第 2 章 形式语言基础

王 鑫
wangx AT tju.edu.cn

天津大学 智能与计算学部

Colorless green ideas sleep furiously.

— Noam Chomsky

内容提要

内容提要

1. 问题的提出
2. 形式文法与形式语言
3. 乔姆斯基分类

例 (类 Pascal 语言的语句)

```
<语句> ::= <条件语句> | <当语句> | <复合语句> | <赋值语句>
<条件语句> ::= if <布尔表达式> then <语句> else <语句>
<当语句> ::= while <布尔表达式> do <语句>
<复合语句> ::= begin <语句表> end
<语句表> ::= <语句> | <语句> ; <语句表>
<赋值语句> ::= <变量> := <算术表达式>
<布尔表达式> ::= <算术表达式> <关系运算符> <算术表达式>
<关系运算符> ::= < | > | <= | >= | = | !=
<算术表达式> ::= <常量> | <变量> |
                 ( <算术表达式> <算术运算符> <算术表达式> )
<算数运算符> ::= + | - | * | /
<常量> ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9
<变量> ::= a | b | c | d | e | f | g | h | i | g | k | l | m |
           n | o | p | q | r | s | t | u | v | w | x | y | z
```

BNF：巴科斯-瑙尔范式

巴科斯-瑙尔范式（Backus-Naur Form）

- <语句>　一种语法成分，需要定义
- ::=　“就是”
- |　“或者”

John Backus

Peter Naur

递归定义

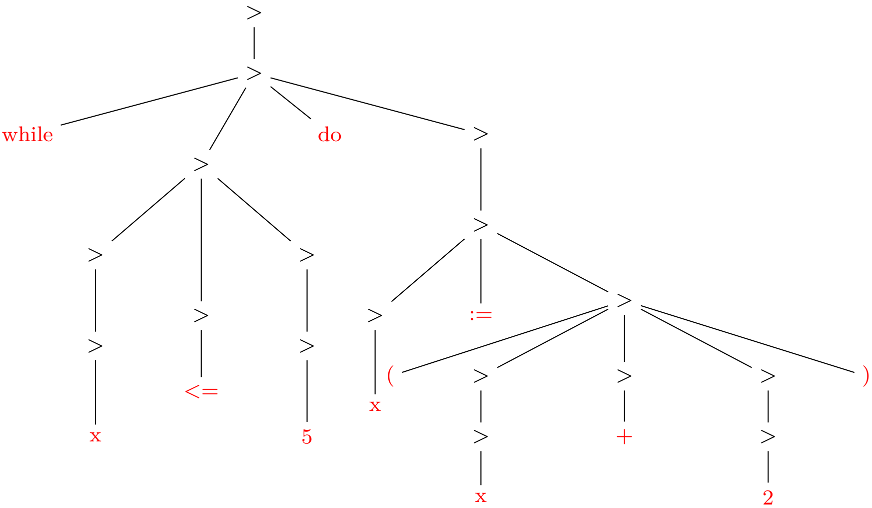
- <语句>是<语句表>
- 在<语句表>之前加上<语句>;，仍是<语句表>
- 除此之外，<语句表>不再包含其他形式

例

```
while x <= 5 do x := (x + 2)
```

例

```
while x <= 5 do x := (x + 2)
```



举例：简单英语句子的语法规则

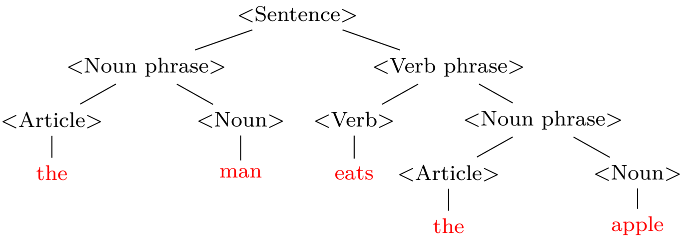
例

<Sentence> → <Noun phrase><Verb phrase>
<Noun phrase> → <Article><Noun>
<Article> → the | a
<Noun> → apple | cat | man
<Verb phrase> → <Verb><Noun phrase>|<Verb>
<Verb> → eats | sings | runs

举例：简单英语句子的语法规则

例

<Sentence> → <Noun phrase><Verb phrase>
<Noun phrase> → <Article><Noun>
<Article> → the | a
<Noun> → apple | cat | man
<Verb phrase> → <Verb><Noun phrase>|<Verb>
<Verb> → eats | sings | runs



内容提要

文法

定义

一个**文法**G 是一个四元组

$$G = (V, T, P, S)$$

其中

1. V 是**变元**的有限集。
2. T 是**终结符**的有限集。
3. P 是**产生式**的有限集，其中每个产生式都是 $\alpha \to \beta$ 的形式，$\alpha \in (V \cup T)^+$，且至少有一个 V 中的符号，$\beta \in (V \cup T)^*$。α 称为产生式的**左部**，β 称为产生式的**右部**。
4. $S \in V$，称为文法 G 的**开始符号**。

约定

1. **变元**：大写拉丁字母 A，B，C，D，E 和 S，
   S 开始符号（除非另作说明）。
2. **终结符**：小写拉丁字母 a，b，c，d，e，数字。
3. **终结符串**：小写拉丁字母 u，v，w，x，y，z 等。
4. **变元和终结符共同组成的串**：小写希腊字母 α，β，γ 等。

约定

1. **变元**：大写拉丁字母 A，B，C，D，E 和 S，S 开始符号（除非另作说明）。
2. **终结符**：小写拉丁字母 a，b，c，d，e，数字。
3. **终结符串**：小写拉丁字母 u，v，w，x，y，z 等。
4. **变元和终结符共同组成的串**：小写希腊字母 α，β，γ 等。

约定

$$\alpha \to \beta_1, \quad \alpha \to \beta_2, \quad \cdots, \quad \alpha \to \beta_n$$

缩写为：$\alpha \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \cdots \mid \beta_n$

例

写一个文法，只写出产生式集合便可

例

$$S \to 0A1 \mid 10$$
$$0A \to 00A1$$
$$A \to \varepsilon$$

推导

定义 (直接推导)

给定文法 $G = (V, T, P, S)$，定义两个字符串之间的关系 $\Rightarrow$：
若 $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$，$\gamma = \alpha_1\beta\alpha_3$，并且 $\alpha_2 \rightarrow \beta$ 是 P 中的一条产生式，则有 $\alpha \Rightarrow \gamma$，此时称由 α**直接推导**出 γ

推导

定义 (直接推导)

给定文法 $G = (V, T, P, S)$，定义两个字符串之间的关系 $\Rightarrow$:
若 $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$，$\gamma = \alpha_1\beta\alpha_3$，并且 $\alpha_2 \rightarrow \beta$ 是 P 中的一条产生式，则有 $\alpha \Rightarrow \gamma$，此时称由 α**直接推导**出 γ

定义 (推导)

$\Rightarrow$ 是 $(V \cup T)^*$ 上的二元关系。根据关系闭包的定义，可将 $\Rightarrow$ 扩充为 $\overset{*}{\Rightarrow}$，$\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \gamma$ 称为由 α**推导**出 γ。

推导

定义 (直接推导)

给定文法 $G = (V, T, P, S)$，定义两个字符串之间的关系 $\Rightarrow$:
若 $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$，$\gamma = \alpha_1\beta\alpha_3$，并且 $\alpha_2 \rightarrow \beta$ 是 P 中的一条产生式，则有 $\alpha \Rightarrow \gamma$，此时称由 α**直接推导**出 γ

定义 (推导)

$\Rightarrow$ 是 $(V \cup T)^*$ 上的二元关系。根据关系闭包的定义，可将 $\Rightarrow$ 扩充为 $\overset{*}{\Rightarrow}$，$\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \gamma$ 称为由 α**推导**出 γ。

定义 (句型、句子)

若有 $S \overset{*}{\Rightarrow} \gamma$，则称 γ 为**句型**，当 $\gamma \in T^*$ 时，称 γ 为**句子**。

例

文法

例

$$S \rightarrow 0A1 \mid 10$$
$$0A \rightarrow 00A1$$
$$A \rightarrow \varepsilon$$

有推导

例

$$S \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 00A11 \Rightarrow 000A111 \Rightarrow 000111$$
$$S \stackrel{*}{\Rightarrow} 000111$$

其中哪些是句型？哪些是句子？

归约

定义 (归约)

如果 $\alpha \Rightarrow \gamma$ 是由 α 到 γ 的推导，则反过来称 γ**归约**到 α，记作 $\gamma \Leftarrow \alpha$

语言

定义 (语言)

文法 $G = (V, T, P, S)$ 所产生的**语言**记作 $L(G)$，定义为:

$$L(G) = \{w \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w \quad \wedge \quad w \in T^*\}$$

文法 G 产生的语言 $L(G)$，就是由 G 中开始符号 S 推导出来的全体终结符串的集合，即句子的集合。

举例：由文法到语言

例

给定文法 G，它有两个产生式：

$$S \to aSb$$
$$S \to ab$$

求该文法产生的语言 $L(G)$

举例：由文法到语言

例

给定文法 G，它有两个产生式：

$S \to aSb$

$S \to ab$

求该文法产生的语言 $L(G)$

$$L(G) = \{a^n b^n \mid n \geqslant 1\}$$

举例：由文法到语言

例

给定文法 G，它的产生式为：

$$S \to aB \mid bA$$
$$A \to a \mid bAA \mid aS$$
$$B \to b \mid aBB \mid bS$$

求该文法产生的语言 $L(G)$

举例：由文法到语言

例

给定文法 G，它的产生式为：

$$S \rightarrow aB \mid bA$$
$$A \rightarrow a \mid bAA \mid aS$$
$$B \rightarrow b \mid aBB \mid bS$$

求该文法产生的语言 $L(G)$

$L(G)$ 是由个数相等的 a 和 b（次序不限）组成的所有串的集合。

证明：板书

举例：由文法到语言

例

给定文法 G，它的产生式为：

$$S \to aB \mid bA$$
$$A \to a \mid bAA \mid aS$$
$$B \to b \mid aBB \mid bS$$

求该文法产生的语言 $L(G)$

$L(G)$ 是由个数相等的 a 和 b（次序不限）组成的所有串的集合。

证明：板书

为了证明最终的结论，我们要证明以下三个互相关联的命题：

1. $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

举例：由文法到语言

为了证明最终的结论，我们要证明以下三个互相关联的命题：

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳基础：

举例：由文法到语言

为了证明最终的结论，我们要证明以下三个互相关联的命题：

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳基础：
当 $|w| = 1$ 时，
对于命题 (1)，一方面，根据产生式，不可能有 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$
另一方面，w 中不可能包含相等个数的 a 和 b
即“当且仅当”的两个方面条件都是假的，故命题 (1) 成立。

举例：由文法到语言

为了证明最终的结论，我们要证明以下三个互相关联的命题：

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳基础：
当 $|w| = 1$ 时，
对于命题 (1)，一方面，根据产生式，不可能有 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$
另一方面，w 中不可能包含相等个数的 a 和 b
即“当且仅当”的两个方面条件都是假的，故命题 (1) 成立。为什么？

举例：由文法到语言

为了证明最终的结论，我们要证明以下三个互相关联的命题：

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳基础：
当 $|w| = 1$ 时，
对于命题 (1)，一方面，根据产生式，不可能有 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$
另一方面，w 中不可能包含相等个数的 a 和 b
即“当且仅当”的两个方面条件都是假的，故命题 (1) 成立。为什么？
对于命题 (2)(3)，只能有 $A \Rightarrow a$ 和 $B \Rightarrow b$，用其他产生式都将推导出长度大于 1 的串，故命题 (2)(3) 成立。 $\square$

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
先证命题 (1)

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

先证命题 (1)

“仅当”：“$S \overset{*}{\Rightarrow} w$” $\Longrightarrow$ “w 中包含相等个数的 a 和 b”

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

先证命题 (1)

"仅当"："$S \overset{*}{\Rightarrow} w$" $\Longrightarrow$ "w 中包含相等个数的 a 和 b"

由 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$，第 1 步推导必然是 $S \Rightarrow aB$ 或 $S \Rightarrow bA$

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
先证命题 (1)
“仅当”：“$S \overset{*}{\Rightarrow} w$” $\Longrightarrow$ “w 中包含相等个数的 a 和 b”

由 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$，第 1 步推导必然是 $S \Rightarrow aB$ 或 $S \Rightarrow bA$

- 若第 1 步推导是 $S \Rightarrow aB$；必然有 $w = aw_1$

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

先证命题 (1)

“仅当”：“$S \overset{*}{\Rightarrow} w$” $\Longrightarrow$ “w 中包含相等个数的 a 和 b”

由 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$，第 1 步推导必然是 $S \Rightarrow aB$ 或 $S \Rightarrow bA$

- 若第 1 步推导是 $S \Rightarrow aB$；必然有 $w = aw_1$ 且 $B \overset{*}{\Rightarrow} w_1$；

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \le k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

先证命题 (1)

“仅当”：“$S \overset{*}{\Rightarrow} w$” $\Longrightarrow$ “w 中包含相等个数的 a 和 b”

由 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$，第 1 步推导必然是 $S \Rightarrow aB$ 或 $S \Rightarrow bA$

- 若第 1 步推导是 $S \Rightarrow aB$；必然有 $w = aw_1$ 且 $B \overset{*}{\Rightarrow} w_1$；
  因为 $|w_1| = k-1$，根据归纳假设（命题 (3)），w_1 中 b 的个数比 a 的个数多 1，

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

先证命题 (1)

"仅当"："$S \overset{*}{\Rightarrow} w$" $\Longrightarrow$ "w 中包含相等个数的 a 和 b"

由 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$，第 1 步推导必然是 $S \Rightarrow aB$ 或 $S \Rightarrow bA$

- 若第 1 步推导是 $S \Rightarrow aB$；必然有 $w = aw_1$ 且 $B \overset{*}{\Rightarrow} w_1$；
  因为 $|w_1| = k-1$，根据归纳假设（命题 (3)），w_1 中 b 的个数比 a 的个数多 1，因此，w 中包含相等个数的 a 和 b
- 若第 1 步推导是 $S \Rightarrow bA$；必然有 $w = bw_1$

1. $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
先证命题 (1)
“仅当”：“$S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$” $\Longrightarrow$ “w 中包含相等个数的 a 和 b”

由 $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$，第 1 步推导必然是 $S \Rightarrow aB$ 或 $S \Rightarrow bA$

- 若第 1 步推导是 $S \Rightarrow aB$；必然有 $w = aw_1$ 且 $B \stackrel{*}{\Rightarrow} w_1$；
  因为 $|w_1| = k-1$，根据归纳假设（命题 (3)），w_1 中 b 的个数比 a 的个数多 1，因此，w 中包含相等个数的 a 和 b
- 若第 1 步推导是 $S \Rightarrow bA$；必然有 $w = bw_1$ 且 $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w_1$；

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \le k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

先证命题 (1)

"仅当"："$S \overset{*}{\Rightarrow} w$" $\Longrightarrow$ "w 中包含相等个数的 a 和 b"

由 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$，第 1 步推导必然是 $S \Rightarrow aB$ 或 $S \Rightarrow bA$

- 若第 1 步推导是 $S \Rightarrow aB$；必然有 $w = aw_1$ 且 $B \overset{*}{\Rightarrow} w_1$；
  因为 $|w_1| = k-1$，根据归纳假设（命题 (3)），w_1 中 b 的个数比 a 的个数多 1，因此，w 中包含相等个数的 a 和 b
- 若第 1 步推导是 $S \Rightarrow bA$；必然有 $w = bw_1$ 且 $A \overset{*}{\Rightarrow} w_1$；
  因为 $|w_1| = k-1$，根据归纳假设（命题 (2)），w_1 中 a 的个数比 b 的个数多 1，

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \le k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
先证命题 (1)
"仅当"："$S \overset{*}{\Rightarrow} w$" $\Longrightarrow$ "w 中包含相等个数的 a 和 b"

由 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$，第 1 步推导必然是 $S \Rightarrow aB$ 或 $S \Rightarrow bA$

- 若第 1 步推导是 $S \Rightarrow aB$；必然有 $w = aw_1$ 且 $B \overset{*}{\Rightarrow} w_1$；
  因为 $|w_1| = k-1$，根据归纳假设（命题 (3)），w_1 中 b 的个数比 a 的个数多 1，因此，w 中包含相等个数的 a 和 b
- 若第 1 步推导是 $S \Rightarrow bA$；必然有 $w = bw_1$ 且 $A \overset{*}{\Rightarrow} w_1$；
  因为 $|w_1| = k-1$，根据归纳假设（命题 (2)），w_1 中 a 的个数比 b 的个数多 1，因此，w 中包含相等个数的 a 和 b

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
先证命题 (1)

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

先证命题 (1)

"当"："w 中包含相等个数的 a 和 b" $\Longrightarrow$ "$S \overset{*}{\Rightarrow} w$"

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

先证命题 (1)

"当"："w 中包含相等个数的 a 和 b" $\Longrightarrow$ "$S \overset{*}{\Rightarrow} w$"

---

w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况 ($|w| = k$)

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

先证命题 (1)

"当"："w 中包含相等个数的 a 和 b" $\Longrightarrow$ "$S \overset{*}{\Rightarrow} w$"

w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况 ($|w| = k$)

- 若 w 的第 1 个符号是 a；则 $w = aw_1$

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

先证命题 (1)

"当"："w 中包含相等个数的 a 和 b" $\Longrightarrow$ "$S \overset{*}{\Rightarrow} w$"

w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况 ($|w| = k$)

- 若 w 的第 1 个符号是 a；则 $w = aw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
先证命题 (1)
“当”：“w 中包含相等个数的 a 和 b” $\Longrightarrow$ “$S \overset{*}{\Rightarrow} w$”
w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况（$|w| = k$）

- 若 w 的第 1 个符号是 a；则 $w = aw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  因为 w_1 中包含 b 的个数比 a 的个数多 1，根据归纳假设（命题 (3)），有 $B \overset{*}{\Rightarrow} w_1$，

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

先证命题 (1)

“当”：“w 中包含相等个数的 a 和 b” $\Longrightarrow$ “$S \overset{*}{\Rightarrow} w$”

w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况（$|w| = k$）

- 若 w 的第 1 个符号是 a；则 $w = aw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  因为 w_1 中包含 b 的个数比 a 的个数多 1，根据归纳假设（命题 (3)），有 $B \overset{*}{\Rightarrow} w_1$，因此，有 $S \Rightarrow aB \overset{*}{\Rightarrow} aw_1 = w$，即 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$
- 若 w 的第 1 个符号是 b；则 $w = bw_1$

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \le k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

先证命题 (1)

“当”：“w 中包含相等个数的 a 和 b” $\Longrightarrow$ “$S \overset{*}{\Rightarrow} w$”

w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况（$|w| = k$）

- 若 w 的第 1 个符号是 a；则 $w = aw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  因为 w_1 中包含 b 的个数比 a 的个数多 1，根据归纳假设（命题 (3)），有 $B \overset{*}{\Rightarrow} w_1$，因此，有 $S \Rightarrow aB \overset{*}{\Rightarrow} aw_1 = w$，即 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$
- 若 w 的第 1 个符号是 b；则 $w = bw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；

1. $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \le k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
先证命题 (1)
“当”：“w 中包含相等个数的 a 和 b” $\Longrightarrow$ “$S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$”

w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况（$|w| = k$）

- 若 w 的第 1 个符号是 a；则 $w = aw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  因为 w_1 中包含 b 的个数比 a 的个数多 1，根据归纳假设（命题 (3)），有 $B \stackrel{*}{\Rightarrow} w_1$，因此，有 $S \Rightarrow aB \stackrel{*}{\Rightarrow} aw_1 = w$，即 $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$
- 若 w 的第 1 个符号是 b；则 $w = bw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  因为 w_1 中包含 a 的个数比 b 的个数多 1，根据归纳假设（命题 (2)），有 $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w_1$，

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \le k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
先证命题 (1)
"当"："w 中包含相等个数的 a 和 b" $\Longrightarrow$ "$S \overset{*}{\Rightarrow} w$"

w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况（$|w| = k$）

- 若 w 的第 1 个符号是 a；则 $w = aw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  因为 w_1 中包含 b 的个数比 a 的个数多 1，根据归纳假设（命题 (3)），有 $B \overset{*}{\Rightarrow} w_1$，因此，有 $S \Rightarrow aB \overset{*}{\Rightarrow} aw_1 = w$，即 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$
- 若 w 的第 1 个符号是 b；则 $w = bw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  因为 w_1 中包含 a 的个数比 b 的个数多 1，根据归纳假设（命题 (2)），有 $A \overset{*}{\Rightarrow} w_1$，因此，有 $S \Rightarrow bA \overset{*}{\Rightarrow} bw_1 = w$，即 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
再证命题 (2)

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
再证命题 (2)
“仅当”：“$A \overset{*}{\Rightarrow} w$” $\Longrightarrow$ “w 中 a 的个数比 b 的个数多 1”

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

再证命题 (2)

<u>“仅当”：“$A \overset{*}{\Rightarrow} w$” $\Longrightarrow$ “w 中 a 的个数比 b 的个数多 1”</u>

由 $A \overset{*}{\Rightarrow} w$，第 1 步推导必然是 $A \Rightarrow aS$ 或 $A \Rightarrow bAA$

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

再证命题 (2)

"仅当"："$A \overset{*}{\Rightarrow} w$" $\Longrightarrow$ "w 中 a 的个数比 b 的个数多 1"

由 $A \overset{*}{\Rightarrow} w$，第 1 步推导必然是 $A \Rightarrow aS$ 或 $A \Rightarrow bAA$

- 若第 1 步推导是 $A \Rightarrow aS$；必然有 $w = aw_1$

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

再证命题 (2)

“仅当”：“$A \overset{*}{\Rightarrow} w$” $\Longrightarrow$ “w 中 a 的个数比 b 的个数多 1”

由 $A \overset{*}{\Rightarrow} w$，第 1 步推导必然是 $A \Rightarrow aS$ 或 $A \Rightarrow bAA$

- 若第 1 步推导是 $A \Rightarrow aS$；必然有 $w = aw_1$ 且 $S \overset{*}{\Rightarrow} w_1$；

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

再证命题 (2)

"仅当"："$A \overset{*}{\Rightarrow} w$" $\Longrightarrow$ "w 中 a 的个数比 b 的个数多 1"

由 $A \overset{*}{\Rightarrow} w$，第 1 步推导必然是 $A \Rightarrow aS$ 或 $A \Rightarrow bAA$

- 若第 1 步推导是 $A \Rightarrow aS$；必然有 $w = aw_1$ 且 $S \overset{*}{\Rightarrow} w_1$；
  因为 $|w_1| = k-1$，根据归纳假设（命题 (1)），w_1 中包含相等个数的 a 和 b，

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
再证命题 (2)
"仅当"："$A \overset{*}{\Rightarrow} w$" $\Longrightarrow$ "w 中 a 的个数比 b 的个数多 1"

由 $A \overset{*}{\Rightarrow} w$，第 1 步推导必然是 $A \Rightarrow aS$ 或 $A \Rightarrow bAA$

- 若第 1 步推导是 $A \Rightarrow aS$；必然有 $w = aw_1$ 且 $S \overset{*}{\Rightarrow} w_1$；
  因为 $|w_1| = k-1$，根据归纳假设（命题 (1)），w_1 中包含相等个数的 a 和 b，因此，w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
- 若第 1 步推导是 $A \Rightarrow bAA$；必然有 $w = bw_1w_2$

1. $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
再证命题 (2)
“仅当”：“$A \stackrel{*}{\Rightarrow} w$” $\Longrightarrow$ “w 中 a 的个数比 b 的个数多 1”

由 $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w$，第 1 步推导必然是 $A \Rightarrow aS$ 或 $A \Rightarrow bAA$

- 若第 1 步推导是 $A \Rightarrow aS$；必然有 $w = aw_1$ 且 $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w_1$；
  因为 $|w_1| = k-1$，根据归纳假设（命题 (1)），w_1 中包含相等个数的 a 和 b，因此，w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
- 若第 1 步推导是 $A \Rightarrow bAA$；必然有 $w = bw_1w_2$ 且 $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w_1$ 和 $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w_2$；

1. $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \le k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
再证命题 (2)
"仅当"："$A \stackrel{*}{\Rightarrow} w$" $\Longrightarrow$ "w 中 a 的个数比 b 的个数多 1"

由 $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w$，第 1 步推导必然是 $A \Rightarrow aS$ 或 $A \Rightarrow bAA$

- 若第 1 步推导是 $A \Rightarrow aS$；必然有 $w = aw_1$ 且 $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w_1$；
  因为 $|w_1| = k-1$，根据归纳假设（命题 (1)），w_1 中包含相等个数的 a 和 b，因此，w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
- 若第 1 步推导是 $A \Rightarrow bAA$；必然有 $w = bw_1w_2$ 且 $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w_1$ 和 $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w_2$；因为 $|w_1| < k-1$ 且 $|w_2| < k-1$，根据归纳假设（命题 (2)），w_1 和 w_2 中 a 的个数比 b 的个数多 1，

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \le k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
再证命题 (2)
“仅当”：“$A \overset{*}{\Rightarrow} w$” $\Longrightarrow$ “w 中 a 的个数比 b 的个数多 1”
由 $A \overset{*}{\Rightarrow} w$，第 1 步推导必然是 $A \Rightarrow aS$ 或 $A \Rightarrow bAA$

- 若第 1 步推导是 $A \Rightarrow aS$；必然有 $w = aw_1$ 且 $S \overset{*}{\Rightarrow} w_1$；因为 $|w_1| = k-1$，根据归纳假设（命题 (1)），w_1 中包含相等个数的 a 和 b，因此，w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
- 若第 1 步推导是 $A \Rightarrow bAA$；必然有 $w = bw_1w_2$ 且 $A \overset{*}{\Rightarrow} w_1$ 和 $A \overset{*}{\Rightarrow} w_2$；因为 $|w_1| < k-1$ 且 $|w_2| < k-1$，根据归纳假设（命题 (2)），w_1 和 w_2 中 a 的个数比 b 的个数多 1，因此，w 中 a 的个数比 b 的个数多 1

1. $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
再证命题 (2)

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \le k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

再证命题 (2)

<u>"当"："w 中 a 的个数比 b 的个数多 1" $\Longrightarrow$ "$A \overset{*}{\Rightarrow} w$"</u>

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
再证命题 (2)
"当"："w 中 a 的个数比 b 的个数多 1" $\Longrightarrow$ "$A \overset{*}{\Rightarrow} w$"

---

w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况（$|w| = k$）

1. $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \le k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
再证命题 (2)
"当"："w 中 a 的个数比 b 的个数多 1" $\Longrightarrow$ "$A \stackrel{*}{\Rightarrow} w$"
w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况 ($|w| = k$)

- 若 w 的第 1 个符号是 a；则 $w = aw_1$

1. $S \xRightarrow{*} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \xRightarrow{*} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \xRightarrow{*} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \le k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

再证命题 (2)

"当"："w 中 a 的个数比 b 的个数多 1" $\Longrightarrow$ "$A \xRightarrow{*} w$"

w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况 ($|w| = k$)

- 若 w 的第 1 个符号是 a；则 $w = aw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

再证命题 (2)

"当"："w 中 a 的个数比 b 的个数多 1" $\Longrightarrow$ "$A \overset{*}{\Rightarrow} w$"

w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况（$|w| = k$）

- 若 w 的第 1 个符号是 a；则 $w = aw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  因为 w_1 中包含相等个数的 a 和 b，根据归纳假设（命题 (1)），有 $S \overset{*}{\Rightarrow} w_1$，

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

再证命题 (2)

"当"："w 中 a 的个数比 b 的个数多 1" $\Longrightarrow$ "$A \overset{*}{\Rightarrow} w$"

w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况（$|w| = k$）

- 若 w 的第 1 个符号是 a；则 $w = aw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  因为 w_1 中包含相等个数的 a 和 b，根据归纳假设（命题 (1)），有 $S \overset{*}{\Rightarrow} w_1$，因此，有 $A \Rightarrow aS \overset{*}{\Rightarrow} aw_1 = w$，即 $A \overset{*}{\Rightarrow} w$
- 若 w 的第 1 个符号是 b；则 $w = bw_1$

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
再证命题 (2)
"当"："w 中 a 的个数比 b 的个数多 1" $\Longrightarrow$ "$A \overset{*}{\Rightarrow} w$"

w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况（$|w| = k$）

- 若 w 的第 1 个符号是 a；则 $w = aw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  因为 w_1 中包含相等个数的 a 和 b，根据归纳假设（命题 (1)），有 $S \overset{*}{\Rightarrow} w_1$，因此，有 $A \Rightarrow aS \overset{*}{\Rightarrow} aw_1 = w$，即 $A \overset{*}{\Rightarrow} w$
- 若 w 的第 1 个符号是 b；则 $w = bw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
再证命题 (2)
"当"："w 中 a 的个数比 b 的个数多 1" $\Longrightarrow$ "$A \overset{*}{\Rightarrow} w$"

w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况（$|w| = k$）

- 若 w 的第 1 个符号是 a；则 $w = aw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  因为 w_1 中包含相等个数的 a 和 b，根据归纳假设（命题 (1)），有 $S \overset{*}{\Rightarrow} w_1$，因此，有 $A \Rightarrow aS \overset{*}{\Rightarrow} aw_1 = w$，即 $A \overset{*}{\Rightarrow} w$
- 若 w 的第 1 个符号是 b；则 $w = bw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  这时 w_1 中 a 的个数比 b 的个数多 2，

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

再证命题 (2)

"当"："w 中 a 的个数比 b 的个数多 1" $\Longrightarrow$ "$A \overset{*}{\Rightarrow} w$"

w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况（$|w| = k$）

- 若 w 的第 1 个符号是 a；则 $w = aw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  因为 w_1 中包含相等个数的 a 和 b，根据归纳假设（命题 (1)），有 $S \overset{*}{\Rightarrow} w_1$，因此，
  有 $A \Rightarrow aS \overset{*}{\Rightarrow} aw_1 = w$，即 $A \overset{*}{\Rightarrow} w$
- 若 w 的第 1 个符号是 b；则 $w = bw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  这时 w_1 中 a 的个数比 b 的个数多 2，可将 w_1 分为两部分，

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

再证命题 (2)

“当”：“w 中 a 的个数比 b 的个数多 1” $\Longrightarrow$ “$A \overset{*}{\Rightarrow} w$”

w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况 $(|w| = k)$

- 若 w 的第 1 个符号是 a；则 $w = aw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  因为 w_1 中包含相等个数的 a 和 b，根据归纳假设（命题 (1)），有 $S \overset{*}{\Rightarrow} w_1$，因此，有 $A \Rightarrow aS \overset{*}{\Rightarrow} aw_1 = w$，即 $A \overset{*}{\Rightarrow} w$
- 若 w 的第 1 个符号是 b；则 $w = bw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  这时 w_1 中 a 的个数比 b 的个数多 2，可将 w_1 分为两部分，即 $w_1 = w_{11}w_{12}$，使 w_{11} 和 w_{12} 中 a 的个数都比 b 的个数多 1
  因为 $|w_{11}| < k-1$ 且 $|w_{12}| < k-1$，根据归纳假设（命题 (2)），有 $A \overset{*}{\Rightarrow} w_{11}$ 和 $A \overset{*}{\Rightarrow} w_{12}$，

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。

归纳步骤：

假设当 $|w| \le k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)

要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。

再证命题 (2)

“当”：“w 中 a 的个数比 b 的个数多 1” $\Longrightarrow$ “$A \overset{*}{\Rightarrow} w$”

w 的第 1 个符号只有 a 或 b 两种情况（$|w| = k$）

- 若 w 的第 1 个符号是 a；则 $w = aw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  因为 w_1 中包含相等个数的 a 和 b，根据归纳假设（命题 (1)），有 $S \overset{*}{\Rightarrow} w_1$，因此，
  有 $A \Rightarrow aS \overset{*}{\Rightarrow} aw_1 = w$，即 $A \overset{*}{\Rightarrow} w$
- 若 w 的第 1 个符号是 b；则 $w = bw_1$ 且 $|w_1| = k-1$；
  这时 w_1 中 a 的个数比 b 的个数多 2，可将 w_1 分为两部分，即 $w_1 = w_{11}w_{12}$，使 w_{11} 和 w_{12} 中 a 的个数都比 b 的个数多 1
  因为 $|w_{11}| < k-1$ 且 $|w_{12}| < k-1$，根据归纳假设（命题 (2)），有 $A \overset{*}{\Rightarrow} w_{11}$ 和 $A \overset{*}{\Rightarrow} w_{12}$，因此，有 $A \Rightarrow bAA \overset{*}{\Rightarrow} bw_{11}w_{12} = bw_1 = w$，即 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$

1. $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
再证命题 (3)

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。（归纳假设）
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
再证命题 (3)
与命题 (2) 的证明类似，留做作业

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中包含相等个数的 a 和 b
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 a 的个数比 b 的个数多 1
3. $B \overset{*}{\Rightarrow} w$ 当且仅当 w 中 b 的个数比 a 的个数多 1

Proof.

用归纳法证明，对 $|w|$ 进行归纳。
归纳步骤：
假设当 $|w| \leq k-1$ 时，命题 (1)(2)(3) 成立。(归纳假设)
要证当 $|w| = k$ 时，命题 (1)(2)(3) 也成立。
再证命题 (3)
与命题 (2) 的证明类似，留做作业 命题 (1)(2)(3) 成立。 □

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L = \{a^n \mid n \geqslant 1\}$，构造产生它的文法。

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L = \{a^n \mid n \geqslant 1\}$，构造产生它的文法。

$$S \to a$$

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L = \{a^n \mid n \geqslant 1\}$，构造产生它的文法。

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow a \\
S &\rightarrow aS
\end{aligned}
$$

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L = \{a^n \mid n \geqslant 1\}$，构造产生它的文法。

$$S \to a$$
$$S \to aS$$

$$S \to a$$
$$S \to Sa$$

该例较为简单

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^+\}$，构造产生它的文法。

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^+\}$，构造产生它的文法。

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad S \to aa \\
&(2) \quad S \to bb \\
&(3) \quad S \to aSa \\
&(4) \quad S \to bSb
\end{aligned}
$$

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^+\}$，构造产生它的文法。

$$
\begin{array}{ll}
(1) & S \to aa \\
(2) & S \to bb \\
(3) & S \to aSa \\
(4) & S \to bSb
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaaa \\
S \Rightarrow aSa \Rightarrow abba \\
S \Rightarrow bSb \Rightarrow baab \\
S \Rightarrow bSb \Rightarrow bbbb
\end{array}
$$

举例：由语言到文法

更复杂

例

给定语言 $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$，构造产生它的文法。

举例：由语言到文法

更复杂

例

给定语言 $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$，构造产生它的文法。

这样可以吗?

$$S \to abc$$
$$S \to aSbc$$

推导

$$S \to abc$$
$$S \overset{*}{\Rightarrow} a^n(bc)^n$$

需要找出让 b 和 c 交换次序的方法?

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L=\{a^nb^nc^n \mid n \geqslant 1\}$，构造产生它的文法。

如果有 $cb \to bc$，则问题就解决了。
可惜，$cb \to bc$ 不符合产生式的定义。为什么?

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$，构造产生它的文法。

如果有 $cb \to bc$，则问题就解决了。
可惜，$cb \to bc$ 不符合产生式的定义。为什么？

考虑 $cB \to Bc$
然后再设法将 B 换成 b

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$，构造产生它的文法。

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad S \to aBc \\
&(2) \quad S \to aSBc \\
&(3) \quad cB \to Bc
\end{aligned}
$$

看看 S 能推导出什么?

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$，构造产生它的文法。

$$
\begin{array}{ll}
(1) & S \to aBc \\
(2) & S \to aSBc \\
(3) & cB \to Bc
\end{array}
$$

看看 S 能推导出什么?

用产生式 (1)(2): $S \stackrel{*}{\Rightarrow} a^n(Bc)^n$

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L=\{a^nb^nc^n \mid n\geqslant 1\}$，构造产生它的文法。

$$\begin{array}{ll}(1) & S\to aBc\\ (2) & S\to aSBc\\ (3) & cB\to Bc\end{array}$$

看看 S 能推导出什么？

用产生式 (1)(2)： $S\overset{*}{\Rightarrow} a^n(Bc)^n$

用产生式 (3) 若干次，将所有的 B 移到 c 之前： $S\overset{*}{\Rightarrow} a^nB^nc^n$

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$，构造产生它的文法。

$$
\begin{array}{ll}
(1) & S \to aBc \\
(2) & S \to aSBc \\
(3) & cB \to Bc
\end{array}
$$

看看 S 能推导出什么?

用产生式 (1)(2): $S \stackrel{*}{\Rightarrow} a^n(Bc)^n$

用产生式 (3) 若干次，将所有的 B 移到 c 之前: $S \stackrel{*}{\Rightarrow} a^n B^n c^n$

最后考虑如何将 B 换成 b?

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$，构造产生它的文法。

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad S \rightarrow aBc \\
&(2)\quad S \rightarrow aSBc \\
&(3)\quad cB \rightarrow Bc
\end{aligned}
$$

看看 S 能推导出什么?

用产生式 (1)(2): $S \overset{*}{\Rightarrow} a^n(Bc)^n$

用产生式 (3) 若干次，将所有的 B 移到 c 之前: $S \overset{*}{\Rightarrow} a^n B^n c^n$

最后考虑如何将 B 换成 b?

加一个产生式 $B \rightarrow b$ 可以吗?

举例：由语言到文法

$$\begin{array}{ll} (1) & S \rightarrow aBc \\ (2) & S \rightarrow aSBc \\ (3) & cB \rightarrow Bc \end{array}$$

否

- 因为在推导过程中，不能限制何时才能使用 $B \rightarrow b$
- 如果在 B 还没有换到 c 之前就用了 $B \rightarrow b$，则结果仍然有 c 在 b 前的情况，且以后无法再换过去了。

举例：由语言到文法

$$\begin{array}{ll} (1) & S \rightarrow aBc \\ (2) & S \rightarrow aSBc \\ (3) & cB \rightarrow Bc \end{array}$$

否

- 因为在推导过程中，不能限制何时才能使用 $B \rightarrow b$
- 如果在 B 还没有换到 c 之前就用了 $B \rightarrow b$，则结果仍然有 c 在 b 前的情况，且以后无法再换过去了。

例如，$S \Rightarrow aSBc \Rightarrow aaBcBc \overset{*}{\Rightarrow} aabcbc$

该文法产生了比要求更多的东西。
思考如何避免这一问题?

举例：由语言到文法

$$
\begin{array}{ll}
(1) & S \to aBc \\
(2) & S \to aSBc \\
(3) & cB \to Bc
\end{array}
$$

- 要限制 B 在 c 后面就被换成 b
- 必须保证当 B 前面是 a 时才开始进行 B 到 b 的替换

因此，需要产生式：

举例：由语言到文法

$$
\begin{array}{ll}
(1) & S \to aBc \\
(2) & S \to aSBc \\
(3) & cB \to Bc
\end{array}
$$

- 要限制 B 在 c 后面就被换成 b
- 必须保证当 B 前面是 a 时才开始进行 B 到 b 的替换

因此，需要产生式：

$$
(4) \quad aB \to ab
$$

为了将所有 B 都换成 b，还要有产生式：

举例：由语言到文法

$$\begin{array}{ll}(1) & S \rightarrow aBc \\ (2) & S \rightarrow aSBc \\ (3) & cB \rightarrow Bc\end{array}$$

- 要限制 B 在 c 后面就被换成 b
- 必须保证当 B 前面是 a 时才开始进行 B 到 b 的替换

因此，需要产生式：

$$(4) \quad aB \rightarrow ab$$

为了将所有 B 都换成 b，还要有产生式：

$$(5) \quad bB \rightarrow bb$$

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$，构造产生它的文法。

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$，构造产生它的文法。

产生该语言的完整的文法 G 是：

$$
\begin{array}{ll}
(1) & S \to aBc \\
(2) & S \to aSBc \\
(3) & cB \to Bc \\
(4) & aB \to ab \\
(5) & bB \to bb
\end{array}
$$

证明：板书

举例：由语言到文法

例

给定语言 $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$，构造产生它的文法。

产生该语言的完整的文法 G 是：

$$
\begin{array}{ll}
(1) & S \rightarrow aBc \\
(2) & S \rightarrow aSBc \\
(3) & cB \rightarrow Bc \\
(4) & aB \rightarrow ab \\
(5) & bB \rightarrow bb
\end{array}
$$

Proof.

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ □

文法等价

定义 (文法等价)

对于两个不同的文法 $G_1 = (V_1, T_1, P_1, S_1)$，$G_2 = (V_2, T_2, P_2, S_2)$，如果 $L(G_1) = L(G_2)$，则称文法 G_1 与 G_2**等价**。

举例：文法等价

例

构造产生全部十进制整数（每个整数之前可有若干个 0）的文法。

举例：文法等价

例

构造产生全部十进制整数（每个整数之前可有若干个 0）的文法。

文法 G_1

$$N \rightarrow D \mid DN$$
$$D \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$$

举例：文法等价

例

构造产生全部十进制整数（每个整数之前可有若干个 0）的文法。

文法 G_1

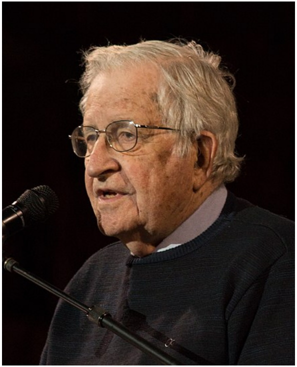
$$N \to D \mid DN$$
$$D \to 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$$

文法 G_2

$$N \to 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$$
$$N \to 0N \mid 1N \mid 2N \mid 3N \mid 4N \mid 5N \mid 6N \mid 7N \mid 8N \mid 9N$$

内容提要

乔姆斯基



(Speaking at a conference about humanity's prospects for survival in Amherst, MA, April 17, 2017)
Noam Chomsky
Dec 7, 1928 (age 90)
语言学家、哲学家、认知科学家、政治评论家、社会活动家
MIT 语言学与哲学系教授
“现代语言学之父”

乔姆斯基分类

定义 (Chomsky hierarchy)

对于文法 $G = (V, T, P, S)$，按以下标准分为 4 类:

1. 若 P 中的产生式按照文法定义中给出的形式而不加另外的限制，即每个产生式都是 $\alpha \to \beta$ 的形式，其中，$\alpha \in (V \cup T)^+$，且至少有一个 V 中的符号，$\beta \in (V \cup T)^*$，则称 G 为**0 型文法**（Type-0 Grammar）或**无限制文法**（Unrestricted Grammar），简记为 UG

乔姆斯基分类

定义 (Chomsky hierarchy)

对于文法 $G = (V, T, P, S)$，按以下标准分为 4 类：

2. 若 P 中的每个产生式都具有如下形式：
   $\alpha A\beta \to \alpha\gamma\beta$
   其中，$A \in V$，$\alpha, \beta \in (V \cup T)^*, \gamma \in (V \cup T)^+$
   且产生式 $S \to \varepsilon$ 允许出现，只要 S 不出现在任何产生式的右部，
   则称 G 为**1 型文法**（Type-1 Grammar）或**上下文有关文法**（Context-Sensitive Grammar），简记为 CSG

乔姆斯基分类

定义 (Chomsky hierarchy)

对于文法 $G = (V, T, P, S)$，按以下标准分为 4 类：

3. 若 P 中的每个产生式都具有如下形式：
   $A \to \beta$
   其中，$\beta \in (V \cup T)^*$，$A \in V$
   则称 G 为**2 型文法**（Type-2 Grammar）或**上下文无关文法**（Context-Free Grammar），
   简记为 CFG

乔姆斯基分类

定义 (Chomsky hierarchy)

对于文法 $G = (V, T, P, S)$，按以下标准分为 4 类：

4. 若 P 中的每个产生式都具有如下形式：
   $A \to a$
   $A \to aB$
   其中，$a \in T \cup \{\varepsilon\}$，$A, B \in V$
   则称 G 为**3 型文法**（Type-3 Grammar）或**正则文法**（Regular Grammar），
   简记为 RG

乔姆斯基分类：语言

定义 (语言分类)

1. 由**无限制文法**产生的语言称为**递归可枚举语言**，简记为 REL (Recursively Enumerable Language)
2. 由**上下文有关文法**产生的语言称为**上下文有关语言**，简记为 CSL (Context-Sensitive Language)
3. 由**上下文无关文法**产生的语言称为**上下文无关语言**，简记为 CFL (Context-Free Language)
4. 由**正则文法**产生的语言称为**正则语言**，简记为 RL（Regular Language）

0 型文法：举例

显示 0 型文法的“威力”，迄今为止最复杂的例子

0 型文法：举例

显示 0 型文法的“威力”，迄今为止最复杂的例子

例

(1) $S \to ACaB$
(2) $Ca \to aaC$
(3) $CB \to DB$
(4) $CB \to E$
(5) $aD \to Da$
(6) $AD \to AC$
(7) $aE \to Ea$
(8) $AE \to \varepsilon$

0 型文法：举例

显示 0 型文法的“威力”，迄今为止最复杂的例子

例

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad S \to ACaB \\
&(2) \quad Ca \to aaC \\
&(3) \quad CB \to DB \\
&(4) \quad CB \to E \\
&(5) \quad aD \to Da \\
&(6) \quad AD \to AC \\
&(7) \quad aE \to Ea \\
&(8) \quad AE \to \varepsilon
\end{aligned}
$$

这是一个“真正的” 0 型文法。为什么?

0 型文法：举例

例

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad S \to ACaB \\
&(2) \quad Ca \to aaC \\
&(3) \quad CB \to DB \\
&(4) \quad CB \to E \\
&(5) \quad aD \to Da \\
&(6) \quad AD \to AC \\
&(7) \quad aE \to Ea \\
&(8) \quad AE \to \varepsilon
\end{aligned}
$$

0 型文法：举例

例

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad S \to ACaB\\
&(2)\quad Ca \to aaC\\
&(3)\quad CB \to DB\\
&(4)\quad CB \to E\\
&(5)\quad aD \to Da\\
&(6)\quad AD \to AC\\
&(7)\quad aE \to Ea\\
&(8)\quad AE \to \varepsilon
\end{aligned}
$$

要证明：$L(G) = \{a^{2^k} \mid k \geqslant 1\}$

0 型文法：举例

要证明：$L(G) = \{a^{2^k} \mid k \geqslant 1\}$

$\{a^{2^k} \mid k \geqslant 1\} = \{aa, aaaa, aaaaaaaa, \cdots\}$

- 该语言中包含的串都由 2^k $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ 个 a 组成
- 产生它的文法必须有“计数”的功能
- 怎样才能做到这一点呢?

0 型文法：举例

例

(1) $S \to ACaB$　　A 为左边界，B 为右边界，C 相当于“光标”

(2) $Ca \to aaC$

当光标从左到右越过一个 a 时，就变成两个 a

$\therefore$ C 从左边界到右边界走一趟，a 个数增加一倍

(3) $CB \to DB$

(4) $CB \to E$

(5) $aD \to Da$

(6) $AD \to AC$

(7) $aE \to Ea$

(8) $AE \to \varepsilon$

0 型文法：举例

例

(1) $S \to ACaB$

(2) $Ca \to aaC$

光标 C 走到右边界 B 时，两边界间 a 个数一定是 2^k

此时有两种选择

(3) $CB \to DB$

(4) $CB \to E$

(5) $aD \to Da$

(6) $AD \to AC$

(7) $aE \to Ea$

(8) $AE \to \varepsilon$

0 型文法：举例

例

(1) $S \rightarrow ACaB$

(2) $Ca \rightarrow aaC$

选择一：就此结束。将边界之间所有 a 作为文法产生的句子

选择二：继续推导。使之产生更多的 a

(3) $CB \rightarrow DB$

(4) $CB \rightarrow E$

(5) $aD \rightarrow Da$

(6) $AD \rightarrow AC$

(7) $aE \rightarrow Ea$

(8) $AE \rightarrow \varepsilon$

0 型文法：举例

例

(1) $S \to ACaB$

(2) $Ca \to aaC$

选择一：就此结束。将边界之间所有 a 作为文法产生的句子

(3) $CB \to DB$

(4) $CB \to E$

将 CB 改为 E，表示推导即将结束

(5) $aD \to Da$

(6) $AD \to AC$

(7) $aE \to Ea$

(8) $AE \to \varepsilon$

(7)(8) 处理善后事宜 $S \stackrel{*}{\Rightarrow} Aaaaaa \cdots aaaE$，其中 a 为 2^k 个

0 型文法：举例

例

(1) $S \to ACaB$
(2) $Ca \to aaC$
选择二：继续推导。使之产生更多的 a
(3) $CB \to DB$
将 C 改为 D，D 由右向左走
(4) $CB \to E$
(5) $aD \to Da$
D 由右向左走，遇到 a 交换位置
(6) $AD \to AC$
直到遇到左边界 A，将 D 再改为 C，这就构成了一次循环

0 型文法：举例

例

$$
\begin{array}{ll}
(1) & S \to ACaB \\
(2) & Ca \to aaC \\
(3) & CB \to DB \\
(4) & CB \to E \\
(5) & aD \to Da \\
(6) & AD \to AC \\
(7) & aE \to Ea \\
(8) & AE \to \varepsilon
\end{array}
$$

0 型文法：举例

例

$$
\begin{array}{ll}
(1) & S \to ACaB \\
(2) & Ca \to aaC \\
(3) & CB \to DB \\
(4) & CB \to E \\
(5) & aD \to Da \\
(6) & AD \to AC \\
(7) & aE \to Ea \\
(8) & AE \to \varepsilon
\end{array}
$$

要证明：$L(G) = \{a^{2^k} \mid k \geqslant 1\}$
严格证明：对推导步数用归纳法

0 型文法：举例

$L(G) = \{a^{2^k} \mid k \geqslant 1\}$

该语言不是 CFL。
也就是说，用上下文无关文法不能产生这个语言。
为什么?

0 型文法：举例

$$L(G) = \{a^{2^k} \mid k \geqslant 1\}$$

该语言不是 CFL。
也就是说，用上下文无关文法不能产生这个语言。
为什么？
以后讲

0 型文法：举例

$L(G) = \{a^{2^k} \mid k \geqslant 1\}$

该语言不是 CFL。
也就是说，用上下文无关文法不能产生这个语言。
为什么?
以后讲
既然 2 型文法不能产生它，1 型文法如何呢?

0 型文法：举例

$$L(G) = \{a^{2^k} \mid k \geqslant 1\}$$

该语言不是 CFL。
也就是说，用上下文无关文法不能产生这个语言。
为什么？
以后讲
既然 2 型文法不能产生它，1 型文法如何呢？
答：1 型文法虽可以产生，但比前面的 0 型文法要复杂得多。

构造一个 1 型文法，使其能产生语言 $\{a^{2^k} \mid k \geqslant 1\}$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & S \to [ACaB] \\
(2) & [ACaB] \to [Aa][aCB] \\
 & [Ca]a \to aa[Ca] \\
 & [Ca][aB] \to aa[CaB] \\
 & [ACa]a \to [Aa]a[Ca] \\
 & [ACa][aB] \to [Aa]a[CaB] \\
 & [CaB] \to a[aCB] \\
(3) & [aCB] \to [aDB] \\
(4) & [aCB] \to [aE]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(5) & a[Da] \to [Da]a \\
 & [aDB] \to [DaB] \\
 & [Aa][Da] \to [ADa]a \\
 & a[DaB] \to [Da][aB] \\
 & [Aa][DaB] \to [ADa][aB] \\
(6) & [ADa] \to [ACa] \\
(7) & [aE] \to [Ea] \\
 & a[Ea] \to [Ea]a \\
(8) & [Aa][Ea] \to aa
\end{array}
$$

1 型文法与 2 型文法

下面讨论

- 为什么 1 型文法叫上下文有关文法?
- 为什么 2 型文法叫上下文无关文法?

1 型文法与 2 型文法

下面讨论

- 为什么 1 型文法叫上下文有关文法?
- 为什么 2 型文法叫上下文无关文法?

要回答这个问题，先看 1^0 型文法的定义

1 型文法：举例

给出文法 G 如下：

例

$$\begin{aligned} &S \to 0A1 \mid 1A0 \\ &0A1 \to 0a1 \\ &1A0 \to 1b0 \end{aligned}$$

1 型文法：举例

给出文法 G 如下：

例

$$S \to 0A1 \mid 1A0$$
$$0A1 \to 0a1$$
$$1A0 \to 1b0$$

根据定义，G 为 1 型文法
$L(G) = \{0a1, 1b0\}$

1 型文法：举例

给出文法 G 如下：

例

$$S \to 0A1 \mid 1A0$$
$$0A1 \to 0a1$$
$$1A0 \to 1b0$$

根据定义，G 为 1 型文法
$L(G) = \{0a1, 1b0\}$

乍看：不就是将变元 A 换成 a 和 b 吗？

1 型文法：举例

给出文法 G 如下：

例

$$
\begin{aligned}
S &\to 0A1 \mid 1A0 \\
0A1 &\to 0a1 \\
1A0 &\to 1b0
\end{aligned}
$$

根据定义，G 为 1 型文法
$L(G) = \{0a1, 1b0\}$

乍看：不就是将变元 A 换成 a 和 b 吗?
为什么不直接写出产生式 $A \to a$ 和 $A \to b$ 呢?

1 型文法：举例

文法 G'：

例

$$
\begin{aligned}
S &\to 0A1 \mid 1A0 \\
A &\to a \\
A &\to b
\end{aligned}
$$

1 型文法：举例

文法 G'：

例

$$S \to 0A1 \mid 1A0$$
$$A \to a$$
$$A \to b$$

$L(G') = \{0a1, 0b1, 1a0, 1b0\}$

- G' 是 2 型文法，上下文无关文法
- 变元 A 无论出现在什么地方，都可以独立地换成 a 或 b

1 型文法：举例

给出文法 G 如下：

例

$$S \rightarrow 0A1 \mid 1A0$$
$$0A1 \rightarrow 0a1$$
$$1A0 \rightarrow 1b0$$

而 G 则不同

- A 只有在左邻为 0，右邻为 1 的环境下，才能换成 a
- A 只有在左邻为 1，右邻为 0 的环境下，才能换成 b

一个变元究竟能换成什么，是由它所处的语言环境决定的，这个语言环境就是“上下文”。

1 型文法：举例

在 $\alpha_1 A\alpha_2 \to \alpha_1\beta\alpha_2$ 中
α_1, α_2 就是变元 A 的上下文
A 只有在这样的上下文中才能换成 β

1 型文法：举例

在 $\alpha_1 A \alpha_2 \to \alpha_1 \beta \alpha_2$ 中
α_1, α_2 就是变元 A 的上下文
A 只有在这样的上下文中才能换成 β

2 型文法中的变元则没有语言环境的限制
随时可以用它的产生式的右部替换
这就是“上下文无关”的文法了

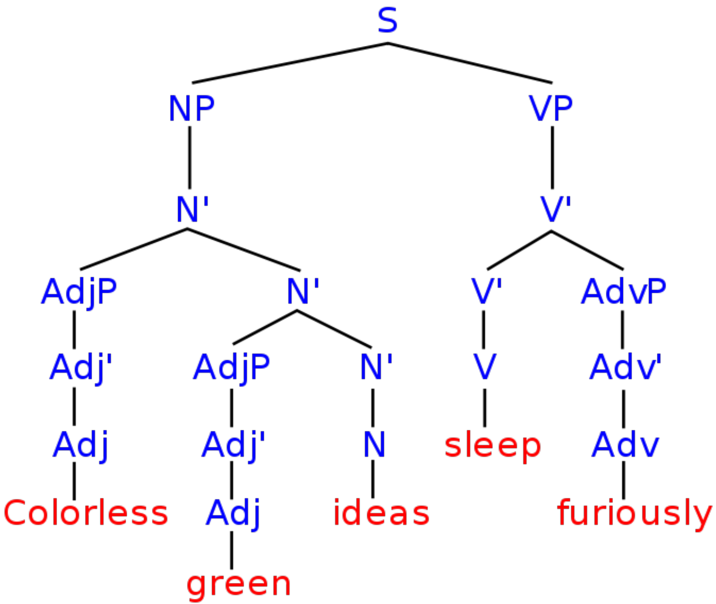
本章总结

- 巴科斯-瑙尔范式
- 形式文法与形式语言
    - 文法
    - 推导
    - 句型、句子
    - 语言

本章总结

- 巴科斯-瑙尔范式
- 形式文法与形式语言
  - 文法
  - 推导
  - 句型、句子
  - 语言

- 乔姆斯基分类
  - 0 型文法 – 短语结构文法
  - 1 型文法 – 上下文有关文法
  - 2 型文法 – 上下文无关文法
  - 3 型文法 – 正则文法


S
NP
VP
N'
V'
AdjP
N'
V'
AdvP
Adj'
AdjP
N'
V
Adv'
Adj
Adj'
N
sleep
Adv
Colorless
Adj
ideas
furiously
green