______________ ____班 年级____

# 2023～2024 学年第 1 学期期末考试试卷

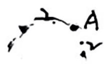
## 《概率论与数理统计 1》(B 卷 共 4 页)

(考试时间：2023 年 12 月 15 日)

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 成绩 | 核分人签字 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | | |

一、填空题 (每空 3 分，共 15 分)

1. 设点 $A$ 为周长等于 5 的圆周上的一个定点，若在该圆周上任取一点 $B$，则劣弧 $AB$ 长度不超过 2 的概率为__________.




2. 设事件 $A,B$ 满足 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，且 $0<P(B)<1$，则 $P(A\,|\,\overline{B})+P(\overline{A}\,|\,B)=$________.

3. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本的二阶中心矩 $M_2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则 $D(M_2)=$__________.

4. 设二维随机变量 $(X,Y)$ 服从二维正态分布 $N(1,1;2^2,2^2;-0.5)$，令 $U=2X-Y$，$V=X-2Y$，则 $U$ 与 $V$ 的相关系数 $\rho_{U,V}=$ ____

5. 设随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，且都服从均匀分布 $U(-1,1)$，则有 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\cos(X_i)\xrightarrow{P}$__________

二、选择题 (每题 3 分，共 15 分)

1. 设总体 $X$ 的概率密度函数为 $f(X)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $(X_1,X_2,X_3)$ 是取自 $X$ 的简

单随机样本，则下列不是$\theta$的无偏估计的是(　　).

$=X_1$　　　　B. $\hat{\theta}_2=\frac{1}{3}(X_1+2X_2+X_3)$

C. $\hat{\theta}_3=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$　　　　D. $\hat{\theta}_4=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$

设随机变量$X$的概率密度函数$f(x)$是偶函数，分布函数为$F(x)$，则对任意正实数$a$，下列式子正确的是（　　）.

A. $F(-a)=1-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$　　　　B. $F(-a)=F(a)$

C. $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$　　　　D. $F(-a)=2F(a)-1$

3. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)(n\geq 3)$为来自正态总体$N(0,1)$的简单随机样本，则下列选项正确的是(　).

A. $n\overline{X}\sim N(0,1)$　B. $\frac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t_{n-1}$　C. $nS^2\sim\chi_n^2$　D. $\frac{(n-2)X_2^2}{\sum_{i=3}^n X_i^2}\sim F_{1,n-2}$

4. 设离散随机变量$X_1$与$X_2$相互独立且服从同一分布：$P\{X_i=-1\}=P\{X_i=1\}=\frac{1}{2}$，$i=1,2$，若$U=\max\{X_1,X_2\}$，则$E(U)=$(　　).

A. $\frac{3}{4}$　　B. 0　　C. $\frac{1}{4}$　　D $\frac{1}{2}$

5. 设$X_n$服从二项分布$B(n,0.5)$，$n=1,2,\cdots$，$\Phi(x)$为标准正态分布的分布函数，则有$\lim P\left\{(X_n-0.5n)/\sqrt{n}\leq x\right\}=$(　　).

A. $\Phi(0.5x)$　　B. $\Phi(x)$　　C. $\Phi(2x)$　　D. $\Phi(4x)$

三、(10 分) 设一种新的检测方法对一种特定疾病的诊断准确率为 90% (有病被正确诊断和没病被正确诊断的概率都是 90%). 据调查某地区居民这种特定疾病的发病率为 0.2, 现从该地区随机抽一个居民，被诊断患病，问该居民确实患病的概率是多少？

四、(16 分) 设二维随机变量$(X,Y)$的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}c(1-x)y, 0<y<x<1,\\ 0, 其他.\end{cases}$$

(1) 确定常数$c$；(2) 求$X$和$Y$的边缘概率密度函数；(3) 求$X$和$Y$的条件概率密度函数；(4) 求$P\{Y\geq X^2\}$；(5) 判断$X$和$Y$是否相互独立？

五、(10 分) 设随机变量 $X$ 服从参数为 $\dfrac{1}{3}$ 的两点分布，随机变量 $Y$ 服从参数为 1 的指数分布，且 $X$ 与 $Y$ 相互独立，求 $Z = 2X - 3Y + 1$ 的分布函数.

六、(12 分) 某水果商店冬季每周购进一批苹果，已知该店苹果一周的销售量 $X$ (单位：千克）服从区间[100,200]上的均匀分布，商店每售出 1 千克苹果可获利 1.5 元. 若进货量小于销售量，商店可以从附近其他商店调剂供应，此时每售出 1 千克苹果获利 1 元；若进货量超过销售量，则没售出的苹果每千克需付耗损、储藏等费用 0.5 元. 问该商店一周应购进多少千克苹果才能获得最大的期望利润?

七、(12 分) 设总体 $X$ 的概率密度函数为

$$f(x;\lambda,\alpha)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x-\alpha)}, & x\ge\alpha,\\ 0, & x<\alpha,\end{cases}$$

其中$\lambda>0$, 且$\lambda,\alpha$均为未知参数, $(X_1,\ldots,X_n)$是来自总体$X$的简单随机样本, $(x_1,\ldots,x_n)$为样本观测值. 求$\lambda$和$\alpha$的最大似然估计值$\hat{\lambda}$和$\hat{\alpha}$.

八、(10 分) 一个药厂生产一种新的麻醉剂，设$\mu_1, \mu_2$分别表示使用原有麻醉剂和使用新麻醉剂后至药效开始起作用的时间间隔的总体$X$和$Y$的均值，总体方差分别为$\sigma_1^2$和$\sigma_2^2$，两个总体相互独立且均服从正态分布．$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$为分别来自总体$X$和$Y$的简单随机样本，两个样本的样本均值分别为$\bar{X}$和$\bar{Y}$，样本方差分别为$S_1^2$和$S_2^2$.

(1) 若$\sigma_1^2$和$\sigma_2^2$已知，求$2\mu_1 - \mu_2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间；

(2) 若$\mu_1$和$\mu_2$未知，在显著性水平$\alpha$下，给出假设$H_0: 2\sigma_1^2 \le 3\sigma_2^2, H_1: 2\sigma_1^2 > 3\sigma_2^2$的检验统计量和拒绝域.