Stochastik II
Stochastische Prozesse
Wintersemester 2016/17

Prof. Dr. U. Rösler
S. Hallmann

Blatt 1

Aufgabe 1 (Wald-Identität)
Seien $T, X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, reelle Zufallsgrößen in $\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$. Es sei weiter $\mathbb{P}(T \in \mathbb{N}_0) = 1$ und es seien $X_1, X_2, \ldots$ identisch verteilt. Wir setzen

$$S := \sum_{n=1}^{T} X_n.$$

Zeigen Sie: $S \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X_1)$.

Aufgabe 2 (Blackwell-Girshick)
Seien $T, X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, reelle Zufallsgrößen in $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$. Es sei weiter $\mathbb{P}(T \in \mathbb{N}_0) = 1$ und es seien $X_1, X_2, \ldots$ identisch verteilt, sowie S wie in Aufgabe 1.
Zeigen Sie: $S \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ und $\mathbb{V}ar(S) = (\mathbb{E}(X_1))^2 \mathbb{V}ar(T) + \mathbb{E}(T)\mathbb{V}ar(X_1)$.

Aufgabe 3
Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein Galton-Watson-Prozess mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$.
Es seien $\mathbb{E}(Z_1) =: \mu < \infty$ und $\mathbb{V}ar(Z_1) =: \sigma^2$.
Verifizieren Sie:

$$\mathbb{V}ar(Z_n) = \begin{cases} \frac{\sigma^2 \mu^{n-1}(\mu^n - 1)}{\mu - 1}, & \text{falls } \mu \neq 1 \\ n\sigma^2, & \text{falls } \mu = 1. \end{cases}$$

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass für jeden GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit $p_1 \neq 0$ gilt:

$$\frac{p_0}{1 - p_1} \leq q \leq \frac{p_0}{1 - p_0 - p_1}.$$

Abgabe bitte bis spätestens Freitag, den 04. November, 12:00 Uhr im Postfach „Hallmann“ (3. Stock Math. Sem.).