Wie zeichnet man Spec?

Zeichnet man $\mathrm{Spec} A$, so zeichnet man jedes Primideal $\mathfrak{p}$ als seinen topologischen Abschluss $\overline{\mathfrak{p}}$, also dessen Verschwindungsmenge $V(\mathfrak{p})$:

$$\overline{\mathfrak{p}} = \underbrace{\text{kleinste}}_{\text{größtes } \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec} A} \underbrace{\text{abgeschlossene Menge}}_{V(\mathfrak{q})} \underbrace{\text{, die } \mathfrak{p} \text{ enthält}}_{\text{mit } \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}} = V(\mathfrak{p})$$

$\mathfrak{p}$ nennt man dann *generischen Punkt zu* $\overline{\mathfrak{p}}$.

Insbesondere enthält die Darstellung eines Primideals $\mathfrak{p}$ damit alle Primideale $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$ und für maximale Ideale $\mathfrak{m}$ gilt:

$$\overline{\mathfrak{m}} = V(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A \mid \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}\} \overset{\mathfrak{m} \text{ max.}}{=} \{\mathfrak{m}\}$$

Also werden genau die maximalen Ideale als (geometrische) Punkte gezeichnet.

Die algebraische Dimension eines Primideals $\mathfrak{p}$ (die Länge der längsten darin enthaltenen aufsteigenden Kette von Primidealen) passt so zur geometrischen Dimension der gezeichneten Representation.

Bsp.: $\mathfrak{p} := (X^2 - Y) \in \mathrm{Spec}\mathbb{C}[X,Y]$ (nicht maximal - denn ${}^{\mathbb{C}[X,Y]}/_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{C}[X]$ ist kein Körper)

Um $\mathfrak{p}$ zu zeichnen muss man sich überlegen, in welchen maximalen Idealen es enthalten ist (also welche geometrischen Punkte das Bild von $\mathfrak{p}$ enthalten soll).

Man sieht $(X-a, Y-b) \supseteq (X^2 - Y) = \mathfrak{p} \iff a^2 - b = 0$. Zeichnet man nun das (maximale) Ideal $(X-a, Y-b)$ als Punkt an den Koordinaten (a,b), so erscheint $\mathfrak{p}$ gerade als Parabel: