

Obsah

6 Gravitační pole a pohyb těles v tomto poli	1
6.1 Gravitační pole	1
6.1.1 Gravitační síla	1
6.1.2 Intenzita gravitačního pole	1
6.1.3 Gravitační zrychlení	2
6.1.4 Tíhová síla a zrychlení	2
6.2 Typy dle tvaru	2
6.2.1 Radiální	2
6.2.2 Homogenní	3
6.3 Pohyb v homogenním gravitačním poli	3
6.3.1 Volný pád	3
6.3.2 Svislý vrh vzhůru	4
6.3.3 Svislý vrh dolů	4
6.3.4 Vodorovný vrh	4
6.3.5 Šikmý vrh	4
6.4 Pohyb v radiálním gravitačním poli	5
6.4.1 Pohyb po kružnici	6
6.4.2 První kosmická rychlost	6
6.4.3 Druhá kosmická rychlost	6
6.4.4 Třetí kosmická rychlost	7

6 Gravitační pole a pohyb těles v tomto poli

6.1 Gravitační pole

- vzájemné přitažlivé silové působení těles
- zdrojem pole všechna tělesa
- gravitace – nejslabší síla

6.1.1 Gravitační síla

- značka \mathbf{F}_g , $[\mathbf{F}_g] = \text{N}$
- přitahování každých dvou těles na sebe (např. kámen a Země)
- leží na spojnici těžišť
- poprvé popsána Isaacem Newtonem (17. stol.) → Newtonův gravitační zákon

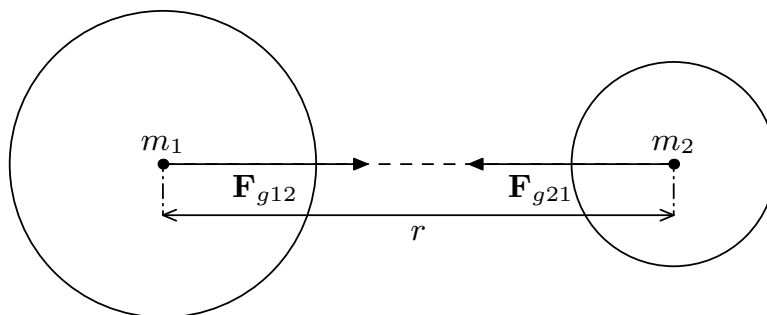
$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\mathbf{F}_g = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^2} \hat{\mathbf{r}}$$

- $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ – gravitační konstanta (staré značení κ)
- $m_1, m_2/m, M$ – hmotnost prvního a druhého tělesa
- \mathbf{r} – průvodič vzdálenosti těles; $\hat{\mathbf{r}}$ – normovaný vektor
- stejná síla působí na obě tělesa, ale v opačných směrech

6.1.2 Intenzita gravitačního pole

- značka \mathbf{K} , $[\mathbf{K}] = \text{N} \cdot \text{kg}^{-1} = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
- veličina popisující gravitační pole



- podíl gravitační síly, která v daném místě působí na hmotný bod, a hmotnosti daného bodu

$$K = \frac{F_g}{m} = G \frac{M}{r^2}$$

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = G \frac{M}{|\mathbf{r}|^2} \hat{\mathbf{r}}$$

- gravitační síla normovaná na jednotku hmotnosti
- představuje zrychlení působící na všechna tělesa
- shodný směr s vektorem gravitační síly

6.1.3 Gravitační zrychlení

- značka \mathbf{a}_g , $[\mathbf{a}_g] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
- zrychlení udávané gravitačním polem směrem ke středu pole
- rovno intenzitě gravitačního pole

$$\mathbf{a}_g = \mathbf{K}$$

- nezávislé na hmotnosti tělesa

6.1.4 Tíhová síla a zrychlení

- tíhová síla \mathbf{F}_G – výslednice sil působících na těleso na povrchu Země
 - započítána gravitační síla, ale i odstředivá či gravitační síla ostatních vesmírných těles
 - působíště v těžišti
- tíha \mathbf{G}
 - působení tělesa v tíhovém poli Země na jiná tělesa
 - projevení jako tlaková síla → působíště v bodě dotyku
- tíhové zrychlení \mathbf{g}
 - způsobeno tíhovou silou
 - různé pro pozice na Zemi (hlavní závislost na zeměpisné šířce)
 - experimentálně měřeno

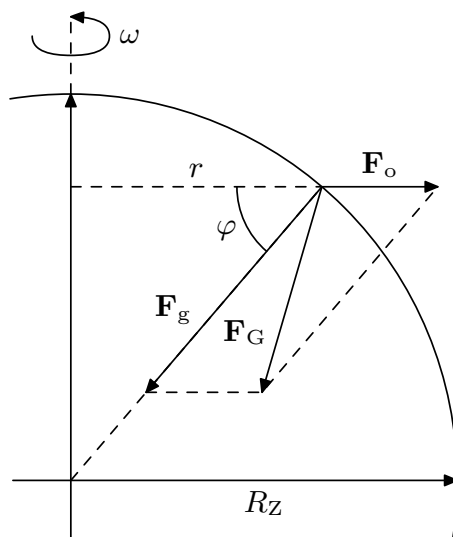
6.2 Typy dle tvaru

6.2.1 Radiální

- gravitační síla/intenzita míří do jednoho středu
- středově symetrické do všech směrů
- možnost spojit místa se stejnou intenzitou pomocí kružnic
- intenzita klesá s druhou mocninou vzdálenosti od středu
- gravitační pole Země

$$K = G \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2}$$

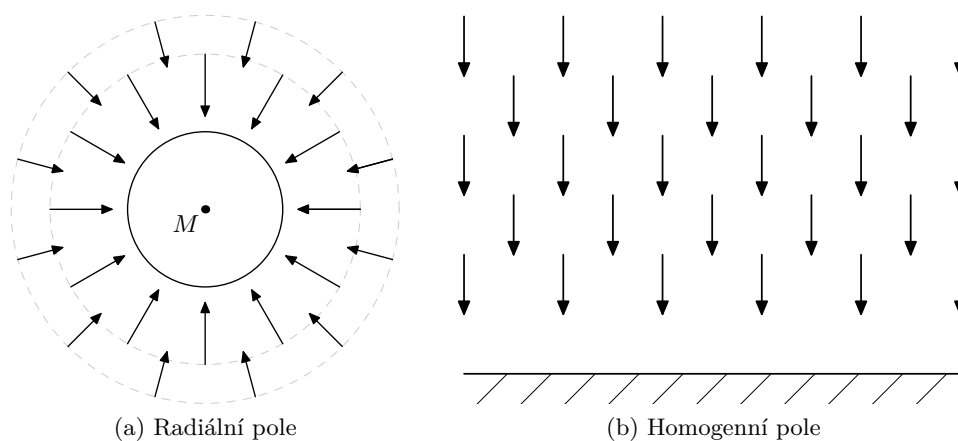
- M_Z – hmotnost Země
- R_Z – poloměr Země



Obr. 6.1: Skládání gravitační a odstředivé síly do tíhové na povrchu Země

6.2.2 Homogenní

- trajektorie vzhledem k rozměrům Země velice malá a blízko → pole lze považovat za homogenní
- zjednodušení radiálního pole
- na všech místech stejný gravitační intenzita \mathbf{K}



Obr. 6.2: Vektorově znázorněno gravitační pole

6.3 Pohyb v homogenním gravitačním poli

- působení konstantní tíhové síly na těleso → změna trajektorie tíhovým zrychlením

6.3.1 Volný pád

- nejjednodušší pohyb v tíhovém poli Země
- nulová počáteční rychlost i dráha
- zrychlování tělesa směrem k zemi zrychlením g

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

6.3.2 Svislý vrh vzhůru

- vržení tělesa s počáteční rychlostí v_0 svisle vzhůru
- působení \mathbf{g} proti směru pohybu
- trajektorii přímka
- okamžitá výška y :

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

- maximální výška h – těleso zpomalí na nulu (zrychlení dorovná počáteční rychlost)

$$v_0 = g t_h \Rightarrow t_h = \frac{v_0}{g}$$

$$h = v_0 t_h - \frac{1}{2} g t_h^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

- stejné zrychlení nahoru i dolů \Rightarrow stejná dráha a stejná počáteční a konečná rychlost

6.3.3 Svislý vrh dolů

- vržení tělesa s počáteční rychlostí v_0 svisle dolů z počáteční výšky h
- působení \mathbf{g} ve směru pohybu
- trajektorii přímka
- okamžitá výška y :

$$y = h - \left(v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \right)$$

6.3.4 Vodorovný vrh

- vržení tělesa s počáteční rychlostí v_0 ve vodorovném směru z počáteční výšky h
- výsledek složení volného pádu ve svislém směru a rovnoměrného přímočarého pohybu ve vodorovném směru
- trajektorii parabola
- okamžité souřadnice bodu

$$x = v_0 t$$

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

- doba pádu závislá na dosažení země na y -ové ose

$$y = 0$$

$$h = \frac{1}{2} g t_d^2$$

$$t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

- maximální vzdálenost doletu d

$$x = v_0 t$$

$$d = v_0 t_d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

6.3.5 Šikmý vrh

- vržení tělesa s počáteční rychlostí v_0 pod úhlem α
- skládání přímočarého pohybu a svislého vrhu

- nenulová vodorovná v_{x_0} a svislá v_{y_0} rychlost

$$v_{x_0} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_{y_0} = v_0 \sin \alpha$$

- okamžitá rychlost v_x neměnná a v_y ovlivněna zrychlením g

$$v_x = v_{x_0} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y = v_{y_0} - gt = v_0 \sin \alpha - gt$$

- okamžité souřadnice bodu – parametrické vyjádření trajektorie

$$x = v_x t = v_0 t \cos \alpha$$

$$y = v_{y_0} t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

- rovnice trajektorie

$$x = v_0 t \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

- doba letu – v_y dosáhne hodnoty¹ v_{y_0} , ale opačného směru

$$v_y = -v_{y_0}$$

$$v_0 \sin \alpha - gt_d = -v_0 \sin \alpha$$

$$gt_d = 2v_0 \sin \alpha$$

$$t_d = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

- maximální délka doletu d

$$d = v_{x_0} t_d = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$d = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g}$$

- maximální výška

$$v_y = 0 = v_0 \sin \alpha - gt_{\max}$$

$$t_{\max} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

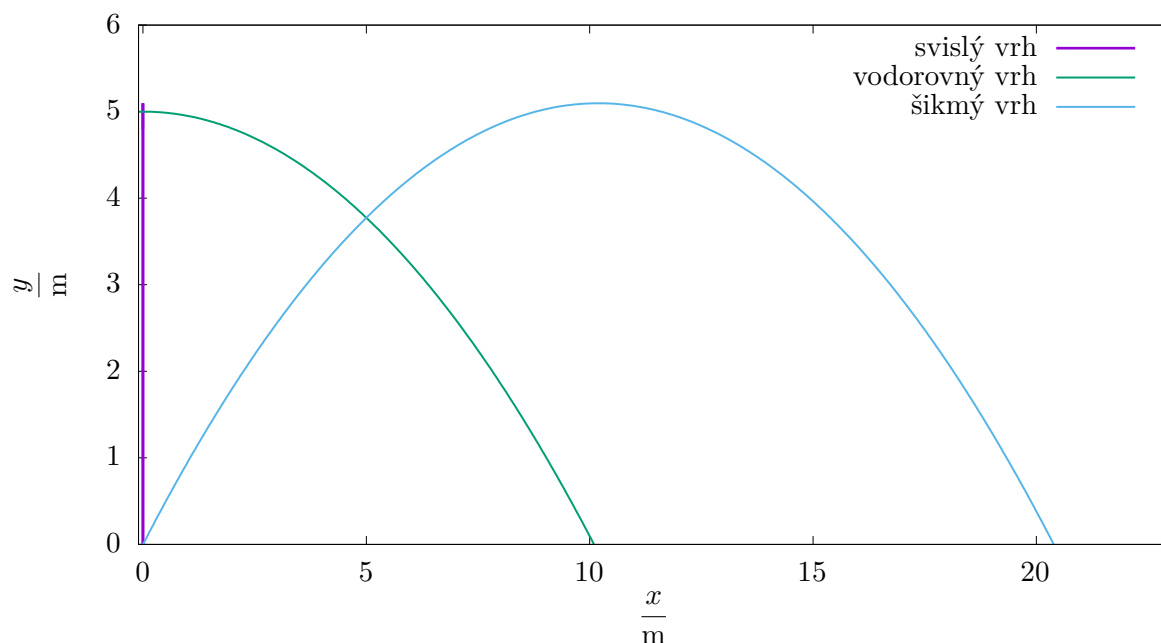
$$h_{\max} = v_0 t_{\max} \sin \alpha - \frac{1}{2}gt_{\max}^2$$

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

6.4 Pohyb v radiálním gravitačním poli

- nutno uvažovat proměnnou intenzitu \mathbf{K} a gravitační zrychlení a_g

¹Ze zákona zachování energie ji při dosažení stejné výškové hladiny, tedy $y = 0$, musí mít stejnou.



Obr. 6.3: Trajektorie vrhů

6.4.1 Pohyb po kružnici

- při vektoru \mathbf{v} kolmém na \mathbf{K} – pohyb tělesa po kružnici
- dostředivá síla F_d zastoupena gravitační silou F_g

$$F_d = F_g$$

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

– $r = R_Z + h$ – poloměr oběhu (poloměr Země + výška letu)

6.4.2 První kosmická rychlost

- *kruhová rychlost*
- minimální rychlost pro oběh tělesa okolo Země
- oběh po kružnici v gravitačním poli Země o poloměru Země

$$v_k = \sqrt{\frac{GM}{R_Z}} = \sqrt{\frac{6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,371 \cdot 10^6 \text{ kg}}}$$

$$v_k \doteq 7,907 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

6.4.3 Druhá kosmická rychlost

- *úniková rychlost* nebo *parabolická rychlost*
- rychlost potřebná pro únik z gravitačního pole Země
- pohyb po parabolické trajektorii
- velikost

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = v_k \sqrt{2} = 11,186 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

- odvození ze zákona zachování energie $E_1 = E_2$

$$\frac{1}{2}mv_p^2 + \left(-G\frac{mM}{r}\right) = 0$$

$$v_p^2 - 2G\frac{M}{r} = 0$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

- při úniku má těleso kinetickou e. E_{p_1} a gravitační potenciální² e. E_{k_1}
- v nekonečnu má těleso kinetickou i potenciální energii nulovou

6.4.4 Třetí kosmická rychlost

- *hyperbolická rychlost*
- rychlost potřebná pro opuštění sluneční soustavy po hyperbolické trajektorii
- stejný vzorec jako pro druhou kosmickou rychlost s hodnotami pro hmotnost Slunce a vzdálenost Země-Slunce

$$v_3 = \sqrt{\frac{2GM_S}{r_{ZS}}} = 42,1 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$$

- při využití rychlosti Země potřeba zrychlit pouze o $v'_3 = v_3 - v_Z = 42,1 - 29,7$

²Ta je rozdílná od klasické potencial. e. v tíhovém poli. V nekonečnu má hodnotu 0.