Stochastik II
Stochastische Prozesse
Wintersemester 2016/17

Prof. Dr. U. Rösler
S. Hallmann

Blatt 2

Aufgabe 1 (Transformation von Markovketten)

(a) Seien $E, F \neq \emptyset$ abzählbare Mengen, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum E und $g : E \to F$ sei injektiv. Zeigen Sie, dass $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ebenfalls eine Markovkette ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und einer Funktion g so an, dass $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Markovkette ist.

Aufgabe 2 (Markovketten in der Genetik)

Ein Pflanzengen besitze die Allele A und a. Ein klassisches Verfahren zur Züchtung reinrassiger Pflanzen vom Genotyp AA bzw. aa ist die Selbstbefruchtung. Wir bezeichnen den Genotyp der Pflanze in der n-ten Generation mit X_n und nehmen an, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette bildet. Der Übergang einer Generation zur nächsten ist gegeben durch die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(X_{n+1} = AA|X_n = Aa) = 1/4 = P(X_{n+1} = aa|X_n = Aa)$$
$$P(X_{n+1} = Aa|X_n = Aa) = 1/2$$
$$P(X_{n+1} = AA|X_n = AA) = 1 = P(X_{n+1} = aa|X_n = aa).$$

(a) Geben Sie den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix Π der Markovkette an.

(b) Bestimmen Sie Π^n für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Wahrscheinlichkeit $P(X_n = Aa|X_0 = Aa)$.

Aufgabe 3 (Regenschirme)
Ein Dozent an der Uni Kiel besitzt zwei Regenschirme, die sich stets in seiner Wohnung oder in seinem Büro befinden. Der Dozent geht an jedem Morgen von zu Hause in sein Büro und kehrt abends zurück.
Regnet es zu Beginn eines Arbeitswegs, so nimmt er einen Schirm mit, wenn einer vorhanden ist. Er achtet aber nicht darauf, dass stets ein Schirm an jedem Ort ist.
Es regne in Kiel stets mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$.

(a) Bezeichne X_n die Anzahl der Schirme am Aufenthaltsort des Dozenten zum Zeitpunkt n. Geben Sie eine passende Modellierung für den Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mittels Markovketten an.

(b) Nehmen Sie an, dass der Dozent an einem Morgen vor dem Losgehen einen Schirm im Büro und einen zu Hause hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat der Dozent für seinen Arbeitsweg am nächsten Morgen wieder genau einen Schirm zu Hause?

(c) Finden Sie eine invariante Verteilung, d.h. eine Verteilung ν auf $\{0, 1, 2\}$ so, dass für die Markovkette mit Startverteilung ν gilt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ auch X_n die Verteilung ν besitzt.

Aufgabe 4
Sei $\overline{\Pi}$ eine stochastische 2x2-Matrix. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\overline{\Pi}$ ist eine 2-Schritt-Übergangsmatrix, d.h. es existiert eine stochastische Matrix Π mit $\overline{\Pi} = \Pi^2$.

(ii) Die Spur von $\overline{\Pi}$, d.h. Summe der Hauptdiagonalelemente, ist ≥ 1.

Hinweis: Die Rechnungen werden transparenter und einfacher, wenn Sie an die Diagonalisierung von Matrizen denken.

Abgabe bitte bis spätestens Freitag, den 11. November, 12:00 Uhr im Postfach „Hallmann“ (3. Stock Math. Sem.).