2024～2025 学年第一学期月考试卷

《微积分 I》(共 1 页)

(考试时间：2024 年 11 月 2 日)

一、计算题（共 30 分，每小题 6 分）

1. 求函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{x}\right)$.

2. 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos\left(x^2\right)-x}{\left(e^{x^4}-1\right)\ln\left(1+2\sin x\right)}$.

3. 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\cos^n n}$.

4. 设函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，求微分 $\mathrm{d}y$.

5. 设函数 $f(x)=(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}$，求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$.

二、计算和解答题（共 48 分，每小题 8 分）

6. 设 $f(x)=\dfrac{|x|}{\tan x}$，给出 $f(x)$ 的所有间断点，并判断间断点的具体类型.

7. 以 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，a 为常数. 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+2e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}-\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)}+a[x]\right)$

存在，求 a 的值及该极限.

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\le 1,\\ \left(x^2+3\right)^{1-x^2}, & x>1,\end{cases}$ 求导函数 $f'(x)$.

9. 设 $\varphi(x)=\left(x^2+x+1\right)^n\sin\dfrac{\pi x}{2}$, $h(x)=(x-1)^n$， $f(x)=h(x)\varphi(x)$.

(1) 求 $\varphi'(x)$； (2) 利用莱布尼茨公式，求 $f^{(n+1)}(1)$.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\lim\limits_{\lambda\to\infty}t\left(1+\dfrac{2t}{\lambda}\right)^{\lambda}\\ y=(2t^2-3t+3)e^t\end{cases}$，确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

11. 曲线 $C: y=y(x)$ 由方程 $4x=y^5+3y$ 给出，求 C 在 $(1,1)$ 处的切线方程，并求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=1}$.

三、证明题（共 22 分，第 12 题 6 分，第 13 题和第 14 题均 8 分）

12. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义且连续，$f(a)<0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L>0$.

证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内至少存在一个实根.

13. 设 $\{a_n\}$ 为数列，$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{k+1}-a_k|=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|$，且存在正常数 M，使得当 $n\ge 1$ 时，总有 $s_n\le M$.

(1)证明 $\{s_n\}$ 收敛； (2)利用 $\{s_n\}$ 的收敛性及柯西收敛准则，证明 $\{a_n\}$ 为柯西数列.

14. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，且对 $\forall x,y\in\mathrm{R}$，总有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

证明：(1) $f(x)$ 在 R 上连续； (2) $\forall x\in\mathrm{R}$，$f(x)=xf(1)$.

2024～2025 学年第一学期《微积分Ⅰ》月考试卷参考答案

考试时间：2024 年 11 月 2 日

一、求极限（共 30 分，每小题 6 分）

1. 解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{2}{x}+1}+1}=1.$

法二：$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{2}{x}+1}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\dfrac{1}{x}=1.$

2. 解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos(x^2)-x}{(e^{x^4}-1)\ln(1+2\sin x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\left(\cos(x^2)-1\right)}{x^4\cdot2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}x^4\right)}{2x^5}=-\dfrac{1}{4}.$

法二：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\left(\cos(x^2)-1\right)}{x^4\cdot2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x^2)-1}{2x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2x\sin(x^2)}{8x^3}=-\dfrac{1}{4}.$

3. 解：$\sqrt[n]{2}\le\sqrt[n]{3+\cos^n n}\le\sqrt[n]{4},\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}=1,$

由迫敛准则,得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\cos^n n}=1.$

4. 解：$y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}},$

$\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x.$

5. 解：$f'(x)=\arctan\sqrt{x}+(x+1)\dfrac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\arctan\sqrt{x},$

$f''(x)=\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

二、计算题和解答题（共 48 分，每小题 8 分）

6. 解：函数 $f(x)$ 的间断点为 $n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 和 $n\pi\left(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\tan x}=1,\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{\tan x}=-1,$ 故 $x=0$ 为第一类的跳跃间断点；

(2) $n\neq0$ 时，$\lim\limits_{x\to n\pi}f(x)=\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{|x|}{\tan x}=\infty,$ 故 $x=n\pi\left(n=\pm1,\pm2,\cdots\right)$ 为第二类的无穷间断点；

(3) $\lim\limits_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{|x|}{\tan x}=0,$ 故 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$ 为第一类的可去间断点.

7. 解：$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{3+2e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}-\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)}+\lim\limits_{x\to0^-}a[x]=\dfrac{3+0}{0-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)}-a=\dfrac{6}{\pi}-a,$

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3e^{-\frac{2}{x}}+2}{1-e^{-\frac{2}{x}}\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)}+\lim\limits_{x\to0^+}a[x]=2+0=2,$

由 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，得 $\dfrac{6}{\pi}-a=2,$ 于是 $a=\dfrac{6}{\pi}-2,$ 且该极限值为2.

8. 解：当 $x<1$ 时, $f'(x)=\left(2x-1\right)'=2;$

当 $x>1$ 时, $f'(x)=\left(e^{(1-x^2)\ln(x^2+3)}\right)'=e^{(1-x^2)\ln(x^2+3)}\left(-2x\ln\left(x^2+3\right)+\left(1-x^2\right)\cdot\dfrac{2x}{x^2+3}\right);$

当 $x=1$ 时，$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(2x-1)-1}{x-1}=2,$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{e^{(1-x^2)\ln(x^2+3)}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\left(1-x^2\right)\ln\left(x^2+3\right)}{x-1}=-\lim\limits_{x\to1^+}(1+x)\ln\left(x^2+3\right)=-2\ln4,$

因为 $f'_-(1)\neq f'_+(1),$ 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

综上，$f'(x)=\begin{cases}2, & x<1,\\ \left(x^2+3\right)^{1-x^2}\left(-2x\ln\left(x^2+3\right)+\dfrac{2x\left(1-x^2\right)}{x^2+3}\right), & x>1.\end{cases}$

注：$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1=f(0),$ $f(x)$ 在 $x=1$ 连续, 也可由导数极限定理求

$f'_-(1),f'_+(1).$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f'(x)=2,$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^2+3\right)^{1-x^2}\left(-2x\ln\left(x^2+3\right)+\dfrac{2x\left(1-x^2\right)}{x^2+3}\right)=-2\ln4=-4\ln2.$

9. 解：(1) $\varphi'(x)=n\left(x^2+x+1\right)^{n-1}(2x+1)\sin\dfrac{\pi x}{2}+\dfrac{\pi}{2}\left(x^2+x+1\right)^n\cos\dfrac{\pi x}{2}$;

(2) 利用莱布尼茨公式，有

$$f^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^{k}h^{(n+1-k)}\varphi^{(k)}$$

$$=h^{(n+1)}\cdot\varphi+C_{n+1}^{1}h^{(n)}\cdot\varphi'+C_{n+1}^{2}h^{(n-1)}\cdot\varphi''+\cdots+C_{n+1}^{n}h'\cdot\varphi^{(n)}+h\cdot\varphi^{(n+1)}$$

$$=0+C_{n+1}^{1}n!\cdot\varphi'+C_{n+1}^{2}n!(x-1)\cdot\varphi''+\cdots+C_{n+1}^{n}n(x-1)^{n-1}\cdot\varphi^{(n)}+(x-1)^n\cdot\varphi^{(n+1)},$$

当 $x=1$ 时，$\varphi'(1)=n\cdot 3^n$，　$f^{(n+1)}(1)=(n+1)\cdot n!\cdot\varphi'(1)=(n+1)!\cdot n\cdot 3^n$.

10. 解：　$x=\lim\limits_{\lambda\to\infty}t\left(1+\dfrac{2t}{\lambda}\right)^{\lambda}=te^{2t}$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(2t^2+t)e^t}{(2t+1)e^{2t}}=te^{-t};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(1-t)e^{-t}}{(2t+1)e^{2t}}=\frac{1-t}{(2t+1)e^{3t}}.$$

注：　求二阶导数用如下公式，计算量比较大.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''\cdot x'-y'\cdot x''}{(x')^3}=\frac{(2t^2+5t+1)e^t\cdot(2t+1)e^{2t}-(2t^2+t)e^t\cdot(4t+4)e^{2t}}{(2t+1)^3e^{6t}}=\frac{-2t^2+t+1}{(2t+1)^2e^{3t}}.$$

11. 解：方程 $4x=y^5+3y$ 两端 x 对求导,得：$4=5y^4y'+3y'$，解得　$y'=\dfrac{4}{5y^4+3}$,

$y'|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$，所以曲线 C 在 $(1,1)$ 处的切线方程为　$y-1=\dfrac{1}{2}(x-1)$.

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}=\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{5y^4+3}\right)\right|_{x=1}=\left.\frac{-4}{(5y^4+3)^2}\cdot 20y^3\cdot y'\right|_{x=1}=-\frac{5}{8}.$$

法二：由 $4=(5y^4+3)y'$ 再对 x 求导：$0=(5y^4+3)y''+20y^3(y')^2$，于是，$y''(1)=-\dfrac{5}{8}$.

三、证明题（共 22 分，第 12 题 6 分，第 13 题和第 14 题均 8 分）

12. **证明**：由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L>0$，对 $\varepsilon=\dfrac{L}{2}>0$，存在 $X>a>0$，对于任意的 $x>X$，都有 $|f(x)-L|<\varepsilon=\dfrac{L}{2}$，即 $L-\dfrac{L}{2}<f(x)<L+\dfrac{L}{2}$. 取 $b=X+1$，则有 $f(b)>\dfrac{L}{2}>0$.

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]\subset[a,+\infty)$ 上连续，$f(a)f(b)<0$, 根据零点定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$. 即方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内至少存在一个实根.

注：可根据极限的保号性，存在 $X>a>0$，对于 $\forall x>X$, 都有 $f(x)>0$.

13. **证明**：(1) 显然, $s_n\le s_{n+1}$, 且 $\{s_n\}$ 有上界,由单调有界准则知数列 $\{s_n\}$ 收敛.

(2) $\{s_n\}$ 收敛，由柯西收敛准则, $\{s_n\}$ 是柯西数列. 即 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+$，当 $n>N$ 时，对任意 $p\in N_+$，　$|s_{n+p-1}-s_{n-1}|=|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|+\cdots|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon$,

$$|a_{n+p}-a_n|=|a_{n+p}-a_{n+p-1}+a_{n+p-1}-a_{n+p-2}+a_{n+p-2}+\cdots+a_{n+1}-a_n|$$

$$\le|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon,$$

所以 $\{a_n\}$ 为柯西数列.

(2) 法二：$\{s_n\}$ 是柯西数列. 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+$，当 $m>n>N$ 时，$|s_m-s_n|<\varepsilon$,

即 $|a_{m+1}-a_m|+|a_{m-1}-a_{m-2}|+\cdots|a_{n+2}-a_{n+1}|<\varepsilon$.　于是，当 $m>n>N+1$ 时，恒有

$$|a_m-a_n|=|(a_m-a_{m-1})+(a_{m-1}-a_{m-2})+\cdots+(a_{n+1}-a_n)|$$

$$\le|a_m-a_{m-1}|+|a_{m-1}-a_{m-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon.$$

所以 $\{a_n\}$ 为柯西数列.

14. **证明**：(1) 在方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 中,令 $y=0$, 得 $f(0)=0$.　$f(x)$ 在 $x=0$ 连续，有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$. 任取 $x_0\in R$, 对于自变量的增量 Δx, 有 $\lim\limits_{\Delta x\to0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\lim\limits_{\Delta x\to0}f(\Delta x)=f(x_0)$，　$f(x)$ 在 x_0 连续，从而在 R 上连续.

(2) 由于 $f(0)=f(x)+f(-x)$，得 $f(x)=-f(-x)$, 即 $f(x)$ 为奇函数. 因此只需讨论 x 为正数的情况. 对正有理数 $r=\dfrac{k}{n}$，其中 $n,k\in N_+$，用数学归纳法,可得

$f(kx)=kf(x)$，再由 $f(x)=f\left(n\cdot\dfrac{x}{n}\right)=nf\left(\dfrac{x}{n}\right)$，得　$f\left(\dfrac{x}{n}\right)=\dfrac{1}{n}f(x)$. 因此有

$f\left(\dfrac{k}{n}x\right)=kf\left(\dfrac{x}{n}\right)=\dfrac{k}{n}f(x)$. 令 $x=1$，代入即得　$f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\dfrac{k}{n}f(1)$.

因此等式 $f(x)=xf(1)$ 对一切有理数 $x\in Q$ 成立.

对于 R 中的每个无理数 x，取有理数列 $\{r_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x$，由 $f(x)$ 在 R 上连续，可得 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(r_n)=\lim\limits_{n\to\infty}r_nf(1)=xf(1)$.

因此等式 $f(x)=xf(1)$ 对一切实数 $x\in R$ 都成立.