2023~2024 学年第 2 学期期末考试试卷

《概率论与数理统计 1》(B 卷　共 4 页)

(考试时间：2024 年 5 月 31 日)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	成绩	核分人签字
得分										

一、填空题(每题 3 分，共 18 分)

1. 设两两独立且概率相等的三事件 A、B、C 满足条件 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，且 $ABC=\emptyset$，则 $P(A)=$______.

2. 设随机变量 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{X,Y}=0.5$，且 $X\sim G\left(\frac{1}{4}\right)$，$Y\sim U(0,1)$，

$E(X)=\frac{1}{p}$

$D(X)=\frac{1-p}{p^2}$

则 $E(XY)=$______.

3. 设随机变量 $X\sim N(\mu,4)$，方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$，

则 $P\{2<X<6\}=$______(答案用标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 表示)

4. 设随机变量序列 $X_n\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\frac{2X_n-n}{\sqrt{n}}\le 0\}=$______.

5. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.3, & -1\le x<0,\\ 0.7, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$ 令 $Y=X^2+1$，

则 $P\{Y=2\}=$______.

6. 某人向同一目标独立重复射击，每次击中目标的概率为 P，则此人的第 n 次射击恰好是第 k 次击中目标的概率为______.

二、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1. 设 A、B、C 为事件，$P(ABC)>0$，则 $P(AB|C)=P(A|C)P(B|C)$ 充要条件是(　　).

A. $P(A|C)=P(A)$　　B. $P(B|C)=P(B)$

C. $P(AB|C)=P(AB)$　　D. $P(B|AC)=P(B|C)$.

2. 设随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，且都服从参数为 2 的指数分布.

记 $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2$ 依概率收敛于(　　).

A. 4　　B. $\frac{1}{4}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

3. 设随机变量 $X\sim N(1,2)$，令 $Y=(X-1)^2$，则 $D(Y)=$(　　).

A. 8　　B. 12　　C. 4　　D. 10

4. 设 (2,1,5,2,1,3,1) 是来自总体 X 的一个简单随机样本值，则总体的经验分布函数值 $F_7(2)$=(　　).

A. $\frac{3}{7}$　　B. $\frac{5}{7}$　　C. $\frac{6}{7}$　　D. $\frac{2}{7}$

5. 假设随机变量 X 的分布函数有两个间断点，则随机变量 X(　　).

A. 为离散型随机变量　　B. 为连续型随机变量

C. 不为连续型随机变量　　D. 不为离散型随机变量

6. 在假设检验问题中，如果原假设 H_0 的拒绝域是 W，那么样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 只可能有下列四种情况，其中拒绝 H_0 且不犯错误的是(　　).

A. H_0 成立，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in W$　　B. H_0 成立，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\notin W$

C. H_0 不成立，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in W$　　D. H_0 不成立，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\notin W$

三、(10分) 设随机变量 X,Y 相互独立，且X的概率分布律

$P\{X=-1\}=P\{X=0\}=\frac{1}{4}, P\{X=1\}=\frac{1}{2}$, Y的概率密度函数$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$.

求 $Z=\min\{X,Y\}$的分布函数.

四、(10分) 10台洗衣机有7台一等品，3台二等品，现已售出1台，在余下的9台中任取2台发现均为一等品，则原先售出1台为二等品的概率为多少？

五、(16 分) 已知二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y; & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0; & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$;

(2) 求X, Y的边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 并判断 X, Y 是否独立;

(3) 求 $f_{Y|X}(y|x)$;

(4) 求 $P\left\{\frac{1}{4}<Y<\frac{3}{4}\middle|X\le\frac{1}{2}\right\}$.

六、(10 分) 设随机变量 $X\sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 令 $Y=\cos X$, 求 Y 的分布函数.

七、(6 分) 用老工艺生产的机械零件方差较大，随机抽查 25 个零件，得$s_1^2 = 6.62$．现改用新工艺生产，随机抽查 25 个零件，得$s_2^2 = 3.19$．设这两种生产过程皆服从正态分布，问新工艺的精度是否比老工艺的精度显著的提高($\alpha = 0.05$)？

(附表：$F_{25,25}(0.025) = 2.25$；$F_{25,25}(0.05) = 1.95$

$F_{24,24}(0.025) = 2.27$　$F_{24,24}(0.05) = 1.98$)

八、(12 分) 设$(X_1，X_2，\cdots,X_n)$是来自总体的一个简单随机样本，

其总体的概率密度函数 $f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{k\theta}; & \theta \le x \le (k+1)\theta \\ 0; & 其他 \end{cases}$

其中$k > 0$是已知数，$\theta > 0$是未知参数，求未知参数θ 的矩估计量和最大似然估计量