学院____________ 专业(大类)____________ ____班 年级________ 学号

2023～2024 学年第一学期期中考试试卷

《微积分 I》（共 3 页,附 2 页演算纸）

（考试时间：2023 年 11 月 3 日）

题号	一	二	三	四	五	六	成绩	核分人签字
得分								

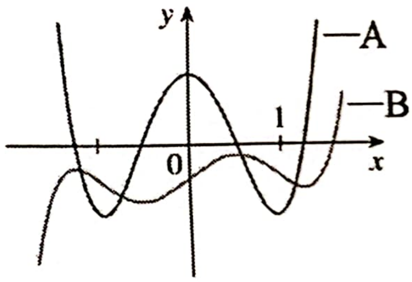
一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 函数 $y=\mathrm{e}^{\sin 2x}$ 在点 $x=0$ 处的微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$____________.

2. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}\sin\dfrac{1}{n}=$____________.

3. 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x}-1}=-1$，则 $f'(0)=$____________.

4. 右图画出了函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的图像，其中 $f(x)$ 的图像是 ____________（请填写 A 或 B）.



5. 设 $f(x)$ 二阶可导，则极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=$____________.

二、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 以下四个数列极限中，极限值存在的是（　　　　）.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{3+(-1)^n}$　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n^2)$　(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^5}{(n-1)^4}$

2. 设函数 $f(x)=x^2(x^2-3x+2)$，则其导函数 $f'(x)$ 的零点个数为（　　　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

3. 下列结论中，正确的是（　　　　）.

(A) $\dfrac{1}{x}$在$[-1,1]$上连续

(B) $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\le 0,\\ e^{-2x}, & x>0\end{cases}$在$[-1,1]$上一致连续

(C) $x\tan x$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$上有界

(D) $\dfrac{\arctan x}{x}$在$(0,+\infty)$上可取得最小值

4. 设$\delta>0$, 函数$f(x)$在$(-\delta,\delta)$内有定义. 如果当$x\in(-\delta,\delta)$时，恒有$|f(x)|\le x^2$，

则$f(x)$在点$x=0$处（　　　　）.

(A) 间断

(B) 可导，且$f'(0)=0$

(C) 连续但不可导

(D) 可导，且$f'(0)\ne 0$

5. 设函数$f(x)$具有二阶连续导数，且$f(x)>0$, $f'(0)=0$，则函数$y=f(x)\ln f(x)$

在点$x=0$处取得极小值的一个充分条件是（　　　　）.

(A) $f(0)>1, f''(0)>0$

(B) $f(0)>1, f''(0)<0$

(C) $f(0)<1, f''(0)>0$

(D) $f(0)<1, f''(0)<0$

三、计算题（本题 5 分）

设曲线$C: y=y(x)$满足方程$y-2x+1=(x-y)\ln(x-y)$，求曲线C在点$(0,-1)$处的切线方程.

学院____________专业(大类)______________ ____班 年级________学号_

四、计算题（共35分，每小题7分）

1. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(\sin t), \\ y=\cos t+t\sin t, \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

2. 设 $y=f(\sqrt{x})+x^x$，其中函数 $f(x)$ 二阶可导，求 y''.

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-2x+x\cos x}{x^3}$.

4.

4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

5. 已知当$x\neq 0$时，有 $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$. 设函数 $y=xf(x)$，求 $y^{(n+1)}$.

(请将结果进行化简整理).

学院________________专业(大类)____________________ ____班 年级________

五、解答题（共 24 分，每小题 8 分）

1. 求曲线 $y = e^{\frac{1}{x}} + 2x$ 的拐点坐标和渐近线方程.

2. 求 c 的取值范围，使得函数 $f(x) = cx + \dfrac{1}{x^2+3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

3. 当$x \to 0$时，$e^{x^2}-1-\ln(1+x^2)$与ax^n为等价无穷小，确定常数a与n的值.

六、证明题（本题 6 分）

设函数$f(x)$在$[-1,2]$上二阶可导，且$f(-1)=\dfrac{1}{3}$，$f(0)=\dfrac{1}{6}$，$f(2)=\dfrac{17}{6}$.

证明: (1) 方程$f'(x)-x=\dfrac{1}{3}$在$(-1,2)$内存在两个实根;

(2) 存在$\xi \in (-1,2)$，使得$f''(\xi)=1$.