



*Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο*

*Δ.Π.Μ.Σ. Συστήματα Αυτοματισμού*

*Κατεύθυνση Β:*

*Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και Ρομποτικής*

*Μεταπτυχιακό Μάθημα:*

*Ρομποτικά Συστήματα Ελέγχου*

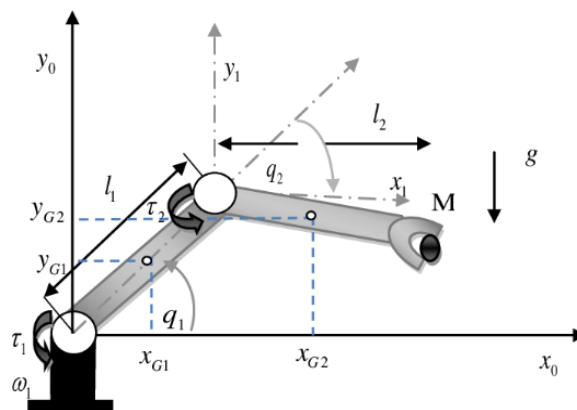
*Εργασία Εξαμήνου*

*Βιομηχανικός Ρομποτικός Χειριστής*

*(KUKA Industrial Robot Manipulator)*

*Όνομα Φοιτητή - Α.Μ.:*

*Γεώργιος Κρομμύδας - 02121208*



*ΑΘΗΝΑ,*

*2023*

## Πίνακας περιεχομένων

Εισαγωγή.....	3
Μέρος Α – Θεωρητική Ανάλυση Ρομποτικού Χειριστή.....	4
Α.1 Μεθοδολογία Denavit – Hartenberg (D-H).....	4
Α.2 Ευθύ Κινηματικό Μοντέλο Ρομποτικού Χειριστή .....	5
Α.3 Ιακωβιανή Μήτρα Διαφορικού Κινηματικού Μοντέλου .....	8
Α.4 Αντίστροφο Διαφορικό Κινηματικό Μοντέλο .....	11
Α.5 Αντίστροφο Γεωμετρικό Κινηματικό Μοντέλο .....	14
Μέρος Β – Κινηματική Προσομοίωση Ρομποτικού Χειριστή.....	19
Β.1 Σχεδίαση Τροχιάς του Χώρου Εργασίας.....	19
Β.2 Προσομοίωση Ρομποτικού Χειριστή .....	19
Βιβλιογραφία .....	20

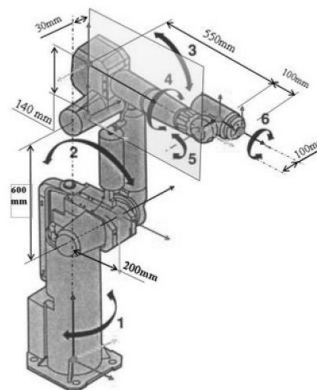
## Εισαγωγή

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας δόθηκε για ανάλυση και προσομοίωση ένας βιομηχανικός ρομποτικός χειριστής έξι βαθμών ελευθερίας (6 DoF) τύπου KUKA. Ο βιομηχανικός ρομποτικός χειριστής αποτελείται από έξι αρθρώσεις, τον οποίο μπορούμε να δούμε και στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1. Βιομηχανικός Ρομποτικός Χειριστής τύπου KUKA

Στο Σχήμα 2 μπορούμε να διακρίνουμε και τους άξονες μαζί με τις διαστάσεις του συγκεκριμένου ρομπότ.



Σχήμα 2. Άξονες και Διαστάσεις του Ρομποτικού Βιομηχανικού Χειριστή τύπου KUKA

Με βάση το σχήμα 2, μπορούμε να περιγράψουμε την κινηματική του δομή και να την κατηγοριοποιήσουμε στην θεωρητική ανάλυση που αποτελείται από την ενότητα Μέρος Α και την σχεδίαση τροχιάς και προσομοίωσης του βραχίονα που αποτελεί το Μέρος Β. Οι διαστάσεις του ρομποτικού χειριστή αποτυπώνονται στον Πίνακα 1 (οι μονάδες του είναι σε mm).

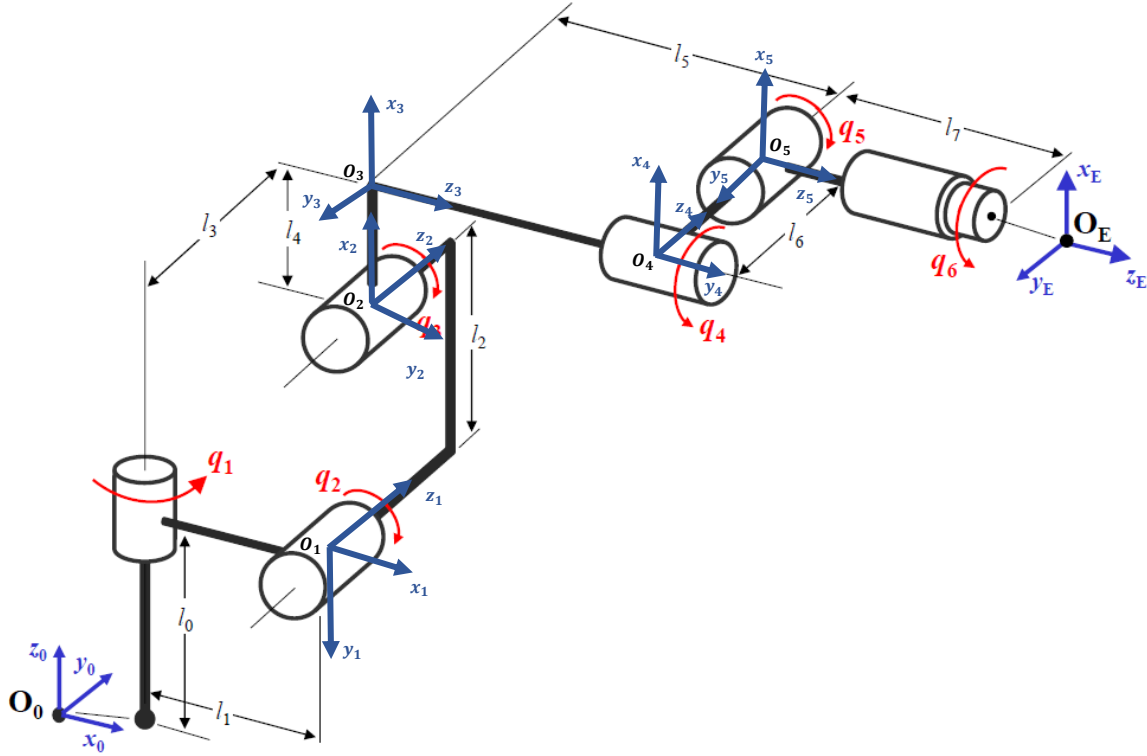
$\ell_0$	$\ell_1$	$\ell_2$	$\ell_3$	$\ell_4$	$\ell_5$	$\ell_6$	$\ell_7$
810	200	600	30	140	550	100	100

Πίνακας 1. Διαστάσεις του Ρομποτικού Χειριστή (Μήκη των Συνδέσμων)

## Μέρος Α – Θεωρητική Ανάλυση Ρομποτικού Χειριστή

### A.1 Μεθοδολογία Denavit – Hartenberg (D-H)

Στο παρών ερώτημα θα χρησιμοποιηθεί η μεθοδολογία *Denavit – Hartenberg* και θα παραχθεί ο αντίστοιχος πίνακας. Με βάση το Σχήμα 3, όπου περιγράφεται η κινηματική δομή του ρομποτικού χειριστή, θα τοποθετηθούν τα πλαίσια εντός του σχήματος και θα βρεθεί ο πίνακας των παραμέτρων κατά *Denavit – Hartenberg*.



Σχήμα 3. Κινηματική Δομή Ρομποτικού Χειριστή τύπου KUKA

Στο Σχήμα 3 παρατηρούμε τα πλαίσια αναφοράς ως προς κάθε άρθρωση. Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της μεθοδολογίας D-H.

Link $i$	$\mathfrak{a}_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	$\ell_1$	$-\pi/2$	$\ell_0$	$q_1$
2	$\ell_2$	0	$\ell_3$	$q_2 - \pi/2$
3	$\ell_4$	$-\pi/2$	0	$q_3$
4	0	$\pi/2$	$\ell_5$	$q_4$
5	0	$-\pi/2$	$\ell_6$	$q_5$
6	0	0	$\ell_7$	$q_6$

Πίνακας 2. Παραμετρικός Πίνακας Denavit - Hartenberg (D-H) του Ρομποτικού Χειριστή

## A.2 Ευθύ Κινηματικό Μοντέλο Ρομποτικού Χειριστή

Σε αυτό το ερώτημα έχουμε να υπολογίσουμε την ευθεία κινηματική του ρομποτικού βραχίονα. Καθώς έχει παραχθεί ο πίνακας *Denavit – Hartenberg(D-H)*, το επόμενο βήμα είναι να υπολογιστούν οι ομογενείς μετασχηματισμοί  $A_i^{i-1}(q_i) \in SE(3)$ . Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
 A_1^0(q_1) &= \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_1) & -\sin(\vartheta_1) \cos(a_1) & \sin(\vartheta_1) \sin(a_1) & a_1 \cos(\vartheta_1) \\ \sin(\vartheta_1) & \cos(\vartheta_1) \cos(a_1) & -\cos(\vartheta_1) \sin(a_1) & a_1 \sin(\vartheta_1) \\ 0 & \sin(a_1) & \cos(a_1) & d_1 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) \cos(-\frac{\pi}{2}) & \sin(q_1) \sin(-\frac{\pi}{2}) & \ell_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\cos(q_1) \sin(-\frac{\pi}{2}) & \ell_1 \sin(q_1) \\ 0 & \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) & \ell_0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_1^0(q_1) &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & \ell_1 c_1 \\ s_1 & 0 & c_1 & \ell_1 s_1 \\ 0 & -1 & 0 & \ell_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2^1(q_2) &= \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_2) & -\sin(\vartheta_2) \cos(a_2) & \sin(\vartheta_2) \sin(a_2) & a_2 \cos(\vartheta_2) \\ \sin(\vartheta_2) & \cos(\vartheta_2) \cos(a_2) & -\cos(\vartheta_2) \sin(a_2) & a_2 \sin(\vartheta_2) \\ 0 & \sin(a_2) & \cos(a_2) & d_2 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_2 - \pi/2) & -\sin(q_2 - \pi/2) \cos(0) & \sin(q_2 - \pi/2) \sin(0) & \ell_2 \cos(q_2 - \pi/2) \\ \sin(q_2 - \pi/2) & \cos(q_2 - \pi/2) \cos(0) & -\cos(q_2 - \pi/2) \sin(0) & \ell_2 \sin(q_2 - \pi/2) \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & \ell_3 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_2^1(q_2) &= \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & \ell_2 s_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & -\ell_2 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_3^2(q_3) &= \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_3) & -\sin(\vartheta_3) \cos(a_3) & \sin(\vartheta_3) \sin(a_3) & a_3 \cos(\vartheta_3) \\ \sin(\vartheta_3) & \cos(\vartheta_3) \cos(a_3) & -\cos(\vartheta_3) \sin(a_3) & a_3 \sin(\vartheta_3) \\ 0 & \sin(a_3) & \cos(a_3) & d_3 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) \cos(-\frac{\pi}{2}) & \sin(q_3) \sin(-\frac{\pi}{2}) & \ell_4 \cos(q_3) \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\cos(q_3) \sin(-\frac{\pi}{2}) & \ell_4 \sin(q_3) \\ 0 & \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$A_3^2(q_3) = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 & \ell_4 c_3 \\ s_3 & 0 & c_3 & \ell_4 s_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$A_4^3(q_4) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_4) & -\sin(\vartheta_4) \cos(a_4) & \sin(\vartheta_4) \sin(a_4) & \mathfrak{a}_4 \cos(\vartheta_4) \\ \sin(\vartheta_4) & \cos(\vartheta_4) \cos(a_4) & -\cos(\vartheta_4) \sin(a_4) & \mathfrak{a}_4 \sin(\vartheta_4) \\ 0 & \sin(a_4) & \cos(a_4) & d_4 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(q_4) & -\sin(q_4) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin(q_4) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ \sin(q_4) & \cos(q_4) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\cos(q_4) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \ell_5 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4^3(q_4) = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ell_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$A_5^4(q_5) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_5) & -\sin(\vartheta_5) \cos(a_5) & \sin(\vartheta_5) \sin(a_5) & \mathfrak{a}_5 \cos(\vartheta_5) \\ \sin(\vartheta_5) & \cos(\vartheta_5) \cos(a_5) & -\cos(\vartheta_5) \sin(a_5) & \mathfrak{a}_5 \sin(\vartheta_5) \\ 0 & \sin(a_5) & \cos(a_5) & d_5 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(q_5) & -\sin(q_5) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \sin(q_5) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ \sin(q_5) & \cos(q_5) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\cos(q_5) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \ell_6 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5^4(q_5) = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ell_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$A_6^5(q_6) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_6) & -\sin(\vartheta_6) \cos(a_6) & \sin(\vartheta_6) \sin(a_6) & \mathfrak{a}_6 \cos(\vartheta_6) \\ \sin(\vartheta_6) & \cos(\vartheta_6) \cos(a_6) & -\cos(\vartheta_6) \sin(a_6) & \mathfrak{a}_6 \sin(\vartheta_6) \\ 0 & \sin(a_6) & \cos(a_6) & d_6 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(q_6) & -\sin(q_6) \cos(0) & \sin(q_6) \sin(0) & 0 \\ \sin(q_6) & \cos(q_6) \cos(0) & -\cos(q_6) \sin(0) & 0 \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & \ell_7 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6^5(q_6) = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Έχουν υπολογιστεί όλοι οι ομογενείς μετασχηματισμοί του παραπάνω συστήματος. Θέτουμε τις γωνίες περιστροφής ως  $q_4=q_5=q_6=0$  σταθ.. Έτσι, θεωρούνται οι αρθρώσεις 4,5,6 ανενεργές. Οπότε, το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε το συνολικό ευθύ κινηματικό μοντέλο του ρομποτικού μηχανισμού. Συνδυάζουμε τις σχέσεις (1.1), (1.2) και (1.3) και προκύπτει ο ομογενής μετασχηματισμός της σχέσης (1.7)

$$\begin{aligned} A_3^0(q_1, q_2, q_3) &= A_1^0(q_1)A_2^1(q_2)A_3^2(q_3) \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & \ell_1 c_1 \\ s_1 & 0 & c_1 & \ell_1 s_1 \\ 0 & -1 & 0 & \ell_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & \ell_2 s_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & -\ell_2 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 & \ell_4 c_3 \\ s_3 & 0 & c_3 & \ell_4 s_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 & \ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 - \ell_3 s_1 \\ s_1 s_2 & s_1 c_2 & c_1 & \ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_3 c_1 \\ c_2 & -s_2 & 0 & \ell_0 + \ell_2 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 & \ell_4 c_3 \\ s_3 & 0 & c_3 & \ell_4 s_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 s_2 c_3 + c_1 c_2 s_3 & s_1 & -c_1 s_2 s_3 + c_1 c_2 c_3 & \ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 - \ell_3 s_1 + \ell_4 c_1 s_2 c_3 + \ell_4 c_1 c_2 s_3 \\ s_1 s_2 c_3 + s_1 c_2 s_3 & -c_1 & -s_1 s_2 s_3 + s_1 c_2 c_3 & \ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_3 c_1 + \ell_4 s_1 s_2 c_3 + \ell_4 s_1 c_2 s_3 \\ c_2 c_3 - s_2 s_3 & 0 & -c_2 s_3 - s_2 c_3 & \ell_0 + \ell_2 c_2 + \ell_4 s_2 c_3 - \ell_4 c_2 s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A_3^0(q_1, q_2, q_3) &= \begin{bmatrix} c_1 s_{23} & s_1 & c_1 c_{23} & \ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 - \ell_3 s_1 + \ell_4 c_1 s_{23} \\ s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 c_{23} & \ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_3 c_1 + \ell_4 s_1 s_{23} \\ c_{23} & 0 & -s_{23} & \ell_0 + \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7) \end{aligned}$$

Συνδυάζουμε τις σχέσεις (1.4), (1.5) και (1.6) και προκύπτει ο ομογενής μετασχηματισμός της σχέσης (1.8)

$$\begin{aligned} A_6^3(q_4, q_5, q_6) &= A_4^3(q_4)A_5^4(q_5)A_6^5(q_6) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ell_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ell_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\ell_6 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A_6^3(q_4, q_5, q_6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\ell_6 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_5 + \ell_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Τέλος, πολλαπλασιάζουμε τις σχέσεις (1.7) και (1.8), με σκοπό να προκύψει ο τελικός ομογενής πίνακας μετασχηματισμού και η ευθεία κινηματική εξίσωση. Όποτε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A_6^0(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) &= A_3^0(q_1, q_2, q_3) A_6^3(q_4, q_5, q_6) \\ &= \begin{bmatrix} c_1 s_{23} & s_1 & c_1 c_{23} & \ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 - \ell_3 s_1 + \ell_4 c_1 s_{23} \\ s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 c_{23} & \ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_3 c_1 + \ell_4 s_1 s_{23} \\ c_{23} & 0 & -s_{23} & \ell_0 + \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\ell_6 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_5 + \ell_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A_6^0(q) &= \begin{bmatrix} c_1 s_{23} & s_1 & c_1 c_{23} & \ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 + \ell_4 c_1 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_1 c_{23} - (\ell_3 + \ell_6) s_1 \\ s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 c_{23} & \ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_4 s_1 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) s_1 c_{23} + (\ell_3 + \ell_6) c_1 \\ c_{23} & 0 & -s_{23} & \ell_0 + \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Η σχέση (1.9) αποτελεί τον συνολικό ομογενή μετασχηματισμό του ρομποτικού βραχίονα. Σύμφωνα με την σχέση (1.9) προκύπτει το Τελικό Στοιχείο Δράσης του ρομποτικού χειριστή το οποίο είναι

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) c_1 - (\ell_3 + \ell_6) s_1 \\ (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) s_1 + (\ell_3 + \ell_6) c_1 \\ \ell_0 + \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

### A.3 Ιακωβιανή Μήτρα Διαφορικού Κινηματικού Μοντέλου

Χρησιμοποιώντας το ευθύ κινηματικό μοντέλο, μπορούμε να υπολογίσουμε την Ιακωβιανή μήτρα του διαφορικού κινηματικού μοντέλου. Χρησιμοποιώντας τον γεωμετρικό τρόπο επίλυσης, θα βρεθούν οι στήλες του ιακωβιανού πίνακα που αντιστοιχούν στις εκάστοτε ταχύτητες των αρθρώσεων, ως προς την γραμμική και την γωνιακή ταχύτητα αντίστοιχα. Με βάση την γεωμετρική μέθοδο, θα υπολογίζεται ο άξονας περιστροφής ως προς την προηγούμενη άρθρωση και αντίστοιχα η απόστασή της από το τελικό στοιχείο δράσης.

Καθώς η ευθεία κινηματική παράχθηκε κατά την μεθοδολογία **D-H**, τότε αυτομάτως ο άξονας περιστροφής υπάγεται πάνω στον άξονα z. Έτσι, θα υπολογιστούν όλες οι στήλες της ιακωβιανής μήτρας. Θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής σχέσεις:

$$\hat{\mathbf{b}}_{i-1} = \mathbf{R}_{i-1}^0(q_i) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$



και

$$\begin{cases} J_{L_i} = \hat{\mathbf{b}}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,E} = S(\hat{\mathbf{b}}_{i-1})\mathbf{r}_{i-1,E} \\ J_{A_i} = \hat{\mathbf{b}}_{i-1} \end{cases}, \text{για στροφικές αρθρώσεις} \quad (1.12)$$

Οπότε θα υπολογιστούν όλες οι στήλες με βάση τις σχέσεις (1.11) και (1.12). Άρα έχουμε ότι:

**Για  $i = 1$ :**

Η άρθρωση είναι στροφική, επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω τύπους

$$\hat{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{R}_0^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{0,E} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Επομένως η πρώτη στήλη της ιακωβιανής κατά την γραμμική ταχύτητα, όσο και για την γωνιακή θα είναι:

$$J_{A_1} = \hat{\mathbf{b}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

και

$$J_{L_1} = \hat{\mathbf{b}}_0 \times \mathbf{r}_{0,E} = S(\hat{\mathbf{b}}_0)\mathbf{r}_{0,E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_y \\ p_x \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$J_{L_1} = \begin{bmatrix} -(\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23})s_1 - (\ell_3 + \ell_6)c_1 \\ (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23})c_1 - (\ell_3 + \ell_6)s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

**Για  $i = 2$ :**

Η άρθρωση είναι στροφική, επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω τύπους

$$\hat{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{R}_1^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{1,E} = \mathbf{r}_{0,E} - \mathbf{r}_{0,1} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 \\ \ell_1 s_1 \\ \ell_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x - \ell_1 c_1 \\ p_y - \ell_1 s_1 \\ p_z - \ell_0 \end{bmatrix}$$

Επομένως η δεύτερη στήλη της ιακωβιανής κατά την γραμμική ταχύτητα, όσο και για την γωνιακή θα είναι:

$$J_{A_2} = \hat{\mathbf{b}}_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

και

$$\begin{aligned} J_{L_2} = \hat{\mathbf{b}}_1 \times \mathbf{r}_{1,E} &= S(\hat{\mathbf{b}}_1) \mathbf{r}_{1,E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & s_1 \\ -c_1 & -s_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x - \ell_1 c_1 \\ p_y - \ell_1 s_1 \\ p_z - \ell_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1(p_z - \ell_0) \\ s_1(p_z - \ell_0) \\ -s_1(p_y - \ell_1 s_1) - c_1(p_x - \ell_1 c_1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ s_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ -s_1^2(\ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) - (\ell_3 + \ell_6) s_1 c_1 - c_1^2(\ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) + (\ell_3 + \ell_6) c_1 s_1 \end{bmatrix} = \\ J_{L_2} &= \begin{bmatrix} c_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ s_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}) \\ -(\ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.16)$$

**Για  $i = 3$ :**

Η άρθρωση είναι στροφική, επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω τύπους

$$\hat{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{R}_2^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{2,E} = \mathbf{r}_{0,E} - \mathbf{r}_{0,2} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 - \ell_3 s_1 \\ \ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_3 c_1 \\ \ell_0 + \ell_2 c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x - (\ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 - \ell_3 s_1) \\ p_y - (\ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_3 c_1) \\ p_z - (\ell_0 + \ell_2 c_2) \end{bmatrix}$$

Συνεπώς η τρίτη στήλη της ιακωβιανής κατά την γραμμική ταχύτητα, όσο και για την γωνιακή θα είναι:

$$J_{A_3} = \hat{\mathbf{b}}_2 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

και

$$\begin{aligned} J_{L_3} = \hat{\mathbf{b}}_2 \times \mathbf{r}_{2,E} &= S(\hat{\mathbf{b}}_2) \mathbf{r}_{2,E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & s_1 \\ -c_1 & -s_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x - (\ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 - \ell_3 s_1) \\ p_y - (\ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_3 c_1) \\ p_z - (\ell_0 + \ell_2 c_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c_1(p_z - (\ell_0 + \ell_2 c_2)) \\ s_1(p_z - (\ell_0 + \ell_2 c_2)) \\ -s_1(p_y - (\ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 s_2 + \ell_3 c_1)) - c_1(p_x - (\ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 s_2 - \ell_3 s_1)) \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} c_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23}) \\ s_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23}) \\ -s_1(\ell_4 s_1 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)s_1 c_{23} + \ell_6 c_1) - c_1(\ell_4 c_1 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_1 c_{23} - \ell_6 s_1) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} c_1(\ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23}) \\ s_1(\ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23}) \\ -s_1^2(\ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23}) - \ell_6 s_1 c_1 - c_1^2(\ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23}) + \ell_6 s_1 c_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 &J_{L_3} = \begin{bmatrix} c_1(\ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23}) \\ s_1(\ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23}) \\ -(\ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23}) \end{bmatrix} \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

Επομένως, η συνολική Ιακωβιανή μήτρα θα είναι:

$$\begin{aligned}
 J^0(q) &= \begin{bmatrix} J_{L_1} & J_{L_2} & J_{L_3} \\ J_{A_1} & J_{A_2} & J_{A_3} \end{bmatrix} = \\
 &\begin{bmatrix} -(\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23})s_1 - (\ell_3 + \ell_6)c_1 & c_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23}) & c_1(\ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23}) \\ (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23})c_1 - (\ell_3 + \ell_6)s_1 & s_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23}) & s_1(\ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23}) \\ 0 & -(\ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23}) & -(\ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23}) \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

#### A.4 Αντίστροφο Διαφορικό Κινηματικό Μοντέλο

Στο προηγούμενο ερώτημα υπολογίστηκε η συνολική Ιακωβιανή μήτρα του ρομποτικού χειριστή. Στο παρών ερώτημα θα χρησιμοποιήσουμε τον υπό-πίνακα της Ιακωβιανής μήτρας που αντιστοιχεί στην γραμμική ταχύτητα  $v_E$ . Για τον υπολογισμό του αντίστροφου διαφορικού κινηματικού μοντέλου ως προς την γραμμική ταχύτητα, θα υπολογίσουμε αρχικά την ορίζουσα της ιακωβιανής μήτρας για να βρούμε τα ιδιόμορφα σημεία της και στην συνέχεια θα την αντιστρέψουμε, εφόσον γίνεται, για να βρούμε το αντίστροφο διαφορικό κινηματικό μοντέλο.

Η ιακωβιανή ορίζουσα ως προς την γραμμική ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης είναι:

$$\begin{aligned}
 J_L(q) &= [J_{L_1} \quad J_{L_2} \quad J_{L_3}] \\
 &= \begin{bmatrix} -(\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23})s_1 - (\ell_3 + \ell_6)c_1 & c_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23}) & c_1(\ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23}) \\ (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23})c_1 - (\ell_3 + \ell_6)s_1 & s_1(\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23}) & s_1(\ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23}) \\ 0 & -(\ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23}) & -(\ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23}) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Με βάση αυτή θα γίνει η αντιστροφή του διαφορικού μοντέλου. Για λόγους συντομίας των πράξεων θα θέσουμε κάποιες μεταβλητές. Έστω ότι ορίζουμε τα παρακάτω

$$l = \ell_3 + \ell_6$$

$$d(q_2, q_3) = \ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23} \quad (1.20)$$

$$k(q_2, q_3) = \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23}$$

Τότε, η ιακωβιανή μήτρα θα γίνει:

$$J_L(q) = \begin{bmatrix} -(ds_1 + lc_1) & c_1 k & c_1 (k - \ell_2 c_2) \\ dc_1 - ls_1 & s_1 k & s_1 (k - \ell_2 c_2) \\ 0 & -d + \ell_1 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - k \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Επομένως, θα υπολογίσουμε την ορίζουσα και θα βρούμε τα ιδιόμορφα σημεία της. Άρα, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \det(J_L(q)) &= \begin{vmatrix} -(ds_1 + lc_1) & c_1 k & c_1 (k - \ell_2 c_2) \\ dc_1 - ls_1 & s_1 k & s_1 (k - \ell_2 c_2) \\ 0 & -d + \ell_1 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - k \end{vmatrix} \\ &= -(ds_1 + lc_1) \begin{vmatrix} s_1 k & s_1 (k - \ell_2 c_2) \\ -d + \ell_1 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix} - (dc_1 - ls_1) \begin{vmatrix} c_1 k & c_1 (k - \ell_2 c_2) \\ -d + \ell_1 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τις υπό-ορίζουσες:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} s_1 k & s_1 (k - \ell_2 c_2) \\ -d + \ell_1 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix} &= s_1 k (\ell_1 + \ell_2 s_2 - d) - (s_1 (k - \ell_2 c_2)) (-d + \ell_1) \\ &= s_1 k \ell_1 + s_1 k \ell_2 s_2 - s_1 k d - s_1 (-k d + k \ell_1 + d \ell_2 c_2 - \ell_1 \ell_2 c_2) \\ &= s_1 k \ell_1 + s_1 k \ell_2 s_2 - s_1 k d + s_1 k d - s_1 k \ell_1 - s_1 d \ell_2 c_2 + s_1 \ell_1 \ell_2 c_2 \\ &= (k s_2 + \ell_1 c_2 - d c_2) \ell_2 s_1 \\ \begin{vmatrix} c_1 k & c_1 (k - \ell_2 c_2) \\ -d + \ell_1 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix} &= c_1 k (\ell_1 + \ell_2 s_2 - d) - c_1 (k - \ell_2 c_2) (-d + \ell_1) \\ &= c_1 k \ell_1 + c_1 k \ell_2 s_2 - c_1 k d - c_1 (-k d + k \ell_1 + d \ell_2 c_2 - \ell_2 c_2 \ell_1) \\ &= c_1 k \ell_1 + c_1 k \ell_2 s_2 - c_1 k d + k d c_1 - c_1 k \ell_1 - c_1 d \ell_2 c_2 + c_1 \ell_2 c_2 \ell_1 \\ &= c_1 k \ell_2 s_2 - c_1 d \ell_2 c_2 + c_1 \ell_2 c_2 \ell_1 \\ &= (k s_2 + \ell_1 c_2 - d c_2) \ell_2 c_1 \end{aligned}$$

Οπότε, τώρα μπορούμε να επιστρέψουμε στον υπολογισμό της ορίζουσας της ιακωβιανής:

$$\det(J_L) = (-ds_1 - lc_1)(k s_2 + \ell_1 c_2 - d c_2) \ell_2 s_1 + (dc_1 - ls_1)(k s_2 + \ell_1 c_2 - d c_2) \ell_2 c_1$$

$$\begin{aligned}
 &= (ks_2 + \ell_1 c_2 - dc_2)\ell_2((-ds_1 - lc_1)s_1 + (dc_1 - ls_1)c_1) \\
 &= (ks_2 + \ell_1 c_2 - dc_2)\ell_2(-ds_1^2 + lc_1 s_1 - dc_1^2 - ls_1 c_1) \\
 &= -(ks_2 + \ell_1 c_2 - dc_2)\ell_2 d \\
 &= -((\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23})s_2 + \ell_1 c_2 - (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23})c_2)\ell_2 d \\
 &= ((\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23})c_2 - (\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23})s_2 - \ell_1 c_2)\ell_2 d \\
 &= (\ell_1 c_2 + \ell_2 s_2 c_2 + \ell_4 c_2 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_2 c_{23} - \ell_2 s_2 c_2 - \ell_4 s_2 c_{23} + (\ell_5 + \ell_7)s_2 s_{23} \\
 &\quad - \ell_1 c_2)\ell_2 d \\
 &= (\ell_4 c_2 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_2 c_{23} - \ell_4 s_2 c_{23} + (\ell_5 + \ell_7)s_2 s_{23})\ell_2 d \\
 &= (\ell_4(c_2 s_{23} - s_2 c_{23}) + (\ell_5 + \ell_7)(c_2 c_{23} + s_2 s_{23}))\ell_2 d \\
 &= (\ell_4(c_2(s_2 c_3 + c_2 s_3) - s_2(c_2 c_3 - s_2 s_3)) + (\ell_5 + \ell_7)(c_2(c_2 c_3 - s_2 s_3) + s_2(s_2 c_3 + c_2 s_3)))\ell_2 d \\
 &= (\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7)c_3)\ell_2 d \Rightarrow \\
 \det(J_L) &= \ell_2(\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7)c_3)(\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23}) \quad (1.22)
 \end{aligned}$$

Με βάση αυτό το αποτέλεσμα θα βρούμε τα ιδιόμορφα σημεία του ρομποτικού χειριστή. Για τα βρούμε, θα θέσουμε την ορίζουσα ίση με το μηδέν.

$$\begin{aligned}
 \det(J_L) &= 0 \\
 \Rightarrow \ell_2(\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7)c_3)(\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23}) &= 0 \\
 \Rightarrow \begin{cases} \ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7)c_3 = 0 \\ \ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23} = 0 \end{cases} & \quad (1.23)
 \end{aligned}$$

Οι τελικές εξισώσεις που προκύπτουν, χαρακτηρίζουν τις ιδιόμορφες διατάξεις του βραχίονα. Όταν ο βραχίονας βρεθεί σε κάποια θέση του χώρου όπου ισχύει μία από τις παραπάνω σχέσεις, τότε χάνεται ο αντίστοιχος βαθμός ελευθερίας της ρομποτικής διάταξης, με αποτέλεσμα, να μην είναι ελέγξιμη κάποια άρθρωση.

Καθώς έχουμε υπολογίσει τις ιδιόμορφες διατάξεις του ρομποτικού χειριστή, το επόμενο βήμα είναι να αντιστρέψουμε το διαφορικό μοντέλο.

$$v_E = J_L(q)\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = J_L^{-1}(q)v_E \quad (1.24)$$

Οπότε, θα αντιστρέψουμε την ιακωβιανή μήτρα. Η αντίστροφη μήτρα είναι η εξής:

$$J_L^{-1}(q) = \frac{1}{|J_L(q)|} \text{adj}(J_L(q)) \quad (1.25)$$

Αρχικά, θα υπολογίσουμε τον **adjoint** πίνακα της ιακωβιανής μήτρας ως προς την γραμμική ταχύτητα. Γνωρίζουμε πως ο πίνακας αυτός δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned}
 \text{adj}(J_L(q)) &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} J_{L22} & J_{L23} \\ J_{L32} & J_{L33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} J_{L21} & J_{L23} \\ J_{L31} & J_{L33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} J_{L21} & J_{L22} \\ J_{L31} & J_{L32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} J_{L12} & J_{L13} \\ J_{L32} & J_{L33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} J_{L11} & J_{L13} \\ J_{L31} & J_{L33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} J_{L11} & J_{L12} \\ J_{L31} & J_{L32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} J_{L12} & J_{L13} \\ J_{L22} & J_{L23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} J_{L11} & J_{L13} \\ J_{L21} & J_{L23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} J_{L11} & J_{L12} \\ J_{L21} & J_{L22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} s_1 k & s_1(k - \ell_2 c_2) \\ -d + \ell_1 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} dc_1 - ls_1 & s_1(k - \ell_2 c_2) \\ 0 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} dc_1 - ls_1 & s_1 k \\ 0 & -d + \ell_1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} c_1 k & c_1(k - \ell_2 c_2) \\ -d + \ell_1 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -ds_1 - lc_1 & c_1(k - \ell_2 c_2) \\ 0 & \ell_1 + \ell_2 s_2 - d \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -ds_1 - lc_1 & c_1 k \\ 0 & -d + \ell_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c_1 k & c_1(k - \ell_2 c_2) \\ s_1 k & s_1(k - \ell_2 c_2) \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -ds_1 - lc_1 & c_1(k - \ell_2 c_2) \\ dc_1 - ls_1 & s_1(k - \ell_2 c_2) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -ds_1 - lc_1 & c_1 k \\ dc_1 - ls_1 & s_1 k \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} (ks_2 + \ell_1 c_2 - dc_2)\ell_2 s_1 & -(dc_1 - ls_1)(\ell_1 + \ell_2 s_2 - d) & (\ell_1 + \ell_2 s_2 - d)(-d + \ell_1) \\ -(ks_2 + \ell_1 c_2 - dc_2)\ell_2 c_1 & -(dc_1 + ls_1)(\ell_1 + \ell_2 s_2 - d) & (dc_1 + ls_1)(-d + \ell_1) \\ 0 & (k - \ell_2 c_2)d & -dk \end{bmatrix}^T \\
 \text{adj}(J_L(q)) &= \begin{bmatrix} (ks_2 + \ell_1 c_2 - dc_2)\ell_2 s_1 & -(ks_2 + \ell_1 c_2 - dc_2)\ell_2 c_1 & 0 \\ -(dc_1 - ls_1)(\ell_1 + \ell_2 s_2 - d) & -(dc_1 + ls_1)(\ell_1 + \ell_2 s_2 - d) & (k - \ell_2 c_2)d \\ (\ell_1 + \ell_2 s_2 - d)(-d + \ell_1) & (dc_1 + ls_1)(-d + \ell_1) & -dk \end{bmatrix} \quad (1.26)
 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (1.26) στην (1.25), θα προκύψει η αντίστροφη Ιακωβιανή μήτρα. Επομένως:

$$J_L^{-1}(q) = \frac{1}{(\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7)c_3)\ell_2 d} \begin{bmatrix} (\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7)c_3)\ell_2 s_1 & -(\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7)c_3)\ell_2 c_1 & 0 \\ -(dc_1 - ls_1)(\ell_1 + \ell_2 s_2 - d) & -(dc_1 + ls_1)(\ell_1 + \ell_2 s_2 - d) & (k - \ell_2 c_2)d \\ (\ell_1 + \ell_2 s_2 - d)(-d + \ell_1) & (dc_1 + ls_1)(-d + \ell_1) & -dk \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

## A.5 Αντίστροφο Γεωμετρικό Κινηματικό Μοντέλο

Σε αυτό το ερώτημα έχουμε να υπολογίσουμε το αντίστροφο γεωμετρικό κινηματικό μοντέλο του ρομποτικού χειριστή. Θα βασιστούμε στο ευθύ κινηματικό μοντέλο που περιγράφεται από την σχέση (1.10). Τώρα θα υπολογίσουμε το αντίστροφο κινηματικό μοντέλο για δεδομένο σημείο  $\mathbf{p}_E = [p_x^*, p_y^*, p_z^*]^T$ . Έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
 p_x^* &= (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23})c_1 - (\ell_3 + \ell_6)s_1 \\
 p_y^* &= (\ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7)c_{23})s_1 + (\ell_3 + \ell_6)c_1 \\
 p_z^* &= \ell_0 + \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7)s_{23}
 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Επίσης, έχουμε και τις σχέσεις που ορίσαμε στον υπολογισμό της ορίζουσας του προηγούμενου ερωτήματος

$$l = \ell_3 + \ell_6$$

$$d(q_2, q_3) = \ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23} \quad (1.29)$$

Θα αντικαταστήσουμε τις σχέσεις της (1.29) στις σχέσεις (1.28α) και (1.28b). Οπότε έχουμε ότι:

$$\begin{cases} p_x^* = dc_1 - ls_1 \\ p_y^* = ds_1 + lc_1 \end{cases}$$

Θα υψώσουμε στο τετράγωνο τις δύο αυτές σχέσεις και θα τις αθροίσουμε:

$$\begin{aligned} p_x^{*2} + p_y^{*2} &= (dc_1 - ls_1)^2 + (ds_1 + lc_1)^2 \\ \Rightarrow p_x^{*2} + p_y^{*2} &= d^2 c_1^2 - 2dc_1 ls_1 + l^2 s_1^2 + d^2 s_1^2 + 2ds_1 lc_1 + c_1^2 l^2 \\ \Rightarrow p_x^{*2} + p_y^{*2} &= d^2 (c_1^2 + s_1^2) + l^2 (c_1^2 + s_1^2) \\ \Rightarrow p_x^{*2} + p_y^{*2} &= d^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = p_x^{*2} + p_y^{*2} - l^2 \\ \Rightarrow d &= \pm \sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - l^2} \Rightarrow d = \pm \sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (1.28α) και (1.28b) και (1.30) για να βρούμε τις εξισώσεις που περιγράφουν την μεταβλητή της άρθρωσης  $q_1$ .

$$\begin{cases} p_x^* = dc_1 - ls_1 \\ p_y^* = ds_1 + lc_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} d & -l \\ l & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Περιγράψαμε σε μητρική μορφή τις δύο σχέσεις. Θα αντιστρέψουμε τον 2x2 πίνακα ώστε να βρούμε μία σχέση για το  $\sin$  και το  $\cos$ . Οπότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{d^2 + l^2} \begin{bmatrix} d & l \\ -l & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{dp_x^* + lp_y^*}{d^2 + l^2} \\ s_1 = \frac{dp_y^* - lp_x^*}{d^2 + l^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Με βάση τις σχέσεις αυτές, θα υπολογίσουμε την  $q_1$ . Οπότε ισχύει

$$q_1 = \text{atan2}(s_1, c_1) = \text{atan2}\left(\frac{dp_y^* - lp_x^*}{d^2 + l^2}, \frac{dp_x^* + lp_y^*}{d^2 + l^2}\right) = \text{atan2}(dp_y^* - lp_x^*, dp_x^* + lp_y^*) \quad (1.32)$$

Γνωρίζουμε ότι το  $d$  έχει δύο λύσεις. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως υπάρχουν δύο λύσεις για την στροφική άρθρωση  $q_1$ , οι οποίες είναι:

$$\begin{cases} q_{1+} = \text{atan2}(\sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} p_y^* - (\ell_3 + \ell_6) p_x^*, \sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} p_y^* + (\ell_3 + \ell_6) p_x^*) \\ q_{1-} = \text{atan2}(-\sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} p_y^* - (\ell_3 + \ell_6) p_x^*, -\sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} p_y^* + (\ell_3 + \ell_6) p_x^*) \end{cases} \quad (1.33)$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε σχέσεις για τις υπόλοιπες δύο αρθρώσεις. Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (1.28c) και (1.29b) για να βρούμε μια σχέση για την άρθρωση  $q_3$ . Άρα ισχύει ότι:

$$\begin{cases} p_z^* = \ell_0 + \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23} \\ d = \ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_z^* - \ell_0 = \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23} \\ d - \ell_1 = \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23} \end{cases}$$

Θα υψώσουμε τις σχέσεις αυτές στο τετράγωνο και θα τις αθροίσουμε:

$$\begin{aligned} & (p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 \\ &= (\ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23})^2 + (\ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23})^2 \\ \Rightarrow & (p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 \\ &= \ell_2^2 + \ell_4^2 + (\ell_5 + \ell_7)^2 + 2\ell_2 \ell_4 c_2 c_{23} - 2\ell_2 (\ell_5 + \ell_7) c_2 c_{23} + 2\ell_2 \ell_4 s_2 s_{23} \\ &\quad - 2\ell_4 (\ell_5 + \ell_7) c_{23} s_{23} + 2\ell_2 (\ell_5 + \ell_7) s_2 c_{23} + 2\ell_4 (\ell_5 + \ell_7) c_{23} s_{23} \\ \Rightarrow & (p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 \\ &= \ell_2^2 + \ell_4^2 + (\ell_5 + \ell_7)^2 + 2\ell_2 \ell_4 (c_2 c_{23} + s_2 s_{23}) \\ &\quad + 2\ell_2 (\ell_5 + \ell_7) (s_2 c_{23} - c_2 s_{23}) \\ \Rightarrow & (p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 = \ell_2^2 + \ell_4^2 + (\ell_5 + \ell_7)^2 + 2\ell_2 \ell_4 c_3 - 2\ell_2 (\ell_5 + \ell_7) s_3 \\ \Rightarrow & (p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 - \ell_2^2 - \ell_4^2 - (\ell_5 + \ell_7)^2 = 2\ell_2 (\ell_4 c_3 - (\ell_5 + \ell_7) s_3) \\ \Rightarrow & \ell_4 c_3 - (\ell_5 + \ell_7) s_3 = \frac{(p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 - \ell_2^2 - \ell_4^2 - (\ell_5 + \ell_7)^2}{2\ell_2} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Έστω, ότι ορίζουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \ell_4 = \lambda c_\varphi \\ \lambda_2 &= \ell_5 + \ell_7 = \lambda s_\varphi \end{aligned} \quad (1.35)$$

Με το  $\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \sqrt{\ell_4^2 + (\ell_5 + \ell_7)^2}$  και ορίζουμε μία γωνία  $\varphi$ , τέτοια ώστε να ισχύει το εξής:

$$\varphi = \text{atan2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda}, \frac{\lambda_1}{\lambda}\right) = \text{atan2}(\lambda_2, \lambda_1) = \text{atan2}(\ell_5 + \ell_7, \ell_4) \quad (1.36)$$



Οπότε, θα έχουμε

$$\lambda \cos(q_3 + \varphi) = m_0 \Rightarrow \cos(q_3 + \varphi) = \frac{m_0}{\lambda} \quad (1.37)$$

και

$$\sin(q_3 + \varphi) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{\lambda}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{\lambda^2 - m_0^2}{\lambda^2}} \quad (1.38)$$

$$\text{όπου το } m_0 = \frac{(p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 - \ell_2^2 - \ell_4^2 - (\ell_5 + \ell_7)^2}{2\ell_2}$$

Με βάσει τις σχέσεις αυτές, μπορούμε να βρούμε τις λύσεις για την άρθρωση  $q_3$ , οι οποίες είναι:

$$q_3 = \text{atan2}(\sin(q_3 + \varphi), \lambda \cos(q_3 + \varphi)) = \text{atan2}(\pm \sqrt{\lambda^2 - m_0^2}, m_0) - \text{atan2}(\ell_5 + \ell_7, \ell_4) \quad (1.39)$$

Παρατηρούμε πως προκύπτουν δύο λύσεις για αυτή την άρθρωση, οι οποίες είναι:

$$\begin{cases} q_{3+} = \text{atan2}\left(\sqrt{\ell_4^2 + (\ell_5 + \ell_7)^2 - \frac{(p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 - \ell_2^2 - \ell_4^2 - (\ell_5 + \ell_7)^2}{2\ell_2}}, \frac{(p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 - \ell_2^2 - \ell_4^2 - (\ell_5 + \ell_7)^2}{2\ell_2}\right) - \text{atan2}(\ell_5 + \ell_7, \ell_4) \\ q_{3-} = \text{atan2}\left(-\sqrt{\ell_4^2 + (\ell_5 + \ell_7)^2 - \frac{(p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 - \ell_2^2 - \ell_4^2 - (\ell_5 + \ell_7)^2}{2\ell_2}}, \frac{(p_z^* - \ell_0)^2 + (d - \ell_1)^2 - \ell_2^2 - \ell_4^2 - (\ell_5 + \ell_7)^2}{2\ell_2}\right) - \text{atan2}(\ell_5 + \ell_7, \ell_4) \end{cases} \quad (1.40)$$

Τέλος, θα υπολογίσουμε για την δεύτερη περιστροφική άρθρωση, την αλγεβρική της σχέση που την συνδέει με το τελικό στοιχείο δράσης. Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (1.28c) και (1.29b):

$$\begin{aligned} \begin{cases} p_z^* = \ell_0 + \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23} \\ d = \ell_1 + \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} p_z^* - \ell_0 = \ell_2 c_2 + \ell_4 c_{23} - (\ell_5 + \ell_7) s_{23} \\ d - \ell_1 = \ell_2 s_2 + \ell_4 s_{23} + (\ell_5 + \ell_7) c_{23} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} p_z^* - \ell_0 = \ell_2 c_2 + \ell_4 (c_2 c_3 - s_2 s_3) - (\ell_5 + \ell_7) (s_2 c_3 + c_2 s_3) \\ d - \ell_1 = \ell_2 s_2 + \ell_4 (s_2 c_3 + c_2 s_3) + (\ell_5 + \ell_7) (c_2 c_3 - s_2 s_3) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} p_z - \ell_0 = \ell_2 c_2 + \ell_4 c_2 c_3 - \ell_4 s_2 s_3 - (\ell_5 + \ell_7) s_2 c_3 - (\ell_5 + \ell_7) c_2 s_3 \\ d - \ell_1 = \ell_2 s_2 + \ell_4 s_2 c_3 + \ell_4 c_2 s_3 + (\ell_5 + \ell_7) c_2 c_3 - (\ell_5 + \ell_7) s_2 s_3 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} p_z^* - \ell_0 = (\ell_2 + \ell_4 c_3 - (\ell_5 + \ell_7) s_3) c_2 - (\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7) c_3) s_2 \\ d - \ell_1 = (\ell_2 + \ell_4 c_3 - (\ell_5 + \ell_7) s_3) s_2 - (\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7) c_3) c_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Καθώς έχουμε φτάσει σε αυτή την μορφή, το επόμενο βήμα είναι θέσουμε κάποιες βοηθητικές μεταβλητές, ώστε να το επιλύσουμε το πρόβλημα. Υποθέτουμε πως

$$\begin{aligned} d_1 &= \ell_2 + \ell_4 c_3 - (\ell_5 + \ell_7) s_3 = d_3 \cos(a) \\ d_2 &= \ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7) c_3 = d_3 \sin(a) \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\text{Επίσης έχουμε } d_3 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \sqrt{(\ell_2 + \ell_4 c_3 - (\ell_5 + \ell_7) s_3)^2 + (\ell_4 s_3 + (\ell_5 + \ell_7) c_3)^2}$$

Έτσι, θα ορίσουμε την γωνία

$$a = \text{atan2}\left(\frac{d_2}{d_3}, \frac{d_1}{d_3}\right) = \text{atan2}(d_2, d_1) \quad (1.43)$$

Επομένως, η σχέση (1.41) θα γίνει ως εξής:

$$\begin{cases} p_z^* - \ell_0 = d_3(c_2 c_a - s_2 s_a) = d_3 \cos(q_2 + a) \\ d - \ell_1 = d_3(s_2 c_a + c_2 s_a) = d_3 \sin(q_2 + a) \end{cases} \quad (1.44)$$

Έτσι, θα βρούμε μία αλγεβρική σχέση και για την άρθρωση  $q_2$ . Επομένως:

$$q_2 = \text{atan2}(d - \ell_1, p_z^* - \ell_0) - \text{atan2}(d_2, d_1) \quad (1.45)$$

Από αυτή την σχέση μπορούμε να διαπιστώσουμε αρχικά πως υπάρχουν δύο λύσεις λόγω του όρου  $d$ . Επίσης, διαπιστώνουμε πως θα έχει ακόμα δύο λύσεις, διότι τα  $d_1, d_2$  εξαρτώνται από την στροφική άρθρωση  $q_3$  που έχει δύο λύσεις. Συνεπώς, συνολικά η δεύτερη άρθρωση θα έχει τέσσερις αλγεβρικές λύσεις, οι οποίες είναι:

$$\begin{cases} q_{2++} = \text{atan2}\left(\sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} - \ell_1, p_z^* - \ell_0\right) - \text{atan2}(\ell_4 s_{q_{3+}} + (\ell_5 + \ell_7) c_{q_{3+}}, \ell_2 + \ell_4 c_{q_{3+}} - (\ell_5 + \ell_7) s_{q_{3+}}) \\ q_{2+-} = \text{atan2}\left(\sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} - \ell_1, p_z^* - \ell_0\right) - \text{atan2}(\ell_4 s_{q_{3-}} + (\ell_5 + \ell_7) c_{q_{3-}}, \ell_2 + \ell_4 c_{q_{3-}} - (\ell_5 + \ell_7) s_{q_{3-}}) \\ q_{2-+} = \text{atan2}\left(-\sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} - \ell_1, p_z^* - \ell_0\right) - \text{atan2}(\ell_4 s_{q_{3+}} + (\ell_5 + \ell_7) c_{q_{3+}}, \ell_2 + \ell_4 c_{q_{3+}} - (\ell_5 + \ell_7) s_{q_{3+}}) \\ q_{2--} = \text{atan2}\left(-\sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - (\ell_3 + \ell_6)^2} - \ell_1, p_z^* - \ell_0\right) - \text{atan2}(\ell_4 s_{q_{3-}} + (\ell_5 + \ell_7) c_{q_{3-}}, \ell_2 + \ell_4 c_{q_{3-}} - (\ell_5 + \ell_7) s_{q_{3-}}) \end{cases} \quad (1.46)$$

## Μέρος Β – Κινηματική Προσομοίωση Ρομποτικού Χειριστή

### Β.1 Σχεδίαση Τροχιάς του Χώρου Εργασίας

### Β.2 Προσομοίωση Ρομποτικού Χειριστή

## Βιβλιογραφία

- [1] J. Craig, *Εισαγωγή στη Ρομποτική: Μηχανική και Αυτόματος Έλεγχος*, 4<sup>η</sup> Έκδοση, Επιστημονική Επιμέλεια: Αριστείδης Βλ. Γωγούσης, Εκδόσεις Τζιόλα, 2020.
- [2] Ζ. Δουλγέρη, *Ρομποτική: Κινηματική, Δυναμική και Έλεγχος αρθρωτών βραχιόνων*, Εκδόσεις Κριτική, 2007.
- [3] Δ. Μ. Εμίρης, Δ. Ε. Κουλουριώτης, *Ρομποτική*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2021.
- [4] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo, *Robotics: Modeling, Planning and Control*, Springer, 2009.
- [5] P. Corke, *Robotics, Vision and Control: Fundamental Algorithms in MATLAB*, Second Edition, Springer, 2011.