优化模型：

$$\mathcal{Q}_{2-1}: \quad \max_{\rho_{n,m},p_n} \sum_{m=1}^{M} \omega_m R_m - \alpha_1 \sum_{n=1}^{N} p_n - \delta_1$$

$$\mathcal{C}_2: \rho_{n,m} \in \{0,1\},\ \forall n,m;\ \sum_{m=1}^{M} \rho_{n,m} \le 1,\ \forall n$$

$$\mathcal{C}_3: p_n \ge 0,\ \forall n;\ \sum_{n=1}^{N} p_n \le P_{\max}$$

$$\mathcal{C}_4: R_m \ge R_{m,\min},\ \forall m$$

其中 $\omega_m = \sum_{k\in\mathcal{K}_m} (\varepsilon_{k,m} - \alpha_2 \xi)$ ， $\delta_1 = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k\in\mathcal{K}_m} \beta_m (1-\varepsilon_{k,m})$ 是固定常数。

对偶函数为：

$$\begin{aligned} L &= \sum_{m=1}^{M} \omega_m R_m - \alpha_1 \sum_{n=1}^{N} p_n - \lambda(\sum_{n=1}^{N} p_n - P_{\max}) + \sum_{m=1}^{M} \mu_m (R_m - R_{m,\min}) \\ &= \sum_{m=1}^{M} \omega_m R_m - \alpha_1 \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \rho_{n,m} p_{n,m} - \lambda(\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \rho_{n,m} p_{n,m} - P_{\max}) + \sum_{m=1}^{M} \mu_m (R_m - R_{m,\min}) \\ &= \sum_{m=1}^{M} \left((\omega_m + \mu_m) R_m - (\alpha_1 + \lambda) \sum_{n=1}^{N} \rho_{n,m} p_{n,m} \right) + \lambda P_{\max} - \sum_{m=1}^{M} \mu_m R_{m,\min} \end{aligned}$$

代入：

$$R_m = \Delta f \sum_{n=1}^{N} \rho_{n,m} \log_2 \left(1 + p_n \min_{k\in K_m} \gamma_{n,k} \right)$$

问题：此处每个子载波的功率用 p_n 表示，代入 L 之后并且求解的时候变为用 $p_{n,m}$ 表示，前者含义是第 n 个子载波在基站处被分配的功率，后者意思是在为第 m 个多播组传输业务的时候第 n 个子载波所需要的功率？

得到：

$$L = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} D_n^m + \lambda P_{\max} - \sum_{m=1}^{M} \mu_m R_{m,\min}$$

其中：

$$D_n^m = \rho_{n,m} \left(\left(w_m + \mu_m \right) \Delta f \log_2 \left(1 + p_{n,m} \min_{k\in K_m} \gamma_{n,k} \right) - \left(\alpha_1 + \lambda \right) p_{n,m} \right)$$

注： $\sum_{n=1}^{N}$ 应该放在最外，因为公式变换的目标是把每个子载波独立出来研究功率分配。

OP4 转化为：

$$\min_{\lambda,\mu_m} \max_{\rho_{n,m},p_n} L$$

$$C_2: \rho_{n,m} \in \{0,1\}, \forall n,m; \sum_{m=1}^{M} \rho_{n,m} \le 1, \forall n$$

$$\lambda \ge 0; \mu_m \ge 0, \forall m;$$

假设第 n 个子载波已经分配给了多播组 m，即 $\rho_{n,m}=1$ 且对于 $\forall i \in M, i \neq m$ 有 $\rho_{n,i} \neq 1$，根据 KKT 条件，最优功率分配应该满足：

$$\frac{\partial L\left(p_n,\lambda,\mu\right)}{\partial p_n}=\frac{\partial\left(\left(w_m+\mu_m\right)\Delta f\log_2\left(1+p_{n,m}\gamma_{n,m}^{\min}\right)-\left(\alpha_1+\lambda\right)p_{n,m}\right)}{\partial p_n}$$

$$=\frac{(\mu_m+w_m)\Delta f}{(1+p_{n,m}\gamma_{n,m}^{\min})\ln 2}-(\alpha_1+\lambda)=0$$

得到：

$$p_{n,m}=\left[\frac{(\mu_m+w_m)\Delta f}{\left(\alpha_1+\lambda\right)\gamma_{n,m}^{\min}\ln 2}-\frac{1}{\gamma_{n,m}^{\min}}\right]^+$$

对第 n 个子载波，计算该子载波被分配到哪一个多播组的时候，所得到的效益最大（D_n^m 取到最大），并把该子载波分配给这个多播组：

$$m_n=\arg\max_{1\le m\le M} D_n^m$$

$$\rho_n^m=\begin{cases}1, & m=m_n\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$p_n=p_n^m$$

最后根据子梯度法更新拉格朗日乘子：？ 顺序是否正确？

$$\lambda(l+1)=\left[\lambda(l)+c_1\left(\sum_{n=1}^{N}p_n-P_{\max}\right)\right]^+$$

$$\mu(l+1)=\left[\mu(l)-c_2\left(R_m-R_{m,\min}\right)\right]^+$$

伪代码：

Algorithm 1 : Joint SE Assignment and Power Allocation Algorithm

Initialization:

Set $l = 0$, $v_m(0), \lambda_t(0), \mu_t(0)$, the maximal iteration number L, the tolerable error ϵ, and the initial variation $d > \epsilon$.

Iteration:

while $d > \epsilon$ and $l \leq L$ **do**
    $v_m = v_m(l), \lambda_t = \lambda_t(l), \mu_t = \mu_t(l)$.
    for $n = 1 : N$ **do**
        for $m = 1 : M$ **do**
            Calculate $p_{n,t}^m$ and $\mathcal{D}_{n,t}^m$ according to (11) and (9).
        end for
        Find $m_{n,t}$ according to (12).
        Set SE assignment $\rho_{n,t}^m$ and power allocation $p_{n,t}$ for SE (n,t) according to (13) and (14).
    end for
    Calculate $v_m(l+1), \lambda_t(l+1), \mu_t(l+1)$ according to (15), (16) and (17).
    Set $l = l + 1$, and calculate the variation $d = \sum_{m=1}^{M} |v_m(l) - v_m(l-1)| + \sum_{t=1}^{T} (|\lambda_t(l) - \lambda_t(l-1)| + |\mu_t(l) - \mu_t(l-1)|)$.
end while

Output:

SE assignment $\rho_{n,t}^m$ and power allocation $p_{n,t}$.