

1 Einführung

1.1 Zahlenmengen S1,331

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\};$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\};$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\};$$

$$\mathbb{Q} = \{x | x = p/q \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \text{ und } (q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})\};$$

$$\mathbb{R} = \{x | x = zB \sqrt{2}, \pi, \phi\}$$

1.2 Mengenlehre S334

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Schnittmenge:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{0, 1, 2\}$$

Vereinigungsmenge:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

Differenzmenge:

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

$$A \setminus B = \{-2, -1\}$$

Produktmenge:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Kommutativgesetz:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativgesetz:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Distributivgesetz:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

1.3 Beweismethoden S5

1.4 Spezielle Ungleichungen S30

Bernoulli-Ungleichung:

$$(1 + a)^n > 1 + n \cdot a$$

$$\text{für } n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a \in \mathbb{R}, a > -1, a \neq 0$$

Binomische Ungleichung:

$$|a \cdot b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Dreiecksungleichung:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

$$|a - b| \geq ||a| - |b||$$

Geometrisches und arithmetisches Mittel:

$$\text{für } a_i \geq 0, n \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, \dots, n\} : \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \text{ siehe Br. S.19/20}$$

Minima/Maxima:

$$\min\{a_i\} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \max\{a_i\}$$

Betragsungleichung:

$$-c < x < c \Leftrightarrow |x| < c$$

1.5 Umgebung

Jedes offene Intervall, dass die Zahl a enthält, heisst eine Umgebung von a.

Schreibweise: $U(a)$

Es sei $\epsilon > 0$. Unter der ϵ -Umgebung von a versteht man das offene Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$.

Schreibweise: $U_\epsilon(a)$

Eine ϵ -Umgebung von a ohne die Zahl a selbst wird punktierte ϵ -Umgebung von a genannt.

Schreibweise: $\dot{U}_\epsilon(a) = U_\epsilon(a) \setminus a$

1.6 Summenzeichen S7

mit $1 \leq m \leq n$

Die Laufvariable i wird immer um 1 aufaddiert. i immer kleiner-gleich n (z.B. wenn $i \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i;$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1-j}^{n-j} a_{i+j};$$

$$\sum_{i=1}^n a = n \cdot a;$$

$$\sum_{i=1}^n (\lambda a_i + \beta b_i) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i + \beta \sum_{i=1}^n b_i$$

1.7 Spezielle endliche Reihen S19

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

1.8 Produktzeichen S7

$$a_n \prod_{i=1}^n (x - x_i) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

1.9 Fakultät S13

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$\text{für } n \in \mathbb{N}, n \geq 3$$

$$n! > 2^{n-1}$$

1.10 Binomischer Satz S12

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i$$

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$2^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$$

1.11 Einige Wurzeln

$$\sqrt{2} = 1.414; \quad \sqrt{3} = 1.732; \quad \sqrt{5} = 2.236; \quad \sqrt{6} = 2.449; \quad \sqrt{7} = 2.645; \quad \sqrt{8} = 2.828;$$

2 Funktionen S48

2.1 Einleitung

Schreibweisen:

$$f : D_f \rightarrow W_f \text{ mit } x \mapsto f(x)$$

$$f : x \mapsto f(x) \text{ mit } x \in D_f$$

$$y = f(x) \text{ mit } x \in D_f$$

Definitionen:

$$x \Rightarrow \text{Argument oder Variable von } f$$

$$f(x) \Rightarrow \text{Funktionswert, Wert von } f \text{ an der Stelle } x$$

$$x \mapsto f(x) \text{ oder } y = f(x) \Rightarrow \text{Zuordnungsvorschrift}$$

$$D_f \Rightarrow \text{Definitonsmenge oder Definitionsbereich}$$

$$W_f \Rightarrow \text{Wertemenge oder Wertebereich}$$

Achsenbezeichnungen:

$$\text{Abszisse} = \text{X-Achse}$$

$$\text{Ordinate} = \text{Y-Achse}$$

$$\text{Applikate} = \text{Z-Achse}$$

2.2 Transformationen

$$\pm \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}(\pm \mathbf{b} \mathbf{x} \pm \mathbf{c}) \pm \mathbf{d}$$

1.schieben 2.stecken

1. a Vertikale (y-Richtung) Streckung um **a** bzw. Spiegelung an x bei **-a**

2. b Horizontale (x-Richtung) Streckung um **1/b** bzw. Spiegelung an y bei **-b**

3. c Verschiebung nach links (**+c**) oder rechts (**-c**) (vertikale Verschiebung)

4. d Verschiebung nach oben (**+d**) oder unten (**-d**) (horizontale Verschiebung)

$$\pm \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}(\pm \mathbf{b}(\mathbf{x} \pm \mathbf{c})) \pm \mathbf{d}$$

1.strecken 2.schieben

2.2.1 Spiegelung

an X-Achse: Polarität von f ändern

an Y-Achse: Polarität von x ändern

2.3 Spezielle Funktionen

Identität:

$$\text{Schreibweise: } f(x) = x$$

Definition:

Der X-Wert ist gleich dem Y-Wert

Signumfunktion:

$$\text{Schreibweise: } f(x) = \text{sgn}(x)$$

$$\text{Definiton: } y = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Gauss-Klammer (floor):

$$\text{Schreibweise: } f(x) = [x]$$

Definition:

rundet den Y-Wert ganzzahlig ab

2.4 Umkehrfunktion S52

Schreibweise: f^{-1} Definition: ein Y-Wert darf nur einmal vorkommen und W_f muss $\in D_f$ sein

Ist eine Funktion f auf einem Intervall D streng monoton, dann existiert für dieses Intervall die Umkehrfunktion f^{-1}

2.5 Verkettung oder mittelbare Funktion

$$\text{Schreibweise: } h(x) = g \circ f \Rightarrow h(x) = g(f(x))$$

$$h(x) = f \circ g \Rightarrow h(x) = f(g(x))$$

$$\text{Sprechweise: } g \text{ nach } f$$

$$f \text{ nach } g$$

$$\text{Wertebereiche: } W_h = W_g \rightarrow D_h = D_f$$

$$W_h = W_f \rightarrow D_h = D_g$$

Wichtig: Funktionen sind nacheinander ausführbar, wenn der $W_f \subset D_g$ bzw. $W_g \subset D_f$ ist.

2.6 Beschränktheit S51

2.7 Monotonie S50

$$\text{monoton wachsend} \rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$\text{monoton fallend} \rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$\text{streng monoton wachsend} \rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$\text{streng monoton fallend} \rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

2.8 Gerade/Ungerade Funktionen **S51**

Funktion ist **gerade** wenn $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ Achsensymmetrisch

Funktion ist **ungerade** wenn $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrisch

Funktion ist **periodisch** wenn $f(x) = f(x \pm p) \Rightarrow$ wiederholt sich im Abstand p für beide gilt: $\underbrace{x \in D_f \wedge -x \in D_f}_{D_f \text{ ist symmetrisch}}$

Wichtig: Um zu beweisen das eine Funktion gerade bzw. ungerade ist, zeigt man indem man beweist, dass es für einen Punkt nicht stimmt!

2.9 Ganzrationale Funktionen (Polynom) **S62,64**

Aussehen:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Nullstellen bestimmen:

- falls Polynom $(ax^2 + bx + c)$ quadratische Lösungsformel: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- faktorisieren mit Hilfe von Binomen
- faktorisieren mit Hilfe des **Hornerschemas** **S957**

Wichtig: eine ganzrationale Funktion n -ten Grades hat höchstens n verschiedene Nullstellen

2.10 Horner Schema **S965**

- Pfeile \Rightarrow Multiplikation
- Zahlen pro Spalte werden addiert

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ x_1 & & b_{n-1}x_1 & b_{n-2}x_1 & \dots & b_1x_1 & b_0x_1 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 & f(x_1) \end{array}$$

$x_1 \Rightarrow$ Nullstelle (muss erraten werden, durch **ausprobieren!!**)

oberste Zeile = zu zerlegendes Polynom

Ergebnis der Form: $f(x) = (x - x_1)(g(x) + f(x_1))$

Beispiel:

$$f(x) = x^3 - 67x - 126$$

$$\begin{array}{c|cccc} x_1 = -2 & 1 & 0 & -67 & -126 \\ \hline & 1 & -2 & -63 & 0 = f(-2) \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & b_2 & b_1 & b_0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - x_1)(b_2 x^2 + b_1 x + b_0) = (x + 2)(x^2 - 2x - 63)$$

Linearfaktor: $(x - x_1)$ Polynom vom Grad $n - 1$: $g(x)$

2.11 Gebrochenrationale Funktionen **S62,66**

Aussehen:

$$f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$$

Definitionen:

- wenn $m < n$ ist f **echt gebrochen**, wenn $m \geq n$ ist f **unecht gebrochen**
- x_1 ist **Nullstelle** von f falls $p_m(x_1) = 0$ und $q_n(x_1) \neq 0$ gilt \rightarrow k-fache Nullstelle
- x_1 heisst **Polstelle** von f falls $q_n(x_1) = 0$ und $p_m(x_1) \neq 0$ gilt \rightarrow k-fache Polstelle
- x_1 heisst **Lücke** von f falls $q_n(x_1) = 0$ und $p_m(x_1) = 0$ gilt.
- Jede unecht gebrochene rationale Funktion lässt sich als Summe einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenen Funktion schreiben. Dies ist möglich mit der **Polynomdivision** **S15**

2.12 Partialbruchzerlegung **S15**

$$f(x) = \frac{x^2 + 20x + 149}{x^3 + 4x^2 - 11x - 30} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Nenner faktorisieren mit} \\ \text{Horner Schema **S965**, Binom} \end{array} \Rightarrow x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x+2)(x^2 + 2x - 15) = (8x+2)(x+5)(x-3)$$

Ansatz:

$$f(x) = \frac{x^2 + 20x + 149}{x^3 + 4x^2 - 11x - 30} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+5} = \frac{A(x+2)(x+5) + B(x-3)(x+5) + C(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)(x+5)}$$

Gleichungssystem (**Zähler gleichsetzen**) aufstellen mit beliebigen x_i -Werten (am Besten Polstellen oder 0,1,-1 wählen):

$$\begin{aligned} x_1 = 3 : -9 + 60 + 149 &= A \cdot 5 \cdot 8 \Rightarrow A = 5 \\ x_2 = -2 : -4 - 40 + 149 &= B(-5) \cdot 3 \Rightarrow B = -7 \\ x_3 = -5 : -25 - 100 + 149 &= C(-8)(-3) \Rightarrow C = 1 \end{aligned} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{x-3} + \frac{7}{x+2} + \frac{1}{x+5}$$

weitere Ansätze für andere Typen von Termen: (Mehrere Werte für x verwenden, auch wenn kein Koeffizient 0 wird.)

$$f(x) = \frac{5x^2 - 37x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx}{x(x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{1,5x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-2) + C}{(x-2)^3}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 2x - 12} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+6} = \frac{A(x^2+4x+6) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+4x+6)}$$

2.13 Trigonometrische Funktionen **S76ff** Arcus **S86**

$$\sin : D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow W_f = [-1, 1]$$

$$\cos : D_f = [0, \pi] \rightarrow W_f = [-1, 1]$$

$$\tan : D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow W_f = \mathbb{R}$$

$$\cot : D_f = (0, \pi) \rightarrow W_f = \mathbb{R}$$

$$\text{Orthogonalitätsbedingung: } m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\arcsin : D_f = [-1, 1] \rightarrow W_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\arccos : D_f = [-1, 1] \rightarrow W_f = [0, \pi]$$

$$\arctan : D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\text{arccot} : D_f = [-1, 1] \rightarrow W_f = (0, \pi)$$

2.14 Schwingungen **S83**

2.15 Potenz- und Wurzelfunktionen **S8,71**

gerade Potenzfunktion: $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}_0^+$ ungerade Potenzfunktion: $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}$

gerade Wurzelfunktion: $D_f = \mathbb{R}^+ \rightarrow W_f = \mathbb{R}$ ungerade Wurzelfunktion: $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}$

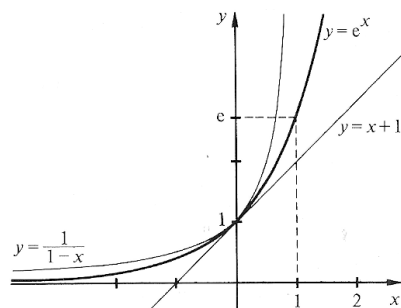
2.16 Hyperbolische Funktionen **S88** Areahyperbolicus **S92**

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; D = \mathbb{R}, W = [1, \infty)$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; D = \mathbb{R}, W = (-1, 1)$$

2.17 Logarithmus- und e-Funktion **S9,72**

e-Funktion: $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}^+$

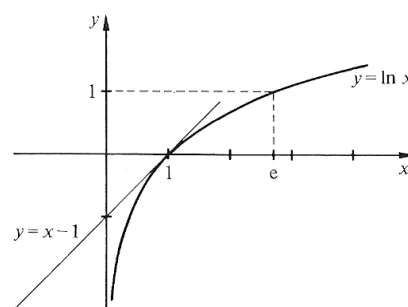


$$e^x \geq 1 + x \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

$$e^x \leq \frac{1}{1-x} \text{ für } x < 1$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

Logarithmus-Funktion: $D_f = \mathbb{R}^+ \rightarrow W_f = \mathbb{R}$



$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

2.18 $\varepsilon - M$ - KriteriumS53

$$|f(x) - g| < \varepsilon \text{ für alle } x \geq M(\varepsilon)$$

2.19 $\varepsilon - \delta$ - KriteriumS53

$$|f(x) - g| < \varepsilon \quad 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \text{für } x \rightarrow x_0$$

2.20 K-KriteriumS54

$$f(x) > K \text{ für } x > M, K \in \mathbb{R}$$

$$f(x) < k \text{ für } x < m, k \in \mathbb{R}$$

3 ZahlenfolgenS18,469**3.1 Einführung**S18

arithmetische Folge:

$$a_1 = c \text{ und } a_{n+1} = a_n + d$$

$$d = \underbrace{a_{n+1} - a_n}_{\text{Differenz}}$$

geometrische Folge:

$$a_1 = c \text{ und } a_{n+1} = q \cdot a_n$$

$$q = \underbrace{\frac{a_{n+1}}{a_n}}_{\text{Quotient}}$$

Monotonie			
$d \geq 0$	$q \geq 1$	monoton wachsend	\uparrow
$d > 0$	$q > 1$	streng monoton wachsend	$\uparrow\uparrow$
$d \leq 0$	$0 < q \leq 1$	monoton fallend	\downarrow
$d < 0$	$0 < q < 1$	streng monoton fallend	$\downarrow\downarrow$

konstante Folge:

$$a_1 = c \text{ und } a_{n+1} = c$$

3.2 BeschränktheitS51,469

Beschränkt wenn $k \leq a_n \leq K$, wobei k bzw. K die untere bzw. obere Schranke ist

3.2.1 Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte und monotone Zahlenfolge ist konvergent.

3.3 GrenzwertsätzeS470**3.4 Grenzwerte von rekursiven Folgen**

1. Hypothetischer Grenzwert ausrechnen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a \quad \text{z.B. } \sqrt{a_n} + 1 = a_{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a} + 1 = a$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{Möglicher Grenzwert} \rightarrow \text{wenn Folge beschränkt und monoton}$$

2. Beschränktheit mittels des hypothetischen Grenzwertes

\Rightarrow mit vollständiger Induktion beweisen (Auch mit Ungleichungen lösbar)

$$\text{z.B. Induktionsanfang } A(1): \quad a_1 < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < 3 \Rightarrow 1 < 3$$

$$\text{Induktionsschritt } A(n+1): \quad a_n < 3$$

$$\underbrace{\sqrt{a_n} + 1}_{a_{n+1}} < \sqrt{3} + 1 < 3$$

$$|\sqrt{\dots}| + 1$$

3. Monotonie annehmen (ev. erste Glieder berechnen)

\Rightarrow mit vollständiger Induktion beweisen (Auch mit q/d-Kriterium oder Ungleichungen lösbar)

$$\text{z.B. Induktionsanfang } A(1): \quad a_1 < a_2 \Rightarrow 1 < 2$$

$$\text{Induktionsschritt } A(n+1): \quad a_n < a_{n+1}$$

$$\underbrace{\sqrt{a_n} + 1}_{a_{n+1}} < \underbrace{\sqrt{a_{n+1}} + 1}_{a_{n+2}}$$

$$|\sqrt{\dots}| + 1$$

4. Grenzwert bestimmen

\Rightarrow Aus 2. und 3. folgt das $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \rightarrow$ Da Folge nach oben beschränkt und streng monoton wachsend

3.5 $\varepsilon - n_0$ - Kriterium **S470**

$|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$

4 Grenzwerte von Funktionen **S53**

4.1 Berechnung von Grenzwerten **S56**

Technik des *Erweiterns*: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} \Rightarrow$ Erweitern mit $\frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Binomische Formel: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

4.1.1 Spezielle Grenzwert Sätze

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| = |g| \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n = g^n \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[n]{g}$$

4.1.2 Einschliessungsprinzip **S55**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g \wedge a_n, b_n \text{ sind konvergent} \quad a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$$

4.2 Links-/Rechtsseitiger Grenzwert **S54**

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = g^+$

Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = g^-$

4.3 Konvergenz, Divergenz **S474**

Konvergenz: $g^+ = g^- = g \in \mathbb{R}$ oder: monoton und beschränkt

Bestimmte Divergenz: $g = +\infty$ oder: $g = -\infty$

Unbestimmte Divergenz: Es existiert kein Grenzwert
(g für Grenzwert)

4.4 Stetigkeit **S59**

„Wenn man die Funktion mit einem Strich zeichnen kann“:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Art der Unstetigkeitsstelle	Bedingungen	Beispiel $f: x \mapsto f(x) =$	Graph von f
Hebbare Unstetigkeitsstelle	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ und $g \neq f(x_0)$	$\begin{cases} \frac{1}{4}(x-1)^2 + 1 & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$	
	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ und $x_0 \notin D_f$	$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$	
Unstetigkeitsstelle 1. Art (Sprungstelle)	g^+ und g^- existieren in x_0 , aber $g^+ \neq g^-$	$\begin{cases} x - 1 & \text{für } x \geq 1 \\ -1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$	
Unstetigkeitsstelle 2. Art	mindestens g^+ oder g^- existieren in x_0 nicht	$\begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{für } x > 1 \\ 1 & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$	
	f ist für $x \uparrow x_0$ und $x \downarrow x_0$ unbestimmt divergent (Oszillationsstelle)	$\sin \frac{1}{x}$	

4.5 Übertragungsprinzip

f besitzt genau an der Stelle x_0 den Grenzwert g , wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $\langle x_n \rangle$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$

$$\text{Bsp: } f(x) = x - [x] \text{ und } x_0 = -1 \quad x_n = -1 - \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = -1 \quad x'_n = -1 + \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n) = -1$$

wenn nun gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1 - \frac{1}{n} - [-1 - \frac{1}{n}]) = 1 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1 + \frac{1}{n} - [-1 + \frac{1}{n}]) = 0$$

Dann besitzt die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 keinen Grenzwert g .

4.6 Spezielle Grenzwerte **S58**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} = 0 \quad (a > 1; \alpha, \beta > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \ln \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x - 2}} = \ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (x > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{q^x} = 0 \quad (q > 1; k \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{p} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

4.7 Asymptotenbestimmung S15

Ausrechnen der Asymptote einer gebrochen rationalen Funktion $r: x \mapsto r(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$:

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} r(x) =$	0	$\frac{a_m}{b_n}$	$+\infty$ oder $-\infty$
Asymptote	x-Achse	Parallel zur x-Achse $y = g(x) = \frac{a_m}{b_n}$	Ganzrationaler Teil der Polynomdivision S15

5 Differentialrechnung S443

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0} = \left(\frac{d}{dx} f\right)_{x=x_0} = Df(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ und } (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

f^{-1} ist differenzierbar wenn: f differenzierbar und umkehrbar ist und wenn $f'(x) \neq 0$ ist.

Rechtsseitige $f'_r(x_0)$ bzw. linksseitige $f'_l(x_0)$ Ableitung.

Falls $f'_r(x_0) = f'_l(x_0)$ und f an der Stelle x_0 stetig, dann ist f an der Stelle x_0 differenzierbar.

5.1 Ableitungsregeln S449

5.2 Einige Ableitungen S445

$$\begin{aligned} (|x|)' &= \operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}, x \neq 0 & (\tan x)' &= 1 + \tan^2 x, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2}\pi \right\} & (\cot x)' &= -(1 + \cot^2 x), x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \\ \ln(|x|)' &= \frac{1}{x} & (\tanh x)' &= 1 - \tanh^2 x & (\coth x)' &= 1 - \coth^2 x \end{aligned}$$

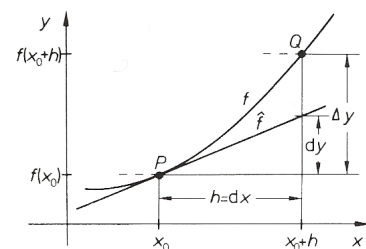
5.3 Höhere Ableitungen S451

$$\begin{aligned} (\sin x)^{(2k+1)} &= (-1)^k \cos x, k \in \mathbb{N}_0 & (\sin x)^{(2k)} &= (-1)^k \sin x, k \in \mathbb{N} \\ (\cos x)^{(2k-1)} &= (-1)^k \cos x, k \in \mathbb{N} & (\cos x)^{(2k)} &= (-1)^k \cos x, k \in \mathbb{N} \\ \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{(n)} &= \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}} & (\sqrt{x})^{(n)} &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n x^{n-1} \sqrt{x}} \\ \left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right)^{(n)} &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} + \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} & (x \cdot e^x)^{(n)} &= n \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x (n+x) \end{aligned}$$

5.4 Tangentengleichung

$$\hat{f}(x) = \underbrace{(x - x_0) \cdot f'(x_0)}_{dy} + f(x_0) \quad (x_0 = \text{Entwicklungspunkt})$$

5.5 Differential, Fehlerrechnung S865



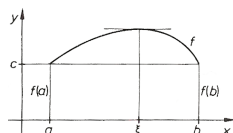
$$\text{absoluter Fehler: } |\Delta y| \approx |dy| = |f'(\bar{x})| \cdot |dx| \leq |f'(\bar{x})| \cdot |\delta|$$

$$\text{relativer Fehler: } |\Delta y| \approx \left| \frac{dy}{y} \right| = \left| \frac{f'(x)}{y} \right| \cdot |dx| \leq \left| \frac{f'(x)}{y} \right| \cdot |\delta| = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \cdot |\delta|$$

$$\left| \frac{dx}{x} \right| \hat{=} \text{relativer Fehler Input} \quad \left| \frac{dy}{y} \right| \hat{=} \text{relativer Fehler Output} \quad \text{Einheit} = [1]$$

Auf n-Stellen nach dem Komma genau \Rightarrow absoluter Fehler: $\delta = \pm 0.5 \cdot 10^{-n}$

5.6 Mittelwertsatz S453



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

$$\xi = a + \delta(b - a)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \delta h)$$

$$f(x+h) = h \cdot f'(x + \delta h) + f(x)$$

$$\xi = x + \delta h \quad 0 < \delta < 1$$

5.7 Taylor Polynom **S454,483**

(x_0 = Entwicklungspunkt) $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(x_0, h)$
 $h = x - x_0$

R_n (Lagrange): $R_n(x_0, h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \delta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, (0 < \delta < 1); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x_0, h) = 0 \implies f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$

MacLaurinsche-Form (gilt für $x_0 = 0, h = x$): $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + R_n; \quad R_n = \frac{f^{(n+1)}(\delta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, (0 < \delta < 1);$

5.7.1 Einige Reihen **S19,476,1073**

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \overbrace{(-1)^n \cdot \frac{\cos(\vartheta x)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}}^{R_n}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(1+\vartheta x)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

5.8 Bernoulli-de l'Hospital **S56**

$\lim_{x \downarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$, dies gilt für: „ $\frac{0}{0}$ “ 1. Regel, oder „ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ “ 2. Regel; Zähler und Nenner separat ableiten!

5.8.1 Spezialfälle

$$0 \cdot \pm\infty \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{f_2}{f_1} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\infty - \infty \Rightarrow \frac{\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1}}{\frac{1}{f_1} \cdot \frac{1}{f_2}}$$

$$f^g : \left\{ \begin{array}{c} 1^\infty \\ 0^0 \\ \infty^0 \end{array} \right\} = e^{g \cdot \ln(f)} = \left\{ \begin{array}{c} e^{\infty \cdot 0} \\ e^{0 \cdot -\infty} \\ e^{0 \cdot \infty} \end{array} \right\}$$

5.9 Kurvenuntersuchungen **S260**

1. Definitionsbereich **S48** D_f und Abschätzung des Wertebereichs W_f , wenn möglich anhand der Extremalstellen
2. Symmetrie und Periodizität **S52**
3. Nullstellen
4. Stetigkeit **S59** und Differenzierbarkeit **S443** (Berechnung der Ableitungen)
5. Extremwerte, Wendepunkte und Wendetangenten, Monotonie, Krümmungsverhalten **S51**
6. Grenzwertaussagen (Asymptote, Pole, Verhalten von f am Rande des Definitionsbereichs)

5.9.1 Monotonie **S452**

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
≥ 0					monoton wachsend
> 0					streng monoton wachsend
≤ 0					monoton fallend
< 0					streng monoton fallend
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\dots = 0$	> 0	streng monoton wachsend (falls n ungerade)
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\dots = 0$	< 0	streng monoton falls (falls n ungerade)

5.9.2 Extremstelle **S455**

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
$= 0$	> 0				relatives Minimum, Randstellen beachten
$= 0$	< 0				relatives Maximum, Randstellen beachten
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\dots = 0$	> 0	relatives Minimum (falls n gerade), Randstellen beachten
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\dots = 0$	< 0	relatives Maximum (falls n gerade), Randstellen beachten

Zweite Variante Falls bei $f'(x)$ an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort eine Extremstelle

5.9.3 Konvexität - KrümmungsverhaltenS253

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
	≥ 0				konvex (linksgekrümmt)
	> 0				streng konvex (linksgekrümmt)
	≤ 0				konkav (rechtsgekrümmt)
	< 0				streng konkav (rechtsgekrümmt)

5.9.4 Wendepunkte (Terassenpunkt)S255

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
	$= 0$	$\neq 0$			Wendepunkt
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$			Terassen- oder Sattelpunkt
Zweite Variante Falls bei $f''(x)$ an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort ein Wendepunkt					

5.9.5 AsymptoteS259

Die Asymptote existiert nur wenn alle drei eigentlichen Grenzwerte existieren. Für Funktionen, die nicht gebrochenrational sind, kann die Asymptote wie folgt bestimmt werden.

Asymptote $g : y = ax + b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0$

$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ oder $a = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$

gilt jedoch nur wenn in der ersten Formel die Bedingung für Bernoulli-de l'Hospital erfüllt sind.

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$

Dies alles gilt sinngemäss auch für $x \rightarrow -\infty$

Spezialfall: Wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiert, so ist $a = 0$ und $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

5.10 Schnittwinkel von zwei Funktionen

1. Bei einem Schnittpunkt gilt: $f(x) = g(x)$
2. Schnittpunkt $S(x_0, y_0)$ berechnen
3. Falls dies eine kubische Gleichung ist, den Wert durch ausprobieren herausfinden (Bereich von $-3 \dots 3$)
4. Funktionen ableiten: $f'(x)$ und $g'(x)$
5. Steigungen berechnen: $f'(x_0) = m_1$ und $g'(x_0) = m_2$
6. Schnittwinkel mit Hilfe dieser Gleichung berechnen: $\tan(\sigma) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

5.10.1 Normale

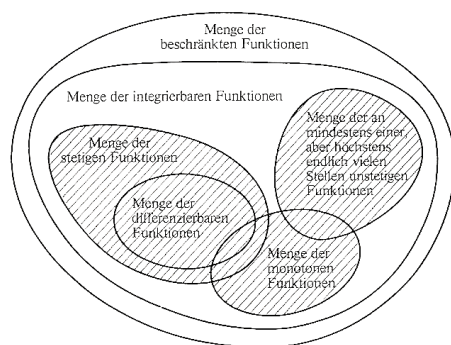
Wenn eine Normale zur Tangente berechnet werden muss gilt: $m_1 * m_2 = -1$

6 IntegralrechnungS492**6.1 Bestimmtes Integral**S505

$$I = \int_a^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \lim_{d(Z) \rightarrow 0} S(Z) = \lim_{d(Z) \rightarrow 0} O(Z) = \lim_{d(Z) \rightarrow 0} U(Z)$$

x : Integrationsveränderliche, f : Integranden, $[a, b]$: Integrationsintervall, a/b : untere bzw. obere Integrationsgrenze

6.2 Integrierbarkeit



Schranken vom Integral:

$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$$

$$\int_a^b g_1(\tilde{x}) d\tilde{x} \leq \int_a^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} \leq \int_a^b g_2(\tilde{x}) d\tilde{x}$$

6.3 Integralregeln S494

$$\int_a^b \tilde{x}^n d\tilde{x} = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})$$

6.4 Flächeninhalt S507

Inhalt der Fläche unter dem Graphen $f : A = \int_a^b |f(\tilde{x})| d\tilde{x}$

$$A = A_1 - A_2 = \int_a^b f_1(\tilde{x}) d\tilde{x} - \int_a^b f_2(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad \text{gilt auch wenn die Funktionen } f_1 \text{ oder } f_2 \text{ negativ werden.}$$

6.5 Mittelwertsatz S509

f auf $[a, b]$ stetig \Rightarrow mind. eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit $\int_a^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} = (b-a)f(\xi) \Rightarrow h = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\tilde{x}) d\tilde{x}$
 $h \hat{=}$ Mittelwert der Funktion

6.6 Integralfunktion

$c \in [a, b]$ und $f(x)$ über $[a, b]$ integrierbar: $I : x \mapsto I(x) = \int_c^x f(\tilde{t}) d\tilde{t}$

6.6.1 Differenzierbarkeit S508

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(\tilde{t}) d\tilde{t} = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \int_c^x f(\tilde{t}) d\tilde{t} = f(x)$$

6.7 Unbestimmtes Integral S492

$$F(x) + C = \int f(\tilde{x}) d\tilde{x}$$

6.8 Stammfunktion S492

Jede auf $[a, b]$ differenzierbare Funktion F nennt man Stammfunktion, wenn $F' = f$.
 $I(x) \subset F(x)$

6.9 Rechenregeln S495

$$\int_a^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} = F(b) - F(a)$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(\tilde{x})| d\tilde{x}$$

$$\int_a^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_0^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} - \int_0^a f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_0^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} - (-1) \cdot \int_a^0 f(\tilde{x}) d\tilde{x}$$