1 Einführung

1.1 Zahlenmengen S1,331

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$; $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$; $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ..\}$;
$\mathbb{Q} = \{x | x = {}^p/_q$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $(q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})\}$; $\mathbb{R} = zB\ \sqrt{2}, \pi, \phi$

1.2 Mengenlehre S334

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Schnittmenge:	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$	$A \cap B = \{0, 1, 2\}$
Vereinigungsmenge:	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$	$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
Differenzmenge:	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$	$A \setminus B = \{-2, -1\}$
Produktmenge:	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$	
Kommutativgesetz:	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetz:	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributivgesetz:	$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1.3 Beweismethoden S5

1.4 Spezielle Ungleichungen S30

Bernoulli-Ungleichung: $(1 + a)^n > 1 + n \cdot a$ für $n \in N, n \geq 2, a \in R, a > -1, a \neq 0$

Binomische Ungleichung: $|a \cdot b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$ $|a - b| \leq |a| + |b|$ $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Geometrisches und arithmetisches Mittel:

für $a_i \geq 0,\ n \in \mathbb{N},\ i \in \{1, 2, ..., n\}$: $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, siehe Br. S.19/20

Minima/Maxima: $\min\{a_i\} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \max\{a_i\}$

Betragsungleichung: $-c < x < c \iff |x| < c$

1.5 Umgebung

Jedes offene Intervall, dass die Zahl a enthält, heisst eine Umgebung von a. Schreibweise: U(a)

Es sei $\epsilon > 0$. Unter der ϵ-Umgebung von a versteht man das offene Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$. Schreibweise: $U_\epsilon(a)$

Eine ϵ-Umgebung von a ohne die Zahl a selbst wird punktierte ϵ-Umgebung von a genannt. Schreibweise: $\dot{U}_\epsilon(a) = U_\epsilon(a) \setminus a$

1.6 Summenzeichen S7

mit $1 \leq m \leq n$ Die Laufvariable i wird immer um 1 aufaddiert. i immer kleiner-gleich n (z.B. wenn $i \in \mathbb{R}$)

$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$; $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1\ j}^{n\ j} a_{i+j}$; $\sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a$; $\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + \beta b_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i + \beta \sum_{i=1}^{n} b_i$

1.7 Spezielle endliche Reihen S19

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

1.8 Produktzeichen S7

$a_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$

1.9 Fakultät S13

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ für n $\in \mathbb{N}, n \geq 3$ $n! > 2^n$ [1]

1.10 Binomischer Satz S12

$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n\ i} \cdot b^i$ $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ $\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$ $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n\ i)!}$ $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

1.11 Einige Wurzeln

$\sqrt{2} = 1.414$; $\sqrt{3} = 1.732$; $\sqrt{5} = 2.236$; $\sqrt{6} = 2.449$; $\sqrt{7} = 2.645$; $\sqrt{8} = 2.828$;

2 Funktionen$_{\text{S48}}$

2.1 Einleitung

Schreibweisen:
$f : D_f \to W_f$ mit $x \mapsto f(x)$
$f : x \mapsto f(x)$ mit $x \in D_f$
$y = f(x)$ mit $x \in D_f$

Definitionen:
$x \Rightarrow$ Argument oder Variable von f
$f(x) \Rightarrow$ Funktionswert, Wert von f an der Stelle x
$x \mapsto f(x)$ oder $y = f(x) \Rightarrow$ Zuordnungsvorschrift
$D_f \Rightarrow$ Definitonsmenge oder Definitionsbereich
$W_f \Rightarrow$ Wertemenge oder Wertebereich

Achsenbezeichnungen:
Abszisse = X-Achse
Ordinate = Y-Achse
Applikate = Z-Achse

2.2 Transformationen

$\pm\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}(\pm\, \mathbf{b}\mathbf{x} \pm\ \mathbf{c}) \pm\, \mathbf{d}$
1.schieben 2.stecken

$\pm\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}(\pm\, \mathbf{b}(\mathbf{x} \pm\ \mathbf{c})) \pm\, \mathbf{d}$
1.strecken 2.schieben

1. **a** Vertikale (y-Richtung) Streckung um **a** bzw. Spiegelung an x bei **-a**
2. **b** Horizontale (x-Richtung) Streckung um **1/b** bzw. Spiegelung an y bei **-b**
3. **c** Verschiebung nach links (**+c**) oder rechts (**-c**) (vertikale Verschiebung)
4. **d** Verschiebung nach oben (**+d**) oder unten (**-d**) (horizontale Verschiebung)

2.2.1 Spiegelung

an X-Achse: Polarität von f ändern
an Y-Achse: Polarität von x ändern

2.3 Spezielle Funktionen

Identität:
Schreibweise: $f(x) = x$

Definition:
Der X-Wert ist gleich dem Y-Wert

Signumfunktion:
Schreibweise: $f(x) = sgn(x)$

Definiton: $y = \begin{cases} 1, \text{ falls } x > 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0 \\ \text{-1, falls } x < 0 \end{cases}$

Gauss-Klammer (floor):
Schreibweise: $f(x) = [x]$

Definition:
rundet den Y-Wert ganzzahlig ab

2.4 Umkehrfunktion$_{\text{S52}}$

Schreibweise: $f^{\ 1}$ Definition: ein Y-Wert darf nur einmal vorkommen und W_f muss $\in D_f$ sein
Ist eine Funktion f auf einem Intervall D streng monoton, dann existiert für dieses Intervall die Umkehrfunktion $f^{\ 1}$

2.5 Verkettung oder mittelbare Funktion

Schreibweise: $h(x) = g \circ f \Rightarrow h(x) = g(f(x))$ Sprechweise: g *nach* f Wertebereiche: $W_h = W_g \to D_h = D_f$
$h(x) = f \circ g \Rightarrow h(x) = f(g(x))$ f *nach* g $W_h = W_f \to D_h = D_g$

Wichtig: Funktionen sind nacheinander ausführbar, wenn der $W_f \subset D_g$ bzw. $W_g \subset D_f$ ist.

2.6 Beschränktheit$_{\text{S51}}$

2.7 Monotonie$_{\text{S50}}$

monoton wachsend $\longrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
monoton fallend $\longrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton wachsend $\longrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
streng monoton fallend $\longrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

2.8 Gerade/Ungerade Funktionen S51

Funktion ist **gerade** wenn $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ Achsensymmetrisch
Funktion ist **ungerade** wenn $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrisch
Funktion ist **periodisch** wenn $f(x) = f(x \pm p) \Rightarrow$ wiederholt sich im Abstand p

für beide gilt: $\underbrace{x \in D_f \wedge -x \in D_f}_{D_f \text{ ist } \textbf{symmetrisch}}$

Wichtig: Um zu beweisen das eine Funktion gerade bzw. ungerade ist, zeigt man indem man beweist, dass es für <u>einen</u> Punkt <u>nicht</u> stimmt!

2.9 Ganzrationale Funktionen (Polynom) S62,64

Aussehen:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n\ \,1} x^{n\ \,1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Nullstellen bestimmen:

- falls Polynom $(ax^2 + bx + c)$ quadratische Lösungsformel: $\frac{\ b\ \ \sqrt{b^2\ \ 4ac}}{2a}$
- faktorisieren mit Hilfe von Binomen
- faktorisieren mit Hilfe des **Hornerschemas** S957

Wichtig: eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat höchstens n verschiedene Nullstellen

2.10 Hornerschema S965

- Pfeile $\Rightarrow$ Multiplikation
- Zahlen pro Spalte werden addiert

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
x_1		$b_{n-1}x_1$	$b_{n-2}x_1$	$\cdots$	b_1x_1	b_0x_1
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	$f(x_1)$

$x_1 \Rightarrow$ Nullstelle (muss erraten werden, durch **ausprobieren**!!)
oberste Zeile = zu zerlegendes Polynom
Ergebnis der Form: $f(x) = (x - x_1)(g(x) + f(x_1))$

Beispiel:
$f(x) = x^3 - 67x - 126$

	1	0	-67	-126
$x_1 = -2$		-2	4	$+126$
	1	-2	-63	$0 = f(-2)$
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
	b_2	b_1	b_0	

$\Rightarrow f(x) = (x - x_1)(b_2x^2 + b_1x + b_0) = (x+2)(x^2 - 2x - 63)$
Linearfaktor: $(x - x_1)$ Polynom vom Grad $n-1$: $g(x)$

2.11 Gebrochenrationale Funktionen S62,66

Aussehen:

$$f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m\ \,1} x^{m\ \,1} + \cdots + a_1 x + a_0}{a_n x^n + a_{n\ \,1} x^{n\ \,1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

Definitionen:

- wenn $m < n$ ist f **echt gebrochen**, wenn $m \geq n$ ist f **unecht gebrochen**
- x_1 ist **Nullstelle** von f falls $p_m(x_1) = 0$ und $q_n(x_1) \neq 0$ gilt $\rightarrow$ k-fache Nullstelle
- x_1 heisst **Polstelle** von f falls $q_n(x_1) = 0$ und $p_m(x_1) \neq 0$ gilt $\rightarrow$ k-fache Polstelle
- x_1 heisst **Lücke** von f falls $q_n(x_1) = 0$ und $p_m(x_1) = 0$ gilt.
- Jede unecht gebrochene rationale Funktion lässt sich als Summe einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenen Funktion schreiben. Dies ist möglich mit der **Polynomdivision** S15

2.12 Partialbruchzerlegung S15

$f(x) = \frac{x^2+20x+149}{x^3+4x^2-11x-30} \Rightarrow$ Nenner faktorisieren mit Hornerschema S965, Binom $\Rightarrow x^3+4x^2-11x-30 = (x+2)(x^2+2x-15) = (8x+2)(x+5)(x-3)$

Ansatz:

$$f(x) = \frac{x^2+20x+149}{x^3+4x^2-11x-30} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+5} = \frac{A(x+2)(x+5)+B(x-3)(x+5)+C(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)(x+5)}$$

Gleichungssystem **(Zähler gleichsetzen)** aufstellen mit beliebigen x_i-Werten (am Besten Polstellen oder 0,1,-1 wählen):

$$\begin{array}{l} x_1 = 3: \; -9+60+149 = A\cdot 5\cdot 8 \;\; \Rightarrow A = 5 \\ x_2 = -2: \; -4-40+149 = B(-5)\cdot 3 \;\Rightarrow B = -7 \\ x_3 = -5: \; -25-100+149 = C(-8)(-3) \Rightarrow C = 1 \end{array} \quad \Rightarrow f(x) = \frac{5}{x-3} + \frac{7}{x+2}\frac{1}{x+5}$$

weitere Ansätze für andere Typen von Termen: (Mehrere Werte für x verwenden, auch wenn kein Koeffizient 0 wird.)

$$f(x) = \frac{5x^2-37x+54}{x^3-6x^2+9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2+Bx(x-3)+Cx}{x(x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{1,5x}{x^3-6x^2+12x-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^2+B(x-2)+C}{(x-2)^3}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+2x^2-2x-12} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+6} = \frac{A(x^2+4x+6)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+4x+6)}$$

2.13 Trigonometrische Funktionen S76ff Arcus S86

sin : $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow W_f = [-1,1]$
cos : $D_f = [0,\pi] \rightarrow W_f = [-1,1]$
tan : $D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow W_f = \mathbb{R}$
cot : $D_f = (0,\pi) \rightarrow W_f = \mathbb{R}$
Orthogonalitätsbedingung: $m_1 \cdot m_2 = -1$

arcsin : $D_f = [-1,1] \rightarrow W_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
arccos : $D_f = [-1,1] \rightarrow W_f = [0,\pi]$
arctan : $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
arccot: $D_f = [-1,1] \rightarrow W_f = (0,\pi)$

2.14 Schwingungen S83

2.15 Potenz- und Wurzelfunktionen S8,71

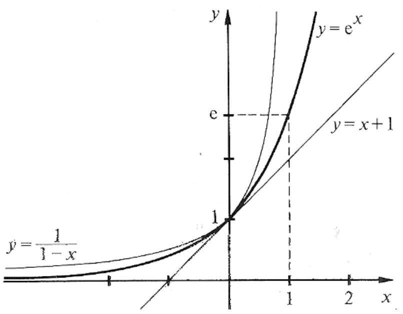
gerade Potenzfunktion: $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}_0^+$ **ungerade Potenzfunktion:** $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}$
gerade Wurzelfunktion: $D_f = \mathbb{R}^+ \rightarrow W_f = \mathbb{R}$ **ungerade Wurzelfunktion:** $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}$

2.16 Hyperbolische Funktionen S88 Areahyperbolicus S92

$\sinh(x) = \frac{e^x \; e^{-x}}{2}; D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}$ $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}; D = \mathbb{R}, W = [1,\infty)$
$\tanh(x) = \frac{e^x \; e^{-x}}{e^x+e^{-x}}; D = \mathbb{R}, W = (-1,1)$

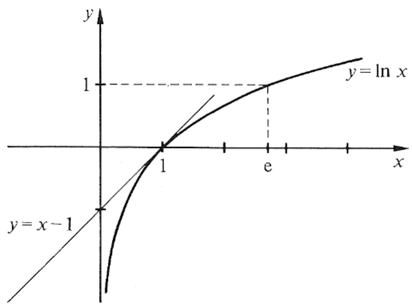
2.17 Logarithmus- und e-Funktion S9,72

e-Funktion: $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}^+$



$e^x \geq 1+x$ für $x \in \mathbb{R}$
$e^x \leq \frac{1}{1+x}$ für $x < 1$
$e = \lim_{n \,!\, 1}(1+\frac{1}{n})^n$

Logartihmus-Funktion: $D_f = \mathbb{R}^+ \rightarrow W_f = \mathbb{R}$



$1 - \frac{1}{x} \leq ln(x) \leq x-1$

2.18 $\varepsilon - M$ - Kriterium S53

$|f(x) - g| < \varepsilon$ für alle $x \geq M(\varepsilon)$

2.19 $\varepsilon - \delta$ - Kriterium S53

$|f(x) - g| < \varepsilon \qquad 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \qquad$ für $x \to x_0$

2.20 K-Kriterium S54

$f(x) > K$ für $x > M$, $K \in \mathbb{R}$
$f(x) < k$ für $x < m$, $k \in \mathbb{R}$

3 Zahlenfolgen S18,469

3.1 Einführung S18

arithmetische Folge:
$a_1 = c$ und $a_{n+1} = a_n + d$

geometrische Folge:
$a_1 = c$ und $a_{n+1} = q * a_n$

konstante Folge:
$a_1 = c$ und $a_{n+1} = c$

$$\underbrace{d = a_{n+1} - a_n}_{Differenz}$$

$$\underbrace{q = \frac{a_{n+1}}{a_n}}_{Quotient}$$

Monotonie			
$d \geq 0$	$q \geq 1$	monoton wachsend	$\uparrow$
$d > 0$	$q > 1$	streng monoton wachsend	$\Uparrow$
$d \leq 0$	$0 < q \leq 1$	monoton fallend	$\downarrow$
$d < 0$	$0 < q < 1$	streng monoton fallend	$\Downarrow$

3.2 Beschränktheit S51,469

Beschränkt wenn $k \leq a_n \leq$ K, wobei k bzw. K die untere bzw. obere Schranke ist

3.2.1 Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte und monotone Zahlenfolge ist konvergent.

3.3 Grenzwertsätze S470

3.4 Grenzwerte von rekursiven Folgen

1. Hypothetischer Grenzwert ausrechnen

   $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a \qquad$ z.B. $\sqrt{a_n} + 1 = a_{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{a} + 1 = a$

   $\Rightarrow x = \frac{3 \quad \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$ Möglicher Grenzwert $\to$ wenn Folge beschränkt und monoton

2. Beschränktheit mittels des hypothetischen Grenzwertes
   $\Rightarrow$ mit vollständider Induktion beweisen (Auch mit Ungleichungen lösbar)
   z.B. Induktionsanfang $A(1)$: $\quad a_1 < \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3 \Rightarrow 1 < 3$
   Induktionsschritt $A(n+1)$: $\quad a_n < 3 \qquad |\sqrt{\cdots} \quad | + 1$

   $$\underbrace{\sqrt{a_n} + 1}_{a_{n+1}} < \sqrt{3} + 1 < 3$$

3. Monotonie annehmen (ev. erste Glieder berechnen)
   $\Rightarrow$ mit vollständiger Induktion beweisen (Auch mit q/d-Kriterium oder Ungleichungen lösbar)
   z.B. Induktionsanfang $A(1)$: $\quad a_1 < a_2 \Rightarrow 1 < 2$
   Induktionsschritt $A(n+1)$: $\quad a_n < a_{n+1} \qquad |\sqrt{\cdots} \quad | + 1$

   $$\underbrace{\sqrt{a_n} + 1}_{a_{n+1}} < \underbrace{\sqrt{a_{n+1}} + 1}_{a_{n+2}}$$

4. Grenzwert bestimmen
   $\Rightarrow$ Aus 2. und 3. folgt das $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \to$ Da Folge nach oben beschränkt und streng monoton wachsend

3.5 $\varepsilon - n_0$ - Kriterium S470

$|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$

4 Grenzwerte von Funktionen S53

4.1 Berechnung von Grenzwerten S56

Technik des *Erweiterns*: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} \Longrightarrow$ Erweitern mit $\frac{1}{n^2} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

BinomischeFormel: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

4.1.1 Spezielle Grenzwert Sätze

$\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to x_0} f(x)| = |g|$ $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^n = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n = g^n$ $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{g}$

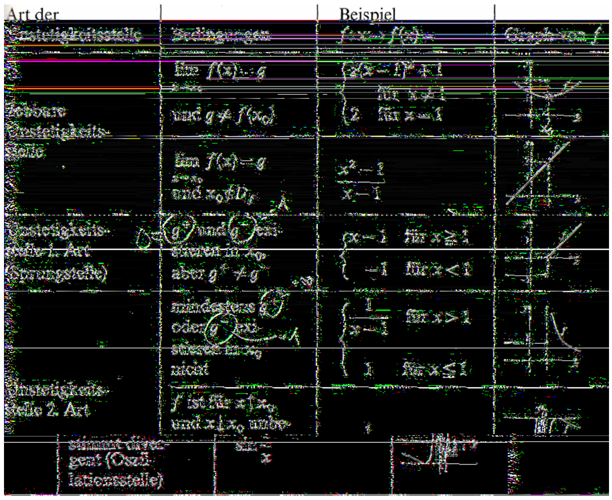
4.1.2 Einschliessungsprinzip S55

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = g \wedge a_n, b_n$ sind konvergent $a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$

4.2 Links-/Rechtsseitiger Grenzwert S54

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\searrow x_0} f(x) = g^+$

Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x) = g^-$



4.3 Konvergenz, Divergenz S474

Konvergenz: $g^+ = g^- = g \in \mathbb{R}$ oder: monoton und beschränkt
Bestimmte Divergenz: $g = +\infty$ oder: $g = -\infty$
Unbestimmte Divergenz: Es existiert kein Grenzwert
(g für Grenzwert)

4.4 Stetigkeit S59

„Wenn man die Funktion mit einem Strich zeichnen kann“:
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

4.5 Übertragungsprinzip

f besitzt genau an der Stelle x_0 den Grenzwert g, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $< x_n >$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$

Bsp: $f(x) = x - [x]$ und $x_0 = -1$ $x_n = -1 - \frac{1}{n} \to \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = -1$ $x'_n = -1 + \frac{1}{n} \to \lim\limits_{n\to\infty}(x'_n) = -1$

wenn nun gilt

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-1 - \frac{1}{n} - [-1 - \frac{1}{n}]) = 1 \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-1 + \frac{1}{n} - [-1 + \frac{1}{n}]) = 0$

Dann besitzt die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 keinen Grenzwert g.

4.6 Spezielle Grenzwerte S58

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} = 0\ (a > 1;\ \alpha, \beta > 0)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$ $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ $\lim\limits_{x\to 2} \ln\sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}} = \ln 2$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ $\lim\limits_{x\to 0+} x \ln x = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{-x}} = 1$ $\lim\limits_{x\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \end{cases}$ $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0\ (x>0)$ $\qquad$ $\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{q^x} = 0\ (q>1;\ k\in\mathbb{N})$ $\qquad$ $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{p} = 1$

$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$

4.7 Asymptotenbestimmung S15

Ausrechnen der Asymptote einer gebrochen rationalen Funktion $r : x \mapsto r(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$:

	$m<n$	$m=n$	$m>n$
$\lim_{x\to\infty} r(x) =$	0	$\frac{a_m}{b_n}$	$+\infty$ oder $-\infty$
Asymptote	x-Achse	Parallel zur x-Achse $y = g(x) = \frac{a_m}{b_n}$	Ganzrationaler Teil der Polynomdivision S15

5 Differentialrechnung S443

$f'(x_0) = \frac{df}{dx}\big|_{x=x_0} = (\frac{d}{dx}f)_{x=x_0} = Df(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$ und $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

f^{-1} ist differenzierbar wenn: f differenzierbar und umkehrbar ist und wenn $f'(x) \neq 0$ ist.
Rechtsseitige $f'_r(x_0)$ bzw. linksseitige $f'_l(x_0)$ Ableitung.
Falls $f'_r(x_0) = f'_l(x_0)$ und f an der Stelle x_0 stetig, dann ist f an der Stelle x_0 differenzierbar.

5.1 Ableitungsregeln S449

5.2 Einige Ableitungen S445

$(|x|)' = sgn(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}, x \neq 0$ $\qquad$ $(\tan x)' = 1+\tan^2 x, x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2k+1}{2}\pi\right\}$ $\qquad$ $(\cot x)' = -(1+\cot^2 x), x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$

$\ln(|x|)' = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $(\tanh x)' = 1-\tanh^2 x$ $\qquad$ $(\coth x)' = 1-\coth^2 x$

5.3 Höhere Ableitungen S451

$(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x, k\in\mathbb{N}_0$ $\qquad$ $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x, k\in\mathbb{N}$

$(\cos x)^{(2k-1)} = (-1)^k \cos x, k\in\mathbb{N}$ $\qquad$ $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x, k\in\mathbb{N}$

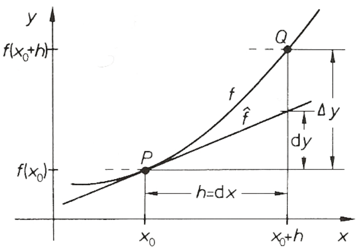
$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$ $\qquad$ $(\sqrt{x})^{(n)} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n x^{n-1}\sqrt{x}}$

$\left(ln\frac{1+x}{1-x}\right)^{(n)} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} + \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$ $\qquad$ $(x\cdot e^x)^{(n)} = n\cdot e^x + x\cdot e^x = e^x(n+x)$

5.4 Tangentengleichung

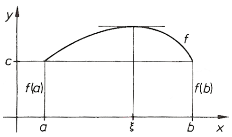
$\hat{f}(x) = \underbrace{\overbrace{(x-x_0)}^{dx}\cdot f'(x_0)}_{dy} + f(x_0)$ $\qquad$ (x_0 =Entwicklungspunkt)

5.5 Differential, Fehlerrechnung S865



absoluter Fehler: $|\Delta y| \approx |dy| = |f'(\bar{x})|\cdot|dx| \leq |f'(\bar{x})|\cdot|\delta|$
relativer Fehler: $|\Delta y| \approx |\frac{dy}{y}| = |\frac{f'(x)}{y}|\cdot|dx| \leq |\frac{f'(x)}{y}|\cdot|\delta| = |\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot|\delta|$
$|\frac{dx}{x}|\hat{=}$relative Fehler Input $\qquad$ $|\frac{dy}{y}|\hat{=}$relative Fehler Output $\qquad$ Einheit= [1]
Auf n-Stellen nach dem Komma genau $\Rightarrow$ absoluter Fehler: $\delta = \pm 0.5\cdot 10^{-n}$

5.6 Mittelwertsatz S453



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$
$\xi = a + \delta(b-a)$

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\delta h)$
$f(x+h) = h\cdot f' f(x+\delta h) + f(x)$
$\xi = x+\delta h \qquad 0<\delta<1$

5.7 Taylor Polynom S454,483

(x_0 = Entwicklungspunkt) $f(x_0+h) = f(x_0) + f^{0}(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(x_0,h)$
$h = x - x_0$

R_n(Lagrange): $R_n(x_0,h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\delta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, (0<\delta<1);$ $\quad \lim_{n\,!\,1} R_n(x_0,h) = 0 \Longrightarrow f(x_0+h) = \sum_{n=0}^{1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$

MacLaurinsche-Form (gilt für $x_0 = 0, h = x$): $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + R_n;$ $\quad R_n = \frac{f^{(n+1)}(\delta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, (0<\delta<1);$

5.7.1 Einige Reihen S19,476,1073

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots + (-1)^{n\ 1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n\ 1)!} + \overbrace{(-1)^n \cdot \frac{\cos(\vartheta x)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}}^{R_n}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \ldots + (-1)^{n\ 1} \cdot \frac{x^n}{n} + \frac{(\ 1)^n}{(1+\vartheta x)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

5.8 Bernoulli-de l'Hospital S56

$lim_{x\#x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = lim_{x\#x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$, dies gilt für: „$\frac{0}{0}$" 1. Regel, oder „$\frac{1}{1}$" 2. Regel; Zähler und Nenner separat ableiten!

5.8.1 Spezialfälle

$0 \cdot \pm\infty \Rightarrow \frac{f_1}{\frac{1}{f_2}} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{f_2}{\frac{1}{f_1}} = \frac{1}{1}$ $\qquad \infty - \infty \Rightarrow \frac{\frac{1}{f_2}\ \frac{1}{f_1}}{\frac{1}{f_1 \cdot f_2}}$ $\qquad f^g : \left\{ \begin{array}{c} 1^1 \\ 0^0 \\ \infty^0 \end{array} \right\} = e^{g\ ln(f)} = \left\{ \begin{array}{c} e^{1\ 0} \\ e^{0\ \ 1} \\ e^{0\ 1} \end{array} \right\}$

5.9 Kurvenuntersuchungen S260

1. Definitionsbereich S48 D_f und Abschätzung des Wertebereichs W_f, wenn möglich anhand der Extremalstellen
2. Symmetrie und Periodizität S52
3. Nullstellen
4. Stetigkeit S59 und Differenzierbarkeit S443 (Berechnung der Ableitungen)
5. Extremwerte, Wendepunkte und Wendetangenten, Monotonie, Krüm94Tf -154434 Td 3F10hlt]TJ 0.545 0.271 0.075 rg 0.545

5.9.3 Konvexität - Krümmungsverhalten S253

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
	≥ 0				konvex (linksgekrümmt)
	> 0				streng konvex (linksgekrümmt)
	≤ 0				konkav (rechtsgekrümmt)
	< 0				streng konkav (rechtsgekrümmt)

5.9.4 Wendepunkte (Terassenpunkt) S255

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
	$= 0$	$\neq 0$			Wendepunkt
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$			Terassen- oder Sattelpunkt
Zweite Variante Falls bei $f''(x)$ an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort ein Wendepunkt					

5.9.5 Asymptote S259

Die Asymptote existiert nur wenn alle drei eigentlichen Grenzwerte existieren. Für Funktionen, die nicht gebrochenrational sind, kann die Asymptote wie folgt bestimmt werden.

Asymptote $g : y = ax + b \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax - b) = 0$

$a = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ oder $a = \lim\limits_{x \to \infty} f'(x)$
gilt jedoch nur wenn in der ersten Formel die Bedingung für Bernoulli-de l'Hospital erfüllt sind.
$b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax)$

Dies alles gilt sinngemäss auch für $x \to -\infty$

Spezialfall: Wenn $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ existiert, so ist $a = 0$ und $b = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

5.10 Schnittwinkel von zwei Funktionen

1. Bei einem Schnittpunkt gilt: $f(x) = g(x)$
2. Schnittpunkt $S(x_0, y_0)$ berechnen
3. Falls dies eine kubische Gleichung ist, den Wert durch ausprobieren herausfinden (Bereich von $-3 \ldots 3$)
4. Funktionen ableiten: $f'(x)$ und $g'(x)$
5. Steigungen berechnen: $f'(x_0) = m_1$ und $g'(x_0) = m_2$
6. Schnittwinkel mit Hilfe dieser Gleichung berechnen: $tan(\sigma) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

5.10.1 Normale

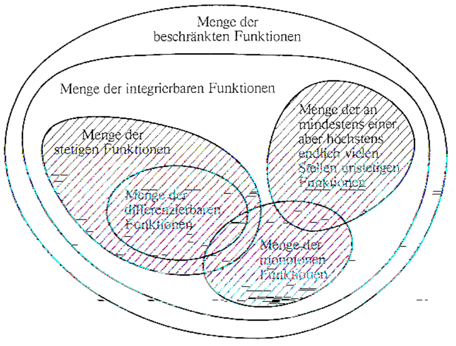
Wenn eine Normale zur Tangente berechnet werden muss gilt: $m_1 * m_2 = -1$

6 Integralrechnung S492

6.1 Bestimmtes Integral S505

$I = \int\limits_a^b f(\tilde{x})d\tilde{x} = \lim\limits_{d(Z) \to 0} S(Z) = \lim\limits_{d(Z) \to 0} O(Z) = \lim\limits_{d(Z) \to 0} U(Z)$
x: Integrationsveränderliche, f: Integranden, $[a, b]$: Integrationsintervall, a/b: untere bzw. obere Integrationsgrenze

6.2 Integrierbarkeit



Schranken vom Integral:

$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$

$\int\limits_a^b g_1(\widetilde{x})d\widetilde{x} \leq \int\limits_a^b f(\widetilde{x})d\widetilde{x} \leq \int\limits_a^b g_2(\widetilde{x})d\widetilde{x}$

6.3 Integralregeln$_{\text{S494}}$

$\int\limits_a^b \widetilde{x}^n d\widetilde{x} = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$

6.4 Flächeninhalt$_{\text{S507}}$

Inhalt der Fläche unter dem Graphen $f : A = \int\limits_a^b |f(\widetilde{x})| d\widetilde{x}$

$A = A_1 - A_2 = \int\limits_a^b f_1(\widetilde{x})d\widetilde{x} - \int\limits_a^b f_2\widetilde{x}d\widetilde{x}$ gilt auch wenn die Funktionen f_1 oder f_2 negativ werden.

6.5 Mittelwertsatz$_{\text{S509}}$

f auf $[a,b]$ stetig $\Rightarrow$ mind. eine Stelle $\xi \in (a,b)$ mit $\int\limits_a^b f(\widetilde{x})d\widetilde{x} = (b-a)f(\xi) \Rightarrow h = \frac{1}{b\ \ a}\int\limits_a^b f(\widetilde{x})d\widetilde{x}$

$h \widehat{=}$ Mittelwert der Funktion

6.6 Integralfunktion

$c \in [a,b]$ und $f(x)$ über $[a,b]$ integrierbar: $I : x \mapsto I(x) = \int\limits_c^x f(\widetilde{t})d\widetilde{t}$

6.6.1 Differenzierbarkeit$_{\text{S508}}$

$\frac{d}{dx}\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(\widetilde{t})d\widetilde{t} = f(b(x)) \cdot b^0(x) - f(a(x)) \cdot a^0(x)$

$\frac{d}{dx}\int\limits_c^x f(\widetilde{t})d\widetilde{t} = f(x)$

6.7 Unbestimmtes Integral$_{\text{S492}}$

$F(x) + C = \int f(\widetilde{x})d\widetilde{x}$

6.8 Stammfunktion$_{\text{S492}}$

Jede auf $[a,b]$ differenzierbare Funktion F nennt man Stammfunktion, wenn $F^0 = f$.
$I(x) \subset F(x)$

6.9 Rechenregeln$_{\text{S495}}$

$\int\limits_a^b f(\widetilde{x})d\widetilde{x} = F(b) - F(a)$

$\int\limits_a^b f(\widetilde{x})d\widetilde{x} = \int\limits_0^b f(\widetilde{x})d\widetilde{x} - \int\limits_0^a f(\widetilde{x})d\widetilde{x} = \int\limits_0^b f(\widetilde{x})d\widetilde{x} - (-1) \cdot \int\limits_a^0 f(\widetilde{x})d\widetilde{x}$

$|\int\limits_a^b f(x)dx| \leq \int\limits_a^b |f(\widetilde{x})|d\widetilde{x}$