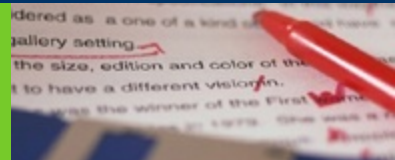




层次分析法

主讲人：泰山教育 小石老师

层次分析法简介

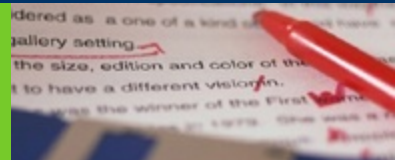


层次分析法（AHP）是美国运筹学家匹茨堡大学教授萨蒂 (T. L. Santy) 于上世纪70年代初，为美国国防部研究“根据各个工业部门对国家福利的贡献大小而进行电力分配”课题时，应用网络系统理论和多目标综合评价方法，提出的一种层次权重决策分析方法。

这种方法的特点是在对复杂的决策问题的本质、影响因素及其内在关系等进行深入分析的基础上，利用较少的定量信息使决策的思维过程数学化，从而为多目标、多准则或无结构特性的复杂决策问题提供简便的决策方法。

是对难以完全定量的复杂系统作出决策的模型和方法。

引例



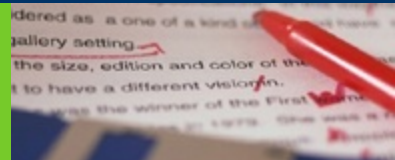
决策是指在面临多种方案时需要依据一定的标准选择某一种方案。日常生活中有许多决策问题。举例

- ❖ 1. 在海尔、新飞、容声和雪花四个牌号的电冰箱中选购一种。要考虑品牌的信誉、冰箱的功能、价格和耗电量。
- ❖ 2. 在苏杭、北戴河、桂林三处选择一个旅游点。要考虑景点的景色、居住的环境、饮食的特色、交通便利和旅游的费用。

层次分析法原理

层次分析法根据问题的性质和要达到的总目标，将问题分解为不同的组成因素，并按照因素间的相互关联影响以及隶属关系将因素按不同层次聚集组合，形成一个多层次的 analysis 结构模型，从而最终使问题归结为最低层（供决策的方案、措施等）相对于最高层（总目标）的**相对重要权值**的确定或相对优劣次序的排定。

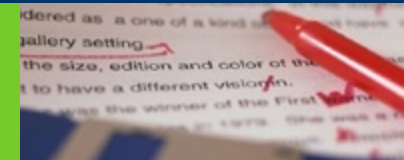
层次分析法步骤



运用层次分析法构造系统模型时，大体可以分为以下四个步骤：

1. 建立层次结构模型
2. 构造判断(成对比较)矩阵
3. 层次单排序及其一致性检验
4. 层次总排序及其一致性检验

如何构建层次结构模型



- ❖ 将决策的目标、考虑的因素（决策准则）和决策对象按它们之间的相互关系分为最高层、中间层和最低层，绘出层次结构图。
- ❖ **最高层**：决策的目的、要解决的问题。
- ❖ **最低层**：决策时的备选方案。
- ❖ **中间层**：考虑的因素、决策的准则。

构建层次结构模型举例

选择旅游地

如何在3个目的地中按照景色、费用、居住条件等因素选择。

目标层

Z(选择旅游地)

准则层

A₁
景色

A₂
费用

A₃
居住

A₄
饮食

A₅
旅途

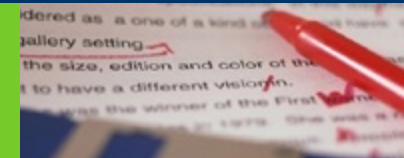
方案层

B₁
苏杭

B₂
北戴河

B₃
桂林

成对比较矩阵

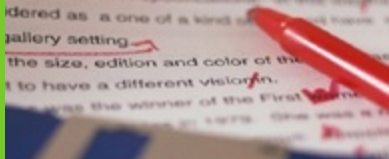


在确定各层次各因素之间的权重时，如果只是定性的结果，则常常不容易被别人接受，因而Santy等人提出：一致矩阵法，即：

1. 不把所有因素放在一起比较，而是两两相互比较
2. 对此时采用相对尺度，以尽可能减少性质不同的诸因素相互比较的困难，以提高准确度。

成对比较矩阵是表示本层所有因素针对上一层某一个因素的相对重要性的比较。成对比较矩阵矩阵的元素 a_{ij} 用Santy的1—9标度方法给出。

成对比较阵标度表



标度	含义
1	表示两个因素相比，具有同样重要性
3	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素稍微重要
5	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素明显重要
7	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素强烈重要
9	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素极端重要
2, 4, 6, 8	上述两相邻判断的中值
倒数	因素 <i>i</i> 与 <i>j</i> 比较的判断 a_{ij} ，则因素 <i>j</i> 与 <i>i</i> 比较的判断 $a_{ji}=1/a_{ij}$

成对比较矩阵展示

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	1	1/2	4	3	3
C_2	2	1	7	5	5
C_3	1/4	1/7	1	1/2	1/3
C_4	1/3	1/5	2	1	1
C_5	1/3	1/5	3	1	1

一致性检验

成对比较的不一致情况

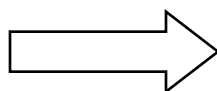
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & L \\ 2 & 1 & 7 & L \\ L & L & & \end{bmatrix}$$

不一致

$$a_{21} = 2 (C_2 : C_1)$$

一致比较

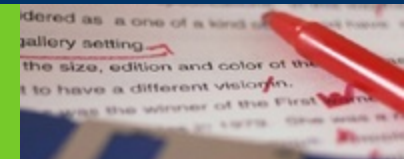
$$a_{13} = 4 (C_1 : C_3)$$



$$a_{23} = 8 (C_2 : C_3)$$

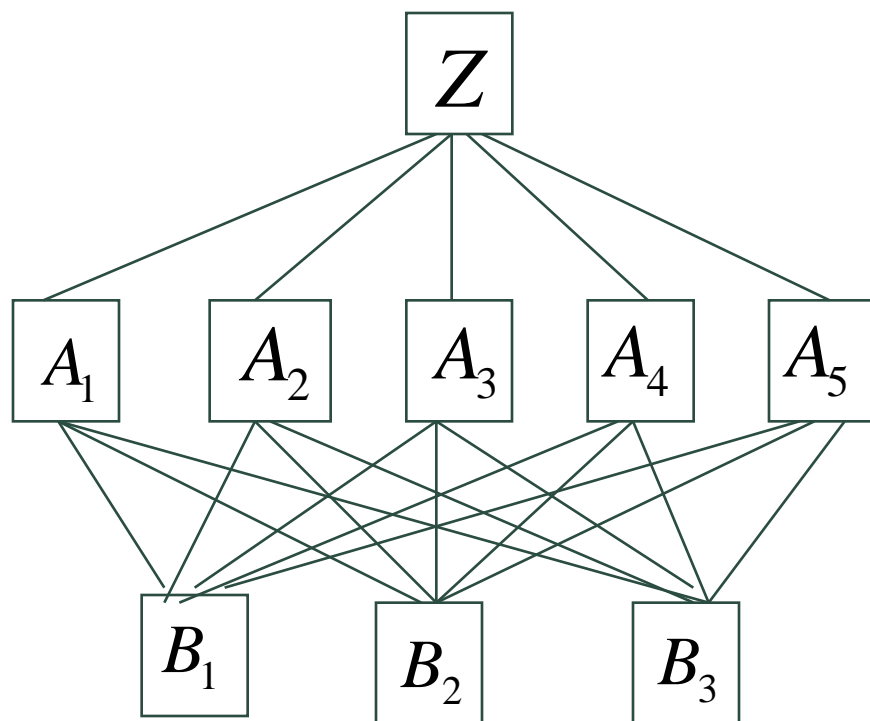
允许不一致，但要确定不一致的允许范围

层次分析法举例



旅游问题

(1) 建模



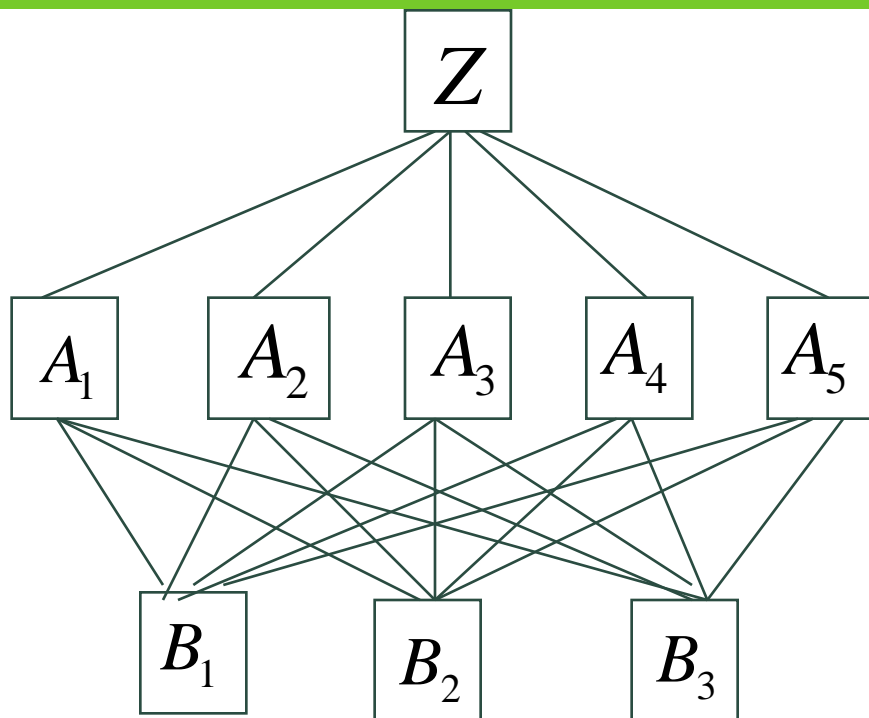
A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

分别分别表示景色、费用、
居住、饮食、旅途。

B_1, B_2, B_3

分别表示苏杭、北戴河、桂林。

层次分析法举例



(2) 构造成对比较矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

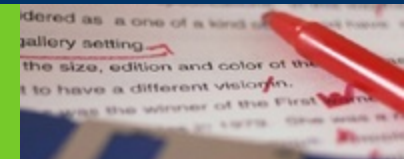
$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} \\ 3 & 1 & \frac{1}{3} \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

层次分析法举例



$A_1A_2A_3A_4A_5$ 对 Z 的权重为

[0.2636,0.4758,0.0538,0.0981,0.1087]

$B_1B_2B_3$ 对 A_1 的权重为

[0.5954,0.2764,0.1283]

$B_1B_2B_3$ 对 A_4 的权重为

[0.6337,0.1919,0.1744]

$B_1B_2B_3$ 对 A_2 的权重为

[0.0819,0.2363,0.6817]

$B_1B_2B_3$ 对 A_5 的权重为

[0.1667,0.1667,0.6667]

$B_1B_2B_3$ 对 A_3 的权重为

[0.4286,0.4286,0.1429]

层次分析法举例

计算层次总排序权值和一致性检验

B_1 对总目标的权值为：

$$0.595 \times 0.263 + 0.082 \times 0.475 + 0.429 \times 0.055 \\ + 0.633 \times 0.099 + 0.166 \times 0.110 = 0.3$$

同理得， B_2, B_3 对总目标的权值分别为：0.245， 0.455，

决策层对总目标的权向量为： $\{0.3, 0.245, 0.455\}$

层次分析法举例

$\{0.3, 0.246, 0.456\}$ 可作为最后的决策依据。

即各方案的权重排序为 $B_3 > B_1 > B_2$

又 B_1, B_2, B_3 分别表示苏杭、北戴河、桂林，

故最后的决策应为去桂林。



Thank You !