Finanzmathematik und stochastische Integration

Mathias Vetter

4. Juli 2016

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Die Brownsche Bewegung

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Brownschen Bewegung, dem charakteristischen stochastischen Prozess in stetiger Zeit. Eine ihrer wesentlichen Eigenschaften ist, dass ihre weitere Entwicklung unabhängig vom aktuellen Zustand abläuft. Damit eignet sie sich gut zur Modellierung vieler zeitabhängiger Phänomene in der Ökonomie oder in den Naturwissenschaften.

Definition 1.1. Es sei T eine beliebige Indexmenge. Eine Familie von (reellwertigen) Zufallsvariablen

$$X = (X_t)_{t \in T} = \{X(t) \mid t \in T\}$$

auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt *stochastischer Prozess.*

Bemerkung 1.2.

(i) Typische Indexmengen für stochastische Prozesse sind $T = \mathbb{N}$ (diskrete Zeit) oder $T = [0, \infty)$ (stetige Zeit).

(ii) In Analogie zu klassischen Zufallsvariablen

$$\omega \mapsto X(\omega),$$

wo jedem ω eine reellwertige Größe zugeordnet wird, ordnet

$$\omega \mapsto (X_t(\omega))_{t \in T}$$

jedem ω eine Funktion von T nach $\mathbb{R}$ zu. Dies erklärt den Begriff des stochastischen Prozesses.

Definition 1.3. Ein reellwertiger Prozess $B = (B_t)_{t \geq 0}$ heißt *Brownsche Bewegung* mit Start in x, falls gilt:

(i) $B_0 = x$ fast sicher;

(ii) der Prozess besitzt unabhängige Zuwächse, d.h. für alle $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ sind die Zufallsvariablen $B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ unabhängig;

(iii) für jedes $t \geq 0$ und jedes $h > 0$ sind die Zuwächse $B_{t+h} - B_t$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz h;

(iv) der Prozess $t \mapsto B_t(\omega)$ ist fast sicher stetig, d.h.

$$\mathbb{P}(\{\omega \mid t \mapsto B_t(\omega) \text{ ist stetig}\}) = 1.$$

Satz 1.4. (Satz von Wiener) *Die Brownsche Bewegung existiert.*

Beweis: vgl. zum Beispiel Theorem 1.3 in Mörters and Peres (2010). □

Bemerkung 1.5.

(i) Sofern nicht explizit etwas anders angegeben ist, betrachten wir im Folgenden nur die Brownsche Bewegung mit Start in $x = 0$.

(ii) Es lässt sich analog eine d-dimensionale Brownsche Bewegung B definieren, in der die einzelnen Komponenten $B^{(i)}$, $i = 1, \ldots, d$, unabhängige eindimensionale Brownsche Bewegungen sind.

(iii) Die Brownsche Bewegung ist eine Teilklasse der *Lévy-Prozesse*, die sich ähnlich wie in Definition 1.3 einführen lassen, wobei von der Forderung normalverteilter Zuwächse sowie von der Stetigkeit der Pfade abgewichen wird.

Definition 1.6. Es seien T eine Indexmenge und X ein stochastischer Prozess. Dann heißen die Verteilungen von

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})^T \text{ für alle } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n, \text{ mit } t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$$

die *endlich-dimensionalen Verteilungen* von X.

Beispiel 1.7. Es seien B eine Brownsche Bewegung und $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ eine unabhängige gleichverteilte Zufallsvariable. Dann besitzt der stochastische Prozess $(B_t^*)_{t \geq 0}$ mit

$$B_t^* = \begin{cases} B_t, & t \neq U, \\ 0, & t = U, \end{cases}$$

dieselben endlich-dimensionalen Verteilungen wie eine Brownsche Bewegung, ist jedoch nur im Fall $B(U) = 0$, also fast sicher nicht, stetig.

Bemerkung 1.8. Während Definition 1.3 (i)–(iii) die endlich-dimensionalen Verteilungen einer Brownschen Bewegung festlegen, liefert Definition 1.3 (iv) eine zusätzliche Bedingung an die Struktur (fast) jedes *Pfades* $t \mapsto B_t(\omega)$, die gemäß Beispiel 1.7 im Allgemeinen nicht aus den endlich-dimensionalen Verteilungen ableitbar ist. Dieses Phänomen überträgt sich generell auf stochastische Prozesse in stetiger Zeit.

Definition 1.9. Ein stochastischer Prozess X heißt ein *Gaußscher Prozess*, falls seine endlich-dimensionalen Verteilungen sämtlich Normalverteilungen entsprechen.

Satz 1.10. *Eine Brownsche Bewegung mit Start in x ist ein Gaußscher Prozess.*

Beweis: Für alle $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ gilt

$$\begin{pmatrix} B_{t_1} \\ \vdots \\ B_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \\ \vdots \\ B_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{t_1} - B_0 \\ \vdots \\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \end{pmatrix},$$

und affin-lineare Kombinationen normalverteilter Vektoren sind wieder normalverteilt. □

Definition 1.11. Zwei stochastische Prozesse $X = (X_t)_{t \in I}$ und $Y = (Y_t)_{t \in J}$ heißen *unabhängig*, falls für alle $t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$ und alle $s_1, s_2 \ldots, s_m \in J$ die Vektoren $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})^T$ und $(Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_m})^T$ unabhängig sind.

Satz 1.12. (Markov-Eigenschaft) *Es seien B eine Brownsche Bewegung mit Start in x und $t \geq 0$. Dann ist der Prozess $(Z_s)_{s \geq 0}$ mit $Z_s = B_{t+s} - B_t$ eine Brownsche Bewegung mit Start in 0 und unabhängig von $(B_s)_{s \leq t}$.*

Beweis: Offensichtlich gilt $Z_{s_2} - Z_{s_1} = B_{t+s_2} - B_{t+s_1}$, so dass die Zuwächse des Prozesses $(Z_s)_{s \geq 0}$ den Zuwächsen einer klassischen Brownschen Bewegung entsprechen. Insbesondere ergeben sich die Eigenschaften (ii) und (iii) aus Definition 1.3 direkt. Den Start in 0 sowieso die fast sichere Stetigkeit der Pfade kann man ebenfalls sofort einsehen.

Dass die beiden Prozesse ferner unabhängig sind, folgt mit einem ähnlichen Argument wie im Beweis von Satz 1.10: Sowohl $(B_{s_1}, \ldots, B_{s_m})^T$, $s_1, s_2 \ldots, s_m \leq t$, als auch $(B_{t_1} - B_t, \ldots, B_{t_n} - B_t)^T$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \geq 0$, lassen sich als Linearkombinationen von Zuwächsen bis t bzw. nach t darstellen, die gemäß Definition 1.3 unabhängig voneinander sind. □

Definition 1.13. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(i) Eine *Filtration* auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist eine Familie von σ-Algebren $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ mit

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \text{für alle } s \leq t.$$

(ii) Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ wird als *filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum* bezeichnet. Als Notation verwenden wir $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

(iii) Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ heißt *adaptiert* an eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, falls X_t für jedes t eine $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable ist.

Bemerkung 1.14.

(i) Zu jedem stochastischen Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lässt sich via $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s \mid s \leq t\})$ eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ definieren, an die der Prozess natürlicherweise adaptiert ist. Sie wird entsprechend als *die von X erzeugte Filtration* oder als *die natürliche Filtration* bezeichnet. Intuitiv enthält sie alle bis zum Zeitpunkt t verfügbare Information über den Prozess X.

(ii) Analog lassen sich auch im zeitdiskreten Fall Filtrationen bzw. von Prozessen erzeugte Filtrationen definieren.

Definition 1.15. Zu einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ lässt sich mittels

$$\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{u > t} \mathcal{F}_u$$

eine weitere Filtration $(\mathcal{F}_t^+)_{t \geq 0}$ definieren, die bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ einen infinitesimalen Blick in die Zukunft erlaubt. Gilt $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^+$ für alle $t \geq 0$, so heißt $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *rechtsstetig.*

Lemma 1.16. *Es seien $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine Filtration und $(\mathcal{F}_t^+)_{t \geq 0}$ deren infinitesimale Erweiterung. Dann ist $(\mathcal{F}_t^+)_{t \geq 0}$ rechtsstetig.*

Beweis: Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t^+$. Aus

$$\mathcal{G}_t^+ = \bigcap_{r>t} \mathcal{G}_r = \bigcap_{r>t} \bigcap_{u>r} \mathcal{F}_u = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}_t^+ = \mathcal{G}_t$$

folgt die Aussage. □

Satz 1.17. *Es seien $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Start in x, erzeugter Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und zugehöriger infinitesimaler Erweiterung $(\mathcal{F}_t^+)_{t\geq 0}$. Dann ist für jedes $t \geq 0$ der durch $Z_s = B_{t+s} - B_t$ definierte Prozess $(Z_s)_{s\geq 0}$ unabhängig von $\mathcal{F}_t^+$.*

Beweis: Es seien zunächst allgemein eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_n$ sowie eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ gegeben, so dass X_n und $\mathcal{A}$ für jedes n unabhängig sind. Wir zeigen zunächst, dass aus der fast sicheren Konvergenz von $(X_n)_n$ gegen X auch die Unabhängigkeit von X und $\mathcal{A}$ folgt. Dazu sei Ω_0 eine Menge mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, so dass $X_n(\omega) \to X(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega_0$. Setzt man nun

$$\tilde{X}_n(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega), & \omega \in \Omega_0, \\ 0, & \omega \notin \Omega_0, \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{X}(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & \omega \in \Omega_0, \\ 0, & \omega \notin \Omega_0, \end{cases}$$

so folgt wegen $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ auch die Unabhängigkeit von jedem $\tilde{X}_n$ und $\mathcal{A}$. Außerdem konvergiert $\tilde{X}_n$ punktweise gegen $\tilde{X}$, und wegen $\tilde{X} \subset \sigma(\tilde{X}_n \mid n \in \mathbb{N})$ ist auch $\tilde{X}$ unabhängig von $\mathcal{A}$. Wegen $X = \tilde{X}$ $\mathbb{P}$-fast sicher erhalten wir

$$\mathbb{P}(\{X \in B\} \cap A) = \mathbb{P}(\{\tilde{X} \in B\} \cap A) = \mathbb{P}(\{\tilde{X} \in B\})\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{X \in B\})\mathbb{P}(A)$$

für alle $B \in \mathcal{B}$ und alle A in $\mathcal{A}$.

In unserer Situation wenden wir die Vorbereitung auf die fast sicher stetige Brownsche Bewegung an, für die

$$B_{t+s} - B_t = \lim_{m\to\infty} (B_{t_m+s} - B_{t_m})$$

für eine streng monoton fallende Folge $t_m \to t$ gilt. Nach Satz 1.12 ist $B_{t_m+s} - B_{t_m}$ für jedes m unabhängig von $\mathcal{F}_{t_m}$ und wegen $\mathcal{F}_t^+ \subset \mathcal{F}_{t_m}$ dann auch von $\mathcal{F}_t^+$. Dies überträgt sich auf $B_{t+s} - B_t$ und lässt sich analog für alle endlich-dimensionalen Verteilungen zeigen. □

Satz 1.18. (Blumenthals 0-1-Gesetz) *Es seien $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Start in x, erzeugter Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und zugehöriger infinitesimaler Erweiterung $(\mathcal{F}_t^+)_{t\geq 0}$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$$

für jedes $A \in \mathcal{F}_0^+$.

Beweis: Aus Theorem 1.17 und $B_0 = x$ fast sicher folgt, dass jedes

$$A \in \sigma(\{B_t \mid t \geq 0\})$$

unabhängig von $\mathcal{F}_0^+$ ist. Dies trifft insbesondere auf $A \in \mathcal{F}_0^+ \subset \sigma(\{B_t \mid t \geq 0)$ zu. Also ist A unabhängig von sich selbst, und aus $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2$ folgt die Aussage. □

Satz 1.19. *Es seien* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *eine Brownsche Bewegung und* $\sigma = \inf\{t > 0 : B_t > 0\}$ *sowie* $\tau = \inf\{t > 0 : B_t = 0\}$*. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(\sigma = 0) = \mathbb{P}(\tau = 0) = 1.$$

Beweis: Das Ereignis

$$\{\sigma = 0\} = \bigcap_{n\geq 1} \{\text{es existiert ein } 0 < \varepsilon < 1/n \text{ mit } B_\varepsilon > 0\}$$

liegt offenbar in $\mathcal{F}_0^+$. Zudem gilt

$$\mathbb{P}(\sigma \leq t) \geq \mathbb{P}(B_t > 0) = \frac{1}{2}$$

für alle $t > 0$, so dass mit Stetigkeit von oben

$$\mathbb{P}(\sigma = 0) = \lim_{t\to 0} \mathbb{P}(\sigma \leq t) \geq \frac{1}{2}$$

folgt. Nach Satz 1.18 folgt dann $\mathbb{P}(\sigma = 0) = 1$. Dasselbe Argument funktioniert für $B_t < 0$, so dass sich mit der Stetigkeit der Pfade auch die Aussage für τ ergibt. $\square$

Satz 1.20. *Es sei* $(B_t)_{t\in[0,1]}$ *eine Brownsche Bewegung mit Start in* x*. Dann gilt fast sicher:*

(i) Jedes lokale Maximum von B *ist ein striktes lokales Maximum.*

(ii) Die Menge aller lokalen Maxima von B *ist abzählbar und dicht.*

(iii) Das globale Maximum von B *ist eindeutig.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Maxima m_1 und m_2 über zwei disjunkte Intervalle $[a_1, b_1]$ und $[a_2, b_2]$ mit $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2$ fast sicher verschieden sind. Nach Satz 1.19 folgt zunächst, dass $B(a_2) < m_2$ fast sicher gilt, so dass m_2 dem Maximum auf $[a_2 + 1/n, b_2]$ für ein $n \in \mathbb{N}$ entspricht und wir ohne Einschränkung $b_1 < a_2$ annehmen können.

Eine zweifache Anwendung von Satz 1.12 zeigt, dass $m_1 - B_{b_1}$, $B_{a_2} - B_{b_1}$ und $m_2 - B_{a_2}$ jeweils voneinander unabhängig sind. Gilt nun $m_1 = m_2$, so folgt

$$B_{a_2} - B_{b_1} = (m_1 - B_{b_1}) - (m_2 - B_{a_2}).$$

Bedingt auf $m_1 - B_{b_1}$ und $m_2 - B_{a_2}$ ist die linke Seite eine Zufallsvariable mit einer stetigen Verteilung und die rechte Seite eine Konstante. Daraus folgt $\mathbb{P}(m_1 = m_2) = 0$.

(i) Nach Vorbereitung besitzen fast sicher je zwei disjunkte nicht-triviale kompakte Intervalle mit rationalen Endpunkten verschiedene Maxima. Besitzt eine Brownsche Bewegung auf $[0, 1]$ ein nicht-striktes lokales Maximum, so existieren jedoch zwei nicht-leere kompakte Intervalle mit rationalen Endpunkten, so dass die Maxima über diesen Intervallen übereinstimmen.

(ii) Ebenfalls in der Vorbereitung hatten wir gesehen, dass fast sicher kein Maximum auf $[a, b]$ mit rationalen $a < b$ an den Endpunkten des Intervalls angenommen wird. Also enthält jedes dieser Intervalle ein lokales Maximum, und entsprechend liegt die Menge der lokalen Maxima dicht. Zudem ist die Menge der lokalen Maxima abzählbar, da jedes lokale Maximum strikt ist und somit die Anzahl aller solcher $[a, b]$ eine obere Schranke für die Zahl der lokalen Maxima ist.

(iii) Fast sicher sind die Maxima über $[0, q]$ und $[q, 1]$ für jedes rationale q verschieden. Existieren nun jedoch Stellen t_1 und t_2, an denen dasselbe globale Maximum angenommen wird, so existiert $q \in \mathbb{Q}$ mit $t_1 < q < t_2$, so dass die Maxima über $[0, q]$ und $[q, 1]$ übereinstimmen. □

Bemerkung 1.21. Die beiden Zufallsvariablen σ und τ aus Satz 1.19 sind Beispiele für zufällige Zeitpunkte, deren Eintritt ausschließlich vom Verhalten von B abhängt und die bei Kenntnis des Pfades von B (bzw. äquivalent der von B erzeugten Filtration) eindeutig festgelegt sind. Solche Zufallsvariablen spielen eine wesentliche Rolle in der Theorie stochastischer Prozesse.

Definition 1.22. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ heißt *Stoppzeit* (bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$), falls

$$\{\tau \leq t\} \subset \mathcal{F}_t$$

für alle $t \geq 0$.

Bemerkung 1.23.

(i) Jede deterministische Zeit $s > 0$ ist wegen

$$\{s \leq t\} \in \{\emptyset, \Omega\}$$

eine Stoppzeit.

(ii) Ist $(\tau_n)_{n\geq 1}$ eine monoton wachsende Folge von Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ mit $\tau_n \to \tau$ fast sicher, so ist τ wegen

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n\geq 1} \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

ebenfalls eine Stoppzeit.

(iii) Sind σ und τ Stoppzeiten, so auch $\tau \wedge \sigma := \min(\tau, \sigma)$ und $\tau \vee \sigma := \max(\tau, \sigma)$. Dies sieht man zum Beispiel an

$$\{\tau \wedge \sigma \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cup \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

da nach Definition sowohl $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ als auch $\{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ gilt.

Beispiel 1.24. Das klassische Beispiel für Stoppzeiten sind Ersteintrittszeiten. Betrachtet man zum Beispiel eine Brownsche Bewegung B und eine abgeschlossene Menge $H \subset \mathbb{R}$, so ist $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid B_t \in H\}$ eine Stoppzeit bzgl. der von B erzeugten Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, da aufgrund der Stetigkeit der Pfade

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap(0,t)} \bigcup_{x\in\mathbb{Q}\cap H} \{B_s \in \mathcal{B}(x, 1/n)\} \in \mathcal{F}_t$$

gilt, wobei $\mathcal{B}(y, \varepsilon)$ den offenen ε-Ball um y bezeichnet.

Bemerkung 1.25. Im Allgemeinen kann man für beliebige stochastische Prozesse X und beliebige Borelmengen $\Lambda \subset \mathbb{R}$ nicht zeigen, dass $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \Lambda\}$ eine Stoppzeit bzgl. der von X erzeugten Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist. Aus diesem Grund nimmt man typischerweise zwei zusätzliche strukturelle Bedingungen an, die diese Eigenschaft zusichern:

(i) Rechtsstetigkeit der erzeugten Filtration;

(ii) Pfade von X, die fast sicher *càdlàg* (rechtsstetig mit linksseitig existieren Grenzwerten) sind.

Wir fordern daher im Folgenden immer, dass die von uns betrachteten Filtrationen rechtsstetig sind. Ebenso nimmt man aus technischen Gründen die *Vollständigkeit der Filtration* an, wonach $\mathcal{F}_0$ alle $\mathbb{P}$-Nullmengen enthält.

Satz 1.26. *Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ ist genau dann eine Stoppzeit bzgl. der (rechtsstetigen) Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls*

$$\{\tau < t\} \subset \mathcal{F}_t$$

für alle $t \geq 0$ gilt.

Beweis:

$\Longrightarrow$ Es gilt

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{0<\varepsilon<t, \varepsilon\in\mathbb{Q}} \{\tau \leq t - \varepsilon\},$$

und nach Voraussetzung gilt jeweils $\{\tau \leq t - \varepsilon\} \subset \mathcal{F}_{t-\varepsilon} \subset \mathcal{F}_t$. Daraus folgt $\{\tau < t\} \subset \mathcal{F}_t$.

$\Longleftarrow$ Umgekehrt gilt

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{t<u<t+\varepsilon, u\in\mathbb{Q}} \{\tau < u\}$$

für alle $\varepsilon > 0$. Also folgt

$$\{\tau \leq t\} \subset \bigcap_{t<u} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}_t$$

nach Rechtsstetigkeit der Filtration. □

Definition 1.27. Es sei τ eine Stoppzeit bzgl. der (rechtsstetigen) Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dann bezeichnen wir mit

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \subset \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\}$$

die von der Stoppzeit τ erzeugte σ-Algebra.

Lemma 1.28. *Es seien $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ eine Filtration und σ und τ Stoppzeiten. Dann gilt:*

(i) Gilt $\tau \leq \sigma$ fast sicher, so folgt $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.

(ii) τ ist $\mathcal{F}_\tau$-messbar.

Beweis:

(i) Es sei $A \in \mathcal{F}_\tau$. Dann gilt:

$$A \cap \{\sigma \leq t\} = (A \cap \{\tau \leq t\}) \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

da $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ aus $A \in \mathcal{F}_\tau$ folgt und $\{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ nach Definition gilt.

(ii) Es sei $s \geq 0$ beliebig. Dann gilt

$$\{\tau \leq s\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq s \wedge t\} \in \mathcal{F}_{s\wedge t} \subset \mathcal{F}_t$$

für alle $t \geq 0$, also nach Definition $\{\tau \leq s\} \subset \mathcal{F}_\tau$. □

Bemerkung 1.29.

(i) Intuitiv besteht die σ-Algebra $\mathcal{F}_\tau$ aus allen Ereignissen, die bis zur zufälligen Zeit τ eingetreten sind.

(ii) Für diskrete Stoppzeiten τ mit Werten in $\{0, 1, \ldots\} \cup \{\infty\}$ (oder einer anderen diskreten geordneten Menge) gilt wegen

$$\{\tau = t\} = \{\tau \leq t\} \backslash \{\tau \leq t - 1\}$$

und

$$\{\tau \leq t\} = \bigcup_{s \leq t} \{\tau = s\}$$

auch

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau = t\} \subset \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \in T\}.$$

Satz 1.30. (Starke Markov-Eigenschaft) *Es seien B eine Brownsche Bewegung mit erzeugter Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und dessen infinitesimaler Erweiterung $(\mathcal{F}_t^+)_{t\geq 0}$, und es sei ferner τ eine fast sicher endliche Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t^+)_{t\geq 0}$. Dann ist der Prozess $(Z_t)_{t\geq 0}$ mit*

$$Z_t = B_{\tau+t} - B_\tau$$

eine Brownsche Bewegung mit Start in 0 und unabhängig von $\mathcal{F}_\tau^+$.

Beweis: Wir beweisen den Satz zunächst für eine diskrete Approximation von τ, nämlich für

$$\tau_n = (m+1)2^{-n}, \quad \text{falls } m2^{-n} \leq \tau < (m+1)2^{-n},\ m \in \mathbb{N}_0,$$

die selbst wieder eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t^+)_{t\geq 0}$ ist. Dazu seien $\{B_k(t) \mid t \geq 0\}$ durch

$$B_k(t) = B(t + k2^{-n}) - B(k2^{-n})$$

und $\{B_*(t) \mid t \geq 0\}$ durch

$$B_*(t) = B(t + \tau_n) - B(\tau_n)$$

gegeben. Es sei nun $E \in \mathcal{F}_{\tau_n}^+$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{B_*(t) \in A\} \cap E) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{B_k(t) \in A\} \cap E \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{B_k(t) \in A\}) \mathbb{P}(E \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}),
\end{aligned}$$

da B_k nach Satz 1.17 unabhängig von $E \cap \{\tau_n = k2^{-n}\} \in \mathcal{F}^+_{k2^{-n}}$ ist. Ferner gilt

$$\mathbb{P}(\{B_k(t) \in A\}) = \mathbb{P}(\{B(t) \in A\})$$

gemäß Satz 1.12. Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{B_k(t) \in A\})\mathbb{P}(E \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}) &= \mathbb{P}(\{B(t) \in A\}) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(E \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}) \\ &= \mathbb{P}(\{B(t) \in A\})\mathbb{P}(E),\end{aligned}$$

also die Aussage für τ_n.

Für den allgemeinen Fall verwendet man $\tau_n \searrow \tau$ fast sicher und dass der Prozess

$$B(t + \tau_n) - B(\tau_n)$$

eine Brownsche Bewegung unabhängig von $\mathcal{F}^+_{\tau_n} \supset \mathcal{F}^+_{\tau}$ ist. Insbesondere sind die Zuwächse

$$B(t + s + \tau) - B(t + \tau) = \lim_{n\to\infty} B(t + s + \tau_n) - B(t + \tau_n)$$

des Prozesses $\{B(r+\tau) - B(\tau) \mid r \geq 0\}$ unabhängig über disjunkten Intervallen und normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz s. Zudem ist der Prozess ebenfalls fast sicher stetig, also eine Brownsche Bewegung. Zuletzt sind alle Zuwächse von $\{B(r + \tau) - B(\tau) \mid r \geq 0\}$, und damit auch der Prozess selbst, nach demselben Limesübergang unabhängig von $\mathcal{F}^+_{\tau}$. $\square$

Beispiel 1.31. Es sei $\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t = \max_{0\leq s\leq 1} B_s\}$. Intuitiv ist τ keine Stoppzeit, da man zu keinem Zeitpunkt $t \in (0, 1)$ sicher sein kann, dass zu einer späteren Zeit nicht noch größere Werte von B beobachtet werden.

Formal beachte man, dass gemäß dem Beweis von Satz 1.20 $\tau < 1$ fast sicher gilt. In diesem Fall folgt, dass $Z_t = B_{t+\tau} - B_\tau$ in einer Umgebung von τ nicht positiv ist. Gemäß Satz 1.19 kann Z dann keine Brownsche Bewegung mit Start in 0 sein.

Definition 1.32. Es seien $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und τ eine Stoppzeit. Dann wird der durch

$$W_t = B_t 1_{\{t\leq\tau\}} + (2B_\tau - B_t)1_{\{t>\tau\}}$$

definierte Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$ als die *an τ reflektierte Brownsche Bewegung* bezeichnet.

Satz 1.33. (Reflektionsprinzip) *$(W_t)_{t\geq 0}$ ist eine Brownsche Bewegung.*

Beweis: Offensichtlich ist nur dann etwas zu zeigen, wenn τ endlich ist. Dazu beachten wir zunächst, dass die Abbildung, die eine stetige Funktion $\{g(t) \mid t \geq 0\}$ mit $g(0) = 0$ an den Endpunkt einer stetigen Funktion $\{f(t) \mid 0 \leq t \leq \tau\}$ anklebt und so eine neue stetige Funktion definiert, messbar ist.

Nach Satz 1.30 sind nun

$$(B_{t+\tau} - B_\tau)_{t\geq 0} \quad \text{und} \quad (-(B_{t+\tau} - B_\tau))_{t\geq 0}$$

jeweils Brownsche Bewegungen und unabhängig von $(B_t)_{t\leq\tau}$. Klebt man beide Abbildungen im obigen Sinne an $(B_t)_{0\leq t\leq\tau}$ an, so besitzen die entstehenden Prozesse also jeweils dieselbe Verteilung. Dabei entspricht der erste $(B_t)_{t\geq 0}$ und der zweite $(W_t)_{t\geq 0}$. $\square$

Satz 1.34. *Es seien B eine Brownsche Bewegung und $M_t = \max_{0 \le s \le t} B_s$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(M_t > \lambda) = 2\mathbb{P}(B_t > \lambda) = \mathbb{P}(|B_t| > \lambda)$$

für alle $\lambda > 0$.

Beweis: Es seien $\tau = \inf\{t \ge 0 \mid B_t = \lambda\}$ und W die an τ reflektierte Brownsche Bewegung. Dann gilt

$$\{M_t > \lambda\} = \{B_t > \lambda\} \cup \{M_t > \lambda, B_t \le \lambda\}.$$

Beide Ereignisse sind disjunkt, und es gilt $\{M_t > \lambda, B_t \le \lambda\} = \{W_t \ge \lambda\}$ nach Konstruktion von W. Aus Satz 1.33 und $\mathbb{P}(W_t = \lambda) = 0$ folgt

$$\mathbb{P}(M_t > \lambda) = 2\mathbb{P}(B_t > \lambda).$$

Die zweite Aussage folgt aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung. $\square$

Bemerkung 1.35. Man zeigt leicht, dass für $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ die Ungleichung

$$\mathbb{P}(X > x) \le \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$$

gilt. Damit folgt aus Satz 1.34

$$\mathbb{P}(M_t > \lambda) \le \frac{\sqrt{2t}}{\lambda\sqrt{\pi}} \exp(-\lambda^2/(2t)).$$

Kapitel 2

Martingaltheorie

In diesem Abschnitt widmen wir uns der Theorie der Martingale, einer reichhaltigen Klasse von stochastischen Prozessen, die zur Modellierung fairer Spiele verwendet werden.

Definition 2.1. Es seien $T \subset \mathbb{R}$ eine Indexmenge und $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\in T}$ heißt *Martingal* bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, falls

(i) X an $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ adaptiert ist;

(ii) $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ für alle $t \in T$ gilt;

(iii) $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ für alle $s, t \in T$ mit $s \leq t$ gilt.

Bemerkung 2.2.

(i) Die definierende Bedingung $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ für alle $s \leq t$ bedeutet im Wesentlichen, dass man bei Kenntnis des Prozesses X zum Zeitpunkt s in der weiteren Entwicklung bis t weder einen Gewinn noch einen Verlust erwartet.

(ii) Gilt analog $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$ bzw. $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$ für alle $s \leq t$, so heißen die Prozesse *Super-* bzw. *Submartingale.*

Satz 2.3. *Es seien $X = (X_t)_{t\in T}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Abbildung mit $\mathbb{E}[|\varphi(X_t)|] < \infty$ für alle $t \in T$. Dann ist $(\varphi(X_t))_{t\in T}$ ein Submartingal.*

Beweis: Offenbar ist $\varphi(X_t)$ messbar bzgl. $\mathcal{F}_t$, und nach Voraussetzung gilt zudem $\mathbb{E}[|\varphi(X_t)|] < \infty$. Somit ist ausschließlich

$$\mathbb{E}[\varphi(X_t)|\mathcal{F}_s] \geq \varphi(\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]) = \varphi(X_s)$$

für $s \leq t$ nachzuweisen, wobei wir die bedingte Jensen-Ungleichung verwendet haben. □

Bemerkung 2.4. Die Aussage gilt analog für Submartingale, wenn $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zusätzlich monoton wachsend ist.

Beispiel 2.5.

(i) Es seien $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Start in x und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die von ihr erzeugte Filtration. Dann gilt für alle $s \leq t$

$$\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] = B_s + \mathbb{E}[B_t - B_s] = B_s,$$

da $B_t - B_s$ nach Satz 1.12 eine Brownsche Bewegung mit Start in 0 und unabhängig von $\mathcal{F}_s$ ist.

(ii) Es seien $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. (unabhängig und identisch verteilt) mit $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$. Dann gilt für die Folge $(S_n)_n$ der Partialsummen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und die erzeugte Filtration

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\{X_i \mid i \leq n\}) = \sigma(\{S_i \mid i \leq n\})$$

die Identität

$$\mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_m] = S_m + \mathbb{E}[S_n - S_m] = S_m + (n-m)\mathbb{E}[X_i]$$

für alle $m \leq n$. Entsprechend ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal, falls

$$\mathbb{E}[X_i] = 0$$

gilt. Im Fall $\mathbb{E}[X_i] \leq 0$ bzw. $\mathbb{E}[X_i] \geq 0$ handelt es sich um ein Super- bzw. Submartingal.

(iii) Es seien X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration. Dann besitzt der Prozess

$$Y_t = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$$

nach der bedingten Jensen-Ungleichung einen existierenden Erwartungswert und ist offenbar an $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ adaptiert. Zudem gilt für $s \leq t$

$$\mathbb{E}[Y_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_s] = Y_s$$

nach der Turm-Eigenschaft der bedingten Erwartung. Insbesondere ist $(Y_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal. Ein analoges Resultat gilt im diskreten Fall.

Wir beginnen mit einigen Resultaten für stochastische Prozesse in diskreter Zeit. Wesentliche Aussagen werden sich mit dem Verhalten gestoppter Martingale bzw. Supermartingale befassen. Analoge Resultate mit vertauschten Vorzeichen lassen sich in der Regel auch für Submartingale zeigen.

Definition 2.6. Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ eine Filtration.

(i) Eine Folge $V = (V_t)_{t\in\mathbb{N}}$ heißt *vorhersehbar* bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}$, falls jedes V_t messbar bzgl. $\mathcal{F}_{t-1}$ ist.

(ii) Ist $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein weiterer adaptierter Prozess, so definieren wir $Y = V \bullet X$ durch $Y_0 = 0$ und

$$Y_t = \sum_{s=1}^{t} V_s(X_s - X_{s-1}), \quad t \in \mathbb{N}.$$

(iii) Ein Prozess Z heißt *monoton wachsend* bzw. *fallend*, falls $t \mapsto Z_t(\omega)$ fast sicher monoton wachsend bzw. fallend ist.

Bemerkung 2.7. Ist X ein Martingal, so werden die Martingaldifferenzen $X_s - X_{s-1}$ in jeder Runde mit dem vorher festgelegten Einsatz V_s gewichtet. Y_t stellt dann den Gewinn bei dieser Strategie zum Zeitpunkt t dar. Intuitiv ist klar, dass man mit diesem Vorgehen in den meisten Fällen im Mittel weder Gewinn noch Verlust machen wird.

Lemma 2.8. *Es seien $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein (Super-)martingal und $V = (V_t)_{t\in\mathbb{N}}$ ein vorhersehbarer Prozess mit $V_t \geq 0$ und $||V_t||_\infty < \infty$ für alle $t \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $V \bullet X$ ein (Super-)martingal.*

Beweis: Offensichtlich ist Y_t an $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ adaptiert, und unter der zusätzlichen Voraussetzung $||V_t||_\infty < \infty$ folgt $\mathbb{E}[|Y_t|] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$. Zuletzt gilt

$$\mathbb{E}[Y_t|\mathcal{F}_{t-1}] = Y_{t-1} + V_t\mathbb{E}[X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}] \leq Y_{t-1}$$

bzw. Gleichheit im Fall eines Martingals. Die Aussage folgt dann induktiv mit Hilfe der Turmeigenschaft. □

Bemerkung 2.9. Allgemein kann man Lemma 2.8 zeigen, falls $\mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty$ und $\mathbb{E}[|V_t|^q] < \infty$ für ein Paar (p, q) mit $1/p + 1/q = 1$ und alle $t \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Satz 2.10. (Doob-Zerlegung) *Es sei $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal. Dann existieren ein Martingal $M = (M_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ mit $M_0 = 0$ und ein vorhersehbarer, monoton fallender Prozess $V = (V_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ mit $V_0 = 0$, so dass*

$$X = X_0 + M + V$$

gilt. Diese Zerlegung ist fast sicher eindeutig.

Beweis:
Existenz: Wir setzen $V_0 = 0$ und

$$V_t = \sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}[X_s - X_{s-1}|\mathcal{F}_{s-1}], \quad t \in \mathbb{N}.$$

Offensichtlich ist V_t $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar und wegen

$$\mathbb{E}[X_s - X_{s-1}|\mathcal{F}_{s-1}] = \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_{s-1}] - X_{s-1} \leq X_{s-1} - X_{s-1} = 0$$

monoton fallend. Setzt man dann

$$M_t = X_t - X_0 - V_t,$$

so ist M_t adaptiert, und es gilt $M_0 = 0$ sowie $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$. Außerdem erhält man

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_{t-1}] - M_{t-1} &= \mathbb{E}[M_t - M_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}]\\ &= \mathbb{E}[X_t - X_{t-1} - (V_t - V_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}]\\ &= \mathbb{E}[X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}]|\mathcal{F}_{t-1}] = 0,\end{aligned}$$

und die allgemeine Aussage folgt erneut induktiv per Turmeigenschaft.

Eindeutigkeit: Es seien N und W zwei weitere Prozesse mit denselben Eigenschaften. Wir zeigen induktiv, dass dann $N_t = M_t$ und $W_t = V_t$ fast sicher gelten muss.

$t = 0$: Die Aussage ist klar.

$t - 1 \Rightarrow t$: Es gilt
$$X_0 + M_t + V_t = X_t = X_0 + N_t + W_t$$
für alle t, also insbesondere $N_t - M_t = V_t - W_t$. Nun folgt
$$0 = N_{t-1} - M_{t-1} = \mathbb{E}[N_t - M_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[V_t - W_t|\mathcal{F}_{t-1}] = V_t - W_t,$$
wobei wir zunächst die Induktionsvoraussetzung, dann die Martingaleigenschaft, weiter die vorbereitete Identität und zuletzt die Vorhersehbarkeit verwendet haben. Damit ergibt sich auch $N_t - M_t = 0$. □

Satz 2.11. *Es seien $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein an $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ adaptierter Prozess und τ eine Stoppzeit. Dann gilt: $X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}$ ist $\mathcal{F}_\tau$-messbar.*

Beweis: Es bezeichne $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$, und es seien $B \in \mathcal{B}$ und $t \in \mathbb{N}$. Dann gilt
$$\begin{aligned}\{X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}} \in B\} \cap \{\tau \le t\} &= \bigcup_{s\le t}(\{X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}} \in B\} \cap \{\tau = s\})\\ &= \bigcup_{s\le t}(\{X_s \in B\} \cap \{\tau = s\}).\end{aligned}$$
Nach Voraussetzung gilt $\{X_s \in B\} \in \mathcal{F}_s$, und mit demselben Argument wie in Bemerkung 1.29 (ii) gilt auch $\{\tau = s\} \in \mathcal{F}_s$. Wegen $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ folgt
$$\{X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}} \in B\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t.$$
□

Satz 2.12. (Optional Sampling Theorem) *Es sei $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein an $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ adaptierter Prozess. Dann sind äquivalent:*

(i) X ist ein Martingal.

(ii) Für alle beschränkten Stoppzeiten τ gilt: $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

Beweis:

$\Longrightarrow$ Es sei τ eine beschränkte Stoppzeit mit $\tau \le t$ fast sicher. Dann folgt $\mathbb{E}[|X_\tau|] < \infty$ aus
$$|X_\tau| \le \sum_{s=0}^{t} |X_s|,$$
und es gilt ferner
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_\tau] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{s=0}^{t} X_s 1_{\{\tau=s\}}\Big] = \sum_{s=0}^{t} \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]1_{\{\tau=s\}}\big]\\ &= \sum_{s=0}^{t} \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_t 1_{\{\tau=s\}}|\mathcal{F}_s]\big] = \mathbb{E}\Big[X_t \sum_{s=0}^{t} 1_{\{\tau=s\}}\Big],\end{aligned}$$

wobei wir zunächst die Martingaleigenschaft von X, dann $\{\tau = s\} \in \mathcal{F}_s$ und zuletzt den Satz von der iterierten Erwartung ausgenutzt haben. Wir erhalten wieder unter Verwendung der Martingaleigenschaft also

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_0]] = \mathbb{E}[X_0].$$

$\Longleftarrow$ Es seien $s < t$ und $A \in \mathcal{F}_s$. Wir definieren Zufallsvariablen τ und σ gemäß

$$\tau(\omega) = \begin{cases} s, & \text{falls } \omega \in A^c, \\ t, & \text{falls } \omega \in A, \end{cases}$$

und $\sigma(\omega) = s$. Wegen

$$\{\tau \le r\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } r < s, \\ A^c \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_r, & \text{falls } s \le r < t, \\ \Omega, & \text{falls } t \le r, \end{cases}$$

ist τ eine Stoppzeit. σ ist gemäß Bemerkung 1.23 (i) ebenfalls eine Stoppzeit. Es folgt

$$\mathbb{E}[X_t 1_A] + \mathbb{E}[X_s 1_{A^c}] = \mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_\sigma] = \mathbb{E}[X_s 1_A] + \mathbb{E}[X_s 1_{A^c}].$$

Da X_s $\mathcal{F}_s$-messbar ist, folgt $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ nach Definition. □

Bemerkung 2.13. Wir werden im Verlauf der Vorlesung weitere Sätze kennenlernen, die ebenfalls als Optional-Sampling-Theoreme firmieren. Dabei werden wir immer die Variante für beschränkte Stoppzeiten formulieren, wobei es auch andere hinreichende Kriterien gibt. Im diskreten Fall folgt $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$, wonach man in einem fairen Spiel also keinen Gewinn machen kann, zum Beispiel auch, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen gilt:

(i) τ ist fast sicher endlich, und es gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n| \le K$ für ein $K \in \mathbb{N}$ fast sicher.

(ii) $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n - X_{n-1}| \le K$ für ein $K \in \mathbb{N}$ fast sicher.

Beispiel 2.14. Das klassische Beispiel für eine Strategie, mit der man bei einem fairen Spiel fast sicher Gewinn erzielt, ist die *Martingalstrategie*. Es sei $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_t = 1) = \mathbb{P}(X_t = -1) = \frac{1}{2}$. Nach Beispiel 2.5 (ii) ist der Prozess $(S_t)_{t\in\mathbb{N}}$ mit

$$S_t = \sum_{s=1}^{t} X_s$$

ein Martingal. Verdoppelt man in jedem Spiel seien Einsatz, d.h. wählt man $V_s = 2^{s-1}$, so ist die resultierende Martingaltransformation $Y = V \bullet S$ mit

$$Y_t = \sum_{s=1}^{t} V_s(S_s - S_{s-1}) = \sum_{s=1}^{t} 2^{s-1} X_s$$

gemäß Lemma 2.8 wieder ein Martingal. Als Stoppzeit wählt man nun $\tau = \inf\{t \in \mathbb{N} \mid X_t = 1\}$. Offenbar ist $\tau < \infty$ fast sicher, und es gilt

$$Y_\tau 1_{\{\tau=t\}} = \Big(2^{t-1} - \sum_{s=0}^{t-2} 2^s\Big) 1_{\{\tau=t\}} = 1_{\{\tau=t\}}$$

für alle $t \in \mathbb{N}$. Also folgt $Y_\tau = 1$ fast sicher, was Bemerkung 2.13 aufgrund der Unbeschränktheit von $2^{s-1}X_s$ nicht widerspricht.

Alternativ kann man dieses Beispiel auch ohne formale Stoppzeit definieren, indem man $W_1 = 1$, $W_s = 2^{s-1}1_{\{X_1=\ldots=X_{s-1}=-1\}}$ für $s \geq 2$ und

$$Z_t = \sum_{s=1}^{t} W_s(S_s - S_{s-1})$$

setzt. In diesem Fall erhält man entsprechend $Z_t \to 1$ fast sicher.

Satz 2.15. (Optional Sampling Theorem) *Es sei $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein (Super-)martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$, und es seien σ, τ beschränkte Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] \leq X_\sigma$$

bzw. Gleichheit für Martingale.

Beweis: Wir setzen $Y = \mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma]$, und es sei $t \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $\sigma \leq \tau \leq t$ fast sicher gilt. Nach Satz 2.11 ist X_σ $\mathcal{F}_\sigma$-messbar. Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\mathbb{E}[Y1_C] = \mathbb{E}[X_\tau 1_C] \leq \mathbb{E}[X_\sigma 1_C]$$

für alle $C \in \mathcal{F}_\sigma$ gilt. Gemäß Satz 2.10 gilt

$$X = X_0 + M + V,$$

wobei V im Fall eines Supermartingals monoton fallend ist und im Fall eines Martingals verschwindet. Offenbar folgt die Aussage dann, sobald

$$\mathbb{E}[M_\tau 1_C] = \mathbb{E}[M_\sigma 1_C]$$

für ein Martingal M gezeigt ist.

Dazu setzen wir $\rho = \sigma 1_C + \tau 1_{C^c}$. Nach Definition gilt

$$C \cap \{\sigma \leq s\} \in \mathcal{F}_s \quad \text{und} \quad C^c \cap \{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s,$$

wobei wir im zweiten Schritt $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$ verwendet haben. Mit

$$\{\rho \leq s\} = (C \cap \{\sigma \leq s\}) \cup (C^c \cap \{\tau \leq s\})$$

folgt, dass ρ eine Stoppzeit ist. Aus Satz 2.12 ergibt sich dann mittels

$$\mathbb{E}[M_\tau 1_C] + \mathbb{E}[M_\tau 1_{C^c}] = \mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_\rho] = \mathbb{E}[M_\sigma 1_C] + \mathbb{E}[M_\tau 1_{C^c}]$$

die Aussage. □

Korollar 2.16. *Es sei $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein (Super-)martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$, und es seien σ, τ beschränkte Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[X_\tau] \leq \mathbb{E}[X_\sigma]$$

bzw. Gleichheit für Martingale.

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus Satz 2.15 mittels iterierter Erwartung. □

Wir interessieren uns nun für das Konvergenzverhalten von Martingalen. Intuitiv stellen Supermartingale eine Familie von Zufallsvariablen mit einem negativen Trend dar, die dann konvergieren sollte, wenn die Zufallsgrößen nach unten beschränkt sind. Dies werden wir im Folgenden präzisieren.

Definition 2.17. Es seien $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir die Anzahl der *Upcrossings* von $[a, b]$ durch α mit

$$\begin{aligned} U_n[a,b](\alpha) = \sup\{k \in \mathbb{N} \mid &\text{ es existieren } 0 \leq s_1 < t_1 < \ldots < s_k < t_k \leq n \\ &\text{mit } \alpha_{s_i} < a, \alpha_{t_i} > b \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, k\}\}, \end{aligned}$$

wobei $\sup \emptyset = 0$ gesetzt wird. Ferner sei

$$U_\infty[a,b](\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} U_n[a,b](\alpha).$$

Lemma 2.18. *Eine Folge $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ konvergiert genau dann in $\overline{\mathbb{R}}$, wenn $U_\infty[a,b](\alpha) < \infty$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$ gilt.*

Beweis: Wir gehen indirekt vor:

$$\begin{aligned} &\liminf_n \alpha_n < \limsup_n \alpha_n \\ \Longleftrightarrow &\exists a, b \in \mathbb{Q} \text{ mit } \liminf_n \alpha_n < a < b < \limsup_n \alpha_n \\ \Longleftrightarrow &\exists a, b \in \mathbb{Q} \text{ mit } U_\infty[a,b](\alpha) = \infty. \end{aligned}$$

□

Satz 2.19. (Upcrossing-Ungleichung) *Es seien $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal und $a < b$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[U_t[a,b](X)] \leq \frac{\mathbb{E}[(X_t - a)^-]}{b - a}$$

für jedes $t \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Wir definieren rekursiv den vorhersehbaren Prozess

$$V_s = \begin{cases} 1_{\{X_0 < a\}}, & \text{falls } s = 1, \\ 1_{\{V_{s-1}=1, X_{s-1}\leq b\}} + 1_{\{V_{s-1}=0, X_{s-1}<a\}}, & \text{falls } s \geq 2, \end{cases}$$

der immer dann aktiv ist, wenn wir uns in einem aktuellen Upcrossing von a nach b befinden. Nach Lemma 2.8 ist dann

$$Y_t = \sum_{s=1}^t V_s(X_s - X_{s-1}), \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

ebenfalls ein Supermartingal, und Korollar 2.16 liefert

$$\mathbb{E}[Y_t] \leq \mathbb{E}[Y_0] = 0. \tag{2.1}$$

Andererseits gilt nach Konstruktion, dass der Prozess Y jedes Mal, wenn er $[a,b]$ aufsteigend überschritten hat, mindestens die Höhe $(b-a)$ gewinnt. Zudem kann er seit der letzten Überschreitung höchstens $(X_t-a)^-$ verloren haben, nämlich wenn das aktuelle Upcrossing bereits begonnen hat und man sich noch unterhalb von a befindet. Also gilt

$$Y_t \geq U_t[a,b](X)(b-a) - (X_t-a)^-. \tag{2.2}$$

Die Verknüpfung von (2.1) und (2.2) liefert die Aussage. □

Satz 2.20. (Doobscher Konvergenzsatz) *Es sei $X=(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal mit $\sup_{t\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}[|X_t|]<\infty$. Dann existiert $X_\infty=\lim_{n\to\infty}X_n$ fast sicher und ist integrierbar.*

Beweis: Es seien $a<b$ beliebig. Dann gilt

$$(b-a)\mathbb{E}[U_\infty[a,b](X)] = (b-a)\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[U_t[a,b](X)]$$

nach dem Satz von der monotonen Konvergenz, und die rechte Seite kann mit Lemma 2.19 durch

$$\sup_{t\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}[(X_t-a)^-] \leq |a| + \sup_{t\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$$

abgeschätzt werden. Also gilt $\mathbb{P}(U_\infty[a,b](X)<\infty)=1$. Insbesondere folgt

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{a,b\in\mathbb{Q},a<b}\{U_\infty[a,b](X)<\infty\}\Big)=1,$$

und nach Lemma 2.18 existiert X_∞ in $\overline{\mathbb{R}}$ fast sicher. Zuletzt folgt

$$\mathbb{E}[|X_\infty|] \leq \liminf_t \mathbb{E}[|X_t|] \leq \sup_t \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$$

aus dem Lemma von Fatou. □

Korollar 2.21. *Jedes nicht-negative Supermartingal $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert fast sicher gegen eine integrierbare Zufallsgröße.*

Beweis: Aus $X_t\geq 0$ folgt $\mathbb{E}[|X_t|]=\mathbb{E}[X_t]\leq\mathbb{E}[X_0]$ gemäß Satz 2.15. Insbesondere ergibt sich $\sup_t\mathbb{E}[|X_t|]<\infty$. □

Bemerkung 2.22. Im Allgemeinen erhält man in Satz 2.20 keine Konvergenz in L^1, wie man etwa an Beispiel 2.14 sieht. In diesem Fall betrachten wir also die Strategie $W_s=2^{s-1}1_{\{X_1=\ldots=X_{s-1}=-1\}}$ und

$$Z_t=\sum_{s=1}^t W_s(S_s-S_{s-1})=\sum_{s=1}^t W_sX_s,$$

wobei die i.i.d. Zufallsvariablen X_s durch $\mathbb{P}(X_s=1)=\mathbb{P}(X_s=-1)=1/2$ gegeben sind. Nach Konstruktion ergibt sich

$$Z_t=\begin{cases}1-2^t, & \text{falls } X_1=\ldots=X_t=-1,\\ 1, & \text{sonst,}\end{cases}$$

so dass

$$\mathbb{E}[|Z_t|] = (2^t - 1)2^{-t} + 1(1 - 2^{-t}) \leq 2$$

und

$$E[Z_t] = (1 - 2^t)2^{-t} + 1(1 - 2^{-t}) = 0$$

gilt. Da wir die Konvergenz $Z_t \to 1$ fast sicher direkt ablesen können, müsste für L^1-Konvergenz jedoch $\mathbb{E}[Z_t] \to 1$ gelten.

Definition 2.23. Eine Teilmenge Γ von $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt *gleichgradig integrierbar*, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{X\in\Gamma} \mathbb{E}[|X|1_{\{|X|\geq n\}}] = 0$$

gilt.

Satz 2.24. *Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann sind äquivalent:*

(i) $X_n \to X$ in L^1.

(ii) $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit, und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichgradig integrierbar.

Beweis: vgl. zum Beispiel Satz 6.25 in Klenke (2013). □

Satz 2.25. **(Martingalkonvergenzsatz)** *Es sei $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$. Dann sind äquivalent:*

(i) X ist gleichgradig integrierbar.

(ii) X konvergiert fast sicher und in L^1.

(iii) Es existiert eine Zufallsvariable $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, so dass $X_t = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]$ gilt.

Ist eine der drei Bedingungen erfüllt, so kann als Grenzwert die Zufallsvariable Y aus (iii) gewählt werden.

Beweis:

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Wir verwenden Satz 2.24 und zeigen nur, dass $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ fast sicher konvergiert. Aufgrund der gleichgradigen Integrierbarkeit der Folge existiert ein $k > 0$ mit

$$\mathbb{E}[|X_t|1_{\{|X_t|>k\}}] \leq 1$$

für alle $t \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere folgt

$$\mathbb{E}[|X_t|] \leq \sup_{t\in\mathbb{N}_0} \left(\mathbb{E}[|X_t|1_{\{|X_t|\leq k\}}] + \mathbb{E}[|X_t|1_{\{|X_t|>k\}}]\right) \leq k + 1,$$

und die fast sichere Konvergenz folgt aus Satz 2.20.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Es sei X_∞ der L^1-Grenzwert von $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$. Dann gilt für jedes $s \geq r$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_r - \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_r]|] &= \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X_s - X_\infty|\mathcal{F}_r]|] \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X_s - X_\infty||\mathcal{F}_r]] = \mathbb{E}[|X_s - X_\infty|].\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung konvergiert die rechte Seite für $s \to \infty$ gegen Null. Damit ergibt sich $X_r = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_r]$ fast sicher.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Zu zeigen ist

$$\sup_{t\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}[|\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]|1_{\{|\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]|\geq n\}}] \to 0.$$

Dazu verwenden wir zunächst

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]|1_{\{|\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]|\geq n\}}] &\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|Y||\mathcal{F}_t]1_{\{|\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]|\geq n\}}] \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|Y|1_{\{|\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]|\geq n\}}|\mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[|Y|1_{\{|\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]|\geq n\}}]\end{aligned}$$

nach dem Satz von der iterierten Erwartung. Aus demselben Grund gilt

$$\mathbb{P}(\{|\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]| \geq n\}) \leq \frac{\mathbb{E}[|\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]|]}{n} \leq \frac{\mathbb{E}[|Y|]}{n}.$$

Der Beweis folgt dann aus dem nachfolgenden Lemma. □

Lemma 2.26. *Es sei $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann gilt*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup\{\mathbb{E}[|X|1_F] \mid F \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(F) \leq \varepsilon\} = 0.$$

Beweis: Angenommen, es existiert eine Folge F_n mit $\mathbb{P}(F_n) \leq 2^{-n}$ für alle n und $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X|1_{F_n}] > 0$. Dann gilt für

$$G_n = \bigcup_{k\geq n} F_k$$

offenbar $G_n \searrow \emptyset$, und mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz ergibt sich

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X|1_{F_n}] \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X|1_{G_n}] = 0,$$

also ein Widerspruch. □

Korollar 2.27. *Es seien $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$. Dann ist*

$$\{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_i] \mid i \in I\}$$

gleichgradig integrierbar.

Beweis: Die Aussage folgt analog zum Beweis von (iii) $\Longrightarrow$ (i) im Beweis von Satz 2.25. □

Bemerkung 2.28. Im Fall, dass $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein L^2-Martingal ist, d.h. wenn $\mathbb{E}[|X_t|^2] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ gilt, ist der Umweg über ein zur gleichgradigen Integrierbarkeit analoges Konzept nicht nötig. Es lässt sich nämlich zeigen, dass die Bedingungen

(i) $\sup_t \mathbb{E}[X_t^2] < \infty$;

(ii) $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert fast sicher und in L^2;

äquivalent sind.

Definition 2.29. Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ eine Folge von σ-Algebren mit $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$ für $m \leq n$. Ein Prozess $X = (X_n)_{n\leq 0}$ (in diskreter Zeit) heißt *Rückwärtsmartingal*, falls

(i) X an $(\mathcal{F}_n)_{n\le 0}$ adaptiert ist;

(ii) $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ für alle $n \le 0$ gilt;

(iii) $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m$ für alle $m \le n \le 0$ gilt.

Satz 2.30. *Jedes Rückwärtsmartingal $X = (X_n)_{n\le 0}$ konvergiert fast sicher und in L^1 gegen $X_{-\infty}$. Insbesondere gilt*

$$X_{-\infty} = \mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_{-\infty}] \quad \textit{mit} \quad \mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n\le 0} \mathcal{F}_n.$$

Beweis: Für jedes $n \le 0$ gilt

$$\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_n]|] \le \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X_0||\mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[|X_0|],$$

so dass wir insbesondere $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ erhalten. Die fast sichere Konvergenz folgt dann wie im Beweis von Satz 2.20 mittels der Upcrossing-Ungleichung und Lemma 2.18, die analog auch für $n \to -\infty$ gelten. Ebenso ergibt sich die Konvergenz in L^1 aus $X_n = \mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_n]$ und der gleichgradigen Integrierbarkeit gemäß einer analogen Erweiterung von Satz 2.25.

Zuletzt gilt für alle $F \in \mathcal{F}$ als Konsequenz aus der L^1-Konvergenz auch

$$\mathbb{E}[X_n 1_F] \to \mathbb{E}[X_{-\infty} 1_F]. \tag{2.3}$$

Wählt man speziell $F \in \mathcal{F}_{-\infty}$, ist auch $F \in \mathcal{F}_n$ für alle n nach Definition, und aus der Rückwärtsmartingaleigenschaft sowie der Definition der bedingten Erwartung folgt

$$\mathbb{E}[X_n 1_F] = \mathbb{E}[X_0 1_F].$$

Zusammen mit (2.3) ergibt sich

$$\mathbb{E}[X_{-\infty} 1_F] = \lim_{n\to-\infty} \mathbb{E}[X_n 1_F] = \mathbb{E}[X_0 1_F],$$

also nach Definition der bedingten Erwartung die Aussage. □

Wir versuchen in einem ersten Schritt, die Optional-Sampling-Theoreme auf den Fall stetiger Zeit zu verallgemeinern. Dazu befassen wir uns zunächst mit Pfadeigenschaften von Martingalen. Auf die Diskussion von Sub- oder Supermartingalen verzichten wir hier weitgehend. Diese lassen sich mit einer zeitstetigen Variante von Satz 2.10 aber grundsätzlich auch diskutieren.

Lemma 2.31. *Es sei $X = (X_t)_{t\ge 0}$ ein Martingal. Dann existiert $\Omega_0 \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, so dass für alle $\omega \in \Omega_0$*

$$\lim_{r\nearrow t, r\in\mathbb{Q}} X_r(\omega) \quad \textit{und} \quad \lim_{r\searrow t, r\in\mathbb{Q}} X_r(\omega) \quad \textit{für alle } t \ge 0$$

existieren.

Beweis: Es genügt aufgrund der Stetigkeit von unten, das Resultat für alle $t \in [0, k]$ zu zeigen, wobei $k \in \mathbb{N}$ beliebig ist. Dazu verwenden wir, dass aufgrund der Konvexität von $x \mapsto x^- = -x1_{\{x<0\}}$ der Prozess X_t^- gemäß Satz 2.3 ein Submartingal ist. Entsprechend gilt

$$\mathbb{E}[(X_t - a)^-] \leq \mathbb{E}[X_t^-] + |a| \leq \mathbb{E}[X_k^-] + |a|.$$

Wir verwenden nun die Upcrossing-Ungleichung, wobei wir eine Version für Folgen wählen, die durch eine abzählbare Menge $T \subset \mathbb{R}$ indiziert sind. Satz 2.19 liefert dann

$$(b-a)\mathbb{E}[U_T[a,b](X)] \leq \sup_{t \in T} \mathbb{E}[(X_t - a)^-].$$

Im Spezialfall $T = [0,k] \cap \mathbb{Q}$ ergibt sich

$$(b-a)\mathbb{E}[U_{[0,k]\cap\mathbb{Q}}[a,b](X)] \leq \mathbb{E}[X_k^-] + |a|,$$

und es existiert eine Menge Ω_0 mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, so dass $U_{[0,k]\cap\mathbb{Q}}[a,b](X) < \infty$ für alle $\omega \in \Omega_0$ gilt. Gemäß Lemma 2.18 existieren dort die besagten Grenzwerte. □

Lemma 2.32. *Es sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein Martingal. Dann gilt für $X_{t+} = \lim_{r \searrow t, r \in \mathbb{Q}} X_r$ die Identität*

$$\mathbb{E}[X_{t+} | \mathcal{F}_t] = X_t$$

fast sicher.

Beweis: Es sei $t \in \mathbb{R}$ fest. Dann existiert eine Folge $(t_n)_n$ von rationalen Zahlen mit $t_n \searrow t$. Nach Konstruktion ist $(X_{t_n})_n$ ein Rückwärtsmartingal, und gemäß Satz 2.30 gilt

$$X_{t+} = \lim_{n\to\infty} X_{t_n} \text{ in } L^1.$$

Also folgt für jedes $F \in \mathcal{F}_t$

$$\mathbb{E}[X_t 1_F] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{t_n} 1_F] = \mathbb{E}[X_{t+} 1_F],$$

wobei wir in der ersten Identität $\mathbb{E}[X_{t_n} | \mathcal{F}_t] = X_t$ verwendet haben. □

Bemerkung 2.33. Nach Konstruktion ist X_{t+} messbar bzgl. allen $\mathcal{F}_{t_n}$ und damit auch bzgl. $\bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$. Da wir grundsätzlich annehmen, dass die Filtration rechtsstetig ist, folgt insbesondere die Messbarkeit von X_{t+} bzgl. $\mathcal{F}_t$. Lemma 2.32 liefert dann $X_{t+} = X_t$ fast sicher.

Definition 2.34. Zwei stochastische Prozesse X und Y auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ heißen *Modifikationen*, falls für jedes $t \geq 0$

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega)$$

fast sicher gilt.

Satz 2.35. *Jedes Martingal $X = (X_t)_{t\geq 0}$ besitzt eine Modifikation, die selbst ein Martingal ist und càdlàg Pfade besitzt.*

Beweis: Es sei Ω_0 die Menge aus Lemma 2.31, auf der die links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren. Wir setzen dann

$$\widetilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} X_{t+}(\omega), & \text{falls } \omega \in \Omega_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir entscheiden uns also auf Ω_0 an den Stellen, wo sich X_{t-} und X_{t+} unterscheiden, für den rechtsseitigen Grenzwert. Damit ist $t \mapsto X_{t+}(\omega)$ nach Konstruktion also càdlàg, was sich direkt auf $t \mapsto \widetilde{X_t}(\omega)$ überträgt. Zudem gilt

$$\widetilde{X_t}(\omega) = X_{t+}(\omega) \text{ fast sicher}$$

gemäß Lemma 2.31, und aus Bemerkung 2.33 folgt

$$X_{t+}(\omega) = X_t(\omega) \text{ fast sicher.}$$

Also ist $\widetilde{X_t}$ eine Modifikation von X_t.

Wir beweisen zuletzt, dass $(\widetilde{X_t})_{t\geq 0}$ auch ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist. Dazu genügt es, diese Eigenschaft von $(X_{t+})_{t\geq 0}$ nachzuweisen. Es sei $s < t$, und wir wählen eine Folge $(s_n)_n$ rationaler Zahlen mit $t > s_n \searrow s$. Aus der Martingaleigenschaft von $(X_t)_{t\geq 0}$ und Lemma 2.32 ergibt sich

$$X_{s_n} = \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_{s_n}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{t_+}|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_{s_n}] = \mathbb{E}[X_{t_+}|\mathcal{F}_{s_n}]$$

für jedes n. Damit definiert $\ldots, X_{s_n}, \ldots, X_{s_1}, X_{t+}$ ein Rückwärtsmartingal, und aus Satz 2.30 folgt

$$X_{s+} = \lim_n X_{s_n} = \lim_n \mathbb{E}[X_{t_+}|\bigcap_n \mathcal{F}_{s_n}].$$

Die Aussage ergibt sich dann aus $\bigcap_n \mathcal{F}_{s_n} = \bigcap_{u>s} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}_s$. □

Bemerkung 2.36. Sofern nicht explizit etwas anderes angegeben ist, arbeiten wir im Folgenden mit den Modifikationen stochastischer Prozesse, die càdlàg sind.

Definition 2.37. Ein adaptierter Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt *progressiv messbar*, falls

$$(X_s)_{s\in[0,t]} : \Omega \times [0,t] \to \mathbb{R}$$

für alle $t \geq 0$ $(\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,t]})$-messbar ist.

Bemerkung 2.38. Progressive Messbarkeit ist eine Verschärfung gegenüber bloßer Adaptiertheit, da nicht nur verlangt wird, dass jedes X_s messbar bzgl. $\mathcal{F}_s$ ist. Sofern die Werte eines stochastischen Prozesses zu abzählbaren Zeitpunkten bereits den gesamten Prozess festlegen, sind die beiden Begriffe jedoch äquivalent, wie der Beweis des folgenden Resultats zeigt.

Lemma 2.39. *Jeder adaptierte (rechtsstetige) Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ ist progressiv messbar.*

Beweis: Wir setzen $(X_s^n)_{s\in[0,t]}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gemäß

$$X_s^n(\omega) = X_0(\omega)1_{\{0\}}(s) + \sum_{k=1}^{2^n} X_{\frac{kt}{2^n}}(\omega)1_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]}(s).$$

Da jedes $X_{\frac{kt}{2^n}}$ $(\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,t]})$-messbar ist, überträgt sich die Eigenschaft auf $(s,\omega) \mapsto X_s^n(\omega)$, $(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega$. Da aufgrund der Rechtsstetigkeit ferner $\lim_{n\to\infty} X_s^n(\omega) = X_s(\omega)$ gilt, ist auch die Grenzabbildung $(s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ $(\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,t]})$-messbar. □

Satz 2.40. *Es seien $(X_t)_{t\geq 0}$ ein adaptierter (rechtsstetiger) Prozess und τ eine Stoppzeit. Dann ist $X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}$ $\mathcal{F}_\tau$-messbar.*

Beweis: Gemäß Lemma 2.39 genügt es zu zeigen, dass $X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}$ für jeden progressiv messbaren Prozess $\mathcal{F}_\tau$-messbar ist. Dazu seien $B \in \mathcal{B}$ und $t \geq 0$. Die Abbildung

$$\sigma : \begin{cases} \Omega \to \Omega \times [0,t], \\ \omega \mapsto (\omega, \tau(\omega) \wedge t), \end{cases}$$

erfüllt für alle $F \in \mathcal{F}_t$ und alle $s \leq t$ die Eigenschaft

$$\sigma^{-1}(F \times [0,s]) = F \cap \{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_t,$$

ist also $\mathcal{F}_t - (\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,t]})$-messbar. Insbesondere ergibt sich

$$\{X \circ \sigma \in B\} \in \mathcal{F}_t$$

aufgrund der progressiven Messbarkeit von X. Mit

$$\{X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}} \in B\} \cap \{\tau \leq t\} = \{X_{\tau\wedge t} \in B\} \cap \{\tau \leq t\} = \{X \circ \sigma \in B\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

folgt dann die Aussage. □

Satz 2.41. (Optional-Sampling-Theorem) *Es sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges (Super-)martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, und es seien σ, τ beschränkte Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \leq X_\sigma$$

bzw. Gleichheit für Martingale.

Beweis: Es ist einfacher, die analoge Aussage mit vertauschtem Vorzeichen für Submartingale zu zeigen, die wegen

X ist ein Submartingal, genau dann wenn $-X$ ein Supermartingal ist

äquivalent zur obigen Aussage ist.

Wie im Beweis von Satz 1.30 approximieren wir die Stoppzeiten gemäß

$$\tau_n = (m+1)2^{-n}, \quad \text{falls } m2^{-n} \leq \tau < (m+1)2^{-n},\ m \in \mathbb{N}_0,$$

wobei auch jedes τ_n wieder eine Stoppzeit ist und $\tau_n \searrow \tau$ erfüllt. Analog gehen wir für σ vor. Nach Voraussetzung ist zudem $(X_{m2^{-n}})_{m\geq 0}$ ein (Sub-)martingal bzgl. $(\mathcal{F}_{m2^{-n}})_{m\geq 0}$. Aus Satz 2.15 folgt dann

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n} | \mathcal{F}_{\sigma_n}] \geq X_{\sigma_n}$$

für alle n. Insbesondere ergibt sich

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n} 1_A] \geq \mathbb{E}[X_{\sigma_n} 1_A]$$

für alle $A \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$. (In beiden Fällen gibt jeweils Gleichheit für Martingale.) Die Aussage folgt dann aus der Definition der bedingten Erwartung, sofern wir

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n} 1_A] \to \mathbb{E}[X_\tau 1_A] \text{ für alle } A \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n} \tag{2.4}$$

und als Folge daraus die analoge Aussage für σ statt τ zeigen können.

Zum Beweis von (2.4) verwenden wir zunächst die Rechtsstetigkeit von X und $\tau_n \searrow \tau$, was $X_{\tau_n} \searrow X_\tau$ fast sicher impliziert. Im Martingalfall gilt zudem aufgrund von $\tau \leq N$ wegen der Beschränktheit der Stoppzeit

$$\mathbb{E}[X_N|\mathcal{F}_{\tau_n}] = X_{\tau_n}.$$

Gemäß Korollar 2.27 ist $(X_{\tau_n})_n$ dann gleichgradig integrierbar, und (2.4) ergibt sich aus der L^1-Konvergenz von $X_{\tau_n} \searrow X_\tau$ gemäß Korollar 2.24.

Im echten Submartingalfall nehmen wir zunächst zusätzlich an, dass $X_t \geq c$ für alle $t \geq 0$ gilt. Dann ergibt sich

$$\mathbb{E}[X_N|\mathcal{F}_{\tau_n}] \geq X_{\tau_n} \geq c,$$

und gemäß Korollar 2.27 ist $(|X_{\tau_n}|)_n$ durch eine Folge von gleichgradig integrierbaren Zufallsvariablen majorisiert. Daraus folgt sofort die gleichgradige Integrierbarkeit von $(|X_{\tau_n}|)_n$, und (2.4) ergibt sich wieder aus Korollar 2.24.

Zuletzt betrachten wir allgemein die Folge $X_t^k = X_t \vee (-k)$. Aufgrund der Monotonie und Konvexität von $x \mapsto x \vee (-k)$ zeigt Bemerkung 2.4, dass auch $(X_t^k)_{t\geq 0}$ ein Submartingal ist. Wir erhalten

$$\mathbb{E}[X_\tau^k|\mathcal{F}_\sigma] \geq X_\sigma^k$$

nach der bereits gezeigten Aussage für nach unten beschränkte Submartingale. Der Satz von der monotonen Konvergenz, angewendet in der bedingten Version auf $(-X_\tau^k)_{k\in\mathbb{N}}$, liefert dann durch

$$\mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[X_\tau^k|\mathcal{F}_\sigma] \geq \lim_{k\to\infty} X_\sigma^k = X_\sigma$$

die Aussage. □

Wir beenden dieses Kapitel mit einigen nützlichen Maximalungleichungen für Martingale.

Definition 2.42. Es sei $(X_t)_{t\in T}$ ein stochastischer Prozess. Dann bezeichnen wir mit

$$X_t^* = \sup_{s\in T, s\leq t} |X_s|, \quad t \in T,$$

das *laufende absolute Supremum* bis zum Zeitpunkt t.

Bemerkung 2.43. Mittels der Markov-Ungleichung erhält man für $\lambda > 0$ und $p > 0$ die trivialen Abschätzungen

$$\mathbb{P}(X_t^* \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[X_t^*]}{\lambda} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{P}(X_t^* \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[(X_t^*)^p]}{\lambda^p}.$$

Satz 2.44. (Doobsche Ungleichungen) *Es seien $T = \mathbb{N}_0$ oder $T = [0, \infty)$ und $(X_t)_{t\in T}$ ein Martingal oder ein nicht-negatives Submartingal. Dann gilt:*

(i) $\mathbb{P}(X_t^* \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_t|]}{\lambda}$ *für alle $\lambda > 0$ und alle $t \in T$.*

(ii) $\mathbb{P}(X_t^* \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_t|^p]}{\lambda^p}$ *für alle $\lambda > 0$, alle $p > 1$ und alle $t \in T$.*

(iii) $\mathbb{E}[(X_t^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_t|^p]$ *für alle* $p > 1$ *und alle* $t \in T$.

Beweis: Nach Satz 2.3 und Bemerkung 2.4 ist $(|X_t|)_{t\in T}$ immer ein nicht-negatives Submartingal, und im Fall der Existenz des p-ten Moments gilt dies immer auch für $(|X_t|^p)_{t\in T}$.

(i) Nach Bemerkung 1.25 ist

$$\tau = \inf\{t \in T \mid |X_t| \geq \lambda\} \tag{2.5}$$

eine Stoppzeit, und es gilt $X_t^* \geq \lambda$ genau dann, wenn $\tau \leq t$ ist. In diesem Fall gilt nach Definition $|X_{\tau\wedge t}| \geq \lambda$. Es folgt

$$\mathbb{P}(X_t^* \geq \lambda) = \mathbb{P}(\tau \leq t) = \mathbb{P}(\tau \leq t, |X_{\tau\wedge t}| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[|X_{\tau\wedge t}|1_{\{\tau\leq t\}}]. \tag{2.6}$$

Nach Definition einer Stoppzeit ist $\{\tau \leq t\} \subset \mathcal{F}_t$, und wegen Lemma 1.28 (ii) gilt auch $\{\tau \leq t\} \subset \mathcal{F}_\tau$. Wir erhalten $\{\tau \leq t\} \subset \mathcal{F}_{\tau\wedge t}$. Satz 2.15 bzw. Satz 2.41 liefert dann $|X_{\tau\wedge t}| \leq \mathbb{E}[|X_t||\mathcal{F}_{\tau\wedge t}]$, also

$$\mathbb{E}[|X_{\tau\wedge t}|1_{\{\tau\leq t\}}] \leq \mathbb{E}[|X_t|1_{\{\tau\leq t\}}] \leq \mathbb{E}[|X_t|]. \tag{2.7}$$

(ii) Der Beweis lässt sich analog zu (i) führen, falls $\mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty$ gilt. Andernfalls ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt.

(iii) Für jede Zufallsvariable $Y \geq 0$ gilt

$$\int_0^\infty px^{p-1}\mathbb{P}(Y > x)dx = \int_0^\infty \int px^{p-1}1_{\{Y>x\}}d\mathbb{P}dx = \int \int_0^\infty px^{p-1}1_{\{Y>x\}}dxd\mathbb{P}$$

nach dem Satz von Fubini. Wegen

$$\int_0^\infty px^{p-1}1_{\{Y>x\}}dx = \int_0^Y px^{p-1}dx = Y^p$$

entspricht die rechte Seite dann $\mathbb{E}[Y^p]$. Es folgt mit $\tau = \tau_\lambda$ wie in (2.5)

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\mathbb{E}[(X_t^*)^p] &= \int_0^\infty \lambda^{p-1}\mathbb{P}(X_t^* > \lambda)d\lambda \leq \int_0^\infty \lambda^{p-2}\mathbb{E}[|X_t|1_{\{\tau_\lambda\leq t\}}]d\lambda \\ &= \int_0^\infty \lambda^{p-2}\mathbb{E}[|X_t|1_{\{X_t^*\geq\lambda\}}]d\lambda\end{aligned}$$

gemäß (2.6) und (2.7). Mit dem Satz von Fubini ist die rechte Seite identisch zu

$$\begin{aligned}\int\int_0^\infty \lambda^{p-2}|X_t|1_{\{X_t^*\geq\lambda\}}d\lambda d\mathbb{P} &= \int |X_t| \int_0^\infty \lambda^{p-2}1_{\{X_t^*\geq\lambda\}}d\lambda d\mathbb{P} \\ &= \frac{1}{p-1}\mathbb{E}[|X_t|(X_t^*)^{p-1}].\end{aligned}$$

Verwendet man die Hölder-Ungleichung, um

$$\mathbb{E}[|X_t|(X_t^*)^{p-1}] \leq \mathbb{E}[X_t^p]^{1/p}\mathbb{E}[(X_t^*)^p]^{(p-1)/p}$$

zu erhalten, folgt die Aussage nach Umstellen der Ungleichung. $\square$

Kapitel 3

Das Donskersche Invarianzprinzip

Dieses Kapitel befasst sich mit dem Invarianzprinzip von Donsker, wonach die Brownsche Bewegung natürlicherweise als Grenzprozess des Partialsummenprozesses aufgefasst werden kann. Dieses Resultat stellt ein prozesswertiges Analogon zum Zentralen Grenzwertsatz dar und begründet die Stellung der Brownschen Bewegung als prototypischer Prozess in stetiger Zeit.

Satz 3.1. (Walds erstes Lemma) *Es seien $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und τ eine Stoppzeit mit $\mathbb{E}[\tau] < \infty$. Dann gilt:*

$$\mathbb{E}[B_\tau] = 0.$$

Beweis: Wir zeigen die Aussage zunächst unter der zusätzlichen Bedingung, dass $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ existiert, so dass $|B_{t\wedge\tau}| \leq Z$ für alle $t \geq 0$ gilt. Dazu definieren wir via

$$\tau_m = \tau \wedge m$$

eine beschränkte Stoppzeit, für die Satz 2.41

$$\mathbb{E}[B_{\tau_m}] = \mathbb{E}[B_0] = 0$$

liefert, da B ein Martingal ist. Zudem gilt $\lim_{m\to\infty} B_{\tau_m} = B_\tau$, da τ fast sicher endlich ist. Wegen $|B_{\tau_m}| \leq Z$ folgt die Aussage dann aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz.

Um zu zeigen, dass $(B_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ geeignet dominiert wird, setzen wir

$$Z_k = \max_{0\leq t\leq 1} |B_{t+k} - B_k| \quad \text{und} \quad Z = \sum_{k=0}^{\lceil\tau\rceil - 1} Z_k,$$

wobei $x \mapsto \lceil x \rceil$ die obere Gaußklammer bezeichnet. Nach Konstruktion gilt $|B_{t\wedge\tau}| \leq Z$, und man erhält

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z_k 1_{\{\tau>k\}}].$$

Da $\{\tau > k\}$ $\mathcal{F}_k$-messbar ist, folgt nach Satz 1.12

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z_k]\mathbb{P}(\{\tau > k\}) = \mathbb{E}[Z_0]\mathbb{E}[\lceil\tau\rceil] \leq \mathbb{E}[Z_0]\mathbb{E}[\tau + 1].$$

Zuletzt gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_0] &= \int_0^\infty \mathbb{P}(\max_{0\le t\le 1} |B_t| > x)dx = 2\int_0^\infty \mathbb{P}(B_1 > x)dx \\ &\le 1 + \int_1^\infty \frac{2\sqrt{2}}{x\sqrt{\pi}} \exp(-x^2/2)dx < \infty\end{aligned}$$

nach dem Satz von Fubini (vgl. den Beweis von Satz 2.44), Satz 1.34 und Bemerkung 1.35. □

Lemma 3.2. *Es sei $(B_t)_{t\ge 0}$ eine Brownsche Bewegung. Dann ist der Prozess $(Y_t)_{t\ge 0}$ mit*

$$Y_t = B_t^2 - t$$

ein Martingal bzgl. der natürlichen Filtration.

Beweis: Der Prozess ist adaptiert, es ist $\mathbb{E}[Y_t^2] < \infty$ aufgrund von Eigenschaften der Normalverteilung, und es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_t^2 - t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] + 2\mathbb{E}[B_tB_s|\mathcal{F}_s] - B_s^2 - t \\ &= (t-s) + 2B_s^2 - B_s^2 - t = B_s^2 - s,\end{aligned}$$

wobei wir Satz 1.12 und die Martingaleigenschaft der Brownschen Bewegung verwendet haben. □

Satz 3.3. (Walds zweites Lemma) *Es seien $(B_t)_{t\ge 0}$ eine Brownsche Bewegung und τ eine Stoppzeit mit $\mathbb{E}[\tau] < \infty$. Dann gilt:*

$$\mathbb{E}[B_\tau^2] = \mathbb{E}[\tau].$$

Beweis: Wir betrachten das Martingal Y mit $Y_t = B_t^2 - t$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist

$$\tau_m = \tau \wedge m$$

wieder eine beschränkte Stoppzeit, und Satz 2.41 liefert

$$\mathbb{E}[Y_{\tau_m}] = \mathbb{E}[Y_0] = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{E}[B_{\tau_m}^2] = \mathbb{E}[\tau_m].$$

Einerseits folgt mit einer Übung aus Satz 3.1, dass wegen $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ die Ungleichung $\mathbb{E}[B_\tau^2] \ge \mathbb{E}[B_{\tau_m}^2]$ gilt. Dann ergibt sich

$$\mathbb{E}[B_\tau^2] \ge \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}[B_{\tau_m}^2] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}[\tau_m] = \mathbb{E}[\tau]$$

aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, da τ fast sicher endlich ist. Andererseits folgt

$$\mathbb{E}[B_\tau^2] = \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} B_{\tau_m}^2] \le \liminf_{m\to\infty} \mathbb{E}[B_{\tau_m}^2] = \liminf_{m\to\infty} \mathbb{E}[\tau_m] = \mathbb{E}[\tau]$$

aus dem Lemma von Fatou. □

Beispiel 3.4. Es seien B eine Brownsche Bewegung und $a < 0 < b$. Wir betrachten die Stoppzeit

$$\tau = \inf\{t \ge 0 \mid B_t \notin [a,b]\}.$$

Wir zeigen zunächst $\mathbb{E}[\tau] < \infty$, um die beiden Waldschen Lemmata anwenden zu können. Es gilt

$$\mathbb{E}[\tau] = \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau > t)dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(B_s \in (a,b) \text{ für alle } s \in [0,t])dt. \tag{3.1}$$

Es sei

$$\varrho = \sup_{x\in[a,b]} \mathbb{P}_x(B_s \in (a,b) \text{ für alle } s \in [0,1]),$$

wobei $\mathbb{P}_x(\cdot)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung bei Start der Brownschen Bewegung in x angibt. Offensichtlich ist $\varrho < 1$, und für $t \geq k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}(B_s \in (a,b) \text{ für alle } s \in [0,t]) \leq \varrho^k.$$

Damit wird der Integrand in (3.1) exponentiell klein, und das Integral existiert.
Satz 3.1 liefert dann

$$0 = \mathbb{E}[B_\tau] = a\mathbb{P}(B_\tau = a) + b\mathbb{P}(B_\tau = b).$$

Wegen $\mathbb{P}(B_\tau = a) + \mathbb{P}(B_\tau = b) = 1$ ergibt sich

$$\mathbb{P}(B_\tau = a) = \frac{b}{|a|+b} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(B_\tau = b) = \frac{|a|}{|a|+b}.$$

Außerdem gilt

$$\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[B_\tau^2] = \frac{a^2b}{|a|+b} + \frac{b^2|a|}{|a|+b} = |a|b$$

nach Satz 3.3.

Bemerkung 3.5. Die beiden Waldschen Lemmata liefert eine Aussage über die ersten beiden Momente von B_τ, nicht jedoch aber über dessen Verteilung. Wir werden im Folgenden zeigen, dass jede Verteilung möglich ist, deren erstes Moment verschwindet und deren zweites Moment endlich ist.

Definition 3.6. Ein Martingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt *binary splitting*, falls wann immer

$$A(x_0,\ldots,x_n) = \{X_0 = x_0,\ldots,X_n = x_n\}$$

eine positive Wahrscheinlichkeit besitzt, die bedingte Verteilung von X_{n+1} gegeben $A(x_0,\ldots,x_n)$ nur zwei mögliche Werte besitzt.

Lemma 3.7. *Es sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Dann existiert ein Martingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, das binary splitting ist und*

$$X_n \to X \quad \textit{fast sicher und in } L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$$

erfüllt.

Beweis: Wir definieren das Martingal und die Filtration rekursiv. Zunächst setzen wir $X_0 = \mathbb{E}[X]$ und $\mathcal{G}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$. Ferner sei

$$\xi_0 = \begin{cases} 1, & \text{falls } X \geq X_0, \\ -1, & \text{falls } X < X_0. \end{cases}$$

Rekursiv setzen wir dann

$$\mathcal{G}_n = \sigma(\xi_0, \dots, \xi_{n-1}), \quad X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n]$$

und

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } X \geq X_n, \\ -1, & \text{falls } X < X_n. \end{cases}$$

Nach Konstruktion wird $\mathcal{G}_n$ für $n \geq 1$ von einer Partition $\mathcal{P}_n$ des Wahrscheinlichkeitsraums in 2^n Mengen der Form

$$A(x_0, \dots, x_{n-1}) = \{\xi_0 = x_0, \dots, \xi_{n-1} = x_{n-1}\}$$

erzeugt, wobei $x_i \in \{1, -1\}$ gilt. Jedes Element von $\mathcal{P}_n$ ist zudem eine Vereinigung von zwei Elementen von $\mathcal{P}_{n+1}$, die jeweils $\xi_n = 1$ bzw. $\xi_n = -1$ entsprechen. Da X_{n+1} $\mathcal{G}_{n+1}$-messbar ist, bestehen also bei Kenntnis von $A(x_0, \dots, x_{n-1})$ nur zwei mögliche Werte, und das Martingal ist binary splitting.

Nun gilt wegen $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n] = X_n$ nach iterierter Erwartung auch

$$\mathbb{E}[(X - X_n)X_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X - X_n|\mathcal{G}_n]X_n] = 0.$$

Es ergibt sich

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[(X - X_n)^2] + \mathbb{E}[X_n^2] \geq \mathbb{E}[X_n^2].$$

Insbesondere ist $\sup_n \mathbb{E}[X_n^2]$ beschränkt, und gemäß Bemerkung 2.28 folgt die Konvergenz des Martingals $(X_n)_{n\geq 0}$ fast sicher und in L^2 gegen einen Grenzwert X_∞.

Wir zeigen zunächst

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(X - X_{n+1}) = |X - X_\infty| \tag{3.2}$$

fast sicher. Im Fall $X = X_\infty$ sind beide Seiten offensichtlich Null, und gilt $X(\omega) < X_\infty(\omega)$, so auch $X(\omega) < X_n(\omega)$ für alle $n \geq m$ mit $m \in \mathbb{N}$ groß genug. Nach Definition gilt dann $\xi_n = -1$ für alle $n \geq m$, woraus (3.2) folgt. Analog gehen wir für $X(\omega) > X_\infty(\omega)$ vor.

Zuletzt verwenden wir, dass für $(Y_n)_n$ mit $\mathbb{E}[|Y_n|^2] \leq \mathbb{E}[Z^2]$ für ein $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ aus $Y_n \to Y$ fast sicher per gleichgradiger Integrierbarkeit auch $\mathbb{E}[Y_n] \to \mathbb{E}[Y]$ folgt. Wir wenden diese Regel auf $(\xi_n(X - X_{n+1}))_n$ an. Wegen

$$\mathbb{E}[\xi_n(X - X_{n+1})] = \mathbb{E}[\xi_n \mathbb{E}[X - X_{n+1}|\mathcal{G}_{n+1}]] = 0$$

folgt $\mathbb{E}[|X - X_\infty|] = 0$ gemäß (3.2). □

Satz 3.8. (Skorokhod-Einbettung) *Es seien $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X] = 0$ und $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Dann existiert eine Stoppzeit τ bzgl. der von B erzeugten Filtration, so dass B_τ die Verteilung von X besitzt und $\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[X^2]$ gilt.*

Beweis: Gemäß Lemma 3.7 existiert ein Martingal $(X_n)_{n\geq 0}$, das binary splitting ist und $X_n \to X$ fast sicher und in L^2 erfüllt.

Aus Beispiel 3.4 wissen wir, dass für jedes Y mit Werten in $\{a, b\}$ und $\mathbb{E}[Y] = 0$ die gesuchte Stoppzeit durch

$$\tau(a, b) = \inf\{t \geq 0 \mid B_t \notin [a, b]\}$$

gegeben ist. Dadurch kann man die Stoppzeiten rekursiv definieren: X_1 nimmt nach Konstruktion im Beweis von Lemma 3.7 nur zwei Werte a_1 und b_1 an, von denen wegen $\mathbb{E}[X] = 0$ einer nicht-negativ und einer nicht-positiv ist. Also existiert eine Stoppzeit $\tau_1 = \tau(a_1, b_1)$ mit $X_1 = B_{\tau_1}$ in Verteilung. Aus Satz 3.3 folgt zudem $\mathbb{E}[X_1^2] = \mathbb{E}[\tau_1]$. Darauf aufbauend wird τ_2 definiert: Gegeben $X_1 = a_1$, so nimmt X_2 nur die Werte a_{21} und b_{21} an, wobei wiederum nach Konstruktion $a_{21} \leq a_1 \leq b_{21} \leq 0$ gilt. Analog gilt bedingt auf $X_1 = b_1$, dass X_2 nur Werte $0 \leq a_{22} \leq b_1 \leq b_{22}$ annehmen kann. Man setzt entsprechend

$$\tau_2 = \inf\{t \geq \tau_1 \mid X_t \notin [a_{21}, b_{21}] \cup [a_{22}, b_{22}]\},$$

und es gilt $X_2 = B_{\tau_2}$ in Verteilung sowie $\mathbb{E}[X_2^2] = \mathbb{E}[\tau_2]$. Induktiv lässt sich dann zeigen, dass eine aufsteigende Folge $(\tau_n)_n$ von Stoppzeiten existiert, so dass $X_n = B_{\tau_n}$ in Verteilung gilt und $\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[\tau_n]$ erfüllt ist.

Zusammenfassend konvergiert die monoton wachsende Folge $(\tau_n)_n$ gegen eine Zufallsvariable τ. Wegen

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_n \{\tau_n \leq t\}$$

ist τ selbst wieder eine Stoppzeit, und aus dem Satz von der monotonen Konvergenz und der L^2-Konvergenz von $X_n \to X$ folgt

$$\mathbb{E}[\tau] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\tau_n] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[X^2].$$

Zudem gilt $B_\tau = X$ in Verteilung, da die Folge $(B_{\tau_n})_n$ einerseits fast sicher gegen X und andererseits aufgrund der Stetigkeit der Pfade von B fast sicher gegen B_τ konvergiert. □

Definition 3.9. Es sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Familie von i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ und $\mathrm{Var}(X_i) = 1$. Wir bezeichnen die Folge $(S_n)_{n\geq 0}$ mit $S_0 = 0$ und

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

als *random walk*, und wir definieren via

$$t \mapsto S(t) = S_{\lfloor t\rfloor} + (t - \lfloor t\rfloor)(S_{\lfloor t\rfloor+1} - S_{\lfloor t\rfloor}), \quad t \geq 0,$$

bzw.

$$t \mapsto S_n^*(t) = \frac{S(nt)}{\sqrt{n}}, \quad t \in [0,1],$$

zwei stochastische Prozesse auf $C[0,\infty]$ bzw. $C[0,1]$.

Bemerkung 3.10. Für jedes feste $t \in [0,1]$ gilt nach dem zentralen Grenzwertsatz die Konvergenz in Verteilung

$$S_n^*(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,t) \sim B(t).$$

Mit wenig Aufwand lässt sich zudem die Konvergenz der endlich-dimensionalen Verteilungen ableiten, also

$$(S_n^*(t_1), \ldots, S_n^*(t_l))^T \xrightarrow{\mathcal{L}} (B(t_1), \ldots, B(t_l))^T$$

für jede feste Wahl $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_l \leq 1$. Das Donskersche Invarianzprinzip liefert nun einen *funktionalen* zentralen Grenzwertsatz.

Definition 3.11. Es sei (S, d) ein metrischer Raum.

(i) Eine Folge μ_n von Maßen auf S *konvergiert schwach* gegen ein Maß μ auf S, falls
$$\int f d\mu_n \to \int f d\mu$$
für alle stetigen und beschränkten Funktionen $f : S \to \mathbb{R}$ gilt. Notation: $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

(ii) Eine Folge X_n von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in S *konvergiert in Verteilung* gegen X, falls für die induzierten Verteilungen $\mathbb{P}^{X_n} \xrightarrow{w} \mathbb{P}^X$ gilt. Notation: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Satz 3.12. (Donskersches Invarianzprinzip) *Auf* $(C[0,1], ||\cdot||_\infty)$ *konvergiert die Folge* $(S_n^*(t))_{n\geq 1}$ *in Verteilung gegen eine Brownsche Bewegung* $(B_t)_{t\in[0,1]}$.

Bemerkung 3.13. Der Begriff des Invarianzprinzips rührt daher, dass (so wie beim klassischen zentralen Grenzwertsatz) die Konvergenz in Verteilung unabhängig von der Wahl der Folge $(X_n)_{n\geq 1}$ gilt.

Bevor wir Satz 3.12 beweisen, formulieren wir ein nützliches Hilfsresultat.

Lemma 3.14. *Es seien B eine Brownsche Bewegung und X eine Zufallsvariable mit* $\mathbb{E}[X] = 0$ *und* $\mathrm{Var}(X) = 1$. *Dann existiert eine aufsteigende Folge* $(\tau_n)_n$ *von Stoppzeiten bzgl. der natürlichen Filtration und mit* $\tau_0 = 0$, *so dass*

(i) die Folge $(B(\tau_n))_n$ dieselbe Verteilung wie der random walk besitzt, dessen Zuwächse der Verteilung von X entsprechen;

(ii) die Folge $(S_n^*)_n$, die sich von dem definierten random walk mit den Zuwächsen $B(\tau_n) - B(\tau_{n-1})$ konstruieren lässt,
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]} \Big| \frac{B(nt)}{\sqrt{n}} - S_n^*(t) \Big| > \varepsilon \Big) = 0$$
für alle $\varepsilon > 0$ erfüllt.

Beweis:

(i) Gemäß Satz 3.8 existiert eine Stoppzeit τ_1 mit $\mathbb{E}[\tau_1] = 1$ und $B(\tau_1) = X$ in Verteilung. Nun gilt nach Satz 1.30, dass
$$\{B_2(t) \mid t \geq 0\} = \{B(\tau_1 + t) - B(\tau_1) \mid t \geq 0\}$$
wieder eine Brownsche Bewegung ist, unabhängig von $(\tau_1, B(\tau_1))$. Entsprechend existiert eine Stoppzeit τ_2' bzgl. B_2 mit $\mathbb{E}[\tau_2'] = 1$ und $B(\tau_2') = X$. Setzt man dann $\tau_2 = \tau_1 + \tau_2'$, so entspricht $B(\tau_2)$ in Verteilung der Summe von zwei unabhängigen Kopien von X, und es gilt $\mathbb{E}[\tau_2] = 2$. Induktiv folgt die Aussage.

(ii) Es seien $W_n(t) = B(nt)/\sqrt{n}$ und
$$A_n = \Big\{ \sup_{t\in[0,1]} \Big| W_n(t) - S_n^*(t) \Big| > \varepsilon \Big\}$$

für ein festes $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Skalierungseigenschaft der Normalverteilung ist der Prozess $(W_n(t))_{t\geq 0}$ wieder eine Brownsche Bewegung. Da S_n^* stückweise linear ist, gilt außerdem

$$\begin{aligned}A_n \subset &\{\text{es existiert } t \in [0,1) \text{ mit } |S_k/\sqrt{n} - W_n(t)| > \varepsilon\}\\ &\cup \{\text{es existiert } t \in [0,1) \text{ mit } |S_{k-1}/\sqrt{n} - W_n(t)| > \varepsilon\}\\ = &\{\text{es existiert } t \in [0,1) \text{ mit } |W_n(\tau_k/n) - W_n(t)| > \varepsilon\}\\ &\cup \{\text{es existiert } t \in [0,1) \text{ mit } |W_n(\tau_{k-1}/n) - W_n(t)| > \varepsilon\},\end{aligned}$$

wobei $k = k(t)$ die natürliche Zahl mit $(k-1)/n \leq t < k/n$ bezeichnet und wir $S_k = B(\tau_k) = \sqrt{n}W_n(\tau_k/n)$ verwendet haben. Für jedes $\delta > 0$ folgt dann

$$\begin{aligned}A_n \subset &\{\text{es existieren } s,t \in [0,2] \text{ mit } |s-t| < \delta \text{ und } |W_n(s) - W_n(t)| > \varepsilon\}\\ &\cup \{\text{es existiert } t \in [0,1) \text{ mit } |\tau_k/n - t| \vee |\tau_{k-1}/n - t| \geq \delta\}.\end{aligned}$$

Sei nun $\eta > 0$ beliebig. Eine Brownsche Bewegung besitzt stetige Pfade, ist also gleichmäßig stetig auf $[0,2]$. Es folgt, dass

$$\mathbb{P}(\text{es existieren } s,t \in [0,2] \text{ mit } |s-t| < \delta \text{ und } |W_n(s) - W_n(t)| > \varepsilon)$$

unabhängig von n ist und bei geeigneter Wahl von δ kleiner als η wird. Also genügt es,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\text{es existiert } t \in [0,1) \text{ mit } |\tau_k/n - t| \vee |\tau_{k-1}/n - t| > \delta) = 0$$

für jedes feste $\delta > 0$ zu zeigen, um $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) < \eta$ zu erhalten. Die Aussage folgt dann sofort.

Dazu verwenden wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\tau_k - \tau_{k-1}) = 1$$

fast sicher nach dem starken Gesetz der großen Zahlen; vgl. den Beweis von (i). Zudem gilt für jede deterministische Folge $(a_n)_n$ die Implikation

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{k\leq n} \frac{|a_k - k|}{n} = 0.$$

Wegen $t \in [(k-1)/n, k/n]$ folgt nach einer Fallunterscheidung

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{es existiert } t \in [0,1) \text{ mit } |\tau_k/n - t| \vee |\tau_{k-1}/n - t| \geq \delta)\\ \leq\ &\mathbb{P}\Big(\sup_{k\leq n} \frac{(\tau_k - (k-1)) \vee (k - \tau_{k-1})}{n} \geq \delta\Big).\end{aligned}$$

Wählt man zuletzt $n > 2/\delta$, lässt sich der letzte Ausdruck nach oben durch

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{k\leq n} \frac{|\tau_k - k|}{n} \geq \delta/2\Big) + \mathbb{P}\Big(\sup_{k\leq n} \frac{|\tau_{k-1} - (k-1)|}{n} \geq \delta/2\Big)$$

abschätzen. Beide Ausdrücke konvergieren nach Vorbereitung gegen Null. □

Lemma 3.15. (Portmanteau-Theorem) *Es sei (S, d) ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

(ii) Für alle abgeschlossenen Mengen $K \subset S$ gilt

$$\limsup_n \mathbb{P}(X_n \in K) \leq \mathbb{P}(X \in K).$$

(iii) Für alle offenen Mengen $G \subset S$ gilt

$$\liminf_n \mathbb{P}(X_n \in G) \geq \mathbb{P}(X \in G).$$

(iv) Für alle messbaren Mengen $A \subset S$ mit $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$ gilt

$$\lim_n \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A).$$

Beweis: vgl. zum Beispiel Theorem 12.6 in Mörters and Peres (2010). □

Wir kommen nun zuletzt zum Beweis von Satz 3.12. Dazu sei $K \subset C[0, 1]$ abgeschlossen, und wir definieren

$$K(\varepsilon) = \{f \in C[0, 1] \mid ||f - g||_\infty \leq \varepsilon \text{ für ein } g \in K\}$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Es sei nun $\eta > 0$ beliebig. Verwendet man wieder, dass $W_n(t) = B(nt)/\sqrt{n}$ eine Brownsche Bewegung definiert, ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}(W_n \in K(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}(B \in K(\varepsilon)) = \mathbb{P}\Big(B \in \bigcap_{\varepsilon>0} K(\varepsilon)\Big) = \mathbb{P}(B \in K)$$

nach Stetigkeit von oben und weil K abgeschlossen ist. Insbesondere lässt sich $\varepsilon > 0$ derart wählen, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_n \in K(\varepsilon)) \leq \mathbb{P}(B \in K) + \eta$$

gilt. Andererseits gilt für diese Wahl von $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\mathbb{P}(S_n^* \in K) \leq \mathbb{P}(W_n \in K(\varepsilon)) + \mathbb{P}(||S_n^* - W_n||_\infty > \varepsilon).$$

Gemäß Lemma 3.14 (ii) lässt sich $\mathbb{P}(||S_n^* - W_n||_\infty > \varepsilon) \to 0$ für $n \to \infty$ zeigen. Es ergibt sich also

$$\limsup_n \mathbb{P}(S_n^* \in K) \leq \mathbb{P}(B \in K) + \eta$$

für alle $\eta > 0$. Das Invarianzprinzip folgt dann aus Lemma 3.15 (ii). □

Kapitel 4

Stochastische Integration

In diesem Abschnitt führen wir zum einen in die Theorie der Stieltjes-Integrale ein, die sich als Verallgemeinerung des klassischen Riemann-Integrals interpretieren lassen. Wir werden sehen, dass dieser Integralbegriff nicht taugt, wenn wir bzgl. einer Brownschen Bewegung integrieren wollen, so dass wir im zweiten Teil eine Definition des stochastischen Integrals liefern, die allgemein für rechtsstetige Martingale (und also für eine Brownsche Bewegung) funktioniert.

Definition 4.1. Es sei $A = (A_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess, dessen Pfade càdlàg sind. A heißt *von beschränkter Variation*, falls für jedes kompakte Intervall $[a,b] \subset [0,\infty)$

$$V^A_{[a,b]}(\omega) = \sup_{\pi\in\mathcal{P}} \sum_{t_i\in\pi} |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|(\omega) < \infty$$

$\mathbb{P}$-fast sicher gilt, wobei $\mathcal{P}$ alle endlichen Partitionen $\pi = \{a = t_0 < \ldots < t_k = b\}$ von $[a,b]$ mit einem beliebigem $k \in \mathbb{N}$ durchläuft.

Bemerkung 4.2. Wir bezeichnen eine Folge $(\pi_n)_n$ von Partitionen als *verschachtelt*, falls für $t \in \pi_m$ auch $t \in \pi_n$ gilt, sofern $m \leq n$ ist. Für jedes ω, so dass $t \mapsto A_t(\omega)$ rechtsstetig ist, lässt sich dann

$$V^A_{[a,b]}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in\pi_n} |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|(\omega)$$

zeigen, wenn $(\pi_n)_n$ eine beliebige Folge von verschachtelten Partitionen ist, für die

$$\delta(\pi_n) = \max\{t_{i+1} - t_i \mid i = 1,\ldots,k \subset \pi_n\} \to 0 \tag{4.1}$$

gilt.

Bemerkung 4.3.

(i) Es sei A rechtsstetig und monoton wachsend. Wir bezeichnen mit Ω_0 eine Menge mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, so dass $t \mapsto A_t(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega_0$ rechtsstetig und monoton wachsend ist. Entsprechend definiert A für jedes ω mittels

$$\mu_A(\omega,(a,b]) = A_b(\omega) - A_a(\omega)$$

und der Erweiterung auf $\mathcal{B}|_{[0,\infty)}$ ein (zufälliges) Maß $\mu_A(\omega, ds)$ auf $[0,\infty)$. Ist dann $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ beschränkt und messbar, so ist das Lebesgue-Integral

$$\int_0^t f(s)dA_s(\omega) = \begin{cases} \int_{[0,t]} f(s)\mu_A(\omega,ds), & \text{falls } \omega \in \Omega_0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wohldefiniert. Es wird als *(Lebesgue-)Stieltjes-Integral von f bzgl. A* bezeichnet.

(ii) Ist A monoton wachsend und $F : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ beschränkt und messbar (bzgl. $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}|_{[0,\infty)}$), lässt sich analog

$$Y(\omega,t) = \int_0^t F(\omega,s)dA_s(\omega) = \begin{cases} \int_{[0,t]} F(\omega,s)\mu_A(\omega,ds), & \text{falls } \omega \in \Omega_0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

definieren. $Y : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls messbar und aufgrund der Rechtsstetigkeit von A selbst rechtsstetig in t.

Definition 4.4. Es sei A von beschränkter Variation. Dann heißt der Prozess

$$t \mapsto |A|_t(\omega) = V^A_{[0,t]}(\omega) < \infty$$

der *Totalvariationsprozess von A*.

Bemerkung 4.5. Da sich jede Partition von $[0,s]$ geeignet zu einer Partition von $[0,t]$ ergänzen lässt, ist $t \mapsto |A|_t$ monoton wachsend.

Satz 4.6. *Ein Prozess A ist genau dann von beschränkter Variation, wenn er sich als Differenz zweier monoton wachsender Prozesse darstellen lässt.*

Beweis:

$\Longleftarrow$ Es sei $A = A^+ - A^-$. Dann gilt für jede Partition π von $[a,b]$

$$\begin{aligned}\sum_{t_i\in\pi} |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}| &\le \sum_{t_i\in\pi} |A^+_{t_{i+1}} - A^+_{t_i}| + \sum_{t_i\in\pi} |A^-_{t_{i+1}} - A^-_{t_i}| \\ &= A^+_b - A^+_a + A^-_b - A^-_a < \infty.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Mit

$$A^+_t = \frac{1}{2}(|A|_t + A_t) \quad \text{und} \quad A^+_t = \frac{1}{2}(|A|_t - A_t)$$

gilt $A_t = A^+_t - A^-_t$. Außerdem seien $s < t$ beliebig. Dann ist

$$(|A|_t - |A|_s) + (A_t - A_s) = \sup_{\pi\in\mathcal{P}} \sum_{u_i\in\pi} \big(|A_{u_{i+1}} - A_{u_i}| + (A_{u_{i+1}} - A_{u_i})\big),$$

wobei $\mathcal{P}$ alle Partitionen von $[s,t]$ durchläuft. Da alle Summanden nichtnegativ sind, ist A^+ monoton wachsend. Analog lässt sich die Monotonie von A^- zeigen. □

Definition 4.7. Es sei $F : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ beschränkt und messbar, und es sei A von beschränkter Variation. Dann heißt

$$Y(\omega,t) = \int_0^t F(\omega,s)dA_s(\omega) = \int_0^t F(\omega,s)dA^+_s(\omega) - \int_0^t F(\omega,s)dA^-_s(\omega)$$

das *(Lebesgue-)Stieltjes-Integral von F bzgl. A*.

Bemerkung 4.8.

(i) Das so definierte Stieltjes-Integral hätte man auch analog zu Bemerkung 4.3 einführen können, wobei in diesem Fall
$$\mu_A(\omega,(a,b]) = A_b(\omega) - A_a(\omega)$$
allgemein nur ein signiertes Maß liefert, also auch negative Werte zugelassen sind.

(ii) Ist H messbar und $t \mapsto H(\omega,t)$ fast sicher stetig, so lässt sich das Integral $\int_0^t H_s dA_s$ auch als Riemann-Stieltjes-Integral einführen. Man kann zeigen: Für jede Folge $(\pi_n)_n$ von Partitionen von $[0,t]$, für die (4.1) gilt, erhält man
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in\pi_n} H_{s_i}(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) = \int_0^t H_s dA_s$$
fast sicher, wobei $t_i \le s_i \le t_{i+1}$ beliebig ist.

Satz 4.9. (Substitutionsregel) *Es sei A von beschränkter Variation und stetig. Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist auch $(f(A_t))_{t\ge 0}$ von beschränkter Variation. Außerdem gilt*
$$f(A_t) - f(A_0) = \int_0^t f'(A_s)dA_s.$$

Beweis: Offenbar ist
$$\begin{cases} \Omega\times[0,\infty)\to\mathbb{R} \\ (\omega,s)\mapsto f'(A_s)(\omega) \end{cases}$$
messbar, und für jedes ω, so dass $s\mapsto f'(A_s)(\omega)$ stetig ist, ist diese Abbildung auch beschränkt auf $[0,t]$ für jedes $t>0$. Entsprechend existiert
$$Y_t = \int_0^t f'(A_s)dA_s$$
gemäß Definition 4.7, und Bemerkung 4.8 (ii) zeigt wegen der Beschränktheit von $f'(A_s)$, dass Y auch von beschränkter Variation ist.

Zuletzt sei $(\pi_n)_n$ eine Folge von Partitionen, die (4.1) erfüllt. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz
$$f(A_t) - f(A_0) = \sum_{u_i\in\pi_n} \big(f(A_{u_{i+1}}) - f(A_{u_i})\big) = \sum_{u_i\in\pi_n} f'(A_{s_i})\big(A_{u_{i+1}} - A_{u_i}\big)$$
für eine geeignete Zwischenstelle s_i, wieder punktweise für all jene ω, für die $s\mapsto f'(A_s)(\omega)$ stetig ist. Die Aussage folgt dann aus Bemerkung 4.8 (ii). □

Satz 4.10. *Es seien B eine Brownsche Bewegung, $[a,b]$ ein Intervall und $(\pi_n)_n$ eine Folge von verschachtelten Partitionen, die (4.1) erfüllt. Dann gilt für*
$$\pi_n B = \sum_{t_i\in\pi_n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$$
die Konvergenz
$$\lim_{n\to\infty} \pi_n B = b - a$$
fast sicher und in L^2.

Beweis: Es gilt

$$\pi_n B - (b-a) = \sum_{t_i\in\pi_n} \big((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1}-t_i)\big) = \sum_{t_i\in\pi_n} U_i,$$

wobei die U_i nach Definition der Brownschen Bewegung unabhängig und zentriert sind. Daraus folgt

$$\mathbb{E}[(\pi_n B - (b-a))^2] = \sum_{t_i\in\pi_n} \mathbb{E}[U_i^2] = \sum_{t_i\in\pi_n} \mathbb{E}[(Z_i^2-1)^2](t_{i+1}-t_i)^2,$$

wobei wir

$$Z_i = \frac{B_{t_{i+1}} - B_{t_i}}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

gesetzt haben. Insbesondere ist $\mathbb{E}[(Z_i^2-1)^2] = 2$ unabhängig von i. Ein Teleskopsummenargument ergibt dann

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\pi_n B - (b-a))^2] &= 2\sum_{t_i\in\pi_n}(t_{i+1}-t_i)^2 \\ &\le 2\max\{t_{i+1}-t_i \mid (t_i,t_{i+1})\subset\pi_n\}(b-a) \to 0\end{aligned}$$

gemäß (4.1). Damit ist die Konvergenz in L^2 gezeigt.

Fast sichere Konvergenz zeigt man, indem man zunächst zeigt (Übung), dass

$$N_n = \sum_{t_i\in\pi_{-n}} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2, \quad n = -1,-2,\dots,$$

ein Rückwärtsmartingal bzgl. $\mathcal{G}_n = \sigma(N_k \mid k \le n)$ ist. Dann konvergiert $\pi_n B = N_n$ gemäß Satz 2.30 fast sicher. Der Grenzwert entspricht dann zwangsläufig dem L^2-Grenzwert. □

Korollar 4.11. *Es sei B eine Brownsche Bewegung. Dann sind für fast alle ω die Pfade $t\mapsto B_t(\omega)$ auf jedem Intervall $[a,b]$ mit $a<b$ von unbeschränkter Variation.*

Beweis: Aufgrund der Dichtheit der rationalen Zahlen genügt es, die Aussage für jedes Intervall $[a,b]$ mit rationalen $a<b$ zu zeigen. Nach Satz 4.10 gilt für jede Folge verschachtelter Partitionen mit (4.1)

$$\begin{aligned} b-a &= \lim_{n\to\infty}\sum_{t_i\in\pi_n}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \\ &\le \lim_{n\to\infty}\sup_{t_i\in\pi_n}|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \sum_{t_i\in\pi_n}|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|\end{aligned}$$

fast sicher. Nun gilt einerseits aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit der Brownschen Bewegung auf $[a,b]$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t_i\in\pi_n}|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| = 0$$

fast sicher. Andererseits ist

$$V_{[a,b]}^B = \lim_{n\to\infty}\sum_{t_i\in\pi_n}|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|$$

gemäß Bemerkung 4.2. Daraus folgt $V_{[a,b]}^B = \infty$ fast sicher. □

Bemerkung 4.12. Das Integral für Prozesse von beschränkter Variation wurde in Bemerkung 4.3 und Definition 4.7 rein analytisch eingeführt, d.h. wir haben punktweise in ω Resultate aus der Analysis verwendet, die die Existenz von

$$t \mapsto Y(\omega, t) = \int_0^t F(\omega, s) dA_s(\omega)$$

zusichern. Obschon die Prozesse F und A also durchaus stochastisch sind, ist der eigentliche Integralbegriff ein analytischer. Dieses Vorgehen ist für Integrale bzgl. Martingalen nicht mehr möglich, die (wie am Beispiel der Brownschen Bewegung gesehen) im Allgemeinen nicht von beschränkter Variation sind.

Definition 4.13.

(i) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Mit

$$\mathcal{R} = \{F \times \{0\} \mid F \in \mathcal{F}_0\} \cup \{F \times (s,t] \mid F \in \mathcal{F}_s, s \leq t\}$$

und

$$\mathcal{P} = \sigma(\mathcal{R})$$

bezeichnen wir das *System der vorhersehbaren Rechtecke* bzw. die *σ-Algebra der vorhersehbaren Mengen* auf $\Omega \times [0, \infty)$.

(ii) Ein $\mathcal{P}$-messbarer Prozess $(H_t)_{t\geq 0}$ heißt *vorhersehbar*. Insbesondere bezeichnet

$$\mathcal{E} = \{\sum_{j=1}^n a_j 1_{R_j} \mid n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, R_1, \dots, R_n \in \mathcal{R}, R_i \cap R_j = \emptyset \text{ für } i \neq j\}$$

die *Menge der einfach vorhersehbaren Prozesse.*

Bemerkung 4.14. Vorhersehbare Prozesse sind nach Konstruktion diejenigen, für die zu jedem Zeitpunkt gilt, dass ihre Werte in der unmittelbaren Zukunft bereits jetzt feststehen. Sie eignen sich daher hervorragend zur Modellierung von Handelsstrategien.

Satz 4.15.

(i) Vorhersehbare Prozesse sind adaptiert und progressiv messbar.

(ii) Adaptierte, linksstetige Prozesse sind vorhersehbar.

Beweis:

(i) Es ist ausreichend, progressive Messbarkeit zu zeigen. Mit der üblichen maßtheoretischen Induktion genügt es zudem, die Aussage für Prozesse der Form $H = 1_P$ mit $P \in \mathcal{P}$ zu zeigen. Zudem sieht man leicht, dass

$$\mathcal{D} = \{C \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{[0,\infty)} \mid 1_C \text{ ist progressiv messbar}\}$$

ein Dynkin-System ist. Es seien nun $F \in \mathcal{F}_s$ und $G \in \mathcal{F}_u$. Wegen

$$(F \times (s,t]) \cap (G \times (u,v]) = (F \cap G) \times (s \vee u, t \wedge v]$$

und $F \cap G \in \mathcal{F}_{s\vee u}$ ist $\mathcal{R}$ durchschnittstabil. Die Aussage folgt dann mit dem üblichen Argument über Dynkin-Systeme, da 1_R für $R \in \mathcal{R}$ progressiv messbar ist. Diese Eigenschaft haben wir bereits im Beweis von Lemma 2.39 verwendet.

(ii) Offenbar genügt es, die Vorhersehbarkeit der approximierenden Prozesse

$$H_s^n = H_0 1_{\{0\}}(s) + \sum_{k=1}^{2^n} H_{\frac{(k-1)t}{2^n}} 1_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]}(s)$$

zu zeigen. Diese sind werden gemäß der maßtheoretischen Induktion durch Elemente von $\mathcal{E}$ approximiert. □

Definition 4.16. Es seien σ und τ Stoppzeiten. Dann bezeichnet

$$[\sigma, \tau] = \{(\omega, t) \mid \sigma(\omega) \leq t \leq \tau(\omega)\} \subset \Omega \times [0, \infty)$$

das abgeschlossene zufällige Intervall zwischen σ und τ. Analog definiert man (σ, τ), $(\sigma, \tau]$ und $[\sigma, \tau)$.

Satz 4.17. *Es seien σ und τ Stoppzeiten. Dann sind $[0, \tau]$ und $(\sigma, \tau]$ Elemente von $\mathcal{P}$.*

Beweis: Wegen $(\sigma, \tau] = [0, \tau] \backslash [0, \sigma]$ genügt es zu zeigen, dass $[0, \tau]$ in $\mathcal{P}$ liegt. Dazu wählen wir die übliche Approximation gemäß

$$\tau_n = (m+1)2^{-n}, \quad \text{falls } m2^{-n} \leq \tau < (m+1)2^{-n},\ m \in \mathbb{N}_0,$$

so dass jedes τ_n wieder eine Stoppzeit ist und außerdem $\tau_n \searrow \tau$ gilt. Wegen

$$[0, \tau] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, \tau_n]$$

und

$$[0, \tau_n] = (\Omega \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \left(\{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \geq \frac{m}{2^n}\} \times (\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}] \right) \right) \in \mathcal{P}$$

folgt die Aussage. □

Definition 4.18. Es sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein Prozess mit $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ für alle $t \geq 0$. Dann definieren wir $\nu_X : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\nu_X(F \times \{0\}) = 0, \quad F \in \mathcal{F}_0,$$

und

$$\nu_X(F \times (s, t]) = \int_F (X_t - X_s) d\mathbb{P}, \quad F \in \mathcal{F}_s,\ s \leq t.$$

Bemerkung 4.19.

(i) Für ein Martingal X gilt $\nu_X = 0$, da für jedes $s \leq t$ und jedes $F \in \mathcal{F}_s$

$$\int_F (X_t - X_s) d\mathbb{P} = \int_F (X_s - X_s) d\mathbb{P} = 0$$

gilt.

(ii) Analog lässt sich für Submartingale $\nu_X \geq 0$ zeigen.

Satz 4.20. *Es sei X ein L^2-Martingal. Dann gilt*

$$\nu_{X^2}(F \times (s,t]) = \int_F (X_t - X_s)^2 d\mathbb{P}, \quad F \in \mathcal{F}_s,\ s \leq t.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}\int_F (X_t - X_s)^2 d\mathbb{P} &= \int_F X_t^2 d\mathbb{P} - 2\mathbb{E}[1_F X_s X_t] + \int_F X_s^2 d\mathbb{P} \\ &= \int_F X_t^2 d\mathbb{P} - 2\mathbb{E}[1_F X_s \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]] + \int_F X_s^2 d\mathbb{P} \\ &= \int_F X_t^2 d\mathbb{P} - \int_F X_s^2 d\mathbb{P}\end{aligned}$$

nach iterierter Erwartung und aufgrund der Martingaleigenschaft. □

Definition 4.21. Es sei X ein stochastischer Prozess.

(i) Für $R \in \mathcal{R}$ setzen wir

$$\int 1_R dX = \begin{cases} 0, & R = F \times \{0\} \text{ für ein } F \in \mathcal{F}_0, \\ 1_F(X_t - X_s), & R = F \times (s,t] \text{ für ein } F \in \mathcal{F}_s. \end{cases}$$

(ii) Für $H \in \mathcal{E}$ von der Form

$$H = \sum_{j=1}^n a_j 1_{R_j}$$

setzen wir

$$\int H dX = \sum_{j=1}^n a_j \int 1_{R_j} dX.$$

Bemerkung 4.22.

(i) Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathcal{E} \to \mathbb{R} \\ H \mapsto \int H dX \end{cases}$$

ist wohldefiniert und linear. Beides folgt direkt aus der Durchschnittstabilität von $\mathcal{R}$, da sich daher zwei Prozesse H_1 und H_2 aus $\mathcal{E}$ als

$$H_1 = \sum_{j=1}^n a_j 1_{R_j} \quad \text{und} \quad H_2 = \sum_{j=1}^n b_j 1_{R_j}$$

bzgl. einer gemeinsamen Zerlegung darstellen lassen.

(ii) Unser Ziel ist im Folgenden, den Integralbegriff auf allgemeinere Prozesse H auszudehnen. Zunächst bietet es sich an, vorhersehbare Integranden zu betrachten. Gleichzeitig schränken wir die Klasse der zugehörigen Integratoren X auf L^2-Martingale ein.

(iii) Anders als bei Stieltjes-Integralen ist es in diesem Fall nicht möglich, alle $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{[0,\infty)}$-messbaren Prozesse H als Integranden zuzulassen.

Satz 4.23. *Es sei $X \geq 0$ ein (rechtsstetiges) Submartingal. Dann existiert eine eindeutige Erweiterung von ν_X zu einem Maß auf $\mathcal{P}$.*

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt aus dem Eindeutigkeitssatz für Maße, da $\mathcal{R}$ durchschnittsstabil ist und $\mathcal{P} = \sigma(\mathcal{R})$ gilt.

Um die Existenz des Maßes zu zeigen, definieren wir zunächst

$$\widetilde{\mathcal{R}} = \Big\{ \bigcup_{j=1}^{n} R_j \mid n \in \mathbb{N}, R_1, \dots, R_n \in \mathcal{R}, R_i \cap R_j = \emptyset \text{ für alle } i \neq j \Big\}$$

und

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{R}} \to [0, \infty) \\ \bigcup_{j=1}^{n} R_j \mapsto \sum_{j=1}^{n} \nu_X(R_j). \end{cases}$$

Nach Konstruktion ist $\widetilde{\mathcal{R}}$ ein Ring, und man zeigt wie in Bemerkung 4.22 (i), dass ν_X ein wohldefinierter Inhalt ist. Da natürlich auch $\mathcal{P} = \sigma(\widetilde{\mathcal{R}})$ gilt, bleibt nach dem Maßerweiterungssatz von Carathéodory nur zu zeigen, dass ν_X ein Prämaß auf $\widetilde{\mathcal{R}}$ definiert. Dazu ist äquivalent: Für jede Folge $(A_n)_n \in \widetilde{\mathcal{R}}$ mit $A_n \searrow \emptyset$ gilt $\nu_X(A_n) \to 0$. Ohne Einschränkung lässt sich annehmen, dass $A_n \subset \Omega \times (0, T)$ für ein $T > 0$ gilt, denn die Folge ist monoton fallend und Folgenglieder in $\Omega \times \{0\}$ sind nach Definition Nullmengen.

Wir zeigen zunächst, dass für jedes $\varepsilon > 0$ Mengen $B_n \subset \widetilde{\mathcal{R}}$ und $C_n \subset \Omega \times (0, T)$ existieren, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils gilt, dass $C_n(\omega) \subset (0, T)$ für alle $\omega \in \Omega$ kompakt, $B_n \subset C_n \subset A_n$ und

$$\nu_X(A_n \backslash B_n) \leq \varepsilon 2^{-n} \tag{4.2}$$

ist. Dazu sei $R = F \times (s, t] \in \mathcal{R}$ beliebig. Wir setzen

$$R'_m = F \times \big(s + \frac{1}{m}, t\big] \quad \text{und} \quad R''_m = F \times \big[s + \frac{1}{m}, t\big]$$

für $m \in \mathbb{N}$, und nehmen ohne Einschränkung an, dass $s + 1/m < t$ ist. Dann gilt

$$0 \leq \nu_X(R \backslash R'_m) = \nu_X\big(F \times \big(s, s + \frac{1}{m}\big]\big) = \int_F (X_{s+1/m} - X_s) d\mathbb{P}.$$

Aufgrund der Rechtsstetigkeit gilt $X_{s+\frac{1}{m}} \to X_s$ fast sicher, und wegen

$$0 \leq X_{s+\frac{1}{m}} \leq \mathbb{E}[X_{s+1} | \mathcal{F}_{s+\frac{1}{m}}]$$

ist $(X_{s+\frac{1}{m}} - X_s)_m$ gleichgradig integrierbar. Daraus folgt L^1-Konvergenz, und insbesondere $\nu_X(R \backslash R'_m) \to 0$. (4.2) ergibt sich dann leicht, da A_n eine endliche Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{R}$ ist. Setzt man nun

$$\widehat{B}_n = \bigcap_{k \leq n} B_k, \quad \widehat{C}_n = \bigcap_{k \leq n} C_k,$$

also $\widehat{B}_n \subset \widehat{C}_n \subset A_n$ aus Monotoniegründen, so ergibt sich

$$\nu_X\big(A_n \backslash \widehat{B}_n\big) \leq \nu_X\Big(\bigcup_{k \leq n} (A_k \backslash B_k)\Big) \leq \sum_{k \leq n} \nu_X(A_k \backslash B_k) \leq \varepsilon$$

aufgrund von (4.2). Zu zeigen bleibt

$$\nu_X(\widehat{B}_n) \to 0. \tag{4.3}$$

Dazu verwenden wir zunächst $\widehat{C}_n(\omega) \searrow \emptyset$. Da jedes $\widehat{C}_n(\omega)$ kompakt ist, existiert für alle $\omega \in \Omega$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\widehat{C}_{n_0}(\omega) = \emptyset$ gilt. Definiert man nun Stoppzeiten

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 \mid (\omega, t) \in \widehat{B}_n\}, \quad \inf \emptyset = \infty,$$

so folgt wegen $\widehat{B}_n \subset \widehat{C}_n$, dass $\tau_n \to \infty$ gilt. Insbesondere folgt $X_{\tau_n \wedge T} \to X_T$ fast sicher, und wieder ergibt sich aufgrund von

$$0 \leq X_{\tau_n \wedge T} \leq \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_{\tau_n \wedge T}]$$

die gleichgradige Integrierbarkeit der Folge und also $X_{\tau_n \wedge T} \to X_T$ in L^1.

Zuletzt ist zu beachten, dass $\widehat{B}_n \in \widetilde{\mathcal{R}}$ gilt. Im Fall $\widehat{B}_n = F_n \times (u_n, v_n]$ folgt $\tau_n \subset \{u_n, \infty\}$, und da $\widetilde{\mathcal{R}}$ aus endlichen Vereinigungen solcher Mengen besteht, nimmt jedes τ_n bzw. jedes $\tau_n \wedge T$ nur Werte aus einer endlichen Menge D_n an. Auf dieselbe Art lässt sich $\widehat{B}_n \subset (\tau_n \wedge T, T]$ zeigen. Damit ergibt sich (4.3) aus

$$\begin{aligned}
\nu_X(\widehat{B}_n) \leq \nu_X((\tau_n \wedge T, T]) &= \nu_X\Big(\sum_{s \in D_n} \{\omega : \tau_n(\omega) \wedge T = s\} \times (s, T]\Big) \\
&= \sum_{s \in D_n} \nu_X(\{\omega : \tau_n(\omega) \wedge T = s\} \times (s, T]) \\
&= \sum_{s \in D_n} \mathbb{E}[1_{\{\omega : \tau_n(\omega) \wedge T = s\}}(X_T - X_s)] = \mathbb{E}[X_T - X_{\tau_n \wedge T}] \to 0,
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass ν_X auf $\widetilde{\mathcal{R}}$ ein Inhalt ist. □

Definition 4.24. Es sei X ein (rechtsstetiges) L^2-Martingal. Das eindeutig bestimmte Maß

$$\mu_X : \mathcal{P} \to [0, \infty) \text{ mit } \mu_X = \nu_{X^2} \text{ auf } \mathcal{R}$$

heißt *Doléansmaß*.

Bemerkung 4.25. Für eine Brownsche Bewegung B gilt $\mu_B = \mathbb{P} \otimes \lambda$ wegen

$$\mu_B(F \times (s, t]) = \int_F (B_t - B_s)^2 d\mathbb{P} = \mathbb{P}(F)(t - s)$$

nach Satz 4.20 und iterierter Erwartung, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $[0, \infty)$ bezeichnet.

Lemma 4.26. *Es seien E und F Banachräume, $\mathcal{E} \subset E$ dicht und $J : \mathcal{E} \to F$ eine lineare Isometrie. Dann existiert eine eindeutige lineare Isometrie $I : E \to F$ mit $I|_{\mathcal{E}} = J$.*

Beweis: Es seien $e \in E$ und $(e_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{E}$ mit $e_n \to e$. Dann gilt

$$||J(e_n) - J(e_m)|| = ||J(e_n - e_m)|| = ||e_n - e_m||,$$

und $(J(e_n))_n$ ist eine Cauchy-Folge in F. Insbesondere konvergiert sie gegen ein Element $f \in F$. Wir setzen dann $J(e) = f$.

Die so definierte Abbildung ist eindeutig, denn für jede weitere Folge $(e'_n)_n$, die gegen e konvergiert, gilt

$$||J(e_n) - J(e'_n)|| = ||e_n - e'_n|| \to 0.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Norm ist J zudem auch eine lineare Isometrie. □

Satz 4.27. *Es sei X ein (rechtsstetiges) L^2-Martingal. Dann existiert eine eindeutige lineare Isometrie*

$$I : \mathcal{L}^2(\Omega \times [0, \infty), \mathcal{P}, \mu_X) \to \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

mit

$$I(H) = \int H dX \text{ für alle } H \in \mathcal{E}.$$

Wir setzen im Folgenden $\mathcal{L}^2(X) = \mathcal{L}^2(\Omega \times [0, \infty), \mathcal{P}, \mu_X)$ und schreiben auch $\int H dX$ statt $I(H)$ für $H \in \mathcal{L}^2(X)$.

Beweis: Um Lemma 4.26 verwenden zu können, müssen wir zeigen, dass die Menge $\mathcal{E}$ aller einfach vorhersehbaren Prozesse dicht in $\mathcal{L}^2(X)$ liegt und dass $I(H) = \int H dX$ für $H \in \mathcal{E}$ eine Isometrie definiert. Die Linearität dieser Abbildung wurde dabei bereits in Bemerkung 4.22 (i) diskutiert.

Zum Nachweis der Dichtheit verwenden wir $\mathcal{P} = \sigma(\widetilde{\mathcal{R}})$ wie im Beweis von Satz 4.23. Mit Hilfe von Satz 1.65 in Klenke (2013) kann man zeigen, dass zu jedem $A \in \mathcal{P}$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $B \in \widetilde{\mathcal{R}}$ existiert, so dass

$$\mu_X(A \Delta B) < \varepsilon.$$

Wegen

$$\mu_X(A \Delta B) = \int (1_A - 1_B)^2 d\mu_X$$

folgt $\{1_A \mid A \in \mathcal{P}\} \subset \overline{\mathcal{E}}$. Dies überträgt sich direkt auf einfache Prozesse der Form

$$H = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{P_j}, \; P_j \in \mathcal{P}.$$

Für ein nicht-negatives $H \in \mathcal{L}^2(X)$ seien $\varepsilon > 0$ und $(H_n)_n$ eine Folge einfacher Prozesse mit $H_n \nearrow H$ punktweise und $(K_n)_n$ eine Folge aus $\mathcal{E}$ mit

$$\int (H_n - K_n)^2 d\mu_X < \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert dann

$$\limsup_{n\to\infty} \int (H - K_n)^2 d\mu_X \leq \limsup_{n\to\infty} 2\Big(\int (H - H_n)^2 d\mu_X + \int (H_n - K_n)^2 d\mu_X\Big) \leq \varepsilon.$$

Die Dichtheit folgt dann mit $H = H^+ - H^-$.

Zuletzt ist zu zeigen, dass

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int H dX\Big)^2\Big] = \int H^2 d\mu_X$$

für jedes $H \in \mathcal{E}$ gilt. Dazu sei ohne Einschränkung

$$H = \sum_{j=0}^{n} a_j R_j$$

mit paarweise disjunkten Mengen $R_j \in \mathcal{R}_j$, wobei $R_0 = F_0 \times \{0\}$ und $R_j = F_j \times (s_j, t_j]$ für $F_0 \in \mathcal{F}_0$ und $F_j \in \mathcal{F}_{s_j}$ seien. Offensichtlich bedeutet $R_j \cap R_k = \emptyset$, dass

$$F_j \cap F_k = \emptyset \quad \text{oder} \quad (s_j, t_j] \cap (s_k, t_k] = \emptyset$$

gilt. Im zweiten Fall folgt dann, wobei wir ohne Einschränkung $t_j \leq s_k$ annehmen,

$$\mathbb{E}[1_{F_j \cap F_k}(X_{t_j} - X_{s_j})(X_{t_k} - X_{s_k})] = \mathbb{E}[1_{F_j \cap F_k}(X_{t_j} - X_{s_j})\mathbb{E}[X_{t_k} - X_{s_k} | F_{s_k}]] = 0,$$

da X ein Martingal ist. Dies gilt trivialerweise auch im ersten Fall. Setzt man nun $s_0 = t_0 = 0$, erhält man dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\big(\int H dX\big)^2\big] &= \mathbb{E}\big[\big(\sum_{j=0}^{n} a_j 1_{F_j}(X_{t_j} - X_{s_j})\big)^2\big] = \sum_{j=0}^{n} a_j^2 \mathbb{E}[1_{F_j}(X_{t_j} - X_{s_j})^2] \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j^2 \mu_X(F_j \times (s_j, t_j]) = \int H^2 d\mu_X
\end{aligned}$$

nach Satz 4.20. □

Bemerkung 4.28. Für Stoppzeiten σ und τ und $H \in \mathcal{L}^2(X)$ gilt gemäß Satz 4.17 auch

$$H 1_{[0,\tau]} \in \mathcal{L}^2(X) \quad \text{und} \quad H 1_{(\sigma,\tau]} \in \mathcal{L}^2(X).$$

Insbesondere gilt dies für deterministische Zeitpunkte $\sigma = s$ und $\tau = t$.

Satz 4.29. *Es seien X ein (rechtsstetiges) L^2-Martingal und $H \in \mathcal{L}^2(X)$. Dann gilt:*

(i) $\mathbb{E}\big[\int H dX \big| \mathcal{F}_t\big] = \int 1_{[0,t]} H dX$.

(ii) Der Prozess $(Y_t)_{t \geq 0}$ mit

$$Y_t = \int 1_{[0,t]} H dX$$

ist ein L^2-Martingal.

Beweis: Gemäß Beispiel 2.5 (iii) genügt es, die erste Aussage zu zeigen. Dazu sei zunächst

$$H = \sum_{j=0}^{n} a_j R_j \in \mathcal{E},$$

mit $R_0 = F_0 \times \{0\}$ und $R_j = F_j \times (s_j, t_j]$ für $F_0 \in \mathcal{F}_0$ und $F_j \in \mathcal{F}_{s_j}$. Eine Fallunterscheidung liefert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\int H dX \big| \mathcal{F}_t\big] &= \sum_{j=0}^{n} a_j \mathbb{E}[1_{F_j}(X_{t_j} - X_{s_j}) | \mathcal{F}_t] \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j 1_{F_j}(X_{t_j \wedge t} - X_{s_j \wedge t}) = \int H 1_{[0,t]} dX.
\end{aligned}$$

Für allgemeine $H \in \mathcal{L}^2(X)$ sei $(H^n)_n$ eine Folge in $\mathcal{E}$, so dass $H^n \to H$ in $\mathcal{L}^2(X)$ gilt. Insbesondere gilt auch $H^n 1_{[0,t]} \to H 1_{[0,t]}$ in $\mathcal{L}^2(X)$. Aufgrund der Isometrieeigenschaft des stochastischen Integrals folgen dann die L^2-Konvergenzen

$$\begin{aligned} Y^n &= \int H^n dX \to \int H dX, \\ Y^n_t &= \int H^n 1_{[0,t]} dX \to \int H 1_{[0,t]} dX. \end{aligned}$$

Nun gilt einerseits nach der Vorbereitung für $H \in \mathcal{E}$ die $\mathcal{L}^2$-Konvergenz

$$\mathbb{E}[Y^n|\mathcal{F}_t] = Y^n_t \to \int H 1_{[0,t]} dX.$$

Andererseits erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[\big(\mathbb{E}[Y^n|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}\big[\int H dX\big|\mathcal{F}_t\big]\big)^2\big] &\leq \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[\big(Y^n - \int H dX\big)^2\big|\mathcal{F}_t\big]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[\big(Y^n - \int H dX\big)^2\big] \to 0 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Jensen-Ungleichung. Die Aussage folgt dann aufgrund der fast sicheren Eindeutigkeit des L^2-Grenzwerts. □

Bemerkung 4.30. Gemäß Satz 2.35 ist mit X auch das Martingal Y mit

$$Y_t = \int 1_{[0,t]} H dX$$

ein rechtsstetiger Prozess. Er wird als *das stochastische Integral von H bzgl. X* bezeichnet. Wir schreiben

$$Y_t = \int_0^t H dX.$$

Satz 4.31. *Es sei X ein stetiges L^2-Martingal. Dann ist auch Y mit*

$$Y_t = \int_0^t H dX$$

stetig.

Beweis: Für $H \in \mathcal{E}$ ist die Aussage wegen

$$\int H 1_{[0,t]} dX = \sum_{j=0}^{n} a_j 1_{F_j} (X_{t_j \wedge t} - X_{s_j \wedge t})$$

klar, wobei wir die Notation aus dem Beweis von Satz 4.29 verwendet haben. Es seien also $H \in \mathcal{L}^2(X)$ und wieder

$$\begin{aligned} Y^n &= \int H^n dX \to \int H dX, \\ Y^n_t &= \int H^n 1_{[0,t]} dX \to \int H 1_{[0,t]} dX. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist auch $(Y_t^m - Y_t^n)_{t\geq 0}$ ein stetiges L^2-Martingal. Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, Satz 2.44 und Satz 2.41 folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\sup_{t\geq 0}|Y_t^m - Y_t^n| \geq 2^{-k}\big) &= \lim_{j\to\infty} \mathbb{P}\big(\sup_{0\leq t\leq j}|Y_t^m - Y_t^n| \geq 2^{-k}\big)\\ &\leq \limsup_{j\to\infty} 2^{2k}\mathbb{E}[|Y_j^m - Y_j^n|^2] \leq 2^{2k}\mathbb{E}[|Y^m - Y^n|^2].\end{aligned}$$

Wir nehmen zunächst an, dass

$$\mathbb{E}[|Y^{n+1} - Y^n|^2] \leq 2^{-3n} \tag{4.4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\big(\sup_{t\geq 0}|Y_t^{n+1} - Y_t^n| \geq 2^{-n}\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty.$$

Aus dem Lemma von Borel-Cantelli ergibt sich dann

$$\mathbb{P}\big(\sup_{t\geq 0}|Y_t^{n+1} - Y_t^n| < 2^{-n} \text{ für fast alle } n\big) = 1.$$

Also ist $(Y_t^n(\omega))_{t\geq 0}$ für fast alle ω eine Cauchy-Folge bzgl. der Supremumsnorm. Sie konvergiert gleichmäßig, so dass auch der Grenzprozess $(Y_t(\omega))_{t\geq 0}$ fast sicher stetig ist. Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts in Wahrscheinlichkeit gilt

$$Y_t = \int H 1_{[0,t]} dX.$$

Zuletzt beachten wir, dass wir ohne Einschränkung (4.4) annehmen können, da die Folge $(Y^n)_n$ konvergent in L^2 ist. Sie ist daher insbesondere eine Cauchy-Folge, so dass (4.4) mindestens entlang einer Teilfolge gilt. Dort lässt sich das obige Argument reproduzieren. □

Lemma 4.32. *Es seien X ein (rechtsstetiges) L^2-Martingal, $H \in \mathcal{L}^2(X)$, $s < t$ und Z beschränkt und $\mathcal{F}_s$-messbar. Dann gilt*

$$\int Z 1_{(s,t]} H dX = Z \int 1_{(s,t]} H dX.$$

Beweis: Für $Z = 1_F$ mit $F \in \mathcal{F}_s$ und $H \in \mathcal{E}$ gilt die Aussage nach Definition. Im allgemeinen Fall verwendet man maßtheoretische Induktion. □

Satz 4.33. *Es seien X ein (rechtsstetiges) L^2-Martingal, $H \in \mathcal{L}^2(X)$ und Y das L^2-Martingal mit*

$$Y_t = \int_0^t H dX.$$

(i) Es gilt

$$\frac{d\mu_Y}{d\mu_X} = H^2, \text{ d.h. } \mu_Y(A) = \int_A H^2 d\mu_X \text{ für alle } A \in \mathcal{P}.$$

(ii) Ist $K \in \mathcal{L}^2(Y)$, so ist auch $KH \in \mathcal{L}^2(X)$, und es gilt

$$Z_t := \int_0^t K dY = \int_0^t KH dX.$$

Beweis:

(i) Da $\mathcal{R}$ ein durchschnittstabiler Erzeuger von $\mathcal{P}$ ist, genügt es offenbar, die Aussage für $A = F \times (s,t]$ mit $F \in \mathcal{F}_s$ zu beweisen. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mu_Y(A) &= \mathbb{E}[1_F(Y_t - Y_s)^2] = \mathbb{E}\Big[1_F\Big(\int 1_{(s,t]} H dX\Big)^2\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\Big(\int 1_{F\times(s,t]} H dX\Big)^2\Big] = \int 1_{F\times(s,t]} H^2 d\mu_X\end{aligned}$$

wobei wir Satz 4.20, Lemma 4.32 und die Isometrieeigenschaft des stochastischen Integrals verwendet haben.

(ii) Es genügt zu zeigen, dass

$$\int K dY = \int KH dX$$

gilt, da die Aussage dann aus Satz 4.29 folgt. Dazu sei zunächst

$$K = 1_{F\times[s,t]} \text{ für ein } F \in \mathcal{F}_s.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int K dY &= 1_F(Y_t - Y_s) = 1_F \int 1_{(s,t]} H dX \\ &= \int 1_{F\times(s,t]} H dX = \int KH dX,\end{aligned}$$

wobei wir wieder auf Lemma 4.32 zurückgegriffen haben. Aufgrund der Linearität des Integrals folgt die Aussage dann bereits für $K \in \mathcal{E}$.

Es seien zuletzt also $K \in \mathcal{L}^2(Y)$ und $(K_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{E}$ mit $K_n \to K$ in $\mathcal{L}^2(Y)$. Aus Isometriegründen gilt insbesondere $\int K_n dY \to \int K dY$ in L^2. Zudem folgt

$$\int K^2 d\mu_Y = \int K^2 H^2 d\mu_X$$

aus (i). Daher sind, wieder aufgrund der Isometrieeigenschaft, auch $K_n H$ und KH Elemente von $\mathcal{L}^2(X)$, und aus $K_n \to K$ in $\mathcal{L}^2(Y)$ folgt $K_n H \to KH$ in $\mathcal{L}^2(X)$. Insbesondere ergibt sich

$$\int K_n H dX \to \int KH dX.$$

Da aufgrund von $K_n \in \mathcal{E}$ bereits

$$\int K_n dY = \int K_n H dX$$

gilt, folgt die Aussage. □

Kapitel 5

Lokalisation

Im folgenden Abschnitt werden wir die Klasse der Integratoren weiter ausweiten und nicht nur L^2-Martingale betrachten. Erneut erzwingt dies eine Einschränkung der Klasse der erlaubten Integranden.

Satz 5.1. *Es seien X ein (rechtsstetiges) L^2-Martingal, $H \in \mathcal{L}^2(X)$, τ eine endliche Stoppzeit und Y der Prozess mit*

$$Y_t = \int_0^t H dX.$$

Dann gilt

$$Y_\tau = \int 1_{[0,\tau]} H dX.$$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass τ beschränkt ist und approximieren

$$\tau_n = (m+1)2^{-n}, \quad \text{falls } m2^{-n} \le \tau < (m+1)2^{-n},\ m \in \mathbb{N}_0.$$

In diesem Fall gilt

$$[0, \tau_n] = (\Omega \times \{0\}) \cup \Big(\bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \big(\{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \ge \frac{m}{2^n}\} \times (\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}] \big) \Big),$$

wie wir im Beweis von Satz 4.17 gesehen haben. Wegen $Y_0 = 0$ folgt

$$\begin{aligned} Y_{\tau_n} &= \sum_{m=0}^{\infty} 1_{\{\frac{m}{2^n} \le \tau < \frac{m+1}{2^n}\}} Y_{\frac{m+1}{2^n}} = \sum_{m=0}^{\infty} 1_{\{\frac{m}{2^n} \le \tau\}} (Y_{\frac{m+1}{2^n}} - Y_{\frac{m}{2^n}}) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} 1_{\{\frac{m}{2^n} \le \tau\}} \int 1_{(\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]} H dX. \end{aligned}$$

Da τ beschränkt ist, haben wir es mit einer endlichen Summe zu tun. Lemma 4.32 liefert dann

$$Y_{\tau_n} = \int \sum_{m=0}^{\infty} 1_{\{\frac{m}{2^n} \le \tau\}} 1_{(\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]} H dX = \int 1_{[0,\tau_n]} H dX.$$

Einerseits gilt wegen $\tau_n \searrow \tau$ fast sicher auch

$$Y_{\tau_n} \to Y_\tau$$

fast sicher, da Y rechtsstetig ist. Andererseits folgt die Konvergenz

$$1_{[0,\tau_n]}H \to 1_{[0,\tau]}H$$

in $\mathcal{L}^2(X)$, und aus Isometriegründen überträgt sich die Konvergenz auf

$$\int 1_{[0,\tau_n]}HdX \to \int 1_{[0,\tau]}HdX$$

in L^2. Damit ist die Aussage für beschränkte Stoppzeiten gezeigt. Im unbeschränkten Fall lässt sich analog argumentieren, da für die beschränkte Stoppzeit $\tau \wedge m$ die Aussage bereits bewiesen ist und ansonsten für $m \to \infty$ wegen der Endlichkeit von τ sowohl

$$Y_{\tau\wedge m} \to Y_\tau$$

fast sicher als auch

$$\int 1_{[0,\tau\wedge m]}HdX \to \int 1_{[0,\tau]}HdX$$

in L^2 gilt. □

Korollar 5.2. *Es seien X ein (rechtsstetiges) L^2-Martingal und τ eine beschränkte Stoppzeit. Dann gilt*

$$\int 1_{[0,\tau]}dX = X_\tau - X_0.$$

Beweis: Wir verwenden Satz 5.1 mit $H = 1_{[0,k]}$, wenn $\tau \leq k$ gilt. □

Definition 5.3. Es sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von stochastischen Prozessen. Ein Prozess X heißt *lokal von der Klasse $\mathcal{C}$*, falls eine Folge $(\tau_n)_n$ von Stoppzeiten mit $\tau_n \nearrow \infty$ fast sicher existiert, so dass die gestoppten Prozesse

$$X^{\tau_n} = (X_{\tau_n\wedge t})_{t\geq 0}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ Elemente von $\mathcal{C}$ sind. $(\tau_n)_n$ heißt *lokalisierende Folge.*

Bemerkung 5.4. Wir betrachten üblicherweise nur Klassen $\mathcal{C}$, die *stabil unter Stoppen* sind, d.h. für die aus $X \in \mathcal{C}$ immer auch $X^\tau \in \mathcal{C}$ folgt, wenn τ eine Stoppzeit ist.

Klassische Beispiele sind

(i) $\mathcal{C} = \{X \mid X \text{ ist ein Martingal}\}$, was die Klasse der *lokalen Martingale* liefert;

(ii) $\mathcal{C} = \{X \mid X \text{ ist ein } L^2\text{-Martingal}\}$, was die Klasse der *lokalen L^2-Martingale* liefert;

(iii) $\mathcal{C} = \{X \mid X \text{ ist beschränkt}\}$, was die Klasse der *lokal beschränkten Prozesse* liefert.

Lemma 5.5. *Es sei $\mathcal{C}$ stabil unter Stoppen und X lokal von der Klasse $\mathcal{C}$ mit einer lokalisierenden Folge $(\tau_n)_n$. Ist dann $\sigma_n \nearrow \infty$ eine weitere Folge von Stoppzeiten, so ist auch $(\sigma_n \wedge \tau_n)_n$ eine lokalisierende Folge.*

Beweis: Es gilt

$$X_t^{\sigma_n \wedge \tau_n} = X_{\sigma_n \wedge \tau_n \wedge t} = (X^{\tau_n})_t^{\sigma_n}.$$

□

Im Folgenden sei X_0 stets beschränkt.

Satz 5.6. *Es sei X ein stetiges lokales Martingal. Dann ist X auch lokal beschränkt und ein lokales L^2-Martingal.*

Beweis: Es seien $|X_0| \leq k$ und $(\tau_n)_n$ eine lokalisierende Folge für X. Wir setzen zudem

$$\sigma_n = \inf\{t \geq 0 \mid |X_t| \geq n\}.$$

Da X stetig ist, gilt $\sigma_n \nearrow \infty$ und $|X_t^{\sigma_n}| \leq n + k$ für alle $t \geq 0$. Zu zeigen bleibt, dass X^{σ_n} für jedes n ein Martingal ist. Wie im Beweis der Rückrichtung von Satz 2.12 genügt es nachzuweisen, dass

$$\mathbb{E}[X_\sigma^{\sigma_n}] = \mathbb{E}[X_{\sigma_n \wedge \sigma}] = \mathbb{E}[X_0]$$

für alle beschränkten Stoppzeiten σ gilt. Wendet man zunächst majorisierte Konvergenz und dann Satz 2.41 an, so ergibt sich mit

$$\mathbb{E}[X_{\sigma_n \wedge \sigma}] = \lim_{k \to \infty} \mathbb{E}[X_{\tau_k \wedge (\sigma_n \wedge \sigma)}] = \lim_{k \to \infty} \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_0]$$

die Aussage. Wir haben dabei verwendet, dass $(X_{\tau_k \wedge t})_{t \geq 0}$ ein Martingal und $\sigma_n \wedge \sigma$ beschränkt ist. □

Korollar 5.7. *Martingale sind stabil unter Stoppen.*

Beweis: Es seien X ein Martingal und τ eine Stoppzeit. Dann folgt

$$\mathbb{E}[X_\sigma^\tau] = \mathbb{E}[X_{\tau \wedge \sigma}] = \mathbb{E}[X_0]$$

für jede beschränkte Stoppzeit σ wie im Beweis von Satz 5.6. □

Satz 5.8. *Es seien X ein rechtsstetiges L^2-Martingal, $H \in \mathcal{L}^2(X)$ und τ eine Stoppzeit. Dann ist*

$$1_{[0,\tau]} H \in \mathcal{L}^2(X^\tau)$$

und

$$\int 1_{[0,\tau]} H dX = \int 1_{[0,\tau]} H dX^\tau.$$

Beweis: Es sei zunächst $R = F \times (u, v]$ für ein $F \in \mathcal{F}_u$. Aufgrund der Isometrieeigenschaft und Satz 5.1 ergibt sich

$$\mu_X(R \cap [0,\tau]) = \mathbb{E}\Big[\Big(\int 1_{R \cap [0,\tau]} dX\Big)^2\Big] = \mathbb{E}[Y_\tau^2]$$

mit

$$Y_t = \int 1_{R \cap [0,t]} dX = 1_F (X_{t \wedge v} - X_{t \wedge u}).$$

Insbesondere gilt

$$Y_\tau = 1_F(X_{\tau \wedge v} - X_{\tau \wedge u}) = 1_F(X_{\tau \wedge v}^\tau - X_{\tau \wedge u}^\tau) = 1_F(X_v^\tau - X_u^\tau). \tag{5.1}$$

Wir erhalten

$$\mathbb{E}[Y_\tau^2] = \mathbb{E}\Big[\Big(\int 1_{R\cap[0,\tau]} dX^\tau\Big)^2\Big] = \mu_{X^\tau}(R\cap[0,\tau]).$$

Setzt man $K = 1_P$ für $P \in \mathcal{P}$, ergibt sich mit Satz 1.65 in Klenke (2013) dann auch

$$\int 1_{[0,\tau]} K d\mu_X = \mu_X(P\cap[0,\tau]) = \mu_{X^\tau}(P\cap[0,\tau]) = \int 1_{[0,\tau]} K d\mu_{X^\tau}. \tag{5.2}$$

Diese Identität lässt sich mit Hilfe der maßtheoretischen Induktion auf alle nicht-negativen $\mathcal{P}$-messbaren K erweitern. Insbesondere gilt nach Bemerkung 4.28

$$H \in \mathcal{L}^2(X) \Longrightarrow 1_{[0,\tau]}H \in \mathcal{L}^2(X) \Longrightarrow 1_{[0,\tau]}H \in \mathcal{L}^2(X^\tau),$$

indem man $K = H^2$ setzt.

Die zweite Aussage wurde für $H = 1_R$ bereits in (5.1) gezeigt. Für $H \in \mathcal{E}$ folgt

$$\int 1_{[0,\tau]} H dX = \int 1_{[0,\tau]} H dX^\tau.$$

aufgrund der Linearität, um im Allgemeinen seien $H \in \mathcal{L}^2(X)$ und $(H_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{E}$ mit $H_n \to H$ punktweise und in $\mathcal{L}^2(X)$ wie im Beweis von Satz 4.27. Insbesondere folgt $1_{[0,\tau]}H_n \to 1_{[0,\tau]}H$ in $\mathcal{L}^2(X)$. Wegen (5.2) ist $1_{[0,\tau]}H_n$ auch eine Cauchy-Folge (und konvergent) in $\mathcal{L}^2(X^\tau)$, und der Grenzwert ist aufgrund der Eindeutigkeit ebenfalls $1_{[0,\tau]}H$. Aus Isometriegründen ergibt sich wieder

$$\int 1_{[0,\tau]} H dX^\tau = \lim_{n\to\infty} \int 1_{[0,\tau]} H_n dX^\tau = \lim_{n\to\infty} \int 1_{[0,\tau]} H_n dX = \int 1_{[0,\tau]} H dX$$

in L^2. □

Definition 5.9. Es sei X ein (rechtsstetiges) lokales L^2-Martingal. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}(X)$ die Menge aller vorhersehbaren Prozesse H, so dass eine lokalisierende Folge $(\tau_n)_n$ für X existiert, die

$$1_{[0,\tau_n]}H \in \mathcal{L}^2(X^{\tau_n}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt. Punktweise in ω setzen wir dann

$$\int_0^t H dX = \int_0^t 1_{[0,\tau_n]} H dX^{\tau_n},$$

falls $t \in [0,\tau_n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 5.10.

(i) Es seien $(\tau_n)_n$ eine lokalisierende Folge von X und $m \le n$. Dann gilt für jedes $0 \le t \le \tau_m$ nach einer zweifachen Anwendung von Satz 5.8

$$\begin{aligned}\int_0^t 1_{[0,\tau_n]} H dX^{\tau_n} &= \int 1_{[0,\tau_n\wedge t]} H dX^{\tau_n} = \int 1_{[0,\tau_n\wedge t]} H dX \\ &= \int 1_{[0,\tau_m\wedge t]} H dX = \int 1_{[0,\tau_m\wedge t]} H dX^{\tau_m} = \int_0^t 1_{[0,\tau_m]} H dX^{\tau_m}.\end{aligned}$$

Also ist $\int_0^t H dX$ wohldefiniert, und mit einem analogen Argument sieht man, dass der Ausdruck nicht von der Wahl der lokalisierenden Folge abhängt.

(ii) Gemäß Satz 4.29 (ii) ist

$$t \mapsto \int_0^t 1_{[0,\tau_n]} H dX^{\tau_n}$$

für jedes n ein (rechtstetiges) $\mathcal{L}^2$-Martingal. Also ist

$$t \mapsto \int_0^t H dX$$

nach Definition ein lokales (rechtsstetiges) $\mathcal{L}^2$-Martingal.

Die meisten Eigenschaften des klassischen stochastischen Integrals aus Satz 4.27 übertragen sich nach Lokalisation auf das stochastische Integral aus Definition 5.9.

Satz 5.11. *Es seien X ein (rechtsstetiges) lokales L^2-Martingal, $H \in \mathcal{L}(X)$ und Y das lokale L^2-Martingal mit*

$$Y_t = \int_0^t H dX.$$

Ist $K \in \mathcal{L}(Y)$, so ist auch $KH \in \mathcal{L}(X)$, und es gilt

$$Z_t := \int_0^t K dY = \int_0^t KH dX.$$

Beweis: Gemäß Lemma 5.5 existiert eine gemeinsame lokalisierende Folge $(\tau_n)_n$ für X und Y, so dass $1_{[0,\tau_n]}H \in \mathcal{L}^2(X^{\tau_n})$ und $1_{[0,\tau_n]}K \in \mathcal{L}(Y^{\tau_n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Wendet man Satz 4.33 (ii) an, erhält man

$$1_{[0,\tau_n]}KH \in \mathcal{L}^2(X^{\tau_n})$$

und

$$\int_0^t K dY = \int_0^t 1_{[0,\tau_n]} K dY^{\tau_n} \int_0^t 1_{[0,\tau_n]} KH dX^{\tau_n} = \int_0^t KH dX$$

für $t \in [0, \tau_n]$. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 5.12. *Es seien X ein stetiges lokales Martingal und H ein stetiger adaptierter Prozess mit beschränktem H_0. Dann ist $H \in \mathcal{L}(X)$, und*

$$t \mapsto \int_0^t H dX$$

ist ein stetiges lokales Martingal.

Beweis: Es sei $|X_0| + |H_0| \le k$. Ohne Einschränkung sei

$$\tau_n = \inf\{t \ge 0 \mid |X_t| + |H_t| \ge n\}, \; n \in \mathbb{N},$$

eine lokalisierende Folge, bezüglich derer X ein L^2-Martingal ist und H und X jeweils durch $n + k$ beschränkt sind. Nach Korollar 5.2 ergibt sich

$$\begin{aligned}\int 1_{[0,\tau_n]} H^2 d\mu_{X^{\tau_n}} \le (n+k)^2 \int 1_{[0,\tau_n]} d\mu_{X^{\tau_n}} &= (n+k)^2 \mathbb{E}\Big[\big(\int 1_{[0,\tau_n]} dX^{\tau_n}\big)^2\Big] \\ &= (n+k)^2 \mathbb{E}[(X_{\tau_n} - X_0)^2] \le 2(n+k)^4\end{aligned}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere folgt

$$1_{[0,\tau_n]} H \in \mathcal{L}^2(X^{\tau_n}),$$

also $H \in \mathcal{L}(X)$.

Dass zuletzt

$$t \mapsto \int_0^t H dX$$

ein stetiges lokales Martingal ist, ergibt sich aus Satz 4.29 und Satz 4.31, da jedes

$$t \mapsto \int_0^t 1_{[0,\tau_n]} H dX^{\tau_n}$$

ein stetiges Martingal ist. $\square$

Kapitel 6

Die Itō-Formel

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Itō-Formel, die eine Verallgemeinerung der Substitutionsregel für Martingale darstellt. Zu diesem Zweck führen wir insbesondere auch den zentralen Begriff der quadratischen Variation ein. In den meisten Fällen werden wir uns dabei auf den Fall stetiger lokaler Martingale einschränken und Verallgemeinerungen nur andeuten.

Bemerkung 6.1. Wir haben in Satz 4.9 gesehen, dass für stetig differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einen stetigen Prozess $(A_t)_{t\geq 0}$ von beschränkter Variation die Identität

$$f(A_t) - f(A_0) = \int_0^t f'(A_s) dA_s.$$

gilt. Eine Formel dieses Art kann für stetige (lokale) Martingale X im Allgemeinen nicht gelten, da

$$t \mapsto f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s$$

gemäß Satz 5.12 ein stetiges (lokales) Martingal ist, während dies für $(f(X_t))_{t\geq 0}$ in der Regel nicht der Fall ist.

Definition 6.2. Es sei X ein stetiges lokales Martingal. Wir bezeichnen den Prozess $([X]_t)_{t\geq 0}$ mit

$$[X]_t = X_t^2 - X_0^2 - 2\int_0^t X dX$$

als die *quadratische Variation von* X.

Bemerkung 6.3.

(i) Gemäß Satz 5.12 ist $([X]_t)_t$ wohldefiniert, adaptiert und stetig.

(ii) Für stetige Prozesse A von beschränkter Variation ist

$$[A]_t = A_t^2 - A_0^2 - 2\int_0^t A dA = 0$$

gemäß Satz 4.9.

Satz 6.4. *Es seien X ein stetiges lokales Martingal, $t \geq 0$ und $\pi_n = \{0 = t_0 < \ldots < t_k = t\}$ für jedes n eine Partition von $[0, t]$ mit*

$$\delta(\pi_n) = \max\{t_i - t_{i-1} \mid i = 1, \ldots, k\} \to 0.$$

Dann konvergiert

$$S_t^n = \sum_{i=1}^{k_n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$$

in Wahrscheinlichkeit gegen $[X]_t$*.*

Beweis: Es sei zunächst X beschränkt. In diesem Fall setzen wir

$$H^n = \sum_{i=1}^{k} X_{t_{i-1}} 1_{(t_{i-1},t_i]}$$

und erhalten

$$S_t^n = \sum_{i=1}^{k} \left(X_{t_i}^2 - X_{t_{i-1}}^2 - 2X_{t_{i-1}}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \right) = X_t^2 - X_0^2 - 2 \int H_n dX.$$

Da X stetig ist, konvergiert H^n fast sicher punktweise gegen $X1_{[0,t]}$. Insbesondere folgt aufgrund der Beschränktheit von X auch die Konvergenz in $\mathcal{L}^2(X)$. Aus Isometriegründen ergibt sich dann

$$\int H_n dX \to \int_0^t X dX$$

in L^2, also auch Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.

Im allgemeinen Fall sei $(\tau_m)_m$ eine lokalisierende Folge, so dass X^{τ_m} beschränkt ist. Wir haben bereits gezeigt, dass die L^2-Konvergenz

$$S_{t\wedge\tau_m}^n = \sum_{i=1}^{k} (X_{t_i}^{\tau_m} - X_{t_{i-1}}^{\tau_m})^2 \to [X^{\tau_m}]_t$$

gilt. Wegen

$$\begin{aligned} \int_0^t X^{\tau_m} dX^{\tau_m} &= \int 1_{[0,t]} X^{\tau_m} dX^{\tau_m} = \int 1_{[0,t\wedge\tau_m]} X dX^{\tau_m} \\ &= \int 1_{[0,t\wedge\tau_m]} X dX = \int_0^{t\wedge\tau_m} X dX \end{aligned}$$

nach einer Anwendung von Satz 5.8 und Satz 5.1 folgt

$$[X^{\tau_m}]_t = X_{t\wedge\tau_m}^2 - X_0^2 - 2 \int_0^{t\wedge\tau_m} X dX = [X]_{t\wedge\tau_m}.$$

Zuletzt seien $\eta, \varepsilon > 0$ beliebig und m so groß, dass $\mathbb{P}(\tau_m < t) < \varepsilon$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_t^n - [X]_t| \geq \eta) &\leq \mathbb{P}(|S_t^n - [X]_t| \geq \eta, \tau_m \geq t) + \mathbb{P}(\tau_m < t) \\ &\leq \mathbb{P}(|S_{t\wedge\tau_m}^n - [X]_{t\wedge\tau_m}| \geq \eta) + \varepsilon, \end{aligned}$$

und der erste Ausdruck wird nach Vorbereitung beliebig klein. □

Bemerkung 6.5. Die quadratische Variation lässt sich auch in dem Fall definieren, wo das lokale Martingal X bloß càdlàg ist. In diesem Fall setzt man

$$[X]_t = X_t^2 - X_0^2 - 2 \int_0^t X_- dX,$$

wobei X_- die linksstetige Version von X ist. Mit demselben Beweis lässt sich Satz 6.4 auch in dieser Situation zeigen.

Korollar 6.6. *Es sei X ein lokales Martingal. Dann ist der Prozess $([X]_t)_{t\geq 0}$ monoton wachsend.*

Satz 6.7. *Es sei B eine Brownsche Bewegung. Dann gilt $[B]_t = t$ fast sicher und*

$$\int_0^t BdB = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

Beweis: Wir verwenden Satz 4.10, um $[B]_t = t$ fast sicher zu erhalten. Die zweite Aussage folgt dann nach Definition der quadratischen Variation. □

Satz 6.8. *Es sei X ein stetiges lokales Martingal von beschränkter Variation mit $X_0 = 0$. Dann gilt $X = 0$ fast sicher.*

Beweis: Da X stetig ist und seine Werte also durch alle rationalen Zeitpunkte festgelegt werden, genügt es,

$$\mathbb{P}(X_t = 0) = 1$$

für jedes feste $t \geq 0$ zu beweisen. Dazu sei $(\tau_k)_k$ eine lokalisierende Folge. Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert ein k mit $\mathbb{P}(t > \tau_k) < \varepsilon$. Dann folgt

$$\mathbb{P}(X_t \neq 0) \leq \mathbb{P}(X_t \neq 0, t \leq \tau_k) + \mathbb{P}(t > \tau_k) \leq \mathbb{P}(X_{t\wedge\tau_k} \neq 0) + \varepsilon.$$

Verwendet man nun $X_0 = 0$ und

$$\mathbb{E}[(X_t^{\tau_k})^2] = 2\mathbb{E}\big[\int_0^t X^{\tau_k} dX^{\tau_k}\big] + \mathbb{E}[[X]_{t\wedge\tau_k}]$$

für alle $t \geq 0$, so erhält man $\mathbb{E}[(X_t^{\tau_k})^2] = 0$, da der erste Summand der Erwartungswert eines Martingals mit Start in 0 ist und wir für den zweitem Summanden Bemerkung 6.3 (ii) verwenden können. Es folgt $\mathbb{P}(X_{t\wedge\tau_k} \neq 0) = 0$. □

Korollar 6.9. *Es seien M und N stetige lokale Martingale mit $M_0 = N_0$ und A und V Prozesse von beschränkter Variation. Gilt dann*

$$M + A = N + V,$$

so folgt $M = N$ und $A = V$.

Beweis: Wende Satz 6.8 auf

$$M - N = V - A$$

an. □

Definition 6.10.

(i) Es seien A von beschränkter Variation und H ein stochastischer Prozess. Dann heißt $H \in \mathcal{L}(A)$, falls fast sicher

$$\int_0^t |H|_s d|A|_s < \infty$$

für alle $t \geq 0$ gilt, wobei $(|A|_t)_{t\geq 0}$ den Totalvariationsprozess bezeichnet. In diesem Fall ist $t \mapsto \int_0^t HdA$ wohldefiniert und ebenfalls von beschränkter Variation. Ist A stetig, so auch das Integral.

(ii) Es seien M ein stetiges lokales Martingal und A ein stetiger Prozess von beschränkter Variation. Dann heißt $X = M + A$ ein *stetiges Semimartingal*.

(iii) Es seien X ein stetiges Semimartingal und $H \in \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(M) \cap \mathcal{L}(A)$. Dann setzen wir

$$\int HdX = \int HdM + \int HdA.$$

(iv) Wir bezeichnen mit $[X] = [M]$ die *quadratische Variation von* X.

Beispiel 6.11. Es sei M ein stetiges lokales Martingal. Wegen

$$M_t^2 = M_0^2 + 2\int_0^t MdM + [M]_t$$

ist $(M_t^2)_{t\geq 0}$ ein stetiges Semimartingal, und es gilt

$$\int_0^t HdM^2 = 2\int_0^t HMdM + \int_0^t Hd[M]_t$$

nach Satz 5.11, falls $H \in \mathcal{L}(Z) \cap \mathcal{L}([M])$ mit $Z = \int MdM$.

Satz 6.12. *Es sei M ein stetiges L^2-Martingal. Dann gilt:*

(i) $\mathbb{E}[[M]_t] < \infty$ *für alle* $t \geq 0$.

(ii) $Y_t = \int_0^t MdM$ *ist ein Martingal.*

(iii) Das Doléansmaß erfüllt

$$\mu_M(A) = \mathbb{E}[\int 1_A d[M]]$$

für alle $A \in \mathcal{P}$.

Beweis:

(i) Es gilt:

$$\mathbb{E}[S_t^n] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}\Big[\big(M_{t_i}^2 - M_{t_{i-1}}^2 - 2M_{t_{i-1}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})\big)\Big] = \mathbb{E}[M_t^2] - \mathbb{E}[M_0^2] < \infty.$$

Wegen $S_t^n \to [M]_t$ in Wahrscheinlichkeit folgt $S_t^{n_k} \to [M]_t$ fast sicher entlang einer Teilfolge. Aus dem Lemma von Fatou ergibt sich

$$\mathbb{E}[[M]_t] \leq \liminf_{k\to\infty} \mathbb{E}[S_t^{n_k}] < \infty.$$

(ii) Zu zeigen ist $\mathbb{E}[Y_\tau] = \mathbb{E}[Y_0]$ für alle beschränkten Stoppzeiten τ, und man verwendet, dass $(Y_t)_{t\geq 0}$ gemäß Satz 5.6 ein lokal beschränktes lokales L^2-Martingal ist. Es sei dann $(\tau_n)_n$ eine lokalisierende Folge. Wegen

$$2Y_{t\wedge\tau_n} = M_{t\wedge\tau_n}^2 - M_0^2 - [M]_{t\wedge\tau_n}$$

ist $(Y_{t\wedge\tau_n})_n$ gleichgradig integrierbar, und aus $Y_{t\wedge\tau_n} \to Y_t$ fast sicher folgt

$$\mathbb{E}[Y_0] = \mathbb{E}[Y_{\tau\wedge\tau_n}] \to \mathbb{E}[Y_\tau]$$

mit Hilfe von Satz 2.41.

(iii) Wegen (i) ist $A \mapsto \mathbb{E}\big[\int 1_A d[M]\big]$ insbesondere ein σ-endliches Maß, und nach dem Eindeutigkeitssatz für Maße genügt es, die Aussage für $A \in \mathcal{R}$ zu zeigen. Ohne Einschränkung sei $A = F \times (s,t]$ mit $F \in \mathcal{F}_s$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\mu_M(A) &= \mathbb{E}[1_F(M_t^2 - M_s^2)] = \mathbb{E}\Big[1_F\big(2\int_s^t MdM + ([M]_t - [M_s])\big)\Big] \\ &= \mathbb{E}[1_F([M]_t - [M_s])] = \mathbb{E}\big[\int 1_{F\times(s,t]} d[M]\big].\end{aligned}$$

mit (ii). $\square$

Satz 6.13. *Es seien M ein stetiges lokales Martingal, $H \in \mathcal{L}(M)$ und*

$$Y_t = \int_0^t HdM.$$

Dann gilt

$$[Y]_t = \int_0^t H^2 d[M].$$

Beweis: Nach Satz 5.12 ist Y ein stetiges lokales Martingal. Es sei $(\tau_n)_n$ also eine lokalisierende Folge. Kann man die Aussage für Y^{τ_n} zeigen, so folgt dann

$$[Y]_t = \lim_{n\to\infty} [Y]_{t\wedge\tau_n} = \lim_{n\to\infty} [Y^{\tau_n}]_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^t H^2 1_{[0,\tau_n]} d[M]$$

fast sicher. Dabei geht man wie im Beweis von Satz 6.4 vor. Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert dann

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t H^2 1_{[0,\tau_n]} d[M] = \int_0^t H^2 d[M]$$

fast sicher.

Es sei also Y mit $Y_t = \int_0^t HdM$ ein stetiges Martingal. Es folgt

$$\mathbb{E}\big[\int 1_A H^2 d[M]\big] = \int_A H^2 d\mu_M = \mu_Y(A) = \mathbb{E}\big[\int 1_A d[Y]\big],$$

für alle $A \in \mathcal{P}$, wobei wir Satz 6.12 (iii) und den Satz von Fubini, Satz 4.33 und wieder Satz 6.12 (iii) verwendet haben. Dann folgt insbesondere

$$\mathbb{E}\big[\int_0^\tau H^2 d[M]\big] = \mathbb{E}\big[\int_0^\tau d[Y]\big]$$

für jede beschränkte Stoppzeit τ, und wir erhalten $\mathbb{E}[Z_\tau] = 0$ für

$$Z_t = \int_0^t H^2 d[M] - [Y]_t.$$

Damit ist $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal, das nach Bemerkung 6.3 (i) stetige Pfade besitzt, von beschränkter Variation ist und $Z_0 = 0$ erfüllt. Gemäß Satz 6.8 folgt $Z_t = 0$. $\square$

Satz 6.14. *Es sei M ein stetiges lokales Martingal. Dann gilt*

$$\mathcal{L}(M) = \big\{H \text{ vorhersehbar} \;\big|\; \int_0^t H^2 d[M] < \infty \text{ fast sicher für alle } t \geq 0\big\}.$$

Beweis: Es sei $H \in \mathcal{L}(M)$ und $Y_t = \int_0^t HdM$. Wegen

$$[Y]_t = \int_0^t H^2 d[M]$$

nach Satz 6.13 ist die rechte Seite fast sicher endlich.

Umgekehrt sei $\int_0^t H^2 d[M]$ fast sicher endlich. Aufgrund der Stetigkeit von M_t und $[M]_t$ definiert

$$\tau_n = \inf\Big\{t \geq 0 \mid |M_t| + \Big|\int_0^t H^2 d[M]\Big| \geq n\Big\}$$

eine lokalisierende Folge, so dass M^{τ_n} ein Martingal ist und wieder mit Satz 6.12 (iii) $H1_{[0,\tau_n]} \in \mathcal{L}^2(M^{\tau_n})$ gilt. □

Wir haben in Beispiel 6.11 gesehen, dass für ein lokales Martingal M nicht unbedingt folgt, dass auch M^2 ein lokales Martingal ist. Jedoch bleibt die Semimartingaleigenschaft erhalten.

Satz 6.15. (Itō-Formel) *Es seien X ein stetiges Semimartingal und $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dann ist auch $f(X)$ ein stetiges Semimartingal, und es gilt*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X)dX + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X)d[X].$$

Beweis: Da $f(X)$ ein stetiger Prozess ist, genügt es, die Aussage punktweise in t zu beweisen. Zudem lässt sich nach Lokalisierung via

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 \mid |X_t| \geq n\}$$

annehmen, dass X beschränkt ist. Dann ergibt sich für jede Partition $\pi_n = \{0 = t_0 < \ldots < t_k = t\}$ von $[0, t]$ aufgrund der Taylor-Formel die Identität

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{k} (f(X_{t_i}) - f(X_{t_{i-1}}))$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \big(f'(X_{t_{i-1}})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} f''(X_{t_{i-1}})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 + R(X_{t_{i-1}}, X_{t_i})\big),$$

wobei das Restglied

$$|R(x, y)| \leq v(|y - x|)(y - x)^2$$

für eine monoton wachsende Funktion $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $v(u) \to 0$ für $u \to 0$ erfüllt. Wählen wir die Folge der Partitionen derart, dass

$$\delta(\pi_n) = \max\{t_i - t_{i-1} \mid i = 1, \ldots, k\} \to 0$$

gilt, so folgt

$$\sum_{i=1}^{k} f'(X_{t_{i-1}})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \to \int_0^t f'(X)dX$$

in Wahrscheinlichkeit gemäß Satz 4.9 für den Anteil von beschränkter Variation und nach Definition des stochastischen Integrals bzgl. Martingalen andererseits. Analog ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{k} f''(X_{t_{i-1}})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \to \int_0^t f''(X)d[X]$$

in Wahrscheinlichkeit. Zuletzt gilt

$$\sum_{i=1}^{k} R(X_{t_{i-1}}, X_{t_i}) \leq \max\{v(|X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|) \mid i = 1, \ldots, k\} \sum_{i=1}^{k} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$$

Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von X konvergiert der erste Faktor fast sicher gegen 0, während der zweite Faktor nach Satz 6.4 in Wahrscheinlichkeit gegen $[X]_t$ konvergiert. Die Aussage folgt aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts in Wahrscheinlichkeit. □

Definition 6.16. Es seien X und Y stetige Semimartingale. Dann heißt

$$[X, Y] = \frac{1}{4}\big([X + Y] - [X - Y]\big)$$

die *quadratische Kovariation von X und Y.*

Korollar 6.17.

(i) Für zwei Semimartingale X und Y ist $[X, Y]$ von beschränkter Variation.

(ii) Für ein stetiges Semimartingal X gilt

$$[X, X] = [X].$$

(iii) Ist X ein stetiges Semimartingal und Y von beschränkter Variation, so gilt

$$[X, Y] = 0.$$

(iv) Für zwei stetige Semimartingale X und Y gilt die Regel der partiellen Integration

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X dY + \int_0^t Y dX + [X, Y]_t.$$

Beweis:

(i) $[X, Y]$ ist die Differenz zweier monoton wachsender Prozesse.

(ii) Es gilt

$$[X, X] = \frac{1}{4}[2X] = \frac{1}{4}4[X] = [X].$$

(iii) Es ist

$$[X, Y] = \frac{1}{4}\big([X + Y] - [X - Y]\big) = \frac{1}{4}\big([X] - [X]\big) = 0.$$

(iv) Diese Identität nachzuweisen ist eine Übungsaufgabe. □

Bezeichnung 6.18. Alternative Notationen für

$$X_t = X_0 + \int_0^t H dM$$

sind durch

(i) $dX_t = H_t dM_t$,

(ii) $X = H \bullet M$

gegeben. Mit diesen Bezeichnungen verkürzen sich die Itō-Formel und die Regel der partiellen Integration zu

$$\begin{aligned} d(XY)_t &= X_t dY_t + Y_t dX_t + d[X,Y]_t \quad \text{und} \\ df(X)_t &= f'(X_t)dt + \frac{1}{2} f''(X_t) d[X]_t \end{aligned}$$

in (i) bzw. zu

$$\begin{aligned} XY &= X \bullet Y + Y \bullet X + [X,Y] \quad \text{und} \\ f(X) &= f'(X) \bullet X + \frac{1}{2} f''(X) \bullet [X] \end{aligned}$$

in (ii).

Bemerkung 6.19.

(i) Es lässt sich auch eine mehrdimensionalen Version der Itō-Formel formulieren: Für stetige Semimartingale $X^1, \ldots, X^k$ und $f \in C_2(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ gilt

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{k} \int_0^t D_i f(X) dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} \int_0^t D_{ij} f(X) d[X^i, X^j]$$

mit $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^k)^*$ und den partiellen Ableitungen D_i bzw. D_{ij}, wobei x^* für den transponierten Vektor x steht.

(ii) Eine Itō-Formel für Semimartingale mit Sprüngen findet sich zum Beispiel in Protter (2004).

Satz 6.20. *Es seien M und N stetige lokale Martingale. Dann ist*

$$MN - [M,N]$$

ebenfalls ein stetiges lokales Martingal.

Beweis: Es gilt

$$MN - [M,N] = \frac{1}{4}\big(((M+N)^2 - [M+N]) - ((M-N)^2 - [M-N])\big),$$

und zum Beispiel

$$(M_t + N_t)^2 - [M+N]_t = (M_0 + N_0)^2 + 2 \int_0^t (M+N) d(M+N)$$

ist gemäß Satz 5.12 ein stetiges lokales Martingal. □

Bemerkung 6.21. Es seien X und Y zwei stetige Semimartingale und $H \in \mathcal{L}(X)$ und $K \in \mathcal{L}(Y)$. Dann lässt sich ähnlich wie in Satz 6.13 zeigen, dass

$$\Big[\int H dX, \int K dY \Big]_t = \int_0^t KH d[X,Y]$$

gilt.

Definition 6.22. Es seien B eine Brownsche Bewegung und $I_t = t$ der Identitätsprozess. Dann heißt X ein *Itō-Prozess*, falls

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

mit $\mu \in \mathcal{L}(I)$ und $\sigma \in \mathcal{L}(B)$ gilt.

Korollar 6.23. *Es seien X und Y Itō-Prozesse bzgl. μ, σ bzw. μ', σ' und mit derselben Brownschen Bewegung B.*

(i) Für $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned} f(X_t, t) = f(X_0, 0) + \int_0^t D_1 f(X_s, s)\sigma_s dB_s + \\ + \int_0^t \big(D_1 f(X_s, s)\mu_s + D_2 f(X_s, s) + \frac{1}{2} D_{11} f(X_s, s)\sigma_s^2\big) ds. \end{aligned}$$

(ii) Es ist

$$[X, Y]_t = \int_0^t \sigma_s \sigma'_s ds.$$

Beweis: Für (i) verwendet man die Itō-Formel sowie Satz 4.10 und Satz 6.13, um die quadratische Variation des Martingalanteils zu berechnen. Bemerkung 6.21 liefert dann (ii). □

Satz 6.24. *Es seien X ein lokales Martingal und $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $X_t \geq Z$ für alle $t \geq 0$. Existiert ein $T > 0$, so dass $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$ gilt, so ist der gestoppte Prozess X^T ein Martingal.*

Beweis: Zu zeigen, dass X ein Supermartingal ist, also für $s < t$ die Identität $X_s \geq \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]$ erfüllt, ist eine Übungsaufgabe. Ist nun $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$ und τ eine beschränkte Stoppzeit, so gilt

$$\mathbb{E}[X_0] \geq \mathbb{E}[X_{T \wedge \tau}] \geq \mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$$

jeweils nach Satz 2.41. Also folgt mit $\mathbb{E}[X_\tau^T] = \mathbb{E}[X_0]$, dass X^T ein Martingal ist. □

Korollar 6.25. *Jedes lokal (nach unten) beschränkte lokale Martingal ist ein Supermartingal.*

Definition 6.26. Es sei X ein stetiges Semimartingal. Dann heißt der Prozess

$$\mathcal{E}(X)_t = \exp\big(X_t - X_0 - \frac{1}{2}[X]_t\big)$$

das *stochastische Exponential von X*.

Satz 6.27.

(i) $\mathcal{E}(X)$ ist ein stetiges Semimartingal, das

$$\mathcal{E}(X)_t = 1 + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s dX_s$$

löst.

(ii) Ist X ein lokales Martingal, so auch $\mathcal{E}(X)$.

(iii) Ist X ein stetiges lokales Martingal und gilt für $T < \infty$ die Novikov-Bedingung

$$\mathbb{E}\big[\exp\big(\frac{1}{2}[X]_T\big)\big] < \infty,$$

so ist $\mathcal{E}(X)^T$ ein Martingal.

Beweis:
(i) Es sei $Y_t = X_t - X_0 - \frac{1}{2}[X]_t$, so dass $\mathcal{E}(X) = \exp(Y)$ ist. Aufgrund der Monotonie der quadratischen Variation gilt zudem $[Y] = [X]$. Wendet man nun die Itō-Formel (Satz 6.15) an, erhält man

$$\begin{aligned}\exp(Y_t) &= \exp(Y_0) + \int_0^t \exp(Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t \exp(Y_s)d[Y]_s \\ &= \exp(0) + \int_0^t \exp(Y_s)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t \exp(Y_s)d[X]_s + \frac{1}{2}\int_0^t \exp(Y_s)d[Y]_s \\ &= 1 + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s dX_s\end{aligned}$$

(ii) Dies ist eine direkte Konsequenz aus (i).

(iii) Gemäß Theorem 40 von Kapitel III in Protter (2004) genügt es zu zeigen, dass

$$\mathbb{E}\big[\exp\big(\frac{1}{2}(X_t - X_0)\big)\big] \leq \mathbb{E}\big[\exp\big(\frac{1}{2}[X]_t\big)\big]^{\frac{1}{2}}$$

für jedes $t \leq T$ gilt, damit $\mathbb{E}[\mathcal{E}(X)_T] = \mathbb{E}[\mathcal{E}(X)_0]$ folgt und Satz 6.24 angewendet werden kann. Dazu verwendet man

$$\begin{aligned}(\mathcal{E}(X)_t)^{\frac{1}{2}} &= \exp(X_t - X_0 - \frac{1}{2}[X]_t)^{\frac{1}{2}} \\ &= \exp\big(\frac{1}{2}(X_t - X_0)\big)\exp(-\frac{1}{2}[X]_t)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Da X als stetiges lokales Martingal ein Supermartingal ist, ergibt sich mit

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(X)_t] \leq \mathbb{E}[\mathcal{E}(X)_0] = 1$$

unter der Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung die Aussage. □

Satz 6.28. *Es sei X ein stetiges lokales Martingal mit $X_0 = 0$ und $[X]_t = t$ für alle $t \geq 0$. Dann ist X eine Brownsche Bewegung.*

Beweis: Offenbar ist $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ mit $Z_t = iuX_t$ ein lokales Martingal, für das $[Z]_t = -u^2 t$ gilt. Insbesondere ist dann

$$\mathcal{E}(Z)_t = \exp\big(Z_t - Z_0 - \frac{1}{2}[Z]_t\big) = \exp\big(iuX_t + \frac{1}{2}u^2 t\big),$$

und gemäß Satz 6.27 (iii) ist $\mathcal{E}(Z)_t$ auf dem gesamten Intervall $[0, \infty)$ ein Martingal mit $\mathbb{E}[\mathcal{E}(Z)_t] = 1$. Insbesondere gilt

$$\mathbb{E}\big[\exp(iu(X_t - X_s))\big|\mathcal{F}_s\big] = \exp\big(-\frac{1}{2}u^2(t-s)\big).$$

Offensichtlich ist die $\mathcal{F}_s$-bedingte Verteilung von $X_t - X_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$, und sie entspricht einer Normalverteilung mit Varianz $t - s$. Es ist dann leicht nachzuweisen, dass X eine Brownsche Bewegung im Sinne von Definition 1.3 ist. □

Satz 6.29. (Martingaldarstellungssatz) *Es seien B eine Brownsche Bewegung mit erzeugter Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t \mid t \geq 0).$$

Dann existiert ein eindeutiger vorhersehbarer Prozess $H \in \mathcal{L}^2(B)$ mit

$$X = \mathbb{E}[X] + \int H dB. \tag{6.1}$$

Beweis: Sind H und K zwei Prozesse, die (6.1) erfüllen, so gilt

$$\int (H-K)dB = 0$$

$\mathbb{P}$-fast sicher. Aufgrund der Isometrieeigenschaft folgt

$$\int (H-K)^2 d\mu_B = 0,$$

also $H = K$ $\mathbb{P} \otimes \lambda$-fast sicher.

Zum Beweis der Existenz beachtet man zunächst, dass

$$\mathcal{U} = \{X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mid \text{es existiert ein } H \in \mathcal{L}^2(B) \text{ mit } (6.1)\}$$

aufgrund der Isometrieeigenschaft und der Tatsache, dass sowohl $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ als auch $\mathcal{L}^2(B)$ abgeschlossen sind, selbst abgeschlossen ist. Wir zeigen im Folgenden, dass

$$\mathcal{U}^\perp = \{0\}$$

in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gilt. Da $\mathcal{U}$ ein abgeschlossener linearer Unterraum und $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Hilbertraum ist, folgt dann (vgl. zum Beispiel Kapitel 2 in Brockwell and Davis (1991), insbesondere Proposition 2.3.2)

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp = \mathcal{U}.$$

Es sei also $Y \in \mathcal{U}^\perp$. Zu zeigen ist $\mathbb{E}[XY] = 0$ für alle $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dazu sei zunächst $H = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{(t_{i-1}, t_i]}$. Setzt man

$$Z_t = \int_0^t H dB,$$

so folgt

$$\mathcal{E}(Z)_t = 1 + \int_0^t \mathcal{E}(Z)_s dZ_s = 1 + \int_0^t \mathcal{E}(Z)_s H_s dB_s \in \mathcal{U}$$

aus Satz 6.27. Insbesondere gilt also

$$\exp\Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\alpha_i^2 (t_i - t_{i-1})\Big) \in \mathcal{U}$$

für alle n, alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und jede Wahl $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. Nach Voraussetzung ist $Y \in \mathcal{U}^\perp$, so dass

$$\mathbb{E}\Big[Y \exp\Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\alpha_i^2 (t_i - t_{i-1})\Big)\Big] = 0$$

folgt. Vergisst man die multiplikative Konstante und verwendet partielle Summation, so ist dazu offenbar äquivalent, dass $\mathbb{E}[XY] = 0$ für alle X der Form

$$X = \exp\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_{t_i}\big)$$

gilt. Aus der Fourieranalysis weiß man, dass die Familie aller solchen X dicht in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ liegt. Für Details sei auf Theorem 4.15 bzw. Proposition 4.18 in Karatzas and Shreve (1991) verwiesen. Dann folgt $\mathbb{E}[XY] = 0$ für alle $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ wie gewünscht. $\square$

Kapitel 7

Der Satz von Girsanov

In diesem Kapitel befassen wir uns mit dem Verhalten stochastischer Prozesse unter einem Maßwechsel. Herzstück des Abschnitts ist der Satz von Girsanov, der sich speziell Martingalen in den jeweiligen Räumen widmet.

Satz 7.1. *Es seien $T > 0$ und $\mathbb{Q}$ ein auf $\mathcal{F}_T$ zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, d.h. $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_T} \sim \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$. Dann definiert die Dichte*

$$L_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_T}$$

via

$$L_t = \mathbb{E}[L_T|\mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T,$$

ein Martingal bzgl. $\mathbb{P}$, und es gilt

$$L_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t}.$$

Der so definierte Prozess $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ wird als Dichteprozess bezeichnet.

Beweis: Die Martingaleigenschaft folgt aus Beispiel 2.5 (iii). Ansonsten sei $A \in \mathcal{F}_t$, also auch in $A \in \mathcal{F}_T$. Dann gilt

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A L_T d\mathbb{P} = \int_A L_t d\mathbb{P},$$

weil $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein Martingal ist. □

Annahme 7.2. Von nun an seien $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}_T$, und der Dichteprozess $L = (L_t)_{0 \leq t \leq T}$ sei càdlàg, positiv und erfülle $L_0 = 1$. Größen, die von $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ abhängen, wie zum Beispiel Erwartungswerte, werden typischerweise mit $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ bzw. $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ bezeichnet.

Satz 7.3. *Es sei X ein rechtsstetiger, adaptierter Prozess. Dann sind äquivalent:*

(i) $(L_t X_t)_{0 \leq t \leq T}$ ist ein (lokales) $\mathbb{P}$-Martingal.

(ii) $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ ist ein (lokales) $\mathbb{Q}$-Martingal.

Beweis: Es genügt, die Behauptung für Martingale zu beweisen, da die allgemeine Aussage durch Lokalisation folgt. Dazu seien $s \le t \le T$ und $F \in \mathcal{F}_s$. Wegen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_F(X_t - X_s)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T 1_F(X_t - X_s)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T 1_F X_t] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T 1_F X_s] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_t 1_F X_t] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_s 1_F X_s] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_F(L_t X_t - L_s X_s)]\end{aligned}$$

sind beide Aussagen äquivalent. □

Satz 7.4. (Satz von Girsanov) *Es seien X ein stetiges lokales Martingal bzgl. $\mathbb{P}$ und der Dichteprozess L stetig. Dann ist $Z = (Z_t)_{0 \le t \le T}$ mit*

$$Z_t = X_t - \int_0^t \frac{1}{L} d[L, X]$$

ein lokales Martingal bzgl. $\mathbb{Q}$, und es gilt

$$[Z]^{\mathbb{Q}} = [X]^{\mathbb{Q}} = [X]^{\mathbb{P}}.$$

Beweis: Zu zeigen ist gemäß Satz 7.3, dass LZ ein lokales Martingal bzgl. $\mathbb{P}$ ist. Dazu sei

$$D_t = \int_0^t \frac{1}{L} d[L, X].$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}L_t Z_t = L_t X_t - L_t D_t &= L_0 X_0 + \int_0^t L dX + \int_0^t X dL + [L, X]_t \\ &\quad - \Big(L_0 D_0 + \int_0^t L dD + \int_0^t D dL + [L, D]_t\Big) \\ &= L_0 X_0 + \int_0^t L dX + \int_0^t X dL + [L, X]_t \\ &\quad - \int_0^t L \frac{1}{L} d[L, X] - \int_0^t D dL.\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass D von beschränkter Variation ist und $D_0 = 0$ gilt, wodurch sich

$$dD = \frac{1}{L} d[L, X]$$

ergibt und auch Korollar 6.17 (iii) anwendbar ist. Also folgt aus

$$L_t Z_t = L_0 X_0 + \int_0^t L dX + \int_0^t X dL - \int_0^t D dL$$

und Satz 7.1 die erste Aussage.

Für die zweite Aussage ist zu beachten, dass $[Z]^{\mathbb{Q}} = [X]^{\mathbb{Q}}$ gilt, da $[L, X]$ gemäß Korollar 6.17 (i) von beschränkter Variation ist. Zudem gilt aufgrund der Äquivalenz von $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$, dass eine Folge genau dann in Wahrscheinlichkeit bzgl. $\mathbb{P}$ konvergiert, wenn sie in Wahrscheinlichkeit bzgl. $\mathbb{Q}$ konvergiert. $[X]^{\mathbb{P}} = [X]^{\mathbb{Q}}$, und also die Behauptung, folgt dann aus Satz 6.4. □

Korollar 7.5. *Es seien B eine Brownsche Bewegung, $H \in \mathcal{L}^2(B)$ und $L_t = \mathcal{E}(H \bullet B)_t$ ein Martingal für $0 \le t \le T$. Dann ist*

$$Z_t = B_t - \int_0^t H_s ds, \quad 0 \le t \le T,$$

eine Brownsche Bewegung bzgl. $\mathbb{Q}$.

Beweis: Nach Satz 6.27 und Satz 5.11 gilt

$$L_t = \mathcal{E}(H \bullet B)_t = 1 + \int_0^t \mathcal{E}(H \bullet B)_s d(H \bullet B)_s = 1 + \int_0^t L_s H_s dB_s.$$

Mit Bemerkung 6.21 folgt

$$[L, B]_t = [(LH) \bullet B, B]_t = \int_0^t L_s H_s ds,$$

also

$$\int_0^t \frac{1}{L_s} d[L, B]_s = \int_0^t H_s ds.$$

Aus Satz 7.4 folgt dann zunächst, dass Z ein stetiges lokales $\mathbb{Q}$-Martingal mit $[Z]_t = [B]_t = t$ definiert. Die Aussage ergibt sich dann aus Satz 6.28. $\square$

Kapitel 8

Die Modellierung von Märkten

Wir betrachten in diesem Kapitel eine Börse mit $d+1$ Wertpapieren, deren Preisprozesse durch stetige Semimartingale $S^0, \dots, S^d$ modelliert werden. Als Kurznotation verwenden wir $S = (S^0, \dots, S^d)^*$. Der Einfachheit halber seien alle $\mathcal{F}_0$-messbaren Zufallsvariablen deterministisch.

Definition 8.1.

(i) Ein $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiger vorhersehbarer Prozess

$$\varphi = (\varphi^0, \dots, \varphi^d)^*$$

wird als *(Handels)-Strategie* oder *Portfolio* bezeichnet.

(ii) Der Prozess

$$V(\varphi) = \varphi^* S = \sum_{i=0}^{d} \varphi^i S^i$$

heißt *Wert-* oder *Vermögensprozess.*

(iii) Eine Handelsstrategie heißt *selbstfinanzierend*, falls

$$\varphi \in \mathcal{L}(S) \text{ und } V(\varphi) = V_0(\varphi) + \varphi \bullet S.$$

Hierbei seien

$$\varphi \in \mathcal{L}(S) \iff \varphi^i \in \mathcal{L}(S^i) \text{ für alle } i$$

und

$$(\varphi \bullet S)_t = \sum_{i=0}^{d} (\varphi^i \bullet S^i)_t = \sum_{i=0}^{d} \int_0^t \varphi^i dS^i.$$

Bemerkung 8.2.

(i) Die Zufallsvariable φ_t^i bezeichnet die Zahl der zur Zeit t gehaltenen Wertpapiere vom Typ i. Wie man anhand einer diskreten Approximation

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{k} \varphi_{t_{j-1}} 1_{(t_{j-1}, t_j]}$$

von φ mittels einer Partition π_n von $[0,t]$ sieht, steht das stochastische Integral $(\varphi \bullet S)_t$, das durch

$$(\varphi_n \bullet S)_t = \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=1}^{k} \varphi_{t_{j-1}} (S^i_{t_j \wedge t} - S^i_{t_{j-1} \wedge t})$$

approximiert wird, dann für die gesamten Handelsgewinne bzw. -verluste von Portfolio φ auf $[0, t]$.

(ii) Setzt man voraus, dass das Portfolio selbstfinanzierend ist, so bedeutet dies, dass dem Vermögensprozess nach Zeitpunkt 0 keinerlei Mittel zugefügt oder entnommen werden. Alle Veränderungen von $V(\varphi)$ sind also ursächlich auf Veränderungen in S zurückzuführen.

In vielen Situationen ist es sinnvoll, Handelsgewinne und Strategien bezogen auf eine Referenzgröße zu betrachten und also nur relative Veränderungen zu diskutieren. Diese Rolle wird im Folgenden von S^0 übernommen. Es sei $S^0 > 0$.

Definition 8.3.

(i) Der Preisprozess S^0 wird als *Numeraire* bezeichnet.

(ii) Die Prozesse

$$\hat{S} = \frac{1}{S^0} S = (1, \frac{S^1}{S^0}, \dots, \frac{S^d}{S^0})^*$$

bzw.

$$\hat{V}(\varphi) = \frac{1}{S_0} V(\varphi) = \varphi^* \hat{S}$$

heißen *diskontierter Preis-* bzw. *Vermögensprozess* von φ.

Satz 8.4. *Eine Strategie φ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn*

$$\varphi \in \mathcal{L}(\hat{S}) \text{ und } \hat{V}(\varphi) = \hat{V}_0(\varphi) + \varphi \bullet \hat{S}.$$

Beweis: Es sei zunächst $\varphi \in \mathcal{L}(\hat{S})$ und $\hat{V}(\varphi) = \hat{V}_0(\varphi) + \varphi \bullet \hat{S}$. Mit partieller Integration (Korollar 6.17 (iv)) gilt

$$\begin{aligned} V(\varphi) = \varphi^* S = (\varphi^* \hat{S}) S^0 &= \varphi_0^* \hat{S}_0 S_0^0 + (\varphi^* \hat{S}) \bullet S^0 + S^0 \bullet (\varphi^* \hat{S}) + [\varphi^* \hat{S}, S^0] \\ &= \varphi_0^* S_0 + (\varphi^* \hat{S}) \bullet S^0 + S^0 \bullet (\varphi_0^* \hat{S}_0^0 + \varphi \bullet \hat{S}) + [(\varphi_0^* \hat{S}_0^0 + \varphi \bullet \hat{S}), S^0]. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun Satz 5.11, Bemerkung 6.21 sowie die Tatsache, dass die Addition von Konstanten im Integrator das Integral nicht verändert, und erhalten

$$V(\varphi) = \varphi_0^* S_0 + (\varphi^* \hat{S}) \bullet S^0 + (\varphi^* S^0) \bullet \hat{S} + \varphi \bullet [\hat{S}, S^0].$$

Daraus ergibt sich wieder mit Satz 5.11

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= \varphi_0^* S_0 + \varphi \bullet (\hat{S} \bullet S^0 + S^0 \bullet \hat{S} + [\hat{S}, S^0]) \\ &= \varphi_0^* S_0 + \varphi \bullet (\hat{S} S^0 - \hat{S}_0 S_0^0) = V_0(\varphi) + \varphi \bullet S. \end{aligned}$$

Der Beweis der anderen Richtung verläuft analog mit vertauschten Rollen. □

Satz 8.5. *Zu jedem vorhersehbaren Prozess $(\varphi^1, \dots, \varphi^d)^* \in \mathcal{L}((\hat{S}^1, \dots, \hat{S}^d)^*)$ und jedem $V_0 \in \mathbb{R}$ existiert ein eindeutiger vorhersehbarer Prozess φ^0, so dass $\varphi = (\varphi^0, \dots, \varphi^d)^*$ selbstfinanzierend ist und $V_0(\varphi) = V_0$ gilt.*

Beweis: Nach Satz 8.4 ist φ genau dann selbstfinanzierend, wenn

$$\begin{aligned}\varphi_t^0 \hat{S}_t^0 + \left((\varphi^1, \ldots, \varphi^d)(\hat{S}^1, \ldots, \hat{S}^d)^*\right)_t &= \hat{V}_t(\varphi) = \hat{V}_0(\varphi) + (\varphi \bullet \hat{S})_t \\ &= \hat{V}_0(\varphi) + \left((\varphi^1, \ldots, \varphi^d) \bullet (\hat{S}^1, \ldots, \hat{S}^d)\right)_t\end{aligned}$$

gilt, wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $\hat{S}^0 = 1$ ist. Löst man die Gleichung auf, muss also

$$\varphi_t^0 = \hat{V}_0(\varphi) + \left((\varphi^1, \ldots, \varphi^d) \bullet (\hat{S}^1, \ldots, \hat{S}^d)\right)_t - \left((\varphi^1, \ldots, \varphi^d)(\hat{S}^1, \ldots, \hat{S}^d)^*\right)_t$$

und $\hat{V}_0(\varphi) = V_0(\varphi)/S_0^0$ gelten. □

Bemerkung 8.6. Die zentrale Idee der Finanzmathematik ist, dass keine risikolosen Gewinne erwirtschaft werden können, d.h. dass keine selbstfinanzierende Strategie φ und kein Zeitpunkt $T < \infty$ existieren, so dass

$$V_0(\varphi) = 0, \quad V_T(\varphi) \geq 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(V_T(\varphi) > 0) > 0$$

gilt. Auf der Abwesenheit solcher *Arbitragemöglichkeiten* basieren die meisten nichttrivialen Resultate der Finanzmathematik.

Beispiel 8.7.

(i) Wir haben in Beispiel 2.14 die Martingalstrategie kennengelernt, mit der in diskreter Zeit fast sicher Gewinn erzielt werden kann, wenn die zu Grunde liegende Anlageform ein Martingal ist. Zentral war in diesem Beispiel, dass die Strategie mit Hilfe einer Stoppzeit formuliert wurde, auf deren Eintreten potentiell beliebig lang gewartet werden kann. Es handelte sich dabei also nicht um eine Arbitragemöglichkeit im Sinne von Bemerkung 8.6, wo T fest gewählt ist.

(ii) In stetiger Zeit hingegen kann selbst in kurzen Zeiträumen beliebig oft gehandelt werden. Verwendet man die Interpretation einer Brownschen Bewegung als zeitstetiger Grenzwert eines reskalierten Random Walks gemäß Satz 3.12 ist nicht schwer einzusehen, dass selbst im einfachsten möglichen Markt mit $S^0 = 1$ und einer *geometrischen Brownschen Bewegung*

$$S_t^1 = \mathcal{E}(B)_t = \exp(B_t - t/2)$$

Arbitragemöglichkeiten existieren, d.h. eine Strategie $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1)^*$ analog zu der aus Beispiel 2.14, so dass $V_0(\varphi) = 0$ und $V_T(\varphi) = 1$ gilt.

Bemerkung 8.8. Um dennoch Arbitragemöglichkeiten auszuschließen, müssen also *Zulässigkeitsbedingungen* an die erlaubten Portfolios eingeführt werden. Eine erste Einschränkung auf bloß endlich viele Umschichtungen in endlicher Zeit ist zwar realistisch, schließt aber viele interessante Strategien aus. Typischerweise arbeitet man eher mit Einschränkungen an die Höhe der erlaubten Schulden.

Definition 8.9. Eine selbstfinanzierende Strategie φ heißt *zulässig*, falls ein $c > 0$ existiert, so dass

$$V(\varphi) \geq -c \sum_{i=0}^{d} S^i$$

gilt.

Bemerkung 8.10. Im Folgenden sei $T > 0$ fest gewählt, und der Einfachheit halber betrachten wir die Preisprozesse und Strategien nur auf $[0, T]$ statt $[0, \infty)$. Insbesondere setzen wir $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. Dann heißt ein Markt *arbitragefrei*, falls keine selbstfinanzierende, zulässige Strategie φ existiert, so dass

$$V_0(\varphi) = 0, \quad V_T(\varphi) \geq 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(V_T(\varphi) > 0) > 0$$

gilt.

Satz 8.11. *Existiert ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$, d.h. ein Maß $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, bzgl. dem $\hat{S}$ ein Martingal ist, so ist der Markt arbitragefrei.*

Beweis: Es seien φ eine zulässige Strategie mit $V_0(\varphi) = 0$ und $\hat{S}$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{Q}$. Dann ist

$$\hat{V}(\varphi) = \varphi \bullet \hat{S}$$

zumindest ein lokales Martingal bzgl. $\mathbb{Q}$, und bei Wahl eines genügend großen $c > 0$ ist auch

$$M = \hat{V}(\varphi) + c \sum_{i=1}^{d} \hat{S}^i \geq 0$$

ein nicht-negatives lokales Martingal. Nach Korollar 6.25 ist zunächst M und damit dann auch $\hat{V}(\varphi)$ ein Supermartingal. Insbesondere folgt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{V}_T(\varphi)] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{V}_0(\varphi)] = 0.$$

Gilt also $\hat{V}_T(\varphi) \geq 0$, so folgt daraus $\hat{V}_T(\varphi) = 0$ $\mathbb{Q}$-fast sicher. Insbesondere ist wegen $S_0 > 0$ auch $V_T(\varphi) = 0$ $\mathbb{Q}$-fast sicher, und aufgrund von $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ folgt die Aussage. □

Korollar 8.12. *Es seien φ eine zulässige Strategie und $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß für $\hat{S}$. Dann ist*

$$\hat{V}_t(\varphi) = \hat{V}_0(\varphi) + (\varphi \bullet \hat{S})_t$$

ein Supermartingal bzgl. $\mathbb{Q}$.

Bemerkung 8.13. Im Gegensatz zur diskreten Finanzmathematik ist die Arbitragefreiheit des Marktes nicht hinreichend für die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes, so dass keine direkte Rückrichtung zu Satz 8.11 existiert. Daher muss eine etwas stärkere Bedingung gefordert werden.

Definition 8.14. Eine Zufallsvariable $X \geq 0$ mit $\mathbb{P}(X > 0) > 0$ heißt *free lunch with vanishing risk*, falls eine Folge $(\varphi^{(n)})_n$ zulässiger Strategien und eine Nullfolge $(v_n)_n$ mit $v_n \geq 0$ existieren, so dass

$$V_0(\varphi^{(n)}) \leq v_n \quad \text{und} \quad V_T(\varphi^{(n)}) \geq X$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ein Markt genügt der Bedingung *NFLVR* (*no free lunch with vanishing risk*), falls kein solches X existiert.

Satz 8.15. *Genügt ein Markt der Bedingung NFLVR, so ist er arbitragefrei.*

Beweis: Existiert eine Arbitragemöglichkeit, so lässt sich $\varphi^{(n)} = \varphi$, $X = V_T(\varphi)$ und $v_n = 0$ wählen. Dies entspricht einem *free lunch* komplett ohne Risiko. □

Satz 8.16. (1. Fundamentalsatz der Preistheorie) *Ein Markt genügt genau dann der Bedingung NFLVR, wenn ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ für $\hat{S}$ existiert.*

Beweis:

$\Longleftarrow$ Angenommen, es sei X ein FLVR. Setzt man

$$\hat{X} = \frac{X}{S_T^0},$$

so gilt mit Korollar 8.12

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{X}] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\hat{V}_T(\varphi^{(n)})\big] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\hat{V}_0(\varphi^{(n)})\big] \leq \frac{v_n}{S_0^0} \to 0,$$

wobei wir genutzt haben, dass S_0^0 deterministisch und positiv ist. Wegen $\hat{X} \geq 0$ folgt $\hat{X} = 0$ $\mathbb{Q}$-fast sicher, also insbesondere $\hat{X} = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Daraus ergibt sich $X = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher, also ein Widerspruch.

$\Longrightarrow$ Der allgemeine Beweis für beschränkte $\hat{S}$ beruht auf dem Satz von Hahn-Banach und ist in Delbaen and Schachermayer (1994) zu finden. Wir zeigen hier nur, wie daraus der allgemeine Fall folgt: Anstelle von S^0 sei als Numeraire

$$S^\Sigma = \sum_{i=0}^{d} S^i$$

gewählt. Aufgrund der Beschränktheit von

$$\widetilde{S} = \frac{S}{S^\Sigma}$$

existiert dann ein äquivalentes Maß $\widetilde{\mathbb{Q}}$, bzgl. dem $\widetilde{S}$ ein Martingal ist. Es sei nun L der Dichteprozess von $\widetilde{\mathbb{Q}}$ gemäß Satz 7.1. Mit Satz 7.3 folgt, dass

$$\widetilde{S}^i L = \frac{S^i}{S^\Sigma} L$$

für jedes i ein Martingal bzgl. $\mathbb{P}$ ist. Insbesondere ist der skalierte Prozess

$$Z = \frac{S_0^\Sigma}{S_0^0} \frac{S^0}{S^\Sigma} L$$

wegen Annahme 7.2 ein positives Martingal bzgl. $\mathbb{P}$ mit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_T] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_0] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\frac{S_0^\Sigma}{S_0^0} \frac{S_0^0}{S_0^\Sigma} L_0\Big] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_0] = 1,$$

wobei wir Satz 2.41 verwendet haben. Damit ist Z der Dichteprozess eines neuen Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$, d.h.

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z_T.$$

Da

$$\hat{S}^i Z = \frac{S_0^\Sigma}{S_0^0} \frac{S^i}{S^\Sigma} L$$

für jedes $i = 1, \ldots, d$ ebenfalls ein Martingal bzgl. $\mathbb{P}$ ist, folgt erneut mit Satz 7.3, dass $\hat{S}^i$ für jedes $i = 1, \ldots, d$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{Q}$ ist. $\square$

Bemerkung 8.17. In der diskreten Finanzmathematik gilt das *Gesetz des einheitlichen Preises*, wonach in einem arbitragefreien Markt der Preisprozesses $V(\varphi)$ bereits durch $V_T(\varphi)$ vollständig festgelegt ist. Das folgende Beispiel zeigt, dass dieses Gesetz in der stetigen Finanzmathematik noch nicht einmal gilt, wenn man sich auf zulässige Strategien beschränkt.

Beispiel 8.18. Es sei φ die zeitstetige Version der Martingalstrategie, für die gemäß Beispiel 8.7 $V_0(\varphi) = 0$ und $V_T(\varphi) = 1$ gilt. Nach Satz 6.27 (iii) und Satz 8.16 ist der Markt arbitragefrei, die Strategie φ jedoch nicht zulässig, da sie potentiell beliebige Verluste einbringen kann. Jedoch ist $-\varphi$ zulässig, und es gilt $V_0(-\varphi) = 0$ und $V_T(-\varphi) = -1$. Offenbar erfüllt die triviale Strategie $\widetilde{\varphi} = (-1, 0)^*$ auch $V_T(\widetilde{\varphi}) = -1$, aber $V_0(\widetilde{\varphi}) = -1$.

Definition 8.19.

(i) Eine selbstfinanzierende Strategie φ heißt doppelt zulässig, falls φ und $-\varphi$ zulässig sind.

(ii) Eine selbstfinanzierende Strategie φ heißt erlaubt, falls $\hat{V}(\varphi)$ bzgl. jedem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ein Martingal ist.

Korollar 8.20. *Jede doppelt zulässige Strategie ist erlaubt.*

Beweis: Gemäß Korollar 8.12 ist $\hat{V}(\varphi)$ zugleich ein Supermartingal und ein Submartingal bzgl. $\mathbb{Q}$. □

Bemerkung 8.21. Während intuitiv einsichtig ist, dass die Einschränkung auf zulässige Strategien sinnvoll ist, gibt es keinen inhaltlichen Grund dafür, auf Strategien zu verzichten, die beliebig hohe Gewinne ermöglichen. Aus mathematischer Sicht ist allerdings interessant, dass für doppelt zulässige Strategien ein Gesetz des einheitlichen Preises gilt.

Satz 8.22. (Gesetz des einheitlichen Preises) *Es seien φ und ψ erlaubte Strategien mit $V_T(\varphi) = V_T(\psi)$.*

(i) Ist der Markt arbitragefrei bzgl. erlaubter Strategien, d.h. existiert keine erlaubte Strategie δ mit

$$V_0(\delta) = 0, \quad V_T(\delta) \geq 0 \quad \textit{und} \quad \mathbb{P}(V_T(\delta) > 0) > 0,$$

so gilt $V(\varphi) = V(\psi)$ auf $[0, T]$.

(ii) Ist φ eine erlaubte Strategie und gilt $V_T(\varphi) = S_T^i$ für ein $i = 0, \ldots, d$, so ist $V(\varphi) = S^i$ auf $[0, T]$.

Beweis:

(i) Angenommen, es existiert ein $t \geq 0$ mit $\mathbb{P}(V_t(\varphi) \neq V_t(\psi)) > 0$. Ohne Einschränkung gelte dann $\mathbb{P}(A) > 0$ mit $A = \{V_t(\psi) > V_t(\varphi)\}$. Wir setzen

$$(\delta^1, \ldots, \delta^d)_s^* = \begin{cases} 0, & s \leq t, \\ ((\varphi^1, \ldots, \varphi^d)_s^* - (\psi^1, \ldots, \psi^d)_s^*)1_A, & s > t. \end{cases}$$

Nach Satz 8.5 existiert eine Strategie δ^0, so dass $\delta = (\delta^0, \dots, \delta^d)^*$ selbstfinanzierend ist und $V_0(\delta) = 0$ gilt. Insbesondere ergibt sich $\hat{V}_0(\delta) = 0$ und

$$\begin{aligned}\hat{V}_s(\delta) &= \big((\varphi - \psi)1_{A\times(t,T]} \bullet \hat{S}\big)_s = 1_{A\times(t,T]} \bullet \big((\varphi - \psi) \bullet \hat{S}\big)_s \\ &= 1_A\big(((\varphi - \psi) \bullet \hat{S})_s - ((\varphi - \psi) \bullet \hat{S})_t\big) \\ &= 1_A(\hat{V}_s(\varphi) - \hat{V}_s(\psi) - (\hat{V}_t(\varphi) - \hat{V}_t(\psi)))\end{aligned}$$

für alle $s > t$, wobei wir Lemma 4.32 verwendet haben. Damit lässt sich

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{V}_T(\delta)|\mathcal{F}_s] &= 1_A\big(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{V}_T(\varphi) - \hat{V}_T(\psi)|\mathcal{F}_s] - (\hat{V}_t(\varphi) - \hat{V}_t(\psi))\big) \\ &= 1_A\big(\hat{V}_s(\varphi) - \hat{V}_s(\psi) - (\hat{V}_t(\varphi) - \hat{V}_t(\psi))\big) = \hat{V}_s(\delta)\end{aligned}$$

für alle $s > t$ zeigen, da φ und ψ erlaubte Strategien sind. Es folgt schnell, dass $\hat{V}(\delta)$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{Q}$ und δ also ebenfalls erlaubt ist. Setzt man nun $s = T$, erhält man

$$\hat{V}_T(\delta) = 1_A(\hat{V}_T(\varphi) - \hat{V}_T(\psi) - (\hat{V}_t(\varphi) - \hat{V}_t(\psi))) = 1_A(\hat{V}_t(\psi) - \hat{V}_t(\varphi)),$$

und der Ausdruck verschwindet auf A^c, während er auf A positiv ist. Damit ist δ eine Arbitragemöglichkeit.

(ii) Nach Definition ist S^i eine erlaubte Strategie. □

Bemerkung 8.23. Mit einem ähnlichen Beweis lässt sich ferner zeigen: In arbitragefreien Märkten gilt

$$V_T(\varphi) \geq V_T(\psi) \implies V(\varphi) \geq V(\psi),$$

falls φ und ψ erlaubt sind.

Kapitel 9

Bewertung und Hedging von Derivaten

Wie in der diskreten Finanzmathematik betrachten wir im Folgenden zufällige Auszahlungen am Ende ihrer Laufzeit und interessieren uns für zwei Fragestellungen: Wie lässt sich der heutige Preis für ein entsprechendes Finanzgut bestimmen? Wie lässt sich das damit verbundene Risiko beseitigen? Dabei arbeiten wir weiterhin mit dem Marktmodell aus dem vergangenen Kapitel und nehmen zusätzlich an, dass der Markt arbitragefrei ist, d.h. die Bedingung NFLVR erfüllt. Außerdem seien $S^0 > 0$ und $S^i \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, d$.

Definition 9.1.

(i) Eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable X wird als *Auszahlung*, *Derivat* oder *Option* bezeichnet.

(ii) Die Zufallsvariable
$$\hat{X} = \frac{X}{S_T^0}$$
heißt *diskontierte Auszahlung*.

(iii) Eine Auszahlung X heißt *duplizierbar* oder *replizierbar*, falls eine erlaubte Strategie φ existiert, so dass $V_T(\varphi) = X$ ist.

Satz 9.2. *Es sei X eine nicht-negative duplizierbare Auszahlung mit Duplikationsstrategie φ. Dann gilt:*

(i) Es existiert genau ein Preisprozess S^{d+1} mit $S_T^{d+1} = X$ derart, dass der Markt $(S^0, \ldots, S^{d+1})^*$ arbitragefrei ist und NFLVR erfüllt, nämlich $S^{d+1} = V(\varphi)$.

(ii) Ist $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß für $(\hat{S}^0, \ldots, \hat{S}^{d+1})^*$, so ist $\hat{X}$ integrierbar bzgl. $\mathbb{Q}$ mit
$$\hat{S}_t^{d+1} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{X}|\mathcal{F}_t].$$

Beweis:

(i) Die Eindeutigkeit ergibt sich als Konsequenz aus Satz 8.22.

Um die Existenz zu zeigen, sei $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß für $\hat{S} = (\hat{S}^0, \ldots, \hat{S}^d)^*$. Nach Definition ist auch $\hat{S}^{d+1} = V(\varphi)$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{Q}$, so dass $\mathbb{Q}$ also ein äquivalentes Martingalmaß für $(\hat{S}^0, \ldots, \hat{S}^{d+1})^*$ ist. Nach

Satz 8.11 ist der neue Markt arbitragefrei und erfüllt nach Satz 8.16 sogar die Bedingung NFLVR. Zudem gilt nach Bemerkung 8.23, dass aus der Nichtnegativität von S_T^{d+1} folgt, dass der gesamte Prozess S^{d+1} ebenfalls nicht-negativ ist.

(ii) Da $\hat{S}^{d+1}$ ein Martingal ist, ist $\hat{X} = \hat{S}_T^{d+1}$ integrierbar. Außerdem folgt

$$\hat{S}_t^{d+1} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{S}_T^{d+1}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{X}|\mathcal{F}_t].$$

□

Definition 9.3. Es sei X eine nicht-negative duplizierbare Auszahlung mit zugehöriger Strategie φ. Dann heißt S^{d+1} aus Satz 9.2 der *(faire) Preisprozess* von X, und φ wird als *Hedgingstrategie* oder *duplizierende Strategie* bezeichnet.

Bemerkung 9.4.

(i) Satz 9.2 zeigt, dass die Einführung einer duplizierbaren Option in den Markt zwar neue Möglichkeiten zum Handeln eröffnet, dadurch aber keine Arbitrage entsteht.

(ii) Eine Hedgingstrategie wird verwendet, um sich gegen das Risiko der Auszahlung von X abzusichern. Verkauft eine Bank zur Startzeit ein Derivat mit der Auszahlung X und investiert gleichzeitig in das selbstfinanzierende Portfolio φ, so ergibt sich als Endvermögen

$$-X + V_T(\varphi) = 0,$$

d.h. es gibt kein Verlustrisiko.

Beispiel 9.5. Ein klassisches Beispiel für ein Derivat ist ein *Forwardgeschäft*, bei dem der eine Vertragspartner zum Fälligkeitszeitpunkt T ein Basiswertpapier (etwa S^1) erhält, während der andere Vertragspartner zu Vertragsabschluss (Zeitpunkt 0) den Betrag K erhält. Aus Sicht des Käufers beträgt die Auszahlung bei Fälligkeit also

$$X = S_T^1 - K.$$

Eine solche Auszahlung lässt sich relativ leicht aus dem Wertpapier S^1 und einer zum Zeitpunkt T fälligen Anleihe, also einem Wertpapier S^0, das zum Zeitpunkt T den Wert 1 besitzt, duplizieren. Dazu wählt man ein konstantes Portfolio der Form

$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)^* = (-K, 1)^*.$$

Offenbar gilt dann

$$V_T(\varphi) = -KS_T^0 + S_T^1 = X.$$

Ein fairer Preis K für den Forward wird so gewählt, dass der Vermögensprozess zum Zeitpunkt 0 verschwindet, d.h. dass

$$V_0(\varphi) = -KS_0^0 + S_0^1 = 0 \iff K = \frac{S_0^1}{S_0^0} = \hat{S}_0^1$$

gilt. Andernfalls existieren Arbitragemöglichkeiten, etwa aus Sicht des Verkäufers wie folgt: Liegt der Preis K höher als $\hat{S}_0^1$, so kauft der Verkäufer zum Zeitpunkt 0 für den Betrag $\hat{S}_0^1$ das duplizierende Portfolio, während er den überschüssigen Rest $K - \hat{S}_0^1$ risikolos anlegt. In diesem Sinne ist $K = \hat{S}_0^1$ der faire Preis des Kontrakts.

Zu beachten ist, dass die formale Theorie im Sinne von Satz 9.2 in diesem einfachen Beispiel gar nicht direkt anwendbar ist: Zum einen ist die Auszahlung X im Allgemeinen nicht nicht-negativ, zum anderen ist zumindest unintuitiv, dass ein kontinuierlicher Handel mit einem Forwardgeschäft stattfindet, wie Satz 9.2 suggeriert.

Definition 9.6.

(i) Eine Auszahlung X heißt *diskontiert beschränkt*, falls $\hat{X}$ beschränkt ist.

(ii) Ein Markt heißt *vollständig*, falls jede diskontiert beschränkte Auszahlung duplizierbar ist.

Satz 9.7. (2. Fundamentalsatz der Preistheorie) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) Der Markt genügt der Bedingung NFLVR und ist vollständig.

(ii) Es gibt genau ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$.

In diesem Fall lässt sich jede Auszahlung X duplizieren, für die

$$|X| \leq c \sum_{i=0}^{d} S^i$$

für ein $c > 0$ gilt.

Beweis:

$\Longrightarrow$ Ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ existiert nach Satz 8.16. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, seien $A \in \mathcal{F}$ und $\hat{X} = 1_A$. Offenbar ist $\hat{X}$ beschränkt und also duplizierbar. Es folgt aus Satz 9.2 (ii), dass

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{X}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{X}|\mathcal{F}_0] = \hat{S}_0^{d+1}$$

gilt, wobei S^{d+1} den zugehörigen eindeutigen Preisprozess bezeichnet. Insbesondere ist der obige Ausdruck für alle äquivalenten Martingalmaße derselbe. Damit ist $\mathbb{Q}$ eindeutig.

$\Longleftarrow$ Wir zeigen zunächst, dass die Bedingung unabhängig von der Wahl des Numeraires ist. Wie im Beweis von Satz 8.16 sei zum Beispiel

$$S^{\Sigma} = \sum_{i=0}^{d} S^i$$

gewählt, und wir setzen

$$\widetilde{S} = \frac{S}{S^{\Sigma}} \quad \text{und} \quad \widetilde{V}(\varphi) = \frac{V(\varphi)}{S^{\Sigma}}.$$

Ist $\widetilde{L}$ der Dichteprozess eines zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Maßes $\widetilde{\mathbb{Q}}$, bzgl. dem $\widetilde{S}$ ein lokales Martingal ist, so wissen wir bereits mit Hilfe von Satz 7.3, dass ein

Dichteprozess L eines äquivalenten Maßes $\mathbb{Q}$, bzgl. dem $\hat{S}$ ein lokales Martingal ist, durch

$$L = \frac{S_0^\Sigma}{S_0^0}\frac{S^0}{S^\Sigma}\widetilde{L}$$

gegeben ist. Umgekehrt lässt sich $\widetilde{L}$ aus L berechnen. Daher folgt: Ist $\mathbb{Q}$ eindeutig, so auch $\widetilde{\mathbb{Q}}$, und vice versa.

Es sei nun also X eine zufällige Auszahlung, so dass

$$\widetilde{X} = \frac{X}{S_T^\Sigma}$$

durch $c \in \mathbb{R}$ beschränkt ist. Wir bezeichnen das von X erzeugte Martingal bzgl. $\widetilde{\mathbb{Q}}$ als

$$M_t = \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{Q}}}[\widetilde{X}|\mathcal{F}_t].$$

Wir verwenden nun zwei Resultate, die wir im Rahmen dieser Vorlesung bisher nicht bewiesen haben:

- Jedes beschränkte lokale Martingal ist ein Martingal. Dies ist eine direkte Konsequenz aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz und lässt sich auf $\widetilde{S}$ anwenden.
- Es existiert eine Erweiterung des Martingaldarstellungssatzes (Satz 6.29): Da $\widetilde{X}$ $\mathcal{F}_T$-messbar und $\widetilde{\mathbb{Q}}$ das einzige Wahrscheinlichkeitsmaß ist, bzgl. dem $\widetilde{S}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ ist, existiert ein $H \in \mathcal{L}(\widetilde{S})$ existiert, so dass

$$\widetilde{X} = M_T = M_0 + (H \bullet \widetilde{S})_T \tag{9.1}$$

  gilt.

Da

$$\sum_{i=0}^d \widetilde{S}^i = \frac{\sum_{i=0}^d S^i}{\sum_{i=0}^d S^i} = 1$$

gilt, folgt für jedes integrierbare $J = (K, \ldots, K)^*$

$$(J \bullet \widetilde{S})_t = \sum_{i=0}^d (K \bullet \widetilde{S}^i)_t = (K \bullet \sum_{i=0}^d \widetilde{S}^i)_t = 0.$$

Insbesondere erfüllt auch $H + J$ dann (9.1). Wählt man konkret

$$K_t = M_0 + (H \bullet \widetilde{S})_t - H_t^* \widetilde{S}_t,$$

so folgt analog zum Beweis von Satz 8.5, dass das Portfolio

$$\varphi = H + (K, \ldots, K)^*$$

wegen

$$\varphi_t^* \widetilde{S}_t - (M_0 - (\varphi \bullet \widetilde{S})_t) = H_t^* \widetilde{S}_t + K_t - (M_0 - (H \bullet \widetilde{S})_t) = 0$$

selbstfinanzierend mit $\widetilde{V}_0(\varphi) = M_0$ ist. Also folgt

$$\widetilde{X} = \widetilde{V}_0(\varphi) + (\varphi \bullet \widetilde{S})_T = \widetilde{V}_T(\varphi) \quad \text{bzw.} \quad X = \widetilde{X} S_T^\Sigma = \widetilde{V}_T(\varphi) S_T^\Sigma = V_T(\varphi).$$

Wegen $|\widetilde{V}(\varphi)| = |M| \le c$ folgt zuletzt

$$V(\varphi) = \widetilde{V}(\varphi)S^{\Sigma} \ge -cS^{\Sigma} \quad \text{und} \quad V(-\varphi) = -\widetilde{V}(\varphi)S^{\Sigma} \ge -cS^{\Sigma},$$

so dass φ doppelt zulässig und nach Korollar 8.20 erlaubt ist. Also ist X duplizierbar. Die Aussage folgt dann aus Satz 8.16. □

Definition 9.8. Das Marktmodell $S = (S^0, S^1)^*$ mit einer *Anleihe*

$$S_t^0 = \exp(rt), \ r \in \mathbb{R},$$

und einer *Aktie*

$$S_t^1 = S_0^1 \exp(\mu t + \sigma B_t) = S_0^1 \mathcal{E}(\widetilde{\mu} I + \sigma B)_t,$$

wobei I der Identitätsprozess und B eine Brownsche Bewegung ist sowie für die Konstanten $S_0^1 > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$ und $\widetilde{\mu} = \mu + \sigma^2/2$ gilt, wird als *Black-Scholes-Modell (mit einer Aktie)* bezeichnet.

Im Folgenden arbeiten wir im Black-Scholes-Modell. Wir nehmen zusätzlich an, dass die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ von S^1 erzeugt wird.

Satz 9.9.

(i) Durch

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}\big(-\frac{\widetilde{\mu} - r}{\sigma}B\big)_T$$

wird ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ definiert.

(ii) Es gilt

$$\hat{S}^1 = \mathcal{E}(\sigma\widetilde{B}),$$

wobei

$$\widetilde{B}_t = B_t + \frac{\widetilde{\mu} - r}{\sigma}t$$

eine Brownsche Bewegung bzgl. $\mathbb{Q}$ ist.

(iii) Der Markt erfüllt NFLVR und ist vollständig.

Beweis:

(i) und (ii) Gemäß Satz 6.27 (iii) ist

$$Z_t = \mathcal{E}\big(-\frac{\widetilde{\mu} - r}{\sigma}B\big)_t = \exp\Big(-\frac{\widetilde{\mu} - r}{\sigma}B_t - \frac{1}{2}\big(\frac{\widetilde{\mu} - r}{\sigma}\big)^2 t\Big)$$

ein Martingal, da die Novikov-Bedingung erfüllt ist. Aufgrund von $Z_0 = 1$ ist Z dann der Dichteprozess eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$. Korollar 7.5 zeigt dann, dass

$$\widetilde{B}_t = B_t + \frac{\widetilde{\mu} - r}{\sigma}t$$

eine Brownsche Bewegung bzgl. $\mathbb{Q}$ ist. Außerdem erhält man

$$\begin{aligned} \hat{S}_t^1 &= \hat{S}_0^1 \exp((\mu - r)t + \sigma B_t) = \hat{S}_0^1 \exp((\mu - \widetilde{\mu})t + \sigma\widetilde{B}_t) \\ &= \hat{S}_0^1 \exp\big(\sigma\widetilde{B}_t - \frac{\sigma^2}{2}t\big) = \hat{S}_0^1 \mathcal{E}(\sigma\widetilde{B})_t. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Da $\widetilde{B}$ eine Brownsche Bewegung bzgl. $\mathbb{Q}$ ist, ist wieder nach Satz 6.27 (iii) $\hat{S}_t^1$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{Q}$.

(iii) Dass NFLVR erfüllt ist, ist eine direkte Konsequenz aus Satz 8.16.

Ansonsten ist zu beachten, dass wegen

$$S_t^1 = S_0^1 \exp\Big((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \widetilde{B}_t\Big) \tag{9.3}$$

die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ auch vom Prozess $\widetilde{B}$ erzeugt wird. Ist dann X eine Auszahlung mit $|\hat{X}| \leq c$, so existiert nach dem Martingaldarstellungssatz (Satz 6.29) ein $H \in \mathcal{L}^2(\widetilde{B})$ mit

$$\hat{X} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{X}] + (H \bullet \widetilde{B})_T.$$

Insbesondere ist $H \bullet \widetilde{B}$ ein Martingal. Daher besitzt

$$\hat{S}_t^2 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{X}|\mathcal{F}_t]$$

die Darstellung

$$\hat{S}_t^2 = \hat{S}_0^2 + (H \bullet \widetilde{B})_t$$

und erfüllt $|\hat{S}^2| \leq c$. Wir setzen nun

$$\varphi^1 = \frac{H}{\sigma \hat{S}^1}.$$

Dann gilt

$$\hat{S}_0^2 + \varphi^1 \bullet \hat{S}^1 = \hat{S}_0^2 + \varphi^1 \hat{S}^1 \bullet (\sigma \widetilde{B}) = \hat{S}_0^2 + H \bullet \widetilde{B} = \hat{S}^2,$$

wobei wir (9.2) und Satz 6.27 (i) sowie Satz 5.11 verwendet haben. Ist dann φ die nach Satz 8.5 existierende selbstfinanzierende Strategie mit dem obigen φ^1 und Startkapital $\hat{S}_0^2$, so erfüllt diese

$$\hat{V}_T(\varphi) = \hat{S}_T^2 = \hat{X} \quad \text{mit} \quad |\hat{V}_t(\varphi)| \leq c \leq c(S_t^0 + S_t^1).$$

Insbesondere ist φ doppelt zulässig, also erlaubt. Damit ist der Markt vollständig. □

Satz 9.10. *Gegeben sei eine Auszahlung der Form $X = g(S_T^1)$, wobei $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ die Eigenschaft $g(x) \leq c(1 + x)$ für ein $c > 0$ besitze. Dann gilt:*

(i) X ist duplizierbar.

(ii) Der faire Preisprozess S^2 von X ist durch $S_t^2 = f(t, S_t^1)$ mit

$$f(t, x) = \exp(-r(T - t)) \int g(\exp(z))\varphi_{\log(x)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t),\sigma^2(T-t)}(z)dz$$

gegeben, wobei φ_{μ,σ^2} die Dichte einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Verteilung bezeichnet.

(iii) f ist auf $[0, T) \times \mathbb{R}^+$ zweimal stetig differenzierbar und genügt der partiellen Differentialgleichung

$$D_1 f(t, x) + rxD_2 f(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 D_{22} f(t, x) - rf(t, x).$$

(iv) Das durch

$$\varphi_t^0 = \exp(-rt)(f(t, S_t^1) - D_2 f(t, S_t^1) S_t^1),$$
$$\varphi_t^1 = D_2 \hat{f}(t, \hat{S}_t^1) = D_2 f(t, S_t^1)$$

gegebene Portfolio ist eine Replikationsstrategie.

Beweis:

(i) Wegen

$$0 \leq X \leq c(1 + S_T^1) \leq c(S_T^0 + S_T^1)$$

folgt die Duplizierbarkeit von X aus Satz 9.9 und Satz 9.7.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}\hat{S}_t^2 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{X}|\mathcal{F}_t] = \exp(-rT)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g(S_T^1)|\mathcal{F}_t] \\ &= \exp(-rT)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[g\big(S_t^1 \exp\big((r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(\widetilde{B}_T - \widetilde{B}_t)\big)\big)|\mathcal{F}_t\Big],\end{aligned}$$

wobei wir (9.3) verwendet haben. Da $\widetilde{B}_T - \widetilde{B}_t$ unter $\mathbb{Q}$ eine von $\mathcal{F}_t$ unabhängige Brownsche Bewegung ist, folgt mit der Substitution

$$S_t^1 \exp\big((r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\big) + \sigma y = \exp(z)$$

dann

$$\begin{aligned}\hat{S}_t^2 &= \exp(-rT)\int g\big(S_t^1 \exp\big((r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma y\big)\big)\varphi_{0,T-t}(y)dy \\ &= \exp(-rT)\int g(\exp(z))\varphi_{\log(S_t^1)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t),\sigma^2(T-t)}(z)dz.\end{aligned}$$

Wegen $S_t^2 = \exp(rt)\hat{S}_t^2$ folgt die Aussage.

(iii) Wegen der Wachstumsbedingung an g und des Satzes von der majorisierten Konvergenz können Differentiation und Integration vertauscht werden. Dann folgt die erste Aussage, weil die Dichte der Normalverteilung in den Parametern beliebig oft differenzierbar ist.

Ansonsten folgt

$$\hat{S}_t^2 = \hat{f}(t, \hat{S}_t^1) \quad \text{mit} \quad \hat{f}(t,x) = \exp(-rt)f(t, x\exp(rt))$$

aus (ii), und mit der Itō-Formel ergibt sich

$$\hat{S}_t^2 = \hat{S}_0^2 + \int_0^t D_1\hat{f}(s, \hat{S}_s^1)ds + \int_0^t D_2\hat{f}(s, \hat{S}_s^1)d\hat{S}_s^1 + \frac{1}{2}\int_0^t D_{22}\hat{f}(s, \hat{S}_s^1)d[\hat{S}^1]_s.$$

Wegen $\hat{S}^1 = \mathcal{E}(\sigma\widetilde{B})$ nach Satz 9.9 (ii) und aufgrund von Satz 6.27 (i) gilt

$$d[\hat{S}^1]_s = \sigma^2(\hat{S}_s^1)^2 d[\widetilde{B}]_s = \sigma^2(\hat{S}_s^1)^2 ds.$$

Also erhält man

$$\hat{S}_t^2 = \hat{S}_0^2 + \int_0^t \big(D_1\hat{f}(s, \hat{S}_s^1) + \frac{1}{2}D_{22}\hat{f}(s, \hat{S}_s^1)\sigma^2(\hat{S}_s^1)^2\big)ds + \int_0^t D_2\hat{f}(s, \hat{S}_s^1)d\hat{S}_s^1.$$

Da sowohl $\hat{S}^1$ als auch $\hat{S}^2$ Martingale unter $\mathbb{Q}$ sind, ist

$$\int_0^t \big(D_1\hat{f}(s,\hat{S}^1_s) + \frac{1}{2}D_{22}\hat{f}(s,\hat{S}^1_s)\sigma^2(\hat{S}^1_s)^2\big)ds = \hat{S}^2_t - \hat{S}^2_0 - \int_0^t D_2\hat{f}(s,\hat{S}^1_s)d\hat{S}^1_s \tag{9.4}$$

ein stetiges lokales Martingal bzgl. $\mathbb{Q}$ von beschränkter Variation. Es folgt

$$\int_0^t \big(D_1\hat{f}(s,\hat{S}^1_s) + \frac{1}{2}D_{22}\hat{f}(s,\hat{S}^1_s)\sigma^2(\hat{S}^1_s)^2\big)ds = 0$$

$\mathbb{Q}$-fast sicher und also $\mathbb{P}$-fast sicher, für alle $t \geq 0$. Insbesondere folgt

$$D_1\hat{f}(s,\hat{S}^1_s) + \frac{1}{2}D_{22}\hat{f}(s,\hat{S}^1_s)\sigma^2(\hat{S}^1_s)^2 = 0$$

für λ-fast alle $s \in [0,T]$, und aufgrund der Stetigkeit des Ausdrucks gilt dies sogar für alle $s \in [0,T]$. Für festes s gilt also

$$D_1\hat{f}(s,x) + \frac{1}{2}D_{22}\hat{f}(s,x)\sigma^2 x^2 = 0$$

für $\mathbb{P}^{\hat{S}^1_s}$-fast alle $x > 0$. Da $\hat{S}^1_s$ eine Dichte besitzt, gilt diese Identität wieder zunächst für λ-fast alle $x > 0$, und dann aus Stetigkeitsgründen für alle $x > 0$. Mit der mehrdimensionalen Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned} D_1\hat{f}(s,x) &= -r\exp(-rs)f(s,x\exp(rs)) \\ &\quad + \exp(-rs)\big(D_1 f(s,x\exp(rs)) + \exp(rs)rxD_2 f(s,x\exp(rs))\big) \end{aligned}$$

und

$$D_2\hat{f}(s,x) = D_2 f(s,x\exp(rs)) \quad \text{bzw.} \quad D_{22}\hat{f}(s,x) = \exp(rs)D_{22}f(s,x\exp(rs)).$$

Setzt man $\tilde{x} = \exp(rs)x$, erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= D_1\hat{f}(s,x) + \frac{1}{2}D_{22}\hat{f}(s,x)\sigma^2 x^2 \\ &= \exp(-rs)\big(-rf(s,\hat{x}) + D_1 f(s,\hat{x}) + r\hat{x}D_2 f(s,\hat{x}) + \frac{1}{2}\sigma^2\hat{x}^2 D_{22}f(s,\hat{x})\big). \end{aligned}$$

(iv) Als Konsequenz aus (9.4) ergibt sich

$$\hat{S}^2_t = \hat{S}^2_0 + (D_2\hat{f}(I,\hat{S}^1) \bullet \hat{S}^1)_t,$$

wobei wieder $I(t) = t$ gesetzt wurde. Zu $\varphi^1_t = D_2\hat{f}(t,\hat{S}^1_t)$ und Anfangskapital S^2_0 existiert gemäß Satz 8.5 eine selbstfinanzierende Strategie mit

$$\hat{S}^2 = \hat{S}^2_0 + \varphi^1 \bullet \hat{S}^1 = \hat{V}(\varphi).$$

Nach Definition von S^2 ergibt sich

$$0 \leq V(\varphi) = S^2 \leq c(S^0 + S^1),$$

so dass φ doppelt zulässig und also eine Duplikationsstrategie ist. Mit

$$\varphi^1_t = D_2\hat{f}(t,\hat{S}^1_t) = D_2 f(t,S^1_t)$$

und

$$\varphi^0_t = \hat{V}_t(\varphi) - \varphi^1_t\hat{S}^1_t = \exp(-rt)(f(t,S^1_t) - D_2 f(t,S^1_t)S^1_t)$$

folgt die Aussage. □

Literaturverzeichnis

Brockwell, P. and R. Davis (1991). *Time series: theory and methods.* Springer, New York.

Delbaen, F. and W. Schachermayer (1994). A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Ann. 300*(3), 463–520.

Karatzas, I. and S. Shreve (1991). *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer, New York.

Klenke, A. (2013). *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer, Berlin.

Mörters, P. and Y. Peres (2010). *Brownian motion.* Cambridge University Press, Cambridge.

Protter, P. (2004). *Stochastic integration and differential equations.* Springer, Berlin.