2024-2025 学年第一学期期中试题参考答案及评分标准

（保密）

一、填空题与选择题（共 28 分，每小题 4 分）

1. BD；　（本题少选给 2 分）

2. A；　3. B ；　4. C；　5.B；　6. $\dfrac{4}{3}$ ；

7. $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4048 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 16^{506} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16^{506} \end{array}\right]$.（在结果为准对角阵的前提下，一个主对角块正确给 2 分）

二、(12 分) 解 (1) 计算

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix}=(x-2)\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix}=(x-2)^3.$$

因此，　$f(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^3$，

因为 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=1$, 所以 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^3=[\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})]^2(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}.$

(2) 由 $f(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^3=\boldsymbol{O}$，可得

$$\boldsymbol{A}^3-6\boldsymbol{A}^2+12\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}, \text{ 即 } \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2-6\boldsymbol{A}+12\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E},$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{8}(\boldsymbol{A}^2-6\boldsymbol{A}+12\boldsymbol{E}).$

（备注：也可以表示成 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{4}(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}).$）

三、(共 24 分，每小题 12 分)

1、(12 分) 解　由题意知，$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^4=16$. 又因 $|\boldsymbol{A}|>0$，所以，　$|\boldsymbol{A}|=2$.

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&\frac{1}{2}\\1&1&0&0&0\\1&2&0&0&0\end{bmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1/2\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.

下面求 $\boldsymbol{B}^{-1},\boldsymbol{C}^{-1}$. 因为

$$[\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{E}]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1/2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-r_2,r_2-r_1,2r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-2&2\end{array}\right],$$

所以， $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&2\end{bmatrix}$.

而 $\boldsymbol{C}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{C}^*}{|\boldsymbol{C}|}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$.

综上所述，有

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{ccc:cc}0&0&0&2&-1\\0&0&0&-1&1\\\hdashline 1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\0&-2&2&0&0\end{array}\right].$$

2、（12 分）**解** 由题设，$\boldsymbol{B}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]\begin{bmatrix}1+h&-1&0&0&0\\1+2h&1&-1&0&0\\1+3h&0&1&-1&0\\1+4h&0&0&1&-1\\1+5h&0&0&0&1\end{bmatrix}$,

记 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1+h&-1&0&0&0\\1+2h&1&-1&0&0\\1+3h&0&1&-1&0\\1+4h&0&0&1&-1\\1+5h&0&0&0&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AM}$，$|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{M}|$.

下面求 $|\boldsymbol{M}|$.对 $|\boldsymbol{M}|$ 施行行倍加变换 $\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{r}_{i-1}$，$i=5,4,3,2$，得

$$|\boldsymbol{M}|=\begin{vmatrix}1+h & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1+2h & 1 & -1 & 0 & 0\\ 1+3h & 0 & 1 & -1 & 0\\ 1+4h & 0 & 0 & 1 & -1\\ 1+5h & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5+15h & 0 & 0 & 0 & 0\\ 4+14h & 1 & 0 & 0 & 0\\ 3+12h & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2+9h & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1+5h & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=5+15h.$$

所以，$|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{M}|=5+15h.$

而

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 2 & 1\\ & & & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \beta_4\\ \beta_5\end{bmatrix}，记 \boldsymbol{N}_5=\begin{bmatrix}2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 2 & 1\\ & & & 1 & 2\end{bmatrix}，则$$

$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{N}_5\boldsymbol{A}$, $|\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{N}_5(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})|=|\boldsymbol{N}_5|$. 下面用两种方法求$|\boldsymbol{N}_5|$.

方法一 化下（上）三角形.

$$|\boldsymbol{N}_5|=\begin{vmatrix}2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 2 & 1\\ & & & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6/5 & 0 & & & \\ 1 & 5/4 & 0 & & \\ & 1 & 4/3 & 0 & \\ & & 1 & 3/2 & 0\\ & & & 1 & 2\end{vmatrix}=6. \quad (\text{或}|\boldsymbol{N}_5|=\begin{vmatrix}2 & 1 & & & \\ 0 & 3/2 & 1 & & \\ & 0 & 4/3 & 1 & \\ & & 0 & 5/4 & 1\\ & & & 0 & 6/5\end{vmatrix}=6.)$$

由此得，$|\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{N}_5|=6.$

方法二 递推法

将$|\boldsymbol{N}_5|$按照第一列展开，得

$$|\boldsymbol{N}_5|=2|\boldsymbol{N}_4|-\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=2|\boldsymbol{N}_4|-|\boldsymbol{N}_3|$$

因此，

$$|\boldsymbol{N}_5|-|\boldsymbol{N}_4|=|\boldsymbol{N}_4|-|\boldsymbol{N}_3|=|\boldsymbol{N}_3|-|\boldsymbol{N}_2|=|\boldsymbol{N}_2|-|\boldsymbol{N}_1|=1.$$

所以，

$$|\boldsymbol{N}_5|=|\boldsymbol{N}_4|+1=|\boldsymbol{N}_3|+2=|\boldsymbol{N}_2|+3=|\boldsymbol{N}_1|+4=6.$$

由此得，$|\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{N}_5|=6.$

四、(共 26 分，第 1 小题 12 分，第 2 小题 14 分)

1、（12 分）**解** (1) 由于 $a_{ij}=A_{ij}, a_{12}=2$，所以一方面，将 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 1 行展开，得

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=2(a_{11}^{\ 2}+a_{12}^{\ 2}+a_{13}^{\ 2})=8+2(a_{11}^{\ 2}+a_{13}^{\ 2})>0, \qquad (*)$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

另一方面，因为 $\boldsymbol{A}^*=2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，所以

$|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}^*|=\left|2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=2^3\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=8\left|\boldsymbol{A}\right|$，故 $|\boldsymbol{A}|=8$.

(2) 由（1）知 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，所以

$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.（也可由 $8\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{8}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$）

故 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{13}\end{bmatrix}$.

由（*）式可知 $a_{11}=a_{13}=0$，所以 $\boldsymbol{X}=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$.

2、（14 分）**解** 设 $\boldsymbol{X}_{4\times 2}=[\boldsymbol{X}_1,\ \ \boldsymbol{X}_2]$，其中 $\boldsymbol{X}_j, j=1,2$ 是 4 元列向量，则

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{AX}_1=\begin{bmatrix}1\\\lambda\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{AX}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\mu\end{bmatrix}$. 令

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\left[\begin{array}{cccc:cc}1&-2&3&-4&1&0\\0&1&-1&1&\lambda&1\\-1&1&-2&3&0&\mu\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:cc}1&-2&3&-4&1&0\\0&1&-1&1&\lambda&1\\0&-1&1&-1&1&\mu\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:cc}1&-2&3&-4&1&0\\0&1&-1&1&\lambda&1\\0&0&0&0&\lambda+1&\mu+1\end{array}\right],$$

当 $\lambda\neq-1$ 或 $\mu\neq-1$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解；

当 $\lambda=-1$，$\mu=-1$ 时，有无穷多解，此时

$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]\to\left[\begin{array}{cccc:cc}1&0&1&-2&-1&2\\0&1&-1&1&-1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$，分别解对应的同解的线性方程组，

$$\begin{cases} x_1 = & -x_3 + 2x_4 - 1, \\ x_2 = & x_3 - x_4 - 1 \end{cases} \text{和} \begin{cases} x_1 = & -x_3 + 2x_4 + 2, \\ x_2 = & x_3 - x_4 + 1 \end{cases}$$

得 $\boldsymbol{X}_1 = \left[-k_1 + 2k_2 - 1, k_1 - k_2 - 1, k_1, k_2\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_2 = \left[-k_3 + 2k_4 + 2, k_3 - k_4 + 1, k_3, k_4\right]^{\mathrm{T}}$.

故 $\boldsymbol{X} = \left[\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\right] = \begin{bmatrix} -k_1 + 2k_2 - 1 & -k_3 + 2k_4 + 2 \\ k_1 - k_2 - 1 & k_3 - k_4 + 1 \\ k_1 & k_3 \\ k_2 & k_4 \end{bmatrix}$，其中 k_1, k_2, k_3, k_4 为任意常数.

五、（10 分）**证**（1） 因为 $r(\boldsymbol{A}) = t$，所以存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_t & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_t \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\left[\boldsymbol{E}_t \quad \boldsymbol{O}\right]\boldsymbol{Q},$$

令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_t \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \left[\boldsymbol{E}_t \quad \boldsymbol{O}\right]\boldsymbol{Q}$，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$，且

$$r(\boldsymbol{B}_{m\times t}) = r\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_t \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\right) = t,\quad r(\boldsymbol{C}_{t\times n}) = r(\left[\boldsymbol{E}_t \quad \boldsymbol{O}\right]) = t.$$

解 (2) 方法一 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \cdot \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_3 - 2c_2]{c_3 - c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

则 $r(\boldsymbol{A}) = 2$，

令 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}_3[3 + 2(-3)]\boldsymbol{E}_3[2(\frac{1}{2})]$，$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}_3[2 + 3(-2)]\boldsymbol{E}_3[1 + 3(-1)]$，则

$\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{bmatrix}$，从而 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_2 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\left[\boldsymbol{E}_2 \quad \boldsymbol{0}\right]\boldsymbol{Q}^{-1}$.

令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_2 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}_3[2(2)]\boldsymbol{E}_3[3 + 2(3)]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{C} = \left[\boldsymbol{E}_2 \quad \boldsymbol{0}\right]\boldsymbol{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{E}_3[1 + 3(1)]\boldsymbol{E}_3[2 + 3(2)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，

则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$ 且 $r(\boldsymbol{B}_{m\times t}) = r(\boldsymbol{C}_{t\times n}) = 2$.

方法二 $\left[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}_3\right] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{r_1-3r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&2&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0&-\frac{3}{2}&1\end{array}\right]=\left[\overline{P}A,\overline{P}\right];$$

$$\begin{bmatrix}\overline{P}A\\ \hdashline E_3\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[c_3-3c_2]{c_3-c_1}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\ \hline 1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\overline{P}A\overline{Q}\\ \hdashline \overline{Q}\end{bmatrix}.$$

则 $r(A)=2$，且 $\overline{P}A\overline{Q}=\begin{bmatrix}E_2&0\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow A=(\overline{P})^{-1}\begin{bmatrix}E_2&0\\0&0\end{bmatrix}(\overline{Q})^{-1}$. 令

$$B=(\overline{P})^{-1}\begin{bmatrix}E_2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\0&3\end{bmatrix};$$

$$C=\begin{bmatrix}E_2&0\end{bmatrix}(\overline{Q})^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}.$$

则 $A=BC$，且 $r(B_{3\cdot 2})=r(C_{2\cdot 3})=2$.