

WSI - laboratorium 1

Zadanie: "Zagadnienie przeszukiwania i podstawowe podejścia do niego"

Autor: Jakub Mazurkiewicz (300226)

Uruchamianie programów

W celu uruchomienia eksperymentu dotyczącego znalezienia minimum funkcji `f` należy wykonać plik `f.py` z następującymi parametrami:

```
1 | python f.py <punkt początkowy> <krok> <maksymalna ilość iteracji>
```

W celu uruchomienia eksperymentu dotyczącego znalezienia minimum dwuargumentowej funkcji `g` należy uruchomić plik `g.py` z argumentami:

```
1 | python g.py <x> <y> <krok> <maksymalna ilość iteracji>
```

Dodatkowa decyzja projektowa

Przy implementacji funkcji realizującej metodę gradientu prostego zrezygnowałem z wykorzystania kryterium stopu. Zamiast tego wprowadziłem hiperparametr określający maksymalną ilość iteracji, które może wykonać algorytm.

Przeprowadzanie eksperymentów

Oba programy wykorzystują klasę `GradientDescent` pochodzącą z modułu `gradient.py`. Odpowiada ona za znalezienie minimum zadanej funkcji o postaci " $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ " oraz zarejestrowanie przebiegu algorytmu, czyli m. in. zapisanie uzyskanych punktów pośrednich. Każdy program wypisuje na konsolę krótki komunikat zawierający przyjęte parametry, a także znalezione minimum i wartość funkcji w tym punkcie. W ramach eksperymentu tworzone są także dwa wykresy z wykorzystaniem modułu `pyplot` z biblioteki `matplotlib` przedstawiające:

- Punkty pośrednie uzyskane w trakcie wykonywania algorytmu naniesione na wykres zadanej funkcji. W przypadku funkcji `g` rysowany jest co dziesiąty punkt (ze względu na problemy z renderowaniem większej ilości),
- Zmiana wartości punktu roboczego w zależności od numeru iteracji.

Eksperymenty dla funkcji `f`

Eksperymenty dla punktu początkowego $x_0 = 0$

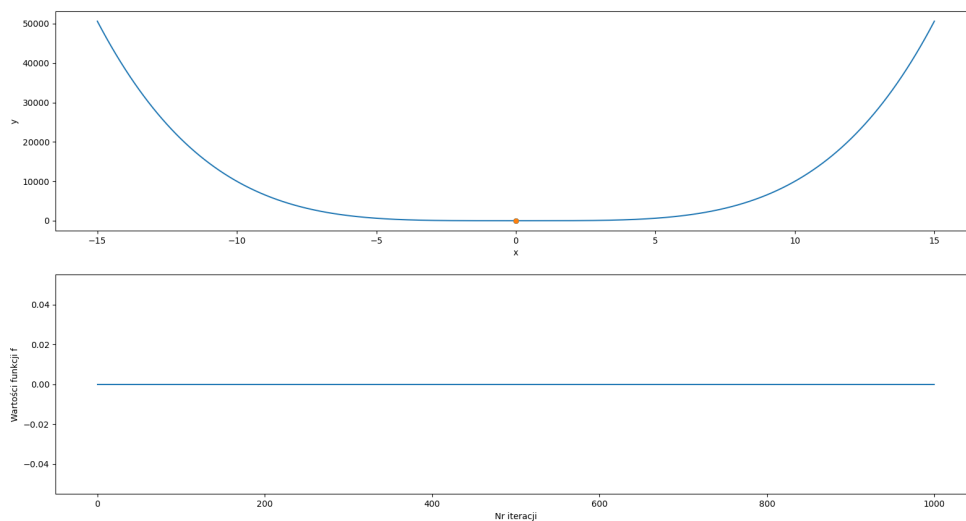
Wszystkie eksperymenty z tego paragrafu zostały przeprowadzone dla 1000 iteracji.

Rozmiaru kroku $\beta = 1$

Znalezione minimum: 0

Uzyskane wykresy:

Wyniki eksperymentu

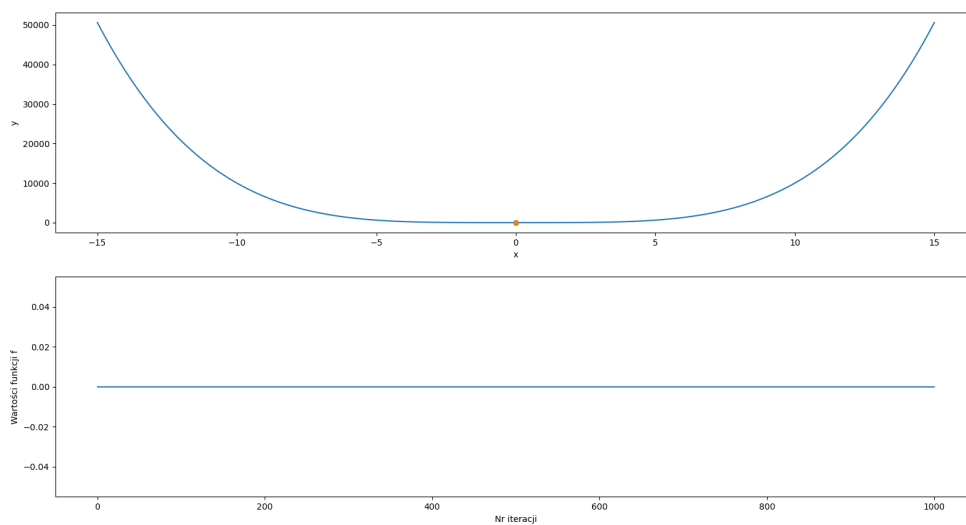


Rozmiaru kroku $\beta = 10$

Znalezione minimum: 0

Uzyskane wykresy:

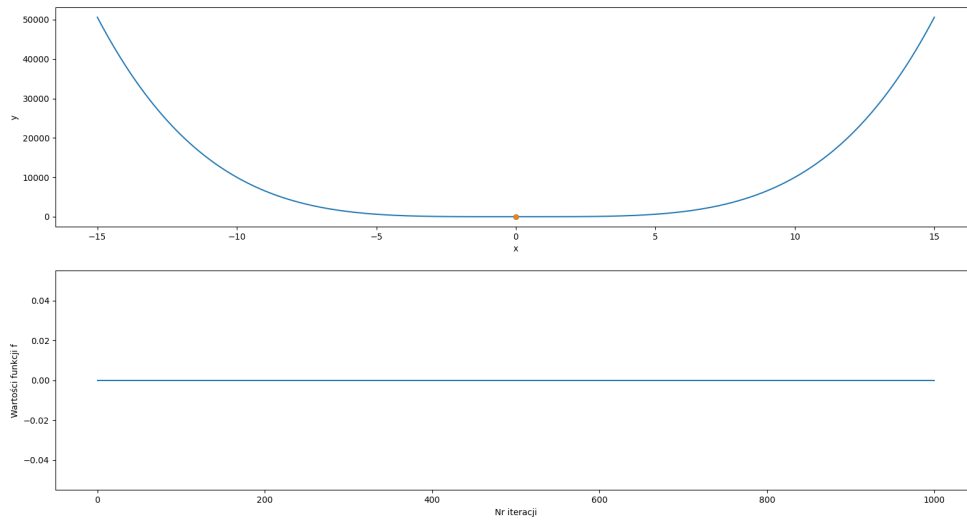
Wyniki eksperymentu



Rozmiar kroku $\beta = 100$

Znalezione minimum: 0

Uzyskane wykresy:



Podsumowanie eksperymentów dla $x_0 = 0$

Dla punktu początkowego $x_0 = 0$ rozmiar kroku nie ma znaczenia, gdyż stanowi on minimum funkcji f .

Eksperymenty dla punktu początkowego $x_0 = 3$

Wszystkie eksperymenty z tego paragrafu zostały przeprowadzone dla 1000 iteracji.

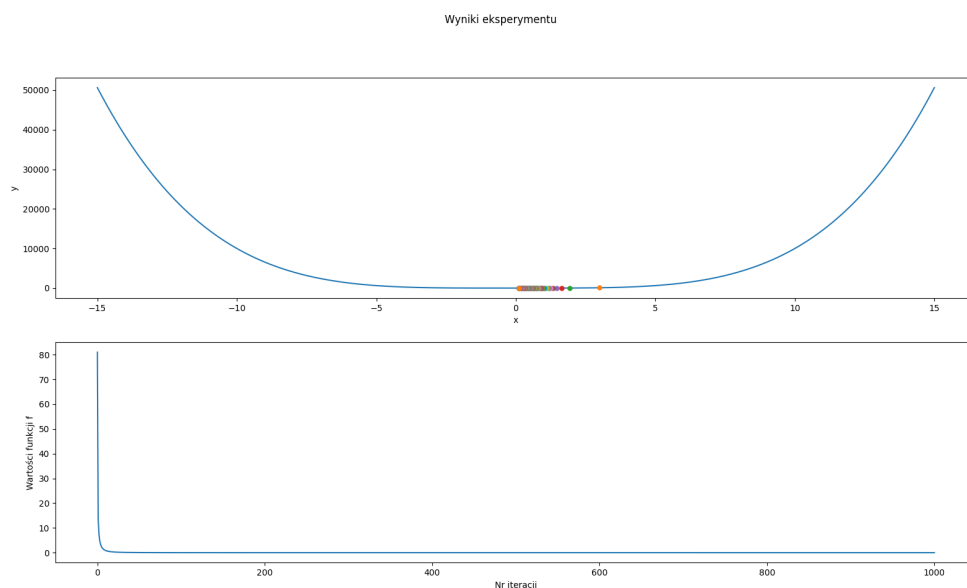
Rozmiar kroku $\beta = 0.1$

Algorytmowi nie udało się wyliczyć minimum dla zadanego rozmiaru kroku - doszło do przepełnienia, co oznacza że należy dobrać inny, mniejszy krok.

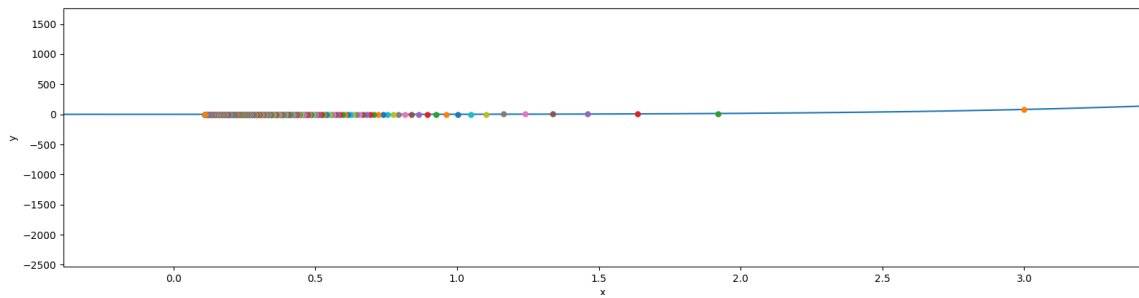
Rozmiar kroku $\beta = 0.01$

Znalezione minimum: 0.11

Uzyskane wykresy:



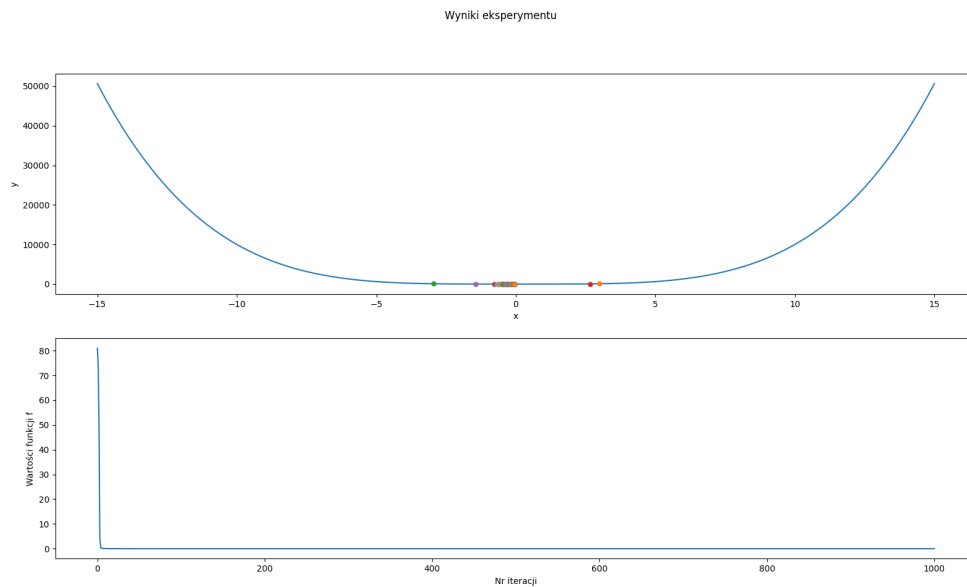
Górny wykres w przybliżeniu:



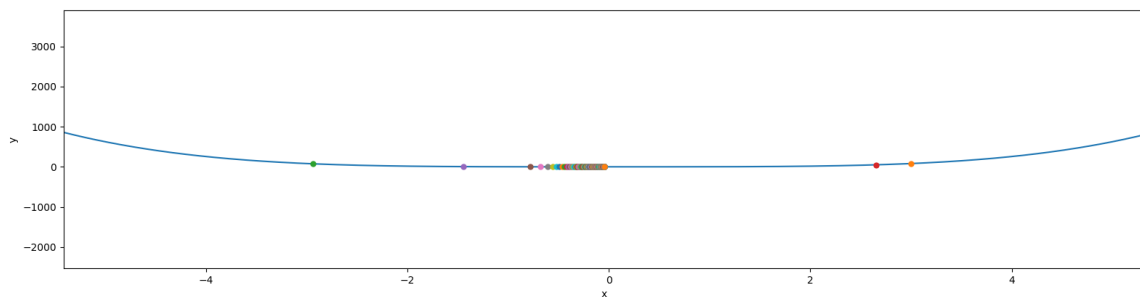
Rozmiar kroku $\beta = 0.055$

Znalezione minimum: -0.05

Uzyskane wykresy:



Górny wykres w przybliżeniu:



Podsumowanie eksperymentów dla $x_0 = 3$

Przy punkcie początkowym $x_0 = 3$ algorytm zrobił się bardziej wrażliwy na zmiany rozmiaru kroku. Już dla wartości $\beta = 0.1$ doszło do przepełnienia, gdyż algorytm nie był w stanie dotrzeć do minimum i wyniki pośrednie zaczęły wychodzić poza zakres zmiennej typu `float`.

Eksperymenty dla punktu początkowego $x_0 = 10$

Wszystkie eksperymenty z tego paragrafu zostały przeprowadzone dla 1000 iteracji z wyjątkiem ostatniego.

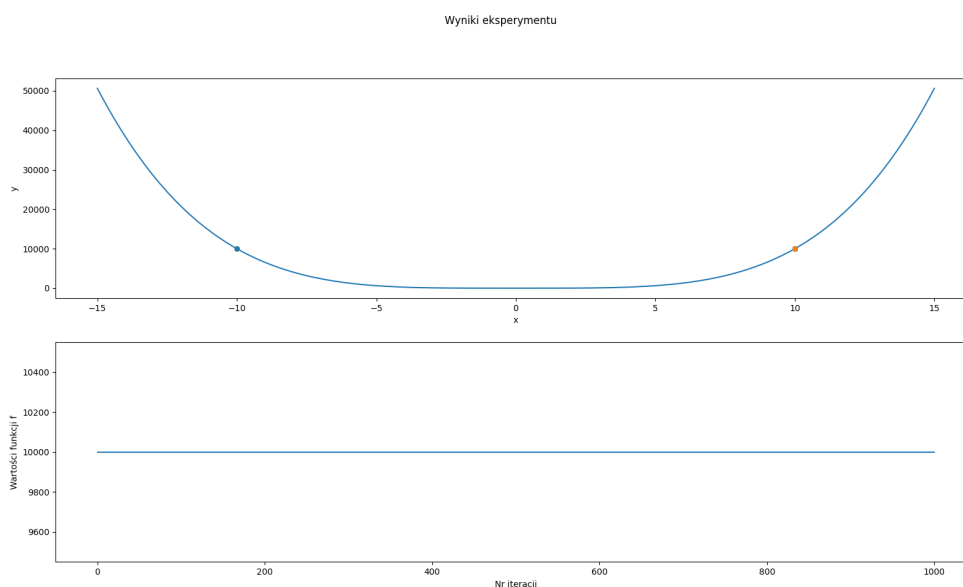
Rozmiar kroku $\beta = 0.055$

Algorytmowi nie udało się wyliczyć minimum dla zadanego rozmiaru kroku - doszło do przepełnienia.

Wykorzystana wartość kroku pochodzi z poprzedniego eksperymentu. Można zaobserwować, że dla wartości punktu początkowego bardziej oddalonego od minimum algorytm zrobił się jeszcze bardziej wrażliwy na wielkość parametru β .

Rozmiar kroku $\beta = 0.005$

Uzyskane wykresy:

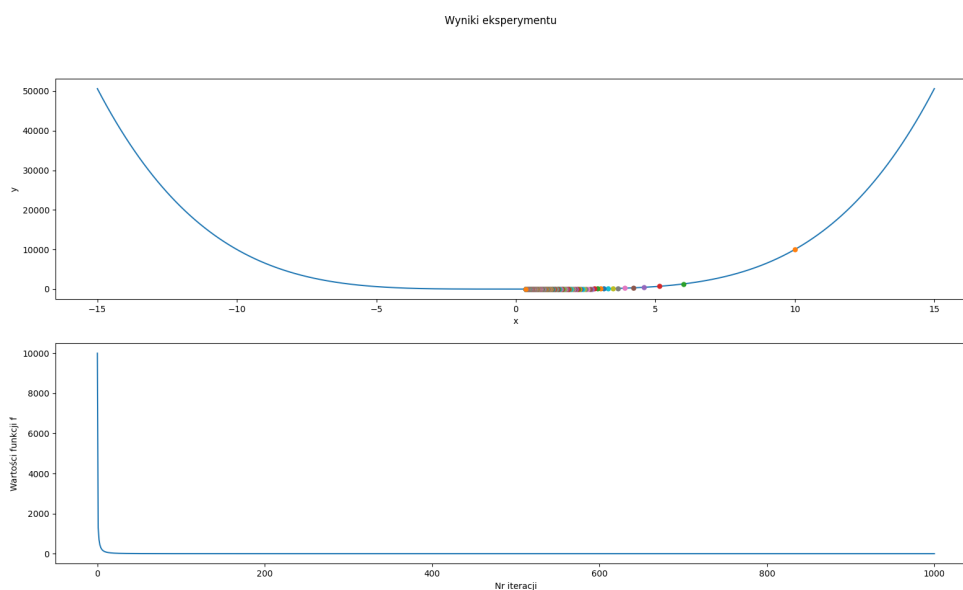


Z wydruku programu oraz wykresu wynika, że algorytm zatrzymał się w punktach -10 oraz 10 . Dodatkowe testy wykazały, że sytuacja ta następuje niezależnie od liczby iteracji.

Rozmiar kroku $\beta = 0.001$

Znalezione minimum: 0.35

Uzyskane wykresy:

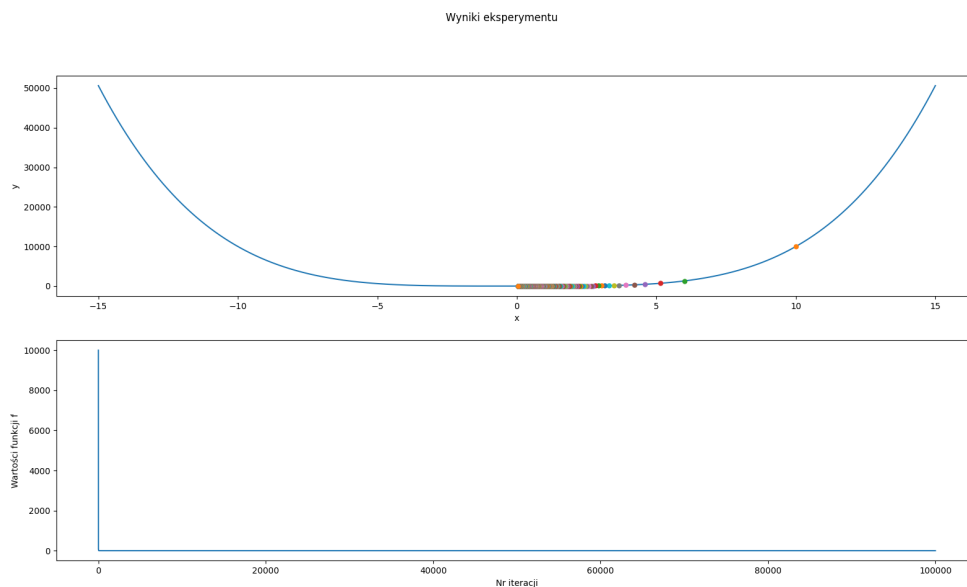


Rozmiar kroku $\beta = 0.001$ oraz większa liczba iteracji

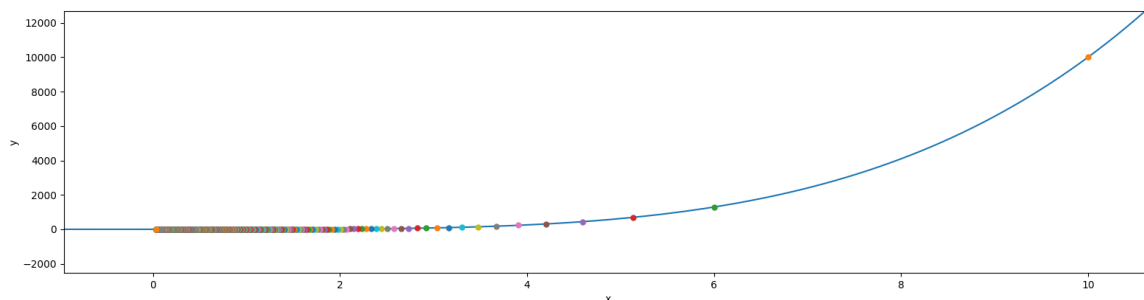
Eksperyment ten różni się od poprzedniego wykonaniem 100000 iteracji a nie 1000.

Znalezione minimum: 0.04

Uzyskane wykresy:



Górny wykres w przybliżeniu:



Podsumowanie eksperymentów dla $x_0 = 10$

Przy punkcie początkowym $x_0 = 10$ algorytm zrobił się jeszcze bardziej wrażliwy na zmiany rozmiaru kroku. Już dla wartości $\beta = 0.055$, która była wykorzystana w eksperymentach dla $x_0 = 3$, doszło do przepełnienia, gdyż algorytm nie był w stanie dotrzeć do minimum.

Przy małych wartościach kroku (np. $\beta = 0.001$) uzyskane minima mogą znacznie odbiegać od prawdziwej wartości. Rozwiązaniem tego problemu może być zwiększenie liczby iteracji, co pokazał ostatni eksperyment.

Eksperymenty dla funkcji g

Eksperymenty dla punktu początkowego $x_0 = (0, 1)$

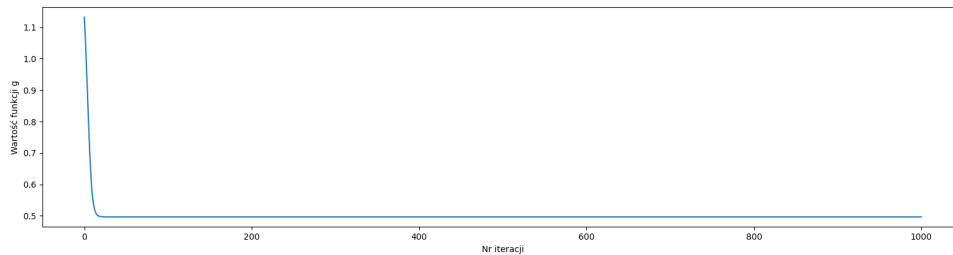
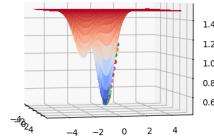
Wszystkie eksperymenty z tego paragrafu zostały przeprowadzone dla 1000 iteracji.

Rozmiar kroku $\beta = 0.1$

Uzyskane minimum: $x_{min} = (0.0035, -0.007)$. Wartość w minimum: $f(x_{min}) \approx 0.4966$

Uzyskane wykresy:

Wyniki eksperymentu

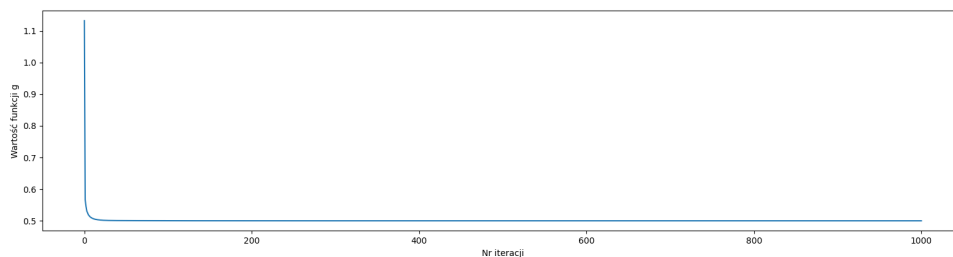
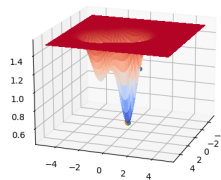


Rozmiar kroku $\beta = 1$

Uzyskane minimum: $x_{min} = (-0.0488, -0.0331)$. Wartość w minimum: $f(x_{min}) \approx 0.5$

Uzyskane wykresy:

Wyniki eksperymentu



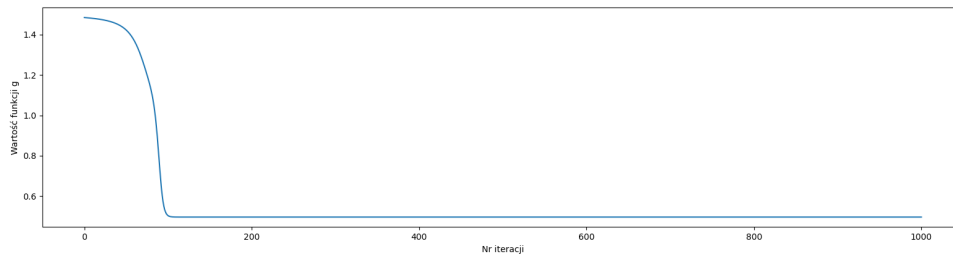
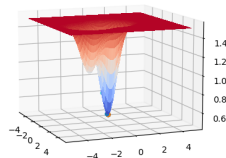
Eksperymenty dla punktu początkowego $x_0 = (-1, -2)$

Wszystkie eksperymenty z tego paragrafu zostały przeprowadzone dla 1000 iteracji.

Rozmiar kroku $\beta = 0.1$

Uzyskane minimum: $x_{min} = (0.0035, -0.007)$. Wartość w minimum: $f(x_{min}) \approx 0.4966$

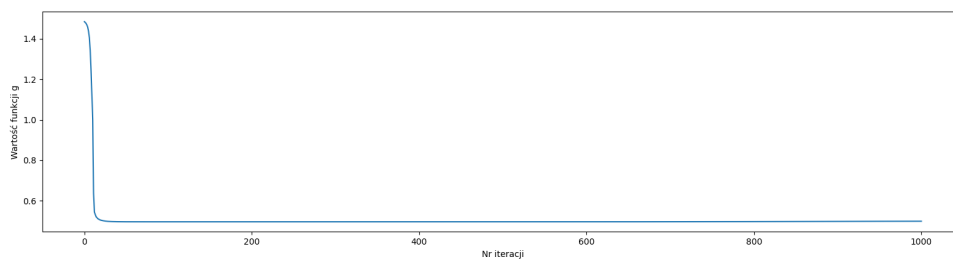
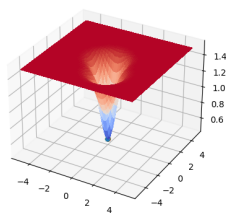
Uzyskane wykresy:



Rozmiar kroku $\beta = 1$

Uzyskane minimum: $x_{min} = (-0.0449, -0.0312)$. Wartość w minimum: $f(x_{min}) \approx 0.4995$

Uzyskane wykresy:

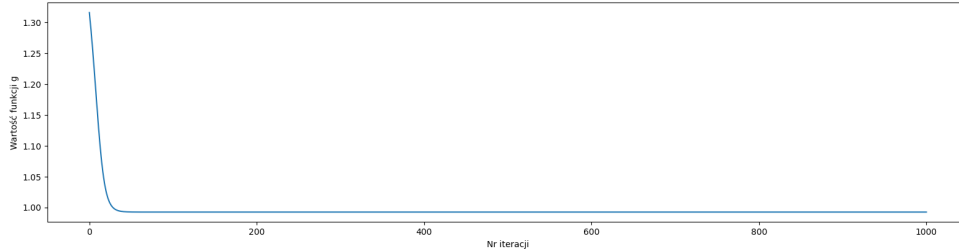
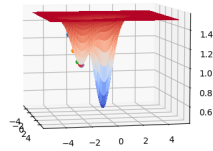


Eksperymenty dla punktu początkowego $x_0 = (1, -3)$

Rozmiar kroku $\beta = 0.1$

Uzyskane minimum: $x_{min} = (0.9845, -1.969)$. Wartość w minimum: $f(x_{min}) \approx 0.9927$

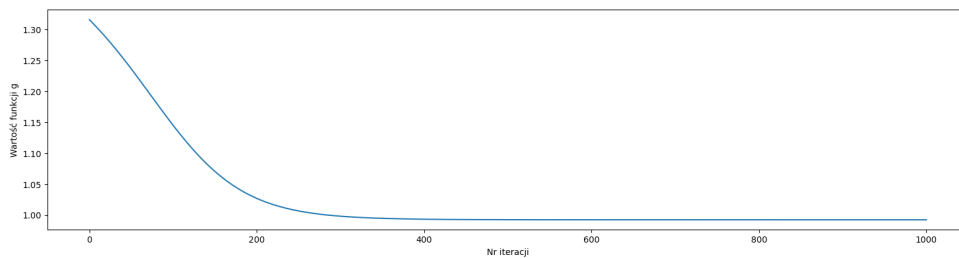
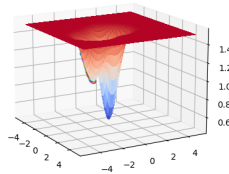
Uzyskane wykresy:



Rozmiar kroku $\beta = 0.01$

Uzyskane minimum: $x_{min} = (0.9846, -1.9693)$. Wartość w minimum: $f(x_{min}) \approx 0.9927$

Uzyskane wykresy:



Podsumowanie eksperymentów dla $x_0 = (1, -3)$

Wykonane dwa eksperymenty dla punktu początkowego $x_0 = (1, -3)$ pokazują, że zmniejszenie rozmiaru kroku znacząco wpływa na szybkość osiągnięcia minimum funkcji.

Ponad to w tym eksperymencie algorytm gradientu prostego znalazł inne minimum lokalne niż w poprzednich testach.

Wnioski z przeprowadzonych eksperymentów

- Algorytm gradientu prostego jest bardzo wrażliwy na zmiany wartości rozmiaru kroku, jeżeli punkt początkowy znajduje się w dużej odległości od minimum.
- W trakcie eksperymentów występowało zjawisko przepełnienia dla liczb zmiennoprzecinkowych, co skutkowało uzyskaniem wyniku `NaN`. Z tego powodu dobieranie odpowiedniego rozmiaru kroku wymaga szczególnej staranności.

- Dokładniejsze wyniki można uzyskać dla małych wartości kroku przy jednoczesnym zwiększeniu ilości iteracji.