Obsah

6 Gravitační pole a pohyb těles v tomto poli

6.1 Gravitační pole

- vzájemné přitažlivé silové působení těles
- zdrojem pole všechna tělesa
- gravitace – nejslabší sila

6.1.1 Gravitační síla

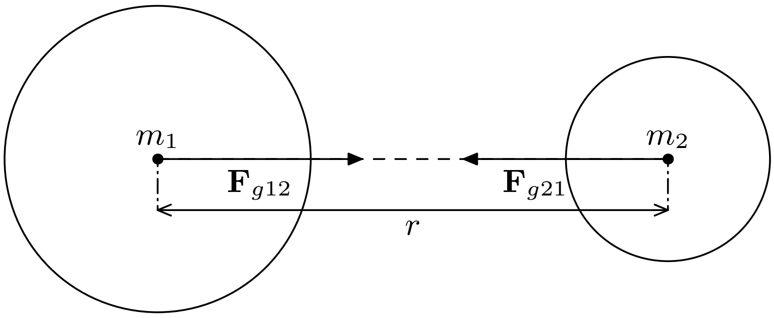
- značka $\mathbf{F}_\mathrm{g}$, $[\mathbf{F}_g] = \mathrm{N}$
- přitahování každých dvou těles na sebe (např. kámen a Země)
- leží na spojnice těžišť
- poprvé popsána Isaacem Newtonem (17. stol.) $\rightarrow$ Newtonův gravitační zákon

$$F_\mathrm{g} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$
$$\mathbf{F}_\mathrm{g} = G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^2}\hat{\mathbf{r}}$$

  - $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$ – gravitační konstanta (staré značení κ)
  - $m_1, m_2/m, M$ – hmotnost prvního a druhého tělesa
  - $\mathbf{r}$ – průvodič vzdálenosti těles; $\hat{\mathbf{r}}$ – normovaný vektor
- stejná síla působí na obě tělesa, ale v opačných směrech

6.1.2 Intenzita gravitačního pole

- značka $\mathbf{K}$, $[\mathbf{K}] = \mathrm{N{\cdot}kg^{-1}} = \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$
- veličina popisující gravitační pole



- podíl gravitační síly, která v daném místě působí na hmotný bod, a hmotnosti daného bodu

$$K = \frac{F_\mathrm{g}}{m} = G\frac{M}{r^2}$$
$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F}_\mathrm{g}}{m} = G\frac{M}{|\mathbf{r}|^2}\hat{\mathbf{r}}$$

- gravitační síla normovaná na jednotku hmotnosti
- představuje zrychlení působící na všechna tělesa
- shodný směr s vektorem gravitační síly

6.1.3 Gravitační zrychlení

- značka $\mathbf{a}_\mathrm{g}$, $[\mathbf{a}_g] = \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$
- zrychlení udávané gravitačním polem směrem ke středu pole
- rovno intenzitě gravitačního pole

$$\mathbf{a}_\mathrm{g} = \mathbf{K}$$

- nezávislé na hmotnosti tělesa

6.1.4 Tíhová síla a zrychlení

- tíhová síla $\mathbf{F}_\mathrm{G}$ – výslednice sil působících na těleso na povrchu Země
  - započítána gravitační síla, ale i odstředivá či gravitační síla ostatních vesmírných těles
  - působiště v těžišti
- tíha $\mathbf{G}$
  - působení tělesa v tíhovém poli Země na jiná tělesa
  - projevení jako tlaková síla $\rightarrow$ působiště v bodě dotyku
- tíhové zrychlení $\mathbf{g}$
  - způsobeno tíhovou sílou
  - různé pro pozice na Zemi (hlavní závislost na zeměpisné šířce)
  - experimentálně měřeno

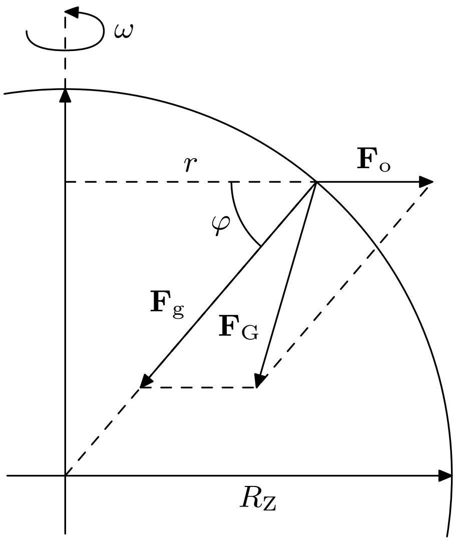
6.2 Typy dle tvaru

6.2.1 Radiální

- gravitační síla/intenzita mířící do jednoho středu
- středově symetrické do všech směrů
- možnost spojit místa se stejnou intenzitou pomocí kružnic
- intenzita klesá s druhou mocninou vzdálenosti od středu
- gravitační pole Země

$$K = G\frac{M_\mathrm{Z}}{(R_\mathrm{Z}+h)^2}$$

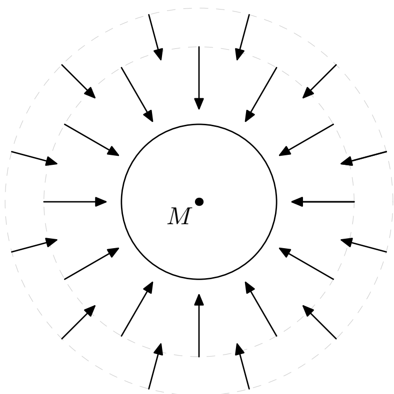
  - M_Z – hmotnost Země
  - R_Z – poloměr Země



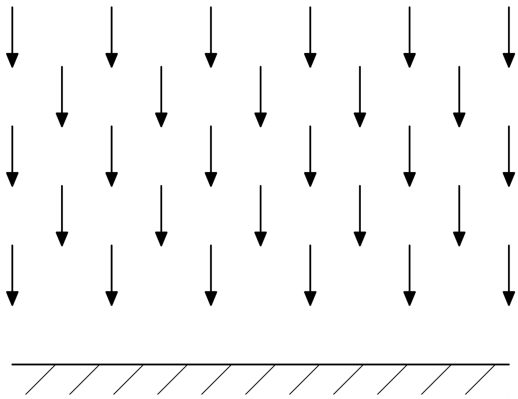
Obr. 6.1: Skládání gravitační a odstředivé síly do tíhové na povrchu Země

6.2.2 Homogenní

- trajektorie vzhledem k rozměrům Země velice malá a blízko → pole lze považovat za homogenní
- zjednodušení radiálního pole
- na všech místech stejný gravitační intenzita $\mathbf{K}$



(a) Radiální pole



(b) Homogenní pole

Obr. 6.2: Vektorově znázorněno gravitační pole

6.3 Pohyb v homogenním gravitačním poli

- působení konstantní tíhové síly na těleso → změna trajektorie tíhovým zrychlením

6.3.1 Volný pád

- nejjednodušší pohyb v tíhovém poli Země
- nulová počáteční rychlost i dráha
- zrychlování tělesa směrem k zemi zrychlením $\mathbf{g}$

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

6.3.2 Svislý vrh vzhůru

- vržení tělesa s počáteční rychlostí v_0 svisle vzhůru
- působení **g** proti směru pohybu
- trajektorií přímka
- okamžitá výška y:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

- maximální výška h – těleso zpomalí na nulu (zrychlení dorovná počáteční rychlost)

$$v_0 = g t_h \quad \Rightarrow \quad t_h = \frac{v_0}{g} h = v_0 t_h - \frac{1}{2} g t_h^2 = \frac{v_0}{2g}$$

- stejné zrychlení nahoru i dolů ⇒ stejná dráha a stejná počáteční a konečná rychlost

6.3.3 Svislý vrh dolů

- vržení tělesa s počáteční rychlostí v_0 svisle dolů z počáteční výšky h
- působení **g** ve směru pohybu
- trajektorií přímka
- okamžitá výška y:

$$y = h - \left(v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \right)$$

6.3.4 Vodorovný vrh

- vržení tělesa s počáteční rychlostí v_0 ve vodorovném směru z počáteční výšky h
- výsledek složení volného pádu ve svislém směru a rovnoměrného přímočarého pohybu ve vodorovném směru
- trajektorií parabola
- okamžité souřadnice bodu

$$x = v_0 t$$
$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

- doba pádu závislá na dosažení země na y-ové ose

$$y = 0$$
$$h = \frac{1}{2} g t_{\mathrm{d}}^2$$
$$t_{\mathrm{d}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

- maximální vzdálenost doletu d

$$x = v_0 t$$
$$d = v_0 t_{\mathrm{d}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

6.3.5 Šikmý vrh

- vržení tělesa s počáteční rychlostí v_0 pod úhlem α
- skládání přímočarého pohybu a svislého vrhu
- nenulová vodorovná v_{x_0} a svislá v_{y_0} rychlost

$$v_{x_0} = v_0 \cos \alpha$$
$$v_{y_0} = v_0 \sin \alpha$$

- okamžitá rychlost v_x neměnná a v_y ovlivněna zrychlením g

$$
\begin{aligned}
v_x &= v_{x_0} = v_0 \cos\alpha \\
v_y &= v_{y_0} - gt = v_0 \sin\alpha - gt
\end{aligned}
$$

- okamžité souřadnice bodu – parametrické vyjádření trajektorie

$$
\begin{aligned}
x &= v_x t = v_0 t \cos\alpha \\
y &= v_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2
\end{aligned}
$$

- rovnice trajektorie

$$
x = v_0 t \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}
$$

$$
y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2
$$

$$
y = v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha} \right)^2
$$

$$
y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}
$$

- doba letu – v_y dosáhne hodnoty[1] v_{y_0}, ale opačného směru

$$
\begin{aligned}
v_y &= -v_{y_0} \\
v_0 \sin\alpha - g t_{\mathrm{d}} &= -v_0 \sin\alpha \\
g t_{\mathrm{d}} &= 2 v_0 \sin\alpha \\
t_{\mathrm{d}} &= \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}
\end{aligned}
$$

- maximální délka doletu d

$$
\begin{aligned}
d &= v_{x_0} t_{\mathrm{d}} = v_0 \cos\alpha \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} \\
d &= \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g}
\end{aligned}
$$

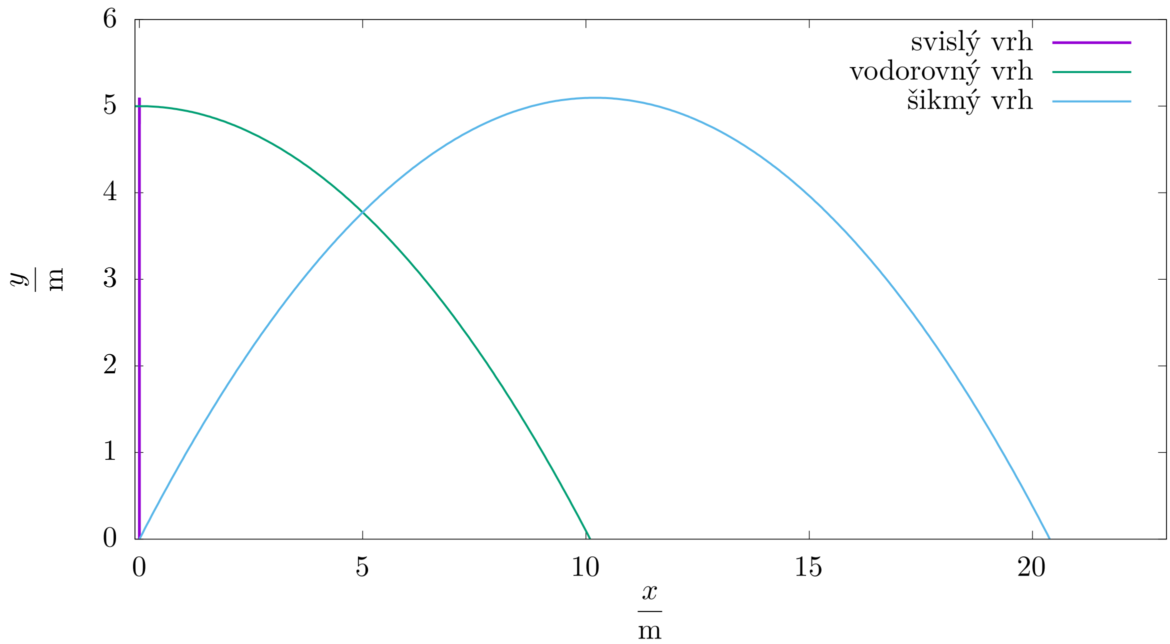
- maximální výška

$$
\begin{aligned}
v_y = 0 &= v_0 \sin\alpha - g t_{\max} \\
t_{\max} &= \frac{v_0 t \sin\alpha}{g} \\
h_{\max} &= v_0 t_{\max} \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_{\max}^2 \\
h_{\max} &= \frac{v_0^2 \sin\alpha}{2g}
\end{aligned}
$$

6.4 Pohyb v radiálním gravitačním poli

- nutno uvažovat proměnnou intenzitu $\mathbf{K}$ a gravitační zrychlení a_{g}

[1] Ze zákonu zachování energie ji při dosažení stejné výškové hladiny, tedy $y = 0$, musí mít stejnou.



Obr. 6.3: Trajektorie vrhů

6.4.1 Pohyb po kružnici

- při vektoru **v** kolmém na **K** – pohyb tělesa po kružnici
- dostředivá síla F_d zastoupena gravitační sílou F_g

$$F_\mathrm{d} = F_\mathrm{g}$$
$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$$
$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

– $r = R_\mathrm{Z} + h$ – poloměr oběhu (poloměr Země + výška letu)

6.4.2 První kosmická rychlost

- *kruhová rychlost*
- minimální rychlost pro oběh tělesa okolo Země
- oběh po kružnici v gravitačním poli Země o poloměru Země

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{GM}{R_\mathrm{Z}}} = \sqrt{\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{6{,}371 \cdot 10^6\,\mathrm{kg}}}$$
$$v_\mathrm{k} \doteq 7{,}907 \cdot 10^3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 7{,}9\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$$

6.4.3 Druhá kosmická rychlost

- *úniková rychlost* nebo *parabolická rychlost*
- rychlost potřebná pro únik z gravitačního pole Země
- pohyb po parabolické trajektorii
- velikost

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = v_\mathrm{k}\sqrt{2} = 11{,}186\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$$

- odvození ze zákona zachování energie $E_1 = E_2$

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{p}^2 + \left(-G\frac{mM}{r}\right) = 0$$

$$v_\mathrm{p}^2 - 2G\frac{M}{r} = 0$$

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

  - při úniku má těleso kinetickou e. E_{p_1} a gravitační potenciální[2] e. E_{k_1}
  - v nekonečnu má těleso kinetickou i potenciální energii nulovou

6.4.4 Třetí kosmická rychlost

- *hyperbolická rychlost*
- rychlost potřebná pro opuštění sluneční soustavy po hyberbolické trajektorii
- stejný vzorec jako pro druhou kosmickou rychlost s hodnotami pro hmotnost Slunce a vzdálenost Země–Slunce

$$v_3 = \sqrt{\frac{2GM_\mathrm{S}}{r_\mathrm{ZS}}} = 42{,}1\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$$

- při využití rychlosti Země potřeba zrychlit pouze o $v_3' = v_3 - v_\mathrm{Z} = 42{,}1 - 29{,}7$

[2] Ta je rozdílná od klasické potencial. e. v tíhovém poli. V nekonečnu má hodnotu 0.