命题逻辑作业

南京邮电大学 计算机学院
朱曼
mzhu@njupt.edu.cn

1-1、 1-2

- (3)

  a) $(\neg P \wedge R) \rightarrow Q$

  b) $Q \rightarrow R$

  c) $\neg P$

  d) $P \rightarrow \neg Q$

- 表1-5.2后四条

  ⑪ $(P \to Q) \land (Q \to R) \Rightarrow P \to R$

  假定$(P \to Q) \land (Q \to R)$为$T$，即$P \to Q$和$Q \to R$都为$T$。若$P$为$T$，则$Q$、$R$都为$T$，因此$P \to R$必为$T$；若$P$为$F$，则无论$R$真值如何，$P \to R$都为真，因此当$(P \to Q) \land (Q \to R)$为$T$时，$P \to R$必为$T$。得证。

  ⑫ $(P \lor Q) \land (P \to R) \land (Q \to R) \Rightarrow R$

  假定$(P \lor Q) \land (P \to R) \land (Q \to R)$为$T$，即$P \lor Q$、$P \to R$、$Q \to R$都为$T$。由$P \lor Q$为真得到$P$和$Q$两者至少有一个为真，又由于$P \to R$、$Q \to R$都为$T$，则$R$必为真。因此当$(P \lor Q) \land (P \to R) \land (Q \to R)$为$T$时，$R$必为$T$。得证。

⑬$(P \to Q) \wedge (R \to S) \Rightarrow (P \wedge R) \to (Q \wedge S)$

假设$(P \wedge R) \to (Q \wedge S)$为$F$，即当$(P \wedge R)$为$T$时，$(Q \wedge S)$为假，即$P$和$R$都为$T$时，$Q$和$S$至少有一个为$F$，则$(P \to Q)$和$R \to S$至少有一个为$F$，则$(P \to Q) \wedge (R \to S)$为$F$，即当$(P \wedge R) \to (Q \wedge S)$为$F$时，$(P \to Q) \wedge (R \to S)$为$F$。得证。

⑭$(P \rightleftarrows Q) \wedge (Q \rightleftarrows R) \Rightarrow (P \rightleftarrows R)$

假设$(P \rightleftarrows Q) \wedge (Q \rightleftarrows R)$为$T$，由于$(P \rightleftarrows Q) \wedge (Q \rightleftarrows R) \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to R) \wedge (R \to Q) \wedge (Q \to P)$，则$(P \to Q) \wedge (Q \to R)$为真，$(R \to Q) \wedge (Q \to P)$为真。由于$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$，则$(P \to R)$为真，同理$R \to P$为$T$，则$P \rightleftarrows R$为$T$。得证。

a) 若B是重言式，则$A \Rightarrow B$，且A是重言式。
命题为F。因为A为真假未知，由于B永真，则对任意A，$A \rightarrow B$永真，但A不一定永真。

b) 若 $A \Rightarrow B \land C$，则$A \Rightarrow B$，且$A \Rightarrow C$。
命题为T。由于$A \rightarrow B \land C$为永真式，则当A为T时，$B \land C$必为T，即B和C都为T，则$A \rightarrow B$，$A \rightarrow C$都为永真式，即$A \Rightarrow B$，且$A \Rightarrow C$。

c) 若$A \lor C \Rightarrow B$，则$A \Rightarrow B$，且$C \Rightarrow B$。
命题为T。由$A \lor C \rightarrow B$为永真式，可得当B为F时，A和C必须都为F，则$A \rightarrow B$、$C \rightarrow B$都是永真式。

1-7

- （4）

c) $P \vee \left(\neg P \rightarrow (Q \vee (\neg Q \rightarrow R))\right)$

$P \vee \left(\neg P \rightarrow (Q \vee (\neg Q \rightarrow R))\right)$

$\Leftrightarrow P \vee (P \vee (Q \vee (Q \vee R)) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$ 主合取范式

$\Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge (R \vee \neg R) \vee \left((P \vee \neg P) \wedge Q \wedge (R \vee \neg R)\right)$

$\vee ((P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

$\vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$

$\vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$ 主析取范式

d) $(P \to (Q \land R)) \land (\neg P \to (\neg Q \land \neg R))$

$$\Leftrightarrow (\neg P \lor (Q \land R)) \land (P \lor (\neg Q \land \neg R))$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R) \land (P \lor \neg Q) \land (P \lor \neg R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \lor Q \lor (R \land \neg R)) \land (\neg P \lor (Q \land \neg Q) \lor R)$$

$$\land (P \lor \neg Q \lor (R \land \neg R)) \land (P \lor (Q \land \neg Q) \lor \neg R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \lor Q \lor R) \land (\neg P \lor Q \lor \neg R) \land (\neg P \lor \neg Q \lor R)$$

$$\land (P \lor \neg Q \lor R) \land (P \lor \neg Q \lor \neg R) \land (P \lor Q \lor \neg R)$$

主合取范式

$$\Leftrightarrow \prod_{\{1,2,3,4,5,6\}} \Leftrightarrow \sum_{\{0,7\}} \Leftrightarrow (P \land Q \land R) \lor (\neg P \land \neg Q \land \neg R)$$

主析取范式

e) $P \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow P))$

$$\Leftrightarrow \left(\neg P \vee \left(P \wedge (\neg Q \vee P)\right)\right) \Leftrightarrow (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee P)$$

$$\Leftrightarrow T$$

主合取范式

$$\Leftrightarrow \sum_{\{0,1,2,3\}} \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

主析取范式

1-8

- （4） $R \to \neg Q, R \vee S, S \to \neg Q, P \to Q \Rightarrow \neg P$

(1)	$P \to Q$	P
(2)	P	P（附加前提）
(3)	Q	T(1)(2)I11
(4)	$R \to \neg Q$	P
(5)	$Q \to \neg R$	T(4)E18
(6)	$\neg R$	T(3)(5)I11
(7)	$S \to \neg Q$	P
(8)	$Q \to \neg S$	T(7)E18
(9)	$\neg S$	T(3)(8)I11
(10)	$\neg R \wedge \neg S$	T(6)(9)I9
(11)	$\neg(R \vee S)$	T(10)E9
(12)	$R \vee S$	P
(12)	$\neg(R \vee S) \wedge (R \vee S)$（矛盾）	T(11)(12)I9

- b)$S \rightarrow \neg Q, S \vee R, \neg R, \neg P \rightleftarrows Q \Rightarrow P$

(1)	$S \vee R$	P
(2)	$\neg R$	P
(3)	S	T(1)(2)I10
(4)	$S \rightarrow \neg Q$	P
(5)	$\neg Q$	T(3)(4)I11
(6)	$\neg P \rightleftarrows Q$	P
(7)	$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg P)$	T(6)E20
(8)	$\neg P \rightarrow Q$	T(7)I1
(9)	$\neg Q \rightarrow P$	T(8)E18
(10)	P	T(5)(9)I11

- c)$\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S), (Q \rightarrow P) \vee \neg R, R \Rightarrow P \rightleftarrows Q$

(1)	R	P
(2)	$(Q \rightarrow P) \vee \neg R$	P
(3)	$Q \rightarrow P$	T(1)(2)I10
(4)	$\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S)$	P
(5)	$(R \vee S) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	T(4)E18
(6)	$R \vee S$	T(1)I3
(7)	$P \rightarrow Q$	T(5)(6)I11
(8)	$(Q \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow Q)$	T(3)(7)I9
(9)	$P \rightleftarrows Q$	T(3)(7)E20