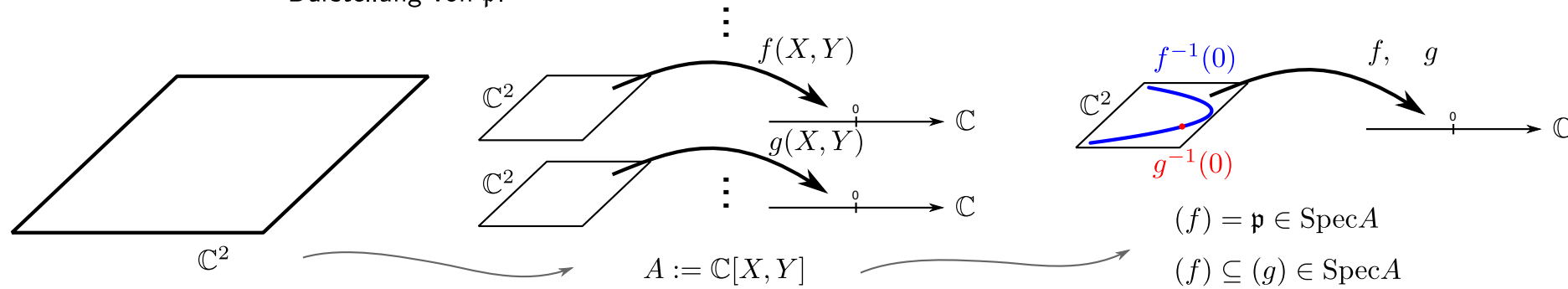


Das Beispiel $\text{Spec}\mathbb{C}[X, Y]$

Stellt man ein Primideal \mathfrak{p} als die gemeinsamen Nullstellen aller in \mathfrak{p} enthaltenen Polynome dar, so ist die Darstellung eines Primideals $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$ eine Teilmenge der Darstellung von \mathfrak{p} .



Zu $f \in A$, $\mathfrak{p} \in \text{Spec} A$ nennt man $[f] \in A/\mathfrak{p}$ Wert von f bei \mathfrak{p} . Denn z.B. für $A := \mathbb{C}[X, Y]$ und $\mathfrak{p} = (X - a, Y - b)$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[X, Y] &\rightarrow \mathbb{C}[X, Y]/\mathfrak{p} \cong \mathbb{C} \\ f(X, Y) &\mapsto [f(X, Y)] \mapsto f(a, b) \end{aligned}$$

Gilt $g \in \mathfrak{p}$, so sagt man g verschwindet an \mathfrak{p} , denn es ist:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A/\mathfrak{p} \\ g &\mapsto [g] = [0] \end{aligned}$$

Wie zeichnet man Spec?

Zeichnet man $\text{Spec} A$, so zeichnet man jedes Primideal \mathfrak{p} als seinen topologischen Abschluss $\bar{\mathfrak{p}}$, also dessen Verschwindungsmenge $V(\mathfrak{p})$:

$$\bar{\mathfrak{p}} = \underbrace{\text{kleinste}}_{\text{größtes } \mathfrak{q} \in \text{Spec} A} \underbrace{\text{abgeschlossene Menge, die } \mathfrak{p} \text{ enthält}}_{V(\mathfrak{q})} \underbrace{\text{mit } \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}}_{\text{mit } \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}} = V(\mathfrak{p})$$

\mathfrak{p} nennt man dann *generischen Punkt* zu $\bar{\mathfrak{p}}$.

Insbesondere enthält die Darstellung eines Primideals \mathfrak{p} damit alle Primideale $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$ und für maximale Ideale \mathfrak{m} gilt:

$$\bar{\mathfrak{m}} = V(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec} A \mid \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}\} \stackrel{\text{m. max.}}{=} \{\mathfrak{m}\}$$

Also werden genau die maximalen Ideale als (geometrische) Punkte gezeichnet.

Die algebraische Dimension eines Primideals \mathfrak{p} (die Länge der längsten darin enthaltenen aufsteigenden Kette von Primidealen) passt so zur geometrischen Dimension der gezeichneten Representation.

Bsp.: $\mathfrak{p} := (X^2 - Y) \in \text{Spec}\mathbb{C}[X, Y]$ (nicht maximal - denn $\mathbb{C}[X, Y]/\mathfrak{p} \cong \mathbb{C}[X]$ ist kein Körper)

Um \mathfrak{p} zu zeichnen muss man sich überlegen, in welchen maximalen Idealen es enthalten ist (also welche geometrischen Punkte das Bild von \mathfrak{p} enthalten soll).

Man sieht $(X - a, Y - b) \supseteq (X^2 - Y) = \mathfrak{p} \iff a^2 - b = 0$. Zeichnet man nun das (maximale) Ideal $(X - a, Y - b)$ als Punkt an den Koordinaten (a, b) , so erscheint \mathfrak{p} gerade als Parabel:

