\xi}_2(t) = -0,0039t^2 + 0.00078t^3 - 0,000039t^4$$

$$\ddot{\xi}_2(t) = -0,0078t + 0.00234t^2 - 0,000156t^3$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε και τις παραπάνω εξισώσεις με το Σχήμα 7.



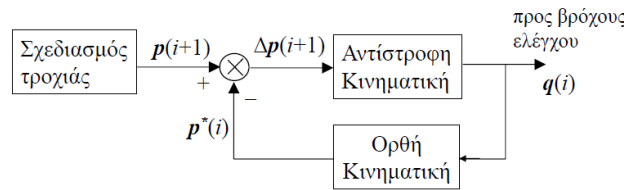
Σχήμα 7. Τροχιά y –συνιστώσας από το σημείο p_B στο σημείο p_A

B.2 Προσομοίωση Ρομποτικού Χειριστή

Η ρομποτική προσομοίωση έγινε σύμφωνα με την διαδικασία του αυξητικού αλγορίθμου. Στον αυξητικό αλγόριθμο έχουμε πως σε κάθε βήμα δειγματοληψίας i η ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης \dot{p}_i μετασχηματίζεται, μέσω της αντίστροφης διαφορικής κινηματικής (δηλ. η αντίστροφη Ιακωβιανή μήτρα) σε μια ταχύτητα αναφοράς \dot{q}_i , η οποία θεωρείται σταθερή σε κάθε βήμα. Στη συνέχεια υπολογίζεται η θέση αναφορά της κάθε άρθρωσης με τον εξής τύπο

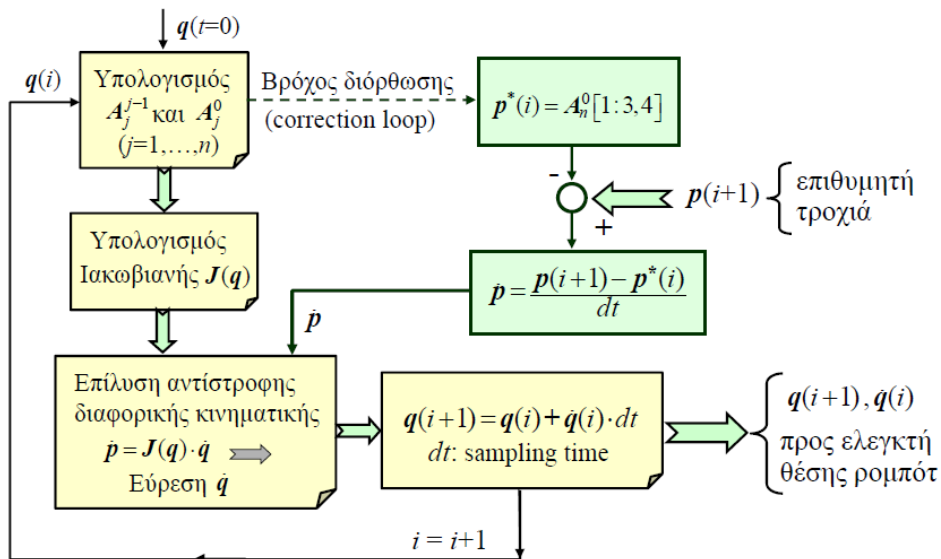
$$q(i) = \sum_{k=1}^i \dot{q}(k)T_f \quad (2.5)$$

Με αυτόν τον τύπο δημιουργούνται συσσωρευτικά σφάλματα θέσης. Έτσι, θα πρέπει να κάπως αυτά τα σφάλματα να εξαλειφθούν. Η διαδικασία αυτή θα χρειαστεί ανάδραση της εισόδου. Το σφάλμα θέσης που προκύπτει θα πρέπει να μηδενιστεί, έτσι ώστε η έξοδος του συστήματος να προσομοιώσει την επιθυμητή τροχιά. Οπότε, προκύπτει το παρακάτω block διάγραμμα



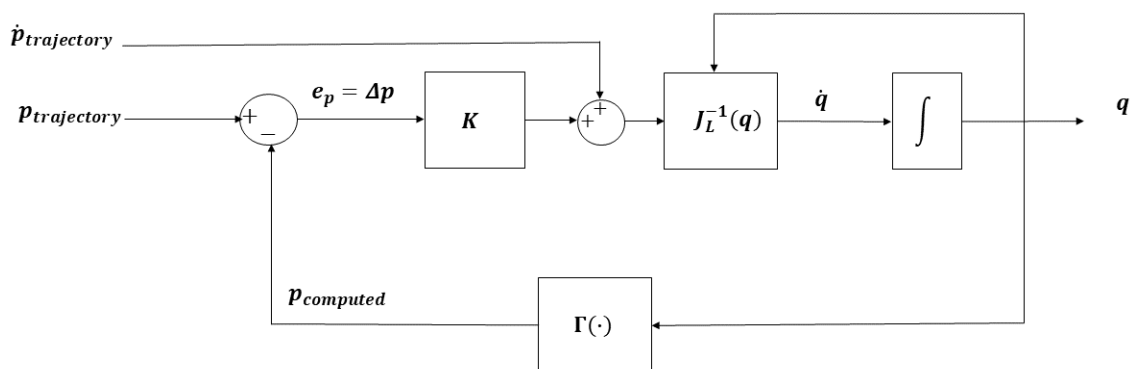
Σχήμα 8. Διάγραμμα Διόρθωσης του αθροιστικού σφάλματος θέσης

Πιο αναλυτικά, μπορούμε να περιγράψουμε την διαδικασία αυτή με το σχήμα 9, στο οποίο φαίνονται τα βήματα του αλγορίθμου.



Σχήμα 9. Διάγραμμα Ροής Αυξητικού αλγορίθμου

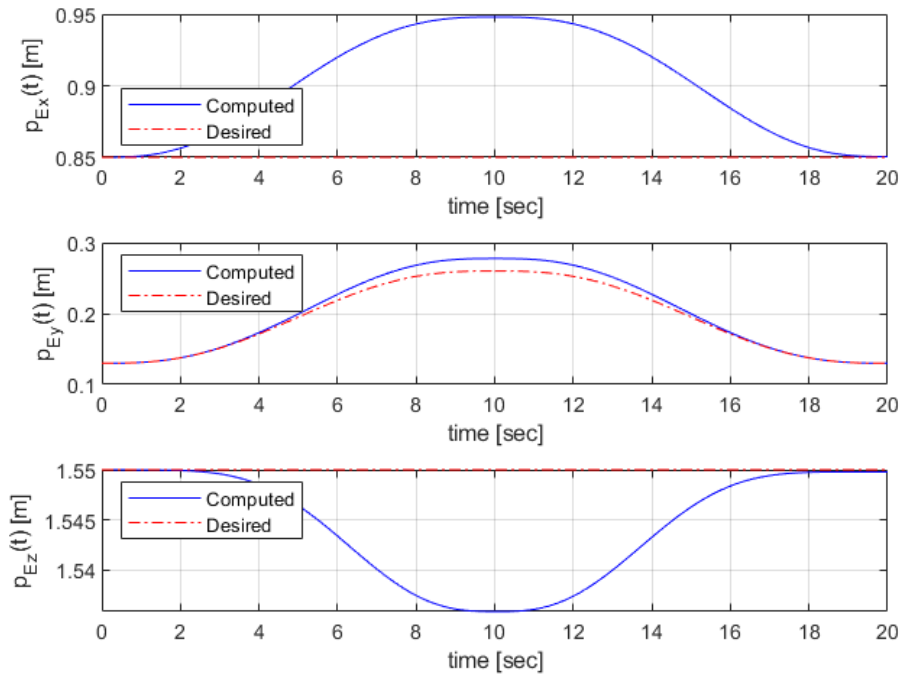
Στο συγκεκριμένο διάγραμμα ροής βλέπουμε όλη την διαδικασία υπολογισμών και των θέσεων και των ταχυτήτων. Με τον υπολογισμό των θέσεων των αρθρώσεων και των αντίστοιχων ταχυτήτων μπορούμε κάλλιστα να υπολογίσουμε μέσω της ευθείας κινηματικής και της ευθείας διαφορικής κινηματικής την θέση και την ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης του ρομποτικού χειριστή. Για την διόρθωση του σφάλματος θέσης χρησιμοποιείται το επόμενο σημείο της επιθυμητής τροχιάς μαζί με το παρών υπολογισμένο σημείο θέσης του ΤΣΔ. Ωστόσο, μέσω πειραμάτων η συγκεκριμένη μέθοδος δεν είχε τα επιθυμητά αποτελέσματα και είχε μεγάλες αποκλίσεις. Για αυτόν τον λόγο χρησιμοποιήθηκε μία τροποποιημένη εκδοχή του αλγορίθμου, [4, σελ. 132]. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος χρησιμοποιεί ένα κέρδος στο σφάλμα θέσης και εισάγει και την επιθυμητή ταχύτητα στον υπολογισμό των ταχυτήτων των αρθρώσεων. Αναλυτικά μπορούμε να δούμε το μπλοκ διάγραμμα στο Σχήμα 10.



Σχήμα 10. Μπλοκ Διάγραμμα Τροποποιημένου Αυξητικού Αλγορίθμου

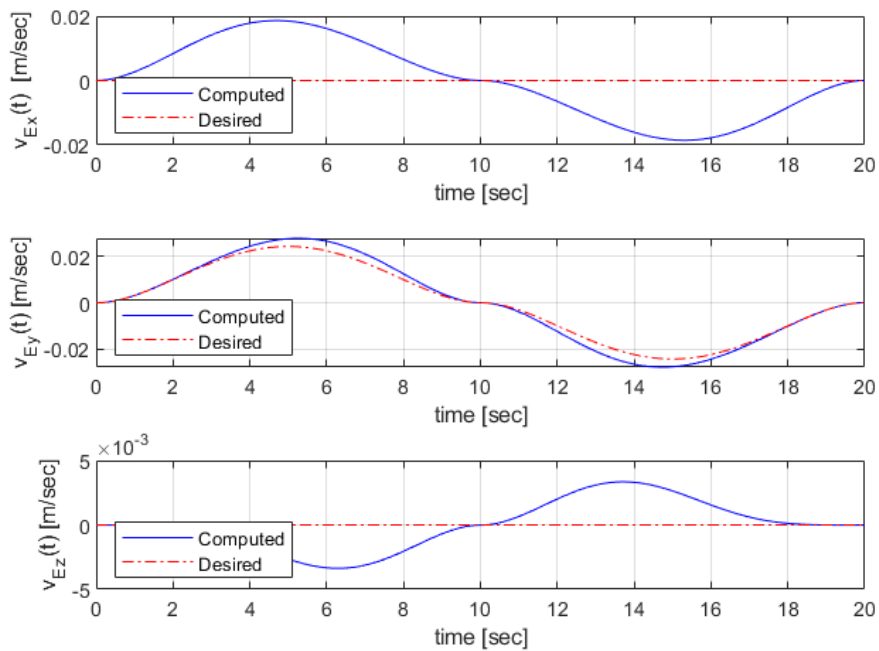
Ο αλγόριθμος αυτός προσομοιώνει σωστά τις τροχιές που έχουν ανατεθεί στον ρομποτικό χειριστή, ωστόσο με κάποια σφάλματα. Αυτό είναι λογικό καθώς τα σφάλματα τα οποία προκύπτουν είναι υπολογιστικά. Ένας παράγοντας οφείλεται στην ψηφιακή ολοκλήρωση της ταχύτητας των αρθρώσεων. Ο υπολογισμός των θέσεων των αρθρώσεων μέσω της αριθμητικής ολοκλήρωσης (με χρήση της μεθόδου *Euler*) εμφανίζει κάποια σφάλματα τα οποία μεταφέρονται μέσω της ευθείας κινηματικής στο τελικό στοιχείο δράσης.

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω αλγόριθμο του σχήματος 10 και με είσοδο τις τροχιές που σχεδιάστηκαν μπορούμε να δούμε αναλυτικότερα τις γραφικές παραστάσεις των ταχυτήτων και θέσεων του τελικού στοιχείου δράσης, καθώς και των αρθρώσεων (βλ. Σχήμα 11, 12, 13 και 14). Επίσης, στο σχήμα 15 φαίνεται και η κίνηση του βραχίονα στον καρτεσιανό χώρο, περνώντας από ενδιάμεσα σημεία.



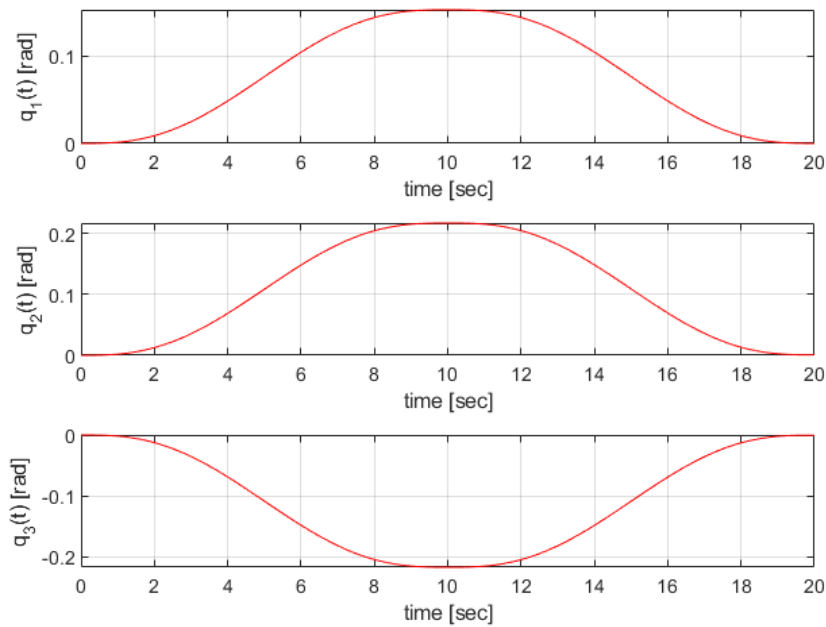
Σχήμα 11. Συσχέτιση Μεταξύ Επιθυμητής και Υπολογισμένης Θέσης του Τελικού Στοιχείου Δράσης

Στο Σχήμα 11 παρατηρούμε την υπολογισμένη θέση του ΤΣΔ συγκριτικά με την επιθυμητή τροχιά που το θέσαμε. Ο λόγος ύπαρξης της συγκεκριμένης απόκλισης οφείλεται στον ίδιο τον αλγόριθμο, όπως εξηγήθηκε και προηγουμένως. Επίσης, ισχύει το ίδιο και για τον υπολογισμό της ταχύτητας του ΤΣΔ (βλ. Σχήμα 12). Επίσης, το κέρδος K που έχει προστεθεί βοηθάει στην διόρθωση του σφάλματος, ωστόσο όχι ιδανικά. Επίσης, το κέρδος αυτό θα πρέπει να έχει τιμή ανάμεσα από 0 και 0.0001 για να έχουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα.

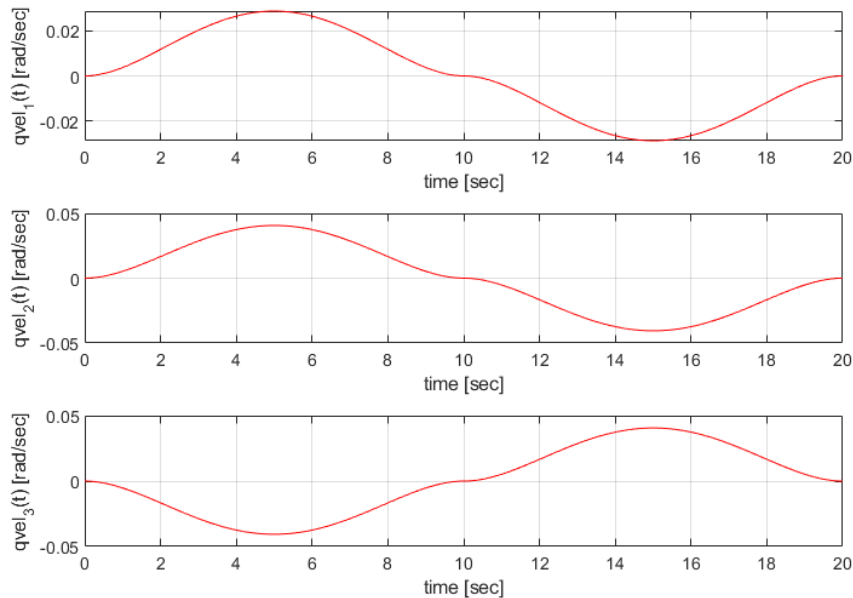


Σχήμα 12. Συσχέτιση μεταξύ Επιθυμητής Και Υπολογισμένης Γραμμικής Ταχύτητας Του Τελικού Στοιχείου Δράσης

Στα Σχήματα 13 και 14 φαίνεται η απόκριση των ταχυτήτων και των θέσεων των αρθρώσεων του βραχίονα. Παρατηρούμε την ομαλή μετάβαση και στα δύο διαγράμματα και τον μηδενισμό των ταχυτήτων στις επιθυμητές θέσεις του καρτεσιανού χώρου.

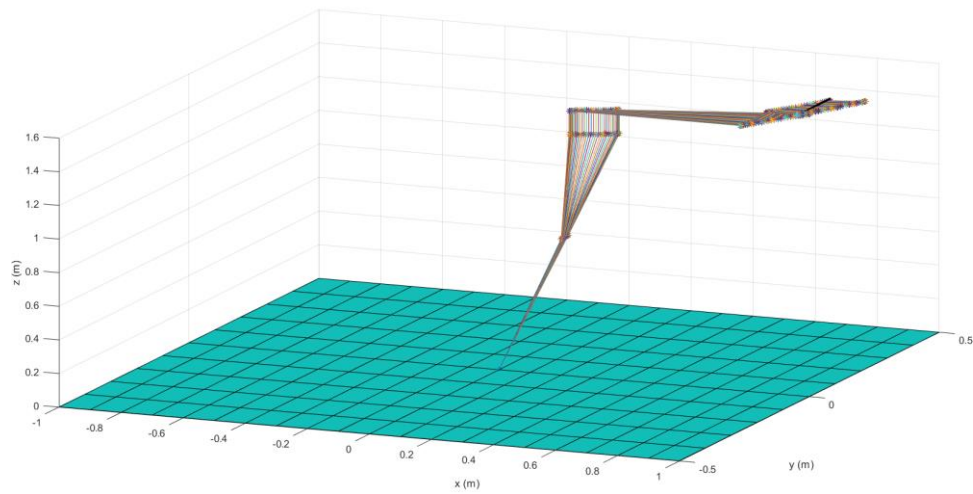


Σχήμα 13. Θέσεις Αρθρώσεων Ρομποτικού Χειριστή



Σχήμα 14. Ταχύτητες Αρθρώσεων Ρομποτικού Χειριστή

Τέλος, αυτό που παρατηρούμε από τα παραπάνω διαγράμματα είναι πως οι επιθυμητές στάσεις γίνεται και εκτελείται η επιθυμητή περιοδική κίνηση. Επιπλέον, αυτό μπορούμε να δούμε και με στιγμιότυπο του σχήματος 15 στο οποίο φαίνεται η κίνηση του βραχίονα στον χώρο εργασίας.



Σχήμα 15. Προσομοίωση Ρομποτικού Χειριστή

Παρατηρούμε πως περνάει από όλα τα σημεία και εκτελεί την επιθυμητή κίνηση στον χώρο. Συνεπώς, η ρομποτική διάταξη έχει σχεδιαστεί σωστά και βλέπουμε την κινηματική της προσομοίωση.

Βιβλιογραφία

- [1] J. Craig, *Εισαγωγή στη Ρομποτική: Μηχανική και Αυτόματος Έλεγχος*, 4^η Έκδοση, Επιστημονική Επιμέλεια: Αριστείδης Βλ. Γωγούσης, Εκδόσεις Τζιόλα, 2020.
- [2] Ζ. Δουλγέρη, *Ρομποτική: Κινηματική, Δυναμική και Έλεγχος αρθρωτών βραχιόνων*, Εκδόσεις Κριτική, 2007.
- [3] Δ. Μ. Εμίρης, Δ. Ε. Κουλουριώτης, *Ρομποτική*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2021.
- [4] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo, *Robotics: Modeling, Planning and Control*, Springer, 2009.
- [5] P. Corke, *Robotics, Vision and Control: Fundamental Algorithms in MATLAB*, Second Edition, Springer, 2011.
- [6] J. Angeles, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*, 4th Edition, Springer, 2014, ISSN 2192-063X, ISBN 978-3-319-01851-5, doi: 10.1007/978-3-319-01851-5.