Zinsmodelle

Mathias Vetter

16. Januar 2017

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Nullkuponanleihen und abgeleitete Größen

In diesem Kapitel befassen wir uns mit Anleihen und von diesen abgeleiteten Größen. Anleihen sind Finanzgeschäfte, bei denen dem Anleger zur Fälligkeit ein festgelegter Betrag ausgezahlt wird. Da ein Euro heute einen anderen Wert als morgen, übernächsten Monat oder in drei Jahren besitzt, muss bei allen Geschäften, die über kurze oder lange Zeiträume getätigt werden, eingepreist werden, wie sich der Wert eines Euros über diesen Zeitraum vermutlich entwickelt. Typischerweise werden dabei Inflationseffekte berücksichtigt, wodurch der Wert einer (normierten) Anleihe mit Fälligkeit T zur Zeit t meist geringer als 1 Euro ist.

Definition 1.1. Der Wert eines zur Fälligkeit T ausgezahlten Euros zur Zeit t wird mit $P(t,T)$ bezeichnet. Wir nehmen an, dass zu jedem Paar (t,T) mit $t \leq T$ eine derartige *Nullkuponanleihe* (kurz: *Anleihe* bzw. T-*Anleihe*) existiert. Außerdem gelte $P(T,T) = 1$ für alle T, und es sei $P(t,T)$ positiv und differenzierbar in T.

Bemerkung 1.2.

(i) Formal ist $P(t,T)$ ein stochastischer Prozess, d.h. wir nehmen an, dass ein zu Grunde liegender filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ existiert, der die üblichen Hypothesen erfüllt und so dass $P(t,T)$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist.

(ii) Obwohl grundsätzlich einsichtig, ist insbesondere die Bedingung $P(T,T) = 1$ in der Praxis problematisch, da der Verkäufer der Anleihe zwischen dem Zeitpunkt des Verkaufs t und der Fälligkeit T bankrott gehen kann. Es ist daher sinnvoll, Modelle zu verwenden, die ein derartiges Ausfallrisiko berücksichtigen. Ein Einstieg hierzu findet sich in Kapitel 12 in Filipović (2009).

(iii) Wir verzichten auf die Annahme $P(t,T) \leq 1$ und erlauben grundsätzlich auch negative Zinssätze. Dies ist insbesondere mit Blick auf die heutigen Anleihenmärkte sinnvoll.

Beispiel 1.3. Ein typisches Beispiel für Zinstermingeschäfte sind *Forward Rate Agreements (FRA)* zwischen zwei Parteien. Diese basieren auf drei Zeitpunkten: Die aktuelle Zeit wird mit t bezeichnet, der eigentliche Beginn des Geschäftes mit $T \geq t$ und die spätere Fälligkeit mit $S \geq T$. Formal funktioniert ein FRA wie folgt:

- Zum Zeitpunkt t verkauft der Käufer eine in T fällige Anleihe und erhält dafür $\frac{P(t,T)}{P(t,S)}$ in S fällige Anleihen. Zum Zeitpunkt des Kaufes fließt also kein Geld.

- Zum Zeitpunkt T bezahlt der Käufer 1 Euro.
- Zum Zeitpunkt S erhält der Käufer $\frac{P(t,T)}{P(t,S)}$ Euro.

(In der Praxis finden oft nur die letzten beiden Zahlungen statt.) Ohne ein FRA würde der Käufer zum Zeitpunkt T am regulären Anleihenmarkt 1 Euro bezahlen und also $\frac{1}{P(T,S)}$ Euro zum Zeitpunkt S erhalten. Ein Forward Rate Agreement wird entsprechend zur Absicherung gegen sinkende bzw. steigende Zinsen verwendet.

Definition 1.4. Als *(diskrete) Forward-Rate* über $[T,S]$ zur Zeit t wird

$$F(t;T,S) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - 1\right)$$

bezeichnet. Die Größe

$$F(t,T) = F(t;t,T) = \frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{P(t,T)} - 1\right)$$

heißt *(diskrete) Spot-Rate.*

Beispiel 1.5. Die beiden Raten aus Definition 1.4 werden mitunter auch als *(Spot-)LIBOR-Rates* bezeichnet, da der täglich ermittelte LIBOR einem Durchschnitt der Zinssätze entspricht, zu dem Banken untereinander heute und in Zukunft Geld verleihen würden. Diese Referenzrate wird zu unterschiedlichen Fälligkeiten und Laufzeiten berechnet.

Bemerkung 1.6. Die diskrete Forward-Rate lässt sich äquivalent via

$$1 + (S-T)F(t;T,S) = \frac{P(t,T)}{P(t,S)}$$

einführen, so dass $F(t;T,S)$ dem diskreten Zinssatz entspricht, den man erhält, wenn man einen Euro über den Zeitraum $[T,S]$ gemäß $R = F(t;T,S)$ verzinst. Neben einer diskreten Verzinsung existiert auch eine stetige Verzinsung. Ihr liegt der Gedanke zu Grunde, dass sich bei m Auszahlungen innerhalb von $[T,S]$ der Wert

$$\left(1 + \frac{R(S-T)}{m}\right)^m$$

ergibt. Für $m \to \infty$ konvergiert diese Größe gegen $\exp(R(S-T))$.

Definition 1.7. Als *(stetige) Forward-Rate* über $[T,S]$ zur Zeit t wird

$$R(t;T,S) = -\frac{\log P(t,S) - \log P(t,T)}{S-T}$$

bezeichnet. Die Größe

$$R(t,T) = R(t;t,T) = -\frac{\log P(t,T)}{T-t}$$

heißt *(stetige) Spot-Rate.*

Bemerkung 1.8. Die bisher betrachteten Raten berechnen sich für Anlagen im Zeitraum $[T, S]$, der typischerweise bis zu vielen Jahren umfassen kann. Interessiert man sich für augenblickliche Zinssätze *(overnight)*, so betrachtet man das Verhalten für $S \to T$.

Definition 1.9. Als *(augenblickliche) Forward-Rate* mit Fälligkeit T zur Zeit t wird

$$f(t,T) = \lim_{S \to T} R(t;T,S) = -\frac{\partial \log P(t,T)}{\partial T} \tag{1.1}$$

bezeichnet. Die Größe

$$r(t) = f(t,t) = \lim_{T \to t} R(t,T)$$

heißt *Short-Rate.*

Bemerkung 1.10. Zusammen mit $P(T,T) = 1$ und dem Hauptsatz der Differentialrechnung ergibt (1.1) die Identität

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right).$$

Beispiel 1.11. Die Short-Rate spielt die wesentliche Rolle bei der kurzfristigen Geldanlage. Will man zur Zeit $t = 0$ einen Euro über den Zeitraum $[0, \Delta t]$ anlegen, so ergibt sich als Gewinn in Δt, falls $u \mapsto f(0,u)$ stetig ist,

$$\frac{1}{P(0,\Delta t)} = \exp\left(\int_0^{\Delta t} f(0,u)du\right) = 1 + r(0)\Delta t + o(\Delta t).$$

Investiert man diesen neuen Betrag direkt wieder in Anleihen, die zur Zeit $2\Delta t$ fällig werden, besitzt man in $2\Delta t$ einen Betrag von

$$\frac{1}{P(0,\Delta t)} \frac{1}{P(\Delta t, 2\Delta t)} = (1 + r(0)\Delta t)(1 + r(\Delta t)\Delta t) + o(\Delta t).$$

Als Rendite ergibt sich in diesem Fall

$$\frac{\frac{1}{P(0,\Delta t)} \frac{1}{P(\Delta t,2\Delta t)}}{\frac{1}{P(0,\Delta t)}} = (1 + r(\Delta t)\Delta t) + o(\Delta t).$$

Geht man weiter so vor und investiert konsequent in immer neue kurzfristige Anleihen, so erhält man ohne Transaktionskosten eine Anlageform, die

$$B(t + \Delta t) = B(t)(1 + r(t)\Delta t) + o(\Delta t)$$

erfüllt. Im Fall $\Delta t \to 0$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$dB(t) = B(t)r(t)dt$$

mit Anfangsbedingung $B(0) = 1$.

Definition 1.12. Der Prozess

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(u)du\right)$$

heißt *risikolose Anlageform* bzw. *Geldmarktkonto.*

Bemerkung 1.13. Eine Anlage in B ist in dem Sinn risikolos, dass der Zinssatz $r(t)$ über den infinitesimalen Zeitraum $[t, t+\Delta t]$ festgelegt ist. Langfristig lässt sich dagegen nichts sagen: Will man mittels einer Anlage am Geldmarkt zum Zeitpunkt T sicher einen Euro besitzen, muss man zur Zeit t den Betrag

$$\frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)$$

investieren. Dieser ist im Allgemeinen unbekannt, da r ein stochastischer Prozess ist. Am Anleihenmarkt führt dagegen ein Investment von $P(t,T)$ sicher zu einem Euro am Ende des Zeitraums.

Beispiel 1.14. Typischerweise werden keine Nullkuponanleihen gehandelt, sondern allgemeiner *(festverzinsliche) Anleihen*. Diese bestehen aus

- einer Menge von Auszahlungszeitpunkten $T_1 < \ldots < T_n$,
- deterministischen Auszahlungen $c_1, \ldots, c_n$ sowie
- einem nominellen Wert N,

wobei jeweils zu den Zeitpunkten T_i der festgelegte Betrag c_i sowie zum Ende der Laufzeit T_n zusätzlich N ausgezahlt wird. Entsprechend ist der Wert eines solchen Wertpapieres zum Zeitpunkt $t \leq T_1$ durch

$$p(t) = \sum_{i=1}^n P(t,T_i)c_i + P(t,T_n)N$$

gegeben. In den meisten Fällen gilt $T_i - T_{i-1} = \delta$ (zum Beispiel bei jährlichen Auszahlungen), und die c_i entsprechen Auszahlungen gemäß einem zuvor festgelegten Zinssatz K auf den nominellen Wert N, d.h. $c_i = K\delta N$. Nach dem Ende der Laufzeit wird auch der angelegte Betrag N zurückgezahlt. In diesem Fall gilt

$$p(t) = \left(\sum_{i=1}^n K\delta P(t,T_i) + P(t,T_n)\right) N.$$

Beispiel 1.15. Es existieren nicht nur festverzinsliche Anleihen, sondern auch solche, bei denen sich die Verzinsung nach der diskreten Spot-Rate im jeweiligen Zeitraum richtet, d.h. bei Start in T_0 gilt

$$c_i = F(T_{i-1},T_i)(T_i - T_{i-1})N = \left(\frac{1}{P(T_{i-1},T_i)} - 1\right) N$$

für die Auszahlung in T_i. Um den Wert einer solchen Anleihe in $t \leq T_0$ zu berechnen, ist der Wert von c_i zur Zeit t, also insbesondere der Wert von $\frac{1}{P(T_{i-1},T_i)}$ zu bestimmen:

- Kaufe zur Zeit t eine T_{i-1}-Anleihe, d.h. bezahle $P(t,T_{i-1})$.
- Nutze den zur Zeit T_{i-1} erhaltenen Euro, um $\frac{1}{P(T_{i-1},T_i)}$ T_i-Anleihen zu kaufen.
- Diese Anleihen besitzen zur Zeit T_i den Wert $\frac{1}{P(T_{i-1},T_i)}$.

Da eine Auszahlung von -1 in T_i zur Zeit t den Wert $-P(t, T_i)$ besitzt, ergibt sich als Wert der Anleihe mit flexiblem Zinssatz

$$p(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} (P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)) + P(t, T_n) \right) N = P(t, T_0)N.$$

Beispiel 1.16. Da verschiedene Firmen sich zu verschiedenen festen bzw. flexiblen Zinssätzen Geld leihen können, existieren *Zinsswaps*, bei denen ein Vertragspartner zu Zeitpunkten $T_1 < \ldots < T_n$ (ohne Einschränkung mit $T_i - T_{i-1} = \delta$) einen festen Zinssatz K gegen einen flexiblen Zinssatz $F(T_{i-1}, T_i)$ eintauschen kann, was für beide Parteien sinnvoll sein kann. Formal zahlt also eine Partei jeweils $K\delta N$ und erhält dafür $F(T_{i-1}, T_i)\delta N$, so dass die Berechnungen aus Beispiel 1.14 und Beispiel 1.15 zum Zeitpunkt $t \leq T_0$ den Wert

$$\Pi_p(t) = N \left(P(t, T_0) - P(t, T_n) - \sum_{i=1}^{n} K\delta P(t, T_i) \right)$$

ergeben. (Formal handelt es sich hier um einen *Payer Swap*. Analog existiert ein *Receiver Swap* mit umgekehrten Vorzeichen.) Der faire Zinssatz K ist entsprechend derjenige, so dass $\Pi_p(t) = 0$ gilt. Für diese *Swaprate* gilt

$$R_{swap}(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\delta \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)}.$$

Eine alternative Darstellung basiert darauf, dass der Wert des zum Zeitpunkt T_i fließenden Betrags zur Zeit t durch

$$\delta N P(t, T_i) \left(F(t; T_{i-1}, T_i) - K \right)$$

gegeben ist. Dann ergibt sich leicht

$$R_{swap}(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t) F(t; T_{i-1}, T_i) \quad \text{mit Gewichten} \quad w_i(t) = \frac{P(t, T_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(t, T_j)}.$$

Bemerkung 1.17. Wie am Aktienmarkt existieren auch am Anleihenmarkt Derivate, die von den Händlern zur Absicherung gegen steigende oder sinkende Zinsen verwendet werden können. Ein wesentliches Ziel in den weiteren Kapiteln wird sein, geeignete Modelle für die beteiligten stochastischen Prozesse aufzustellen, unter denen sich die Preise der Derivate berechnen lassen.

Beispiel 1.18. Ein *Cap* besteht aus einer Folge von Auszahlungszeitpunkten $T_1 < \ldots < T_n$ mit $T_i - T_{i-1} = \delta$ und einer *Cap-Rate* κ, so dass zu jedem Zeitpunkt T_i der Betrag

$$\delta \left(F(T_{i-1}, T_i) - \kappa \right)^+$$

an den Besitzer des Cap fließt. Dadurch stellt dieser sicher, dass die von ihm zu bezahlende flexible Zinsrate niemals κ überschreitet.

Bezeichnet $Cpl(t; T_{i-1}, T_i)$ den Wert der obigen Auszahlung (des *Caplets*) zur Zeit t, so besitzt der gesamte Cap den Wert

$$Cp(t) = \sum_{i=1}^{n} Cpl(t; T_{i-1}, T_i).$$

Alternativ lässt sich ein *Floor* definieren, dessen *Floorlets* jeweils der Auszahlung

$$\delta\left(\kappa - F(T_{i-1}, T_i)\right)^+$$

entsprechen. Dessen Wert wird mit $Fl(t)$ bezeichnet.

Bemerkung 1.19. Es lässt sich ähnlich zur Put-Call-Parität zeigen, dass die Relation

$$Cp(t) - Fl(t) = \Pi_p(t)$$

gilt, wobei Π_p den Wert des Payer Swaps aus Beispiel 1.16 mit nominellem Wert $N = 1$ und festem Zins κ bezeichnet. Daher existiert ein enger Zusammenhang zwischen der Cap-Rate κ und der Swap-Rate $R_{swap}(t)$. Insbesondere heißt ein Cap bzw. Floor *at the money (ATM)*, falls $\kappa = R_{swap}(t)$ gilt. Gilt $\kappa < R_{swap}(t)$, so heißt der Cap *in the money*, für $\kappa > R_{swap}(t)$ *out of the money*. Analoge Begriffe existieren für die Floor-Rate.

Beispiel 1.20. *Swaptions* sind Optionen, deren Besitzern die Möglichkeit eingeräumt wird, zu einem zukünftigen Zeitpunkt (meist T_0) in einen Swap mit Zeitpunkten $T_0 < \ldots < T_n$ und Zinsrate K einzusteigen. Entsprechend beträgt der Wert einer Payer Swaption zur Zeit T_0

$$N\left(\sum_{i=1}^{n} P(T_0, T_i)\delta\left(F(T_0; T_{i-1}, T_i) - K\right)\right)^+.$$

Bemerkung 1.21. Während die Rolle von Caps und Floors für Händler unmittelbar einsichtig ist, ist die Bedeutung von Swaptions weniger offensichtlich. Man kann zeigen, dass sie dazu genutzt werden können, um sich die Möglichkeit einzuräumen, zu einem gewählten Zeitpunkt während der Laufzeit von ver- bzw. gekauften Anleihen auszusteigen (vgl. Example 2.1 in Filipović (2009)).

Kapitel 2

Short-Rate-Modelle

Will man Derivate wie Caps, Floors oder Swaptions preisen, benötigt man geeignete Modelle für die stochastischen Prozesse im Hintergrund. Eine visuelle Inspektion des Verhaltens von Nullkuponanleihen $T \mapsto P(t,T)$ (vgl. Figure 2.2 in Filipović (2009)) zeigt, dass es sinnvoller ist, nicht die Preise der Nullkuponanleihen direkt zu modellieren, sondern lieber mit verschiedenen der abgeleiteten Raten zu arbeiten. In diesem Abschnitt befassen wir uns mit Modellen für die Short-Rate. Dazu nehmen wir folgende Bedingungen an.

Annahme 2.1.

(i) Es existiert ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ mit einer d-dimensionalen Brownschen Bewegung W.

(ii) Die Short-Rate $r(t)$ ist durch einen Itō-Prozess

$$dr(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

mit $b \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^{1\times d}$ gegeben, wobei b und σ progressiv messbar sind und fast sicher

$$\int_0^t |b(s)|ds < \infty \quad \text{bzw.} \quad \int_0^t ||\sigma(s)||^2 ds < \infty$$

für alle $t \geq 0$ erfüllen.

(iii) Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ der Form

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}_\infty(\gamma \bullet W),$$

so dass die diskontierten Preisprozesse $P(t,T)/B(t)$, $t \leq T$, für jedes T Martingale bzgl. $\mathbb{Q}$ mit $P(T,T) = 1$ sind. Hierbei bezeichnet $Y_t = \mathcal{E}_t(X)$ das stochastische Exponential von X.

Satz 2.2. *Es gilt:*

$$P(t,T) = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\Big[\exp\big(-\int_t^T r(s)ds\big)\big|\mathcal{F}_t\Big].$$

Beweis: Ist $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß und X eine replizierbare Auszahlung, so gilt für den Preisprozess des diskontierten $\hat{X}$ die Formel

$$\pi(t) = B(t)\mathbb{E}_\mathbb{Q}\Big[\frac{X}{B(T)}\big|\mathcal{F}_t\Big].$$

In diesem Fall gilt $X = 1$ und $\pi(t) = P(t,T)$, so dass die Formel aufgrund von

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(u)du\right)$$

folgt. □

Bemerkung 2.3. Wir wissen aus dem Satz von Girsanov, dass

$$\overline{W}(t) = W(t) - \int_0^t \gamma(s)^* ds$$

eine Brownsche Bewegung bzgl. $\mathbb{Q}$ ist. Entsprechend gilt für die Dynamik von r unter $\mathbb{Q}$ die Formel

$$dr(t) = (b(t) + \sigma(t)\gamma(t)^*)dt + \sigma(t)d\overline{W}(t).$$

Satz 2.4. *Wird die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ von der Brownschen Bewegung W erzeugt, so existiert für jedes $T \geq 0$ ein progressiv messbarer Prozess $v(t,T)$, $t \leq T$, so dass*

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)dt + v(t,T)d\overline{W}(t) \tag{2.1}$$

gilt. Insbesondere ergibt sich

$$\frac{P(t,T)}{B(t)} = P(0,T)\mathcal{E}_t\left(v(\cdot,T) \bullet \overline{W}\right).$$

Beweis: Es sei $D(t) = (d\mathbb{Q}/d\mathbb{P})_t = \mathcal{E}_t(\gamma \bullet W)$, und wir schreiben im Folgenden der Einfachheit halber $P(t) = P(t,T)$.

Da $Y(t) = P(t)/B(t)$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist, ist $Y(t)D(t)$ ein $\mathbb{P}$-Martingal, und nach dem Martingaldarstellungssatz gilt

$$Y(t)D(t) = Y(0) + \int_0^t \psi(s)dW(s)$$

für einen progressiv messbaren Prozess ψ. Aufgrund von $dD(t) = D(t)\gamma(t)dW(t)$ folgt mit Hilfe der Itō-Formel

$$d\left(\frac{1}{D}\right)_t = -\frac{1}{D(t)}\gamma(t)dW(t) + \frac{1}{D(t)}||\gamma(t)||^2 dt,$$

und man erhält

$$\begin{aligned}
dY(t) = d\left((YD)(t)\frac{1}{D(t)}\right) &= (YD)(t)d\left(\frac{1}{D}\right)_t + \frac{1}{D(t)}d(YD)_t + d\left\langle YD, \frac{1}{D}\right\rangle_t \\
&= \left(\frac{\psi(t)}{D(t)} - Y(t)\gamma(t)\right)dW(t) - \left(\frac{\psi(t)}{D(t)} - Y(t)\gamma(t)\right)\gamma(t)^* dt \\
&= \left(\frac{\psi(t)}{D(t)} - Y(t)\gamma(t)\right)d\overline{W}(t).
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt

$$\begin{aligned}
dP(t) = d(Y(t)B(t)) &= Y(t)dB(t) + B(t)dY(t) \\
&= Y(t)B(t)r(t)dt + \left(\frac{\psi(t)B(t)}{D(t)} - B(t)Y(t)\gamma(t)\right)d\overline{W}(t) \\
&= P(t)r(t)dt + P(t)\left(\frac{\psi(t)B(t)}{D(t)P(t)} - \gamma(t)\right)d\overline{W}(t).
\end{aligned}$$

Setzt man

$$v(t) = \left(\frac{\psi(t)B(t)}{D(t)P(t)} - \gamma(t) \right) \quad \text{bzw.} \quad v(t,T) = \left(\frac{\psi(t,T)B(t)}{D(t)P(t,T)} - \gamma(t) \right),$$

folgen beide Aussagen. □

Bemerkung 2.5. Schreibt man (2.1) bzgl. der Brownschen Bewegung W, so ergibt sich

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = (r(t) - v(t,T)\gamma(t)^*)dt + v(t,T)dW(t). \tag{2.2}$$

Diese Formel zeigt, dass die erwartete unmittelbare Rendite bei einem Investment in eine T-Anleihe vom risikolosen Zinssatz r verschieden ist. Die Größe $-\gamma$ wird im Allgemeinen als *Marktpreis des Risikos* bezeichnet und trägt der Tatsache Rechnung, dass ein Investment in eine riskante Anleihe im Mittel eine höhere Rendite liefern sollte als ein Investment in eine risikofreie Anlage. Der Marktpreis des Risikos wird typischerweise relativ zur Volatilität $v(t,T)$ angegeben.

Weder Satz 2.4 noch (2.1) bzw. (2.2) liefern explizite Formeln für $P(t,T)$ in Abhängigkeit von t, T und r. Wir werden daher im Folgenden Modelle diskutieren, in denen solche Formeln leicht herzuleiten sind. Zu diesem Zweck schränken wir die Annahmen an r etwas ein. Insbesondere diskutieren wir nur den Fall $d = 1$.

Annahme 2.6. Es seien $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall mit nicht-leerem Inneren und b und σ stetige Funktionen auf $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{Z}$. Wir nehmen an, dass die stochastische Differentialgleichung

$$dr(t) = b(t_0 + t, r(t))dt + \sigma(t_0 + t, r(t))d\overline{W}(t), \quad r(0) = r_0, \tag{2.3}$$

für jedes Paar $(t_0, r_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{Z}$ eine eindeutige Lösung $r = r^{(t_0,r_0)}$ mit Werten in $\mathcal{Z}$ besitzt.

Bemerkung 2.7. Hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.3) finden sich zum Beispiel in Karatzas and Shreve (1991), Theorem 5.2.9. In diesem Fall besitzt r gemäß deren Theorem 5.4.20 die Markov-Eigenschaft, d.h. für jede beschränkte, messbare Funktion $g : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ existiert eine messbare Funktion $G : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g(r(T))|\mathcal{F}_t] = G(t, T, r(t)), \quad t \leq T.$$

Satz 2.8. (Feynman-Kac-Formel) *Es seien $T > 0$ und $\Phi : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ stetig, und wir nehmen an, dass $G = G(t,r) \in C^{1,2}([0,T] \times \mathcal{Z})$ eine Lösung von*

$$\partial_t G(t,r) + b(t,r)\partial_r G(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r)\partial_r^2 G(t,r) - rG(t,r) = 0, \quad G(T,r) = \Phi(r), \tag{2.4}$$

ist. Dann ist

$$M(t) = G(t, r(t)) \exp\left(-\int_0^t r(u)du \right), \quad t \leq T,$$

ein lokales $\mathbb{Q}$-Martingal. Gilt zusätzlich *(a)* $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\int_0^T |\partial_r G(t,r(t))\exp(-\int_0^t r(u)du)\sigma(t,r(t))|^2 dt] < \infty$ *oder*

(b) dass M *beschränkt ist,*

so ist M *ein* $\mathbb{Q}$*-Martingal mit*

$$G(t,r(t)) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\exp\big(-\int_t^T r(u)du\big)\Phi(r(T))\big|\mathcal{F}_t\Big]. \tag{2.5}$$

Beweis: Eine Anwendung der Itō-Formel auf M liefert

$$\begin{aligned} dM(t) =& \Big(\partial_t G(t,r(t)) + b(t,r(t))\partial_r G(t,r(t)) \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2(t,r(t))\partial_r^2 G(t,r(t)) - r(t)G(t,r(t))\Big)\exp\big(-\int_0^t r(u)du\big)dt \\ &+ \sigma(t,r(t))\partial_r G(t,r(t))\exp\big(-\int_0^t r(u)du\big)d\overline{W}(t) \\ =&\sigma(t,r(t))\partial_r G(t,r(t))\exp\big(-\int_0^t r(u)du\big)d\overline{W}(t), \end{aligned}$$

so dass M ein lokales Martingal bzgl. $\mathbb{Q}$ ist. Die Bedingungen (a) und (b) sind klassische Bedingungen, die garantieren, dass M sogar ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist.

Aufgrund von

$$M(T) = \Phi(r(T))\exp\Big(-\int_0^T r(u)du\Big)$$

folgt zuletzt

$$G(t,r(t))\exp\Big(-\int_0^t r(u)du\Big) = M(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\exp\big(-\int_0^T r(u)du\big)\Phi(r(T))\big|\mathcal{F}_t\Big].$$

Multipliziert man beide Seiten mit $\exp(\int_0^t r(u)du)$, folgt die Aussage. □

Bemerkung 2.9.

(i) Für die Anwendung interessanter ist eine Rückrichtung von Satz 2.8, die zusichert, dass ein Prozess von der Form (2.5) in einem geeigneten Sinn die stochastische Differentialgleichung (2.4) löst. Dies ist grundsätzlich möglich, bedarf aber einer deutlich komplexeren Theorie und wird im Rahmen dieser Vorlesung nicht behandelt (vgl. etwa Proposition 5.4.6 in Karatzas and Shreve (1991)).

(ii) Wegen

$$P(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\exp\big(-\int_t^T r(u)du\big)\Phi(r(T))\big|\mathcal{F}_t\Big]$$

für $\Phi(r) \equiv 1$, lässt sich eine explizite Darstellung von $P(t,T)$ über

$$P(t,T) = G(t,r(t);T)$$

angeben, d.h. man muss "nur" eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung lösen. Dies ist für ein festes $T > 0$ im Allgemeinen sogar numerisch relativ gut möglich, jedoch sind geschlossene Formeln deutlich praktischer, da man sonst für jedes neue T eine weitere numerische Lösung finden muss.

Definition 2.10. Ein Modell, bei dem $P(t,T)$ die Form

$$P(t,T) = G(t,r;T) = \exp(-A(t,T) - B(t,T)r)$$

für glatte Funktionen A und B besitzt, heißt *affines Zinsstrukturmodell.*

Bemerkung 2.11. Wegen $G(T,r;T) = 1$ gilt $A(T,T) = B(T,T) = 0$.

Satz 2.12. *Es seien die Bedingungen (a) oder (b) aus Satz 2.8 erfüllt. Dann ist ein Short-Rate-Modell (2.3) genau dann ein affines Zinsstrukturmodell, wenn*

$$\sigma^2(t,r) = a(t) + \alpha(t)r \quad \textit{und} \quad b(t,r) = b(t) + \beta(t)r \tag{2.6}$$

für stetige Funktion a, α, b und β gilt. In diesem Fall sind A und B als Lösungen der Differentialgleichungen

$$\partial_t A(t,T) = \frac{1}{2}a(t)B^2(t,T) - b(t)B(t,T), \quad A(T,T) = 0, \tag{2.7}$$

$$\partial_t B(t,T) = \frac{1}{2}\alpha(t)B^2(t,T) - \beta(t)B(t,T) - 1, \quad B(T,T) = 0, \tag{2.8}$$

gegeben.

Beweis: Aus Satz 2.8 folgt, dass das Short-Rate-Modell genau dann affin ist, wenn die Differentialgleichung

$$\partial_t G(t,r) + b(t,r)\partial_r G(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r)\partial_r^2 G(t,r) - rG(t,r) = 0$$

aus (2.4) für

$$G(t,r;T) = \exp(-A(t,T) - B(t,T)r).$$

erfüllt ist, was in diesem Fall

$$\frac{1}{2}\sigma^2(t,r)B^2(t,T) - b(t,r)B(t,T) = \partial_t A(t,T) + (\partial_t B(t,T) + 1)r \tag{2.9}$$

für alle $t \le T$ und $r \in \mathcal{Z}$ entspricht. Außerdem muss $A(T,T) = B(T,T) = 0$ gelten.

Man sieht leicht ein, dass (2.9) gilt, falls (2.6) erfüllt ist und (2.7) bzw. (2.8) gilt.

Umgekehrt sei $t \ge 0$ fest, und wir nehmen zunächst an, dass die Abbildungen $B(t,\cdot)$ und $B^2(t,\cdot)$ linear unabhängig sind, d.h. dass $T_1 > T_2 \ge t$ existieren, so dass

$$M = \begin{pmatrix} B^2(t,T_1) & -B(t,T_1) \\ B^2(t,T_2) & -B(t,T_2) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Aus (2.9) folgt dann

$$\begin{pmatrix} \sigma^2(t,r)/2 \\ b(t,r) \end{pmatrix} = M^{-1}\left(\begin{pmatrix} \partial_t A(t,T_1) \\ \partial_t A(t,T_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_t B(t,T_1) + 1 \\ \partial_t B(t,T_2) + 1 \end{pmatrix} r\right),$$

und $\sigma^2(t,r)$ bzw. $b(t,r)$ sind affine Funktionen in r, besitzen also die Darstellung (2.6) für geeignete Funktionen a, α, b und β. Setzt man diese Darstellung in die linke Seite von (2.9) ein, wird diese Gleichung zu

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}a(t)B^2(t,T) - b(t)B(t,T) + \left(\frac{1}{2}\alpha(t)B^2(t,T) - \beta(t)B(t,T)\right)r \\ =&\partial_t A(t,T) + (\partial t B(t,T) + 1)r. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich (2.7) und (2.8).

Gilt dagegen $B(t,\cdot) = c(t)B^2(t,\cdot)$, folgt $B(t,\cdot) \equiv B(t,t)$ mit einer Fallunterscheidung nach $c(t) = 0$ oder $c(t) \neq 0$. Insbesondere ergibt sich $B(t,\cdot) \equiv 0$, also $\partial_t B(t,T) = -1$ gemäß (2.9). Entsprechend folgt: Gilt $B(t,T) = 0$, so gilt dies in einer Umgebung von t nicht mehr. Mit anderen Worten: Die Menge aller t, so dass $B(t,\cdot)$ und $B^2(t,\cdot)$ linear unabhängig sind, ist offen und dicht in $\mathbb{R}^+$. Aufgrund der Stetigkeit von σ^2 und b gelten dann (2.6) und (2.7) bzw. (2.8) für alle t. $\square$

Bemerkung 2.13. Offensichtlich kommen nicht alle Funktionen a, α, b und β für (2.6) in Frage, da zum Beispiel gewährleistet sein muss, dass $\sigma^2(t,r)$ nicht-negativ ist und die Lösung $r(t)$ den Definitionsbereich $\mathcal{Z}$ nicht verlässt. Wir werden in Kapitel 6 notwendige und hinreichende Bedingungen an diese Funktionen herleiten, wenn $\mathcal{Z}$ von der Form $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^+$ ist.

Beispiel 2.14. Das Short-Rate-Modell mit $\mathcal{Z} = \mathbb{R}$ und

$$dr(t) = (b + \beta r(t))dt + \sigma d\overline{W}(t)$$

heißt *Vasiček-Modell*. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass dessen Lösung explizit durch

$$r(t) = r(0)\exp(\beta t) + \frac{b}{\beta}(\exp(\beta t) - 1) + \sigma \exp(\beta t) \int_0^t \exp(-\beta s) d\overline{W}(s)$$

gegeben ist. Also ist $r(t)$ ein Gaußscher Prozess mit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r(t)] = r(0)\exp(\beta t) + \frac{b}{\beta}(\exp(\beta t) - 1)$$

und

$$Var_{\mathbb{Q}}(r(t)) = \sigma^2 \exp(2\beta t) \int_0^t \exp(-2\beta s) ds = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(\exp(2\beta t) - 1\right).$$

Insbesondere gilt $\mathbb{Q}(\{r(t) < 0\}) > 0$, es sind also auch negative Zinssätze möglich. In der Modellierung verwendet man typischerweise $\beta < 0$, woduch der Prozess *mean-reverting* wird, d.h. dass er um seinen langfristigen Erwartungswert $b/|\beta|$ schwankt und die Tendenz besitzt, immer wieder in eine Umgebung dieses Wertes zurückzukehren.

In diesem Modell ergibt sich für (2.7) und (2.8)

$$\begin{aligned}
\partial_t A(t,T) &= \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t,T) - bB(t,T), \quad A(T,T) = 0,\\
\partial_t B(t,T) &= -\beta B(t,T) - 1, \quad B(T,T) = 0,
\end{aligned}$$

also

$$B(t,T) = \frac{1}{\beta}\left(\exp(\beta(T-t)) - 1\right)$$

und

$$\begin{aligned}
A(t,T) = &- \int_t^T \partial_s A(s,T) ds = -\frac{\sigma^2}{2}\int_t^T B^2(s,T) ds + b\int_t^T B(s,T) ds\\
=&\sigma^2 \frac{4\exp(\beta(T-t)) - \exp(2\beta(T-t)) - 2\beta(T-t) - 3}{4\beta^3}\\
&+ b\frac{\exp(\beta(T-t)) - 1 - \beta(T-t)}{\beta^2}.
\end{aligned}$$

Daraus lässt sich direkt der Preisprozess via

$$P(t,T) = \exp(-A(t,T) - B(t,T)r(t))$$

ablesen.

Bemerkung 2.15. Zu beachten ist, dass die Dynamik der hier diskutierten Modelle gemäß (2.3) unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ spezifiziert wird und sich im Allgemeinen keine Aussage über die Modellierung unter $\mathbb{P}$ treffen lässt. Man kann allerdings zeigen, dass im Fall eines konstanten Marktpreises des Risikos γ die Struktur des Vasiček-Modells auch unter $\mathbb{P}$ erhalten bleibt.

Beispiel 2.16. Das Zinsmodell mit der Dynamik

$$dr(t) = (b + \beta r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}d\overline{W}(t), \quad r(0) \geq 0,$$

heißt *Cox-Ingersoll-Ross-Modell* oder kurz *CIR-Modell*. Man kann zeigen, dass der Prozess stets eine eindeutige nicht-negative Lösung besitzt und dass $r(t) > 0$ gilt, falls $r(0) > 0$ und $2b \geq \sigma^2$ erfüllt sind. In diesem Fall gilt für die Differentialgleichungen (2.7) und (2.8)

$$\begin{aligned} \partial_t A(t,T) &= -bB(t,T), \quad A(T,T) = 0, \\ \partial_t B(t,T) &= \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t,T) - \beta B(t,T) - 1, \quad B(T,T) = 0, \end{aligned}$$

Die *Riccati-Gleichung* für $B(t,T)$ lässt sich explizit lösen und man erhält

$$B(t,T) = \frac{2(\exp(\gamma(T-t)) - 1)}{(\gamma - \beta)(\exp(\gamma(T-t)) - 1) + 2\gamma}$$

mit $\gamma = \sqrt{\beta^2 + 2\sigma^2}$. Also folgt

$$A(t,T) = -\frac{2b}{\sigma^2}\log\left(\frac{2\gamma\exp((\gamma-\beta)(T-t)/2)}{(\gamma-\beta)(\exp(\gamma(T-t)) - 1) + 2\gamma}\right).$$

Wir in Beispiel 6.20 sehen, dass sich im CIR-Modell zusätzlich auch explizite Formeln für Anleiheoptionen herleiten lassen.

Bemerkung 2.17. Da die bisher betrachteten Modelle jeweils von nur drei Parametern abhängen, lassen sie sich in der Praxis relativ leicht kalibrieren. Typischerweise betrachtet man dazu die aktuell beobachteten Preise $T \mapsto P(0,T) = G(0, r(0); T)$ und schätzt die Parameter b, β und σ derart, dass die durch das Modell gegebene Funktion $T \mapsto G(0, r(0); T, b, \beta, \sigma)$ die beobachteten Preise bestmöglich beschreibt, etwa mittels der Methode der kleinsten Quadrate. Dies liefert oftmals jedoch keine besonders gute Beschreibung der tatsächlich beobachteten Kurve, so dass man flexiblere Modelle benötigt.

Beispiel 2.18. Das Zinsmodell mit der Dynamik

$$dr(t) = b(t)dt + \sigma d\overline{W}(t)$$

heißt *Ho-Lee-Modell*. Als Lösung von

$$\begin{aligned}\partial_t A(t,T) &= \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t,T) - b(t)B(t,T), \quad A(T,T) = 0,\\ \partial_t B(t,T) &= -1, \quad B(T,T) = 0,\end{aligned}$$

ergibt sich

$$B(t,T) = T - t$$

und

$$A(t,T) = -\frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3 + \int_t^T b(s)(T-s)ds.$$

Wir betrachten nun die Forward-Rate

$$\begin{aligned}f(t,T) = -\frac{\partial \log P(t,T)}{\partial T} &= \partial_T A(t,T) + \partial_T B(t,T) r(t)\\ &= -\frac{\sigma^2}{2}(T-t)^2 + \int_t^T b(s)ds + r(t).\end{aligned}$$

Beobachtet man die ursprüngliche Funktion $T \mapsto f(0,T)$, so ergibt sich wegen $f(0,0) = r(0)$ durch die Wahl von

$$b(s) = \partial_s f(0,s) + \sigma^2 s$$

sogar eine perfekte Rekonstruktion von $f(0,T)$, wie man anhand von

$$f(t,T) = f(0,T) - f(0,t) + \sigma^2 t(T-t) + r(t)$$

erkennt. Insbesondere erhält man

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(0,s)ds + f(0,t)(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2 - (T-t)r(t)\right).$$

Außerdem ergibt sich durch

$$r(t) = r(0) + \int_0^t b(s)ds + \sigma\overline{W}(t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma\overline{W}(t)$$

ein funktionaler Zusammenhang zwischen der erwarteten Short-Rate $r(t)$ und der ursprünglichen Forward-Rate $f(0,t)$. Solche Formeln lassen sich nutzen, um die Plausibilität des Modells zu überprüfen.

Bemerkung 2.19. Es gibt weitere Modelle neben dem Ho-Lee-Modell, die gemäß der Aussage von Satz 2.12 bzw. (2.6) auch zeitabhängige Parametrisierungen von $\sigma^2(t,r)$ und $b(t,r)$ verwenden. Von Bedeutung sind insbesondere die Erweiterungen des Vasiček- bzw. des CIR-Modells durch Hull und White, die die Form

$$dr(t) = (b(t) + \beta(t)r(t))dt + \sigma(t)d\overline{W}(t)$$

bzw.

$$dr(t) = (b(t) + \beta(t)r(t))dt + \sigma(t)\sqrt{r(t)}d\overline{W}(t)$$

besitzen.

Kapitel 3

Heath-Jarrow-Merton-Modelle

Wir haben im vergangenen Abschnitt Short-Rate-Modelle kennengelernt und insbesondere in Beispiel 2.18 mit ihrer Hilfe auch eine explizite Form der Forward-Rate erhalten. In diesem Kapitel befassen wir uns mit alternativen Modellen für die Preisprozesse $P(t, T)$, bei denen direkt Annahmen an die Forward-Rate getroffen werden.

Annahme 3.1. (Heath-Jarrow-Merton) Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit einer d-dimensionalen Brownschen Bewegung W. Außerdem existieren Prozesse $\alpha = \alpha(\omega, t, T) \in \mathbb{R}$ bzw.

$$\sigma = \sigma(\omega, t, T) = (\sigma_1(\omega, t, T), \ldots, \sigma_d(\omega, t, T)) \in \mathbb{R}^d,$$

so dass gilt:

(i) α und σ sind Prog $\otimes \mathcal{B}$-messbar, wobei Prog die von den progessiv-messbaren Prozessen erzeugte σ-Algebra bezeichnet;

(ii) $\int_0^T \int_0^T |\alpha(s, t)| ds dt < \infty$ für alle T fast sicher;

(iii) $\sup_{s,t \leq T} ||\sigma(s, t)|| < \infty$ für alle T fast sicher.

Dann erfülle $f(t, T)$ für jedes T und jede Anfangsbedingung $f(0, T)$

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \sigma(s, T) dW(s), \quad t \leq T. \tag{3.1}$$

Satz 3.2. (Satz von Fubini) *Es sei $\phi = \phi(\omega, t, s) \in \mathbb{R}^d$, $t, s \leq T$, und es gelte*

(a) ϕ ist $Prog_T \otimes \mathcal{B}[0, T]$-messbar;

(b) $\sup_{t,s \leq T} ||\phi(t, s)|| < \infty$ fast sicher.

Dann erfüllt $\lambda(t) = \int_0^T \phi(t, s) ds$ die Bedingung

$$\int_0^T ||\lambda(t)||^2 dt < \infty,$$

und es existiert eine $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}[0, T]$-messbare Modifikation $\psi(s)$ von $\int_0^T \phi(t, s) dW(t)$ mit $\int_0^T \psi^2(s) ds < \infty$ fast sicher.

Insbesondere gilt $\int_0^T \psi(s)ds = \int_0^T \lambda(t)dW(t)$, *also*

$$\int_0^T \left(\int_0^T \phi(t,s)dW(t)\right) ds = \int_0^T \left(\int_0^T \phi(t,s)ds\right) dW(t).$$

Beweis: vgl. Theorem 6.2 in Filipović (2009). □

Bemerkung 3.3. Mit einem ähnlichen Beweis wie Satz 3.2 lässt sich zeigen, dass der Prozess

$$\int_0^s \phi(t,s)dW(t), \quad s \in [0,T],$$

eine progressiv messbare Modifikation $\pi(s)$ besitzt, die $\int_0^T \pi^2(s)ds < \infty$ fast sicher erfüllt (vgl. Corollary 6.3 in Filipović (2009)).

Bemerkung 3.4. Legt man gemäß (3.1) die gesamte Forward-Kurve $f(t,T)$ fest, ergibt sich insbesondere als Modell für die Short-Rate

$$r(t) = f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)dW(s). \tag{3.2}$$

Bemerkung 3.3 zeigt, dass eine progressiv-messbare Version von r existiert, die $\int_0^t |r(u)|du < \infty$ fast sicher erfüllt. Also ist auch $B(t) = \exp(\int_0^t r(u)du)$ wohldefiniert.

Satz 3.5. *Unter Annahme 3.1 gilt*

$$P(t,T) = P(0,T) + \int_0^t P(s,T)(r(s) + b(s,T))ds + \int_0^t P(s,T)v(s,T)dW(s)$$

für jedes Paar $t \leq T$, *wobei Volatilität und Drift durch*

$$v(s,T) = -\int_s^T \sigma(s,u)du$$

und

$$b(s,T) = -\int_s^T \alpha(s,u)du + \frac{1}{2}||v(s,T)||^2$$

gegeben sind.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
&\log P(t,T) = -\int_t^T f(t,u)du \\
&= -\int_t^T f(0,u)du - \int_t^T \int_0^t \alpha(s,u)dsdu - \int_t^T \int_0^t \sigma(s,u)dW(s)du \\
&= -\int_t^T f(0,u)du - \int_0^t \int_t^T \alpha(s,u)duds - \int_0^t \int_t^T \sigma(s,u)dudW(s) \\
&= -\int_0^T f(0,u)du - \int_0^t \int_s^T \alpha(s,u)duds - \int_0^t \int_s^T \sigma(s,u)dudW(s) \\
&\quad + \int_0^t f(0,u)du + \int_0^t \int_s^t \alpha(s,u)duds + \int_0^t \int_s^t \sigma(s,u)dudW(s) \\
&= \log P(0,T) + \int_0^t \left(b(s,T) - \frac{1}{2}||v(s,T)||^2\right) ds + \int_0^t v(s,T)dW(s) + \int_0^t r(s)ds,
\end{aligned}$$

wobei wir sowohl den klassischen Satz von Fubini als auch Satz 3.2 verwendet haben. Die Itō-Formel liefert dann die Dynamik

$$dP(s,T) = \left(b(s,T) - \frac{1}{2}||v(s,T)||^2 + r(s)\right) P(s,T)ds + v(s,T)P(s,T)dW(s) \\ + \frac{1}{2}||v(s,T)||^2 P(s,T)ds.$$

Damit ergibt sich die Aussage. □

Korollar 3.6. *Für den diskontierten Preis der Nullkuponanleihe gilt*

$$\frac{P(t,T)}{B(t)} = P(0,T) + \int_0^t \frac{P(s,T)}{B(s)} b(s,T)ds + \int_0^t \frac{P(s,T)}{B(s)} v(s,T)dW(s).$$

Beweis: Da

$$B(t)^{-1} = \exp\left(-\int_0^t r(u)du\right)$$

gilt, folgt wegen

$$d(P(t,T)B(t)^{-1}) = -r(t)B(t)^{-1}P(t,T)dt + B(t)^{-1}dP(t,T)$$

und Satz 3.5 die Aussage. □

Bemerkung 3.7. Wir nehmen wie in Annahme 2.1 an, dass ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ der Form

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}_\infty(\gamma \bullet W),$$

existiert und bezeichnen wieder mit

$$\overline{W}(t) = W(t) - \int_0^t \gamma(s)^* ds$$

die entsprechende $\mathbb{Q}$-Brownsche Bewegung.

Satz 3.8. *$\mathbb{Q}$ ist genau dann ein äquivalentes lokales Martingalmaß bzgl. $\frac{P(t,T)}{B(t)}$ für alle T, wenn*

$$b(t,T) = -v(t,T)\gamma(t)^* \text{ für alle } T \; d\mathbb{P} \otimes dt\text{-fast sicher} \tag{3.3}$$

gilt. In diesem Fall ergibt sich

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \left(\sigma(s,T) \int_s^T \sigma(s,u)^* du\right) ds + \int_0^t \sigma(s,T) d\overline{W}(s),$$

und für den diskontierten Preis der Nullkuponanleihe gilt

$$\frac{P(t,T)}{B(t)} = P(0,T)\mathcal{E}_t(v(\cdot,T) \bullet \overline{W}), \quad t \leq T. \tag{3.4}$$

Beweis: Es sei zunächst T fest. Mit Korollar 3.6 erhält man

$$d\frac{P(t,T)}{B(t)} = \frac{P(t,T)}{B(t)}\left(b(t,T) + v(t,T)\gamma(t)^*\right)dt + \frac{P(t,T)}{B(t)}v(t,T)d\overline{W}(t).$$

Also ist $\frac{P(t,T)}{B(t)}$ genau dann ein lokales Martingal bzgl. $\mathbb{Q}$, wenn

$$b(t,T) = -v(t,T)\gamma(t)^* \ d\mathbb{P} \otimes dt\text{-fast sicher}$$

gilt. Da b und v stetig in T sind, ist

$$b(t,T) = -v(t,T)\gamma(t)^* \text{ für alle } T \ d\mathbb{P} \otimes dt\text{-fast sicher}$$

dazu äquivalent. Offenbar ergibt sich dann auch die Darstellung von $\frac{P(t,T)}{B(t)}$ nach Definition des stochastischen Exponentials.

Differenziert man zuletzt beide Seiten von (3.3) nach T, ergibt sich

$$-\alpha(t,T) + \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,u)du = \sigma(t,T)\gamma(t)^* \text{ für alle } T \ d\mathbb{P} \otimes dt\text{-fast sicher.}$$

Aus (3.1) ergibt sich dann gemäß

$$\begin{aligned} f(t,T) &= f(0,T) + \int_0^t \left(\sigma(s,T)\int_s^T \sigma(s,u)^*du - \sigma(s,T)\gamma(s)^*\right)ds + \int_0^t \sigma(s,T)dW(s) \\ &= f(0,T) + \int_0^t \left(\sigma(s,T)\int_s^T \sigma(s,u)^*du\right)ds + \int_0^t \sigma(s,T)d\overline{W}(s). \end{aligned}$$

die gewünschte Darstellung. □

Korollar 3.9. *Es gelte (3.3), und es sei zusätzlich*

(a) die Novikov-Bedingung $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[\exp(\frac{1}{2}\int_0^T ||v(t,T)||^2 dt)] < \infty$ *für alle* T *oder*

(b) $f(t,T) \geq 0$ *für alle* $t \leq T$ *erfüllt.*

Dann ist $\mathbb{Q}$ *ein äquivalentes Martingalmaß bzgl.* $\frac{P(t,T)}{B(t)}$ *für alle* T.

Beweis: Wenn die Novikov-Bedingung erfüllt ist, ist das stochastische Exponential ein Martingal. Die Aussage folgt entsprechend direkt aus Satz 3.8. Ansonsten impliziert $f(t,T) \geq 0$, dass $0 \leq P(t,T) \leq 1$ und $B(t) \geq 1$ gilt. Also ist $\frac{P(t,T)}{B(t)}$ wegen

$$0 \leq \frac{P(t,T)}{B(t)} \leq 1$$

unter $\mathbb{Q}$ ein beschränktes lokales Martingal, also ein Martingal. □

Bemerkung 3.10. Eine Konsequenz aus Satz 3.8 ist, dass die Verteilung von $f(t,T)$ und $P(t,T)$ unter $\mathbb{Q}$ nur von $\sigma(t,T)$ und nicht vom Drift $\alpha(t,T)$ unter $\mathbb{P}$ abhängt. Insbesondere hängt in solchen Modellen der Preis von Optionen auf Anleihen, analog zum klassischen Black-Scholes-Modell, nur von der Volatilität $\sigma(t,T)$ ab.

Beispiel 3.11. Es sei $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes lokales Martingalmaß, und es gelte $\sigma(t,T) \equiv \sigma > 0$. In diesem Fall ergibt sich

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma^2(T-s)ds + \sigma\overline{W}(t) = f(0,T) + \sigma^2 t\left(T - \frac{t}{2}\right) + \sigma\overline{W}(t),$$

also insbesondere

$$r(t) = f(t,t) = f(0,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma\overline{W}(t).$$

Dies ist das Ho-Lee-Modell aus Beispiel 2.18.

Bemerkung 3.12. Grundsätzlich besteht völlige Freiheit in der Wahl der Koeefizienten α und σ in Bedingung 3.1. Typischerweise verwendet man aber etwas spezifischere Modelle, z.B.

$$\sigma(\omega,t,T) = \sigma(t,T,f(\omega,t,T))$$

für eine Funktion σ, wo die Volatilität nur von der Zeit und der aktuellen Forward-Rate abhängt. Diese sind immer noch recht allgemein und lassen sich weiter vereinfachen. Ein Beispiel ist das Ho-Lee-Modell aus Beispiel 3.11, das sich im Fall $\sigma(\omega,t,T) = \sigma$ ergibt. Alternativ werden deterministische Volatilitäten der Form

$$\sigma(\omega,t,T) = \sigma(t,T)$$

betrachtet. In diesem Fall lassen sich Anleiheoptionen explizit preisen, wie wir im folgenden Kapitel sehen werden.

Kapitel 4

Preisberechnung im HJM-Modell

Unser Ziel im nächsten Abschnitt ist das Preisen von Anleiheoptionen, Forwards und Futures im Fall von Gaußschen Heath-Jarrow-Merton-Modellen. Dies gelingt in der Regel, indem wir ein anderes Numeraire als $B(t)$ betrachten und eine in T fällige Anleihe als Numeraire verwenden. Dazu nehmen wir an, dass die Forward-Rate $f(t,T)$ gemäß (3.1) gegeben ist und ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ existiert, so dass alle diskontierten Preisprozesse der Form $\frac{P(t,T)}{B(t)}$, $t \leq T$, Martingale bzgl. $\mathbb{Q}$ sind.

Definition 4.1. Wir bezeichnen mit $\mathbb{Q}^T$ das äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß, das durch

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} = \frac{1}{P(0,T)B(T)}$$

gegeben ist.

Bemerkung 4.2.

(i) Wegen $P(0,T)B(T) > 0$ und

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{P(0,T)B(T)}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(T,T)}{P(0,T)B(T)}\right] = 1$$

gemäß (3.4) ist $\mathbb{Q}^T$ tatsächlich ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß.

(ii) Es gilt

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(T,T)}{P(0,T)B(T)}|\mathcal{F}_t\right] = \frac{P(t,T)}{P(0,T)B(t)} = \mathcal{E}_t(v(\cdot,T) \bullet \overline{W}).$$

(iii)

$$W^T(t) = \overline{W}(t) - \int_0^t v(s,T)^* ds$$

ist eine Brownsche Bewegung bzgl. $\mathbb{Q}^T$.

Lemma 4.3. *Es seien $S, T \geq 0$ und*

$$\sigma_{S,T}(t) = -\sigma_{T,S}(t) = v(t,S) - v(t,T) = \int_S^T \sigma(t,u)du.$$

Dann gilt

$$\frac{P(t,S)}{P(t,T)} = \frac{P(0,S)}{P(0,T)}\mathcal{E}_t(\sigma_{S,T} \bullet W^T), \quad t \leq S \wedge T,$$

und der durch $P(t,T)$ *diskontierte Preisprozess ist ein Martingal bzgl.* $\mathbb{Q}^T$. *Außerdem gilt*

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}^T}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{P(t,S)P(0,T)}{P(t,T)P(0,S)} = \mathcal{E}_t(\sigma_{S,T} \bullet W^T), \quad t \leq S \wedge T.$$

Beweis: Es sei $u \leq t \leq S \wedge T$. Verwenden wir die Rechenregel

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left.\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} Y \big| \mathcal{F}_u\right] = \left.\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_u} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y|\mathcal{F}_u] \tag{4.1}$$

für jede $\mathbb{P}$-integrierbare Zufallsvariable Y, so ergibt sich

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}\left[\frac{P(t,S)}{P(t,T)}|\mathcal{F}_u\right] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(t,T)}{P(0,T)B(t)}\frac{P(t,S)}{P(t,T)}|\mathcal{F}_u\right]}{\frac{P(u,T)}{P(0,T)B(u)}} = \frac{\frac{P(u,S)}{P(0,T)B(u)}}{\frac{P(u,T)}{P(0,T)B(u)}} = \frac{P(u,S)}{P(u,T)}.$$

Also ist $P(t,S)/(P(t,T))$ ein Martingal, und es gilt

$$\frac{P(t,S)}{P(t,T)} = \frac{\frac{P(t,S)}{B(t)}}{\frac{P(t,T)}{B(t)}} = \frac{P(0,S)\mathcal{E}_t(v(\cdot,S) \bullet \overline{W})}{P(0,T)\mathcal{E}_t(v(\cdot,T) \bullet \overline{W})}$$

gemäß (3.4). Um die gewünschte Darstellung von $P(t,S)/(P(t,T))$ zu erhalten, verwendet man die Rechenregeln

$$\mathcal{E}_t(X)^{-1} = \mathcal{E}_t(-X)\exp(\langle X,X\rangle_t)$$

und

$$\mathcal{E}_t(X)\mathcal{E}_t(Y) = \mathcal{E}_t(X+Y)\exp(\langle X,Y\rangle_t),$$

die leicht aus der Definition des stochastischen Integrals folgen. Mit den Definitionen von $\sigma_{S,T}$ und W^T ergibt sich die Darstellung dann sofort. Zuletzt folgt wegen

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}^T}\right|_{\mathcal{F}_t} = \left.\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t}\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^T}\right|_{\mathcal{F}_t}$$

die zweite Aussage. □

Definition 4.4. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}^T$ wird als T-*Forward-Maß* bezeichnet. Da $\mathbb{Q}$ durch die Diskontierung mittels B definiert ist, heißt $\mathbb{Q}$ das *risikoneutrale Maß.*

Bemerkung 4.5. Wir sind daran interessiert, Auszahlungen X zur Fälligkeit T zu preisen, für die sich im Allgemeinen

$$\pi(t) = B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{B(T)}|\mathcal{F}_t\right]$$

ergibt, sofern

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{|X|}{B(T)}\right] < \infty \tag{4.2}$$

gilt. Will man den Preis tatsächlich ausrechnen, so benötigt man insbesondere die gemeinsame Verteilung von X und $1/B(T)$, die typischerweise nicht leicht fassbar ist. Nur in dem seltenen (und meist unrealistischen) Fall, dass X und $1/B(T)$ unter $\mathbb{Q}$ und bedingt auf $\mathcal{F}_t$ unabhängig sind, ergibt sich die leichter zu berechnende Formel

$$\pi(t) = B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(T,T)}{B(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right]\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}_t] = P(t,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}_t].$$

Der Vorteil bei der Modellierung mit Hilfe des T-Forward-Maßes ist, dass die analoge Formel ohne zusätzliche Bedingungen gilt.

Satz 4.6. *Es sei X eine Auszahlung zur Fälligkeit T, für die (4.2) erfüllt ist. Dann gilt*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[|X|] < \infty$$

und

$$\pi(t) = P(t,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[X|\mathcal{F}_t].$$

Beweis: Es gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[|X|] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{|X|}{P(0,T)B(T)}\right] = \frac{1}{P(0,T)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{|X|}{B(T)}\right] < \infty,$$

und die Preisformel folgt gemäß

$$\begin{aligned}\pi(t) &= P(0,T)B(t)E_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{P(0,T)B(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right]\\ &= P(0,T)B(t)\frac{P(t,T)}{P(0,T)B(t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[X|\mathcal{F}_t] = P(t,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[X|\mathcal{F}_t],\end{aligned}$$

wobei wir (4.1) verwendet haben. □

Bemerkung 4.7. Satz 4.6 legt nahe, dass man direkt die Dynamik der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{Q}^T$ für alle Fälligkeiten T modelliert, anstatt überhaupt das risikoneutrale Maß $\mathbb{Q}$ zu definieren. Dies kann formale Schwierigkeiten bereiten, da die Maße $\mathbb{Q}^T$ mittels $\mathbb{Q}$ definiert sind und nicht klar ist, dass für jede Spezifikation der $\mathbb{Q}^T$ ein gemeinsames risikoneutrales Maß existiert.

Korollar 4.8. *Ist $\sigma(\cdot,T) \in \mathcal{L}^2$, so gilt*

$$f(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[r(T)|\mathcal{F}_t].$$

Beweis: Nach Satz 3.8 gilt

$$\begin{aligned}f(t,T) &= f(0,T) - \int_0^t \sigma(s,T)v(s,T)^* ds + \int_0^t \sigma(s,T)d\overline{W}(s)\\ &= f(0,T) + \int_0^t \sigma(s,T)dW^T(s),\end{aligned}$$

so dass die Forward-Rate ein $\mathbb{Q}^T$-Martingal ist. Die Aussage ergibt sich dann aus $r(T) = f(T,T)$. □

Bemerkung 4.9. Korollar 4.8 zeigt, dass die aktuelle Forward-Rate $f(t,T)$ nur unter einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsmaß ein sinnvoller Schätzer für die zukünftige Short-Rate $r(T)$ ist (vgl. auch Beispiel 2.18).

Definition 4.10. Die Größe

$$R_\infty(t) = \lim_{T\to\infty} R(t,T)$$

heißt *asymptotische Long-Rate.*

Satz 4.11. (Dybvig-Ingersoll-Ross) *Für $s \le t$ gilt*

$$R_\infty(s) \le R_\infty(t)$$

fast sicher, sofern beide Größen existieren.

Beweis: Es seien $s < t$ so gewählt, dass die beiden Größen existieren. Dann existiert auch $p(u) = \exp(-R_\infty(u))$ für $u \in \{s,t\}$, und es genügt, $p(s) \ge p(t)$ zu beweisen. Der Satz von der majorisierten Konvergenz und Definition 1.7 liefern

$$p(u) = \lim_{T\to\infty} \exp(-R(u,T)) = \lim_{T\to\infty} P(u,T)^{\frac{1}{T}},$$

und es gilt

$$\frac{P(s,T)}{P(s,t)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^t}[P(t,T)|\mathcal{F}_s]$$

unter dem Forward-Maß $\mathbb{Q}^t$; vgl. Satz 4.6. Wegen $P(s,t)^{1/T} \to 1$ folgt

$$p(s) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^t}[P(t,T)|\mathcal{F}_s]^{\frac{1}{T}}$$

fast sicher. Es sei nun $X \ge 0$ beschränkt mit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^t}[X] = 1$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^t}[Xp(t)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^t}[\liminf_{T\to\infty} XP(t,T)^{\frac{1}{T}}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^t}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^t}[\liminf_{T\to\infty} XP(t,T)^{\frac{1}{T}}|\mathcal{F}_s]] \\
&\le \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^t}[\liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^t}[XP(t,T)^{\frac{1}{T}}|\mathcal{F}_s]] \\
&\le \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^t}[\liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^t}[X^{\frac{T}{T-1}}|\mathcal{F}_s]^{\frac{T-1}{T}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^t}[P(t,T)|\mathcal{F}_s]^{\frac{1}{T}}]
\end{aligned}$$

aus den bedingten Versionen des Lemmas von Fatou und der Hölder-Ungleichung. Der bedingte Satz von der majorisierten Konvergenz liefert zudem

$$\liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^t}[X^{\frac{T}{T-1}}|\mathcal{F}_s]^{\frac{T-1}{T}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^t}[X|\mathcal{F}_s],$$

woraus sich $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^t}[Xp(t)] \le \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^t}[Xp(s)]$ ergibt. Da X beliebig ist, folgt die Aussage nun leicht. □

Bemerkung 4.12. Wir betrachten im Folgenden eine europäische Call-Option auf eine in S fällige Anleihe, die zur Zeit $T < S$ zum Preis K ausgeübt werden kann. Ohne Einschränkung betrachten wir den Zeitpunkt $t = 0$, so dass sich

$$\begin{aligned}
\pi &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[B(T)^{-1}(P(T,S) - K)^+\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B(T)^{-1}P(T,S)1_{\{P(T,S)\ge K\}}] - K\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B(T)^{-1}1_{\{P(T,S)\ge K\}}]
\end{aligned}$$

ergibt. Für den ersten Ausdruck gilt

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B(T)^{-1}P(T,S)1_{\{P(T,S)\geq K\}}] = P(0,S)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}\left[\frac{P(T,S)B(S)}{B(T)}1_{\{P(T,S)\geq K\}}\right] \\
=&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}\left[\frac{P(T,S)}{B(T)}1_{\{P(T,S)\geq K\}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}\left[\frac{P(0,S)B(S)}{P(S,S)}\big|\mathcal{F}_T\right]\right] \\
=&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}\left[\frac{P(T,S)}{B(T)}1_{\{P(T,S)\geq K\}}\frac{P(0,S)B(T)}{P(T,S)}\right] = P(0,S)\mathbb{Q}^S(P(T,S)\geq K),
\end{aligned}
$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$
\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^S}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \frac{P(0,S)B(t)}{P(t,S)}
$$

ein $\mathbb{Q}^S$-Martingal ist. Mit Satz 4.6 ergibt sich dann

$$
\begin{aligned}
\pi &= P(0,S)\mathbb{Q}^S(P(T,S)\geq K) - KP(0,T)\mathbb{Q}^T(P(T,S)\geq K) \\
&= P(0,S)\mathbb{Q}^S\left(\frac{P(T,T)}{P(T,S)}\leq\frac{1}{K}\right) - KP(0,T)\mathbb{Q}^T\left(\frac{P(T,S)}{P(T,T)}\geq K\right).
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Lemma 4.3 liefert

$$
\frac{P(t,U)}{P(t,V)} = \frac{P(0,U)}{P(0,V)}\mathcal{E}_t(\sigma_{U,V}\bullet W^V), \quad t\leq U\wedge V,
$$

also

$$
\begin{aligned}
\pi =&P(0,S)\mathbb{Q}^S\left(\mathcal{E}_T(\sigma_{T,S}\bullet W^S)\leq\frac{P(0,S)}{KP(0,T)}\right) \\
&- KP(0,T)\mathbb{Q}^T\left(\mathcal{E}_T(\sigma_{S,T}\bullet W^T)\geq\frac{KP(0,T)}{P(0,S)}\right) \\
=&P(0,S)\mathbb{Q}^S\left(\exp\left(\int_0^T\sigma_{T,S}(u)dW^S(u)-\frac{1}{2}\int_0^T||\sigma_{T,S}(u)||^2du\right)\leq\frac{P(0,S)}{KP(0,T)}\right) \\
&- KP(0,T)\mathbb{Q}^T\left(\exp\left(\int_0^T\sigma_{S,T}(u)dW^T(u)-\frac{1}{2}\int_0^T||\sigma_{S,T}(u)||^2du\right)\geq\frac{KP(0,T)}{P(0,S)}\right).
\end{aligned}
$$

Unter der Annahme, dass die

$$
\sigma(t,T) = (\sigma_1(t,T),\ldots,\sigma_d(t,T))^*
$$

aus Annahme 3.1 (und damit auch die $\sigma_{S,T}(u)$) deterministische Funktionen sind, ergibt sich also

$$
\begin{aligned}
\pi =&P(0,S)\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{P(0,S)}{KP(0,T)}\right)+\frac{1}{2}\int_0^T||\sigma_{T,S}(u)||^2du}{\sqrt{\int_0^T||\sigma_{T,S}(u)||^2du}}\right) \\
&- KP(0,T)\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{P(0,S)}{KP(0,T)}\right)-\frac{1}{2}\int_0^T||\sigma_{T,S}(u)||^2du}{\sqrt{\int_0^T||\sigma_{T,S}(u)||^2du}}\right).
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir $1-\Phi(x)=\Phi(-x)$ verwendet.

Beispiel 4.13. Im Vasiček-Modell gilt

$$dr(t) = (b + \beta r(t))dt + \sigma d\overline{W}(t)$$

und

$$P(t,T) = \exp(-A(t,T) - B(t,T)r(t))$$

mit

$$B(t,T) = \frac{1}{\beta}\left(\exp(\beta(T-t)) - 1\right).$$

Dann folgt aus

$$f(t,T) = \partial_T A(t,T) + \partial_T B(t,T)r(t)$$

die Dynamik

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma \exp(\beta(T-t))d\overline{W}(t)$$

für einen geeigneten Drift $\alpha(t,T)$. Insbesondere gilt also

$$\sigma(t,T) = \sigma \exp(\beta(T-t)),$$

und die Preisformel aus Bemerkung 4.12 ist anwendbar.

Bemerkung 4.14. Das Verfahren aus Bemerkung 4.12 lässt sich auch verwenden, um die klassische Black-Scholes-Formel zu verallgemeinern. Dazu sei ein System aus einer risikolosen Anlageform B und einer Aktie S gemäß der Dynamik

$$\begin{aligned} dB &= Brdt, \quad B(0) = 1, \\ dS &= Srdt + S\Sigma d\overline{W}, \quad S(0) > 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

gegeben, wobei die Volatilität $\Sigma \in \mathbb{R}^d$ konstant und die Short-Rate r gemäß (3.2) stochastisch ist. Der Preis einer europäischen Call-Option mit Ausübungspreis K und Fälligkeit T zur Zeit $t = 0$ ist durch

$$\pi = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{B(T)}(S(T)-K)^+\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S(T)}{B(T)}1_{\{S(T)\geq K\}}\right] - K\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{B(T)}1_{\{S(T)\geq K\}}\right]$$

gegeben. Wir definieren analog zum T-Forward-Maß $\mathbb{Q}^T$ ein Maß $\mathbb{Q}^{(S)} \sim \mathbb{Q}$, für das S als Numeraire fungiert. Konkret setzen wir

$$\frac{d\mathbb{Q}^{(S)}}{d\mathbb{Q}} = \frac{S(T)}{S(0)B(T)} = \mathcal{E}_T(\Sigma \bullet \overline{W}),$$

wobei sich die letzte Identität wegen

$$S(T) = S(0)\mathcal{E}_T\left(\int_0^\cdot r(u)du + \int_0^\cdot \Sigma d\overline{W}(u)\right)$$

ergibt. Insbesondere setzen wir $W^{(S)}(t) = \overline{W}(t) - \Sigma^* t$. Dieselbe Rechnung wie in Bemerkung 4.12 liefert

$$\begin{aligned} \pi &= S(0)\mathbb{Q}^{(S)}(S(T) \geq K) - KP(0,T)\mathbb{Q}^T(S(T) \geq K) \\ &= S(0)\mathbb{Q}^{(S)}\left(\frac{P(T,T)}{S(T)} \leq \frac{1}{K}\right) - KP(0,T)\mathbb{Q}^T\left(\frac{S(T)}{P(T,T)} \geq K\right). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion sind $\frac{P(t,T)}{S(t)}$ bzw. $\frac{S(t)}{P(t,T)}$ Martingale bzgl. $\mathbb{Q}^{(S)}$ bzw. $\mathbb{Q}^T$. Um deren exakte Verteilung zu bestimmen, berechnen wir zunächst mit Hilfe der Itō-Formel

$$\begin{aligned} d\frac{S(t)}{P(t)} &= \frac{1}{P(t)}dS(t) - \frac{S(t)}{P(t)^2}dP(t) - \frac{1}{P(t)^2}d\langle S,P\rangle_t + \frac{S(t)}{P(t)^3}d\langle P,P\rangle_t \\ &= \alpha(t,T)dt + \frac{S(t)}{P(t)}(\Sigma - v(t,T))d\overline{W}(t) \\ &= (\alpha(t,T) + v(t,T)^*)dt + \frac{S(t)}{P(t)}(\Sigma - v(t,T))dW^T(t), \end{aligned}$$

wobei wir den Drift $\alpha(t,T)$ nicht weiter spezifizieren und wieder $P(t) = P(t,T)$ gesetzt haben. Aufgrund der Martingaleigenschaft folgt

$$d\frac{S(t)}{P(t,T)} = \frac{S(t)}{P(t,T)}(\Sigma - v(t,T))dW^T(t)$$

bzw.

$$\frac{S(T)}{P(T,T)} = \frac{S(0)}{P(0,T)}\mathcal{E}_T((\Sigma - v(\cdot,T)) \bullet W^T).$$

Analog lässt sich

$$\frac{P(T,T)}{S(T)} = \frac{P(0,T)}{S(0)}\mathcal{E}_T(-(\Sigma - v(\cdot,T)) \bullet W^{(S)})$$

herleiten, so dass sich insgesamt analog zu Bemerkung 4.12

$$\begin{aligned} \pi =& S(0)\Phi\Bigg(\frac{\log\big(\frac{S(0)}{KP(0,T)}\big) + \frac{1}{2}\int_0^T ||\Sigma - v(u,T)||^2du}{\sqrt{\int_0^T ||\Sigma - v(u,T)||^2du}}\Bigg) \\ &- KP(0,T)\Phi\Bigg(\frac{\log\big(\frac{S(0)}{KP(0,T)}\big) - \frac{1}{2}\int_0^T ||\Sigma - v(u,T)||^2du}{\sqrt{\int_0^T ||\Sigma - v(u,T)||^2du}}\Bigg) \end{aligned}$$

ergibt. Im Fall einer konstanten Short-Rate, d.h. insbesondere $v(\cdot,T) = 0$, ergibt sich die klassische Black-Scholes-Formel.

Definition 4.15. Es sei $\mathcal{Y}$ eine in T fällige Größe. Ein *Forward* auf $\mathcal{Y}$ zur Zeit $t \le T$ ist eine Vereinbarung, wonach der Käufer des Forwards zur Zeit T den Betrag $f(t;T,\mathcal{Y})$ bezahlt und dafür $\mathcal{Y}$ erhält. Der Preis $f(t;T,\mathcal{Y})$ wird dabei so bestimmt, dass

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\exp\big(-\int_t^T r(s)ds\big)(\mathcal{Y} - f(t;T,\mathcal{Y}))\big|\mathcal{F}_t\Big] = 0 \tag{4.5}$$

gilt.

Bemerkung 4.16. Wegen Satz 2.2 gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\exp\big(-\int_t^T r(s)ds\big)\big|\mathcal{F}_t\Big] = P(t,T),$$

so dass die Bedingung (4.5) äquivalent zu

$$f(t;T,\mathcal{Y}) = \frac{1}{P(t,T)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\exp\big(-\int_t^T r(s)ds\big)\mathcal{Y}\big|\mathcal{F}_t\Big] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[\mathcal{Y}|\mathcal{F}_t]$$

ist. Dabei haben wir für die letzte Identität wieder (4.1) verwendet.

Beispiel 4.17. Der Forward-Preis zur Zeit t für

(i) einen Euro mit Fälligkeit T ist 1;

(ii) eine S-Anleihe, die zur Zeit $T \leq S$ geliefert wird, ist $P(t,S)/P(t,T)$, da $P(t,S)/B(t)$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist;

(iii) eine Aktie S gemäß (4.4), die zur Zeit T geliefert wird, ist $S(t)/P(t,T)$, da $S(t)/B(t)$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist.

Definition 4.18. Es sei $\mathcal{Y}$ eine in T fällige Größe. Ein *Future* auf $\mathcal{Y}$ besteht aus einem Preisprozess $F(t;T,\mathcal{Y})$, der es erlaubt, zu jeder Zeit $t \leq T$ ohne Zahlung eines Betrages das Geschäft zu beginnen oder zu beenden. Geld fließt danach wie folgt:

- Zur Zeit T bezahlt der Käufer des Futures den Betrag $F(T;T,\mathcal{Y})$ und erhält dafür vom Verkäufer $\mathcal{Y}$.
- In jedem infinitesimalen Zeitraum $[s, s+\Delta s]$ zwischen t und T zahlt der Käufer den Betrag $F(s;T,\mathcal{Y}) - F(s+\Delta s;T,\mathcal{Y})$ an den Verkäufer.

Bemerkung 4.19. Futures ermöglichen, dass man sich gegen Schwankungen im Preis eines gewissen Gutes absichert, ohne das Gut tatsächlich besitzen zu müssen. Dies kann insbesondere dann sinnvoll sein, wenn gewisse Güter (z.B. Rohstoffe) nicht am Aktienmarkt gehandelt werden. Da man $\mathcal{Y}$ nicht physisch besitzen muss, wenn man vor der Zeit T aus dem Geschäft aussteigt, ermöglicht es andererseits, bloß auf die Preisentwicklung solcher Rohstoffe zu spekulieren, was unter Umständen die Preise der Rohstoffe beeinflussen kann.

Satz 4.20. *Es sei $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|\mathcal{Y}|] < \infty$. Dann gilt*

$$F(t;T,\mathcal{Y}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathcal{Y}|\mathcal{F}_t].$$

Beweis: Wir geben nur eine heuristische Begründung und nehmen dazu an, dass $F(t) = F(t;T,\mathcal{Y})$ ein Itō-Prozess mit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\langle F, F\rangle_T] < \infty$$

ist. Offensichtlich zahlt der Besitzer des Futures im Zeitraum $(t,T]$ den diskontierten Betrag $V = \lim_N V_N$ mit

$$\begin{aligned} V_N &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{B(t_i)}(F(t_i) - F(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{B(t_{i-1})}(F(t_i) - F(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{B(t_i)} - \frac{1}{B(t_{i-1})}\right)(F(t_i) - F(t_{i-1})) \end{aligned}$$

an den Verkäufer des Futures, wobei der Grenzwert über alle verschachtelten Partitionen von $[t,T]$ mit $\max_i |t_i - t_{i-1}| \to 0$ gebildet wird. Wir wissen aus der stochastischen Analysis, dass

$$V = \int_t^T \frac{1}{B(s)} dF(s) + \int_t^T d\langle \frac{1}{B}, F\rangle_s = \int_t^T \frac{1}{B(s)} dF(s)$$

gilt, wobei sich die letzte Identität dadurch ergibt, dass $1/B$ von beschränkter Variation ist. Da der Wert eines Futures zur Zeit t gleich Null ist, muss

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\int_t^T \frac{1}{B(s)} dF(s) \big| \mathcal{F}_t\Big] = 0$$

sein. Also ist

$$M(t) = \int_0^t \frac{1}{B(s)} dF(s) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\int_0^T \frac{1}{B(s)} dF(s) \big| \mathcal{F}_t\Big]$$

ein Martingal bzgl. $\mathbb{Q}$. Wegen

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\int_t^T B(s)^2 d\langle M, M\rangle_s\Big] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\langle F, F\rangle_T] < \infty$$

ist $B \in \mathcal{L}^2(M)$ und

$$F(t) = \int_0^t B(s) dM(s).$$

Mit $F(T) = F(T; T, \mathcal{Y}) = \mathcal{Y}$ folgt die Aussage. □

Satz 4.21. *Es sei S der Preis einer Aktie mit der Dynamik*

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + \rho(t)d\overline{W}(t)$$

unter $\mathbb{Q}$. Ferner seien $T \geq 0$ fest und die Volatilitäten $\rho(\cdot)$ bzw. $v(\cdot, T)$ aus Satz 3.5 deterministisch. Setzt man $\mu(s) = v(s, T) - \rho(s)$, so gilt

$$f(t; T, S(T)) = \frac{S(0)}{P(0, T)} \mathcal{E}_t(-\mu \bullet \overline{W}) \exp\Big(\int_0^t \mu(s) v(s, T)^* ds\Big)$$

und

$$F(t; T, S(T)) = f(t; T, S(T)) \exp\Big(\int_t^T \mu(s) v(s, T)^* ds\Big), \quad t \leq T.$$

Beweis: Wir verwenden wieder die Rechenregel

$$\mathcal{E}_t(X)^{-1} = \mathcal{E}_t(-X) \exp(\langle X, X\rangle_t),$$

und außerdem ist Beispiel 4.17 (iii) aufgrund der Struktur von S anwendbar. Wegen

$$\begin{aligned} f(t; T, S(T)) &= \frac{S(t)}{P(t, T)} = \frac{S(0)}{P(0, T)} \frac{S(t)}{S(0)} \frac{P(0, T)}{P(t, T)} \\ &= \frac{S(0)}{P(0, T)} \mathcal{E}_t\Big(\int_0^{\cdot} r(s) ds + \int_0^{\cdot} \rho(s) d\overline{W}(s)\Big) B(t)^{-1} \mathcal{E}_t(v(\cdot, T) \bullet \overline{W})^{-1} \end{aligned}$$

gemäß (3.4) ergibt sich dann

$$f(t; T, S(T)) = \frac{S(0)}{P(0, T)} \mathcal{E}_t(-\mu \bullet \overline{W}) \exp\Big(\int_0^t \mu(s) v(s, T)^* ds\Big).$$

Wir verwenden die Martingaleigenschaft von $\mathcal{E}_t(-\mu \bullet \overline{W})$ und dass $\mu(s)$ und $v(s, T)$ deterministisch sind, um aus $f(T; T, S(T)) = S(T)$

$$F(t; T, S(T)) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(T; T, S(T)) | \mathcal{F}_t] = f(t; T, S(T)) \exp\Big(\int_t^T \mu(s) v(s, T)^* ds\Big)$$

zu erhalten. □

Bemerkung 4.22.

(i) Es ist

$$d\langle S, P(\cdot, T)\rangle_t = S(t)P(t,T)\rho(t)v(t,T)^* dt.$$

Ist diese instantane Kovariation immer negativ, so dominiert der Future-Preis den Forward-Preis.

(ii) Im Gaußschen Heath-Jarrow-Merton-Modell aus Bemerkung 4.12 lässt sich ein zu Satz 4.21 analoges Resultat für den Zusammenhang zwischen der Forward-Rate $f(t,T)$ und Future-Rates herleiten (vgl. Lemma 8.1 in Filipović (2009)). Dabei nutzt man aus, dass für die Forward-Rate gemäß Korollar 4.8 und Bemerkung 4.16 die Darstellung

$$f(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[r(T)|\mathcal{F}_t]$$

gilt. Entsprechend setzt man den Preis der zugehörigen Future-Rate über

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r(T)|\mathcal{F}_t]$$

fest.

(iii) Ähnliche Interpretationen und Zusammenhänge existieren auch für die diskreten Future- bzw- Forward-Raten.

Kapitel 5

Faktormodelle

Bemerkung 5.1. Wir haben in Beispiel 2.18 gesehen, dass jedes affine Short-Rate-Modell via

$$P(t,T) = \exp(-A(t,T) - B(t,T)r(t))$$

eine Forward-Rate der Form

$$f(t,T) = -\frac{\partial \log P(t,T)}{\partial T} = \partial_T A(t,T) + \partial_T B(t,T)r(t)$$

induziert. Insbesondere ergibt sich sowohl im Vasiček- als auch im Cox-Ingersoll-Ross-Modell jeweils eine Forward-Rate der Form

$$f(t,T) = \phi(T-t, r(t))$$

für eine geeignete deterministische Funktion ϕ (vgl. Beispiel 2.14 bzw. Beispiel 2.16). Derartige Modelle sind praktisch, wenn man tatsächlich Preise ausrechnen will, sind aber relativ unflexibel, weil sie annehmen, dass die Forward-Rate $f(t,T)$ nur von $r(t)$ als einzigem Faktor abhängt.

Definition 5.2. Es sei $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen mit nichtleerem Inneren und Z ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{Q})$ mit

$$dZ(t) = b(Z(t))dt + \rho(Z(t))d\overline{W}(t), \quad Z(0) = z, \tag{5.1}$$

und Werten in $\mathcal{Z}$, wobei $\overline{W}$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung bezeichnet. Ein Modell der Form

$$f(t,T) = \phi(T-t, Z(t)) \tag{5.2}$$

für eine deterministische Funktion ϕ heißt *Faktormodell*.

Annahme 5.3. Wir nehmen an, dass die folgenden Bedingungen für ein Faktormodell erfüllt sind:

(i) Es gilt $\phi \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathcal{Z})$.

(ii) Die Funktion $b : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^m$ ist stetig, und $\rho : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^{m\times d}$ ist messbar, so dass

$$a(z) = \rho(z)\rho(z)^* \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

ebenfalls stetig ist.

(iii) Die stochastische Differentialgleichung (5.1) besitzt für jedes $z \in \mathcal{Z}$ eine Lösung mit Werten in $\mathcal{Z}$.

(iv) Für jedes $z \in \mathcal{Z}$ ist $\mathbb{Q}$ das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß für die Preise

$$P(t,T) = \exp\big(-\int_t^T f(t,u)du\big) = \exp\big(-\int_0^{T-t} \phi(x, Z^z(t))dx\big).$$

Bemerkung 5.4. Bedingung 5.3 (iv) ist wegen

$$P(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\exp\big(-\int_t^T r(s)ds\big)\big|\mathcal{F}_t\Big]$$

gemäß Satz 2.2 genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{P(t.T)}{B(t)} = \frac{\exp\big(-\int_0^{T-t}\phi(x, Z^z(t))dx\big)}{\exp\big(\int_0^t \phi(0, Z^z(s))ds\big)} \tag{5.3}$$

ein lokales Martingal bzgl. $\mathbb{Q}$ ist. Dabei haben wir $r(t) = \phi(0, Z^z(t))$ verwendet.

Lemma 5.5. *Eine Forward-Rate der Form (5.2) ist ein Heath-Jarrow-Merton-Modell gemäß (3.1) und Annahme 3.1, wobei Drift und Volatilität durch*

$$\begin{aligned}\alpha(t,T) = &-\partial_x\phi(T-t, Z(t)) + \sum_{i=1}^m b_i(Z(t))\partial_{z_i}\phi(T-t, Z(t)) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(Z(t))\partial_{z_i}\partial_{z_j}\phi(T-t, Z(t))\end{aligned}$$

und

$$\sigma_j(t,T) = \sum_{i=1}^m \rho_{ij}(Z(t))\partial_{z_i}\phi(T-t, Z(t)), \quad j = 1, \dots, d$$

gegeben sind.

Beweis: Die Darstellung (3.1) folgt direkt aus (5.2) und der Itō-Formel. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass auch Annahme 3.1 erfüllt ist. □

Satz 5.6. *Annahme 5.3 (iv) ist äquivalent zu*

$$\begin{aligned}\partial_x\Phi(x,z) = &\phi(0,z) + \sum_{i=1}^m b_i(z)\partial_{z_i}\Phi(x,z) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(z)(\partial_{z_i}\partial_{z_j}\Phi(x,z) - \partial_{z_i}\Phi(x,z)\partial_{z_j}\Phi(x,z))\end{aligned} \tag{5.4}$$

für alle $(x,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Z}$, wobei wir

$$\Phi(x,z) = \int_0^x \phi(u,z)du$$

setzen.

Beweis: Annahme 5.3 (iv) bzw. Bedingung (5.3) ist gemäß (3.3) und wegen $\gamma \equiv 0$ äquivalent zu

$$b(t,T) = -\int_t^T \alpha(t,u)du + \frac{1}{2}||v(t,T)||^2 = 0 \text{ für alle } T \; d\mathbb{P} \otimes dt\text{-fast sicher,}$$

also

$$\begin{aligned}
&-\phi(T-t,Z(t)) + \phi(0,Z(t)) + \sum_{i=1}^m b_i(Z(t))\partial_{z_i}\Phi(T-t,Z(t)) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(Z(t))\partial_{z_i}\partial_{z_j}\Phi(T-t,Z(t)) \\
=&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^m \rho_{ij}(Z(t))\partial_{z_i}\Phi(T-t,Z(t))\right)^2 \\
=&\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^m a_{kl}(Z(t))\partial_{z_k}\Phi(T-t,Z(t))\partial_{z_l}\Phi(T-t,Z(t))
\end{aligned}$$

für alle $t \leq T$ und alle Startpunkte $z = Z(0)$ $d\mathbb{P} \otimes dt$-fast sicher. Insbesondere erhält man für $t \to 0$ und $T = x$ die Aussage. □

Definition 5.7. Die Funktionen a, b und die Parametrisierung ϕ heißen *konsistent*, falls (5.4) gilt.

Satz 5.8. *Es seien*

$$\partial_{z_i}\Phi(\cdot,z) \quad \textit{und} \quad \frac{1}{2}(\partial_{z_i}\partial_{z_j}\Phi(\cdot,z) - \partial_{z_i}\Phi(\cdot,z)\partial_{z_j}\Phi(\cdot,z))$$

für alle $1 \leq i \leq j \leq m$ *linear unabhängige Funktionen für alle* z *in einer dichten Teilmenge* $\mathcal{D}$ *von* $\mathcal{Z}$. *Falls dann eine konsistente Parametrisierung* (a,b) *existiert, so ist sie eindeutig.*

Beweis: Es sei $M = m + m(m+1)/2$ die Anzahl der unbekannten Funktionen b_i und a_{ij}, $1 \leq i \leq j \leq m$. Dann existieren $0 \leq x_1 < \ldots < x_M$, so dass die $M \times M$-Matrix mit der k-ten Zeile

$$\partial_{z_i}\Phi(x_k,z) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(\partial_{z_i}\partial_{z_j}\Phi(x_k,z) - \partial_{z_i}\Phi(x_k,z)\partial_{z_j}\Phi(x_k,z)), \quad 1 \leq i \leq j \leq m,$$

invertierbar ist. In diesem Fall ergeben sich $b(z)$ und $a(z)$ für $z \in \mathcal{D}$ als eindeutige Lösung des Gleichungssystems (5.4). Nach Annahme an Φ sind die Funktionen b und a insbesondere stetig, so dass sie für alle $z \in \mathcal{Z}$ eindeutig festgelegt sind. □

Bemerkung 5.9. Es gibt im Wesentlichen zwei Möglichkeiten, eine konsistente Parametrisierung zu erhalten. Ein Ansatz besteht darin, $\phi(0,\cdot)$ sowie die Dynamik a und b festzulegen und nach einer Lösung Φ der partiellen Differentialgleichung (5.4) zu suchen. Alternativ lässt sich mit einem spezifischen Modell $f(t,T) = \phi(T-t, Z(t))$, also einer fest gewählten Funktion ϕ, für die Forward-Rate arbeiten. Satz 5.8 zeigt, dass in diesem Fall die Funktionen a und b (und damit die Dynamik der Faktoren Z) in der Regel bereits festgelegt sind.

Definition 5.10. Ein Modell der Form

$$\phi(x,z) = g_0(x) + g_1(x)z_1 + \ldots + g_m(x)z_m \tag{5.5}$$

für Funktionen $g_0, \ldots, g_m$ heißt ein *affines Zinsstrukturmodell.*

Satz 5.11. *Es sei ϕ ein affines Zinsstrukturmodell, und wir setzen*

$$G_i(x) = \int_0^x g_i(u)du, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Dann gilt:

(i) Sind die Funktionen

$$G_1, \ldots, G_m, G_1G_1, G_1G_2 \ldots, G_mG_m \tag{5.6}$$

linear unabhängig und sind (a,b) konsistent, so sind die Funktionen a und b affin von der Form

$$a_{ij}(z) = a_{ij} + \sum_{k=1}^m \alpha_{k;ij} z_k, \quad b_i(z) = b_i + \sum_{j=1}^m \beta_{ij} z_j. \tag{5.7}$$

Außerdem lösen die Funktionen G_i die Ricatti-Gleichungen

$$\partial_x G_0(x) = g_0(0) + \sum_{i=1}^m b_i G_i(x) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a_{ij} G_i(x) G_j(x), \tag{5.8}$$

$$\partial_x G_k(x) = g_k(0) + \sum_{i=1}^m \beta_{ki} G_i(x) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \alpha_{k;ij} G_i(x) G_j(x). \tag{5.9}$$

mit den Anfangsbedingungen $G_i(0) = 0$.

(ii) Sind a und b affin von der Form (5.7) und die $g_i(0)$ beliebige Konstanten, und lösen die Funktionen G_i die Ricatti-Gleichungen (5.8) und (5.9) mit den Anfangsbedingungen $G_i(0) = 0$, so ist das affine Modell (5.5) konsistent.

Beweis:

(i) Für affine Modelle ist (5.4) äquivalent zu

$$\begin{aligned} & g_0(x) - g_0(0) + \sum_{i=1}^m z_i(g_i(x) - g_i(0)) \\ &= \sum_{i=1}^m b_i(z) G_i(x) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(z) G_i(x) G_j(x). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Sind die Funktionen aus (5.6) linear unabhängig und (a,b) konsistent, so lässt sich (5.10) wie im Beweis von Satz 5.8 nach a und b auflösen, und wir erhalten die Struktur aus (5.7), da die linke Seite von (5.10) affin in z ist. Setzt man diese Struktur von a und b in (5.10) ein, erhält man (5.8) und (5.9).

(ii) Unter den gegebenen Voraussetzungen ist aus denselben Gründen wie im Beweis von (i) die Bedingung (5.10) erfüllt. Also gilt (5.4). □

Bemerkung 5.12.

(i) Wir erhalten im Fall

$$A(t,T) = G_0(T-t) \quad \text{und} \quad B(t,T) = G_1(T-t)$$

das affine Zinsstrukturmodell aus Definition 2.10. In dieser Situation ist Satz 2.12, der ohne eine Annahme an die lineare Unabhängigkeit der G_i auskommt, ein Spezialfall von Satz 5.11 im Fall eines Faktors ($m = 1$). Man kann zeigen, dass die Bedingung der linearen Unabhängigkeit für $m \geq 2$ notwendig ist, um aus einer konsistenten Parametrisierung ein affines Modell zu erhalten.

(ii) Wegen

$$r(t) = f(t,t) = g_0(0) + g_1(0)Z_1(t) + \ldots + g_m(0)Z_m(t)$$

wählt man typischerweise $g_1(0) = 1$ und $g_i(0) = 0$ für $i \neq 1$ und identifiziert $Z_1(t)$ mit dem Short-Rate-Prozess $r(t)$.

Definition 5.13. Ein Modell der Form

$$\phi(x,z) = \sum_{|\mathbf{i}|=0}^{n} g_{\mathbf{i}}(x) z^{\mathbf{i}}$$

heißt *polynomielles Zinsstrukturmodell.* Dabei bezeichnen die $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m)$ Multiindizes und wir verwenden die übliche Notation $|\mathbf{i}| = i_1 + \ldots + i_m$ sowie $z^{\mathbf{i}} = z_1^{i_1} \cdots z_m^{i_m}$. Als Grad des Modells wird das größte n bezeichnet, so dass $|\mathbf{i}| = n$ und $g_{\mathbf{i}} \not\equiv 0$ gilt.

Bemerkung 5.14. Wir diskutieren im Folgenden vorwiegend den Fall $m = 1$, für den

$$\phi(x,z) = \sum_{i=0}^{n} g_i(x) z^i$$

gilt. In diesem Fall setzen wir wieder

$$G_i(x) = \int_0^x g_i(u)du.$$

Die folgenden Resultate lassen sich mit einer deutlich komplizierteren Notation, aber ohne viele inhaltliche Schwierigkeiten, auf den Fall $m \geq 2$ verallgemeinern.

Satz 5.15. *Es seien die G_i und G_iG_j linear unabhängig für $1 \leq i \leq j \leq n$ und $\rho \not\equiv 0$. Dann gilt: Liefert (a, b) eine konsistente Parametrisierung via ϕ, so gilt $n \in \{1, 2\}$. Außerdem ist $\deg b(z) \leq 1$, und es gilt $\deg a(z) = 0$ für $n = 2$ bzw. $\deg a(z) \leq 1$ für $n = 1$.*

Beweis: Bedingung (5.4) bedeutet

$$\sum_{i=0}^{n} (g_i(x) - g_i(0)) z^i = \sum_{i=0}^{n} G_i(x) B_i(z) - \sum_{i,j=0}^{n} G_i(x) G_j(x) A_{ij}(z), \tag{5.11}$$

wobei wir

$$B_i(z) = b(z)iz^{i-1} + \frac{1}{2}a(z)i(i-1)z^{i-2} \quad \text{und} \quad A_{ij}(z) = \frac{1}{2}a(z)ijz^{i-1}z^{j-1}$$

setzen. Gibt es nun eine konsistente Parametrisierung, so gilt insbesondere (5.11). Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der G_i und G_iG_j lässt sich die Lösung wieder explizit über eine inverse Matrix darstellen, und die $B_i(z)$ bzw. $A_{ij}(z)$ sind daher ebenfalls Polynome vom Grad n (oder geringer). Dies gilt insbesondere für

$$B_1(z) = b(z) \quad \text{und} \quad 2A_{11}(z) = a(z).$$

Da $a \not\equiv 0$ nach Voraussetzung gilt, kann

$$2A_{nn}(z) = a(z)n^2z^{2n-2}$$

nur dann ein Polynom vom Grad n oder geringer sein, wenn $2n-2 \leq n$, also $n \leq 2$ gilt. Im Fall $n = 1$ ist der Satz damit bewiesen. Für $n = 2$ ergibt sich $\deg a(z) = 0$, und mit $B_2(z) = 2b(z)z + a(z)$ folgt $\deg b(z) \leq 1$. □

Satz 5.16. *Es gelte*

(a) $\sup \mathcal{Z} = \infty$*;*

(b) b *und* ρ *erfüllen*

$$|b(z)| + |\rho(z)| \leq C(1 + |z|), \quad z \in \mathcal{Z};$$

(c) $\liminf_{z\to\infty} a(z) > 0$.

Dann impliziert die Existenz einer konsistenten Parametrisierung $n \in \{1, 2\}$.

Beweis: Gibt es eine konsistente Parametrisierung, so gilt (5.11), also

$$\sum_{i=0}^{n}(g_i(x) - g_i(0))z^i = b(z)\sum_{i=0}^{n} G_i(x)iz^{i-1} + \frac{1}{2}a(z)\left(\sum_{i=0}^{n} G_i(x)i(i-1)z^{i-2} - \Big(\sum_{i=0}^{n} G_i(x)iz^{i-1}\Big)^2\right).$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass diese Gleichung für $n > 2$, also $2n-2 > n$ erfüllt ist. Teilt man durch z^{2n-2}, $z \neq 0$, ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}a(z)\frac{\big(\sum_{i=0}^{n} G_i(x)iz^{i-1}\big)^2}{z^{2n-2}} \\
&= \frac{b(z)}{z}\frac{\sum_{i=0}^{n} G_i(x)iz^{i-1}}{z^{2n-3}} + \frac{a(z)}{2z^2}\frac{\sum_{i=0}^{n} G_i(x)i(i-1)z^{i-2}}{z^{2n-4}} \\
&\quad - \frac{\sum_{i=0}^{n}(g_i(x) - g_i(0))z^i}{z^{2n-2}},
\end{aligned}$$

und aufgrund von (a) gilt diese Identität für alle z groß genug. Gemäß (b) konvergiert die rechte Seite dann gegen Null. Anderseits gilt

$$\liminf_{z\to\infty} \frac{1}{2}a(z)\frac{\big(\sum_{i=0}^{n} G_i(x)iz^{i-1}\big)^2}{z^{2n-2}} = \frac{1}{2}\liminf_{z\to\infty} a(z)n^2G_n^2(x) > 0$$

nach (c) und für ein geeignetes x wegen $g_n \not\equiv 0$, da g_n nach Annahme 5.3 (i) stetig ist. Dies ergibt einen Widerspruch. □

Bemerkung 5.17. Bedingung (b) aus Satz 5.16 ist eine klassische Voraussetzung, die zusichert, dass eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung (5.1), sofern existent, endliche zweite Momente besitzt (vgl. Theorem 5.2.9 in Karatzas and Shreve (1991)).

Definition 5.18. Eine Familie

(i) der Form $\phi_{NS}(x, z) = z_1 + (z_2 + z_3 x)\exp(-z_4 x)$ heißt *Nelson-Siegel-Familie*;

(ii) der Form $\phi_S(x, z) = z_1 + (z_2 + z_3 x)\exp(-z_5 x) + z_4 x \exp(-z_6 x)$ heißt *Svensson-Familie*.

Satz 5.19. *Die eindeutige konsistente Lösung im Nelson-Siegel-Modell ist durch*

$$a(z) = 0, \quad b_1(z) = b_4(z) = 0, \quad b_2(z) = z_3 - z_2 z_4, \quad b_3(z) = -z_3 z_4$$

gegeben. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} Z_1(t) &\equiv z_1, \\ Z_2(t) &\equiv (z_2 + z_3 t)\exp(-z_4 t), \\ Z_3(t) &\equiv z_3 \exp(-z_4 t), \\ Z_4(t) &\equiv z_4 \end{aligned}$$

mit $Z(0) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Beweis: Der Beweis lässt sich zum Beispiel analog zum Beweis von Satz 5.21 führen. □

Bemerkung 5.20. Exponentiell-polynomielle Familien wie die aus Definition 5.18 werden in der Praxis häufig als Modell für die Entwicklung der Forward-Rate verwendet. Satz 5.19 zeigt, dass die einzig konsistente Lösung in der Hinsicht trivial ist, dass die zu Grunde liegenden Faktoren einem deterministischen Modell folgen.

Satz 5.21. *Das einzige nicht-triviale konsistente HJM-Modell für die Svensson-Familie ist durch*

$$\begin{aligned} &Z_1(t) \equiv z_1, \\ &dZ_2(t) = (z_3 \exp(-z_5 t) + z_4 \exp(-2z_5 t) - z_5 Z_2(t))dt + \sqrt{z_4 z_5}\exp(-z_5 t)d\overline{W}(t), \\ &Z_3(t) = z_3 \exp(-z_5 t), \\ &Z_4(t) = z_4 \exp(-2z_5 t), \\ &Z_6(t) \equiv 2Z_5(t) = 2z_5 \end{aligned}$$

gegeben, wobei die Parameter $(z_1, \dots, z_5)$ *durch*

$$f(0, x) = z_1 + (z_2 + z_3 x)\exp(-z_5 x) + z_4 x \exp(-2z_5 x)$$

bestimmt sind und $\overline{W}$ *eine Brownsche Bewegung bzgl.* $\mathbb{Q}$ *bezeichnet. Insbesondere ergibt sich als Short-Rate-Modell*

$$dr(t) = \big(z_1 z_5 + z_3 \exp(-z_5 t) + z_4 \exp(-2z_5 t) - z_5 r(t)\big)dt + \sqrt{z_4 z_5}\exp(-z_5 t)d\overline{W}(t).$$

Beweis: Leitet man (5.4) nach x ab, so ergibt sich als notwendige Bedingung

$$\begin{aligned}\partial_x\phi_S(x,z) = &\sum_{i=1}^m b_i(z)\partial_{z_i}\phi_S(x,z)\\ &+\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(z)\Big(\frac{1}{2}\partial_{z_i}\partial_{z_j}\phi_S(x,z)-\partial_{z_i}\phi_S(x,z)\int_0^x \partial_{z_j}\phi_S(u,z)du\Big)\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}&q_1(x,z)+q_2(x,z)\exp(-z_5x)+q_3(x,z)\exp(-z_6x)\\ &\quad+q_4(x,z)\exp(-2z_5x)+q_5(x,z)\exp(-(z_5+z_6)x)+q_6(x,z)\exp(-2z_6x)=0\end{aligned}$$

für geeignete Polynome $q_1,\ldots,q_6$ in x.

Wir nehmen zunächst an, dass

$$z_5\neq z_6,\quad z_5+z_6\neq 0,\quad z_i\neq 0 \text{ für alle } i=1,\ldots,6 \tag{5.12}$$

gilt. Aufgrund von

$$\partial_x\phi_S(x,z)=(-z_2z_5+z_3-z_3z_5x)\exp(-z_5x)+(z_4-z_4z_6x)\exp(-z_6x),$$

$$\nabla_z\phi_S(x,z)=\begin{pmatrix}1\\ \exp(-z_5x)\\ x\exp(-z_5x)\\ x\exp(-z_6x)\\ (-z_2x-z_3x^2)\exp(-z_5x)\\ -z_4x^2\exp(-z_6x)\end{pmatrix},$$

$\partial z_i\partial z_j\phi_S(x,z)=0$ für alle $1\le i,j\le 4$,

$$\nabla_z\partial z_5\phi_S(x,z)=\begin{pmatrix}0\\ -x\exp(-z_5x)\\ -x^2\exp(-z_5x)\\ 0\\ (z_2x^2+z_3x^3)\exp(-z_5x)\\ 0\end{pmatrix},\quad \nabla_z\partial z_6\phi_S(x,z)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ -x^2\exp(-z_6x)\\ 0\\ z_4x^3\exp(-z_6x)\end{pmatrix}$$

und

$$\int_0^x\nabla_z\phi_S(u,z)du=\begin{pmatrix}x\\ -\frac{1}{z_5}\exp(-z_5x)+\frac{1}{z_5}\\ (-\frac{x}{z_5}-\frac{1}{z_5^2})\exp(-z_5x)+\frac{1}{z_5^2}\\ (-\frac{x}{z_6}-\frac{1}{z_6^2})\exp(-z_6x)+\frac{1}{z_6^2}\\ (\frac{z_3}{z_5}x^2+(\frac{z_2}{z_5}+\frac{2z_3}{z_5^2})x+\frac{z_2}{z_5^2}+\frac{2z_3}{z_5^3})\exp(-z_5x)-\frac{z_2}{z_5^2}-\frac{2z_3}{z_5^3}\\ (\frac{z_4}{z_6}x^2+\frac{2z_4}{z_6^2}x+\frac{2z_4}{z_6^3})\exp(-z_6x)-\frac{2z_4}{z_6^3}\end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}q_1(x,z)&=-a_{11}(z)x+\ldots,\\ q_4(x,z)&=a_{55}(z)\frac{z_3^2}{z_5}x^4+\ldots,\\ q_6(x,z)&=a_{66}(z)\frac{z_4^2}{z_6}x^4+\ldots,\end{aligned}$$

wobei die Terme der Form ... Polynome in x von einem kleineren Grad bezeichnen. Aus (5.12) erhält man zunächst $a_{11}(z) = a_{55}(z) = a_{66}(z) = 0$, und da a symmetrisch und positiv definit ist, folgt sogar

$$a_{1j}(z) = a_{j1}(z) = a_{5j}(z) = a_{j5}(z) = a_{6j}(z) = a_{j6}(z) = 0, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Im nächsten Schritt ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} q_2(x,z) &= -b_5(z) z_3^2 x^2 + \dots, \\ q_3(x,z) &= -b_6(z) z_4^2 x^2 + \dots, \end{aligned}$$

auch $b_5(z) = b_6(z) = 0$, und man erhält

$$\begin{aligned} q_1(x,z) &= b_1(z), \\ q_4(x,z) &= a_{33}(z) \frac{1}{z^5} x^2 + \dots, \\ q_5(x,z) &= a_{34}(z) (\frac{1}{z_5} + \frac{1}{z_6}) x^2 + \dots, \\ q_4(x,z) &= a_{44}(z) \frac{1}{z^6} x^2 + \dots, \end{aligned}$$

also wieder

$$b_1(z) = a_{3j}(z) = a_{j3}(z) = a_{4j}(z) = a_{j4}(z) = 0, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Übrig bleibt

$$\begin{aligned} q_2(x,z) &= (b_3(z) + z_3 z_5) x + b_2(z) - z_3 - \frac{a_{22}(z)}{z_5} + z_2 z_5, \\ q_3(x,z) &= (b_4(z) + z_4 z_6) x - z_4, \\ q_4(x,z) &= a_{22}(z) \frac{1}{z_5} \end{aligned}$$

sowie $q_1(x,z) = q_5(x,z) = q_6(x,z) = 0$.

Gilt nun $2z_5 \neq z_6$, so ergibt sich auch $a_{22}(z) = 0$, und es gibt keine nicht-triviale Lösung. Andernfalls erzwingt $q_3(x,z) + q_4(x,z) = q_2(x,z) = 0$

$$\begin{aligned} a_{22}(z) &= z_4 z_5, \\ b_4(z) &= -2 z_5 z_4, \\ b_3(z) &= -z_3 z_5, \\ b_2(z) &= z_3 + z_4 - z_2 z_5. \end{aligned}$$

Da die so gewonnene Lösung für a und b stetig in z ist und die Menge aller z, die (5.12) erfüllt, dicht in $\mathcal{Z}$ liegt, lässt sich die Lösung auf alle $z \in \mathcal{Z}$ ausdehnen. Insbesondere sind alle Z_i bis auf Z_2 deterministisch, Z_1, Z_5 und Z_6 sind sogar konstant, und nur im Fall von

$$Z_6(t) \equiv 2 Z_5(t) \equiv 2 Z_5(0)$$

ist der Prozess nicht trivial. Außerdem erhält man mit $z_i = Z_i(0)$

$$\begin{aligned} Z_1(t) &\equiv z_1, \\ Z_3(t) &= z_3 \exp(-z_5 t), \\ Z_4(t) &= z_4 \exp(-2 z_5 t) \end{aligned}$$

und

$$dZ_2(t) = (z_3 \exp(-z_5 t) + z_4 \exp(-2z_5 t) - z_5 Z_2(t))dt + \sum_{j=1}^{d} \rho_{2j}(t) d\overline{W}_j(t),$$

wobei

$$\sum_{j=1}^{d} \rho_{2j}^2(t) = a_{22}(t) = z_4 z_5 \exp(-2z_5 t)$$

gilt. Insbesondere gilt für

$$\overline{W}(t) = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \frac{\rho_{2j}(s)}{\sqrt{z_4 z_5} \exp(-z_5 s)} d\overline{W}_j(s)$$

die Identität $\langle \overline{W}, \overline{W} \rangle_t = t$, so dass $\overline{W}$ gemäß Theorem 4.2 in Filipović (2009) eine Brownsche Bewegung bzgl. $\mathbb{Q}$ ist. Aus

$$r(t) = f(t,t) = \phi_S(0, Z(t)) = z_1 + Z_2(t)$$

ergibt sich dann die Aussage für die Short-Rate. □

Bemerkung 5.22. Satz 5.21 zeigt, dass auch das Svensson-Modell nur sehr eingeschränkt in der Lage ist, konsistente Forward-Rates zu reproduzieren. Insbesondere ist die Short-Rate (in der Form der Erweiterung des Vasiček-Modells durch Hull und White; vgl. Bemerkung 2.19) im Wesentlichen der einzige nicht-deterministische Faktor, der in das Modell eingeht. Für die Exponenten ist zudem keinerlei Variabilität in der Zeit möglich.

Kapitel 6

Affine Prozesse

Wir haben in den Kapiteln 2 und 5 gesehen, dass affine Diffusionen affine Zinsstrukturen induzieren; vgl. insbesondere Satz 2.12 und Satz 5.11. Wir werden in diesem Kapitel diese Ergebnisse aus den vergangenen Abschnitten verallgemeinern und Preisformeln für verschiedene Optionen herleiten.

Annahme 6.1. Es seien $d \geq 1$ und $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen mit nicht-leerem Inneren, und es seien $b : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^d$ stetig und $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^{d \times d}$ messbar, so dass

$$a(x) = \rho(x)\rho(x)^*$$

stetig ist. Zudem sei W eine d-dimensionale Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Wir nehmen im Folgenden an, dass für jedes $x \in \mathcal{X}$ eine eindeutige Lösung $X = X^x$ der stochastischen Differentialgleichung

$$dX(t) = b(X(t))dt + \rho(X(t))dW(t), \quad X(0) = x,$$

existiert.

Definition 6.2. Der Prozess $X = X^x$ heißt *affin*, falls $\mathbb{C}$- bzw. $\mathbb{C}^d$-wertige Funktionen $\phi(t, u)$ bzw. $\psi(t, u)$ mit stetigen partiellen Ableitungen nach t existieren, so dass

$$\mathbb{E}[\exp(u^* X(T)) | \mathcal{F}_t] = \exp(\phi(T - t, u) + \psi(T - t, u)^* X(t)) \tag{6.1}$$

für alle $u \in i\mathbb{R}^d$, $t \leq T$ und $x \in \mathcal{X}$ gilt.

Bemerkung 6.3. Es lassen sich folgende zusätzliche Bedingungen an $\phi(t, u)$ und $\psi(t, u)$ direkt ableiten:

(i) Der Realteil von $\phi(T - t, u) + \psi(T - t, u)^* X(t)$ ist nicht positiv (kurz: liegt in $\mathbb{C}_-$).

(ii) Die Funktionen $\phi(t, u)$ und $\psi(t, u)$ sind, abgesehen von der Addition von Vielfachen von $2\pi i$ zu $\phi(t, u)$, eindeutig bestimmt. Wir setzen daher $\phi(0, u) = 0$ und $\psi(0, u) = u$.

Satz 6.4.

(i) Es sei X affin. Dann gilt

$$a(x) = a + \sum_{i=1}^{d} x_i \alpha_i, \tag{6.2}$$
$$b(x) = b + \sum_{i=1}^{d} x_i \beta_i = b + \mathcal{B}x,$$

für geeignete $d \times d$-Matrizen a und α_i und geeignete d-dimensionale Vektoren b und β_i. Dabei setzen wir

$$\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_d).$$

Außerdem erfüllen ϕ und $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_d)^*$ die Riccati-Gleichungen

$$\partial_t \phi(t,u) = \frac{1}{2}\psi(t,u)^* a \psi(t,u) + b^* \psi(t,u), \quad \phi(0,u) = 0, \tag{6.3}$$
$$\partial_t \psi_i(t,u) = \frac{1}{2}\psi(t,u)^* \alpha_i \psi(t,u) + \beta_i^* \psi(t,u), \ i = 1, \ldots, d, \quad \psi(0,u) = u.$$

Insbesondere gilt

$$\phi(t,u) = \int_0^t \left(\frac{1}{2}\psi(s,u)^* a \psi(s,u) + b^* \psi(s,u) \right) ds.$$

(ii) Angenommen, a und b sind von der Form (6.2) und es existiere eine Lösung (ϕ, ψ) der Riccati-Gleichungen (6.3), so dass $\phi(t,u) + \psi(t,u)^* x$ für alle $t \geq 0$, $u \in i\mathbb{R}^d$ und $x \in \mathcal{X}$ einen nicht-positiven Realteil besitzt. Dann ist X affin mit bedingter charakteristischer Funktion (6.1).

Beweis:

(i) Für $T > 0$ und $u \in i\mathbb{R}^d$ setzen wir

$$M(t) = \exp(\phi(T-t,u) + \psi(T-t,u)^* X(t)), \quad t \leq T.$$

Mit Hilfe der Itō-Formel, formal getrennt für Real- und Imaginärteil angewendet, ergibt sich

$$dM(t) = I(t)M(t)dt + \psi(T-t,u)^* \rho(X(t)) M(t) dW(t), \quad t \leq T,$$

mit

$$I(t) = -\partial_t \phi(T-t,u) - \partial_t \psi(T-t,u)^* X(t)$$
$$+ \psi(T-t,u)^* b(X(t)) + \frac{1}{2}\psi(T-t,u)^* a(X(t)) \psi(T-t,u).$$

Gemäß (6.1) ist der Prozess ein Martingal, so dass $I(t) = 0$ für alle $t \leq T$ fast sicher gilt. Lässt man $t \to 0$ gehen, folgt

$$\partial_t \phi(T,u) + \partial_t \psi(T,u)^* x = \psi(T,u)^* b(x) + \frac{1}{2}\psi(T,u)^* a(x) \psi(T,u) \tag{6.4}$$

für alle $T \geq 0$, $u \in i\mathbb{R}^d$ und $x \in \mathcal{X}$. Wegen $\psi(0,u) = u$ ergibt sich insbesondere

$$g(u) + h(u)^* x = u^* b(x) + \frac{1}{2} u^* a(x) u$$

für alle $u \in i\mathbb{R}^d$ und $x \in \mathcal{X}$, wobei $g(u)$ und $h(u)$ stetig in u sind. Im Fall $d = 1$ ergibt sich die Form (6.2) etwa aus

$$\begin{pmatrix} u & \frac{1}{2}u^2 \\ v & \frac{1}{2}v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(x) \\ a(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(u) + h(u)x \\ g(v) + h(v)y \end{pmatrix}$$

und u, v mit $u \neq 0 \neq v \neq u$, so dass die vordere Matrix invertierbar ist. Im allgemeinen Fall funktioniert dasselbe Argument mit komplizierterer Notation. Setzt man die Form gemäß (6.2) in (6.4) ein, ergeben sich die Riccati-Gleichungen aus (6.3).

(ii) Besitzen a und b die Form (6.2) und es existiert eine Lösung der Riccati-Gleichungen (6.3), so folgt mit derselben Argumentation von im Beweis von (i), dass M ein lokales Martingal ist. Nimmt man zusätzlich an, dass $\phi(t,u) + \psi(t,u)^* x$ für alle $t \geq 0$, $u \in i\mathbb{R}^d$ und $x \in \mathcal{X}$ einen nicht-positiven Realteil besitzt, so ist M gleichmäßig beschränkt und also ein Martingal. Aus $M(T) = \exp(u^* X(T))$ folgt die Aussage. □

Bemerkung 6.5. Zu beachten ist, dass die Parameter a, α_i, b, β_i und der Raum $\mathcal{X}$ wechselseitig Bedingungen aneinander stellen:

- a, α_i, b und β_i müssen so gewählt sein, dass sichergestellt ist, dass der Prozess X den Raum $\mathcal{X}$ nicht verlässt;
- a und α_i müssen so gewählt sein, dass $a(x) = a + \sum_{i=1}^d x_i \alpha_i$ für alle $x \in \mathcal{X}$ symmetrisch und positiv definit ist.

Wir werden im Folgenden im Fall

$$\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n, \quad m + n = d,$$

notwendige und hinreichende Bedingungen an a, α_i, b und β_i herleiten. Dazu seien

$$I = \{1, \dots, m\} \quad \text{und} \quad J = \{m+1, \dots, n\},$$

und für jeden Vektor μ bzw. jede Matrix ν und Indexmengen M, N setzen wir

$$\mu_M = (\mu_i)_{i \in M} \quad \text{und} \quad \nu_{M,N} = (\mu_{ij})_{i \in M, j \in N}.$$

Satz 6.6. *Ein Prozess X auf $\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$ ist affin genau dann, wenn a und b von der Form (6.2) sind, wobei*

- *a und α_i symmetrisch und positiv semi-definit sind;*
- *$a_{II} = 0$ gilt;*
- *$\alpha_j = 0$ für alle $j \in J$ gilt;*
- *$\alpha_{i,kl} = \alpha_{i,lk} = 0$ für $k \in I \backslash \{i\}$ und alle $1 \leq i, l \leq d$;*
- *$b \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$;*

- $\mathcal{B}_{IJ} = 0$;
- $\mathcal{B}_{II}$ *nicht-negative Einträge abseits der Diagonalen hat.*

In diesem Fall vereinfacht sich das System (6.3) zu

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(t,u) &= \frac{1}{2}\psi_J(t,u)^* a_{JJ} \psi_J(t,u) + b^* \psi(t,u), \quad \phi(0,u) = 0, \\ \partial_t \psi_i(t,u) &= \frac{1}{2}\psi(t,u)^* \alpha_i \psi(t,u) + \beta_i^* \psi(t,u), \ i \in I, \\ \partial_t \psi_J(t,u) &= \mathcal{B}_{JJ}^* \psi_J(t,u), \quad \psi(0,u) = u, \end{aligned} \tag{6.5}$$

únd es gibt für alle Anfangsbedingungen $u \in \mathbb{C}_-^m \times i\mathbb{R}^n$ *eine eindeutige Lösung* $(\phi(\cdot,u), \psi(\cdot,u)) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}_- \times \mathbb{C}_-^m \times i\mathbb{R}^n$. *Hierbei bezeichnet* $\mathbb{C}_-$ *alle komplexen Zahlen mit nicht-positivem Realteil.*

Bemerkung 6.7.

(i) Offensichtlich ergibt sich aus (6.5)

$$\psi_J(t,u) = \exp(\mathcal{B}_{JJ}^* t) u_J$$

für alle $u_J \in i\mathbb{R}^n$.

(ii) Zur Illustration der Struktur von $a(x)$ betrachten wir den Fall $d = 3$. Dann ergibt sich

- im Fall $m = 0$

$$a(x) = a$$

für eine beliebige symmetrische, positiv semi-definite 3×3-Matrix a,

- im Fall $m = 1$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & + & * \\ & & + \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} + & * & * \\ & + & * \\ & & + \end{pmatrix},$$

- im Fall $m = 2$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & + \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} + & 0 & * \\ & 0 & 0 \\ & & + \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & + & * \\ & & + \end{pmatrix},$$

- im Fall $m = 3$

$$a = 0, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & + & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & + \end{pmatrix},$$

wobei die Matrizen symmetrisch sind, $+$ eine beliebige nicht-negative reelle Zahl bezeichnet und $*$ beliebig ist, so dass die resultierende Matrix positiv semi-definit ist.

Beweis von Satz 6.6: Wir zeigen im Wesentlichen nur, dass ein affiner Prozess die gewünschte Struktur besitzt, und skizzieren den Rest des Beweises.

Dazu sei also X affin, und gemäß (6.2) sind auch $a(x)$ und $b(x)$ affin. Offensichtlich ist $a(x)$ genau dann symmetrisch und positiv semi-definit für alle $x \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$, wenn $\alpha_j = 0$ für alle $j \in J$ gilt und ansonsten a bzw. α_i für $i \in I$ selbst symmetrisch und positiv semi-definit sind. Die anderen Bedingungen lassen sich auf die Situation zurückführen, dass man einen Startpunkt auf dem Rand von $\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$ wählt, d.h. so dass $x_k = 0$ für ein $k \in I$ gilt. In diesem Fall muss die Diffusion aus Sicht der k-ten Komponente deterministisch zurück ins Innere von $\mathcal{X}$ zeigen, d.h. es gilt

$$e_k^*\big(a + \sum_{i \in I\setminus\{k\}} x_i \alpha_i\big) e_k = 0$$

und

$$e_k^*\big(b + \sum_{i \in I\setminus\{k\}} x_i \beta_i + \sum_{i \in J} x_j \beta_j\big) \geq 0$$

für alle $x_i \geq 0$, $i \in I$ und alle $x_j \in \mathbb{R}$, $j \in J$. Eine Formalisierung dessen findet sich in Lemma 10.11 in Filipović (2009).

Offenbar ergibt sich dadurch insgesamt, dass

- a und α_i symmetrisch und positiv semi-definit sind;
- $a e_k = 0$ für alle $k \in I$ gilt;
- $\alpha_i e_k = 0$ für alle $i \in I$ und alle $k \in I\setminus\{i\}$ gilt;
- $\alpha_j = 0$ für alle $j \in J$ gilt;
- $b \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$ gilt;
- $\beta_i^* e_k \geq 0$ für alle $i \in I$ und alle $k \in I\setminus\{i\}$ gilt;
- $\beta_i^* e_j = 0$ für alle $k \in I$ und alle $j \in J$ gilt;

Man sieht leicht, dass dies eine Reformulierung der zu zeigenden Struktur ist. Außerdem ergibt sich (6.5) in diesem konkreten Fall aus (6.3).

Zu zeigen ist daher nur noch, dass für eine solche Konfiguration der Parameter und für alle Anfangsbedingungen $u \in \mathbb{C}_-^m \times i\mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $(\phi(\cdot,u), \psi(\cdot,u)) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}_- \times \mathbb{C}_-^m \times i\mathbb{R}^n$ der Riccati-Gleichungen (6.5) existiert, da sich dann insbesondere ergibt, dass $\phi(t,u) + \psi(t,u)^* x$ für alle $t \geq 0$, alle $u \in i\mathbb{R}^d$ und alle $x \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$ einen nicht positiven Realteil besitzt. Satz 6.4 liefert unter diesen Voraussetzungen die Aussage.

Um zu beweisen, dass eine solche eindeutige Lösung existiert, beschränkt man sich auf die entsprechende Aussage für $\psi_I(t,u)$, da

$$\phi(t,u) = \int_0^t \left(\frac{1}{2} \psi_J(s,u)^* a_{JJ} \psi_J(s,u) + b^* \psi(s,u) \right) ds$$

wegen $a_{II} = 0$ und

$$\psi_J(t,u) = \exp(\mathcal{B}_{JJ}^* t) u_J$$

mit $u_J \in i\mathbb{R}^n$ automatisch Werte in $\mathbb{C}_-$ bzw. $i\mathbb{R}^n$ liefern. Die Aussage lässt sich also auf Bedingungen für eine Lösung von

$$\partial_t \psi_i(t,u) = \frac{1}{2} \psi(t,u)^* \alpha_i \psi(t,u) + \beta_i^* \psi(t,u) =: R_i(\psi(t,u)),\ i \in I,$$

zurückführen. Neben der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von R_i ist der wesentliche Schritt auch hier, dass man sich auf dem Rand von $\mathbb{C}_-^m \times i\mathbb{R}^n$ automatisch wieder zurück ins Innere bewegt. Dies sieht man aufgrund von

$$\Re R_i(z) = \frac{1}{2}\Re z^* \alpha_i \Re z - \frac{1}{2}\Im z^* \alpha_i \Im z + \beta_i^* \Re z = -\frac{1}{2}\Im z^* \alpha_i \Im z + \beta_i^* \Re z \leq 0$$

für $z \in \mathbb{C}_-^m \times i\mathbb{R}^n$ mit $z_i = 0$, wie aus den Bedingungen and α_i und β_i folgt. Ein vollständiger Beweis findet sich als Theorem 10.2 in Filipović (2009). $\square$

Bemerkung 6.8. Wir nehmen im Folgenden an, dass X ein affiner Prozess auf $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$ und die Short-Rate durch

$$r(t) = c + \gamma^* X(t)$$

für konstante Parameter $c \in \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{R}^d$ gegeben ist. Spezialfälle im Fall $d = 1$ haben wir in Kapitel 2 diskutiert. Wir interessieren uns dafür, eine Option der Form $f(X(T))$ zu preisen, wollen also

$$\pi(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\exp\big(-\int_t^T r(s)ds\big) f(X(T)) \big| \mathcal{F}_t\Big] = P(t,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[f(X(T))|\mathcal{F}_t] \tag{6.6}$$

gemäß Satz 4.6 berechnen. Dazu diskutieren wir zunächst die $\mathcal{F}_t$-bedingte Verteilung von $X(T)$ unter dem T-Forward-Maß, also

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[\exp(u^* X(T))|\mathcal{F}_t] = P(t,T)^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\exp\big(-\int_t^T r(s)ds\big)\exp(u^* X(T))\big|\mathcal{F}_t\Big] \tag{6.7}$$

für $u \in i\mathbb{R}^d$. Der Einfachheit halber arbeiten wir im Folgenden unter der Bedingung $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.

Satz 6.9. *Es sei $\tau > 0$. Dann sind äquivalent:*

(a) $\mathbb{E}\big[\exp\big(-\int_0^\tau r(s)ds\big)\big] < \infty$ *für alle Startwerte* $x \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$*;*

(b) Es existiert eine eindeutige Lösung $(\Phi(\cdot,u), \Psi(\cdot,u)) : [0,\tau] \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}^d$ *von*

$$\begin{aligned}
\partial_t \Phi(t,u) &= \frac{1}{2}\Psi_J(t,u)^* a_{JJ} \Psi_J(t,u) + b^* \Psi(t,u) - c, \quad \Phi(0,u) = 0,\\
\partial_t \Psi_i(t,u) &= \frac{1}{2}\Psi(t,u)^* \alpha_i \Psi(t,u) + \beta_i^* \Psi(t,u) - \gamma_i, \;\; i \in I,\\
\partial_t \Psi_J(t,u) &= \mathcal{B}_{JJ}^* \Psi_J(t,u) - \gamma_J, \quad \Psi(0,u) = u,
\end{aligned} \tag{6.8}$$

für $u = 0$*.*

Gilt (a) oder (b), so ist die Menge $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(S)$ der $u \in \mathbb{R}^d$, für die die Riccati-Gleichungen für alle $S \leq \tau$ eine eindeutige Lösung auf $[0,S]$ besitzen, eine konvexe offene Menge um $0 \in \mathbb{R}^d$. Auf dem Streifen

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(S)) = \{z \in \mathbb{C}^d \mid \Re(z) \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(S)\}$$

existiert ebenfalls eine eindeutige Lösung von $(\Phi(\cdot,u), \Psi(\cdot,u))$, und es gilt

$$\mathbb{E}\Big[\exp\big(-\int_t^T r(s)ds\big)\exp(u^* X(T))\big|\mathcal{F}_t\Big] = \exp(\Phi(T-t,u) + \Psi(T-t,u)^* X(t)) \tag{6.9}$$

für alle $u \in \mathcal{S}(\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(S))$, $t \leq T \leq t+S$ und $x \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$.

Beweis: Setzt man
$$Y(t) = y + \int_0^t (c + \gamma^* X(s))ds,$$
so ist $X' = (X,Y)^*$ ein $\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^{n+1}$-wertiger Prozess mit Diffusionsmatrix $a' + \sum_{i\in I} x_i \alpha_i'$ bzw. Drift $b' + \mathcal{B}'x'$, wobei
$$a' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i' = \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} b & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B}' = \begin{pmatrix} \mathcal{B} & 0 \\ \gamma^* & 0 \end{pmatrix},$$
gilt. Satz 6.6 zeigt, dass die zugehörigen Ricatti-Gleichungen
$$\begin{aligned}
\partial_t \phi'(t,u,v) &= \frac{1}{2}\psi_J'(t,u,v)^* a_{JJ} \psi_J'(t,u,v) + b^*\psi_{1,\dots,d}'(t,u,v) + cv, \quad \phi'(0,u,v) = 0,\\
\partial_t \psi_i'(t,u,v) &= \frac{1}{2}\psi'(t,u,v)^* \alpha_i \psi'(t,u,v) + \beta_i^* \psi_{1,\dots,d}'(t,u,v) + \gamma_i v, \ \ i \in I,\\
\partial_t \psi_J'(t,u,v) &= \mathcal{B}_{JJ}^* \psi_J'(t,u,v) + \gamma_J v, \quad \partial_t \psi_{d+1}'(t,u,v) = 0, \quad \psi'(0,u,v) = (u,v)^*,
\end{aligned}$$
für alle $(u,v) \in \mathbb{C}_-^m \times i\mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $(\phi'(\cdot,u,v), \psi'(\cdot,u,v))$ mit Werten in $\mathbb{C}_- \times \mathbb{C}_-^m \times i\mathbb{R}^{n+1}$ besitzen. Dabei haben wir die Lösung $\psi_{d+1}'(t,u,v) = v$ bereits eingesetzt. Insbesondere gilt
$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\exp(u^* X(T) + vY(T))|\mathcal{F}_t] \\
&= \exp(\phi'(T-t,u,v) + \psi_{1,\dots,d}'(T-t,u,v)^* X(t) + vY(t)).
\end{aligned} \tag{6.10}$$
Theorem 10.3 in Filipović (2009) gibt nun Bedingungen an, unter denen sich nicht nur die Lösungen von Riccati-Gleichungen von $(u,v) \in i\mathbb{R}^{d+1}$ auf $u \in \mathbb{C}^{d+1}$ (bzw. Teilmengen davon) ausdehnen lassen, sondern unter denen auch (6.10) erhalten bleibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn eine der beiden Seiten von (6.10) wohldefiniert ist, also
$$\mathbb{E}[\exp(u^* X(T) + vY(T))] < \infty$$
für $(u,v) \in \mathbb{R}^{d+1}$ und alle Startwerte $(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1}$ gilt. Setzt man konkret $v = -1$, erhält also
$$\mathbb{E}[\exp(u^* X(T) - Y(T))] = \exp(-y)\mathbb{E}[\exp(u^* X(T))]\mathbb{E}\Big[\exp\big(-\int_0^T r(s)ds\big)\Big],$$
so klärt dies die Äquivalenz von (a) und (b). Die vollständige Aussage des Satzes folgt ebenfalls aus Theorem 10.3 in Filipović (2009). □

Korollar 6.10. *Es sei $T \le S \le \tau$.*

(i) Mit $A(t) = -\Phi(t,0)$ und $B(t) = -\Psi(t,0)$ gilt
$$P(t,T) = \exp(-A(T-t) - B(T-t)^* X(t)), \quad t \le T.$$

(ii) Für alle $u \in \mathcal{S}(\mathcal{D}_\mathbb{R}(T) + B(S-T)) \supset i\mathbb{R}^d$ gilt
$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[\exp(u^* X(T))|\mathcal{F}_t] = \frac{\exp(-A(S-T) + \Phi(T-t, u - B(S-T)) + \Psi(T-t, u - B(S-T))^* X(t))}{P(t,S)}.$$

Beweis:

(i) Gemäß (6.9) gilt

$$P(t,T) = \mathbb{E}\Big[\exp\big(-\int_t^T r(s)ds\big)\big|\mathcal{F}_t\Big] = \exp(\Phi(T-t,0) + \Psi(T-t,0)^* X(t)).$$

(ii) Für jeden Startwert $X(0) = x \in \mathcal{X}$ ist

$$\begin{aligned} P(0,S) &= \exp(-A(S) - B(S)x) \\ &= \mathbb{E}\Big[\exp\big(-\int_0^T r(s)ds\big)\mathbb{E}\Big[\exp\big(-\int_T^S r(s)ds\big)\big|\mathcal{F}_T\Big]\Big] \\ &= \exp(\Phi(S-T,0))\mathbb{E}\Big[\exp\big(-\int_0^T r(s)ds\big)\exp(\Psi(S-T,0)^* X(T))\Big] \\ &= \exp(\Phi(S-T,0))\exp(\Phi(T,\Psi(S-T,0)) + \Psi(T,\Psi(S-T,0))^* x), \end{aligned}$$

wobei wir wieder (6.9) sowie (i) verwendet haben. Insbesondere folgt mit (i)

$$\Psi(T, -B(S-T)) = -B(S).$$

Also ist $-B(S-T) \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(T)$, so dass $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(T) + B(S-T)$ erst $0 \in \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{S}(\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(T) + B(S-T))$ nach Satz 6.9 dann $i\mathbb{R}^d$ enthält. Mit dem Satz von der iterierten Erwartung folgt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big[\exp\big(-\int_t^S r(s)ds\big)\exp(u^* X(T))\big|\mathcal{F}_t\Big] \\ &= \exp(-A(S-T))\mathbb{E}\Big[\exp\big(-\int_t^T r(s)ds\big)\exp((u - B(S-T))^* X(T))\big|\mathcal{F}_t\Big] \\ &= \exp(-A(S-T) + \Phi(T-t, u - B(S-T)) + \Psi(T-t, u-B(S-T))^* X(t)). \end{aligned}$$

Die Aussage ergibt sich aus Satz 4.6. □

Bemerkung 6.11. Um eine Preisformel für allgemeine f herzuleiten, besitzt man im Wesentlichen zwei Möglichkeiten. Entweder man nutzt (6.9) und (6.7), um die $\mathcal{F}_t$-bedingte Verteilung $Q(t,T,dx)$ von $X(T)$ unter $\mathbb{Q}^T$ zu bestimmen, wodurch sich

$$\pi(t) = P(t,T)\int f(x)Q(t,T,dx)$$

gemäß (6.6) ergibt. Alternativ lässt sich die Formel mit Hilfe von Fourier-Transformationen berechnen.

Satz 6.12. *Es sei (a) oder (b) aus Satz 6.9 erfüllt für ein $\tau \geq T$, und es gelte*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \exp((v + iL\lambda)^* x)\tilde{f}(\lambda)d\lambda$$

fast überall, für ein $v \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(T)$, eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{d\times q}$ und eine integrierbare Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{C}$, $q \leq d$, wobei $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ den Lösungsraum der Riccati-Gleichungen (6.8) bezeichnet. Dann ist der Preis (6.6) wohldefiniert, und es gilt

$$\pi(t) = \int_{\mathbb{R}^q} \exp(\Phi(T-t, v+iL\lambda) + \Psi(T-t, v+iL\lambda)^* X(t))\tilde{f}(\lambda)d\lambda. \tag{6.11}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\exp\big(-\int_0^T r(s)ds\big)|f(X(T))|\Big] \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^q} \mathbb{E}\Big[\exp\big(-\int_0^T r(s)ds\big)\exp(v^*X(T))\Big]|\tilde{f}(\lambda)|d\lambda < \infty
\end{aligned}$$

nach Voraussetzung und Satz 6.9. (6.11) folgt dann aus

$$\begin{aligned}
\pi(t) &= \mathbb{E}\Big[\exp\big(-\int_t^T r(s)ds\big)\int_{\mathbb{R}^q}\exp((v+iL\lambda)^*X(T))\tilde{f}(\lambda)d\lambda\Big|\mathcal{F}_t\Big] \\
&= \int_{\mathbb{R}^q}\mathbb{E}\Big[\exp\big(-\int_t^T r(s)ds\big)\exp((v+iL\lambda)^*X(T))\Big|\mathcal{F}_t\Big]\tilde{f}(\lambda)d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}^q}\exp(\Phi(T-t,v+iL\lambda)+\Psi(T-t,v+iL\lambda)^*X(t))\tilde{f}(\lambda)d\lambda,
\end{aligned}$$

wobei wir (6.6), den Satz von Fubini und Satz 6.9 verwendet haben. □

Bemerkung 6.13. Man erhält die Funktion $\tilde{f}$ aus Satz 6.12 in der Regel mit Hilfe der folgenden Regel: Sind $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{C}$ und

$$\hat{g}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^q}\exp(-i\lambda^*y)g(y)dy$$

integrierbar, so gilt die Fourier-Inversionsformel

$$g(y) = \frac{1}{(2\pi)^q}\int_{\mathbb{R}^q}\exp(i\lambda^*y)\hat{g}(\lambda)d\lambda$$

für fast alle $y \in \mathbb{R}^q$.

Satz 6.14. *Es sei (a) oder (b) aus Satz 6.9 erfüllt für ein $\tau \geq T$, und es sei*

$$f(x) = \exp(v^*x)h(L^*x)$$

für ein $L \in \mathbb{R}^{d\times q}$, $d \leq q$, eine integrierbare Funktion $h : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ und ein $v \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(T)$. Dann gilt:

(i) Ist

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^q}\int_{\mathbb{R}^q}\exp(-i\lambda^*y)h(y)dy, \quad \lambda \in \mathbb{R}^q,$$

integrierbar, dann sind die Voraussetzungen aus Satz 6.12 erfüllt.

(ii) Ist $v = Lw$ für ein $w \in \mathbb{R}^q$, und ist

$$\lambda \mapsto \exp(\Phi(T-t,v+iL\lambda)+\Psi(T-t,v+iL\lambda)^*X(t))$$

integrierbar, dann besitzt die $\mathcal{F}_t$-bedingte Verteilung von $L^*X(T)$ unter $\mathbb{Q}^T$ die Dichte

$$q(t,T,y) = \frac{1}{(2\pi)^q}\int_{\mathbb{R}^q}\frac{\exp(-(w+i\lambda)^*y+\Phi(T-t,v+iL\lambda)+\Psi(T-t,v+iL\lambda)^*X(t))}{P(t,T)}d\lambda.$$

In beiden Fällen gilt die Preisformel (6.11). Insbesondere ist das entsprechende Integral wohldefiniert.

Beweis:

(i) Wendet man Bemerkung 6.13 auf h an, erhält man

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{\mathbb{R}^q} \exp((v + iL\lambda)^* x) \hat{h}(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbb{R}^q} \exp((v + iL\lambda)^* x) \tilde{f}(\lambda) d\lambda.$$

Die Aussage folgt dann aus Satz 6.12.

(ii) Es sei $q(t, T, dy)$ die $\mathcal{F}_t$-bedingte Verteilung von $L^* X(T)$ unter $\mathbb{Q}^T$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^q} \exp((w + i\lambda)^* y) q(t, T, dy) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[\exp((w + i\lambda)^* L^* X(T))|\mathcal{F}_t] \\ &= \frac{\exp(\Phi(T - t, v + iL\lambda) + \Psi(T - t, v + iL\lambda)^* X(t))}{P(t, T)}\end{aligned}$$

gemäß (6.7) und (6.9), wobei wir die Voraussetzung an $v = Lw$ verwendet haben. Verwendet man Bemerkung 6.13 und $\exp(w^* y) \exp(-w^* y) = 1$, so ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}^q} \exp((w + i\lambda)^* y) q(t, T, y) dy = \frac{\exp(\Phi(T - t, v + iL\lambda) + \Psi(T - t, v + iL\lambda)^* X(t))}{P(t, T)},$$

und aufgrund der Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion ergibt sich die Aussage bzgl. q. Wegen

$$\begin{aligned}&P(t, T) \int_{\mathbb{R}^q} |\exp(w^* y) h(y)| q(t, T, y) dy \\ \le &\frac{1}{(2\pi)^q} \int_{\mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^q} |h(y)| |\exp(\Phi(T - t, v + iL\lambda) + \Psi(T - t, v + iL\lambda)^* X(t))| d\lambda dy < \infty\end{aligned}$$

nach Integrierbarkeitsannahmen folgt die Aussage dann wieder aus

$$\begin{aligned}&\pi(t) = P(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[f(X(T))|\mathcal{F}_t] = P(t, T) \int_{\mathbb{R}^q} \exp(w^* y) h(y) q(t, T, y) dy \\ = &\frac{1}{(2\pi)^q} \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^q} h(y) \exp(-i\lambda^* y) dy \right) \exp(\Phi(T - t, v + iL\lambda) + \Psi(T - t, v + iL\lambda)^* X(t)) d\lambda\end{aligned}$$

mit dem Satz von Fubini. □

Lemma 6.15. *Es sei $K > 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi} \int \exp((w + i\lambda) y) \frac{K^{-(w-1+i\lambda)}}{(w + i\lambda)(w - 1 + i\lambda)} d\lambda \\ &= \begin{cases} (K - \exp(y))^+, & \text{falls } w < 0, \\ (\exp(y) - K)^+ - \exp(y), & \text{falls } 0 < w < 1, \\ (\exp(y) - K)^+, & \text{falls } w > 1, \end{cases}\end{aligned}$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Im Fall $0 < w < 1$ ergibt sich ebenfalls der Wert $(K - \exp(y))^+ - K$.

Beweis: Wir zeigen die Aussage nur im Fall $w < 0$. In diesem Fall ist

$$h(y) = \exp(-wy)(K - \exp(y))^+$$

integrierbar, da die Funktion für große Werte von y verschwindet, und für die Fourier-Transformierte gilt

$$\begin{aligned}
\hat{h}(y) &= \int \exp(-(w + i\lambda)y)(K - \exp(y))^+ dy \\
&= K \int_{-\infty}^{\log K} \exp(-(w + i\lambda)y) dy - \int_{-\infty}^{\log K} \exp(-(w - 1 + i\lambda)y) dy \\
&= \frac{K^{-(w-1+i\lambda)}}{(w + i\lambda)(w - 1 + i\lambda)}.
\end{aligned}$$

Diese Funktion ist ebenfalls integrierbar in λ, da der Nenner nicht verschwindet und sich betragsmäßig für große Werte von λ wie λ^2 verhält. Die Aussage folgt daher aus Bemerkung 6.13. □

Beispiel 6.16.

(i) Es sei X ein affiner Prozess auf $\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$, mit dem wir die Log-Returns von $S_i = \exp(X_{m+i})$, $i = 1, 2$, modellieren, und wir betrachten die *Margrabe-Option* mit

$$f(X(T)) = (c_1 \exp(X_{m+1}(T)) - c_2 \exp(X_{m+2}(T)))^+,$$

die es erlaubt, c_2 Einheiten von S_2 gegen c_1 Einheiten von S_1 einzutauschen. In diesem Fall gilt für $w > 1$ gemäß Lemma 6.15

$$\begin{aligned}
f(x) &= (\exp(\log(c_1) + e_{m+1}^* x) - \exp(\log(c_2) + e_{m+2}^* x))^+ \\
&= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\exp((w + i\lambda)(\log(c_1) + e_{m+1}^* x) \exp(\log(c_2) + e_{m+2}^* x)^{-(w-1+i\lambda)}}{(w + i\lambda)(w - 1 + i\lambda)} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi} \int \exp((w + i\lambda)(e_{m+1}^* x - e_{m+2}^* x) + e_{m+2}^* x) \frac{c_1^{w+i\lambda} c_2^{-(w-1+i\lambda)}}{(w + i\lambda)(w - 1 + i\lambda)} d\lambda \\
&= \int \exp((v + iL\lambda)^* x) \tilde{f}(\lambda) d\lambda
\end{aligned}$$

wobei wir $v = we_{m+1} + (1 - w)e_{m+2}$, $L = e_{m+1} - e_{m+2}$ und

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{c_1^{w+i\lambda} c_2^{-(w-1+i\lambda)}}{2\pi(w + i\lambda)(w - 1 + i\lambda)}$$

gesetzt haben.

(ii) Ein ähnliches Argument liefert für die Spread-Option

$$f(X(T)) = (\exp(X_{m+1}(T)) - \exp(X_{m+2}(T)) - K)^+, \quad K > 0,$$

die Darstellung

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp((v + iL\lambda)^* x) \tilde{f}(\lambda) d\lambda$$

mit $v = w_1 e_{m+1} - w_2 e_{m+2}$, $L = (e_{m+1}, e_{m+2})$ und

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{\Gamma(w_1 + w_2 - 1 + i(\lambda_1 + \lambda_2))\Gamma(-w_2 - i\lambda_2)}{(2\pi)^2 K^{w_1+w_2+i(\lambda_1+\lambda_2)}\Gamma(w_1 + 1 + i\lambda_1)},$$

wobei $w_2 < 0$, $w_1 > 1 - w_2$ und $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t)dt$, $\Re z > 0$, die komplexwertige Gamma-Funktion bezeichnet (vgl. Lemma 10.3 in Filipović (2009)).

In den beiden Fällen muss formal nachgewiesen, dass (a) oder (b) aus Satz 6.9 für ein $\tau \geq T$ erfüllt ist und dass $v \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(T)$ gilt, um Satz 6.12 anwenden zu können.

Bemerkung 6.17. Es sei im Folgenden $T < S \leq \tau$, und wir nehmen an, dass (a) oder (b) aus Satz 6.9 für dieses τ erfüllt ist. Eine Call-Option auf eine S-Anleihe mit Fälligkeit T und Ausübungspreis K besitzt gemäß Korollar 6.10 und Lemma 6.15 die Form

$$\begin{aligned}(P(T,S) - K)^+ &= (\exp(-A(S-T) - B(S-T)^* X(T)) - K)^+ \\ &= \int \exp(-(w+i\lambda)B(S-T)^* X(T)) \tilde{f}(w,\lambda) d\lambda\end{aligned}$$

mit

$$\tilde{f}(w,\lambda) = \frac{1}{2\pi} \exp(-(w+i\lambda)A(S-T)) \frac{K^{-(w-1+i\lambda)}}{(w+i\lambda)(w-1+i\lambda)}$$

für ein $w > 1$.

Satz 6.18. *Es existieren $w_- < 0$ und $w_+ > 1$, so dass $-B(S-T)w \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(T)$ für alle $w \in (w_-, w_+)$ gilt, wobei $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ den Lösungsraum der Riccati-Gleichungen (6.8) bezeichnet. Dann ist*

$$\Pi(w,t) = \int \exp(\Phi(T-t, -(w+i\lambda)B(S-T)) + \Psi(T-t, -(w+i\lambda)B(S-T))^* X(t)) \tilde{f}(w,\lambda) d\lambda$$

für alle $w \in (w_-, w_+) \backslash \{0,1\}$ und alle $t \leq T$ wohldefiniert. Außerdem gilt für den Preis der Call-Option aus Bemerkung 6.17 die Darstellung

$$\begin{aligned}\pi(t) &= \begin{cases} \Pi(w,t), & \text{falls } w \in (1, w_+), \\ \Pi(w,t) + P(t,S), & \text{falls } w \in (0,1), \end{cases} \\ &= P(t,S) q(t,S,\mathcal{I}) - KP(t,T) q(t,T,\mathcal{I}),\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{I} = (A(S-T) + \log K, \infty)$ gilt und $q(t,S,dy)$ bzw. $q(t,T,dy)$ die $\mathcal{F}_t$-bedingte Verteilung von $Y = -B(S-T)^* X(T)$ unter dem S- bzw. dem T-Forward-Maß bezeichnet.

Eine analoge Formel existiert für die entsprechende Put-Option.

Beweis: Der Beweis von Korollar 6.10 liefert $-B(S-T) \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(T)$. Da $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(T)$ nach Satz 6.9 konvex und offen ist und $0 \in \mathbb{R}^d$ enthält, ergibt sich $-B(S-T)w \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(T)$ für $w \in (w_-, w_+)$ und geeignete $w_- < 0$ und $w_+ > 1$. Zudem ist für jedes $w \in (w_-, w_+) \backslash \{0,1\}$ und $t \leq T$ die Funktion

$$\lambda \mapsto \exp(\Phi(T-t, -(w+i\lambda)B(S-T)) + \Psi(T-t, -(w+i\lambda)B(S-T)))^* X(t)$$

gemäß (6.9) beschränkt, und die Funktion

$$\lambda \mapsto \tilde{f}(w,\lambda)$$

ist integrierbar. Daraus ergibt sich die Wohldefiniertheit von $\Pi(w,t)$ für $t \le T$. Die erste Preisformel folgt dann direkt aus Satz 6.12 und Lemma 6.15. Um die Darstellung von $\pi(t)$ zu erhalten, verwendet man die bedingte Version von (4.3), die

$$\begin{aligned}\pi(t) &= P(t,S)\mathbb{Q}^S(P(T,S) \ge K|\mathcal{F}_t) - KP(t,T)\mathbb{Q}^T(P(T,S) \ge K|\mathcal{F}_t)\\ &= P(t,S)\mathbb{Q}^S(-B(S-T)^*X(T) \ge A(S-T) + \log K|\mathcal{F}_t)\\ &\quad - KP(t,T)\mathbb{Q}^T(-B(S-T)^*X(T) \ge A(S-T) + \log K|\mathcal{F}_t)\end{aligned}$$

liefert. □

Bemerkung 6.19. Die Preisformeln aus Satz 6.12 bzw. aus Satz 6.18 hängen von der spezifischen Lösung der Riccati-Gleichungen (6.8) ab. Wir diskutieren im Folgenden einige Beispiele.

Beispiel 6.20.

(i) Um das Vasiček-Modell

$$dr(t) = (b + \beta r(t))dt + \sigma dW(t)$$

in unseren formalen Rahmen einzubetten, setzen wir $r = X$ mit $c = 0$ und $\gamma = 1$, und als Zustandsraum ergibt sich $\mathcal{X} = \mathbb{R}$. Wir erhalten in (6.8) dann

$$\begin{aligned}\Phi(t,u) &= \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t \Psi(s,u)^2 ds + b\int_0^t \Psi(s,u)ds,\\ \partial_t\Psi(t,u) &= \beta\Psi(t,u) - 1, \quad \Psi(0,u) = u.\end{aligned}$$

Als eindeutige Lösung erhält man dann

$$\begin{aligned}\Phi(t,u) &= \frac{1}{2}\sigma^2\bigg(\frac{u^2}{2\beta}(\exp(2\beta t) - 1) + \frac{1}{2\beta^3}(\exp(2\beta t) - 4\exp(\beta t) + 2\beta t + 3)\\ &\quad - \frac{u}{\beta^2}(\exp(2\beta t) - 2\exp(\beta t) + 1)\bigg) + b\big(\frac{\exp(\beta t) - 1}{\beta}u - \frac{\exp(\beta t) - 1 - \beta t}{\beta^2}\big),\\ \Psi(t,u) &= \exp(\beta t)u - \frac{\exp(\beta t) - 1}{\beta}\end{aligned}$$

für alle $u \in \mathbb{C}$. Insbesondere gilt (6.9) für alle $u \in \mathbb{C}$ und alle $t \le T$.

Da die Funktionen quadratisch in u sind, folgt aus Korollar 6.10, dass die $\mathcal{F}_t$-bedingte Verteilung von $r(T)$ unter dem S-Forward-Maß normalverteilt mit Varianz $\sigma^2\frac{\exp(2\beta(T-t))-1}{2\beta}$ ist (vgl. Beispiel 2.14). Genauso lässt sich der entsprechende Erwartungswert berechnen. Die Preisformel aus Satz 6.18 lässt sich dann leicht anwenden, um den Preis der Call-Option zu berechnen (vgl. Bemerkung 4.12 und Beispiel 4.13).

(ii) Im Cox-Ingersoll-Ross-Modell

$$dr(t) = (b + \beta r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

mit $r = X$ ergibt sich als eindeutige Lösung der Riccati-Gleichungen

$$\begin{aligned}\Phi(t,u) &= \frac{2b}{\sigma^2}\log\left(\frac{2\theta\exp((\theta-\beta)t/2)}{L_3(t) - L_4(t)u}\right),\\ \Psi(t,u) &= -\frac{L_1(t) - L_2(t)u}{L_3(t) - L_4(t)u}\end{aligned}$$

für alle $u \in \mathbb{C}_-$, wobei $\theta = \sqrt{\beta^2 + 2\sigma^2}$ und

$$\begin{aligned} L_1(t) &= 2(\exp(\theta t) - 1), \\ L_2(t) &= \theta(\exp(\theta t) + 1) + \beta(\exp(\theta t) - 1), \\ L_3(t) &= \theta(\exp(\theta t) + 1) - \beta(\exp(\theta t) - 1), \\ L_4(t) &= \sigma^2(\exp(\theta t) - 1). \end{aligned}$$

Man erhält

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[\exp(ur(T))|\mathcal{F}_t] = \frac{\exp\left(\frac{C_2(t,T,S)r(t)C_1(t,T,S)u}{1-C_1(t,T,S)u}\right)}{(1 - C_1(t,T,S)u)^{\frac{2b}{\sigma^2}}}$$

mit

$$C_1(t,T,S) = \frac{L_3(S-T)L_4(T-t)}{2\theta L_3(S-t)}, \quad C_2(t,T,S) = \frac{L_2(T-t)}{L_4(T-t)} - \frac{L_1(S-t)}{L_3(S-t)}.$$

Da die charakteristische Funktion einer χ^2-Verteilung mit $\delta > 0$ Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter $\zeta > 0$ durch

$$\varphi(u) = \frac{\exp\left(\frac{\zeta u}{1-2u}\right)}{(1-2u)^{\delta/2}}$$

gegeben ist, ergibt sich, dass die $\mathcal{F}_t$-bedingte Verteilung von

$$Z(t,T) = \frac{2r(T)}{C_1(t,T,S)}$$

unter $\mathbb{Q}^S$ eine χ^2-Verteilung mit $4b/\sigma^2$ Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter $2C_2(t,T,S)r(t)$ ist. Daraus lässt sich die Preisformel gemäß Satz 6.18 berechnen. $\square$

Literaturverzeichnis

Filipović, D. (2009). *Term-Structure Models.* Springer, Berlin.

Karatzas, I. and S. Shreve (1991). *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer, New York.