

Obsah

14 Mechanické kmitání	1
14.1 Kinematika kmitavého pohybu	1
14.1.1 Veličiny	1
14.1.2 Poloha tělesa při kmitavém pohybu	1
14.1.3 Rychlost kmitavého pohybu	2
14.1.4 Zrychlení kmitavého pohybu	2
14.1.5 Skládání kmitů	2
14.2 Dynamika kmitavého pohybu	3
14.2.1 Pružina	3
14.2.2 Kyvadlo	4
14.3 Rezonance	5
14.4 Energie kmitání	6
14.4.1 Pružina	6
14.4.2 Kyvadlo	6

14 Mechanické kmitání

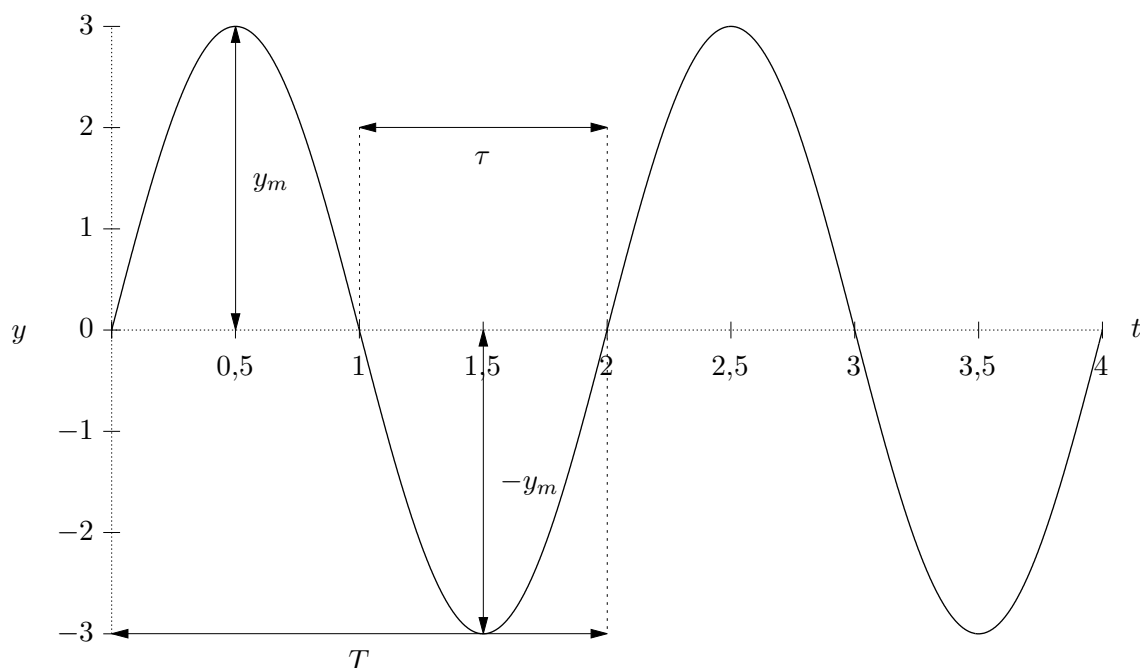
- změna veličiny s opakováním nebo její tendencí
- srdce, ušní bubínek, kyvadlo, rádiové vlny, zvuk...
- **mechanický oscilátor** – volně kmitající zařízení, bez vlivu okolí
 1. kmitání tělesa na pružině – kmitání způsobeno pružností
 2. kyvadlo – kmitání způsobeno tíhovou silou
- rovnovážná poloha – poloha, ve které jsou působící síly v rovnováze; minimální energie oscilátoru
- trajektorie – úsečka, část křivky
 - ve stejných časových intervalech různá dráha – nerovnoměrný pohyb
 - periodické opakování pohybu – rovnoměrný pohyb
- kmit T – část pohybu, kdy se těleso dostane do stejného stavu (polohy, rychlosti, zrychlení...)
- kyv τ – polovina doby kmitu, navrácení do rovnovážné polohy ale s opačnou rychlostí

14.1 Kinematika kmitavého pohybu

- popis kmitání tělesa na pružině

14.1.1 Veličiny

- perioda T , $[T] = \text{s}$
 - čas navrácení do původního stavu
 - délka kmitu
- frekvence f , $[f] = \text{s}^{-1}$
 - počet zopakování periody za jednotku času
 - počet kmitů za jednotku času
 - převrácená hodnota periody
- okamžitá výchylka y , $[y] = \text{m}$
 - poloha mechanického oscilátoru na ose y
- amplituda kmitu (maximální výchylka) y_m – největší hodnota y
- fáze kmitavého pohybu φ , $[\varphi] = \text{rad}$
 - úhel, korelace s úhlovou dráhou při pohybu po kružnici
 - určuje ve které fázi pohybu se právě nachází
- úhlová frekvence ω , $[\omega] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
 - rychlost kmitání



Obr. 14.1: Graf výchylky v závislosti na čase

14.1.2 Poloha tělesa při kmitavém pohybu

- y -ovou složku pohybu možnost popsat pomocí funkce sinus

$$y = y_m \sin \varphi$$

- sinus – hodnoty mezi 0 a 1 \Rightarrow nutno vynásobit y_m pro dosažení celého rozsahu hodnot
- φ – fáze kmitu vyjádřena jako úhel v kruhu

- rychlost kmitání ω – úhel za čas ($\omega = \varphi/t$) $\Rightarrow \varphi = \omega t$

$$y = y_m \sin(\omega t)$$

- počáteční fázový posun φ_0

$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

- 1 kmit – úhel $\varphi = 2\pi$ a čas T

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad y = y_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = y_m \sin(2\pi f t)$$

14.1.3 Rychlost kmitavého pohybu

- maximální při průchodu rovnovážnou polohou ($y = 0$), minimální v amplitudě ($y = \pm y_m$)
- odvození

$$v = \dot{y}$$

$$v = \frac{d}{dt} y_m \sin(\omega t)$$

$$v = \omega y_m \cos(\omega t)$$

- alternativní odvození z pohybu po kružnici

- maximální rychlost $v_m = \omega y_m$

14.1.4 Zrychlení kmitavého pohybu

- směr vždy k rovnovážné poloze – opačné znaménko než okamžitá poloha y
- shodný se směrem působící síly
- maximální hodnota v maximální výchylce
- odvození

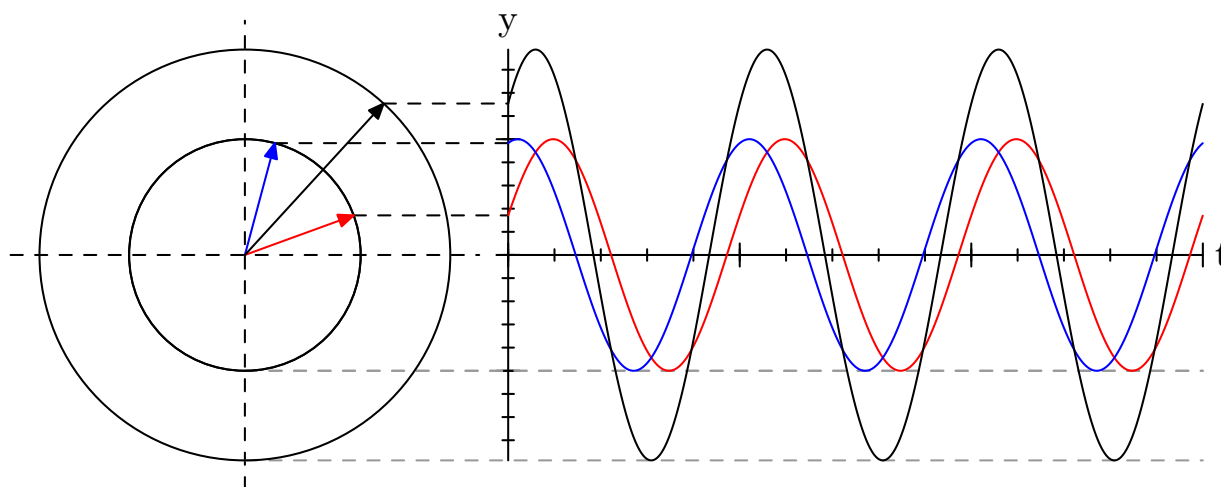
$$a = \dot{v}$$

$$a = \frac{d}{dt} \omega y_m \cos(\omega t)$$

$$a = -\omega^2 y_m \sin(\omega t) = -\omega^2 y$$

14.1.5 Skládání kmitů

- možno skládat několik kmitů do jednoho
- obecný případ ($\omega_1 \neq \omega_2$)
 - nejedná se o harmonické vlnění
 - výsledné kmitání získáno jako součet jednotlivých kmitání $y = y_1 + y_2$
- speciální případ – kmitání o stejné rychlost ($\omega_1 = \omega_2$)
 - výsledný fázor vektorových součtem všech fázorů
 - v souladu s principem superpozice (výslednice sil je rovna vektorovému součtu všech působících sil)
 - obecný případ – amplituda a fáze závisí na amplitudách, fázovém rozdílu a fázích jednotlivých kmitání
 - $\Delta\varphi = 0$ – vlny přesně na sobě – $y_m = y_{m1} + y_{m2}$
 - $\Delta\varphi = 180^\circ$ – vlny přesně od sebe – $y_m = y_{m1} - y_{m2}$



Obr. 14.2: Skládání vln stejné úhlové frekvence

14.2 Dynamika kmitavého pohybu

- příčinou kmitavého pohybu sílu
 - kyvadlo – tíhová síla
 - pružina – síla pružnosti
- z II. Newtonova zákona – pohybová rovnice harmonického oscilátoru

$$F = ma = -m\omega^2 y = -m\omega^2 y_m \sin(\omega t)$$

14.2.1 Pružina

- síla pružnosti

$$F_p = k\Delta l$$

– k – tuhost pružiny

- rovnovážná poloha – vyrovnaní tíhové síly a síly pružnosti

$$F_G = F_p$$

$$mg = k\Delta l$$

- pohyb oscilátoru – výsledná síla rovna součtu tíhové a pružné síly (kladný směr vzhůru)

$$F = F_G - F_p$$

$$F = -mg + k(\Delta l - y)$$

$$F = -mg + k\Delta l - ky$$

$$F = -ky$$

– směr síly opačný směru protažení – směr vždy k rovnovážné poloze

- perioda a frekvence – z pohybové rovnice harmonického oscilátoru

$$-ky = -m\omega^2 y$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

14.2.2 Kyvadlo

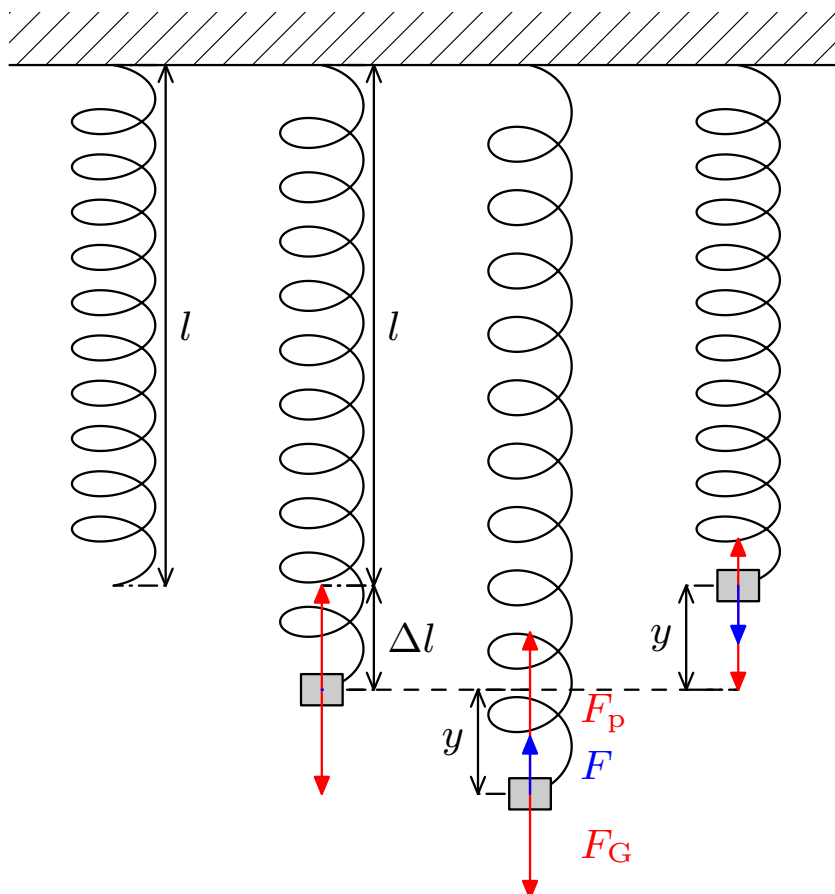
- několik typů kyvadel
 - matematické kyvadlo – hmotných bod na dlouhém závěsu, malá výchylka ($\alpha \approx \sin \alpha$)
 - fyzické kyvadlo – nutno započítat moment setrvačnosti, nelze aproximovat úhel
 - kónické kyvadlo – při pohybu opisuje tvar kužele, trajektorií kružnice
 - torzní kyvadlo – kmitání deformací kroucením vlákna nebo tyče
 - \vdots
- dále aproximace matematického kyvadla – horizontální výchylka rovna délce oblouku

$$\sin \alpha = \frac{y'}{l} \approx \frac{y}{l}$$

- zrychlení způsobeno složkou tíhové síly kolmé k závěsu

$$F = -F_G \sin \alpha = -mg \frac{y}{l}$$

– záporný směr – síla orientována opačným směrem než vektor polohy y (či hodnota sinu)



Obr. 14.3: Zavěšení závaží na pružinu

- perioda a frekvence – z pohybové rovnice harmonického oscilátoru

$$-mg \frac{y}{l} = -m\omega^2 y$$

$$\frac{g}{l} = \omega^2$$

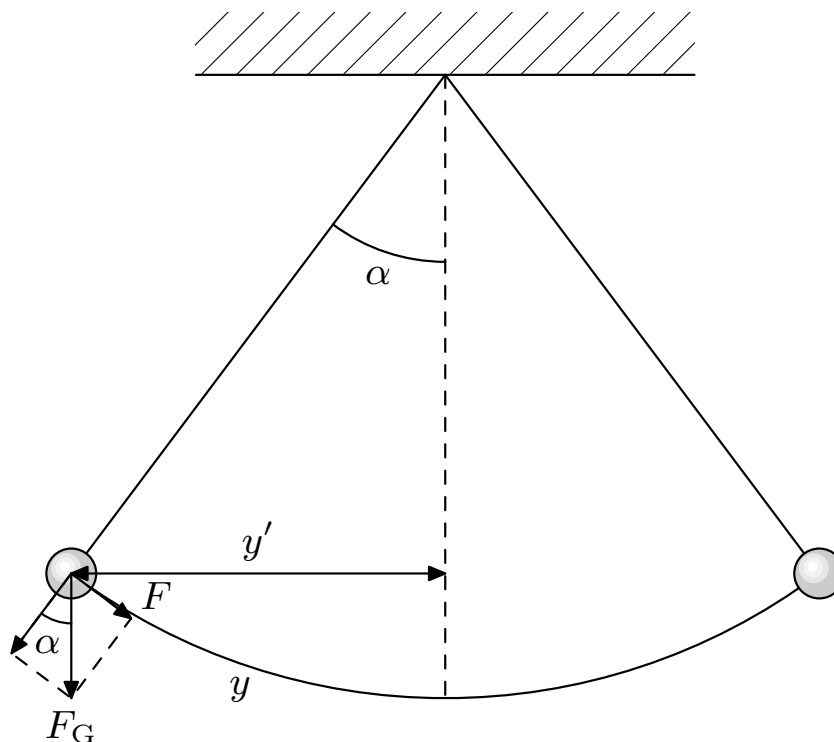
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

14.3 Rezonance

- systému kmitat na větší amplitudě – více při určitých frekvencích než při ostatních frekvencích – rezonanční frekvence
- i malé síly mohou způsobovat velké amplitudy kmitů – uchovávání energie kmitání
- systém schopen jednoduše převádět energii mezi jejími podobami
- ztráty mezi cykly – útlum
 - malý útlum – rezonanční frekvence blíž k vlastní frekvenci
- několik typů – mechanická, akustická, elektrická, elektromagnetická...
- příklady
 - akustická rezonance hudebních nástrojů
 - rezonance skla při tření prstu po povrchu
 - rezonance antén (rádio, WiFi...) – selektivní příjem rádiových frekvencí



Obr. 14.4: Působení sil na kyvadlo

14.4 Energie kmitání

- periodická přeměna potenciální a kinetické energie
- celková energie kmitání vždy zachována
- bod v maximální výchylce – maximální potenciální energie
- průchod rovnovážnou polohou – maximální kinetická energie

14.4.1 Pružina

- nulová hladina v rovnovážné poloze, těleso v klidu – $E = 0$
- potenciální energie – energie kmitání způsobené vychýlením z rovnovážné polohy

$$E_p = \frac{1}{2}ky^2$$

- kinetická energie – energie pohybu závaží

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

- celková energie rovna maximální potenciální energii (kdy $E_k = 0$) a maximální kinetické energii ($E_p = 0$)

$$E_c = \frac{1}{2}ky_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$$

14.4.2 Kyvadlo

- potenciální energie zastoupena tíhovou potenciální energií

$$E_p = mgh = mg(l - l \cos \alpha) = mgl(1 - \cos \alpha)$$

– $h = 0$ v rovnovážné poloze

- ostatní analogicky shodné s energií pružiny