Malliavin-Kalkül

Mathias Vetter

14. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Das Wiener-Chaos

In diesem Kapitel befassen wir uns mit einem allgemeinen Gaußschen Prozess W und davon abhängigen quadratintegrierbaren Funktionalen, für die wir eine orthogonale Zerlegung, das sogenannte *Wiener-Chaos*, herleiten. Dazu seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und ein separabler Hilbertraum H gegeben. Das zugehörige Skalarprodukt und die Norm auf H werden mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bzw. $||\cdot||$ bezeichnet.

Definition 1.1. Ein reellwertiger stochastischer Prozess $W = \{W(h) \mid h \in H\}$ auf einem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt ein *(isonormaler) Gaußscher Prozess auf* H, falls die endlich-dimensionalen Verteilungen von W zentrierten Normalverteilungen entsprechen und zusätzlich $\mathbb{E}[W(h)W(g)] = \langle h, g\rangle$ für alle $h, g \in H$ gilt.

Bemerkung 1.2.

(i) Unter den Voraussetzungen aus Definition 1.1 ist $h \mapsto W(h)$ eine lineare Abbildung, denn für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und alle $h, g \in H$ gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(W(\lambda h + \mu g) - \lambda W(h) - \mu W(g))^2] \\
=&\mathbb{E}[W(\lambda h + \mu g)^2] - 2\lambda\mathbb{E}[W(\lambda h + \mu g)W(h)] - 2\mu\mathbb{E}[W(\lambda h + \mu g)W(g)] \\
&+ \lambda^2\mathbb{E}[W(h)^2] + 2\lambda\mu\mathbb{E}[W(h)W(g)] + \mu^2\mathbb{E}[W(g)^2] \\
=&||\lambda h + \mu g||^2 - 2\lambda\langle\lambda h + \mu g, h\rangle - 2\mu\langle\lambda h + \mu g, g\rangle \\
&+ \lambda^2||h||^2 + 2\lambda\mu\langle h, g\rangle + \mu^2||g||^2 \\
=&0
\end{aligned}$$

nach den Rechenregeln für Bilinearformen und wegen $\langle h, h\rangle = ||h||^2$ bzw. $\langle g, h\rangle = \langle h, g\rangle$. Insbesondere entspricht $h \mapsto W(h)$ einer linearen Isometrie von H auf einen abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{H}_1$ von $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dessen Elemente zentriert sind.

(ii) Aufgrund von (i) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $h_1, \ldots, h_n \in H$ und alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k W(h_k) = W\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k\right)$$

eine normalverteilte Zufallsvariable ist. Daher genügt es in Definition 1.1 bereits zu fordern, dass jede Zufallsvariable $W(h)$ (zentriert und) normalverteilt ist, um zu erhalten, dass auch die endlich-dimensionalen Verteilungen normalverteilt sind.

Lemma 1.3. *Zu jedem separablen Hilbertraum H lassen sich ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und ein Gaußscher Prozess W konstruieren, so dass Definition 1.1 erfüllt ist.*

Beweis: Jeder separable Hilbertraum H besitzt eine (höchstens) abzählbare Orthonormalbasis (vgl. Theorem 3.33 in Meneghin (2013)). Wir nehmen an, dass wir im unendlich-dimensionalen Fall sind (der endlich-dimensionale Fall ist leichter) und bezeichnen die Orthonormalbasis mit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ferner sei φ das Maß der Standardnormalverteilung. Setzt man nun

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}, \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}, \prod_{k=1}^{\infty} \varphi\right)$$

und $X_n((\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \omega_n$, so sind die Zufallsvariablen X_n unabhängig und standardnormalverteilt. Insbesondere besitzt die durch $e_n \mapsto W(e_n) := X_n$ erzeugte lineare Abbildung von H nach $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ die gewünschten Eigenschaften, denn für $h = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ und $g = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i$ gilt

$$W(h) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2\right) = \mathcal{N}(0, ||h||^2)$$

und

$$\mathbb{E}[W(h)W(g)] = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i = \langle h, g\rangle$$

(vgl. jeweils Theorem 3.35 in Meneghin (2013)). □

Beispiel 1.4. Es sei $H = L^2((0,\infty), \mathcal{B}_{(0,\infty)}, \lambda)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int fg d\lambda,$$

wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. Gemäß Lemma 1.3 existiert ein isonormaler Gaußscher Prozess W auf H. Setzt man $B_t = W(1_{(0,t]})$, so ist B_t zentriert und normalverteilt mit

$$\mathbb{E}[B_t^2] = \mathbb{E}[W(1_{(0,t]})W(1_{(0,t]})] = \langle 1_{(0,t]}, 1_{(0,t]}\rangle = t.$$

Außerdem gilt für $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, dass die zugehörigen Funktionen $1_{(t_0,t_1]}, \ldots, 1_{(t_{n-1},t_n]}$ orthogonal, also die Zufallsvariablen $B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ unkorreliert sind. Aufgrund der gemeinsamen Normalverteilung sind sie insbesondere unabhängig. Der Prozess $t \mapsto B_t$ heißt *Brownsche Bewegung*. Zudem setzt man

$$\int_0^T f(t)dB(t) = W(1_{(0,T]}f)$$

und nennt $\int_0^T f(t)dB(t)$ das *stochastische Integral von f bzgl. B.*

Definition 1.5. Die Polynome $H_n(x)$ mit $H_0(x) = 1$ und

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \exp(x^2/2) \frac{d^n}{dx^n}(\exp(-x^2/2)), \quad n \geq 1,$$

heißen *Hermite-Polynome.*

Bemerkung 1.6.

(i) Die ersten Hermite-Polynome lauten $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = x$ und $H_2(x) = (x^2 - 1)/2$.

(ii) Eine leichte Induktion zeigt, dass $H_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades ist, dessen führender Koeffizient durch $x^n/(n!)$ gegeben ist.

Lemma 1.7. *Die Hermite-Polynome erhält man als Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung von $F(t,x) = \exp(tx - t^2/2)$ als Funktion in t.*

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \exp(x^2/2 - (x-t)^2/2) \\ &= \exp(x^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \exp(-(x-t)^2/2)\big|_{t=0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{(-1)^n}{n!} \exp(x^2/2) \frac{d^n}{dz^n} \exp(-z^2/2)\big|_{z=x} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(x), \end{aligned}$$

wobei die zweite Identität aus der Taylorreihenentwicklung von $t \mapsto \exp(-(x-t)^2/2)$ um $t = 0$ folgt. $\square$

Korollar 1.8. *Für $n \geq 1$ gilt*

(i) $H_n'(x) = H_{n-1}(x)$,

(ii) $(n+1)H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H_{n-1}(x)$,

(iii) $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

Beweis: Wir setzen wieder $F(t,x) = \exp(tx - t^2/2)$.

(i) Es gilt einerseits

$$\frac{d}{dx} F(t,x) = tF(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} H_n(x)$$

und andererseits

$$\frac{d}{dx} F(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n'(x),$$

wobei wir Summation und Ableitung vertauschen dürfen, da sich die obige Reihe aufgrund von Bemerkung 1.6 (ii) auch als Potenzreihe in x auffassen lässt. Die Identität ergibt sich per Koeffizientenvergleich und mit $H_0'(x) = 0$.

(ii) Dieses Mal vergleicht man

$$\frac{d}{dt} F(t,x) = (x-t)F(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} (t^n x H_n(x) - t^{n+1} H_n(x))$$

und

$$\frac{d}{dt} F(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} n t^{n-1} H_n(x),$$

wobei wir hier direkt verwenden, dass im Innern des Konvergenzradius Summation und Ableitung vertauscht werden dürfen.

(iii) Diese Eigenschaft folgt aufgrund von Lemma 1.7 und $F(-t,x) = F(t,-x)$. □

Satz 1.9. *Es seien X, Y gemeinsam normalverteilt mit $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$ und $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] = 1$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[H_n(X)H_m(Y)] = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq m, \\ \frac{1}{n!}(\mathbb{E}[XY])^n, & \text{falls } n = m, \end{cases}$$

für alle $n, m \geq 0$.

Beweis: Es gilt allgemein: Für $Z \sim \mathcal{N}_d(0,\Sigma)$ und $r \in \mathbb{R}^d$ ergibt sich als momenterzeugende Funktion

$$\mathbb{E}[\exp(r^*Z)] = \exp(r^*\Sigma r/2).$$

In unserem Fall gilt

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\rho = \mathbb{E}[XY]$. Damit erhält man

$$\mathbb{E}[\exp(sX + tY)] = \exp(s^2/2 + st\rho + t^2/2)$$

bzw. äquivalent

$$\mathbb{E}[F(s,X)F(t,Y)] = \mathbb{E}[\exp(sX - s^2/2)\exp(tY - t^2/2)] = \exp(st\rho).$$

Bildet man auf beiden Seiten die $(n+m)$-te Ableitung $d^{n+m}/(ds^n dt^m)$ an der Stelle $s = t = 0$, so ergibt sich mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz und danach

$$\mathbb{E}[n!H_n(X)m!H_m(Y)] = \frac{d^m}{dt^m} t^n \rho^n \exp(st\rho)\big|_{s=t=0} = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq m, \\ n!(\mathbb{E}[XY])^n, & \text{falls } n = m, \end{cases}$$

die Aussage. □

Definition 1.10. Es seien H ein Hilbertraum und $A \subset H$. A heißt *total*, falls der Abschluss des von A erzeugten Unterraums $\operatorname{span}(A)$ der gesamte Hilbertraum H ist.

Satz 1.11. *Es sei $\mathcal{G}$ die von den Zufallsvariablen $\{W(h) \mid h \in H\}$ erzeugte σ-Algebra. Dann gilt: Die Zufallsvariablen $\{\exp(W(h)) \mid h \in H\}$ bilden eine totale Teilmenge von $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.*

Beweis: Man beachte zunächst, dass $\exp(W(h)) \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ gilt, da $W(h)$ normalverteilt ist.

Sei nun $X \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[X \exp(W(h))] = 0$ für alle $h \in H$. Zu zeigen ist $X = 0$, da dann das orthogonale Komplement des von $\{\exp(W(h)) \mid h \in H\}$ erzeugten Unterhilbertraums ausschließlich aus dem Nullelement besteht.

Aufgrund der Linearität von $h \mapsto W(h)$ gilt

$$\mathbb{E}\Big[X \exp\Big(\sum_{k=1}^m t_k W(h_k)\Big)\Big] = 0$$

für alle $m \geq 1$, alle $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ und alle $h_1, \ldots, h_m \in H$. Als Funktion in $t = (t_1, \ldots, t_m)$ ist die Funktion auf der linken Seite nach dem Satz von der majorisierten

Konvergenz analytisch, lässt sich also holomorph auf $t \in \mathbb{C}^m$ fortsetzen und ist nach dem Identitätssatz weiterhin konstant Null. Wir definieren die Maße

$$\nu^{\pm}(B) = \mathbb{E}[X^{\pm} 1_B(W(h_1), \dots, W(h_m))] = \mathbb{E}\big[X^{\pm} \int_B d\delta_Y\big], \quad B \in \mathcal{B},$$

wobei δ_Y das Dirac-Maß in $Y = (W(h_1), \dots, W(h_m))$ bezeichnet, und setzen $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Dann gilt nach dem Satz von Fubini die Identität

$$\begin{aligned} u \mapsto \int \exp(iu^* x)\nu(dx) &= \mathbb{E}\big[\int X \exp(iu^* x) d\delta_Y(x)\big] \\ &= \mathbb{E}\Big[X \exp\Big(\sum_{k=1}^{m} u_k W(h_k)\Big)\Big] = 0 \end{aligned}$$

für alle $u \in \mathbb{R}^m$. Aus dem Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen folgt $\nu^+ = \nu^-$, also insbesondere $\nu \equiv 0$. Aus

$$\nu(B) = \mathbb{E}[X 1_B(W(h_1), \dots, W(h_m))] = 0$$

für alle $B \in \mathcal{B}$, alle $m \geq 1$, alle $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ und alle $h_1, \dots, h_m \in H$ ergibt sich $\mathbb{E}[X 1_G] = 0$ für alle $G \in \mathcal{G}$, mithin $X = 0$. □

Definition 1.12. Wir setzen $\mathcal{H}_0 = \mathbb{R}$ und definieren als $\mathcal{H}_n$ für jedes $n \geq 1$ den abgeschlossenen linearen Unterraum von $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, der von der Menge der Zufallsvariablen $\{H_n(W(h)) \mid h \in H, ||h|| = 1\}$ erzeugt wird. $\mathcal{H}_n$ wird als *Wiener-Chaos der Ordnung* n bezeichnet.

Bemerkung 1.13.

(i) Bemerkung 1.2 (ii) zeigt, dass $\mathcal{H}_1$ der Menge der Zufallsvariablen $\{W(h) \mid h \in H\}$ entspricht.

(ii) Gemäß Satz 1.9 sind die Räume $\mathcal{H}_n$ und $\mathcal{H}_m$ für $n \neq m$ orthogonal.

(iii) Als abgeschlossener linearer Unterraum des Hilbertraums $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ ist $\mathcal{H}_n$ selbst ein Hilbertraum.

Satz 1.14. (Wiener-Chaos-Zerlegung) *Es gilt*

$$L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n.$$

Beweis: Es sei $X \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ orthogonal zu $\mathcal{H}_n$ für alle $n \geq 0$, d.h.

$$\mathbb{E}[X H_n(W(h))] = 0$$

für alle $n \geq 0$ und alle $h \in H$ mit $||h|| = 1$. Da x^n als Linearkombination von Hermite-Polynomen $H_r(x)$, $0 \leq r \leq n$, darstellbar ist, folgt insbesondere

$$\mathbb{E}[X(tW(h))^n] = t^n \mathbb{E}[XW(h)^n] = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt

$$\mathbb{E}[X \exp(tW(h))] = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $h \in H$ mit $||h|| = 1$, und Satz 1.11 liefert $X = 0$. □

Beispiel 1.15. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \nu)$, wobei ν die Standardnormalverteilung bezeichnet. Außerdem sei $H = \mathbb{R}$, und wir setzen $W(h)(x) = hx$ für $h \in \mathbb{R}$. Offenbar existieren in H nur zwei Elemente mit $||h|| = 1$, nämlich $h = \pm 1$. Aus Korollar 1.8 (iii) folgt dann, dass jedes $\mathcal{H}_n$ eindimensional ist und von $H_n(x)$ erzeugt wird. Daher bedeutet Satz 1.14 in dieser Situation, dass die Hermite-Polynome $H_n(x)$ ein vollständiges Orthogonalsystem in $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \nu)$ bilden.

Definition 1.16. Es sei W ein isonormaler Gaußscher Prozess. Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}_n^0$ den Vektorraum aller Zufallsvariablen der Form $p(W(h_1), \ldots, W(h_k))$, wobei $k \in \{1, \ldots, n\}$ und $h_1, \ldots, h_k \in H$ gilt und p ein Polynom in k Variablen vom Grad n (oder kleiner) ist. Außerdem bezeichnet $\mathcal{P}_n$ den Abschluss von $\mathcal{P}_n^0$ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Satz 1.17. *Es gilt* $\mathcal{P}_n = \mathcal{H}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_n$.

Beweis: Offenbar ist nur $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{H}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_n$ zu zeigen, was $\mathcal{P}_n \perp \mathcal{H}_m$ für alle $m > n$ entspricht. Da es genügt, $\mathcal{P}_n^0 \perp \mathcal{H}_m$ für alle $m > n$ zu beweisen, seien im Folgenden $X = p(W(h_1), \ldots, W(h_k)) \in \mathcal{P}_n^0$ und $h \in H$ mit $||h|| = 1$ gegeben, und wir möchten $\mathbb{E}[XH_m(W(h))] = 0$ für $m > n$ zeigen.

Dazu sei $\{e_1, \ldots, e_j, h\}$ eine orthonormale Basis von $\operatorname{span}\{h_1, \ldots, h_k, h\}$. Aufgrund der Linearität von $h \mapsto W(h)$ lässt sich $X = q(W(e_1), \ldots, W(e_j), W(h))$ schreiben, wobei q ebenfalls ein Polynom vom Grad n (oder kleiner) ist. Insbesondere sind die $W(e_1), \ldots, W(e_j), W(h)$ gemeinsam normalverteilt und unkorreliert, also unabhängig. Daher gilt für einen typischen Summanden

$$\mathbb{E}[W(e_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot W(e_j)^{\alpha_j} W(h)^\beta H_m(W(h))] = \prod_{i=1}^{j} \mathbb{E}[W(e_i)^{\alpha_i}] \mathbb{E}[W(h)^\beta H_m(W(h))].$$

Wegen $0 \leq \beta \leq n < m$ lässt sich x^β als eine Linearkombination von Hermite-Polynomen H_l darstellen, für die jeweils $l \leq n < m$ gilt. Aufgrund von

$$\mathbb{E}[H_l(W(h)) H_m(W(h))] = 0$$

gemäß Satz 1.9 folgt dann die Aussage. □

Bemerkung 1.18. Unser Ziel ist zuletzt, eine Orthonormalbasis für $\mathcal{H}_n$ anzugeben. Dazu werden wir im Folgenden ohne Einschränkung annehmen, dass H unendlich-dimensional ist (der endlich-dimensionale Fall geht im Prinzip genauso), und bezeichnen eine Orthonormalbasis von H mit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Außerdem nutzen wir folgendes Resultat aus der Hilbertraumtheorie: Ist H ein Hilbertraum und γ ein Orthonormalsystem von Elementen von H, so ist γ eine Basis von H genau dann, wenn $H = \overline{\operatorname{span}}(\gamma)$ ist (vgl. Theorem 3.35 in Meneghin (2013)).

Definition 1.19. Wir bezeichnen mit Λ die Menge aller Folgen $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\alpha_n \in \mathbb{N}_0$ für alle n und $\alpha_n \neq 0$ für höchstens endlich viele n. Ist $\alpha \in \Lambda$, so setzen wir $|\alpha| = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n$ und $\alpha! = \prod_{n=1}^\infty \alpha_n!$. Ferner sei

$$\Phi_\alpha = \sqrt{\alpha!} \prod_{n=1}^{\infty} H_{\alpha_n}(W(e_n)).$$

Satz 1.20. *Die Familie* $\{\Phi_\alpha \mid |\alpha| = m\}$ *bildet eine Orthonormalbasis von* $\mathcal{H}_m$.

Beweis: Wir beachten zunächst, dass aufgrund der Unabhängigkeit der $W(e_n)$ und Satz 1.9 die Relation

$$\mathbb{E}[\Phi_\alpha \Phi_\beta] = \sqrt{\alpha!}\sqrt{\beta!}\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[H_{\alpha_n}(W(e_n))H_{\beta_n}(W(e_n))] = \delta_{\alpha\beta}$$

gilt, wobei $\delta_{\alpha\beta}$ das Kronecker-Delta bezeichnet. Entsprechend ist die Orthonormalität der Φ_α geklärt.

Zudem gilt: Ist $|\alpha| = m$, so ergibt sich $\Phi_\alpha \in \mathcal{P}_m^0 \subset \mathcal{P}_m$, also $\overline{\text{span}}\{\Phi_\alpha \mid |\alpha| = m\} \subset \mathcal{P}_m$. Andererseits lässt sich jedes $X = p(W(h_1), \ldots, W(h_k)) \in \mathcal{P}_m^0$ wieder geeignet als $X = q(W(e_1), \ldots, W(e_j))$ darstellen, wobei q ein Polynom vom Grad m (oder kleiner) ist. Insbesondere ist $\mathcal{P}_m^0 \subset \text{span}\{\Phi_\alpha \mid |\alpha| \leq m\}$. Daraus folgt $\mathcal{P}_m \subset \overline{\text{span}}\{\Phi_\alpha \mid |\alpha| \leq m\}$, also $\mathcal{P}_m = \overline{\text{span}}\{\Phi_\alpha \mid |\alpha| \leq m\}$.

Wegen Satz 1.17 und Bemerkung 1.18 ist $\{\Phi_\alpha \mid |\alpha| = 0\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_0$. Aufgrund der Orthogonalität der Φ_α und Satz 1.17 ergibt sich dann induktiv, dass $\{\Phi_\alpha \mid |\alpha| = m\}$ eine Basis von $\mathcal{H}_m$ ist. $\square$

Kapitel 2

Multiple Wiener-Itô-Integrale

Im Folgenden interessieren wir uns für den Spezialfall der Integrale bzgl. einer Brownschen Bewegung aus Beispiel 1.4, deren zugehörige Wiener-Chaos-Zerlegung wir in etwas allgemeinerer Form genauer betrachten wollen. Dazu sei $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$, wobei $(T, \mathcal{B})$ ein Messraum und μ ein σ-endliches Maß ohne Atome ist.

Bemerkung 2.1. Ein isonormaler Gaußscher Prozess W auf H wird eindeutig durch die Zufallsvariablen $\{W(A) \mid A \in \mathcal{B}, \mu(A) < \infty\}$ bestimmt, wobei wir $W(A) = W(1_A)$ setzen. Offenbar besitzen die Zufallsvariablen $A \mapsto W(A)$ eine $\mathcal{N}(0, \mu(A))$-Verteilung, und $W(A), W(B)$ sind unabhängig für disjunkte A, B und erfüllen dann $W(A \cup B) = W(A) + W(B)$.

Definition 2.2. Man bezeichnet W als ($L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-wertiges) *Brownsches Maß* bzw. als *White Noise* auf $(T, \mathcal{B})$ basierend auf μ.

Bemerkung 2.3. Im Sinne von Definition 2.2 lässt sich

$$W(h) = \int_T h(t) dW(t)$$

als stochastisches Integral von h bzgl. des Brownschen Maßes W interpretieren.

Definition 2.4. Es seien $m \geq 1$ und $\mathcal{B}_0 = \{A \in \mathcal{B} \mid \mu(A) < \infty\}$.

(i) Wir bezeichnen mit $\mathcal{E}_m$ die Menge der einfachen Funktionen

$$f(t_1, \ldots, t_m) = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} a_{i_1, \ldots, i_m} 1_{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_m}}(t_1, \ldots, t_m), \tag{2.1}$$

wobei die $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkte Elemente von $\mathcal{B}_0$ sind und $a_{i_1, \ldots, i_m} = 0$ gilt, falls mindestens zwei der Indizes $i_1, \ldots, i_m$ identisch sind.

(ii) Für $f \in \mathcal{E}_m$ setzen wir

$$I_m(f) = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} a_{i_1, \ldots, i_m} W(A_{i_1}) \cdots W(A_{i_m}).$$

$I_m(f)$ wird als *multiples stochastisches Integral von f* bezeichnet.

Lemma 2.5. *Es gilt:*

(i) $f \mapsto I_m(f)$ *ist wohldefiniert und linear;*

(ii) Bezeichnet $\widetilde{f}$ *die Symmetrisierung von* f*, d.h. ist*

$$\widetilde{f}(t_1,\ldots,t_m) = \frac{1}{m!}\sum_\sigma f(t_{\sigma_1},\ldots,t_{\sigma_m})$$

für alle Permutationen σ *von* $\{1,\ldots,m\}$*, so gilt* $I_m(f) = I_m(\widetilde{f})$*.*

(iii) Für $f \in \mathcal{E}_m$ *und* $g \in \mathcal{E}_q$ *gilt*

$$\mathbb{E}[I_m(f)I_q(g)] = \begin{cases} 0, & \text{falls } m \neq q, \\ m!\langle \widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle_{L^2(T^m,\mathcal{B}^m,\mu^m)} & \text{falls } m = q. \end{cases}$$

Beweis:

(i) Für zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{E}_m$ mit

$$f(t_1,\ldots,t_m) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n_1} a_{i_1,\ldots,i_m} 1_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_m}}(t_1,\ldots,t_m)$$

bzw.

$$g(t_1,\ldots,t_m) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n_2} b_{i_1,\ldots,i_m} 1_{B_{i_1}\times\cdots\times B_{i_m}}(t_1,\ldots,t_m)$$

lässt sich eine gemeinsame Zerlegung bzgl. paarweise disjunkter $C_1,\ldots,C_{n_3}$ finden. Die Wohldefiniertheit der Abbildung (Fall $f = g$) ergibt sich dann aus $W(K) = W(L) + W(M)$ für $K = L \cup M$ mit $L \cap M = \emptyset$. Die Linearität folgt im Anschluss direkt.

(ii) Aufgrund der Linearität genügt es, die Aussage für

$$f(t_1,\ldots,t_m) = 1_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_m}}(t_1,\ldots,t_m)$$

nachzuweisen. Dies ergibt sich sofort.

(iii) Wegen $\mathbb{E}[I_m(f)I_q(g)] = \mathbb{E}[I_m(\widetilde{f})I_q(\widetilde{g})]$ können wir unter der Voraussetzung arbeiten, dass $f \in \mathcal{E}_m$ und $g \in \mathcal{E}_q$ symmetrisch sind. Ferner lässt sich wie in (i) ohne Einschränkung annehmen, dass sie bezüglich derselben Zerlegung $A_1,\ldots,A_n$ definiert sind.

Der Fall $m \neq q$ folgt, da jeder Summand von $I_m(f)$ im Wesentlichen die Form $W(A_{i_1})\cdots W(A_{i_m})$ (bzw. jeder Summand von $I_q(g)$ im Wesentlichen die Form $W(A_{j_1})\cdots W(A_{j_q})$) besitzt und

$$\mathbb{E}[W(A_{i_1})\cdots W(A_{i_m})W(A_{j_1})\cdots W(A_{j_q})] = 0$$

gilt, da mindestens ein Faktor der Form $W(A)$ nur einmal auftaucht, unabhängig von den anderen ist und $\mathbb{E}[W(A)] = 0$ erfüllt.

Setzt man also f wie in (2.1) und

$$g(t_1,\ldots,t_m) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} b_{i_1,\ldots,i_m} 1_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_m}}(t_1,\ldots,t_m),$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I_m(f)I_m(g)] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{i_1<\ldots<i_m} m!a_{i_1,\ldots,i_m} W(A_{i_1})\cdots W(A_{i_m}) \\ &\qquad \sum_{i_1<\ldots<i_m} m!b_{i_1,\ldots,i_m} W(A_{i_1})\cdots W(A_{i_m})\Big] \\ &= \sum_{i_1<\ldots<i_m} (m!)^2 a_{i_1,\ldots,i_m} b_{i_1,\ldots,i_m} \mu(A_{i_1})\cdots\mu(A_{i_m}) \\ &= m! \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} a_{i_1,\ldots,i_m} b_{i_1,\ldots,i_m} \mu(A_{i_1})\cdots\mu(A_{i_m}) \\ &= m!\langle f,g\rangle_{L^2(T^m,\mathcal{B}^m,\mu^m)},\end{aligned}$$

wobei wir zunächst die Symmetrie von f und g und danach wieder die Disjunktheit der $A_1,\ldots,A_n$ ausnutzen. □

Satz 2.6. *Der Operator $I_m : \mathcal{E}_m \to L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ kann zu einer linearen und stetigen Abbildung $I_m : L^2(T^m,\mathcal{B}^m,\mu^m) \to L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ erweitert werden, die ebenfalls die Bedingungen aus Lemma 2.5 erfüllt. Wir schreiben dann auch*

$$I_m(f) = \int_{T^m} f(t_1,\ldots,t_m)dW(t_1)\cdots dW(t_m).$$

$I_m(f)$ wird wieder als multiples stochastisches Integral von f bezeichnet.

Beweis: Wir beachten zunächst, dass für $f\in\mathcal{E}_m$ gemäß Lemma 2.5 (iii) und der Minkowski-Ungleichung

$$\mathbb{E}[I_m(f)^2] = m!\langle\widetilde{f},\widetilde{f}\rangle_{L^2(T^m,\mathcal{B}^m,\mu^m)} \le m!\langle f,f\rangle_{L^2(T^m,\mathcal{B}^m,\mu^m)} < \infty$$

gilt, so dass sich tatsächlich eine Abbildung nach $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ergibt. Zu zeigen ist nun, dass die Menge der einfachen Funktionen $\mathcal{E}_m$ dicht in $L^2(T^m,\mathcal{B}^m,\mu^m)$ liegt. Die Aussage folgt dann ähnlich zur Konstruktion des klassischen stochastischen Integrals. Gemäß Bemerkung 2.1 genügt es ferner zu beweisen, dass jede Abbildung 1_A mit $A = A_1\times\ldots\times A_m$, $A_i\in\mathcal{B}_0$, $1\le i\le m$, durch einfache Funktionen aus $\mathcal{E}_m$ approximiert werden kann.

Dazu seien $\varepsilon > 0$ und $\{B_1,\ldots,B_n\}\subset\mathcal{B}_0$ eine Familie paarweiser disjunkter Mengen, so dass jeweils $\mu(B_i) < \varepsilon$ gilt und jedes A_i als Vereinigung von Mengen $\{B_1,\ldots,B_n\}$ dargestellt werden kann. Dies ist möglich, da μ keine Atome besitzt und wir daher zu jedem $A\in\mathcal{B}_0$ mit $\mu(A) > 0$ und jedem $0<\gamma<\mu(A)$ ein $B\subset A$ mit $\mu(B) = \gamma$ finden (Satz von Sierpiński). Außerdem sei $\mu(\cup_{i=1}^m A_i) = \alpha$.

Nun gilt

$$1_A = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \varepsilon_{i_1,\ldots,i_m} 1_{B_{i_1}\times\cdots\times B_{i_m}}$$

für $\varepsilon_{i_1,\ldots,i_m}\in\{0,1\}$. Bezeichnet I die Menge der m-Tupel $(i_1,\ldots,i_m)$, so dass alle Indizes verschieden sind, so erhalten wir mit

$$1_B = \sum_{i_1,\ldots,i_m\in I} \varepsilon_{i_1,\ldots,i_m} 1_{B_{i_1}\times\cdots\times B_{i_m}} \in \mathcal{E}_m$$

die Identität

$$\begin{aligned}||1_A - 1_B||^2 &= \sum_{i_1,\dots,i_m \in I^c} \varepsilon_{i_1,\dots,i_m} \mu(B_{i_1}) \cdots \mu(B_{i_m}) \\ &\le \binom{m}{2} \sum_{i=1}^n \mu(B_i)^2 \left(\sum_{i=1}^n \mu(B_i) \right)^{m-2} \\ &\le \binom{m}{2} \varepsilon \alpha^{m-1},\end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt verwendet haben, dass die Cartesischen Produkte disjunkt sind, und im zweiten Schritt ausnutzen, dass mindestens ein Paar von Indizes identisch ist. Die Aussage folgt, da ε beliebig ist. □

Definition 2.7. Es seien $f \in L^2(T^p, \mathcal{B}^p, \mu^p)$ und $g \in L^2(T^q, \mathcal{B}^q, \mu^q)$ symmetrische Funktionen.

(i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f \otimes g : T^{p+q} &\to L^2(T^{p+q}, \mathcal{B}^{p+q}, \mu^{p+q}) \\ (t_1, \dots, t_{p+q}) &\mapsto f(t_1, \dots, t_p) g(t_{p+1}, \dots, t_{p+q}) \end{aligned}$$

heißt *Tensorprodukt von f und g.*

(ii) Im Fall $p = 1$ und $m \ge 1$ bezeichnet

$$f^{\otimes m}(t_1, \dots, t_m) = f(t_1) \cdots f(t_m)$$

das m-fache Tensorprodukt von f mit sich.

(iii) Es sei $0 \le r \le \min(p, q)$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f \otimes_r g : T^{p+q-2r} &\to L^2(T^{p+q-2r}, \mathcal{B}^{p+q-2r}, \mu^{p+q-2r}) \\ (t_1, \dots, t_{p+q-2r}) &\mapsto \int_{T^r} f(t_1, \dots, t_{p-r}, s) g(t_{p+1}, \dots, t_{p+q-r}, s) \mu^r(ds) \end{aligned}$$

heißt *r-te Kontraktion von f und g.*

(iv) Die Symmetrisierungen von $f \otimes g$ bzw. $f \otimes_r g$ werden mit $f \widetilde{\otimes} g$ bzw. $f \widetilde{\otimes}_r g$ bezeichnet.

Bemerkung 2.8. Offenbar gilt $f \otimes_0 g = f \otimes g$.

Lemma 2.9. *Es seien $f \in L^2(T^p, \mathcal{B}^p, \mu^p)$ symmetrisch, $p \ge 1$, und $g \in L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$. Dann gilt*

$$I_p(f) I_1(g) = I_{p+1}(f \otimes g) + p I_{p-1}(f \otimes_1 g).$$

Dabei setzen wir $I_0(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Aufgrund der Dichtheit von $\mathcal{E}_p$ in $L^2(T^p, \mathcal{B}^p, \mu^p)$ und aufgrund der Linearität aller Abbildungen genügt es, die Aussage zu zeigen, wenn f die Symmetrisierung von $1_{A_1 \times \cdots \times A_p}$ für paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{B}_0$ ist und entweder $g = 1_{A_0}$ oder $g = A_1$ ist, wobei $A_0 \in \mathcal{B}_0$ disjunkt zu $A_1, \dots, A_p$ ist.

Im Fall $g = 1_{A_0}$ gilt

$$I_p(f)I_1(g) = W(A_1)\cdots W(A_p)W(A_0) = I_{p+1}(f \otimes g)$$

und $f \otimes_1 g = 0$ jeweils nach Definition. Es sei also $g = 1_{A_1}$. Wir setzen $\beta = \mu(A_1)\cdots\mu(A_p)$ und wählen $\varepsilon > 0$ beliebig und können wieder annehmen, dass $A_1 = B_1 \cup \ldots \cup B_n$ für disjunkte B_i mit $\mu(B_i) < \varepsilon$ gilt. Mit

$$h_\varepsilon = \sum_{i \neq j} 1_{B_i \times B_j \times A_2 \times \cdots \times A_p} \in \mathcal{E}_{p+1}$$

erhält man

$$\begin{aligned} I_p(f)I_1(g) =& W(A_1)^2 W(A_2)\cdots W(A_p) \\ =& \sum_{i \neq j} W(B_i)W(B_j)W(A_2)\cdots W(A_p) \\ &+ \sum_{i=1}^n (W(B_i)^2 - \mu(B_i))W(A_2)\cdots W(A_p) \\ &+ \sum_{i=1}^n \mu(B_i)W(A_2)\cdots W(A_p) \\ =& I_{p+1}(h_\varepsilon) + R_\varepsilon + pI_{p-1}(f \otimes_1 g), \end{aligned}$$

wobei R_ε implizit definiert ist und wir

$$\begin{aligned} f \otimes_1 g &= \frac{1}{p!} \sum_\sigma 1_{A_{\sigma_1}}(t_1)\cdots 1_{A_{\sigma_{p-1}}}(t_{p-1}) \int_T 1_{A_{\sigma_p}}(s) 1_{A_1}(s) d\mu(s) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma:\sigma_p = 1} 1_{A_{\sigma_1}}(t_1)\cdots 1_{A_{\sigma_{p-1}}}(t_{p-1})\mu(A_1) = \frac{1}{p}\widetilde{1}_{A_2 \times \cdots \times A_p}(t_1, \ldots, t_{p-1})\mu(A_1) \end{aligned}$$

ausgenutzt haben. Nun gilt

$$\mathbb{E}[R_\varepsilon^2] = 2\sum_{i=1}^n \mu(B_i)^2 \mu(A_2) \cdot \mu(A_p) \leq 2\varepsilon\beta,$$

aufgrund von Eigenschaften der Normalverteilung, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(I_{p+1}(h_\varepsilon) - I_{p+1}(f \otimes g))^2] &= \mathbb{E}[(I_{p+1}(\widetilde{h}_\varepsilon) - I_{p+1}(f \widetilde{\otimes} g))^2] \\ &= (p+1)! ||\widetilde{h}_\varepsilon - f\widetilde{\otimes} g||^2_{L^2(T^{p+1}, \mathcal{B}^{p+1}, \mu^{p+1})} \\ &\leq (p+1)! ||h_\varepsilon - f \otimes g||^2_{L^2(T^{p+1}, \mathcal{B}^{p+1}, \mu^{p+1})} \\ &= (p+1)! \sum_{i=1}^n \mu(B_i)^2 \mu(A_2)\cdots\mu(A_p) \leq (p+1)!\varepsilon\beta, \end{aligned}$$

wobei wir zweimal Lemma 2.5, die Minkowski-Ungleichung und die Definition des Tensorprodukts verwendet haben. Die Aussage ergibt sich aufgrund der Vollständigkeit von $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, da $\varepsilon > 0$ beliebig ist. □

Bemerkung 2.10. Es lässt sich für symmetrische Funktionen $f \in L^2(T^p, \mathcal{B}^p, \mu^p)$ und $g \in L^2(T^q, \mathcal{B}^q, \mu^q)$ die allgemeine Formel

$$I_p(f)I_q(g) = \sum_{r=0}^{\min(p,q)} r! \binom{p}{r}\binom{q}{r} I_{p+q-2r}(f \otimes_r g).$$

zeigen (vgl. Proposition 1.1.3 in Nualart (2006)).

Satz 2.11. *Es seien $H_m(x)$ das m-te Hermite-Polynom und $h \in H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$ mit $||h|| = 1$. Dann gilt*

$$m! H_m(W(h)) = \int_{T^m} h(t_1) \cdots h(t_m) dW(t_1) \cdots dW(t_m) = I_m(h^{\otimes m}).$$

Insbesondere gilt $I_m(L^2(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)) = \mathcal{H}_m$.

Beweis: Wir zeigen die Aussage per Induktion nach m. Für $m = 1$ folgt die Aussage wegen $H_1(W(h)) = W(h)$ und

$$\int_T h(t) dW(t) = I_1(h) = W(h),$$

wobei die erste Identität nach Definition gilt und die zweite Identität für einfache Funktionen offensichtlich ist. Also nehmen wir an, dass die Behauptung für ein beliebiges m gilt. Wir erhalten mit Lemma 2.9, der Induktionsvoraussetzung, $||h|| = 1$ und Korollar 1.8

$$\begin{aligned} I_{m+1}(h^{\otimes m+1}) &= I_m(h^{\otimes m}) I_1(h) - m I_{m-1} \left(h^{\otimes (m-1)} \int_T h(t)^2 d\mu(t) \right) \\ &= m! H_m(W(h)) W(h) - m(m-1)! H_{m-1}(W(h)) \\ &= m!(m+1) H_{m+1}(W(h)) = (m+1)! H_{m+1}(W(h)). \end{aligned}$$

Um die zweite Aussage zu erhalten, sei $L^2_S(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)$ der abgeschlossene Unterraum von $L^2(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)$, der aus den symmetrischen Funktionen besteht. Mit Lemma 2.5 (iii) gilt

$$\mathbb{E}[I_m(f)^2] = m! ||f||^2_{L^2(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)}$$

für $f \in L^2_S(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)$, so dass Konvergenz einer Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^2_S(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)$ äquivalent zur Konvergenz von $(I_m(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Somit ist $I_m(L^2_S(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m))$ ebenfalls abgeschlossen. Dieser Raum enthält nach dem ersten Teil alle $H_m(W(h))$ für $h \in H$ mit $||h|| = 1$. Also gilt $\mathcal{H}_m \subset I_m(L^2_S(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m))$.

Zudem ist $I_m(L^2_S(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m))$ orthogonal zu jedem $H_n(W(h))$ für $h \in H$ mit $||h|| = 1$ und $n \neq m$, wieder da $H_n(W(h))$ nach dem ersten Teil als multiples Integral dargestellt werden kann und erneut mit Hilfe von Lemma 2.5 (iii). Insbesondere gilt $I_m(L^2_S(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)) \perp \mathcal{H}_n$. Die Aussage folgt dann aus Satz 1.14. □

Korollar 2.12. *Jede Zufallsvariable $F \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ besitzt die Form*

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$$

für geeignete Funktionen $(f_n)_{n \in N_0}$ mit $f_0 = \mathbb{E}[F]$ und $I_0(x) = x$. Die Funktionen $f_n \in L^2(T^n, \mathcal{B}^n, \mu^n)$ lassen sich symmetrisch wählen und sind in diesem Fall eindeutig durch F bestimmt.

Beweis: Die Zerlegung ist eine direkte Konsequenz aus Satz 2.11, und dessen Beweis zeigt insbesondere, dass jedes f_n symmetrisch gewählt werden kann. Nimmt man zuletzt an, dass zwei symmetrische Funktionen f_n und g_n existieren, so dass $I_n(f_n) = I_n(g_n)$ gilt, so folgt $f_n = g_n$ via $\mathbb{E}[(I_n(f_n - g_n))^2] = ||f_n - g_n||^2$. □

Bemerkung 2.13. Gemäß Satz 1.20 bildet $\{\Phi_\alpha \mid |\alpha| = m\}$ mit

$$\Phi_\alpha = \sqrt{\alpha!} \prod_{n=1}^{\infty} H_{\alpha_n}(W(e_n))$$

eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_m$. Es sei ohne Einschränkung $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots)$. Dann gilt

$$\alpha! \prod_{n=1}^{\infty} H_{\alpha_n}(W(e_n)) = \prod_{n=1}^{k} I_{\alpha_n}(e_n^{\otimes \alpha_n}) = I_m(e_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_k^{\otimes \alpha_k}),$$

wobei wir erst Satz 2.11 und dann Bemerkung 2.10 sowie $e_i^{\otimes \alpha_i} \otimes_r e_j^{\otimes \alpha_j} = 0$ für $r > 0$ und $i \neq j$ aufgrund ihrer Orthogonalität verwendet haben. Mit Lemma 2.5 (ii) folgt

$$I_m(\mathrm{symm}(e_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_k^{\otimes \alpha_k})) = \alpha! \prod_{n=1}^{\infty} H_{\alpha_n}(W(e_n)).$$

Aufgrund von

$$\begin{aligned} &||\mathrm{symm}(e_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_k^{\otimes \alpha_k})||^2_{L^2(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)} \\ = &\left(\frac{1}{m!}\right)^2 \sum_{\sigma^1, \sigma^2} \langle e_{\sigma^1_1} \dots e_{\sigma^1_m}, e_{\sigma^2_1} \dots e_{\sigma^2_m} \rangle_{L^2(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)} = \frac{\alpha!}{m!} \end{aligned}$$

stellt die Abbildung $I_m : L^2_S(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m) \to \mathcal{H}_m$ zwischen dem symmetrischen Tensorprodukt mit der Norm $\sqrt{m!}|| \cdot ||_{L^2(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)}$ und dem m-ten Wiener-Chaos $\mathcal{H}_m$ eine Isometrie dar. Insbesondere sind die Räume $\oplus_{m=0}^{\infty} \sqrt{m} L^2_S(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)$ und $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ isometrisch.

Definition 2.14. Es seien $T = (0, \infty)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{(0,\infty)}$ und $\mu = \lambda$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. Für eine symmetrische Funktion $f_n \in L^2_S(T^n, \mathcal{B}^n, \mu^n)$ setzen wir

$$K_n(f_n) = n! \int_0^\infty \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} f_n(t_1, \dots, t_n) dW(t_1) \cdots dW(t_n),$$

wobei die Integrale als klassische Itô-Integrale zu interpretieren sind.

Bemerkung 2.15. Wegen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K_n(f_n)^2] &= (n!)^2 \int_0^\infty \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} f_n^2(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n \\ &= n! \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f_n^2(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n = n! ||f_n||^2_{L^2(T^n, \mathcal{B}^n, \mu^n)} < \infty \end{aligned}$$

ist $K_n(f_n)$ wohldefiniert und erfüllt dieselbe Isometrieeigenschaft wie die Abbildung I_m gemäß Bemerkung 2.13.

Satz 2.16. *Für $f_n \in L^2_S(T^n, \mathcal{B}^n, \mu^n)$ gilt $K_n(f_n) = I_n(f_n)$, wobei $I_n(f_n)$ als das multiple stochastische Integral bzgl. des Gaußschen Maßes $\{W(h) \mid h \in L^2(T, \mathcal{B}, \mu)\}$ definiert ist.*

Beweis: Zu zeigen ist, dass für eine symmetrische Funktion $f_n \in \mathcal{E}_n$ das multiple Itô-Integral $K_n(f_n)$ mit dem multiplen stochastischen Integral $I_n(f_n)$ übereinstimmt, da $\operatorname{symm}(\mathcal{E}_n)$ wie im Beweis von Satz 2.6 dicht in $L^2_S(T^n, \mathcal{B}^n, \mu^n)$ liegt und die Erweiterung einer Isometrie von $\operatorname{symm}(\mathcal{E}_n)$ nach $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zu einer Isometrie von $L^2_S(T^n, \mathcal{B}^n, \mu^n)$ nach $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ eindeutig ist.

Dazu betrachten wir zunächst

$$g_n(t_1, \dots, t_n) = 1_{A_1 \times \dots \times A_n}(t_1, \dots, t_n)$$

für disjunkte Intervalle $A_1, \dots, A_n$ in $[0, \infty)$. Man kann zeigen:

$$\int_0^\infty \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} g_n(t_1, \dots, t_n) dW(t_1) \cdots dW(t_n)$$
$$= \begin{cases} W(A_1) \cdots W(A_n), & \text{falls } A_1 < A_2 < \ldots < A_n, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei wir $A_1 < A_2$ schreiben, wenn $a_1 < a_2$ für jedes $a_1 \in A_1$ und jedes $a_2 \in A_2$ gilt. Insbesondere erhält man

$$K_n(\widetilde{g}_n) = W(A_1) \cdots W(A_n) = I_n(\widetilde{g}_n),$$

so dass sich aufgrund der Linearität beider Abbildungen die Aussage für ein symmetrisches $f_n \in \mathcal{E}_n$ ergibt. Da die Borel-σ-Algebra von den Intervallen erzeugt wird, folgt die Behauptung. $\square$

Kapitel 3

Die Malliavin-Ableitung

Im Folgenden sei $W = \{W(h) \mid h \in H\}$ ein isonormaler Gaußscher Prozess auf einem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, und wir nehmen ohne Einschränkung an, dass zusätzlich $\mathcal{F}$ von W erzeugt ist. Wir sind dann an einer sinnvollen Definition der Ableitung DX einer quadratintegrierbaren Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ interessiert, wobei wir keine topologische Struktur auf Ω annehmen, die es erlaubt, die klassische Definition einer Ableitung zu verwenden.

Definition 3.1.

(i) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir schreiben

- $f \in C_p^\infty$, falls f sowie sämtliche partielle Ableitungen höchstens polynomielles Wachstum besitzen;
- $f \in C_b^\infty$, falls f sowie sämtliche partielle Ableitungen beschränkt sind;
- $f \in C_0^\infty$, falls f einen kompakten Träger besitzt.

In allen Fällen versteht sich der zugehörige Parameter n aus dem Kontext.

(ii) Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Wir schreiben

- $X \in \mathcal{S}$, falls für ein $f \in C_p^\infty$ die folgende Darstellung existiert:
$$X = f(W(h_1), \dots, W(h_n)); \tag{3.1}$$
- $X \in \mathcal{S}_b$ bzw. $X \in \mathcal{S}_0$, falls X die Form (3.1) besitzt und $f \in C_b^\infty$ bzw. $f \in C_0^\infty$ gilt.
- $X \in \mathcal{P}$, falls X die Form (3.1) besitzt und f ein Polynom ist.

Bemerkung 3.2. Offenbar gilt $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ und $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_b \subset \mathcal{S}$, und mit Satz 1.14 und Satz 1.17 folgt, dass $\mathcal{P}$ dicht in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ liegt. Dadurch erhalten wir ebenfalls, dass $\mathcal{S}$ dicht in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ liegt, und die Dichtheit überträgt sich nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz auf $\mathcal{S}_0$, da sich jedes $f \in C_p^\infty$ gleichmäßig auf kompakten Mengen durch Funktionen aus C_0^∞ approximieren lässt.

Definition 3.3. Es sei X gemäß (3.1). Dann heißt

$$DX = \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i$$

die *Malliavin-Ableitung von X*.

Lemma 3.4. (Wohldefiniertheit der Malliavin-Ableitung) *Gilt für $X \in \mathcal{S}$ die Darstellung*

$$X = f(W(h_1), \dots, W(h_n)) = g(W(e_1), \dots, W(e_m))$$

für $g \in C_p^\infty$ und ein Orthonormalsystem $\{e_1, \dots, e_m\}$, so folgt

$$\sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), \dots, W(h_n))h_i = \sum_{j=1}^m \partial_j g(W(e_1), \dots, W(e_m))e_j.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass wir ohne Einschränkung annehmen können, dass $\{h_1, \dots, h_n\}$ und $\{e_1, \dots, e_m\}$ denselben Unterraum aufspannen. Andernfalls seien zunächst $h_{n+1} = e_1, \dots, h_{n+m} = e_m$, und wir setzen

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_{n+m}) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Danach ergänzen wir $\{e_1, \dots, e_m\}$ zu einer Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_{m+r}\}$ des von $h_1, \dots, h_{n+m}$ aufgespannten Unterraums und setzen

$$\tilde{g}(x_1, \dots, x_{m+r}) = g(x_1, \dots, x_m).$$

In beiden Fällen ändert sich nichts an der Aussage, da nach Konstruktion $\partial_i \tilde{f} \equiv 0$ für $i > n$ bzw. $\partial_j \tilde{g} \equiv 0$ für $j > m$ gilt.

In Hilberträumen gilt die Darstellung $h_i = \sum_{j=1}^m \langle h_i, e_j \rangle e_j$, $i = 1, \dots, n$. Wir setzen dann $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ als die lineare Abbildung mit Matrix $(\langle h_i, e_j \rangle)_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,m}$ und erhalten aufgrund der Linearität von W

$$T(W(e_1), \dots, W(e_m)) = (W(h_1), \dots, W(h_m)),$$

also

$$(f \circ T)(W(e_1), \dots, W(e_m)) = g(W(e_1), \dots, W(e_m)). \tag{3.2}$$

Insbesondere folgt $f \circ T = g$, denn andernfalls gilt $(f \circ T)(x_0) \neq g(x_0)$ für ein x_0 und damit aufgrund der Stetigkeit auch $||f \circ T - g|| > \varepsilon$ auf einer Umgebung von x_0. Da $(W(e_1), \dots, W(e_m))$ mit positiver Wahrscheinlichkeit Werte auf dieser Umgebung annimmt, ergibt sich ein Widerspruch zu (3.2).

Die Kettenregel liefert dann wegen

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \partial_j g(W(e_1), \dots, W(e_m))e_j &= \sum_{j=1}^m \partial_j (f \circ T)(W(e_1), \dots, W(e_m))e_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \partial_i f(T(W(e_1), \dots, W(e_m)))\langle h_i, e_j \rangle e_j \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), \dots, W(h_n))h_i\end{aligned}$$

die Aussage, wobei wir $\partial_j (f \circ T) = \sum_{i=1}^n (\partial_i f \circ T)(\partial_j T_i)$ genutzt haben. □

Bemerkung 3.5.

(i) DX ist ein (zufälliges) Element von H.

(ii) Man kann

$$\langle DX, h\rangle_H = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\big[f(W(h_1)+\varepsilon\langle h_1, h\rangle_H, \dots, W(h_n)+\varepsilon\langle h_n, h\rangle_H) \\ - f(W(h_1), \dots, W(h_n))\big]$$

zeigen, so dass sich DX als Richtungsableitung interpretieren lässt.

Satz 3.6. (partielle Integration) *Es seien X gemäß (3.1) und $h \in H$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[\langle DX, h\rangle_H] = \mathbb{E}[XW(h)]. \tag{3.3}$$

Beweis: Ohne Einschänkung lässt sich $||h|| = 1$ annehmen, da beide Seiten von (3.3) linear in h sind. Außerdem gelte wie in Lemma 3.4 die Darstellung

$$X = g(W(e_1), \dots, W(e_m)),$$

wobei $\{e_1, \dots, e_m\}$ ein Orthonormalsystem ist und ohne Einschränkung $e_1 = h$ gilt. Bezeichnet φ die Dichte der Standardnormalverteilung im $\mathbb{R}^m$, so ergibt sich dann mit der klassischen Regel der partiellen Integration

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle DX, h\rangle] &= \sum_{j=1}^m \mathbb{E}[\partial_j g(W(e_1), \dots, W(e_m))]\langle e_j, h\rangle = \mathbb{E}[\partial_1 g(W(e_1), \dots, W(e_m))] \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} (\partial_1 g(x))\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^m} g(x)\varphi(x)(-x_1)dx = \mathbb{E}[XW(h)]\end{aligned}$$

die Aussage. □

Korollar 3.7. (Produktregel) *Es seien $X, Y \in \mathcal{S}$ und $h \in H$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[Y\langle DX, h\rangle_H] = \mathbb{E}[XYW(h) - X\langle DY, h\rangle_H].$$

Beweis: Ohne Einschränkung lässt sich wie im Beweis von Lemma 3.4

$$X = f(W(h_1), \dots, W(h_n)) \quad \text{und} \quad Y = g(W(h_1), \dots, W(h_n))$$

annehmen. Die klassische Produktregel für (partielle) Ableitungen liefert dann

$$D(XY) = XDY + YDX,$$

so dass Satz 3.6 über

$$\mathbb{E}[XYW(h)] = \mathbb{E}[\langle D(XY), h\rangle_H]$$

die Aussage liefert. □

Definition 3.8. Es seien E und F Banachräume und $A : D(A) \to F$ ein Operator, wobei dessen Definitionsbereich $D(A)$ ein Unterraum von E ist.

(i) A heißt abgeschlossen, falls dessen Graph

$$\Gamma(A) = \{(x, A(x)) \mid x \in D(A)\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $E \times F$ ist.

(ii) A heißt abschließbar, falls der Abschluss von $\Gamma(A)$ in $E \times F$ selbst wieder der Graph eines Operators ist. Dieser wird als Abschluss von A bezeichnet.

Lemma 3.9. *Ein Operator A ist genau dann abschließbar, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D(A)$, so dass $x_n \to 0$ und $A(x_n) \to y$ gilt, $y = 0$ folgt.*

Beweis: Es sei A abschließbar mit Abschluss $\overline{A}$. Dieser ist als Operator selbst eine lineare Abbildung und erfüllt $\overline{A}(0) = 0$. Insbesondere liegt $(0,0)$ in $\overline{\Gamma(A)}$. Würde nun eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D(A)$ mit $x_n \to 0$ und $A(x_n) \to y \neq 0$ existieren, so wäre auch $(0,y)$ im Abschluss von $\Gamma(A)$. In diesem Fall wäre $\overline{\Gamma(A)}$ nicht der Graph eines Operators.

Umgekehrt sei $(x,y) \in \overline{\Gamma(A)}$, und wir definieren $\overline{A}(x) = y$. Die Abbildung ist wohldefiniert, da für $(x,y),(x,z) \in \overline{\Gamma(A)}$ gilt: $y = \lim_{n\to\infty} A(r_n)$ für eine Folge $r_n \to x$ bzw. $z = \lim_{n\to\infty} A(s_n)$ für eine Folge $s_n \to x$. Nach Voraussetzung gilt

$$y - z = \lim_{n\to\infty} A(r_n) - A(s_n) = \lim_{n\to\infty} A(r_n - s_n) = 0.$$

Zu zeigen bleibt die Linearität von $\overline{A}$. Dazu seien $(x,y),(v,w) \in \overline{\Gamma(A)}$. Dann gilt insbesondere $(x,y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, A(x_n))$ bzw. $(v,w) = \lim_{n\to\infty}(v_n, A(v_n))$ für geeignete Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir erhalten für $\lambda \in \mathbb{R}$ wegen $\lambda x_n \to \lambda x$ und $A(\lambda x_n) = \lambda A(x_n) \to \lambda y$ dann

$$\overline{A}(\lambda x) = \lambda y = \lim_{n\to\infty} \lambda A(x_n) = \lambda \overline{A}(x)$$

bzw.

$$\overline{A}(x+v) = y + w = \lim_{n\to\infty} A(x_n) + A(v_n) = \overline{A}(x) + \overline{A}(v),$$

also die Aussage. □

Definition 3.10.

(i) Eine Abbildung $F : \Omega \to H$ heißt messbar, falls sie der punktweise Grenzwert von einfachen Funktionen $\sum_{k=1}^n h_k 1_{A_k}$ mit $A_k \in \mathcal{F}$ und $h_k \in H$ ist.

(ii) Eine messbare Abbildung $F : \Omega \to H$ heißt p-integrierbar, falls

$$\mathbb{E}[||F||_H^p] < \infty$$

gilt. In diesem Fall schreiben wir $F \in L^p(\Omega; H)$.

Bemerkung 3.11.

(i) Wir identifizieren wie üblich Funktionen miteinander, die fast überall identisch sind. Dann lässt sich zeigen:

(a) $L^p(\Omega; H)$ ist ein Banachraum bezüglich der Norm

$$||F||_{L^p(\Omega,H)} = \mathbb{E}[||F||_H^p]^{\frac{1}{p}}.$$

(b) $L^2(\Omega; H)$ ist ein Hilbertraum bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle F, G\rangle = \mathbb{E}[\langle F, G\rangle_H].$$

(ii) Im Fall $H = \mathbb{R}$ ergibt sich offenbar $L^p(\Omega; H) = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Satz 3.12. *Es sei $p \geq 1$. Der Operator D von $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nach $L^p(\Omega; H)$, ursprünglich mit Definitionsbereich $\mathcal{S}$, ist abschließbar.*

Beweis: Dass für $X \in \mathcal{S}$ sowohl $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ als auch $DX \in L^p(\Omega; H)$ gilt, folgt direkt aus der Definition von $\mathcal{S}$. Zu zeigen ist gemäß Lemma 3.9 also, dass für jede Folge $X_n \in \mathcal{S}$ mit $X_n \to 0$ in $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $DX_n \to \xi$ in $L^p(\Omega; H)$ automatisch $\xi = 0$ folgt.

Dazu sei $h \in H$ beliebig, und wir wählen $Y \in \mathcal{S}_b$ so, dass $YW(h)$ beschränkt ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y\langle \xi, h\rangle] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y\langle DX_n, h\rangle] \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[YX_nW(h) - X_n\langle DY, h\rangle] = 0, \end{aligned}$$

wobei die erste und die dritte Identität jeweils aus der L^p-Konvergenz folgen, da alle Faktoren neben X_n beschränkt sind, und wir für die zweite Identität Korollar 3.7 verwendet haben. Aus Dichtheitsgründen lässt sich zunächst $\mathbb{E}[\langle \xi, h\rangle] = 0$ für alle $h \in H$ und daraus dann $\xi = 0$ fast sicher folgern. □

Definition 3.13. Wir bezeichnen den Abschluss des Operators D von $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nach $L^p(\Omega; H)$, ursprünglich mit Definitionsbereich $\mathcal{S}$, im Folgenden ebenfalls als D und dessen Definitionsbereich als $\mathbb{D}^{1,p}$.

Bemerkung 3.14.

(i) $\mathbb{D}^{1,p}$ ist der Abschluss von $\mathcal{S}$ bzgl. der Norm

$$||X||_{1,p} = \left(\mathbb{E}[|X|^p] + \mathbb{E}[||DX||_H^p]\right)^{1/p}.$$

(ii) $\mathbb{D}^{1,p}$ ist für $p > 1$ reflexiv, da der Raum isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum des reflexiven Raums (vgl. Example 8.11 in Alt (2016)) $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \times L^p(\Omega; H)$ ist.

(iii) $\mathbb{D}^{1,2}$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle X, Y\rangle_{1,2} = \mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[\langle DX, DY\rangle_H].$$

(iv) Im Allgemeinen folgt aus der Dichtheit von $\mathcal{S}$ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nicht, dass $\mathbb{D}^{1,2} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist, da $\mathbb{D}^{1,2}$ der Abschluss von $\mathcal{S}$ bzgl. der stärkeren Norm $||\cdot||_{1,2}$ ist.

(v) Man kann zeigen: $\mathcal{S}_0$ liegt bzgl. $||\cdot||_{1,p}$ dicht in $\mathbb{D}^{1,p}$.

Satz 3.15. (Kettenregel) *Es seien $p \geq 1$, $X = (X_1, \ldots, X_m)$ ein Vektor mit $X_i \in \mathbb{D}^{1,p}$, $i = 1, \ldots, m$, und $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit beschränkten partiellen Ableitungen. Dann ist auch $\varphi(X) \in \mathbb{D}^{1,p}$, und es gilt*

$$D\varphi(X) = \sum_{i=1}^{m} \partial_i \varphi(X) DX_i. \tag{3.4}$$

Beweis: Es seien zunächst $X_i \in \mathcal{S}$ für $i = 1, \ldots, m$ und $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit beschränkten partiellen Ableitungen. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.4 lässt sich ohne Einschränkung annehmen, dass $X_j = f_j(W(h_1), \dots, W(h_n))$ gilt. Also folgt (3.4) mit $f = (f_1, \dots, f_m)$ aufgrund von

$$\begin{aligned} D\varphi(X) = D(\varphi \circ f)(W(h_1), \dots, W(h_n)) &= \sum_{j=1}^{n} \partial_j(\varphi \circ f)(W(h_1), \dots, W(h_n))h_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \partial_i\varphi(f(W(h_1), \dots, W(h_n)))\partial_j f_i(W(h_1), \dots, W(h_n))h_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} \partial_i\varphi(X)DX_i. \end{aligned}$$

Wir zeigen den allgemeinen Fall für $m = 1$. Einerseits approximieren wir X durch eine Folge X_n in $\mathcal{S}$ mit $X_n \to X$ in $\mathbb{D}^{1,p}$, und wir wählen eine Folge $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit gleichmäßig beschränkten Ableitungen, so dass $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ und $\varphi'_\varepsilon \to \varphi'$ gleichmäßig auf kompakten Mengen sowie $|f(x)| \leq C(1 + |x|)$ für ein $C > 0$ und $f = \varphi$ bzw. $f = \varphi_\varepsilon$ für alle ε gilt. Letzteres ist möglich, da φ beschränkte Ableitungen besitzt.

Es seien nun zunächst $\delta > 0$ und $K \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann existiert aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen ein $\varepsilon = \varepsilon(\delta, K) > 0$, so dass

$$\begin{aligned} |\varphi_\varepsilon(X) - \varphi(X)| &\leq \delta + (|\varphi_\varepsilon(X)| + |\varphi(X)|)1_{\{|X| \geq K\}} \\ &\leq \delta + 2C(1 + |X|)1_{\{|X| \geq K\}} \end{aligned}$$

gilt. Zudem gilt für dieses ε auch

$$|\varphi_\varepsilon(X_n) - \varphi_\varepsilon(X)| \leq C|X_n - X|,$$

wieder da φ_ε gleichmäßig beschränkte Ableitungen besitzt. Es folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|\varphi_\varepsilon(X_n) - \varphi(X)|^p] \leq C_p(\delta^p + \mathbb{E}[(1 + |X|)^p 1_{\{|X| \geq K\}}])$$

für eine geeignete Konstante C_p, die nur von p abhängt, und die rechte Seite wird beliebig klein für $\delta \to 0$ und $K \to \infty$ nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz. Insbesondere gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|\varphi_\varepsilon(X_n) - \varphi(X)|^p] = 0.$$

Analog lässt sich

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[||\varphi'_\varepsilon(X_n)DX_n - \varphi'(X)DX||_H^p] = 0$$

zeigen, indem man

$$\begin{aligned} ||\varphi'_\varepsilon(X_n)DX_n - \varphi'(X)DX||_H &\leq ||(\varphi'_\varepsilon(X) - \varphi'(X))DX||_H \\ &\quad + ||(\varphi'_\varepsilon(X_n) - \varphi'_\varepsilon(X))DX||_H \\ &\quad + ||\varphi'_\varepsilon(X_n)(DX_n - DX)||_H \end{aligned}$$

verwendet.

Daraus folgt $\varphi(X) \in \mathbb{D}^{1,p}$, und aus der Abgeschlossenheit von D ergibt sich die Aussage. □

Lemma 3.16. *Es seien $p > 1$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{D}^{1,p}$, so dass $X_n \to X$ in $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[||DX_n||_H^p] < \infty$$

gilt. Dann ist $X \in \mathbb{D}^{1,p}$, und DX_n konvergiert schwach gegen DX.

Beweis: Wir verwenden folgendes Hilfsresultat aus der Funktionalanalysis: Beschränkte Mengen in reflexiven Räumen sind schwach folgenkompakt, d.h. jede beschränkte Folge besitzt eine schwach konvergente Teilfolge (vgl. Theorem 8.10 in Alt (2016)).

Nun ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als in $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ konvergente Folge beschränkt in $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, und nach Voraussetzung ist $(DX_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $L^p(\Omega; H)$. Insbesondere ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathbb{D}^{1,p}$, besitzt also eine Teilfolge $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die schwach gegen $Y \in \mathbb{D}^{1,p}$ konvergiert. Insbesondere konvergiert $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, so dass $Y = X$ und $X \in \mathbb{D}^{1,p}$ folgt.

Mit demselben Argument lässt sich zeigen, dass jede Teilfolge von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge besitzt, die gegen X konvergiert. Also konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{D}^{1,p}$ schwach gegen X. Daraus folgt insbesondere, dass DX_n in $L^p(\Omega; H)$ schwach gegen DX konvergiert. □

Satz 3.17. *Es seien $p > 1$, $X = (X_1, \ldots, X_m)$ ein Vektor mit $X_i \in \mathbb{D}^{1,p}$, $i = 1, \ldots, m$, und $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Konstante L. Dann ist auch $\varphi(X) \in \mathbb{D}^{1,p}$, und es existiert ein Zufallsvektor $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ mit $||Y||_\infty \le L$, so dass*

$$D\varphi(X) = \sum_{i=1}^m Y_i DX_i$$

gilt.

Beweis: Wir zeigen die Aussage im Fall $m = 1$ und wählen $\varphi_n \in C^1(\mathbb{R})$, so dass $\varphi_n \to \varphi$ punktweise sowie $|\varphi_n'(x)| \le L$ für alle n gilt. Nach Satz 3.15 ist $\varphi_n(X) \in \mathbb{D}^{1,p}$, und es gilt

$$D\varphi_n(X) = \varphi_n'(X)DX.$$

Nutzt man

$$|\varphi_n(X)| \le |\varphi_n(0)| + L|X|,$$

so ergibt sich $\varphi_n(X) \to \varphi(X)$ in $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz, während $(\varphi_n'(X)DX)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $L^p(\Omega; H)$ ist. Mit Lemma 3.16 folgt also einerseits $\varphi(X) \in \mathbb{D}^{1,p}$ und $\varphi_n'(X)DX \to D\varphi(X)$ schwach in $L^p(\Omega; H)$. Andererseits ist die Folge $(\varphi_n'(X))_{n\in\mathbb{N}}$ durch L beschränkt und besitzt eine in $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ schwach konvergente Teilfolge mit Grenzwert Y, wobei ebenfalls Y durch L beschränkt ist. Offenbar gilt dann $D\varphi(X) = YDX$. □

Bemerkung 3.18. Es lassen sich auch höhere Malliavin-Ableitungen definieren, wobei zu klären ist, wie etwa die Ableitung von

$$F = DX = \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), \ldots, W(h_n))h_i \in H$$

für $X \in \mathcal{S}$ aussieht. Analog zur ersten Ableitung würde sich

$$DF = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ij} f(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i h_j$$

anbieten, was jedoch nicht wohldefiniert ist, da im Allgemeinen keine Produktabbildung auf $H \times H$ existiert. Formal verwendet man daher Tensorprodukte von Hilberträumen, die ebenfalls wieder Hilberträume sind.

Definition 3.19. Es seien H und V separable Hilberträume mit orthonormalen Basen $(h_\alpha)_{\alpha \in A}$ bzw. $(v_\beta)_{\beta \in B}$ für abzählbare Indexmengen A und B. Dann ist das Tensorprodukt $H \otimes V$ als Vektorraum aller formalen Reihen

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} h_\alpha \otimes v_\beta$$

definiert, für die $\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}^2 < \infty$ gilt, zusammen mit dem Skalarprodukt

$$\langle \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} h_\alpha \otimes v_\beta, \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha,\beta} h_\alpha \otimes v_\beta \rangle = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} b_{\alpha,\beta}.$$

Bemerkung 3.20. $H \otimes V$ ist isometrisch isomorph zum Folgenraum $\ell^2(A \times B)$, also ein Hilbertraum, und $(h_\alpha \otimes v_\beta)_{\alpha \in A, \beta \in B}$ ist eine Orthonormalbasis.

Definition 3.21.

(i) Es sei V ein separabler Hilbertraum. Wir bezeichnen mit $\mathcal{S}(V) \subset L^p(\Omega; V)$ die Menge aller Zufallsvariablen

$$F = \sum_{j=1}^{m} X_j v_j$$

mit $X_j \in \mathcal{S}$ und $v_j \in V$, $j = 1, \dots, m$.

(ii) In der Situation von (i) schreiben wir $F \in \mathcal{H}_n(V)$, falls

$$F = \sum_{j=1}^{m} X_j v_j$$

mit $X_j \in \mathcal{H}_n$ und $v_j \in V$, $j = 1, \dots, m$.

(iii) Es sei $F \in \mathcal{S}(V)$ mit der Darstellung $X_j = f_j(W(h_1^j), \dots, W(h_{n_j}^j))$, $j = 1, \dots, m$, gegeben. Dann ist dessen *Malliavin-Ableitung* durch

$$DF = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} (\partial_i f_j(W(h_1^j), \dots, W(h_{n_j}^j))) h_i^j \otimes v_j = \sum_{j=1}^{m} DX_j \otimes v_j$$

definiert. Hierbei ist das erste Tensorprodukt auf $H \otimes V$ und das zweite auf $L^p(\Omega; H) \times V$ zu verstehen.

Bemerkung 3.22.

(i) Es seien W ein isonormaler Gaußscher Prozess auf H und V ein separabler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Analog zu Satz 1.14 und Satz 1.20 lässt sich zeigen, dass

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; V) = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n(V)$$

gilt und dass $\{\Phi_\alpha \otimes v_k \mid |\alpha| = n, k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_n(V)$ definiert.

(ii) Offenbar lassen sich mit Hilfe von Definition 3.21 induktiv höhere Ableitungen von $X \in \mathcal{S}$ definieren, wobei $D^k X$ eine Zufallsvariable mit Werten in $H^{\otimes k}$ ist. Zu beachten ist hier, dass $\mathbb{R} \otimes H$ isometrisch isomorph zu H ist, so dass die Definition von DX für $X \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit der ursprünglichen Definition der Malliavin-Ableitung übereinstimmt.

Satz 3.23. *Es sei $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Wiener-Chaos-Zerlegung*

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} J_n X.$$

Dann gilt:

(i) $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ genau dann, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{E}[|J_n X|^2] < \infty. \tag{3.5}$$

(ii) Gilt (3.5), so folgt $D(J_n X) = J_{n-1}(DX)$ für alle $n \geq 1$ und

$$\mathbb{E}[||DX||_H^2] = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{E}[|J_n X|^2],$$

wobei zu beachten ist, dass $J_n X$ und $J_{n-1}(DX)$ formal den jeweiligen Unterraumprojektionen in den unterschiedlichen Räumen $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ bzw. $L^2(\Omega; H)$ entsprechen.

Beweis: Es sei

$$\Phi_\alpha = \sqrt{\alpha!} \prod_{l=1}^{\infty} H_{\alpha_l}(W(e_l))$$

mit $|\alpha| = n$. Offensichtlich ist $\Phi_\alpha \subset \mathcal{S}$, und die Produktregel sowie Korollar 1.8 (i) liefern

$$\begin{aligned} D\Phi_\alpha &= \sqrt{\alpha!} \sum_{l=1}^{\infty} \prod_{m=1, m\neq l}^{\infty} H_{\alpha_m}(W(e_m)) H_{\alpha_l - 1}(W(e_l)) e_l \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_l} \sqrt{\beta^{(l)}!} \prod_{m=1, m\neq l}^{\infty} H_{\beta_m^{(l)}}(W(e_m)) H_{\beta_l^{(l)}}(W(e_l)) e_l = \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_l} \Phi_{\beta^{(l)}} e_l, \end{aligned}$$

wobei $\beta^{(l)}$ gemäß $\beta^{(l)}_m = \alpha_m$ für $m \neq l$ und $\beta^{(l)}_l = \alpha_l - 1$ definiert ist. Insbesondere folgt $D\Phi_\alpha \in \mathcal{H}_{n-1}(H)$ aufgrund von $|\beta^{(l)}| = n-1$ für alle $l \geq 1$, und man erhält also

$$D(J_i\Phi_\alpha) = J_{i-1}(D\Phi_\alpha) \tag{3.6}$$

für alle $i \geq 1$. Ferner ergibt sich

$$\mathbb{E}[||D\Phi_\alpha||^2_H] = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l = n = n\mathbb{E}[\Phi^2_\alpha],$$

und da $\{\Phi_\alpha \mid |\alpha| = n\}$ gemäß Satz 1.20 eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_n$ ist, folgt aufgrund der Linearität von D und der Abgeschlossenheit bzgl. $||\cdot||_{1,2}$, dass $\mathcal{H}_n \subset \mathbb{D}^{1,2}$ gilt und $D\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n-1}(H)$ ist, wobei wir $\mathcal{H}_{-1}(H) = \{0\}$ setzen. Außerdem ergibt sich

$$\mathbb{E}[||DY||^2_H] = n\mathbb{E}[Y^2] \tag{3.7}$$

für ein allgemeines $Y \in \mathcal{H}_n$.

Es sei nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{E}[|J_nX|^2] < \infty.$$

Wegen Satz 1.14 konvergiert die Folge $X_m = \sum_{n=0}^m J_nX$ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegen X. Zudem gilt

$$\mathbb{E}[||DX_m||^2_H] = \sum_{n=0}^{m} \mathbb{E}[||DJ_nX||^2_H] = \sum_{n=1}^{m} \mathbb{E}[||DJ_nX||^2_H] = \sum_{n=1}^{m} n\mathbb{E}[|J_nX|^2]$$

wegen der Orthogonalität der Räume $\mathcal{H}_n(H)$, $DJ_0X = 0$ und (3.7). Lemma 3.16 liefert dann $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ und die schwache Konvergenz $DX_m \to DX$ in $L^2(\Omega; H)$. Insbesondere ergibt sich

$$DX = \sum_{n=0}^{\infty} D(J_nX),$$

da man DX als Grenzwert von $DX_m = \sum_{n=0}^m D(J_nX)$ in $L^2(\Omega; H)$ leicht identifiziert, und man erhält

$$\mathbb{E}[||DX||^2_H] = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{E}[|J_nX|^2].$$

Andererseits sei $X \in \mathbb{D}^{1,2}$. Stellt man X bzgl. der Orthonormalbasis $\{\Phi_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ bzw. DX bzgl. der Orthonormalbasis $\{\Phi_\alpha \otimes e_k \mid \alpha \in \Lambda, k \in \mathbb{N}\}$ dar, so erhält man

$$J_{n-1}(DX) = D(J_nX)$$

aufgrund von (3.6) und der Linearität der Operatoren. Zudem gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{E}[|J_nX|^2] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[||D(J_nX)||^2_H] = \mathbb{E}[||DX||^2_H] < \infty,$$

wobei wir wieder (3.7) ausgenutzt haben. □

Korollar 3.24. *Es sei $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ so, dass $DX = 0$. Dann gilt $X = \mathbb{E}[X]$.*

Beweis: Nach Satz 3.23 ist $J_n X = 0$ für alle $n \geq 1$, also $X = J_0 X = \mathbb{E}[X]$. $\square$

Korollar 3.25. *Es sei $A \in \mathcal{F}$. Dann ist $1_A \in \mathbb{D}^{1,2}$ genau dann, wenn $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$ gilt.*

Beweis: Ist $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$, so ist 1_A fast sicher konstant, also nach dem Beweis von Satz 3.23 in $\mathcal{H}_0 \subset \mathbb{D}^{1,2}$ enthalten.

Umgekehrt sei $1_A \in \mathbb{D}^{1,2}$, und wir wählen $\varphi \in C_0^\infty$ mit $\varphi(x) = x^2$ für $x \in (-2,2)$. Wegen $\varphi(1_A) = 1_A$ und $\varphi'(x) = 2x$ für $x \in (-2,2)$ folgt aus Satz 3.15

$$D1_A = D(\varphi(1_A)) = 21_A D1_A.$$

Also ist $D1_A = 0$ fast sicher auf A^c und $D1_A = 2D1_A$ fast sicher auf A. Also folgt $D1_A = 0$ fast sicher, und gemäß Korollar 3.24 ist $1_A = \mathbb{P}(A)$ fast sicher. Daraus ergibt sich $P(A) \in \{0,1\}$. $\square$

Satz 3.26. *Es sei $p \geq 1$. Der Operator D^k von $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nach $L^p(\Omega; H^{\otimes k})$, ursprünglich mit Definitionsbereich $\mathcal{S}$, ist abschließbar.*

Beweis: Der Beweis funktioniert ähnlich wie in Satz 3.12, wobei man hier die Produktregel iteriert, um für $X_n \in \mathcal{S}$ mit $X_n \to 0$ in $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $D^k X_n \to \xi$ in $L^p(\Omega; H^{\otimes k})$

$$\mathbb{E}[Y \langle \xi, h_1 \otimes \cdots \otimes h_k \rangle] = 0$$

zu erhalten. Hierbei seien $h_1, \ldots, h_k \in H$ beliebig und $Y = \exp(-\varepsilon \sum_{j=1}^k W(h_j)^2)$ für $\varepsilon > 0$. Dies genügt, um

$$\mathbb{E}[\langle \xi, h_1 \otimes \cdots \otimes h_k \rangle] = 0 \quad \text{bzw. dann} \quad \xi = 0$$

zu folgern. $\square$

Lemma 3.27. *Es seien $X \in \mathcal{S}$, $p \in [1, \infty)$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann besitzt die Norm*

$$||X||_{k,p} = \Big(\mathbb{E}[|X|^p] + \sum_{j=1}^k \mathbb{E}[||D^j X||^p_{H^{\otimes j}}] \Big)^{1/p}$$

die Eigenschaft

$$||X||_{k,p} \leq ||X||_{m,q}$$

für alle $X \in \mathcal{S}$, $p \leq q$ und $k \leq m$.

Beweis: Diese Aussage folgt wie üblich aus der Jensen-Ungleichung. $\square$

Definition 3.28. Wir bezeichnen mit $\mathbb{D}^{k,p}$ den Abschluss von $\mathcal{S}$ bzgl. $|| \cdot ||_{k,p}$. Außerdem setzen wir $|| \cdot ||_{0,p} = || \cdot ||_p$ und $\mathbb{D}^{0,p} = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Bemerkung 3.29. Offenbar gilt $\mathbb{D}^{k+1,q} \subset \mathbb{D}^{k,p}$ für $k \geq 0$ und $p \leq q$. Insbesondere stellen wir so sicher, dass die Existenz der $(k+1)$-ten Ableitung auch die Existenz der k-ten Ableitung (bzgl. desselben p) impliziert.

Kapitel 4

Der Divergenz-Operator

In diesem Kapitel interessieren wir uns für den Divergenz-Operator als "inversem" (formal: adjungiertem) Operator zur Malliavin-Ableitung. Dazu sei weiterhin $W = \{W(h) \mid h \in H\}$ ein isonormaler Gaußscher Prozess auf einem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, und wir nehmen wieder an, dass zusätzlich $\mathcal{F}$ von W erzeugt ist. Im Unterschied zum vorherigen Kapitel befassen wir uns ausschließlich mit der Malliavin-Ableitung als Operator von $\mathbb{D}^{1,2}$ nach $L^2(\Omega; H)$.

Bemerkung 4.1. Es seien H und V Hilberträume und $T : H \to V$ linear und beschränkt, d.h. es existiert ein $K > 0$ mit $||Th||_V \leq K||h||_H$ für alle $h \in H$. Betrachtet man für ein $v \in V$ die lineare Abbildung

$$h \mapsto \langle v, Th \rangle_V,$$

so gilt

$$|\langle v, Th \rangle_V| \leq ||v||_V ||Th||_V \leq K||v||_V ||h||_H.$$

Diese Abbildung ist also ebenfalls beschränkt. Nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz (vgl. Theorem 6.1 in Alt (2016)) existiert dann genau ein Element $z \in H$ mit

$$\langle v, Th \rangle_V = \langle z, h \rangle_H$$

für alle $h \in H$.

Definition 4.2. Die lineare Abbildung $T^* : V \to H$ mit $T^* v = z$ wird als *adjungierter Operator zu T* bezeichnet.

Bemerkung 4.3. Es sei $u \in L^2(\Omega; H)$, und es existiere ein $c > 0$, so dass

$$|\mathbb{E}[\langle DY, u \rangle_H]| \leq c(\mathbb{E}[Y^2])^{1/2} \tag{4.1}$$

für alle $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$ gilt, d.h.

$$Y \mapsto \mathbb{E}[\langle DY, u \rangle_H]$$

ist ein linearer Operator auf $\mathbb{D}^{1,2}$, der bezüglich der L^2-Norm beschränkt ist. Dann lässt sich aufgrund der Dichtheit von $\mathbb{D}^{1,2}$ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zeigen, dass dieser Operator eindeutig zu einem beschränkten, linearen Operator auf $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ erweitert werden kann. Wieder existiert also ein eindeutiges $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, so dass

$$\mathbb{E}[\langle DY, u \rangle_H] = \mathbb{E}[YX]$$

gilt, und $u \mapsto X$ wird wieder als adjungierte Abbildung zu D bezeichnet.

Definition 4.4.

(i) Wir schreiben $u \in D(\delta)$, falls ein $c > 0$ existiert, so dass (4.1) für alle $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$ gilt.

(ii) Die zugehörige adjungierte Abbildung wird mit $u \mapsto \delta(u)$ notiert und als *Divergenzoperator* bzw. *Skorokhod-Integral* bezeichnet.

Satz 4.5. *Es sei $u \in \mathcal{S}(H)$, d.h. $u = \sum_{j=1}^n X_j h_j$ mit $X_j \in \mathcal{S}$. Dann ist $u \in D(\delta)$ mit*

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^n X_j W(h_j) - \sum_{j=1}^n \langle DX_j, h_j \rangle_H \in \mathcal{S}.$$

Beweis: Aufgrund der Linearität von $u \mapsto \delta(u)$ genügt es, den Fall $n = 1$ mit $u = Xh$ zu diskutieren. Zu zeigen ist in diesem Fall

$$\mathbb{E}[\langle DY, Xh \rangle_H] = \mathbb{E}[YXW(h)] - \mathbb{E}[Y \langle DX, h \rangle_H],$$

was wegen

$$\mathbb{E}[\langle DY, Xh \rangle_H] = \mathbb{E}[X \langle DY, h \rangle_H]$$

der Produktregel (Korollar 3.7) entspricht. Insbesondere folgt $u \in D(\delta)$ aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. □

Definition 4.6. Es seien H und V separable Hilberträume und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H. Ein beschränkter Operator $T : H \to V$ heißt *Hilbert-Schmidt-Operator*, falls

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} ||Th_n||_V^2 < \infty$$

gilt. In diesem Fall ist

$$||T||_{HS} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} ||Th_n||_V^2 \Big)^{1/2}$$

die *Hilbert-Schmidt-Norm von T*. Wir bezeichnen die Menge aller Hilbert-Schmidt-Operatoren von H nach V mit $\mathcal{L}_{HS}(H, V)$.

Bemerkung 4.7.

(i) Es lässt sich zeigen, dass der Begriff des Hilbert-Schmidt-Operators unabhängig von der Wahl der Basis auf H ist.

(ii) $\mathcal{L}_{HS}(H, V)$ ist ein Vektorraum, und $||\cdot||_{HS}$ definiert eine Norm auf $\mathcal{L}_{HS}(H, V)$.

Lemma 4.8. *Es seien H und V separable Hilberträume mit Orthonormalbasen $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist $H \otimes V$ isometrisch isomorph zu $\mathcal{L}_{HS}(H, V)$.*

Beweis: Es sei $\mathcal{L}(H, V)$ die Menge aller linearen Abbildungen von H nach V. Wir definieren zunächst $T : H \otimes V \to \mathcal{L}(H, V)$ (die Menge der linearen und beschränkten Operatoren von H nach V) wie folgt: Für ein Basiselement $h_n \otimes v_m$ von $H \otimes V$ und ein Basiselement $h_k \in H$ sei

$$T(h_n \otimes v_m)(h_k) = \langle h_k, h_n \rangle_H v_m.$$

Diese Abbildung wird linear auf $h \in H$ fortgesetzt und ist nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung beschränkt. Für $\xi = \sum_{n,m} a_{nm}(h_n \otimes v_m)$ setzen wir entsprechend

$$T(\xi)(h_k) = \sum_{n,m} a_{nm} \langle h_k, h_n \rangle_H v_m.$$

Dann gilt

$$\sum_k ||T(\xi)(h_k)||_V^2 = \sum_k \Big|\Big| \sum_{n,m} a_{nm} \langle h_k, h_n \rangle_H v_m \Big|\Big|_V^2 = \sum_k \sum_m a_{km}^2 = ||\xi||_{H \otimes V}^2,$$

da in der Fünffachsumme aufgrund der Orthonormalität der Basen nur die Terme $k = n_1 = n_2$ und $m_1 = m_2$ eine Rolle spielen. Insbesondere gilt $T(\xi) \in \mathcal{L}_{HS}(H, V)$, und aus Bemerkung 4.7 folgt die Isometrieeigenschaft $||T(\xi)||_{HS} = ||\xi||_{H \otimes V}$. Zu zeigen bleibt, dass $\xi \mapsto T(\xi)$ surjektiv auf $\mathcal{L}_{HS}(H, V)$ abbildet.

Dazu sei $T \in \mathcal{L}_{HS}(H, V)$. Offenbar gilt

$$T(h_n) = \sum_m b_{nm} v_m \quad \text{mit} \quad b_{nm} = \langle T(h_n), v_m \rangle_V.$$

Wegen

$$\sum_{n,m} b_{nm}^2 = \sum_n || \sum_m b_{nm} v_m ||_V^2 = \sum_n ||T(h_n)||_V^2 = ||T||_{HS}^2$$

ist $\eta = \sum_{n,m} b_{nm}(h_n \otimes v_m) \in H \otimes V$. Für dieses η gilt

$$T(\eta)(h_k) = \sum_{n,m} b_{nm} \langle h_k, h_n \rangle_H v_m = \sum_m b_{km} v_m = T(h_k),$$

also folgt $T(\eta) = T$. □

Bemerkung 4.9. Wir schreiben im Folgenden $T = \sum_{n,m} a_{nm}(h_n \otimes v_m)$ für die Abbildung

$$T(h) = \sum_{n,m} a_{nm} \langle h, h_n \rangle_H v_m$$

aus Lemma 4.8. Offenbar wird dadurch ein Skalarprodukt auf $\mathcal{L}_{HS}(H, V)$ induziert, indem man mit $S = \sum_{n,m} b_{nm}(h_n \otimes v_m)$

$$\langle T, S \rangle_{HS} = \sum_{n,m} a_{nm} b_{nm}$$

setzt. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \langle T, S \rangle_{HS} &= \sum_{n,m} \langle T(h_n), v_m \rangle_V \langle S(h_n), v_m \rangle_V \\ &= \sum_n \langle T(h_n), S(h_n) \rangle_V = \sum_n \langle (S^*T)h_n, h_n \rangle_H. \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der zweiten Identität die Verallgemeinerung der Parsevalschen Gleichung (vgl. Theorem 3.35 in Meneghin (2013)) verwendet. Man bezeichnet $\mathrm{tr}(S^*T) = \sum_n \langle (S^*T)h_n, h_n \rangle_V$ als die *Spur von* S^*T.

Lemma 4.10. *Es sei* $T \in \mathcal{L}_{HS}(H, H)$. *Dann gilt*

$$|tr(T^2)| \leq ||T||_{HS}^2.$$

Beweis: Dieser Beweis wird als Übungsaufgabe geführt. □

Definition 4.11. Es seien $X \in \mathcal{S}$, $u \in \mathcal{S}(H)$ und $h \in H$.

(a) Der Operator $D_h : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ ist durch
$$D_h X = \langle DX, h \rangle_H$$
definiert.

(b) Wir schreiben
$$Du \cdot h$$
als die Anwendung des Operators $Du \in H \otimes H \cong \mathcal{L}_{HS}(H, H)$ auf $h \in H$.

Lemma 4.12. *Es seien $u \in \mathcal{S}(H)$ und $h \in H$. Dann gilt*
$$D_h(\delta(u)) = \langle u, h \rangle_H + \delta(Du \cdot h).$$

Beweis: Es genügt wieder, die Aussage für $u = Xg$ zu zeigen, wobei $g \in H$ sei und
$$X = f(W(e_1), \dots, W(e_n)) \in \mathcal{S}$$
für orthonormale $e_1, \dots, e_n$ gelte. Ohne Einschränkung seien $g, h \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Wir schreiben
$$X_i = \partial_i f(W(e_1), \dots, W(e_n)).$$

Satz 4.5 liefert
$$\delta(u) = XW(g) - \langle DX, g \rangle_H = \widetilde{f}(W(e_1), \dots, W(e_n), W(g)) - \sum_{i=1}^n X_i \langle e_i, g \rangle_H$$
mit
$$\widetilde{f}(x, x_{n+1}) = x_{n+1} f(x).$$
Daher folgt
$$D(XW(g)) = Xg + \sum_{i=1}^n W(g) X_i e_i,$$
also
$$D_h(\delta(u)) = X\langle g, h \rangle_H + \sum_{i=1}^n W(g) X_i \langle e_i, h \rangle_H - \sum_{i=1}^n \langle DX_i, h \rangle_H \langle e_i, g \rangle_H.$$
Insbesondere gilt $X\langle g, h \rangle_H = \langle u, h \rangle_H$.

Andererseits ist
$$Du \cdot h = (\sum_{i=1}^n X_i e_i \otimes g) \cdot h = \sum_{i=1}^n X_i \langle h, e_i \rangle_H g,$$
also folgt mit Satz 4.5
$$\delta(Du \cdot h) = \sum_{i=1}^n X_i \langle h, e_i \rangle_H W(g) - \sum_{i=1}^n \langle h, e_i \rangle_H \langle DX_i, g \rangle_H$$

Stellt man g und h hinsichtlich der Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n$ dar, so folgt mit

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \langle DX_i, h\rangle_H \langle e_i, g\rangle_H &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_j, h\rangle_H \langle DX_i, e_j\rangle_H \langle e_i, g\rangle_H \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_j, h\rangle_H \langle DX_j, e_i\rangle_H \langle e_i, g\rangle_H = \sum_{j=1}^n \langle e_j, h\rangle_H \langle DX_j, g\rangle_H\end{aligned}$$

nach dem Satz von Schwarz und der Definition von DX_i bzw. DX_j die Aussage. □

Bemerkung 4.13. Die in Definition 3.21 eingeführte Malliavin-Ableitung D von $L^p(\Omega; V)$ nach $L^p(\Omega; H \otimes V)$, ursprünglich mit Definitionsbereich $\mathcal{S}(V)$, ist abschließbar. Wir bezeichnen den Definitionsbereichs des Abschlusses von D mit $\mathbb{D}^{1,p}(V)$. Eine Norm auf $\mathbb{D}^{1,p}(V)$ ist durch

$$||u||_{\mathbb{D}^{1,p}(V)} = (\mathbb{E}[||u||_V^p] + \mathbb{E}[||Du||_{H\otimes V}^p])^{1/p}$$

gegeben.

Lemma 4.14. *Es seien W ein isonormaler Gaußscher Prozess auf H und $u \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$, so dass Du eine Zufallsvariable mit Werten in $H \otimes H \cong \mathcal{L}_{HS}(H, H)$ ist. Bezeichnet Du^* die zu Du adjungierte Abbildung, so gilt für jedes $h \in H$*

$$\langle u, h\rangle_H \in \mathbb{D}^{1,2} \quad \textit{und} \quad D\langle u, h\rangle_H = Du^* \cdot h.$$

Beweis: Der Beweis wird als Übungsaufgabe geführt. □

Satz 4.15.

(i) $\mathbb{D}^{1,2}(H) \subset D(\delta)$.

(ii) Für $u, v \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$ gilt

$$\mathbb{E}[\delta(u)\delta(v)] = \mathbb{E}[\langle u, v\rangle_H] + \mathbb{E}[tr(DuDv)].$$

Beweis: Es seien zunächst $u, v \in \mathcal{S}(H) \subset \mathbb{D}^{1,2}(H)$. Bezeichnet $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H, so folgt aus der Dualität von D und δ sowie aus der verallgemeinerten Parsevalschen Gleichung

$$\mathbb{E}[\delta(u)\delta(v)] = \mathbb{E}[\langle u, D\delta(v)\rangle_H] = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}[\langle u, e_n\rangle_H \langle D\delta(v), e_n\rangle_H].$$

Mit Lemma 4.12 ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\delta(u)\delta(v)] &= \sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}[\langle u, e_n\rangle_H (\langle v, e_n\rangle_H + \delta(Dv \cdot e_n))] \\ &= \mathbb{E}[\langle u, v\rangle_H] + \sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}[\langle u, e_n\rangle_H \delta(Dv \cdot e_n)].\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck lässt sich mit Hilfe der Dualität von D und δ sowie Lemma 4.14 gemäß

$$\mathbb{E}[\langle u, e_n\rangle_H \delta(Dv \cdot e_n)] = \mathbb{E}[\langle D\langle u, e_n\rangle_H, Dv \cdot e_n\rangle_H] = \mathbb{E}[\langle Du^* \cdot e_n, Dv \cdot e_n\rangle_H]$$

umformen. Bemerkung 4.9 liefert dann

$$\mathbb{E}[\delta(u)\delta(v)] = \mathbb{E}[\langle u, v\rangle_H] + \mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty}\langle Du^* \cdot e_n, Dv \cdot e_n\rangle_H] = \mathbb{E}[\langle u, v\rangle_H] + \mathbb{E}[\mathrm{tr}(DuDv)].$$

Insbesondere gilt wegen Lemma 4.10 im Fall $u = v$

$$\mathbb{E}[|\delta(u)|^2] \leq \mathbb{E}[||u||_H^2] + \mathbb{E}[||Du||_{H\otimes H}^2] = ||u||_{\mathbb{D}^{1,2}(H)}^2.$$

Ist nun $u \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$, so existiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathcal{S}(H)$, so dass $u_n \to u$ in $L^2(\Omega; H)$ und $Du_n \to Du$ in $L^2(\Omega; H \otimes H)$ gilt. Also folgt, dass $(\delta(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist, die aufgrund der Vollständigkeit gegen ein Element $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ konvergiert. Insbesondere gilt für $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$

$$\mathbb{E}[\langle DY, u\rangle_H] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\langle DY, u_n\rangle_H] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y\delta(u_n)] = \mathbb{E}[YX]$$

Dabei folgen beide Konvergenzaussagen aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz. Insbesondere ergibt sich $u \in D(\delta)$ mit $\delta(u) = X$. Zudem überträgt sich (ii) im Fall $u = v$ aus der bereits bewiesenen Formel für $u_n \in \mathcal{S}(H)$ auf u. Aus der Polarisationsformel

$$\langle u, v\rangle_H = \frac{1}{4}(\langle u + v, u + v\rangle_H - \langle u - v, u - v\rangle_H)$$

ergibt sich dann der allgemeine Fall. □

Satz 4.16. *Es seien $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ und $u \in D(\delta)$ so, dass $Xu \in L^2(\Omega; H)$ und $X\delta(u) - \langle DX, u\rangle_H \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gilt. Dann ist auch $Xu \in D(\delta)$ mit*

$$\delta(Xu) = X\delta(u) - \langle DX, u\rangle_H.$$

Beweis: Es sei zunächst $X \in \mathcal{S}$. Dann folgt für jedes $Y \in \mathcal{S}_b$, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle DY, Xu\rangle_H] &= \mathbb{E}[\langle u, XDY\rangle_H] = \mathbb{E}[\langle u, (D(XY) - YDX)\rangle_H] \\ &= \mathbb{E}[\delta(u)XY - Y\langle u, DX\rangle_H] = \mathbb{E}[Y(X\delta(u) - \langle DX, u\rangle_H)]\end{aligned}$$

gilt, wobei wir die klassische Produktregel sowie die Eigenschaft verwendet haben, dass mit $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ und $Y \in \mathcal{S}_b$ auch $XY \in \mathbb{D}^{1,2}$ folgt. Da $\mathcal{S}$ dicht in $\mathbb{D}^{1,2}$ liegt, lässt sich die Aussage mit Hilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz von $X \in \mathcal{S}$ auf $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ ausdehnen. Ähnlich kommt man von $Y \in \mathcal{S}_b$ zu $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$, indem man die zusätzlichen Bedingungen $Xu \in L^2(\Omega; H)$ und $X\delta(u) - \langle DX, u\rangle_H \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verwendet. Die Aussage folgt dann aus der Dualität von D und δ. □

Kapitel 5

Stochastische Analysis im White-Noise-Fall

Dieser Abschnitt befasst sich mit den spezifischen Eigenschaften der Malliavin-Ableitung und des Divergenz-Operators, wenn wir $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$ betrachten, wobei weiterhin $(T, \mathcal{B})$ ein Messraum und μ ein σ-endliches Maß ohne Atome ist. Insbesondere werden wir die Clark-Ocone-Formel herleiten, die eine explizite Formel im Martingaldarstellungssatz liefert.

Bemerkung 5.1. Es seien $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$ und $X \in \mathbb{D}^{1,2}$. Dann ist

$$DX \in L^2(\Omega; H) \cong L^2(T \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes P),$$

so dass wir DX mit einem stochastischen Prozess $\{D_t X \mid t \in T\}$ identifizieren können. Analog lassen sich höhere Ableitungen als stochastische Prozesse in mehreren Variablen interpretieren (vgl. Bemerkung 5.15).

Satz 5.2. *Es sei $X \in \mathbb{D}^{1,2} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Wiener-Chaos-Zerlegung*

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$$

und $f_n \in L^2_S(T^n, \mathcal{B}^n, \mu^n)$ gemäß Korollar 2.12. Dann gilt

$$D_t X = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, t)).$$

Beweis: Gemäß Satz 3.23 gilt $D(J_n X) = J_{n-1}(DX)$, so dass es genügt, die Aussage für $X = I_m(f_m)$ für ein symmetrisches f_m zu beweisen. Der Fall $m = 0$ ist dabei offensichtlich. Zudem lässt sich $f_m \in \mathcal{E}_m$ annehmen, d.h.

$$f_m = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} a_{i_1, \ldots, i_m} \widetilde{1}_{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_m}}(t_1, \ldots, t_m),$$

wobei die $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkte Elemente von $\mathcal{B}_0$ sind und $a_{i_1, \ldots, i_m} = 0$ gilt, falls mindestens zwei der Indizes $i_1, \ldots, i_m$ identisch sind. Insbesondere gilt

$$X = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} a_{i_1, \ldots, i_m} W(A_{i_1}) \cdots W(A_{i_m}) \in \mathcal{S}$$

wegen $I_m(f) = I_m(\widetilde{f})$, und also

$$DX = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_m} \sum_{j=1}^{m} \prod_{k \neq j} W(A_{i_k}) 1_{A_{i_j}}.$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
\widetilde{1}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_m}}(t_1,\dots,t_m) &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma}\prod_{k=1}^{m} 1_{A_{i_{\sigma_k}}}(t_k) \\
&= \frac{1}{m!}\sum_{j=1}^{m} 1_{A_{i_j}}(t_m) \sum_{\sigma,\sigma_m=j}\prod_{k\neq m} 1_{A_{i_{\sigma_k}}}(t_k) \\
&= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} 1_{A_{i_j}}(t_m)\widetilde{1}_{\prod_{k\neq j} A_{i_j}}(t_1,\dots,t_{m-1}).
\end{aligned}$$

Dann folgt mit

$$I_{m-1}(f_m(\cdot,t)) = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_m} \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} 1_{A_{i_j}}(t)\prod_{k\neq j} W(A_{i_k})$$

die Aussage. □

Bemerkung 5.3. Satz 5.2 bedeutet anschaulich, dass etwa im Fall

$$X = I_m(f_m) = \int_{T^m} f_m(t_1,\dots,t_m)dW(t_1)\cdots dW(t_m)$$

das Argument t_m durch t ersetzt und das letzte Integral bzgl. t_m entfernt wird. Anschließend wird mit dem Faktor m multipliziert. Aufgrund der Symmetrie von f_m ist grundsätzlich egal, welches der Argumente durch t ersetzt wird.

Definition 5.4. Es sei $A \in \mathcal{B}$. Dann setzen wir

$$\mathcal{F}_A = \sigma(\{W(B) \mid B \in \mathcal{B}_0, B \subset A\}).$$

Bemerkung 5.5. Typischerweise interessieren wir uns für den Fall $T = (0,\infty)$ und $A = (0,t]$. In diesem Fall gilt

$$\mathcal{F}_A = \sigma(\{B_s \mid 0 < s \leq t\})$$

mit $B_t = W(1_{(0,t]})$, und wir schreiben wie üblich $\mathcal{F}_t$ für $\mathcal{F}_A$.

Lemma 5.6. *Es seien $X \in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ mit Wiener-Chaos-Zerlegung*

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$$

und $A \in \mathcal{B}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_A] = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n 1_A^{\otimes n}).$$

Beweis: Aufgrund der Linearität genügt es, diese Aussage für $X = I_m(f_m)$ mit

$$f_m(t_1, \dots, t_m) = 1_{B_1 \times \dots \times B_m}(t_1, \dots, t_m)$$

zu beweisen, wobei $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}_0$ paarweise disjunkt sind. Dann gilt nach Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_A] = \mathbb{E}[W(B_1)\cdots W(B_m)|\mathcal{F}_A] &= \mathbb{E}[\prod_{j=1}^m (W(B_j \cap A) + W(B_j \cap A^c))|\mathcal{F}_A] \\ = \prod_{j=1}^m W(B_j \cap A) = I_n(1_{(B_1 \cap A)\times \dots \times (B_m \cap A)}) &= I_m(f_m 1_A^{\otimes n}),\end{aligned}$$

wobei wir neben den üblichen Eigenschaften der bedingten Erwartung verwendet haben, dass alle Mengen der Form $B_i \cap A$ bzw. $B_j \cap A^c$ disjunkt sind. □

Satz 5.7. *Es seien $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ und $A \in \mathcal{B}$. Dann ist $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_A] \in \mathbb{D}^{1,2}$, und es gilt*

$$D_t \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_A] = \mathbb{E}[D_t X|\mathcal{F}_A] 1_A(t).$$

Beweis: Es sei $X = \sum_{n=0}^\infty I_n(f_n)$. Dann gilt $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_A] \in \mathbb{D}^{1,2}$ gemäß Satz 3.23 und Lemma 5.6, und es ist

$$\begin{aligned}D_t \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_A] = D_t \sum_{n=0}^\infty I_n(f_n 1_A^{\otimes n}) &= \sum_{n=1}^\infty n I_{n-1}(f_n(\cdot,t) 1_A^{\otimes n}(\cdot,t)) \\ &= \sum_{n=1}^\infty n I_{n-1}(f_n(\cdot,t) 1_A^{\otimes(n-1)}(\cdot)) 1_A(t) = \mathbb{E}[D_t X|\mathcal{F}_A] 1_A(t),\end{aligned}$$

wobei wir mehrfach Lemma 5.6 und Satz 5.2 verwendet haben. □

Korollar 5.8. *Es seien $A \in \mathcal{B}$ und $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ $\mathcal{F}_A$-messbar. Dann ist $D_t X = 0$ fast überall auf $A^c \times \Omega$.*

Bemerkung 5.9. Im Fall $T = (0, \infty)$, $B_t = W(1_{(0,t]})$ und $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s \mid 0 < s \le t\})$ bedeutet Korollar 5.8, dass für jedes $\mathcal{F}_t$-messbare $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ folgt, dass $D_s X = 0$ fast sicher für alle $s > t$ gilt.

Definition 5.10. Für $u = u(t,\omega) \in L^2(T \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes P)$ mit $u \in D(\delta)$ bezeichnet

$$\delta(u) =: \int_T u(t) \delta W(t)$$

das *Skorokhod-Integral des Prozesses u.*

Bemerkung 5.11.

(i) $u \in L^2(T \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes P)$ impliziert $\mathbb{E}[u(t)^2] < \infty$ μ-fast überall. Es lässt sich also ohne Einschränkung annehmen, dass $u(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gemäß Korollar 2.12 eine Wiener-Chaos-Zerlegung der Form

$$u(t) = \sum_{n=0}^\infty I_n(f_n(\cdot,t))$$

besitzt, wobei $f_n(\cdot,t) := f_{n,t}(\cdot)$ eine in den ersten n Argumenten symmetrische Funktion ist.

(ii) Mit dem Satz von Fubini und Lemma 2.5 (iii) gilt

$$\mathbb{E}\Big[\int_T u(t)^2 d\mu(t)\Big] = \int_T \mathbb{E}[u(t)^2] d\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n! ||f_n||^2_{L^2(T^{n+1},\mathcal{B}^{n+1},\mu^{n+1})}.$$

Insbesondere gilt $f_n \in L^2(T^{n+1},\mathcal{B}^{n+1},\mu^{n+1})$ für alle $n \geq 0$. Wir bezeichnen die jeweilige Symmetrisierung

$$\widetilde{f}_n(t_1,\ldots,t_n,t) = \frac{1}{n+1}\big(f_n(t_1,\ldots,t_n,t)+\sum_{j=1}^{n} f_n(t_1,\ldots,t_{j-1},t,t_{j+1},\ldots,t_n,t_j)\big)$$

wie üblich mit $\widetilde{f}_n$.

Satz 5.12. *Es sei $u \in L^2(T\times\Omega,\mathcal{B}\otimes\mathcal{F},\mu\otimes P)$ mit Wiener-Chaos-Zerlegung*

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot,t)).$$

Dann gilt $u \in D(\delta)$ genau dann, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!||\widetilde{f}_n||^2_{L^2(T^{n+1},\mathcal{B}^{n+1},\mu^{n+1})} < \infty$$

ist. In diesem Fall ergibt sich

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\widetilde{f}_n).$$

Beweis: Es sei zunächst $Y = I_n(g)$ für ein symmetrisches g, $n \geq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle u, DY\rangle_{L^2(T,\mathcal{B},\mu)}] &= \mathbb{E}\Big[\int_T u_t D_t Y d\mu(t)\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_T u_t n I_{n-1}(g(\cdot,t)) d\mu(t)\Big] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\int_T n\mathbb{E}[I_m(f_m(\cdot,t))I_{n-1}(g(\cdot,t))]d\mu(t) \\
&= \int_T n\mathbb{E}[I_{n-1}(f_{n-1}(\cdot,t))I_{n-1}(g(\cdot,t))]d\mu(t) \\
&= n!\int_T \langle f_{n-1}(\cdot,t)), g(\cdot,t)\rangle_{L^2(T^{n-1},\mathcal{B}^{n-1},\mu^{n-1})} d\mu(t) \\
&= n!\langle f_{n-1}, g\rangle_{L^2(T^n,\mathcal{B}^n,\mu^n)} = n!\langle \widetilde{f}_{n-1}, g\rangle_{L^2(T^n,\mathcal{B}^n,\mu^n)} \\
&= \mathbb{E}[I_n(\widetilde{f}_{n-1})I_n(g)] = \mathbb{E}[I_n(\widetilde{f}_{n-1})Y],
\end{aligned}$$

wobei wir mehrfach Lemma 2.5 (iii) verwendet haben.

Es sei nun $u \in D(\delta)$. Dann gilt nach Vorbereitung für alle $Y \in \mathcal{H}_n$, $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[\delta(u)Y] = \mathbb{E}[\langle u, DY\rangle_{L^2(T,\mathcal{B},\mu)}] = \mathbb{E}[I_n(\widetilde{f}_{n-1})Y],$$

wobei Satz 2.11 benutzt wurde. Insbesondere folgt $J_n\delta(u) = I_n(\widetilde{f}_{n-1})$ für alle $n \geq 1$. Zusammen mit $J_0\delta(u) = 0$ ergibt sich

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\widetilde{f}_n).$$

Insbesondere konvergiert die obige Reihe, und Lemma 2.5 liefert

$$\mathbb{E}[\delta(u)^2] = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!||\widetilde{f}_n||^2_{L^2(T^{n+1},\mathcal{B}^{n+1},\mu^{n+1})} < \infty.$$

Andererseits sei die obige Reihe endlich, so dass $Z = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\widetilde{f}_n)$ wieder nach Lemma 2.5 in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ existiert. Nach Vorbereitung und aufgrund der Orthogonalität gilt

$$\mathbb{E}[\langle u, DY\rangle_{L^2(T,\mathcal{B},\mu)}] = \mathbb{E}[ZY]$$

für alle $Y \in \mathcal{H}_n$, und aufgrund der Linearität gilt diese Aussage auch für $Y \in \mathcal{P}_N = \oplus_{n=0}^{N}\mathcal{H}_n$. Verwendet man $u \in L^2(T \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes P)$ und $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, lässt sich die Aussage zuletzt auf $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$ ausdehnen. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 5.13. *Es sei $u \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$, so dass für fast alle $t \in T$ der Prozess $s \mapsto D_t u(s)$ zu $D(\delta)$ gehört und $t \mapsto \delta(D_t u(s))$ ein Element von $L^2(T \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes P)$ ist. Dann ist $\delta(u) \in \mathbb{D}^{1,2}$ mit*

$$D_t(\delta(u)) = u(t) + \delta(D_t u).$$

Beweis: Es sei

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, t)).$$

Wegen $\mathbb{D}^{1,2}(H) \subset D(\delta)$ gemäß Satz 4.15 gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!||\widetilde{f}_n||^2_{L^2(T^{n+1},\mathcal{B}^{n+1},\mu^{n+1})} < \infty$$

und

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\widetilde{f}_n).$$

nach Satz 5.12. Insbesondere ist $J_n(\delta(u)) = I_n(\widetilde{f}_{n-1})$ für $n \geq 1$, so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} n||J_n(\delta(u))||_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!||\widetilde{f}_n||^2_{L^2(T^{n+1},\mathcal{B}^{n+1},\mu^{n+1})} < \infty$$

folgt und Satz 3.23 $\delta(u) \in \mathbb{D}^{1,2}$ liefert. Es gilt

$$\begin{aligned} D_t\delta(u) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)I_n(\widetilde{f}_n(\cdot, t)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} I_n\Big(f_n(t_1, \ldots, t_n, t) + \sum_{j=1}^{n} f_n(t_1, \ldots, t_{j-1}, t, t_{j+1}, \ldots, t_n, t_j)\Big) \\ &= u(t) + \sum_{n=0}^{\infty} nI_n(\widetilde{g}_n(\cdot, t)). \end{aligned}$$

wobei wir Satz 5.2 verwendet haben und $\widetilde{g}_n(\cdot, t)$ implizit definiert ist.

Nun seien $s, t \in T$ fixiert. Gemäß Satz 3.23 und Satz 5.2 gilt

$$D_t u(s) = \sum_{n=0}^{\infty} nI_{n-1}(f_n(\cdot, t, s)),$$

so dass

$$\delta(D_t u) = \sum_{n=0}^{\infty} n I_n(\rho_n(\cdot, t))$$

wieder nach Satz 5.12, wobei hier

$$\begin{aligned}\rho_n(t_1, \dots, t_n, t) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_n(t_1, \dots, t_{j-1}, t_n, t_{j+1}, \dots, t_{n-1}, t, t_j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_n(t_1, \dots, t_{j-1}, t, t_{j+1}, \dots, t_{n-1}, t_n, t_j) = \widetilde{g}_n(t_1, \dots, t_n, t)\end{aligned}$$

gilt, da f_n symmetrisch in den ersten n Variablen ist. $\square$´

Lemma 5.14. *Es seien $A \in \mathcal{B}_0$ und $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\mathcal{F}_{A^c}$-messbar. Dann ist $X 1_A \in D(\delta)$, und es gilt*

$$\delta(X 1_A) = X W(A).$$

Beweis: Es sei zunächst $X \in \mathbb{D}^{1,2}$. Korollar 5.8 liefert dann

$$\langle DX, 1_A \rangle_{L^2(T, \mathcal{B}, \mu)} = \int_T D_t X 1_A(t) d\mu(t) = 0,$$

und mit Satz 4.16 folgen $X 1_A \in D(\delta)$ und

$$\delta(X 1_A) = X \delta(1_A) - \langle DX, 1_A \rangle_{L^2(T, \mathcal{B}, \mu)} = X W(A).$$

Der allgemeine Fall folgt, indem man eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{F}_A$-messbaren Elementen aus $D^{1,2}$ wählt, die in in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegen X konvergiert. Die Aussage folgt dann aus $X_n 1_A \to X 1_A$ in $L^2(\Omega; H)$, $\delta(X_n 1_A) \to X W(A)$ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und aus der Abgeschlossenheit von δ. $\square$

Bemerkung 5.15.

(i) Wir hatten in Kapitel 3 das Tensorprodukt $H \otimes H$ eingeführt, da für zwei Elemente $g, h \in H$ im Allgemeinen kein Produkt gh definiert ist. Im Fall $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$ ist das jedoch möglich, und man sieht aus der Definition des Tensorprodukts, dass

$$H \otimes H \cong L^2(T \times T, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \mu)$$

gilt. Insbesondere lässt sich im Fall

$$X = \sum_{i=1}^{n} f(W(h_1), \dots, W(h_n))$$

die zweite Malliavin-Ableitung

$$D^2 X = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ij} f(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i \otimes h_j$$

mit dem Prozess

$$(s, t) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i(s) h_j(t)$$

identifizieren.

(ii) Analog gilt gemäß Bemerkung 4.13 und (i), dass $\mathbb{L}^{1,2} = \mathbb{D}^{1,2}(H)$ ein Hilbertraum mit Norm

$$||u||^2_{\mathbb{L}^{1,2}} = \mathbb{E}[||u||^2_{L^2(T,\mathcal{B},\mu)}] + \mathbb{E}[||Du||^2_{L^2(T\times T,\mathcal{B}\otimes\mathcal{B},\mu\otimes\mu)}]$$

ist. Insbesondere lässt sich Du nach Definition der Malliavin-Ableitung von u für $u \in \mathcal{S}(H)$ mit der Abbildung $(s,t) \mapsto D_t u(s)$ identifizieren.

(iii) Beachtet man, dass $g \otimes h$ gemäß Lemma 4.8 der Abbildung

$$f(t) \mapsto (g\otimes h)(f)(s) = \langle f, g\rangle_{L^2(T,\mathcal{B},\mu)} h(s) = \int_T f(t)(g(t)h(s))d\mu(t)$$

entspricht, so folgt wegen

$$\langle \widetilde{f}, (g\otimes h)f\rangle_{L^2(T,\mathcal{B},\mu)} = \langle g, f\rangle_{L^2(T,\mathcal{B},\mu)}\langle \widetilde{f}, h\rangle_{L^2(T,\mathcal{B},\mu)} = \langle (h\otimes g)\widetilde{f}, f\rangle_{L^2(T,\mathcal{B},\mu)}$$

die Identität $(g \otimes h)^* = (h \otimes g)$. Insbesondere entspricht die Bildung der Adjungierten der Vertauschung der beiden Argumente s und t. Angewendet auf Satz 4.15 bedeutet dies

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\delta(u)\delta(v)] &= \mathbb{E}[\langle u, v\rangle_H] + \mathbb{E}[\operatorname{tr}(DuDv)]\\ &= \mathbb{E}\Big[\int_T u(t)v(t)d\mu(t)\Big] + \mathbb{E}\Big[\int_T\int_T D_s u(t) D_t v(s) d\mu(s)d\mu(t)\Big],\end{aligned}$$

wobei wir Bemerkung 4.9 verwendet haben.

Korollar 5.16. *$D(\delta)$ ist eine echte Obermenge von $\mathbb{L}^{1,2}$.*

Beweis: Satz 4.15 liefert die allgemeine Implikation $\mathbb{L}^{1,2} \subset D(\delta)$. Andererseits lässt sich im Fall $\mu(A) > 0$ aus Bemerkung 5.15 (ii) folgern, dass genau dann $X1_A \in \mathbb{L}^{1,2}$ gilt, wenn $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ ist. Korollar 3.25 liefert leichte Gegenbeispiele für $X \in \mathbb{D}^{1,2}$. Mit Lemma 5.14 gilt jedoch $X1_A \in D(\delta)$, wann immer $A \in \mathcal{B}_0$ und $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\mathcal{F}_{A^c}$-messbar ist. □

Es seien im Folgenden $T = (0,\infty)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{(0,\infty)}$, $\mu = \lambda$ und $B_t = W(1_{(0,t]})$ mit der natürlichen Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Korollar 5.17. (Itô-Isometrie) *Es sei $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ $\mathcal{F}_t$-adaptiert. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[\delta(u)^2] = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty u(t)^2 dt\Big].$$

Beweis: Aus Bemerkung 5.9 ergibt sich $D_s u(t) D_t u(s) = 0$ für $s \neq t$. □

Satz 5.18. *Es sei $\mathbb{L}^2_{\mathbb{F}}(T\times\Omega, \mathcal{B}\otimes\mathcal{F}, \mu\otimes\mathbb{P})$ die Menge aller an adaptierten quadratintegrierbaren stochastischen Prozesse. Dann gilt*

$$\mathbb{L}^2_{\mathbb{F}}(T\times\Omega, \mathcal{B}\otimes\mathcal{F}, \mu\otimes\mathbb{P}) \subset D(\delta),$$

und das Skorokhod-Integral entspricht dem regulären Itô-Integral. Wir schreiben entsprechend auch

$$\delta(u) = \int_0^\infty u(t)dB(t).$$

Beweis: Es sei

$$u = \sum_{j=1}^{n} X_j 1_{(t_{j-1},t_j]}$$

mit $X_j \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_{j-1}}, \mathbb{P})$. Lemma 5.14 liefert $u \in D(\delta)$ und

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^{n} X_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) = \int_0^\infty u(t) dB(t).$$

Im allgemeinen Fall sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge einfacher adaptierter Prozesse, die in $\mathbb{L}^2(T\times\Omega, \mathcal{B}\otimes\mathcal{F}, \mu\otimes\mathbb{P})$ gegen u konvergiert. Korollar 5.17 zeigt, dass auch $(\delta(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist und also konvergiert. Entsprechend ist der Abschluss der einfachen adaptierten Prozesse in $\mathbb{L}^2(T\times\Omega, \mathcal{B}\otimes\mathcal{F}, \mu\otimes\mathbb{P})$ eine Teilmenge von $D(\delta)$. Andererseits wissen wir aus der Vorlesung zur stochastischen Integration, dass dieser Abschluss der Menge $\mathbb{L}^2_{\mathbb{F}}(T\times\Omega, \mathcal{B}\otimes\mathcal{F}, \mu\otimes\mathbb{P})$ entspricht. Zudem wird das allgemeine Itô-Integral über denselben Grenzübergang definiert. □

Satz 5.19. *Es seien $u \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{F}}((0,\tau]\times\Omega, \mathcal{B}_{(0,\tau]}\otimes\mathcal{F}, \lambda|_{(0,\tau]}\otimes\mathbb{P})$ und*

$$X = \int_0^\tau u(s) dB(s).$$

Dann ist $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ genau dann, wenn $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ ist. In diesem Fall gilt für jedes $t \in (0,\tau]$, dass $s \mapsto D_t u(s)$ zu $\mathbb{L}^2_{\mathbb{F}}((0,\tau]\times\Omega, \mathcal{B}_{(0,\tau]}\otimes\mathcal{F}, \lambda|_{(0,\tau]}\otimes\mathbb{P})$ gehört, und es ist

$$D_t X = u(t) + \int_t^\tau D_t u(s) dB(s). \tag{5.1}$$

Beweis: Es sei zunächst $u \in \mathbb{L}^{1,2}$. Nach Bemerkung 5.15 und Satz 5.2 ist $s \mapsto D_t u(s)$ $\mathcal{F}_s$-messbar und quadratintegrierbar und erfüllt $D_t u(s) = 0$ für $s < t$. Insbesondere gilt $(s \mapsto D_t u(s)) \in D(\delta)$ nach Satz 5.18, und mit Satz 5.13 folgt $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ und

$$D_t X = u(t) + \int_t^\tau D_t u(s) dB(s).$$

Umgekehrt sei $X \in \mathbb{D}^{1,2}$, und es bezeichne $u_n(s)$ die Projektion von $u(s)$ auf $\mathcal{P}_n$. Nach Satz 3.23 ist $u_n(s)$ in $\mathbb{D}^{1,2}$, und nach Konstruktion ist der Prozess $s \mapsto u_n(s)$ adaptiert und quadratintegrierbar und konvergiert in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegen $u(s)$. Wir setzen

$$X_n = \int_0^\tau u_n(s) dB(s).$$

Nach Satz 5.12 ist X_n die Projektion von X auf $\mathcal{P}_{n+1}$, also auch in $\mathbb{D}^{1,2}$, und wie im Beweis von Satz 3.23 folgert man aus $X \in \mathbb{D}^{1,2}$, dass

$$\mathbb{E}[||DX_n||_H^2] = \mathbb{E}\Big[\int_0^\tau |D_t X_n|^2 dt\Big]$$

beschränkt ist. Wendet man (5.1) an, was nun wieder wegen Satz 5.13 möglich ist, so folgt aus der Adaptiertheit von u_n, der Itô-Isometrie und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\int_0^\tau |D_tX_n|^2dt\Big] &= \mathbb{E}\Big[\int_0^\tau \Big|u_n(t)+\int_t^\tau D_tu_n(s)dB(s)\Big|^2dt\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\int_0^\tau u_n^2(t)dt\Big] + \mathbb{E}\Big[\int_0^\tau\int_t^\tau (D_tu_n(s))^2dsdt\Big] \\ &\geq \mathbb{E}\Big[\int_0^\tau\int_0^s (D_tu_n(s))^2dtds\Big] = \mathbb{E}[||Du_n||^2_{L^2(T\times T,\mathcal{B}\otimes\mathcal{B},\mu\otimes\mu)}],\end{aligned}$$

wobei wir $(T,\mathcal{B},\mu)=((0,\tau],\mathcal{B}_{(0,\tau]},\lambda|_{(0,\tau]})$ gesetzt haben. Nach Lemma 3.16 folgt $u\in\mathbb{L}^{1,2}$. □

Satz 5.20. (Clark-Ocone-Formel) *Es seien $H=L^2((0,\tau],\mathcal{B}_{(0,\tau]},\lambda|_{(0,\tau]})$ und $X\in\mathbb{D}^{1,2}$. Dann gilt*

$$X=\mathbb{E}[X]+\int_0^\tau \mathbb{E}[D_tX|\mathcal{F}_t]dB(t).$$

Beweis: Es sei

$$X=\sum_{n=0}^\infty I_n(f_n)$$

und $f_n\in L^2_S(T^n,\mathcal{B}^n,\mu^n)$ mit $(T,\mathcal{B},\mu)=((0,\tau],\mathcal{B}_{(0,\tau]},\lambda|_{(0,\tau]})$. Dann ist

$$u(t):=\mathbb{E}[D_tX|\mathcal{F}_t]=\sum_{n=1}^\infty nI_{n-1}(f_n(\cdot,t)1_{(0,t]}^{\otimes(n-1)}(\cdot,t))$$

wie im Beweis von Satz 5.7. Offenbar gilt $u\in\mathbb{L}^2_{\mathbb{F}}((0,\tau]\times\Omega,\mathcal{B}_{(0,\tau]}\otimes\mathcal{F},\lambda|_{(0,\tau]}\otimes\mathbb{P})\subset D(\delta)$, und wegen der Übereinstimmung von Itô- und Skorokhod-Integral ist gemäß Satz 5.12 nur noch

$$\delta(u)=\sum_{n=1}^\infty nI_n(\widetilde{f_n1_{(0,t]}^{\otimes(n-1)}})=\sum_{n=1}^\infty I_n(f_n)=X-\mathbb{E}[X]$$

zu zeigen. Dies wird wegen der Symmetrie von f_n aufgrund von

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n!}\sum_\sigma f_n(t_{\sigma_1},\dots,t_{\sigma_n})1_{(0,t_{\sigma_n}]}(t_{\sigma_1})\cdots1_{(0,t_{\sigma_n}]}(t_{\sigma_{n-1}})\\ =&f_n(t_1,\dots,t_n)\frac{1}{n!}\sum_\sigma 1_{\{t_{\sigma_n}=\max\{t_1,\dots t_n\}\}}=\frac{1}{n}f_n(t_1,\dots,t_n)\end{aligned}$$

erfüllt, wobei wir ohne Einschränkung nur den Fall paarweise verschiedener $t_1,\dots,t_n$ betrachten. □

Kapitel 6

Anwendungen in der Finanzmathematik

Wir betrachten in diesem Abschnitt verschiedene Anwendungen der bisher behandelten Theorie in der Finanzmathematik.

Beispiel 6.1. Die klassische Situation in der Finanzmathematik ist gegeben, wenn ein Händler in einem Markt mit zwei Instrumenten investieren kann: Kaufen lassen sich im Intervall $[0,\tau]$ eine risikolose Anleihe S_0 mit

$$dS_0(t) = \rho(t)S_0(t)dt, \quad S_0(0) = 1,$$

und eine Aktie S_1 mit

$$dS_1(t) = \mu(t)S_1(t)dt + \sigma(t)S_1(t)dB(t), \quad S_1(0) > 0.$$

Hierbei seien ρ, μ und σ jeweils Elemente von $\mathbb{L}^2_{\mathbb{F}}((0,\tau] \times \Omega, \mathcal{B}_{(0,\tau]} \otimes \mathcal{F}, \lambda|_{(0,\tau]} \otimes \mathbb{P})$. Zusätzlich sei $\sigma(t) > 0$ für alle $t \in [0,\tau]$ fast sicher. Nach Definition des stochastischen Exponentials gilt

$$S_1(t) = S_1(0) \exp\Big(\int_0^t \sigma(s)dB(s) + \int_0^t (\mu(s) - \sigma^2(s)/2)ds \Big).$$

Typische Fragestellungen sind von der folgender Art: Wie lässt sich eine $\mathcal{F}_\tau$-messbare Auszahlung X, zum Beispiel eine Call- oder eine Put-Option auf S_1,

- preisen, d.h. was ist ein fairer Wert, der zur Zeit $t = 0$ für X bezahlt werden muss?
- replizieren, d.h. was ist eine geeignete adaptierte Handelsstrategie ϑ, mit der sich ausgehend von einem Anfangsvermögen nur durch Handel in den beiden Instrumenten zur Zeit τ fast sicher der Wert X erreichen lässt?

Formal bedeutet dies: Das Vermögen $V^\vartheta(t)$ zur Zeit t ist durch

$$V^\vartheta(t) = \vartheta_0(t)S_0(t) + \vartheta_1(t)S_1(t)$$

gegeben, und es gilt die Selbstfinanzierungsbedingung

$$dV^\vartheta(t) = \vartheta_0(t)dS_0(t) + \vartheta_1(t)dS_1(t).$$

Insbesondere wird ϑ_0 wegen

$$\vartheta_0(t) = \frac{V^\vartheta(t) - \vartheta_1(t)S_1(t)}{S_0(t)}$$

durch ϑ_1 eindeutig bestimmt, und es gilt

$$\begin{aligned} dV^\vartheta(t) &= \rho(t)(V^\vartheta(t) - \vartheta_1(t)S_1(t))dt + \vartheta^1(t)dS_1(t) \qquad (6.1) \\ &= (\rho(t)V^\vartheta(t) + (\mu(t) - \rho(t))\vartheta_1(t)S_1(t))dt + \sigma(t)\vartheta^1(t)S_1(t)dB(t). \end{aligned}$$

Man kann zeigen: Unter üblichen Bedingungen an X, ρ, μ und σ sind die replizierende Handelsstrategie ϑ und der faire Preis eindeutig. In diesem Fall ergibt sich letzterer natürlich als $V^\vartheta(0)$.

Die klassische Strategie, um ϑ zu erhalten, besteht darin, den diskontierten Prozess

$$U^\vartheta(t) = \exp\Big(- \int_0^t \rho(s)ds\Big)V^\vartheta(t)$$

zu betrachten und ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ zu finden, unter dem $U^\vartheta(t)$ ein Martingal ist. Dazu seien

$$u(t) = \frac{\mu(t) - \rho(t)}{\sigma(t)} \quad \text{und} \quad \widetilde{B}(t) = B(t) + \int_0^t u(s)ds.$$

Satz 6.2. (Satz von Girsanov) *Gilt die Novikov-Bedingung*

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^\tau u^2(s)ds\Big)\Big] < \infty,$$

so ist der Prozess $\widetilde{B}$ eine Brownsche Bewegung bzgl. des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$, das gemäß $d\mathbb{Q}(\omega) = Z(\tau,\omega)d\mathbb{P}(\omega)$ mit der Dichte

$$Z(t) = \exp\Big(- \int_0^t u(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t u^2(s)ds\Big), \quad t \in [0,\tau],$$

definiert ist.

Bemerkung 6.3. In der Situation von Beispiel 6.1 gilt

$$\begin{aligned} dV^\vartheta(t) &= (\rho(t)V^\vartheta(t) + (\mu(t) - \rho(t))\vartheta_1(t)S_1(t))dt + \sigma(t)\vartheta^1(t)S_1(t)d\widetilde{B}(t) \\ &\qquad - \sigma(t)\vartheta^1(t)S_1(t)u(t)dt \\ &= \rho(t)V^\vartheta(t)dt + \sigma(t)\vartheta^1(t)S_1(t)d\widetilde{B}(t). \end{aligned}$$

Aus der partiellen Integrationsformel für Itô-Integrale folgt dann

$$\begin{aligned} dU^\vartheta(t) &= -\rho(t)U^\vartheta(t)dt + \exp\Big(- \int_0^t \rho(s)ds\Big)dV^\vartheta(t) \\ &= \exp\Big(- \int_0^t \rho(s)ds\Big)\sigma(t)\vartheta^1(t)S_1(t)d\widetilde{B}(t). \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich für jede selbstfinanzierende Strategie ϑ

$$\begin{aligned} \exp\Big(- \int_0^\tau \rho(s)ds\Big)V^\vartheta(\tau) &= U^\vartheta(\tau) \\ &= U^\vartheta(0) + \int_0^\tau \exp\Big(- \int_0^t \rho(s)ds\Big)\sigma(t)\vartheta_1(t)S_1(t)d\widetilde{B}(t). \end{aligned}$$

Satz 6.4. *Wir setzen*

$$Y = \exp\Big(-\int_0^\tau \rho(s)ds\Big)X.$$

Dann gilt die verallgemeinerte Clark-Ocone-Formel

$$Y = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y] + \int_0^\tau \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\Big(D_tY - Y\int_t^\tau D_tu(s)d\widetilde{B}(s)\Big)\Big|\mathcal{F}_t\Big]d\widetilde{B}(t).$$

Beweis: vgl. Theorem 4.5 in Di Nunno et al. (2009). □

Bemerkung 6.5. Es ist zu beachten, dass Satz 5.20 nicht direkt anwendbar ist, da nur angenommen wurde, dass Y $\mathcal{F}_\tau$-messbar ist. Im Allgemeinen stimmt die von $\widetilde{B}$ erzeugte σ-Algebra nicht mit der von B erzeugten σ-Algebra überein.

Bemerkung 6.6. Zusammengefasst gilt: Setzt man

$$\vartheta_1(t) = \exp\Big(\int_0^t \rho(s)ds\Big)\sigma^{-1}(t)S_1^{-1}(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\Big(D_tY - Y\int_t^\tau D_tu(s)d\widetilde{B}(s)\Big)\Big|\mathcal{F}_t\Big],$$

so liefert die zugehörige selbstfinanzierende Strategie ϑ

$$V^\vartheta(\tau) = X.$$

Diese Strategie ist unter typischen Bedingungen eindeutig. Als fairer Preis ergibt sich

$$V^\vartheta(0) = U^\vartheta(0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\exp\Big(-\int_0^\tau \rho(s)ds\Big)X\Big].$$

Beispiel 6.7. Es seien ρ, μ und σ konstant, und wir betrachten $X = \exp(\alpha B(\tau))$ für ein $\alpha \neq 0$. In diesem Fall ist $u(t)$ konstant, so dass sich als Strategie

$$\vartheta_1(t) = \exp(\rho t)\sigma^{-1}S_1^{-1}(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D_t \exp(\alpha B(\tau) - \rho\tau)|\mathcal{F}_t]$$

ergibt. Nach Definition gilt

$$D_t \exp(\alpha B(\tau) - \rho\tau) = \alpha \exp(\alpha B(\tau) - \rho\tau)1_{(0,\tau]}(t),$$

also ist mit der verallgemeinerten Bayes-Formel (vgl. Lemma 4.7 in Di Nunno et al. (2009))

$$\begin{aligned}\vartheta_1(t) &= \exp(-\rho(\tau - t))\sigma^{-1}S_1^{-1}(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\alpha \exp(\alpha B(\tau)|\mathcal{F}_t] \\ &= \exp(-\rho(\tau - t))\alpha\sigma^{-1}S_1^{-1}(t)Z^{-1}(t)\mathbb{E}[Z(\tau)\exp(\alpha B(\tau)|\mathcal{F}_t] \\ &= \exp(-\rho(\tau - t))\alpha\sigma^{-1}S_1^{-1}(t)Z^{-1}(t)\mathbb{E}[M(\tau)\exp((\alpha^2/2 - \alpha u)\tau)|\mathcal{F}_t],\end{aligned}$$

wobei

$$M(t) = \exp((\alpha - u)B(t) - (\alpha - u)^2t/2)$$

ein Martingal ist. Es folgt

$$\begin{aligned}\vartheta_1(t) &= \exp(-\rho(\tau - t))\alpha\sigma^{-1}S_1^{-1}(t)Z^{-1}(t)M(t)\exp((\alpha^2/2 - \alpha u)\tau) \\ &= \exp(-\rho(\tau - t))\alpha\sigma^{-1}S_1^{-1}(0)\exp((\alpha - \sigma)B(t) + (\sigma^2/2 - \mu)t + (\alpha^2/2 - \alpha u)(\tau - t))\end{aligned}$$

nach einer einfachen Rechnung.

Beispiel 6.8. Ein zweites klassisches Problem in der Finanzmathematik ist die Suche nach einer optimalen Handelsstrategie in dem Sinne, dass sie den größtmöglichen erwarteten Nutzen bringt. Dazu arbeiten wir weiter im Black-Scholes-Modell, d.h. es seien ρ, μ und σ konstant, und wir bezeichnen nun mit $\pi(t)$ den Anteil des aktuellen Vermögens $V^\pi(t)$, der in Aktien angelegt ist, also $\vartheta_1(t)S_1(t) = \pi(t)V^\pi(t)$. Dabei ist $\pi(t) \notin [0,1]$ möglich, da auch Leerverkäufe möglich sind. Die Selbstfinanzierungsbedingung (6.1) liefert dann

$$\begin{aligned} dV^\pi(t) &= (1-\pi(t))V^\pi(t)\rho dt + \pi(t)V^\pi(t)(\mu dt + \sigma dB(t)) \\ &= V^\pi(t)(\rho + (\mu-\rho)\pi(t)dt + \pi(t)\sigma dB(t)). \end{aligned}$$

Gilt $V^\pi(0) = x$ und nimmt man $\int_0^\tau \pi(s)^2 ds < \infty$ fast sicher an, so ergibt sich als Lösung

$$V^\pi(t) = x \exp\Big(\int_0^t \sigma\pi(s)dB(s) + \int_0^t \Big(\rho + (\mu-\rho)\pi(s) - \frac{\sigma^2}{2}\pi^2(s)\Big)ds\Big).$$

Eine typische Fragestellung ist nun, wie man π so wählt, dass der erwartete Nutzen maximal wird. Bei einer logarithmischen Nutzenfunktion bedeutet dies etwa, dass man dasjenige an $\mathbb{F}$ adaptierte, quadratintegrierbare π sucht, so dass

$$\mathbb{E}[\log(V^\pi(\tau))]$$

maximal wird.

Satz 6.9. *Im obigen Modell ist die optimale Strategie durch*

$$\pi^*_{\mathbb{F}}(t) = \frac{\mu-\rho}{\sigma^2}$$

gegeben. Für die zugehörige Wertfunktion ergibt sich

$$\begin{aligned} Y_{\mathbb{F}}(x) &= \sup_\pi \mathbb{E}[\log(V^\pi(\tau))] = \mathbb{E}[\log(V^{\pi^*_{\mathbb{F}}}(\tau))] \\ &= \log x + \Big(\rho + \frac{(\mu-\rho)^2}{2\sigma^2}\Big). \end{aligned}$$

Bemerkung 6.10. Eine für die Praxis relevante Fragestellung ist, wie sich die Wahl der optimalen Strategie verändert, wenn der Händler mehr Informationen verwenden kann, als in $\mathcal{F}_t$ zur Verfügung stehen. Formal sei also $\mathbb{G}$ eine Filtration mit $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ für alle $t \in [0,\tau]$, und dem Händler wird die Möglichkeit eingeräumt, $\pi(t)$ $\mathcal{G}_t$-adaptiert zu wählen. Im Allgemeinen sind Ausdrücke der Form $\pi(t)dB(t)$ dann jedoch nicht mehr wohldefiniert, so dass für die Modellierung von *insider trading* im Allgemeinen ein anderer Integralbegriff benötigt wird.

Satz 6.11. *Es sei $\mathcal{G}_t$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{F}_t$ enthält und so dass $B(\tau_0)$ für ein $\tau_0 > \tau$ messbar ist. Dann ist $B(t)$ auch ein Semimartingal bzgl. $\mathbb{G}$, und es gilt*

$$B(t) = \widehat{B}(t) + \int_0^t \frac{B(\tau_0) - B(s)}{\tau_0 - s} ds,$$

wobei $\widehat{B}$ eine Brownsche Bewegung bzgl. $\mathbb{G}$ ist.

Beweis: vgl. Theorem 8.1 in Di Nunno et al. (2009) und die dort angegebenen Referenzen. □

Bemerkung 6.12. Im Spezialfall von Satz 6.11 lässt sich also mit dem alten Integralbegriff arbeiten. Man erhält entsprechend

$$V^{\pi}(t) = x \exp\Big(\int_0^t \sigma\pi(s) d\widehat{B}(s) + \int_0^t \Big(\rho + (\mu - \rho + \sigma Z(s))\pi(s) - \frac{\sigma^2}{2}\pi^2(s)\Big) ds\Big),$$

wobei wir

$$Z(s) = \frac{B(\tau_0) - B(s)}{\tau_0 - s}$$

setzen.

Satz 6.13. *Im obigen Modell ist die optimale Strategie durch*

$$\pi^*_{\mathbb{G}}(t) = \frac{\mu - \rho}{\sigma^2} + \frac{Z(t)}{\sigma}$$

gegeben. Für die zugehörige Wertfunktion ergibt sich

$$Y_{\mathbb{G}}(x) = Y_{\mathbb{F}}(x) + \frac{1}{2} \log\Big(\frac{\tau_0}{\tau_0 - \tau}\Big).$$

Beweis: Dieser Beweis wird als Übungsaufgabe geführt. □

Definition 6.14. Es sei u ein messbarer Prozess. u heißt forward-integrierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\tau} u(t) \frac{B(t+\varepsilon) - B(t)}{\varepsilon} dt$$

in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ existiert. Wir schreiben dafür

$$\int_0^{\tau} u(t) dB^-(t).$$

Definition 6.15. Wie bezeichnen die Klasse aller messbaren Prozesse u, die die Eigenschaften

(i) die Pfade von u sind càdlàg;

(ii) $u(t) \in \mathbb{D}^{1,2}$ für alle t;

(iii) die Pfade $t \mapsto D_s u(t)$ sind für alle s càdlàg;

(iv) $D_{t+}u(t) = \lim_{s \to t+} D_s u(t)$ existiert in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ für alle t;

(v) $u \in D(\delta)$;

jeweils fast sicher bzw. fast überall erfüllen, mit $\mathbb{D}_0$.

Satz 6.16. *Es sei $u \in \mathbb{D}_0$. Dann ist u forward-integrierbar, und es gilt*

$$\int_0^{\tau} u(t) dB^-(t) = \int_0^{\tau} u(t) \delta B(t) + \int_0^{\tau} D_{t+}u(t) dt.$$

Beweis: vgl. Theorem 8.18 in Di Nunno et al. (2009). □

Korollar 6.17. *Es sei $u \in \mathbb{D}_0$ $\mathcal{F}_t$-adaptiert. Dann stimmt das Forward-Integral mit dem Itô-Integral überein.*

Beweis: Die Aussage folgt sofort aus Satz 6.16, Satz 5.18 und Korollar 5.8. □

Bemerkung 6.18. Es ist möglich, eine Itô-Formel für Forward-Integrale zu beweisen. Mit ihrer Hilfe und Satz 6.16 lässt sich daher auch eine Itô-Formel für Skorokhod-Integrale herleiten (vgl. Theorem 8.20 in Di Nunno et al. (2009)).

Beispiel 6.19. Interpretiert man $\pi(t)dB^-(t)$ im Sinne des Forward-Integrals, lässt sich die Selbstfinanzierungsbedingung im Fall eines informierten Händlers gemäß

$$dV^{\pi-}(t) = V^\pi(t)(\rho + (\mu - \rho)\pi(t)dt + \pi(t)\sigma dB^-(t))$$

übersetzen. Besagte Itô-Formel liefert auch hier die Lösung

$$V^\pi(t) = x \exp\Big(\int_0^t \sigma\pi(s)dB^-(s) + \int_0^t \Big(\rho + (\mu - \rho)\pi(s) - \frac{\sigma^2}{2}\pi^2(s)\Big)ds\Big).$$

Da das Forward-Integral im Allgemeinen kein Martingal ist, ist das Finden optimaler Strategien in diesem Modell deutlich komplizierter und nicht ohne Weiteres möglich. Oftmals wird sich daher auf die Herleitung lokaler Maxima beschränkt. Wesentlich hierbei ist insbesondere Theorem 8.26 in Di Nunno et al. (2009), das die Existenz eines lokalen Maximums π mit der Existenz einer Semimartingaldarstellung von W bzgl. $\mathbb{G}$ belegt. In diesem Fall lässt sich π wieder als Lösung einer Gleichung herleiten, die jedoch im Allgemeinen komplizierter als zuvor ist und die Übergangsdichte zu einem geeignet gewählten äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß beinhaltet.

Literaturverzeichnis

Alt, H. W. (2016). *Linear functional analysis.* Universitext. Springer-Verlag London, Ltd., London. An application-oriented introduction, Translated from the German edition by Robert Nürnberg.

Di Nunno, G., B. Øksendal, and F. Proske (2009). *Malliavin calculus for Lévy processes with applications to finance.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin.

Meneghin, C. (2013). *A primer of Hilbert space*, Volume 1 of *LINCOM Textbooks in Mathematics.* LINCOM Europa, Munich.

Nualart, D. (2006). *The Malliavin calculus and related topics* (Second ed.). Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, Berlin.