В. А. Марченко, Л. А. Пастур, Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц, *Матем. сб.*, 1967, том 72(114), номер 4, 507–536

1967 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 72(114), № 4

УДК 519.21

# Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц

**В. А. Марченко и Л. А. Пастур** (Харьков)

В работе исследуется распределение собственных значений в двух ансамблях случайных эрмитовых и в одном ансамбле случайных унитарных матриц. Как постановка вопроса, так и метод исследования ведут начало от работ Дайсона [1] и И. М. Лифшица [2], [3] об энергетических спектрах неупорядоченных систем, хотя по своим вероятностным свойствам наши ансамбли больше похожи на ансамбли, изученные Вигнером [4].

Так как метод исследования всех рассматриваемых нами ансамблей одинаков, то мы изложили его подробно только для одного наиболее типичного. Формулировки соответствующих результатов для двух ансамблей приведены в последнем параграфе работы без доказательств.

## § 1. Постановка задачи и формулировка результатов

Мы будем рассматривать действующие в $N$-мерном унитарном пространстве $H_N$ самосопряженные операторы $B_N(n)$ вида

$$B_N(n) = A_N + \sum_{i=1}^{n} \tau_i q^{(i)}(\cdot, q^{(i)}). \qquad (1.1)$$

Здесь $A_N$ — неслучайный самосопряженный оператор; $n$ — неслучайное число; $\tau_i$ — независимые одинаково распределенные вещественные случайные величины; $q^i$ — независимые между собой и с $\tau_i$ случайные векторы из $H_N$.

Операторы $q^{(i)}(\cdot, q^{(i)}) = L_i$ действуют на векторы $x \in H_N$ по формуле $L_i(x) = q^{(i)}(x, q^{(i)})$, где $(x, q^{(i)})$ — скалярное произведение в $H_N$.

Таким образом, рассматриваемые операторы $B_N(n)$ являются суммой неслучайного оператора и некоторого числа случайных независимых одномерных операторов. Каждый набор чисел $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ и векторов $q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(n)}$, который мы всегда для краткости будем обозначать через $T_n$, $Q_n$, дает некоторую реализацию случайного оператора $B_N(n)$.

Нас будет интересовать функция $\nu(\lambda; B_N(n))$, равная отношению числа собственных значений оператора $B_N(n)$, лежащих левее $\lambda$, к размерности пространства. Везде в дальнейшем мы будем ее называть нормированной спектральной функцией оператора. Очевидно, что $\nu(\lambda; B_N(n))$ при любой реализации набора $T_n$, $Q_n$ является неубывающей, непрерывной слева и кусочно постоянной функцией от $\lambda$, причем $0 \leqslant \nu(\lambda; B_N(n)) \leqslant 1$.

При каждом фиксированном значении $\lambda$ функция $\nu(\lambda; B_N(n))$ является случайной величиной, сложным образом выражающейся через случайные числа $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ и случайные векторы $q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(n)}$. Отыскание функции распределения вероятностей этой случайной величины является одной из основных задач спектрального анализа случайных операторов. Особенно интересен случай очень больших $N$ и $n$, так как часто оказывается, что случайные величины $\nu(\lambda; B_N(n))$ при $N \to \infty$ сходятся по вероятности к неслучайным числам.

Пусть при $N \to \infty$ выполняются такие условия:

I. Существует предел $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{n}{N} = c$, который мы для краткости будем называть концентрацией.

II. Последовательность нормированных спектральных функций $\nu(\lambda; A_N)$ операторов $A_N$ сходится к некоторой функции $\nu_0(\lambda)$ во всех ее точках непрерывности

$$\lim_{N\to\infty} \nu(\lambda; A_N) = \nu_0(\lambda). \tag{1.2}$$

Считая эти условия выполненными, нужно прежде всего выяснить, какие вероятностные свойства операторов $B_N(n)$ вида (1.1) обеспечивают сходимость по вероятности последовательностей $\nu(\lambda; B_N(n))$ к неслучайным числам, т. е. выяснить, когда существует такая неубывающая функция $\nu(\lambda; c)$, что во всех ее точках непрерывности

$$\lim_{N\to\infty} P\{|\nu(\lambda; B_N(n)) - \nu(\lambda; c)| > \varepsilon\} = 0, \tag{1.3}$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$.

Главная же задача для таких ансамблей случайных операторов состоит, конечно, в отыскании самой предельной функции $\nu(\lambda; c)$.

Важным для физики является случай, когда все $\tau_i$ равны неслучайному числу $\tau$, а векторы $q^{(i)}$ выбираются из фиксированной ортонормированной системы $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(N)}$ с равной вероятностью. В цитированных выше работах И. М. Лифшица именно для этого случая были разработаны методы приближенного вычисления функции $\nu(\lambda; c)$ при малых значениях $c$.

Отметим одну специфическую особенность этого случая. Поскольку случайные векторы $q^{(i)}$ выбираются из фиксированного ортонормированного базиса, вся задача не инвариантна относительно унитарных преобразований оператора $A_N$, и поэтому ответ зависит не только от нормированной спектральной функции $\nu(\lambda; A_N)$ этого оператора, но и от всех его собственных векторов. Эта особенность сохраняется и при $N \to \infty$.

В настоящей работе мы рассмотрим другой тип задач, которые при $N \to \infty$ становятся инвариантными относительно унитарных преобразований операторов $A_N$. Для формулировки условий, которые мы накладываем на случайные векторы, удобно выбрать в пространстве $H_N$ какой-нибудь ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_N$ и записывать векторы в координатах этого базиса, полагая $q = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$, где $q_j = (q, e_j)$. Везде в дальнейшем предполагаются выполненными следующие условия:

III. Случайные векторы $q = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$, входящие в формулу (1.1), имеют абсолютные моменты до четвертого порядка включительно, причем четные моменты $Mq_i\bar{q}_j$, $Mq_i\bar{q}_jq_l\bar{q}_m$ можно представить в виде *

$$Mq_i\bar{q}_j = N^{-1}\delta_{ij} + a_{ij}(N), \tag{1.4}$$

$$Mq_i\bar{q}_jq_l\bar{q}_m = N^{-2}(\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{im}\delta_{jl}) + \varphi_{il}(N)\overline{\varphi_{jm}(N)} + b_{ijlm}(N), \tag{1.5}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, и величины

$$\varepsilon_1(N) = \left[N\sum_{i,j}|a_{ij}(N)|^2\right]^{\frac{1}{2}};\ \varepsilon_2(N) = \sum_{i,j}|\varphi_{ij}(N)|^2;\ \varepsilon_3(N) = N\left[\sum_{i,j,l,m}|b_{ijlm}(N)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.6}$$

стремятся к нулю при $N\to\infty$.

IV. Случайные величины $\tau_i$, входящие в формулу (1.1), независимы и имеют одинаковую функцию распределения вероятностей $\sigma(x)$.

Нетрудно проверить, что условия III, наложенные на случайные векторы $q$, унитарно инвариантны, т. е. выполнение их при некотором фиксированном выборе ортонормированных базисов в пространствах $H_N$ $(N = 1, 2, \ldots)$ влечет за собой выполнение этих условий при любом другом выборе.

Наиболее типичным примером случайных векторов $q$, удовлетворяющих условию III, является ансамбль, состоящий из всех единичных векторов пространства $H_N$, которые считаются равновероятными (т. е. равномерно распределенными на единичной сфере). В этом случае

$$Mq_i\bar{q}_j = N^{-1}\delta_{ij},\quad Mq_i\bar{q}_jq_l\bar{q}_m = \frac{1}{N(N+1)}\{\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{im}\delta_{jl}\},$$

что, очевидно, обеспечивает выполнение условий III.

Приведем еще два других примера ансамблей случайных векторов, удовлетворяющих условию III.

a) Ансамбль вещественных векторов единичной длины, плотность вероятности которых $p(q_1, q_2, \ldots, q_N)$ является симметричной и четной функцией всех своих переменных. У таких векторов

$$Mq_iq_j = N^{-1}\delta_{ij} \text{ и } Mq_iq_jq_lq_m = a_1(\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}) + (a_2 - 3a_1)\delta_{ij}\delta_{lm}\delta_{il},$$

где $a_1 = Mq_1^2q_2^2 = Mq_i^2q_k^2$ $(i \neq k)$, $a_2 = Mq_1^4 = Mq_i^4$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Если учесть соотношение $1 = Na_2 + N(N-1)a_1$, следующее из нормированности всех векторов рассматриваемого ансамбля, то нетрудно показать, что для справедливости условия III достаточно, чтобы $a_1 = Mq_1^2q_2^2 = N^{-2} + o(N^{-\frac{5}{2}})$ при $N\to\infty$. Например, для вещественных векторов, равномерно распределенных по вещественной единичной сфере, $a_1 = [N(N+1)]^{-1}$. Поэтому вещественные случайные векторы, равномерно распределенные на единичной сфере, удовлетворяют условиям III.

b) Ансамбль случайных векторов, которые в некотором базисе имеют вид $q = N^{-\frac{1}{2}}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$, где $\xi_i$ — независимые одинаково распределенные

---

* Через $Mx$ обозначается математическое ожидание случайной величины $x$.

случайные величины, математическое ожидание которых равно нулю, дисперсия — единице и момент четвертого порядка $\mu_4$ конечен. В этом случае $a_{ij}(N)=0$, $\varphi_{il}(N)=N^{-1}\delta_{il}$, а среди чисел $b_{ijlm}(N)$ отличны от нуля лишь $b_{iiii}(N)=N^{-2}(\mu_4-3)$. Следовательно, $\varepsilon_1(N)=0$, $\varepsilon_2(N)=N^{-1}$, $\varepsilon_3(N)=N^{-\frac{1}{2}}|\mu_4-3|$, откуда следует, что случайные векторы этого ансамбля тоже удовлетворяют условиям III.

Как уже указывалось, основной задачей является доказательство существования и фактическое отыскание функции $\nu(\lambda; c)$, определяемой формулой (1.3). Удобнее, однако, вместо функции $\nu(\lambda; c)$ искать ее преобразование Стильтьеса

$$m(z; c)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\nu(\lambda; c)}{\lambda-z}, \tag{1.7}$$

зная которое можно найти искомую функцию во всех точках ее непрерывности по известным формулам обращения

$$\nu(\lambda_2; c)-\nu(\lambda_1; c)=\lim_{\eta\to+0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\operatorname{Im} m(\xi+i\eta; c)\,d\xi. \tag{1.8}$$

Для краткости мы будем функцию $m(z; 0)$, существование которой обеспечено условием II, обозначать просто через $m_0(z)$, так что

$$m_0(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\nu_0(\lambda)}{\lambda-z}, \tag{1.9}$$

где функция $\nu_0(\lambda)$ определена формулой (1.2).

Основные результаты содержатся в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть выполнены перечисленные выше условия* I—IV. *Тогда*

1) *Последовательность нормированных спектральных функций* $\nu(\lambda; B_N(n))$ *операторов* $B_N(n)$ *при* $N\to\infty$ *сходится по вероятности к некоторой неубывающей функции* $\nu(\lambda; c)$ *во всех ее точках непрерывности.*

*Кроме того,* $\nu(-\infty; c)=\nu_0(-\infty)$, $\nu(+\infty; c)=\nu_0(+\infty)$, *где функция* $\nu_0(\lambda)$ *определена формулой* (1.2).

*Поэтому во всех точках непрерывности функция* $\nu(\lambda; c)$ *выражается через ее преобразование Стильтьеса* $m(z; c)$ *по формуле*

$$\nu(\lambda; c)=\nu_0(-\infty)+\lim_{\mu\to-\infty}\left\{\lim_{y\to+0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mu}^{\lambda}\operatorname{Im} m(x+iy; c)\,dx\right\}.$$

2) *Преобразование Стильтьеса* $m(z; c)$ *функции* $\nu(\lambda; c)$ *равно взятому при* $t=1$ *решению уравнения*

$$u(z, t)=m_0(z)-c\int\limits_0^t\frac{\tau(\xi)}{1+\tau(\xi)u(z, \xi)}\frac{\partial}{\partial z}u(z, \xi)\,d\xi, \tag{1.10}$$

*где функция* $m_0(z)$ *определена формулой* (1.9), *а* $\tau(\xi)$ (*обобщенная обратная функция распределения вероятностей* $\sigma(x)$ *случайной величины* $\tau$) *определена формулой* *

$$\tau(\xi) = \inf_{\tau} \{\tau;\ \sigma(\tau) \geqslant \xi\}. \tag{1.11}$$

3) *Решение уравнения* (1.10) *существует и единственно. Уравнение* (1.10) *эквивалентно дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка*

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} + c\frac{\tau(t)}{1+\tau(t)\,u(z,t)}\cdot\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = 0; \quad u(z,0) = m_0(z), \tag{1.12}$$

*решение которого методом характеристик приводит к следующему неявному выражению для функции* $u(z, t)$:

$$u(z,t) = m_0\left(z - c\int_0^t \frac{\tau(\xi)\,d\xi}{1+\tau(\xi)\,u(z,t)}\right). \tag{1.13}$$

Во избежание недоразумений отметим, что под решением уравнения (1.10) или (1.12) мы понимаем функцию $u(z, t)$, аналитическую по $z$ и непрерывную по $t$ при $\operatorname{Im} z > 0$ и $t \in [0, 1]$.

Заметим еще, что из определения функции $\tau(\xi)$ следует:

$$\int_0^1 \frac{\tau(\xi)\,d\xi}{1+\tau(\xi)\,u(z,1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau\,d\sigma(\tau)}{1+\tau u(z,1)},$$

откуда согласно (1.13) и равенству $m(z; c) = u(z, 1)$ заключаем, что преобразование Стильтьеса $m(z; c)$ функции $\nu(\lambda; c)$ удовлетворяет уравнению

$$m(z;c) = m_0\left(z - c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau\,d\sigma(\tau)}{1+\tau m(z;c)}\right), \tag{1.14}$$

где $\sigma(\tau)$ — функция распределения вероятностей случайной величины $\tau$.

Рассмотрим три примера.

1) Сумма случайных независимых и равновероятных проекторов.

Пусть $B_N(n) = \tau \sum_{i=1}^{n} P_i$, где $P_i$ — операторы проектирования на случайные векторы $q^{(i)}$, независимые и равномерно распределенные на единичной сфере, а $\tau$ — неслучайное число. Выше было показано, что в данном случае условие III выполнено. Так как $A_N = 0$ и $\tau$ — неслучайное число, то усло-

---

* Нетрудно проверить, что $\tau(\xi)$ является непрерывной слева и неубывающей функцией. На участках строгого возрастания $\tau(\xi)$ и $\sigma(x)$ являются обратными друг другу функциями, интервалам постоянства $\sigma(x)$ соответствуют скачки $\tau(\xi)$, а скачкам $\sigma(x)$ — интервалы постоянства $\tau(\xi)$.

вия I, IV тоже выполнены, причем $m_0(z) = -z^{-1}$, $d\sigma(\xi) = \delta(\xi - \tau)\,d\xi$. Поэтому, если $\frac{n}{N} \to c$ при $N \to \infty$, то выполняются все условия I—IV, и функция $m(z; c)$ удовлетворяет уравнению (1.14), которое в данном случае таково:

$$m(z;\,c) = -\left(z - \frac{c\tau}{1 + \tau m(z;\,c)}\right)^{-1}.$$

Решая это квадратное уравнение относительно $m(z; c)$, получим:

$$m(z;\,c) = -\frac{(1-c) + |1-c|}{2z} + \frac{-z + |1-c|\,\tau + \sqrt{(z - c\tau + \tau)^2 - 4z\tau}}{2z\tau},$$

где при $\operatorname{Im} z > 0$ нужно брать такую ветвь корня, чтобы $\operatorname{Im} m(z; c) > 0$ (так как $m(z; c)$ — преобразование Стильтьеса неубывающей функции).

Отсюда, используя формулу обращения (1.8), находим, что $\nu(\lambda; c) = \nu_1(\lambda; c) + \nu_2(\lambda; c)$, где

$$\frac{d\nu_1(\lambda;\,c)}{d\lambda} = \begin{cases} (1-c)\,\delta(\lambda) & \text{при } 0 \leqslant c \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } c > 1, \end{cases}$$

$$\frac{d\nu_2(\lambda;\,c)}{d\lambda} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4c\tau^2 - (\lambda - c\tau - \tau)^2}}{2\pi\tau\lambda} & \text{при } (\lambda - c\tau - \tau)^2 \leqslant 4c\tau^2, \\ 0 & \text{при } (\lambda - c\tau - \tau)^2 > 4c\tau^2. \end{cases}$$

Из этих формул при $c > 1$, в частности, следует, что нормированные спектральные функции случайных операторов

$$K_N(n) = -\tau\left(1 + \frac{n}{N}\right) I + \tau \sum_{i=1}^{n} P_i \qquad \left(\lim_{N \to \infty} \frac{n}{N} = c > 1\right)$$

при $N \to \infty$ сходятся по вероятности к функции $\nu(\lambda; c)$, производная которой равна

$$\frac{d\nu(\lambda;\,c)}{d\lambda} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4c\tau^2 - \lambda^2}}{2\pi c\tau^2}\left(1 + \dfrac{\lambda + \tau}{\tau c}\right)^{-1} & \text{при } \lambda^2 \leqslant 4c\tau^2, \\ 0 & \text{при } \lambda^2 > 4c\tau^2. \end{cases}$$

Правая часть этой формулы при $c \to \infty$ переходит в полукруговой закон, полученный Вигнером для гауссовского ансамбля случайных матриц [4]. Этого, конечно, и следовало ожидать, так как $K_N(n)$ — сумма независимых одинаково распределенных случайных матриц:

$$K_N(n) = \tau \sum_{i=1}^{n} \left\{-\left(\frac{n+N}{nN}\right) I + P_i\right\},$$

и, в силу центральной предельной теоремы, функция распределения вероятностей случайных матриц $K_N(n)$ должна быть близка к гауссовой, если $n \gg N$.

Это является одним из проявлений отмеченного выше сходства рассматриваемых нами ансамблей с ансамблями Вигнера.

2) Сумма случайных независимых и равновероятных проекторов со случайными ограниченными коэффициентами.

Пусть $B_N(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i P_i$, где $P_i$ — такие же проекционные операторы, как выше, а коэффициенты $\tau_i$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью вероятности, равной $\left[\pi(1-\tau^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$. Ясно, что все условия I—IV выполнены, если существует $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{n}{N}=c$, причем $A_N=0$,

$$m_0(z)=-z^{-1} \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau\, d\sigma(\tau)}{1+\tau u}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau(1-\tau^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+\tau u}d\tau=\frac{1}{u}\left[1-(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Поэтому в данном случае уравнение (1.14) имеет вид:

$$m(z;\,c)=-\left\{z-\frac{c}{m(z;\,c)}\left[1-(1-m^2(z;\,c))^{-\frac{1}{2}}\right]\right\}^{-1}.$$

Отсюда после элементарных преобразований получим:

$$z^2m^4+2(1-c)zm^3+[(1-c)^2-z^2]m^2-2z(1-c)m-1+2c=0,$$

где для краткости положено $m(z;\,c)=m$. В частности, при $c=1$ мы получим биквадратное уравнение, решая которое (с учетом того, что $m(z;\,1)\to 0$ при $\operatorname{Im} z\to\infty$ и $\operatorname{Im} m(z;\,1)>0$ при $\operatorname{Im} z>0$), находим сначала $m(z;\,1)$, а затем (по формулам (1.8)) и $\nu(\lambda;\,1)$:

$$\frac{d\nu(\lambda;\,1)}{d\lambda}=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2-|\lambda|}{4|\lambda|}} & \text{при } |\lambda|\leqslant 2,\\ 0 & \text{при } |\lambda|>2.\end{cases}$$

3) Сумма случайных независимых и равновероятных проекторов со случайными неограниченными коэффициентами.

Пусть $B_N(n)$ — такие же операторы, что и в предыдущем примере, только плотность вероятности случайных величин $\tau_i$ положим равной $\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+\tau^2}$.

В этом случае $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau\, d\sigma(\tau)}{1+\tau u}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau}{1+\tau u}\cdot\frac{a}{a^2+\tau^2}d\tau=\frac{-ia}{1-iau}$,

а уравнение (1.14) имеет вид:

$$m=-\left\{z+\frac{iac}{1-iam}\right\}^{-1}\quad (m=m(z;\,c)).$$

Решая это квадратное уравнение относительно $m(z;\,c)$, получим согласно формуле (1.8) следующее выражение для $\nu(\lambda;\,c)$:

$$\nu(\lambda;\,c)=\nu_1(\lambda;\,c)+\nu_2(\lambda;\,c),$$

где

$$\frac{d\nu_1(\lambda;\,c)}{d\lambda}=\begin{cases}(1-c)\,\delta(\lambda) & \text{при } 0\leqslant c\leqslant 1\,,\\ 0 & \text{при } c>1,\end{cases}$$

$$\frac{d\nu_2(\lambda;\,c)}{d\lambda}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{(\lambda^2+\lambda_1^2)(\lambda^2+\lambda_2^2)}+\lambda^2-\lambda_1\lambda_2\right)-\lambda}}{2a\lambda}\,,$$

$$\lambda_{1,2}=a\,(1\pm\sqrt{c})^2.$$

Из приведенных формул видно, что в данном случае спектр занимает всю ось, как и следовало ожидать в силу неограниченности $\tau$.

В заключение отметим, что найти функцию $m(z;\,c)$ и тем более $\nu(\lambda;\,c)$ в явном виде, как правило, нельзя, так как уравнение (1.14) относительно $m(z;\,c)$, вообще говоря, не решается в явном виде. В этом смысле приведенные выше примеры являются исключениями. Тем не менее, часто можно изучить качественную картину спектра: число и расположение его связных компонент, а также поведение $\nu(\lambda;\,c)$ вблизи границ спектра. Мы имеем в виду следующее: на интервалах вещественной оси, дополнительных к спектру, функция $m(x+i0;\,c)$ существует, непрерывна, вещественна и монотонно растет. Поэтому на этих интервалах существует обратная функция, тоже вещественная и монотонно возрастающая, причем область ее значений совпадает, очевидно, с дополнением к спектру. Обозначая эту обратную функцию через $x(m;\,c)$ и используя формулу (1.14), получим:

$$x(m;\,c)=x_0(m;\,c)+c\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau\,d\sigma(\tau)}{1+\tau m}\,, \tag{1.15}$$

где $x_0(m)$ — функция, обратная к $m_0(x)$. Таким образом, для определения спектра получаем следующее правило: нужно найти интервалы монотонного возрастания функции, стоящей в правой части равенства (1.15), и затем определить множество ее значений на этих интервалах; дополнение к этому множеству и есть спектр.

Поэтому, если $a$ — граница одного из интервалов монотонного роста правой части формулы (1.15), то

$$\lambda_a=x_0(a)+c\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau\,d\sigma(\tau)}{1+\tau a} \tag{1.16}$$

является границей одной из связных компонент спектра. Предположим, что в окрестности точки $a$ правая часть формулы (1.15) остается аналитической и, следовательно, имеет в этой точке локальный экстремум (максимум, если $a$ — правая граница интервала монотонного роста, и минимум — если левая). Так как в точке локального экстремума первая отличная от нуля производная должна быть обязательно четного порядка, то разложение Тэйлора правой части формулы (1.15) должно иметь такой вид:

$$x(m;\,c)=\lambda_a+\frac{d_{2k}}{(2k)!}(m-a)^{2k}+\ \dots\ ,$$

откуда следует, что в окрестности точки $\lambda_a$

$$m(z;\,c)-a=\sqrt[2k]{\frac{z-\lambda_a}{d_{2k}}(2k)!}\quad[1+o(1)],$$

где выбрана та ветвь корня, которая имеет положительную мнимую часть при $\operatorname{Im} z>0$ и вещественна в той окрестности точки $\lambda_a$, где нет спектра. Отсюда, согласно формуле обращения (1.8), следует, что в окрестности $\lambda_a$ функция $\nu(\lambda;\,c)$ имеет производную, причем при $\lambda\to\lambda_a$

$$\frac{d\nu(\lambda;\,c)}{d\lambda}=\sqrt[2k]{\frac{\lambda_a-\lambda}{d_{2k}}(2k)!}\quad[1+o(1)]\frac{\sin\frac{\pi}{2k}}{\pi}. \tag{1.17}$$

Поэтому правило для определения особенностей функции $\nu(\lambda;\,c)$ можно сформулировать так:

границы некоторых из связных компонент спектра можно найти по формуле (1.16), где в качестве $a$ нужно брать точки локальных экстремумов правой части формулы (1.15); вблизи этих граничных точек функция $\nu(\lambda;\,c)$ имеет алгебраические особенности, главные части которых находятся по формуле (1.17).

Проиллюстрируем изложенные правила на решенном выше примере (1). Здесь

$$x(m;\,c)=-\frac{1}{m}+\frac{c\tau}{1+\tau m}. \tag{1.18}$$

График этой функции приведен на рис. 1, где пунктиром обозначены участки убывания правой части формулы (1.18), которые нужно отбросить.

Из этого графика видно, что спектр состоит из отрезка $[\lambda_-,\,\lambda_+]$ и точки 0 при $c<1$ и только из одного отрезка $[\lambda_-,\,\lambda_+]$ при $c\geqslant 1$. Экстремальными точками правой части формулы (1.18) являются $m_\pm=-\dfrac{1}{\tau(1\pm\sqrt{c})}$, по которым согласно (1.16) находим границы спектра $\lambda_-=\tau(1-\sqrt{c})^2$ и $\lambda_+=$ $=\tau(1+\sqrt{c})^2$.

Вторая производная правой части формулы (1.18) в экстремальных точках $m_\pm$ равна

$$d_\pm^{(2)}=\pm\frac{2\tau}{\sqrt{c}}\tau^2(1\pm\sqrt{c})^2=\pm\frac{2\tau}{\sqrt{c}}\lambda_\pm^2,$$

откуда согласно (1.17) следует, что вблизи точек $\lambda_\pm$

$$\nu'(\lambda;\,c)\approx\frac{\sqrt[4]{c}}{\pi\lambda_\pm}\sqrt{\frac{|\lambda-\lambda_\pm|}{\tau}}$$

в полном соответствии с полученным выше точным решением.

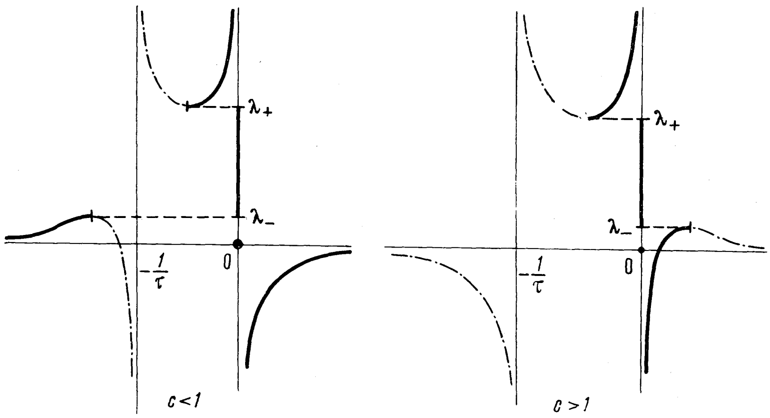


Рис. 1

## § 2. Вспомогательные предложения

Рассмотрим линейный оператор $A$, отображающий пространство $H_N$ в себя. Матрицу оператора $A$ в каком-нибудь ортонормированном базисе этого пространства будем обозначать через $\| A_{ik} \|$.

Лемма 1. *Если случайный вектор* $q = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$ *удовлетворяет условию* III, *то*

$$M \,|\, (Aq, q) - N^{-1} \operatorname{Sp} A \,| \leqslant \| A \| \, \varepsilon(N),$$

*где* $\| A \|$ — *норма оператора* $A$, *величина* $\varepsilon(N)$ *не зависит от* $A$ *и стремится к нулю при* $N \to \infty$.

Доказательство. Полагая для краткости $\eta = (Aq, q) = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} q_j \bar{q}_i$, будем иметь согласно (1.4) $M\eta = \sum_{i,j} A_{ij} M q_j \bar{q}_i = N^{-1} \sum_{i,j} A_{ij} \delta_{ij} + \sum_{i,j} A_{ij} a_{ji}(N)$

или

$$| M\eta - N^{-1} \operatorname{Sp} A \,| = \Big| \sum_{i,j} A_{ij} a_{ji}(N) \Big| \leqslant \Big( \sum_{i,j} | A_{ij} |^2 \cdot \sum_{i,j} | a_{ij}(N) |^2 \Big)^{\frac{1}{2}},$$

откуда, используя очевидное неравенство

$$\sum_{i,j} | A_{ij} |^2 \leqslant N \max_i \sum_j | A_{ij} |^2 \leqslant N \| A \|^2, \tag{2.1}$$

получим согласно (1.6), что

$$| M\eta - N^{-1} \operatorname{Sp} A \,| \leqslant \| A \| \Big( N \sum_{i,j} | a_{ij}(N) |^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = \| A \| \, \varepsilon_1(N). \tag{2.2}$$

Аналогичным образом из формулы (1.5) следует:

$$M\eta\bar{\eta} = N^{-2} | \operatorname{Sp} A |^2 + N^{-2} \sum A_{ij} \bar{A}_{ij} + \sum A_{ij} \bar{A}_{lm} \varphi_{jl}(N) \overline{\varphi_{im}(N)} + \sum A_{ij} \bar{A}_{lm} b_{jilm}(N).$$

Второе и четвертое слагаемые правой части оцениваются с помощью неравенства (2.1):

$$N^{-2}\sum A_{ij}\overline{A}_{ij}\leqslant N^{-1}\|A\|^2,$$

$$\left|\sum A_{ij}\overline{A}_{lm}\,b_{jilm}(N)\right|\leqslant\left(\sum|A_{ij}|^2|A_{lm}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum|b_{ijlm}(N)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\|A\|^2N\left(\sum|b_{ijlm}(N)|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|A\|^2\varepsilon_3(N).$$

Оценим теперь третье слагаемое:

$$\left|\sum A_{ij}\overline{A}_{lm}\,\varphi_{jl}(N)\overline{\varphi_{im}(N)}\right|\leqslant\left(\sum_{i,l}\left|\sum_j A_{ij}\,\varphi_{jl}(N)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i,l}\left|\sum_m A_{lm}\overline{\varphi_{im}(N)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_l\|A\|^2\sum_j|\varphi_{jl}(N)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_i\|A\|^2\sum_m|\varphi_{im}(N)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|A\|^2\sum|\varphi_{jl}(N)|^2=$$

$$=\|A\|^2\varepsilon_2(N).$$

Таким образом,

$$|M\eta\overline{\eta}-N^{-2}\,|\mathrm{Sp}\,A|^2|\leqslant\|A\|^2\{N^{-1}+\varepsilon_2(N)+\varepsilon_3(N)\}.\tag{2.3}$$

Далее имеем

$$M|\eta-N^{-1}\mathrm{Sp}\,A|\leqslant\{M|\eta-N^{-1}\,\mathrm{Sp}\,A|^2\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\{M\eta\overline{\eta}-N^{-2}|\mathrm{Sp}\,A|^2-2\,\mathrm{Re}\,N^{-1}\overline{\mathrm{Sp}\,A}\,(M\eta-N^{-1}\,\mathrm{Sp}\,A)\}^{\frac{1}{2}},$$

откуда, используя неравенства (2.2) и (2.3) и замечая, что всегда $|N^{-1}\,\mathrm{Sp}\,A|\leqslant\|A\|$, получим:

$$M|\eta-N^{-1}\,\mathrm{Sp}\,A|\leqslant\|A\|\,\{N^{-1}+\varepsilon_2(N)+\varepsilon_3(N)+2\,\varepsilon_1(N)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому, полагая $\varepsilon(N)=\{N^{-1}+\varepsilon_2(N)+\varepsilon_3(N)+2\varepsilon_1(N)\}^{\frac{1}{2}}$, будем иметь: $M|(Aq,q)-N^{-1}\,\mathrm{Sp}\,A|\leqslant\|A\|\cdot\varepsilon(N)$, где $\varepsilon(N)$ не зависит от $A$ и, в силу условия III, стремится к нулю при $N\to\infty$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть эрмитовы операторы $\widetilde{A}$ и $A$, действующие в пространстве $H_N$, связаны соотношением*

$$\widetilde{A}-A=\tau(\cdot,q)\,q,$$

*где $\tau$ — вещественное число, а $q$ — случайный вектор, удовлетворяющий условию* III. *Тогда для разности следов резольвент $\widetilde{R}_z$ и $R_z$ этих операторов имеет место следующая формула*:

$$\mathrm{Sp}\,\widetilde{R}_z-\mathrm{Sp}\,R_z=-\frac{\partial}{\partial z}\ln(1+\tau N^{-1}\,\mathrm{Sp}\,R_z)+\delta(z,q,N),$$

*в которой* $\delta(z, q, N)$ — *случайная величина, удовлетворяющая неравенству*

$$M\,|\,\delta(z, q, N)\,| \leqslant 2\left|\frac{\tau}{y^2(1+\tau N^{-1}\operatorname{Sp} R_z)}\right|\varepsilon(N),$$

*где* $\varepsilon(N)$ *не зависит от* $A$, $z$ *и* $\tau$ *и стремится к нулю при* $N \to \infty$.

Доказательство. Так как детерминант матрицы любого оператора равен произведению всех ее собственных значений, то из тождества

$$\widetilde{R}_z = (\widetilde{A} - zI)^{-1} = \{(A - zI) + (\widetilde{A} - A)\}^{-1} = \{I + R_z(\widetilde{A} - A)\}^{-1} R_z$$

следует, что

$$\prod_1^N (\widetilde{\lambda}_k - z)^{-1} = \prod_1^N (\lambda_k - z)^{-1}\{\det[I + R_z(\widetilde{A} - A)]\}^{-1},$$

где $\widetilde{\lambda}_k$ и $\lambda_k$ — собственные значения операторов $\widetilde{A}$ и $A$.

Беря логарифмическую производную по $z$ от обеих частей этого равенства, получим хорошо известную формулу для разности следов резольвент:

$$\operatorname{Sp}\widetilde{R}_z - \operatorname{Sp} R_z = -\frac{\partial}{\partial z}\ln\det[I + R_z(\widetilde{A} - A)].$$

В частности, если $\widetilde{A} - A = \tau(\cdot, q)q$, то, как легко видеть,

$$\det[I + R_z(\widetilde{A} - A)] = 1 + \tau(R_z q, q),$$

и, следовательно, в этом случае $\operatorname{Sp}\widetilde{R}_z - \operatorname{Sp} R_z = -\dfrac{\partial}{\partial z}\ln[1 + \tau(R_z q, q)]$ или

$$\operatorname{Sp}\widetilde{R}_z - \operatorname{Sp} R_z = -\frac{\tau(R_z^2 q, q)}{1 + \tau(R_z q, q)}. \tag{2.4}$$

Оценим теперь правую часть этой формулы. Для этого обозначим через $E(\lambda)$ разложение единицы оператора $A$ и введем неубывающую функцию $\alpha(\lambda) = (E(\lambda)q, q)$. Тогда

$$(R_z q, q) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha(\lambda)}{\lambda - z}, \quad (R_z^2 q, q) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha(\lambda)}{(\lambda - z)^2},$$

откуда при $z = x + iy$ следует:

$$|\,1 + \tau(R_z q, q)\,| \geqslant |\,\tau\operatorname{Im}(R_z q, q)\,| = |\,\tau y\,|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + y^2},$$

$$|\,\tau(R_z^2 q, q)\,| \leqslant |\,\tau\,|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + y^2},$$

так что

$$\left|\frac{\tau(R_z^2 q, q)}{1 + \tau(R_z q, q)}\right| \leqslant \frac{1}{|\,y\,|}. \tag{2.5}$$

Для окончания доказательства леммы перепишем формулу (2.4) в следующем виде:

$$\operatorname{Sp}\widetilde{R}_z - \operatorname{Sp} R_z = -\frac{\tau N^{-1}\operatorname{Sp} R_z^2}{1+\tau N^{-1}\operatorname{Sp} R_z} + \delta(z, q, N), \tag{2.6}$$

где

$$\delta(z, q, N) = \frac{\tau N^{-1}\operatorname{Sp} R_z^2}{1+\tau N^{-1}\operatorname{Sp} R_z} - \frac{\tau (R_z^2 q, q)}{1+\tau(R_z q, q)},$$

и оценим математическое ожидание $|\delta(z, q, N)|$. Имеем:

$$\delta(z, q, N) = \frac{\tau (R_z^2 q, q)}{1+\tau (R_z q, q)} \cdot \frac{\tau \{(R_z q, q) - N^{-1}\operatorname{Sp} R_z\}}{1+\tau N^{-1}\operatorname{Sp} R_z} -$$

$$- \frac{\tau}{1+\tau N^{-1}\operatorname{Sp} R_z}\{(R_z^2 q, q) - N^{-1}\operatorname{Sp} R_z^2\},$$

откуда, используя оценку (2.5), получим:

$$|\delta(z, q, N)| \leqslant \left|\frac{\tau}{y(1+\tau N^{-1}\operatorname{Sp} R_z)}\right| \{|(R_z q, q) - N^{-1}\operatorname{Sp} R_z| +$$

$$+ |y| \cdot |(R_z^2 q, q) - N^{-1}\operatorname{Sp} R_z|\}.$$

Так как случайный вектор $q$ удовлетворяет условию III, то, переходя в этом неравенстве к математическим ожиданиям и используя при этом лемму 1, будем иметь:

$$M|\delta(z, q, N)| \leqslant \left|\frac{\tau}{y(1+\tau N^{-1}\operatorname{Sp} R_z)}\right| (\|R_z\| + |y| \cdot \|R_z^2\|)\, \varepsilon(N).$$

Из эрмитовости оператора $A$ следует, что $\|R_z\| \leqslant |y|^{-1}$ и $\|R_z^2\| \leqslant |y|^{-2}$. Поэтому

$$M|\delta(z, q, N)| \leqslant 2\left|\frac{\tau}{y^2(1+\tau N^{-1}\operatorname{Sp} R_z)}\right| \varepsilon(N), \tag{2.7}$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь величины $\tau_i$. По условию, это — независимые случайные величины с одной и той же функцией распределения $\sigma(x)$. Пусть $T_n$ — некоторая реализация $n$ этих случайных величин. Занумеруем полученные в $T_n$ величины в порядке их возрастания $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n$ и построим соответствующую этой реализации экспериментальную функцию распределения $\sigma(x, T_n)$, положив

$$\sigma(x, T_n) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant \tau_1, \\ \dfrac{i}{n} & \text{при } \tau_i \leqslant x < \tau_{i+1}, \\ 0 & \text{при } \tau_n < x. \end{cases}$$

Согласно теореме Гливенко [5], при $n \to \infty$ функции $\sigma(x, T_n)$ почти наверное сходятся к $\sigma(x)$ равномерно на всей оси.

Нам понадобится аналог этой теоремы для функций, обратных к $\sigma(x, T_n)$ и $\sigma(x)$. Под обратными функциями мы здесь понимаем функции $\tau(\xi, T_n)$ и $\tau(\xi)$, определенные на интервале $(0, 1)$ равенствами

$$\tau(\xi, T_n) = \inf_x \{x : \sigma(x, T_n) \geqslant \xi\}, \tag{2.8}$$

$$\tau(\xi) = \inf_x \{x : \sigma(x) \geqslant \xi\}. \tag{2.8'}$$

Заметим, что из определения функции $\sigma(x, T_n)$ следует:

$$\tau(\xi, T_n) = \tau_{i+1} \text{ при } \frac{i}{n} \leqslant \xi < \frac{i+1}{n} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2.9}$$

Лемма 3. *Если функция распределения вероятности $\sigma(x)$ случайной величины $\tau$ имеет первый абсолютный момент, то при $n \to \infty$ последсвательность функций $\tau(\xi, T_n)$ почти наверное сходится в метрике $L^1[0, 1]$ к функции $\tau(\xi)$, т. е. последовательность*

$$\alpha_n = \int_0^1 |\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)| \, d\xi$$

*почти наверное сходится к нулю.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что по условию $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, d\sigma(x) < \infty$, а из определения функции $\tau(\xi)$ следует, что $\int_0^1 |\tau(\xi)| \, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \, d\sigma(x) < \infty$. Поэтому функция $\tau(\xi)$ суммируема на интервале $[0, 1]$.

Согласно теореме Гливенко, последовательность $\beta_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |\sigma(x, T_n) - \sigma(x)|$ почти наверное сходится к нулю. Из определения $\beta_n$ следует, что если $\sigma(x, T_n) \geqslant \xi$, то $\sigma(x) \geqslant \xi - \beta_n$, а если $\sigma(x) \geqslant \xi + \beta_n$, то $\sigma(x, T_n) \geqslant \xi$. Поэтому $\{x : \sigma(x) \geqslant \xi + \beta_n\} \subset \{x : \sigma(x, T_n) \geqslant \xi\} \subset \{x : \sigma(x) \geqslant \xi - \beta_n\}$, откуда при $\xi \in (\beta_n, 1 - \beta_n)$, согласно определениям функций $\tau(\xi, T_n)$ и $\tau(\xi)$, получим: $\tau(\xi + \beta_n) \geqslant \tau(\xi, T_n) \geqslant \tau(\xi - \beta_n)$. Так как функция $\tau(\xi)$ не убывает, то из этих неравенств следует, что $|\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)| \leqslant \tau(\xi + \beta_n) - \tau(\xi - \beta_n)$, если $\beta_n \leqslant \xi \leqslant 1 - \beta_n$. Поэтому

$$\int_{\beta_n}^{1-\beta_n} |\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)| \, d\xi \leqslant \int_{\beta_n}^{1-\beta_n} \{\tau(\xi + \beta_n) - \tau(\xi - \beta_n)\} \, d\xi =$$

$$= \int_{1-\beta_n}^{1} \tau(\xi) \, d\xi - \int_0^{2\beta_n} \tau(\xi) \, d\xi,$$

откуда, согласно теореме Гливенко и суммируемости функции $\tau(\xi)$, следует, что $\int\limits_{\beta_n}^{1-\beta_n} |\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)|\, d\xi$ при $n \to \infty$ почти наверное стремится к нулю.

Далее имеем:

$$\int\limits_0^{\beta_n} |\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)|\, d\xi \leqslant \int\limits_0^{\beta_n} |\tau(\xi, T_n)|\, d\xi + \int\limits_0^{\beta_n} |\tau(\xi)|\, d\xi.$$

Возьмем любое положительное число $A$ и введем случайные величины $\tilde{\tau}_i$, следующим образом выражающиеся через $\tau_i$:

$$\tilde{\tau}_i = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tau_i| < A, \\ |\tau_i|, & \text{если } |\tau_i| \geqslant A. \end{cases} \tag{2.10}$$

Тогда согласно (2.9) получим:

$$\int\limits_0^{\beta_n} |\tau(\xi, T_n)|\, d\xi \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{\tau}_i + \int\limits_0^{\beta_n} A\, d\xi$$

и, следовательно, $\int\limits_0^{\beta_n} |\tau(\xi) - \tau(\xi, T_n)|\, d\xi \leqslant \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{\tau}_i + \int\limits_0^{\beta_n} \{A + |\tau(\xi)|\}\, d\xi$. Из усиленного закона больших чисел следует, что при $n \to \infty$ почти наверное $\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{\tau}_i \to \int\limits_{|x| \geqslant A} |x|\, d\sigma(x)$, откуда, согласно предыдущему неравенству, теореме Гливенко и суммируемости $\tau(\xi)$, заключаем, что при $n \to \infty$ неравенство

$$\int\limits_0^{\beta_n} |\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)|\, d\xi \leqslant \frac{1}{A} + \int\limits_{|x| \geqslant A} |x|\, d\sigma(x)$$

выполняется почти наверное, каково бы ни было $A > 0$. Но это означает, что $\int\limits_0^{\beta_n} |\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)|\, d\xi$ почти наверное стремится к нулю при $n \to \infty$.

Аналогичным образом убеждаемся в том, что $\int\limits_{1-\beta_n}^{1} |\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)|\, d\xi$ тоже почти наверное стремится к нулю при $n \to \infty$. Лемма доказана.

Замечание. В дальнейшем эта лемма нам понадобится только для того частного случая, когда случайная величина $\tau$ ограничена.

## § 3. Вывод основного уравнения

Доказательство теоремы 1 мы проведем следующим образом: сначала докажем ее, считая случайные величины $\tau_i$ ограниченными, т. е. предполагая наличие такого числа $T > 0$, что любая реализация случайных величин $\tau_i$ удовлетворяет неравенству

$$|\tau_i| < T. \tag{3.0}$$

Затем путем несложного предельного перехода мы освободимся от этого ограничения. Но в ближайших двух параграфах условие (3.0) предполагается выполненным.

Пусть $T_n$, $Q_n$ — некоторая реализация случайных величин $\tau$ и случайных векторов $q$, входящих в формулу (1.1).

Занумеруем в этой реализации пары $\tau_i$, $q^{(i)}$ в порядке возрастания $\tau_i$:

$$\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n, \quad q^{(1)} \leqslant q^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant q^{(n)}$$

и построим цепочку операторов $B_N(i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, положив

$$B_N(i) = A_N + \sum_{\alpha=1}^{i} \tau_\alpha q^{(\alpha)}(\cdot, q^{(\alpha)}), \tag{3.1}$$

так что $B_N(0) = A_N$, а $B_N(n)$ — интересующий нас оператор (1.1). Резольвенты операторов $B_N(i)$ обозначим через $R_z(i)$. Каждой реализации $T_n$, $Q_n$ мы будем сопоставлять функцию $u(z, \xi; N, T_n, Q_n)$, определенную при всех невещественных $z$ и вещественных $\xi \in [0, 1]$ равенствами

$$u(z, \xi; N, T_n, Q_n) = N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(i) + nN^{-1} \operatorname{Sp} \{R_z(i+1) - R_z(i)\} \left(\xi - \frac{i}{n}\right)$$

$$\text{для} \quad \xi \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3.2}$$

Заметим, что $u(z, 0; N, T_n, Q_n)$ и $u(z, 1; N, T_n, Q_n)$ являются преобразованиями Стильтьеса нормированных спектральных функций операторов $A_N$ и $B_N(u)$:

$$u(z, 0; N, T_n, Q_n) = N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu(\lambda; A_N)}{\lambda - z}, \tag{3.3}$$

$$u(z, 1; N, T_n, Q_n) = N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu(\lambda; B_N(n))}{\lambda - z}. \tag{3.3'}$$

При всех других значениях $\xi \in [0, 1]$ функции $u(z, \xi; N, T_n, Q_n)$ тоже являются преобразованиями Стильтьеса неубывающих функций

$$\nu(\lambda, \xi; B_N(n)) = [1 - n\xi + i]\, \nu(\lambda; B_N(i)) + [n\xi - i]\, \nu(\lambda; B_N(i+1)),$$

$$\xi \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right],$$

где через $\nu(\lambda; B_N(i))$ обозначена нормированная спектральная функция оператора $B_N(i)$. Из определения (3.2) функций $u(z, \xi; N, T_n, Q_n)$ видно, что они непрерывны во всей области определения, причем по $z$ они голоморфны, а по $\xi$ — кусочно линейны.

Покажем, что множество функций $u(z, \xi; N, T_n, Q_n)$ и множество их производных $u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n)$ компактны относительно равномерной сходимости по $\xi \in [0, 1]$ и $z \in F$, где $F$ — любое ограниченное множество, расстояние от которого до вещественной оси строго больше нуля. Из неравенств $(\operatorname{Im} z = y)$

$$|N^{-1} \operatorname{Sp} R_z| \leqslant \frac{1}{|y|}, \quad \left|N^{-1} \frac{d}{dz} \operatorname{Sp} R_z\right| \leqslant \frac{1}{y^2}, \tag{3.4}$$

справедливых для резольвент любых самосопряженных операторов, и формулы (3.2) следует:

$$|u(z, \xi; N, T_n, Q_n)| \leqslant \frac{1}{|y|}, \quad |u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n| \leqslant \frac{1}{y^2}. \tag{3.5}$$

Так как операторы $B_N(i+1)$ и $B_N(i)$ отличаются на одномерный оператор $\tau_{i+1}(\cdot, q^{(i+1)})\, q^{(i+1)}$, то к их резольвентам $R_z(i+1)$ и $R_z(i)$ применима формула (2.4). Поэтому

$$\mathrm{Sp}\{R_z(i+1) - R_z(i)\} = -\frac{\tau_{i+1}(R_z^2(i)\, q^{(i+1)}, q^{(i+1)})}{1 + \tau_{i+1}(R_z(i)\, q^{(i+1)}, q^{(i+1)})},$$

откуда, согласно неравенству (2.5), получим:

$$|\mathrm{Sp}\{R_z(i+1) - R_z(i)\}| \leqslant \frac{1}{|y|}, \tag{3.6}$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi} u(z, \xi; N, T_n, Q_n)\right| \leqslant \frac{n}{N|y|}. \tag{3.7}$$

Так как функция $\frac{\partial}{\partial\xi} u(z, \xi; N, T_n, Q_n) = \frac{n}{N}\{\mathrm{Sp}\, R_z(i+1) - \mathrm{Sp}\, R_z(i)\}$, $\frac{i}{n} \leqslant \xi \leqslant \frac{i+1}{n}$, голоморфна по $z$, то, используя оценку Коши для производной голоморфной функции в центре круга через максимум ее модуля на окружности, получим согласно (3.6):

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi} u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n)\right| \leqslant \frac{4n}{Ny^2}. \tag{3.8}$$

Неравенства (3.5), (3.7) и (3.8), очевидно, гарантируют нужную нам компактность множеств $\{u(z, \xi; N, T_n, Q_n)\}$ и $\{u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n)\}$. Отметим, что до сих пор ограниченностью величин $\tau_i$ мы не пользовались.

Будем теперь рассматривать функции $u(z, \xi; N, T_n, Q_n)$ при $z$, лежащих в полуплоскостях $|\mathrm{Im}\, z| \geqslant 3T$, где $T$ — число, ограничивающее модули случайных величин $\tau_i$ (см. условие (3.0)).

Пусть $\tau(\xi)$ — определенная формулой (2.8) обобщенная обратная функции распределения $\sigma(x)$ случайной величины $\tau$ и $G$ — любое ограниченное множество, лежащее в полуплоскости $\mathrm{Im}\, z \geqslant 3T$.

Лемма 4. *Если выполнены условия* I, II, III, IV *и* (3.0), *то при* $N \to \infty$ *математическое ожидание величины*

$$\varphi_N = \sup_{\substack{t \in [0,1] \\ z \in G}} \left| u(z; \xi; N, T_n, Q_n) - m_0(z) + c \int_0^t \frac{\tau(\xi)\, u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n)}{1 + \tau(\xi)\, u(z, \xi; N, T_n, Q_n)}\, d\xi \right|$$

*стремится к нулю*: $\lim\limits_{N\to\infty} M\varphi_N = 0$.

Доказательство. Из формулы (3.2) и неравенства (3.6) следует, что при $\xi \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$

$$|u(z, \xi; N, T_n, Q_n) - N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(i)| \leqslant \frac{1}{Ny}. \tag{3.9}$$

Используя это неравенство и оценку Коши для производной голоморфной функции, получим также:

$$|u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n) - N^{-1} \operatorname{Sp} R_z^2(i)| \leqslant \frac{4}{Ny^2}. \tag{3.10}$$

Операторы $B_N(i+1)$ и $B_N(i)$ отличаются на одномерный оператор $\tau_{i+1}(\cdot, q^{(i+1)}) q^{(i+1)}$, и, следовательно, к их резольвентам $R_z(i+1)$ и $R_z(i)$ применима лемма 2. Используя эту лемму, мы можем преобразовать формулу (3.2) к такому виду:

$$u(z, \xi; N, T_n, Q_n) = N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(i) - \frac{n}{N} \frac{\tau_{i+1} N^{-1} \operatorname{Sp} R_z^2(i)}{1 + \tau_{i+1} N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(i)} \left(\xi - \frac{i}{n}\right) +$$

$$+ N^{-1} \theta_i(z) \delta_i(z, q^{(i+1)}, N), \tag{3.11}$$

где $0 \leqslant \theta_i(\xi) = n\left(\xi - \frac{i}{n}\right) \leqslant 1$ и

$$M|\delta_i(z, q^{(i+1)}, N)| \leqslant 2 \left| \frac{\tau_{i+1}}{y^2 [1 + \tau_{i+1} N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(i)]} \right| \varepsilon(N),$$

причем $\varepsilon(N) \to 0$ при $N \to \infty$. При $\operatorname{Im} z \geqslant 3T$ из оценки (3.4) и неравенства $|\tau_{i+1}| \leqslant T$ следует, что

$$|1 + \tau_{i+1} \operatorname{Sp} R_z(i)| \geqslant \frac{2}{3}, \tag{3.12}$$

и, в частности,

$$M|\delta_i(z, q^{(i+1)}, N)| \leqslant 3T\varepsilon(N). \tag{3.13}$$

Согласно формуле (2.9), $\tau_{i+1} = \tau(\xi, T_n)$ при $\xi \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, где $\tau(\xi, T_n)$ — функция, определенная равенством (2.8). Поэтому при $i \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$

$$\frac{n}{N} \frac{\tau_{i+1} N^{-1} \operatorname{Sp} R_z^2(i)}{1 + \tau_{i+1} N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(i)} \left(t - \frac{i}{n}\right) = \frac{n}{N} \int_{\frac{i}{n}}^{t} \frac{\tau(\xi, T_n) N^{-1} \operatorname{Sp} R_z^2(i)}{1 + \tau(\xi, T_n) N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(i)} d\xi.$$

Заменив в правой части этого равенства $\tau(\xi, T_n)$ на $\tau(\xi)$, $N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(i)$ на $u(z, \xi; N, T_n, Q_n)$ и $N^{-1} \operatorname{Sp} R_z^2(i)$ на $u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n)$ и оценив получающуюся при этом погрешность с помощью (3.9), (3.10), (3.12), получим неравенство

$$\left| \frac{n}{N} \frac{\tau_{i+1} N^{-1} \operatorname{Sp} R_z^2(i)}{1 + \tau_{i+1} N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(i)} \left( t - \frac{i}{n} \right) - \frac{n}{N} \int\limits_{\frac{i}{n}}^{t} \frac{\tau(\xi) u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n)}{1+\tau(\xi) u(z, \xi; N, T_n, Q_n)} d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{NT^2} \int\limits_{\frac{i}{n}}^{t} |\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)| \, d\xi + \frac{3}{N^2 T},$$

справедливое при всех $t \in \left[ \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$ и всех $z$ из полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 3T$. Так как $u\left(z, \frac{i}{n}; N, T_n, Q_n\right) = N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(i)$, то из последнего неравенства и формулы (3.11) следует, что

$$\left| u(z, t; N, T_n, Q_n) - u\left(z, \frac{i}{n}; N, T_n, Q_n\right) + \frac{n}{N} \int\limits_{\frac{i}{n}}^{t} \frac{\tau(\xi) u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n)}{1+\tau(\xi) u(z, \xi; N, T_n, Q_n)} d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{NT^2} \int\limits_{\frac{i}{n}}^{t} |\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)| \, d\xi + \frac{3}{N^2 T} + \frac{1}{N} \delta_i(z, q^{(i+1)}, N)$$

при всех $t \in \left[ \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$ и всех $z$ из полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 3T$. Складывая полученные неравенства, получим для функции

$$\varphi(z, t; N, T_n, Q_n) = u(z, t; N, T_n, Q_n) - m_0(z) + c \int\limits_0^t \frac{\tau(\xi) u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n)}{1+\tau(\xi) u(z, \xi; N, T_n, Q_n)} d\xi \tag{3.14}$$

такую оценку:

$$|\varphi(z, t; N, T_n, Q_n)| \leqslant \frac{n}{NT^2} \int\limits_0^1 |\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)| \, d\xi + |m_0(z) - u(z, 0; N, T_n, Q_n)| +$$

$$+ \frac{3}{NT} + \frac{1}{T} \left| c - \frac{n}{N} \right| + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n-1} |\delta_i(z, q^{(i+1)}, N)|,$$

откуда согласно (3.13) следует, что

$$|\varphi(z, t; N, T_n, Q_n)| \leqslant \frac{n}{NT^2} \int\limits_0^1 |\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)| \, d\xi + |m_0(z) - u(z, 0; N, T_n, Q_n)| +$$

$$+ \frac{3}{NT} + \frac{1}{T} \left| c - \frac{n}{N} \right| + \frac{3nT}{N} \varepsilon(N).$$

Из этого неравенства, формулы (3.3), условий I, II и леммы 3 выводим, что

$$\lim_{N \to \infty} |\varphi(z, t; N, T_n, Q_n)| = 0 \tag{3.15}$$

при каждых фиксированных $z$, $t$ ($\operatorname{Im} z \geqslant 3T$, $t \in [0, 1]$).

Заметим теперь, что из неравенств (3.5), (3.7), (3.8) следует, что функции $u(z, t; N, T_n, Q_n)$, $u'_z(z, t; N, T_n, Q_n)$, а следовательно, и $\varphi(z, t; N, T_n, Q_n)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Поэтому на множестве $0 \leqslant t \leqslant 1$; $z \in G$ можно для всех функций $\varphi(z, t; N, T_n, Q_n)$ выбрать конечную общую $\varepsilon$-сеть $t_1, z_1; t_2, z_2; \ldots t_{m_\varepsilon}, z_{m_\varepsilon}$, так что

$$\varphi_N = \sup_{\substack{t \in [0,1] \\ z \in G}} |\varphi(t, z; N, T_n, Q_n)| \leqslant \varepsilon + \max_{1 \leqslant i \leqslant m_\varepsilon} |\varphi(t_i, z_i; N, T_n, Q_n)|,$$

и, следовательно,

$$M\varphi_N \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} M|\varphi(z_i, t_i; N, T_n, Q_n)|.$$

Из этого неравенства при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ получим согласно (3.15), что $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}} M\varphi_N \leqslant \varepsilon$, откуда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, следует: $\lim\limits_{N\to\infty} M\varphi_N = 0$, что и требовалось доказать.

Из доказанной леммы, очевидно, следует, что обязательно существуют такие реализации $T'_n$, $Q'_n$, для которых

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\substack{t \in [0,1] \\ z \in G}} |\varphi(z, t; N, T'_n, Q'_n)| = 0. \tag{3.16}$$

Выше мы доказали компактность множества функций $u(z, t; N, T_n, Q_n)$ и $u'_z(z, t; N, T_n, Q_n)$. Поэтому из последовательности $u(z, t; N, T_n, Q_n)$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится к некоторой функции $u(z, t)$ равномерно по $t \in [0, 1]$ и $z \in F$, каково бы ни было ограниченное и замкнутое множество $F$, лежащее в верхней полуплоскости. Из равенства (3.16) следует, что при $z \in G$ и $t \in [0, 1]$ функция $u(z, t)$ удовлетворяет уравнению

$$u(z, t) = m_0(z) - c\int_0^t \frac{\tau(\xi)\, u'_z(z, \xi)}{1 + \tau(\xi)\, u(z; \xi)}\, d\xi. \tag{3.17}$$

Так как в верхней полуплоскости функция $u(z, \xi)$ голоморфна и имеет положительную мнимую часть, то обе части этого уравнения тоже голоморфны в верхней полуплоскости и, следовательно, совпадают всюду в верхней полуплоскости. Таким образом, уравнение (3.17) имеет по крайней мере одно решение, непрерывное по $t$, $z$ ($t \in [0, 1]$, $\operatorname{Im} z > 0$) и голоморфное по $z$ ($\operatorname{Im} z > 0$) при фиксированном $t$.

Обозначим через $K(\tau, z_0, R)$ множество функций $f(z, t)$, непрерывных по совокупности переменных $z, t$ в некотором цилиндре $0 \leqslant t \leqslant 1$; $|z - z_0| \leqslant R$, голоморфных по $z$ ($|z - z_0|) \leqslant R$) при любом фиксированном $t \in [0, 1]$ и удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{\substack{t \in [0,1] \\ |z - z_0| \leqslant R}} \left| \frac{\tau(t)}{1 + \tau(t) f(z, t)} \right| < \infty. \tag{3.18}$$

Отметим, что множеству $K(\tau, z_0, R)$ принадлежат, например, все функции $f(z, t)$ со строго положительной мнимой частью.

Слегка видоизменяя метод Хаара [6], мы докажем, что в множестве $K(\tau, z_0, R)$ уравнение (3.17) может иметь только одно решение. При этом мы предполагаем, что функция $\tau(\xi)$ монотонна, но не обязательно ограничена.

Лемма 5. *В множестве* $K(\tau, z_0, R)$ *уравнение* (3.17) *не может иметь двух различных решений.*

Доказательство. Пусть $u_1(z, t)$ и $u_2(z, t)$ — какие-нибудь решения уравнения (3.17), принадлежащие множеству $K(\tau, z_0, R)$. Обозначим через $\xi_0$ точную верхнюю границу множества $\xi \in [0, 1]$, обладающих тем свойством, что разность решений $u_1(z, t) - u_2(z, t) = v(z, t)$ тождественно равна нулю при $|z-z_0| \leqslant R$ и всех $t \in [0, \xi]$. Нам нужно доказать, что $\xi_0 = 1$. Допустим противное. Тогда функция $v(z, t)$ равна нулю в цилиндре $0 \leqslant t \leqslant \xi_0$, $|z-z_0| \leqslant R$, но при любом $h > 0$ в цилиндре $\xi_0 \leqslant t \leqslant \xi_0 + h$, $|z-z_0| \leqslant R$ найдутся точки, где $v(z, t) \neq 0$. Далее, из уравнения (3.17) следует, что

$$v(z, t) = \int_{\xi_0}^{t} [A(z, \xi)\, v(z, \xi) + B(z, \xi)\, v'_z(z, \xi)]\, d\xi \quad \text{при } \xi_0 \leqslant t \leqslant 1,\ |z-z_0| \leqslant R,$$

где голоморфные по $z$ функции

$$A(z, \xi) = \frac{c\tau^2(\xi)\, u'_{1z}(z, \xi)}{[1+\tau(\xi)\, u_1(z, \xi)]\,[1+\tau(\xi)\, u_2(z, \xi)]}, \qquad B(z, \xi) = -\frac{c\tau(\xi)}{1+\tau(\xi)\, u_1(z, \xi)}$$

равномерно ограничены в цилиндре $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $|z-z_0| \leqslant \frac{R}{2}$, что вытекает из неравенства (3.18), которому по условию удовлетворяют обе функции $u_1(z, \xi)$ и $u_2(z, \xi)$. Обозначим через $L$ верхнюю границу модулей $A(z, \xi)$, $B(z, \xi)$ и рассмотрим функцию $v(z, t)$ в конусе

$$\xi_0 \leqslant t \leqslant \xi_0 + H, \quad |z-z_0| \leqslant (\xi_0 + H - t)\frac{R}{2H}, \tag{3.19}$$

где $H = \min\left\{\frac{1}{2}\frac{R}{1+L},\ 1-\xi_0\right\}$. Она не может быть тождественно равна нулю в этом конусе, так как тогда, в силу аналитичности по $z$, она была бы равна нулю во всем цилиндре $\xi_0 \leqslant t \leqslant \xi_0 + H$, $|z-z_0| \leqslant R$, что противоречит определению $\xi_0$.

Поэтому в этом конусе модуль функции $e^{-2Lt} v(z, t)$ достигает положительного максимума в некоторой точке $t_1, z_1$. При достаточно малом $s > 0$ и любом комплексном $\alpha$, удовлетворяющем условию $|\alpha| \leqslant L+1$, точки $z_1 - \alpha s$, $t_1 - s$ лежат в конусе (3.19), и, следовательно, модуль функции $e^{-2L(t_1-s)} v(z_1 - \alpha s, t_1 - s)$ не больше модуля $e^{-2Lt_1} v(z_1, t_1)$. Так как функция $v(z, t)$ непрерывна во всем исходном цилиндре, то из интегральной формулы Коши для производных следует, что функция $v'_z(z, t)$ заведомо непрерывна в конусе (3.19). Поэтому при $s \to 0$

$$v(z_1 - \alpha s, t_1 - s) = v(z_1, t_1 - s) - \alpha s[v'_z(z_1, t_1) + o(1)]. \tag{3.20}$$

Далее имеем:

$$v(z_1, t_1) - v(z_1, t_1 - s) = \int_{t_1 - s}^{t_1} [A(z_1, \xi) v(z_1, \xi) + B(z_1, \xi) v'_z(z_1, \xi)] \, d\xi,$$

откуда при $s \to +0$ следует, что

$$v(z_1, t_1) - v(z_1, t_1 - s) = s[Av(z_1, t_1) + Bv'_z(z_1, t_1) + o(1)], \tag{3.21}$$

где $A = \lim\limits_{s \to +0} A(z_1, t_1 - s)$, $B = \lim\limits_{s \to +0} B(z_1, t_1 - s)$. Существование последних пределов гарантируют монотонность функции $\tau(\xi)$ и непрерывность функций $u_i(z, t)$, $u'_{iz}(z, t)$ $(i = 1, 2)$. Из формул (3.20) и (3.21) следует, что при $s \to +0$

$$e^{-2L(t_1 - s)} v(z_1 - \alpha s, t_1 - s) =$$
$$= e^{-2L(t_1 - s)} \{(1 - sA) v(z_1, t_1) + s(\alpha + B) v'_z(z_1, t_1) + s\, o(1)\} =$$
$$= e^{-2Lt_1} v(z_1, t_1) \left\{1 + 2Ls \left[1 - \frac{A}{2L} - \frac{\alpha + B}{2L} \cdot \frac{v'_z(z_1, t_1)}{v(z_1, t_1)} + o(1)\right]\right\},$$

и, если взять здесь $\alpha = -B - e^{i\varphi_0}$, где $\varphi_0 = \arg \dfrac{v'_z(z_1, t_1)}{v(z_1, t_1)}$, то

$$e^{-2L(t_1 - s)} v(z_1 - \alpha s, t_1 - s) =$$
$$= \left\{1 + 2Ls \left[1 - \frac{A}{2L} + \frac{1}{2L} \left| \frac{v'_z(z_1, t_1)}{v(z_1, t_1)} \right| + o(1)\right]\right\} e^{-2Lt_1} v(z_1, t_1).$$

Так как $|A| \leqslant L$, то при достаточно малых $s > 0$ вещественная часть выражения, стоящего в фигурных скобках, станет больше, чем $1 + \frac{2}{3} Ls$. Значит, и модуль этого выражения станет больше, чем $1 + \frac{2}{3} Ls$, откуда следует, что

$$|e^{-2L(t_1 - s)} v(z_1 - \alpha s, t_1 - s)| > |e^{-2Lt_1} v(z_1, t_1)| \tag{3.22}$$

при достаточно малых $s > 0$. С другой стороны, так как $|B| \leqslant L$, то $|\alpha| \leqslant L + 1$ и, следовательно, $z_1 - \alpha s$, $t_1 - s$ при малых $s > 0$ лежит в конусе (3.19), что несовместимо с неравенством (3.22), в правой части которого стоит максимум модуля функции $e^{-2Lt} v(z, t)$ в этом конусе. Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение $\xi_0 < 1$ неверно, что и требовалось доказать.

## § 4. Доказательство теоремы 1

В предыдущем параграфе мы установили существование такой последовательности $N'$ и реализаций $T'_n$, $Q'_n$, что $\lim\limits_{N' \to \infty} u(z, t; N', T'_n, Q'_n) = u(z, t)$, где $u(z, t)$ — решение уравнения (3.17). Рассмотрим соответствующую последовательность нормированных спектральных функций $\nu(\lambda, t; B_{N'}(n'))$. Согласно теоремам Хелли, из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $\nu'(\lambda)$ во всех ее точках непрерывности, причем, согласно формуле (3.3′),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu'(\lambda)}{\lambda - z} = \lim_{N' \to \infty} u(z, 1; N', T_n', Q_n') = u(z, 1).$$

Из этой формулы при $y \to +\infty$ следует, что $\nu'(+\infty) - \nu'(-\infty) = -i \lim_{y \to +\infty} yu(iy, 1)$, а непосредственно из уравнения (3.17), оценок (3.5) и определения (1.9) функции $m_0(z)$ следует, что $-i \lim_{y \to +\infty} yu(iy, 1) = -i \lim_{y \to +\infty} ym_0(iy) = \nu_0(+\infty) - \nu_0(-\infty)$. Поэтому

$$\nu'(+\infty) - \nu'(-\infty) = \nu_0(+\infty) - \nu_0(-\infty). \tag{4.1}$$

Формула обращения (1.8) позволяет по функции $u(z, 1)$ найти $\nu'(\lambda)$ с точностью до постоянного слагаемого, которое мы пока не знаем. В связи с этим мы введем функцию $\nu(\lambda; c) = \nu'(\lambda) + \nu_0(-\infty) - \nu'(-\infty)$, которая, во-первых, имеет то же преобразование Стильтьеса $u(z, 1)$, что $\nu'(\lambda)$, и, во-вторых, имеет согласно (4.1) те же пределы на $\pm\infty$, что $\nu_0(\lambda)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu(\lambda; c)}{\lambda - z} = u(z, 1), \tag{4.2}$$

$$\nu(+\infty; c) = \nu_0(+\infty), \quad \nu(-\infty; c) = \nu_0(-\infty). \tag{4.3}$$

Таким образом, согласно формуле обращения (1.8), во всех точках непрерывности

$$\nu(\lambda; c) = \nu_0(-\infty) + \lim_{\mu \to -\infty} \left\{ \lim_{y \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\lambda} \operatorname{Im} u(x + iy, 1)\, dx \right\}. \tag{4.4}$$

Для доказательства первых двух утверждений теоремы 1 нам нужно показать, что при $N \to \infty$ последовательность $\nu(\lambda; B_N(n))$ сходится по вероятности к $\nu(\lambda; c)$ во всех ее точках непрерывности. Нетрудно заметить, что для этого достаточно доказать справедливость при любом $\varepsilon > 0$ следующих равенств:

$$\lim_{N \to \infty} P\{ |\nu(\lambda_1; B_N(n)) - \nu(\lambda_0; B_N(n)) - \nu(\lambda_1; c) + \nu(\lambda_0; c)| < \varepsilon \} = 1, \tag{4.5}$$

$$\lim_{N \to \infty} P\{ \nu_0(-\infty) - \varepsilon < \nu(\lambda; B_N(n)) < \nu_0(+\infty) + \varepsilon \} = 1, \tag{4.6}$$

где $\lambda_1$ и $\lambda_0$ — любые фиксированные точки непрерывности функции $\nu(\lambda; c)$, а $\lambda$ — любое фиксированное вещественное число. Сначала мы установим справедливость формулы (4.5), а затем докажем равенство (4.6).

Положим для краткости $\Delta(\lambda; c) = \nu(\lambda; c) - \nu(\lambda_0; c)$, $\Delta(\lambda; B_N(n)) = \nu(\lambda; B_N(n)) - \nu(\lambda_0; B_N(n))$, где $\lambda_0$ — любая фиксированная точка непрерывности функции $\nu(\lambda; c)$. Допустим, что формула (4.5) неверна. Тогда найдется такая точка непрерывности $\lambda_1$ функции $\nu(\lambda; c)$, что при некотором $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} P\{|\Delta(\lambda_1; B_N(n)) - \Delta(\lambda; c)| \geqslant \varepsilon\} = \delta > 0$$

и, следовательно, существует такая подпоследовательность $N = N_k$, для которой

$$P\{|\Delta(\lambda_1; B_N(n)) - \Delta(\lambda; c)| \geqslant \varepsilon\} > \frac{\delta}{2}. \tag{4.7}$$

С другой стороны, в силу леммы 4 по данному $r$ найдется такое $N(r)$, что при $N > N(r)$

$$P\left\{\sup_{\substack{t\in[0,1]\\ z\in G}} \left| u(z, t; N, T_n, Q_n) - m_0(z) + c\int_0^t \frac{\tau(\xi)\, u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n)}{1+\tau(\xi)\, u(z, \xi; N, T_n, Q_n)}\, d\xi \right| < \frac{1}{r}\right\} > 1 - \frac{\delta}{4}. \tag{4.8}$$

Поэтому из последовательности $N_k$ можно выделить такую подпоследовательность $N_r'$, что при $N = N_r'$ выполняются оба неравенства (4.7) и (4.8). Так как всегда $P\{\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}\} \geqslant P\{\mathfrak{A}\} + P\{\mathfrak{B}\} - 1$, то при $N = N_r'$ вероятность одновременного осуществления неравенств

$$|\Delta(\lambda_1; B_N(n)) - \Delta(\lambda_1; c)| \geqslant \varepsilon, \tag{4.9}$$

$$\sup_{\substack{t\in[0,1]\\ z\in G}} \left| u(z, t; N, T_n, Q_n) - m_0(z) + c\int_0^t \frac{\tau(\xi)\, u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n)}{1+\tau(\xi)\, u(z, \xi; N, T_n, Q_n)}\, d\xi \right| < \frac{1}{r} \tag{4.10}$$

не меньше, чем $\frac{\delta}{2} + 1 - \frac{\delta}{4} - 1 = \frac{\delta}{4} > 0$. Значит, при всех $N = N_r'$ обязательно существуют такие реализации $T_n''$, $Q_n''$, при которых имеют место оба неравенства (4.9), (4.10).

Из компактности множеств $\{u(z, \xi; N, T_n, Q_n)\}$, $\{u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n)\}$ и теорем Хелли следует, что из последовательности $N_r'$ можно выделить такую подпоследовательность $N_r''$, что $\lim\limits_{N_r''\to\infty} u(z, t; N_r'', T_n'', Q_n'') = u_1(z, t)$ равномерно по $t \in [0, 1]$, $z \in G$ и во всех точках непрерывности $\lim\limits_{N_r''\to\infty} \nu(\lambda; B_{N_r''}(n'')) = \tilde{\nu}(\lambda; c)$. При этом согласно (4.9)

$$|\tilde{\nu}(\lambda_1; c) - \tilde{\nu}(\lambda_0; c) - \nu(\lambda_1; c) + \nu(\lambda_0; c)| \geqslant \varepsilon, \tag{4.11}$$

согласно (4.10) функция $u_1(z, t)$ удовлетворяет уравнению (3.17), и согласно (3.3')

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\nu}(\lambda; c)}{\lambda - z} = u_1(z, 1).$$

Так как уравнение (3.17) не может иметь двух различных решений (лемма 5), то $u_1(z, t) \equiv u(z, t)$, откуда при $t = 1$ получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\widetilde{\nu}(\lambda;\ c)}{\lambda - z} \equiv u(z,\ 1) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu(\lambda;\ c)}{\lambda - z},$$

что противоречит неравенству (4.11). Следовательно, сделанное предположение неверно, и формула (4.5) верна.

Перейдем к доказательству равенства (4.6). Случайные части операторов $B_N(n)$ удовлетворяют, очевидно, неравенствам *

$$-\sum_{i=1}^{n} |\tau_i|(\cdot,\ q^{(i)})\,q^{(i)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \tau_i(\cdot,\ q^{(i)})\,q^{(i)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\tau_i|(\cdot,\ q^{(i)})\,q^{(i)}. \tag{4.12}$$

Пусть $E(\lambda)$ — разложение единицы неотрицательного оператора $D = \sum_{i=1}^{n} |\tau_i|(\cdot,\ q^{(i)})\,q^{(i)}$, $l$ — произвольное положительное число и $D_1 = \int_0^l \lambda\, dE(\lambda)$, $D_2 = \int_l^\infty \lambda\, dE(\lambda)$, так что $D = D_1 + D_2$. Ясно, что $\|D_1\| \leqslant l$, а число отличных от нуля собственных значений (т. е. размерность области значений) оператора $D_2$ равно $N - \operatorname{Sp} E(l)$. Учитывая это и неравенства (4.12), мы можем написать для интересующего нас оператора $B_N(n)$ следующие неравенства:

$$A_N - lI - D_2 \leqslant B_N(n) \leqslant A_N + lI + D_2. \tag{4.13}$$

Нормированные спектральные функции операторов $A_N \pm lI$ равны $\nu(\lambda \pm l;\ A_N)$, где $\nu(\lambda;\ A_N)$ — нормированная спектральная функция оператора $A_N$. Так как добавление оператора $D_2$ может изменить число собственных значений, лежащих в каком-нибудь интервале, не более, чем на размерность области значений оператора $D_2$, то нормированная спектральная функция оператора, стоящего в левой (правой) части неравенства (4.13), не больше чем $\nu(\lambda + l;\ A_N) + \frac{N - \operatorname{Sp} E(l)}{N}$ $\left(\text{не меньше, чем } \nu(\lambda - l;\ A_N) - \frac{N - \operatorname{Sp} E(l)}{N}\right)$. Поэтому для интересующей нас нормированной спектральной функции $\nu(\lambda;\ B_N(n))$ оператора $B_N(n)$ справедливы оценки:

$$\nu(\lambda - l;\ A_N) - [1 - N^{-1} \operatorname{Sp} E(l)] \leqslant \nu(\lambda;\ B_N(n)) \leqslant \nu(\lambda + l;\ A_N) + [1 - N^{-1} \operatorname{Sp} E(l)]. \tag{4.14}$$

Далее имеем:

$$\operatorname{Sp} D = \sum_{i=1}^{n} |\tau_i|(q^{(i)},\ q^{(i)}) = \int_0^\infty \lambda d \operatorname{Sp} E(\lambda) \geqslant l \int_l^\infty d \operatorname{Sp} E(\lambda) = l\,[N - \operatorname{Sp} E(l)],$$

---

* Мы пишем для эрмитовых матриц $A \leqslant B$, если все собственные значения оператора $B - A$ неотрицательны.

так что

$$1-N^{-1}\operatorname{Sp}E(l)\leqslant\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}|\tau_i|(q^{(i)},q^{(i)}),$$

откуда, учитывая ограниченность $\tau$ (условие (3.0)), получим:

$$1-N^{-1}\operatorname{Sp}E(l)\leqslant\frac{cT}{2l}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(q^{(i)},q^{(i)}).$$

Из условия III следует, что случайная величина $(q^{(i)}, q^{(i)})$ имеет математическое ожидание, не большее $[1+\varepsilon_1(N)]^{-1}$, и дисперсию, не большую, чем $[2+\varepsilon_2(N)+\varepsilon_3(N)]^{-1}$. Так как случайные величины $(q^{(i)}, q^{(i)})$ независимы, то из неравенства Чебышева следует, что $P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(q^{(i)},q^{(i)})>2\right\}\leqslant\frac{3}{n}$ и, следовательно, $P\left\{[1-N^{-1}\operatorname{Sp}E(l)]\leqslant\frac{cT}{l}\right\}\geqslant1-\frac{3}{n}$. Отсюда, учитывая неравенства (4.14), заключаем, что

$$\lim_{N\to\infty}P\left\{\nu(\lambda-l;A_N)-\frac{cT}{l}\leqslant\nu(\lambda;B_N(n))\leqslant\nu(\lambda+l;A_N)+\frac{cT}{l}\right\}=1,$$

и так как, по условию, $\nu(\lambda; A_N)\to\nu_0(\lambda)$ при $N\to\infty$ и $\nu_0(-\infty)\leqslant\nu_0(\lambda)\leqslant\leqslant\nu_0(+\infty)$, то

$$\lim_{N\to\infty}P\left\{\nu_0(-\infty)-\frac{cT}{l}\leqslant\nu(\lambda;B_N(n))\leqslant\nu_0(+\infty)+\frac{cT}{l}\right\}=1,$$

откуда в силу произвольности $l>0$ следует нужная нам формула (4.6).

Итак, оба первых утверждения теоремы 1 доказаны. Существование и единственность решения уравнения (3.17) были установлены раньше. Эквивалентность этого уравнения уравнению в частных производных (1.12) очевидна. Что же касается формулы (1.13), то ее проще всего непосредственно проверить.

Таким образом, теорема 1 доказана полностью для случая ограниченных $\tau_i$.

Распространение ее на произвольные случайные величины будет дано в следующем параграфе.

В связи с доказанной теоремой заметим, что

1) Числа $\nu(-\infty; c)$ и $\nu(+\infty; c)$ равны относительному числу собственных значений операторов $B_N(n)$, ушедших соответственно в $-\infty$ и $+\infty$. Они, как было установлено выше, равны относительному числу собственных значений операторов $A_N$, ушедших в $-\infty$ и $+\infty$.

2) Вместо условия I достаточно потребовать сходимость $\nu(\lambda; A_N)$ к $\nu_0(\lambda)$ по вероятности, считая $A_N$ случайным оператором, не зависящим от $\tau_i$, $q^{(i)}$.

3) Можно показать, что решение уравнения (1.13) всегда находится методом последовательных приближений, причем каждое приближение имеет положительную мнимую часть при $\operatorname{Im}z>0$.

## § 5. Обобщения

Пусть теперь $\tau$ — произвольные независимые случайные величины с одной и той же функцией распределения вероятностей $\sigma(x)$. Одновременно с ними будем рассматривать случайные величины $\tau^T$, определенные равенствами

$$\tau^T = \begin{cases} -T, & \text{если } \tau < -T, \\ \tau, & \text{если } -T \leqslant \tau \leqslant T, \\ T, & \text{если } T < \tau, \end{cases}$$

где $T$ — произвольное положительное число. Функция распределения вероятностей $\sigma^T(x)$ случайных величин $\tau_i^T$ и обратная ей функция $\tau^T(\xi) = \inf_x \{x : \sigma^T(x) \geqslant \xi\}$ выражаются через функции $\sigma(x)$ и $\tau(\xi) = \inf_x \{x : \sigma(x) \geqslant \xi\}$ следующим образом:

$$\sigma^T(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -T, \\ \sigma(x) & \text{при } -T < x \leqslant T, \\ 1 & \text{при } T < x, \end{cases} \qquad \tau^T(\xi) = \begin{cases} -T & \text{при } 0 < \xi \leqslant \sigma(-T), \\ \tau(\xi) & \text{при } \sigma(-T) < \xi \leqslant \sigma(T), \\ T & \text{при } \sigma(T) < \xi \leqslant 1. \end{cases} \tag{5.1}$$

Пусть $T_n$, $Q_n$ — некоторая реализация случайных величин $\tau_j$ (а следовательно, и $\tau_j^T$) и случайных векторов $q^{(j)}$. Так же, как это было сделано в § 3, построим цепочки операторов $B_N(i)$ и $B_N^T(i)$. Ясно, что операторы $B_N^T(i)$ получаются из $B_N(i)$ заменой в формуле (3.1) величин $\tau_j$ на $\tau_j^T$. Поэтому $B_N(i) - B_N^T(i) = \sum_{\alpha=1}^{n} (\tau_\alpha - \tau_\alpha^T)\, q^{(\alpha)}(\cdot, q^{(\alpha)})$, откуда видно, что размерность области значений оператора $B_N(i) - B_N^T(i)$ не превышает числа тех $\tau_j$, абсолютоная величина которых больше $T$, т. е. числа $n\{\sigma(-T, T_n) + 1 - \sigma(T, T_n)\}$, где $\sigma(x, T_n)$ — экспериментальная функция распределения, построенная по реализации $T_n$ случайных величин $\tau_j$. Поэтому нормированные спектральные функции $\nu(\lambda; B_N(i))$ и $\nu(\lambda; B_N^T(i))$ операторов $B_N(i)$ и $B_N^T(i)$ удовлетворяют неравенству

$$|\nu(\lambda; B_N(i)) - \nu(\lambda; B_N^T(i))| \leqslant \frac{n}{N} \{\sigma(-T, T_n) + 1 - \sigma(T, T_n)\}. \tag{5.2}$$

Пусть, далее, $u(z, \xi; N, T_n, Q_n)$ и $u^T(z, \xi; N, T_n, Q_n)$ — функции, построенные по формулам (3.2) для цепочек операторов $B_N(i)$ и $B_N^T(i)$ соответственно. Из их определения и неравенств (5.2) следует, что равномерно по $z$ и $\xi$

$$|u(z, \xi; N, T_n, Q_n) - u^T(z, \xi; N, T_n, Q_n)| \leqslant \frac{1}{\pi y} \cdot \frac{n}{N} \{\sigma(-T, T_n) + 1 - \sigma(T, T_n)\}. \tag{5.3}$$

Так как случайные величины $\tau_j^T$ ограничены, то к функциям $u^T(z, \xi; N, T_n, Q_n)$ применимы все результаты предыдущих параграфов, откуда, в частности, следует, что при $N \to \infty$ они по вероятности сходятся к функции $u^T(z, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$u^T(z, t) = m_0(z) - c \int_0^t \frac{\tau^T(\xi)\, {u^T}'_z(z, \xi)}{1 + \tau^T(\xi)\, u^T(z, \xi)}\, d\xi. \tag{5.4}$$

Согласно теореме Гливенко, правая часть неравенства (5.3) при $N\to\infty$ почти наверное стремится к $\frac{c}{\pi y}\{\sigma(-T)+1-\sigma(T)\}$. Поэтому, если $T_1>T$, то $|u^{T_1}(z,t)-u^T(z,t)|\leqslant\frac{c}{\pi y}\{\sigma(-T)-\sigma(-T_1)+\sigma(T_1)-\sigma(T)\}$, откуда видно, что при $T\to\infty$ функции $u^T(z,t)$ сходятся к некоторой функции $u(z,t)$ равномерно по $t\in[0,1]$ и $z$ в области $\operatorname{Im} z>\delta$, где $\delta$ — любое положительное число.

Совершенно так же, как было доказано неравенство (2.5), устанавливается, что

$$\left|\frac{\tau^T(\xi)\,u_z^{T'}(z,\xi)}{1+\tau^T(\xi)\,u^T(z,\xi)}\right|\leqslant\frac{1}{|y|}\quad(y=\operatorname{Im} z).$$

Это неравенство позволяет сделать предельный переход под знаком интеграла в формуле (5.4) при $T\to\infty$. Так как при $T\to\infty$ $u^T(z,t)\to u(z,t)$, $u_z^{T'}(z,t)\to u_z'(z,t)$ и, согласно (5.1), $\tau^T(\xi)\to\tau(\xi)$, то, совершая предельный переход в формуле (5.4), мы убеждаемся, что функция $u(z,t)$ удовлетворяет уравнению

$$u(z,t)=m_0(z)-c\int_0^t\frac{\tau(\xi)\,u_z'(z,\xi)}{1+\tau(\xi)\,u(z,\xi)}\,d\xi. \tag{5.5}$$

Далее имеем:

$$|u(z,t;\,N,T_n,Q_n)-u(z,t)|\leqslant|u(z,t;\,N,T_n,Q_n)-u^T(z,t;\,N,T_n,Q_n)|+$$
$$+|u^T(z,t;\,N,T_n,Q_n)-u^T(z,t)|+|u^T(z,t)-u(z,t)|,$$

откуда, учитывая неравенство (5.3), заключаем, что при $N\to\infty$ функции $u(z,t;\,N,T_n,Q_n)$ сходятся по вероятности к функции $u(z,t)$. Непосредственно из уравнения (5.4) следует, что $-\lim\limits_{y\to\infty}y\operatorname{Im}u^T(z,t)=-\lim\limits_{y\to\infty}y\operatorname{Im}m_0(z,t)=$ $=\nu_0(+\infty)-\nu_0(-\infty)$, откуда, используя (5.2), заключаем, что $-\lim\limits_{y\to\infty}y\operatorname{Im}u(z,t)=\nu_0(\infty)-\nu_0(-\infty)>0$, и, следовательно, $\operatorname{Im}u(z,t)\neq0$ при всех $t\in[0,1]$ и $z$, лежащих строго в верхней полуплоскости. Значит, функция $u(z,t)$ удовлетворяет условию (3.18).

Итак, мы показали, что при $N\to\infty$ последовательность функций $u(z,t;\,N,T_n,Q_n)$ сходится по вероятности к функции $u(z,t)$, которая является единственным решением уравнения (5.5), удовлетворяющим условию (3.18). Таким образом, все результаты § 3 обобщены на случай неограниченных $\tau$. Отсюда совершенно так же, как в § 4, заключаем, что приращение $\nu(\lambda_1;\,B_N(n))-\nu(\lambda_0;\,B_N(n))$ при $N\to\infty$ сходится по вероятности к

$$\lim_{\eta\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\operatorname{Im}u(\xi+i\eta;\,1)\,d\xi,$$

а из неравенств (5.2) и результатов § 4 следует, что при любом $\varepsilon>0$

$$\lim_{N\to\infty}P\{\nu_0(-\infty)-\varepsilon\leqslant\nu(\lambda;\,B_N(n))\leqslant\nu_0(+\infty)+\varepsilon\}=1.$$

Таким образом, теорема 1 доказана и для неограниченных $\tau$.

В заключение сформулируем результаты, аналогичные теореме 1, для двух других ансамблей случайных матриц.

Пусть $q^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — независимые, одинаково распределенные случайные векторы единичной длины и $\tau(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — непрерывная вещественная функция, причем $\sup\limits_{t \in [0,1]} \tau(t) > -1$. Рассмотрим эрмитовы матрицы $B_N(n)$ вида

$$B_N(n) = (I + \tau(1) P_n)\left(I + \tau\left(\frac{n-1}{n}\right) P_{n-1}\right) \ldots$$

$$\ldots \left(I + \tau\left(\frac{1}{n}\right) P_1\right) A_N \left(I + \tau\left(\frac{1}{n}\right) P_1\right) \ldots (I + \tau(1) P_n),$$

где $P_k = (\cdot\,, q^{(k)})\, q^{(k)}$ — оператор проектирования на вектор $q^{(k)}$, $A_N$ — некоторый неслучайный эрмитов оператор.

Теорема 2. *Если выполнены условия* I, II, III, *из* § 1, *то нормированные спектральные функции операторов* $B_N(n)$ *при* $N \to \infty$ *сходятся по вероятности к некоторой предельной функции* $\nu(\lambda; c)$ *во всех ее точках непрерывности, причем преобразование Стильтьеса функции* $\nu(\lambda; c)$ *равно взятому при* $t = 1$ *решению уравнения*

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \ln [1 - \alpha(t) z u(z, t)] = 0,$$

$$u(z, 0) = m_0(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu_0(\lambda)}{\lambda - z}, \qquad \alpha(t) = \frac{\tau(t)[2 + \tau(t)]}{[1 + \tau(t)]^2},$$

*где* $\nu_0(\lambda)$ — *предел нормированных спектральных функций операторов* $A_N$, *существование которого обеспечено условием* II.

*Решение этого уравнения существует, единственно (в классе функций с положительной мнимой частью при* $\operatorname{Im} z > 0$) *и в неявном виде задается формулой*

$$u(z, t) = z^{-1} w m_0(w), \quad \text{где } w = z \exp\left\{ c \int_0^t \frac{\alpha(\xi)\, d\xi}{1 - \alpha(\xi) z u(z, t)} \right\}.$$

*Значения функции* $\nu(\lambda; c)$ *в точках* $\pm\infty$ *совпадают со значениями* $\nu_0(\lambda)$: $\nu(\pm\infty; c) = \nu_0(\pm\infty)$.

Рассмотрим теперь ансамбль унитарных матриц вида

$$U_N(n) = V_N \prod_{k=1}^{n} \left[ (I - P_k) + P_k \exp\left\{ i\tau\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \right],$$

где $P_k$ — такие же проекторы, что и выше, $\tau(t)$ — непрерывная на сегменте $[0, 2\pi]$ функция, $V_N$ — некоторый неслучайный унитарный оператор и сомножители в произведении выписываются в порядке возрастания индекса $k$.

Нормированной спектральной функцией унитарного оператора называется функция $\nu(\lambda)$ $(0 < \lambda \leqslant 2\pi)$, равная числу собственных значений этого оператора, лежащих на дуге $0 \leqslant \varphi < \lambda$ единичной окружности, деленному на размерность пространства. Вместо преобразования Стильтьеса здесь естественно рассматривать функцию

$$n(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\nu(\lambda), \tag{5.6}$$

по которой $\nu(\lambda)$ находится с помощью следующей формулы обращения:

$$\nu(\lambda_2) - \nu(\lambda_1) = \lim_{r \to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \operatorname{Re} n(re^{-i\theta})\, d\theta.$$

Теорема 3. *Если при $N \to \infty$ нормированные спектральные функции операторов $V_N$ стремятся к функции $\nu_0(\lambda)$ во всех ее точках непрерывности и выполнены условия* I *и* III *из* § 1, *то последовательность нормированных спектральных функций операторов $U_N(n)$ при $N \to \infty$ сходится по вероятности к некоторой функции $\nu(\lambda; c)$ во всех ее точках непрерывности, причем соответствующая $\nu(\lambda; c)$ по формуле* (5.6) *функция $n(z; c)$ равна взятому при $t = 1$ решению уравнения*

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} + 2z \frac{\partial}{\partial z} \ln\left[1 + iu(z, t) \operatorname{tg} \frac{\tau(t)}{2}\right], \quad u(z, 0) = n_0(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\nu_0(\lambda).$$

*Это уравнение однозначно разрешимо (в классе функций с положительной вещественной частью при $|z| < 1$), и его решение в неявном виде задается формулой*

$$u(z, t) = n_0\left(z \exp\left\{-2c \int_0^t \frac{i \operatorname{tg} \frac{\tau(\xi)}{2}}{1 + iu(z, t) \operatorname{tg} \frac{\tau(\xi)}{2}} d\xi\right\}\right).$$

(Поступила в редакцию 4/XI 1966 г.)

## Литература

1. F. Y. Dyson, The dynamics of disordered linear chain, Physical Review, **92**, № **6** (1953), 1331—1338.
2. И. М. Лифшиц, О вырожденных регулярных возмущениях, Ж. эксп. и теор. физики, **17** (1947), 1076—1089.
3. И. М. Лившиц, О структуре энергетического спектра и квантовых состояниях неупорядоченных конденсированных систем, Успехи физ. наук, **83** (1964), 617—663.
4. E. P. Wigner, On the distribution of the roots of certain symmetric matrices, Ann. Math., **67** (1958), 325—327.
5. Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1950.
6. А. Д. Мышкис, Единственность задачи Коши, Успехи матем. наук, **III**, вып. **2** **(24)** (1948), 3—46.