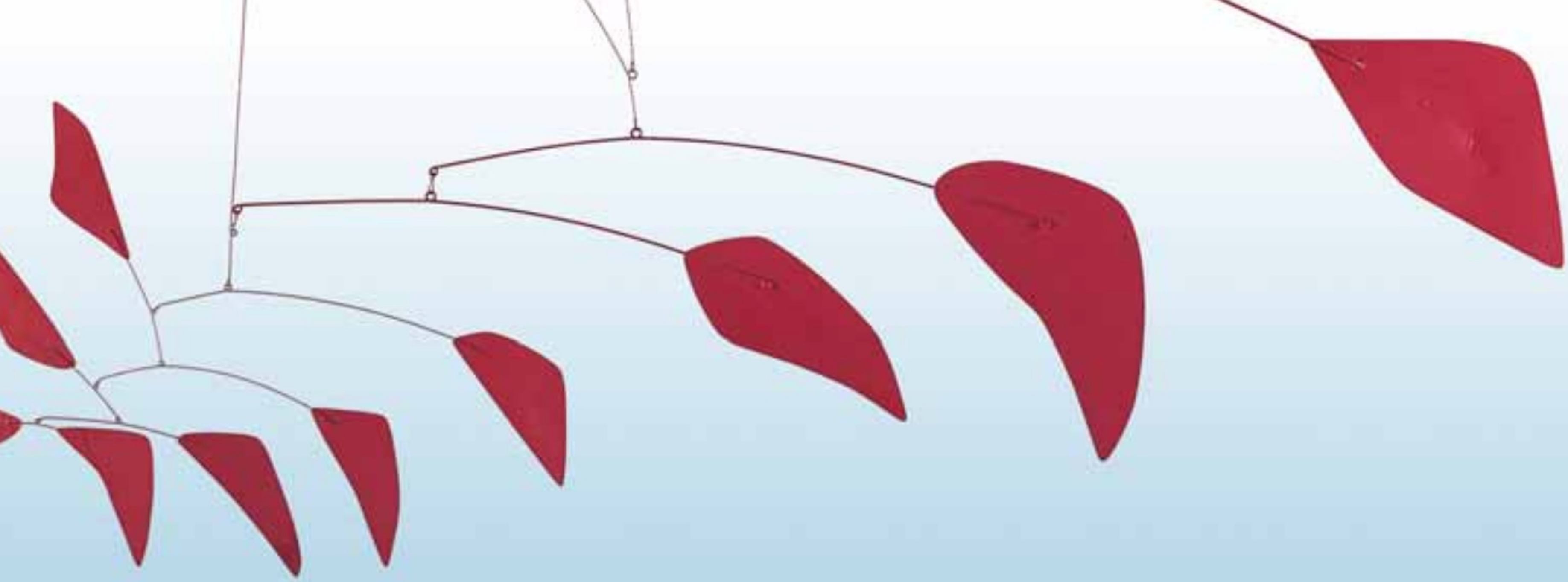


第一部分：基础知识

INTRODUCTION TO

ALGORITHMS

THIRD EDITION

概率分析和随机算法

《算法导论》—— 第4讲

jiacaicui@163.com

内容提要

- 通过 “雇佣问题” 来学习算法分析与设计中的 “概率” 手段
  - 概率分析
  - 指示器随机变量
- 随机算法
  - 随机排列数组
- 问题选讲
  - 生日悖论
  - 球与箱子
  - 特征序列
  - 在线雇佣问题

雇佣问题

低价面试与高价雇佣

雇佣问题

HIRE-ASSISTANT(n)

```
best = 0            // candidate 0 is a least-qualified dummy candidate
for i = 1 to n
    interview candidate i
    if candidate i is better than candidate best
        best = i
        hire candidate i
```

- 分析该雇佣策略所产生的**费用**。
  - 面试费用为 c_i，雇佣费用为 c_h，面试费用较低，雇佣费用较高。
  - 假设雇佣了 m 个人，则总费用为 $c_i n + c_h m$ 。
    - 最坏情况：应聘者质量按照出现的次序严格递增，总费用为 $c_i n + c_h n$ ；
    - 最好情况：第一个应聘者就是质量最好的，总费用为 $c_i n + c_h$ ；
    - 平均情况 / 一般情况下呢？

概率分析

- 概率分析：假定输入满足某种概率分布，藉此分析算法运行时间的数学期望，称为平均情况运行时间。
  - 通常假设输入的各种情况满足均匀分布，即所有可能的输入之间是等可能的。
- 算法第 4 行说明应聘者之间存在全序关系。
  - 用 $rank(i)$ 表示第 i 个应聘者的序（越大表示质量越高），不妨设有序序列 $\langle rank(1), rank(2), \cdots, rank(n)\rangle$ 是 $\langle 1, 2, \cdots, n\rangle$ 的一个排列。
  - 如果 $\langle rank(1), rank(2), \cdots, rank(n)\rangle$ 的 $n!$ 种所有可能情况等概率出现，称其构成一个均匀随机排列。

随机算法

- 如果我们能有一份应聘者的名单，可以每天随机从名单上挑应聘者来面试，自己创造一个均匀随机排列的输入。
- 如果一个算法的行为不仅由输入决定，而且也由随机数生成器产生的数值决定，则称这是个随机算法。
  - 在实践中，大多数编程环境会提供一个伪随机数生成器，它是一个确定性算法，返回值在统计上看起来是随机的。
- 确定性算法（输入是随机的） .vs 随机算法
  - 确定性算法：平均情况运行时间
  - 随机算法：期望运行时间
    - 同一个输入同一个算法运行两次可能会花费不同的时间。

关于“费用”和“时间”

```
HIRE-ASSISTANT(n)
1  best = 0          // candidate 0 is a least-qualified dummy candidate
2  for i = 1 to n
3      interview candidate i
4      if candidate i is better than candidate best
5          best = i
6          hire candidate i
```

- 无论是分析“费用”，还是分析运行“时间”，本质上都是在分析关键步骤的执行次数。
  - 分析“费用”，我们选取第 6 行作为关键步骤，因为那是“变数”且是主要费用。

指示器随机变量

期望计算神器

指示器随机变量

- 事件 A 的指示器随机变量（indicator random variable）：

$$I\{A\} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } A \text{ 发生} \\ 0, & \text{如果 } A \text{ 不发生} \end{cases}$$

- 引理5.1：$E(I\{A\}) = \Pr\{A\}$ 。
  - 证明： $E[I\{A\}] = 1 \cdot \Pr\{A\} + 0 \cdot \Pr\{\overline{A}\} = \Pr\{A\}$ 。
- 例：求抛 n 次硬币正面朝上次数的期望。
  - 记第 i 次抛出时正面朝上为事件 H_i， $X_i = I\{H_i\}$， X 为总次数，则

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \Pr\{H_i\} = \frac{n}{2}$$

分析雇佣费用

目标：计算 m 的期望值 —— 即期望的雇佣次数。

- 假设应聘者以随机顺序出现，用随机变量 X 表示雇佣的次数，直接用定义有

$$E[X]=\sum_{x=1}^{n} x \Pr\{X=x\}$$

计算会很麻烦。

- 使用指示器随机变量，记应聘者 i 被雇佣为事件 H_i ，$X_i=I\{H_i\}$ ，不难看出 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 。

- 应聘者 i 被雇佣的概率就是 $rank(i)$ 为 $rank(1) \sim rank(i)$ 中最大值的概率，易有 $\Pr\{H_i\}=\frac{1}{i}$，于是

$$E[X]=E\left[\sum_{x=1}^{n} X_i\right]=\sum_{x=1}^{n} E[X_i]=\sum_{x=1}^{n} \Pr\{H_i\}=\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{i}=\ln n+O(1)$$

分析雇佣费用

引理5.2：假设应聘者以随机次序出现，算法 HIRE-ASSISTANT 总的雇佣费用平均情形下为 $O(c_h \ln n)$ 。

- 尽管我们面试了 n 个人，但平均起来，实际上大约只雇佣其中的 $\ln n$ 个人。
- 平均情况下的雇佣费用比最坏情况下的雇佣费用 $O(c_h n)$ 有了很大的改进。

随机算法

故布疑阵的妙用

从确定性算法的概率分析到随机算法

```
RANDOMIZED-HIRE-ASSISTANT(n)
randomly permute the list of candidates
best = 0            // candidate 0 is a least-qualified dummy candidate
for i = 1 to n
    interview candidate i
    if candidate i is better than candidate best
        best = i
        hire candidate i
```

- 确定性算法的概率分析：让“随机”发生在输入上；
  - 假如应聘者密谋以质量严格递增的次序参与招聘怎么办？
- 随机算法：让“随机”发生在算法上。
  - 算法第一步就是随机打乱，自己创造均匀分布的条件。

从确定性算法的概率分析到随机算法

引理5.2：假设应聘者以随机次序出现，算法 HIRE-ASSISTANT 总的雇佣费用平均情形下为 $O(c_h \ln n)$ 。

RANDOMIZED-HIRE-ASSISTANT(n)

怎么做到？

```
randomly permute the list of candidates
best = 0          // candidate 0 is a least-qualified dummy candidate
for i = 1 to n
    interview candidate i
    if candidate i is better than candidate best
        best = i
        hire candidate i
```

引理5.3：过程 RANDOMIZED-HIRE-ASSISTANT 的雇佣费用期望是 $O(c_h \ln n)$ 。

随机排列数组

输入：一个长度为 n 的数组 A 。

输出：A 的一个均匀随机排列。

PERMUTE-BY-SORTING(A)

```
1  n = A.length
2  let P[1..n] be a new array
3  for i = 1 to n
4      P[i] = RANDOM(1, n^3)
5  sort A, using P as sort keys
```

约定：$RANDOM(a,b)$ 是一个随机数生成器，返回整数 $a \sim b$ 之间的一个随机整数。例如 $RANDOM(0,1)$ 以 $\frac{1}{2}$ 的概率返回 0 或者 1 。

随机排列数组

```
PERMUTE-BY-SORTING(A)
1  n = A.length
2  let P[1..n] be a new array
3  for i = 1 to n
4        P[i] = RANDOM(1, n^3)
5  sort A, using P as sort keys
```

- 算法第4行选取一个 $1 \sim n^3$ 之间的随机数，使用这个范围是为了让 P 的中所有优先级尽量唯一，概率至少是 $1 - \frac{1}{n}$ （见练习4-2问题3）。
- 引理5.4：假设所有优先级都不同，则过程 PERMUTE-BY-SORTING 产生输入的均匀随机排列。

引理5.4 证明

证明：考虑 $A[1..n]$ 的任意一个确定排列 $B[1..n]$，定义 $A[1..n]$ 中的元素 B[i] 分配到第 i 小的优先级为事件 E_i，则我们只需要证明

$$\Pr\{E_1E_2 \ldots E_{n-1}E_n\} = \frac{1}{n!} \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} \Pr\{E_i|E_1E_2\cdots E_{i-1}\} = \frac{1}{n!}$$

这里应用了乘法公式，记 $\Pr\{E_0\} = 1$。$\Pr\{E_i|E_1E_2\cdots E_{i-1}\}$ 说的其实就是 $B[i]$ 是$B[i..n]$ 中优先级最小的元素的概率，从而 $\Pr\{E_i|E_1E_2\cdots E_{i-1}\} = \frac{1}{n-i+1}$。

则：

$$\Pr\{E_1E_2 \ldots E_{n-1}E_n\} = \prod_{i=1}^{n} \Pr\{E_i|E_1E_2\cdots E_{i-1}\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1-i} = \frac{1}{n!}$$

于是，我们说明了获任何给定排列的概率都是 $\frac{1}{n!}$，即产出了一个均匀随机排列。

更好的打乱办法：原址排列给定数组

```
RANDOMIZE-IN-PLACE(A)
1  n = A.length
2  for i = 1 to n
3      swap A[i] with A[RANDOM(i, n)]
```

引理5.5：过程 RANDOMIZE-IN-PLACE 可计算出一个均匀随机排列。

证明：使用循环不变式：在第 2 – 3 行 for 循环的每次迭代开始前，对每个可能的 $(i-1)$ 排列，子数组 $A[1..i-1]$ 包含这个 $(i-1)$ 排列的概率是 $\frac{(n-i+1)!}{n!}$ 。

- 初始化：$i=1$，$A[1..0]$ 包含 0 排列的概率是 1，显然成立。
- 保持：（见下一页PPT）。
- 终止：最后一次循环结束后，$i=n+1$，根据循环不变式，对每个可能的 n 排列，数组 $A[1..n]$ 包含这个 n 排列的概率是 $\frac{1}{n!}$，是均匀随机排列。

引理5.5证明——“保持”

```
RANDOMIZE-IN-PLACE(A)
1  n = A.length
2  for i = 1 to n
3      swap A[i] with A[RANDOM(i, n)]
```

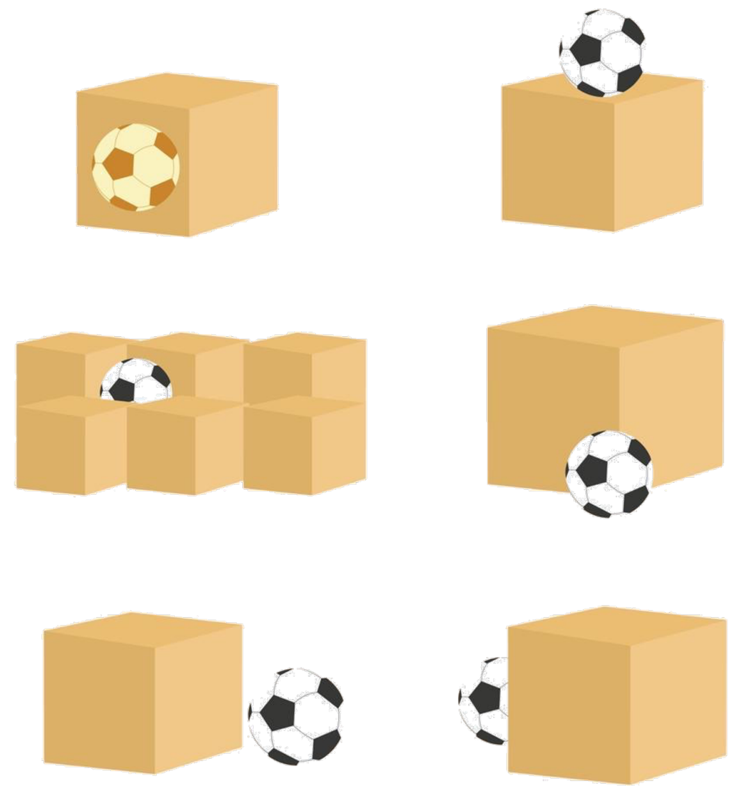
- 保持：第 i 次迭代时，考虑任意一个特殊的 i 排列 $\langle x_1, x_2, \cdots, x_i \rangle$，记 $A[1..i-1]$ 包含 $\langle x_1, x_2, \cdots, x_{i-1} \rangle$ 这个 $(i-1)$ 排列为事件 E_1，记在 $A[i]$ 位置放置 x_i 为事件 E_2，下面证明 $\Pr\{E_1 E_2\} = \frac{(n-i)!}{n!}$。

- 假设第 i 次迭代前不变式成立，则 $\Pr\{E_1\} = \frac{(n-i+1)!}{n!}$；当 E_1 发生后，算法第3行从 $A[i..n]$ 中随机挑选了一个放在 $A[i]$ 处，这种情况下 $A[i] = x_i$ 的概率，也就是 $\Pr\{E_2 | E_1\} = \frac{1}{n-i+1}$。

- 于是 $\Pr\{E_1 E_2\} = \Pr\{E_1\} \cdot \Pr\{E_2 | E_1\} = \frac{(n-i+1)!}{n!} \cdot \frac{1}{n-i+1} = \frac{(n-i)!}{n!}$。

问题选讲

举一反三



生日悖论

- 一个屋子里人数必须要达到多少人，才能期望其中有两人生日相同？
  - 不考虑闰年的情况，假设一年有 n 天，屋子里有 k 个人，记第 i 个人和第 j 个人生日相同为事件 H_{ij}，定义指示器随机变量 $X_{ij} = I\{H_{ij}\}$。
  - 记第 i 个人的生日为 b_i，不难发现，$\Pr\{b_i = r\} = \frac{1}{n}$。
  - 不妨假设任意两个人的生日之间是独立的，则 $\Pr\{b_i = r, b_j = r\} = \Pr\{b_i = r\} \cdot \Pr\{b_j = r\} = \frac{1}{n^2}$。
  - 于是：

$$\mathrm{E}[\mathrm{X_{ij}}] = \Pr\{H_{ij}\} = \Pr\{b_i = b_j\} = \sum_{r=1}^{n} \Pr\{b_i = r, b_j = r\} = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

生日悖论

设有 X 对人生日相同，则

$$X = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} X_{ij}$$

于是

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} E[X_{ij}] = \binom{k}{2}\frac{1}{n} = \frac{k(k-1)}{2n}$$

令 $E[X] \geq 1$，解得 $k \geq \sqrt{2n} + 1 = \Theta(\sqrt{n})$。

- 生日悖论：一个屋子里人数不必达到很多人，我们就能期望其中有两人生日相同。具体地，只需 $\Theta(\sqrt{n})$ 人，n 为一年的天数。
  - 在地球上，将 $n = 365$ 代入，有 $k \geq 28$ 。如果房间里面至少有 28 人，我们可以期望至少一对人生日相同。
  - 在火星上，一年有 $n = 669$ 个火星日，我们至少需要 38 个火星人。

球与箱子

- 把相同的球不断地投到 b 个盒子里，球会随机落到其中一个盒子中，在我们期望每个箱子里都有一个球之前，至少需要投多少次球？
  - 假设我们需要投 n 次球，将其分为几个阶段，第 i 个阶段包括从第 $i-1$ 次命中到第 i 次命中之间的投球；其中，“命中”指的是球投入一个空盒子中。
  - 第 i 个阶段，有 $b-i+1$ 个非空盒子，投一次的命中概率为 $\frac{b-i+1}{b}$。
  - 设 n_i 表示第 i 阶段的投球次数，则 $n_i \sim g(\frac{b-i+1}{b})$，于是

$$E[n_i] = \frac{b}{b-i+1}$$

（几何分布详见附录C.2）

球与箱子

$$E[n] = E\left[\sum_{i=1}^{b} n_i\right] = \sum_{i=1}^{b} E[n_i] = \sum_{i=1}^{b} \frac{b}{b - i + 1} = b \sum_{i=1}^{b} \frac{1}{i} = b\big(\ln b + O(1)\big)$$

- 在我们期望每个箱子都有一个球之前，大约要投 $b \ln b$ 次。
- 礼券收集者问题：收集齐 b 种不同礼券中的每一种，大约需要 $b \ln b$ 张随机得到的礼券才能成功。
  - 假设小浣熊干脆面中的 108 种水浒卡是随机均匀分布的，收集齐所有的武将大约需要购买 $108 \ln 108 \approx 506$ 包干脆面。

特征序列

- 抛一枚标准的硬币 n 次，最长连续正面的序列的期望长度有多长？
  - 记从第 i 次抛硬币开始，连续至少 k 次正面朝上为事件 A_{ik}，由于每次抛硬币都是独立的，不难得出 $\Pr\{A_{ik}\} = \frac{1}{2^k}$。
  - 考虑 $X_{ik} = I\{A_{ik}\}$，用 X 表示长度为 k 的特征序列的数目，有

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-k+1} X_{ik}\right] = \sum_{i=1}^{n-k+1} E[X_{ik}] = \sum_{i=1}^{n-k+1} \Pr\{A_{ik}\} = \frac{n-k+1}{2^k}$$

  - 令 $E[X] = c \geq 1$，有 $n+1 = k + c2^k$，即 $\Theta(n) = \Theta(2^k)$，不难看出 $k = \Theta(\log n)$，使用代入法即可严谨证明。
- 最长特征序列的长度期望为 $\Theta(\log n)$。

在线雇佣问题

- 动机：避免频繁的新人换旧人。
  - 在最小化面试次数和最大化所雇佣应聘者质量之间取得平衡。
  - 限制条件：每次面试后必须立刻拒绝或者雇佣。
  - 策略：面试前 k 个，记下最高分，并拒绝；如果后 $n-k$ 个中有更好的，就选更好的那个，否则选最后一个。

```
ON-LINE-MAXIMUM(k, n)
bestscore = -∞
for i = 1 to k
    if score(i) > bestscore
        bestscore = score(i)
for i = k + 1 to n
    if score(i) > bestscore
        return i
return n
```

在线雇佣问题

```
ON-LINE-MAXIMUM(k, n)
bestscore = −∞
for i = 1 to k
    if score(i) > bestscore
        bestscore = score(i)
for i = k + 1 to n
    if score(i) > bestscore
        return i
return n
```

- 选择一个怎样的 k 能够让 ON-LINE-MAXIMUM(k, n) 以最大的概率取最好的应聘者？
  - 记成功面试到最好的应聘者为事件 S， 最好的应聘者是第 i 个面试者时成功为事件 S_i，则显然有

$$\Pr\{S\} = \sum_{i=1}^{n} \Pr\{S_i\}$$

在线雇佣问题

```
ON-LINE-MAXIMUM(k, n)
bestscore = −∞
for i = 1 to k
    if score(i) > bestscore
        bestscore = score(i)
for i = k + 1 to n
    if score(i) > bestscore
        return i
return n
```

- 当最好的应聘者是前 k 个时，一定不会成功，所以 $1 \le i \le k$ 时，$\Pr\{S_i\} = 0$ 。
- $i \ge k+1$ 时，S_i 发生需要两个条件：
  - 最好的应聘者在位置 i 上，记为事件 B_i ，显然 $\Pr\{B_i\} = \frac{1}{n}$ 。
  - $k+1 \sim i-1$ 没有任何应聘者入选，记为事件 O_i ，这意味着 $1 \sim i-1$ 中的最优秀的人只能在前 k 个，于是 $\Pr\{O_i\} = \frac{k}{i-1}$ 。
  - B_i 与 O_i 是独立的，$1 \sim i-1$ 如何排列并不影响 i 是否比 $1 \sim i-1$ 都优秀。

在线雇佣问题

```
ON-LINE-MAXIMUM(k, n)
bestscore = −∞
for i = 1 to k
    if score(i) > bestscore
        bestscore = score(i)
for i = k + 1 to n
    if score(i) > bestscore
        return i
return n
```

- 综上：

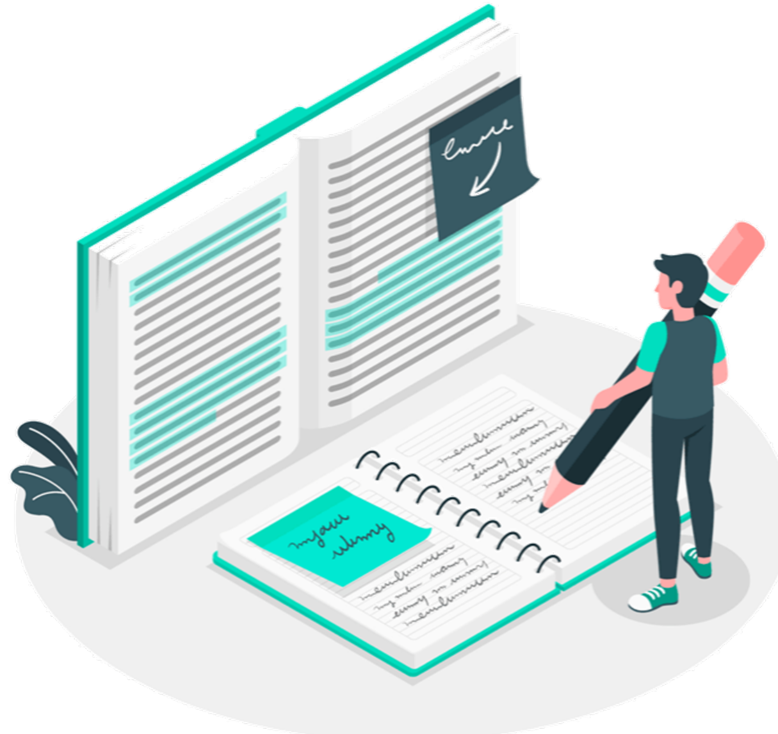
$$\Pr\{S\}=\sum_{i=1}^{n}\Pr\{S_i\}=0+\sum_{i=k+1}^{n}\Pr\{S_i\}=\sum_{i=k+1}^{n}\Pr\{B_iO_i\}$$

$$=\sum_{i=k+1}^{n}\Pr\{B_i\}\Pr\{O_i\}=\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{i-1}=\frac{k}{n}\cdot\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{i}$$

$$\geq\frac{k}{n}\int_{k}^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{k}{n}(\ln n-\ln k)=\frac{k}{n}\ln\frac{n}{k}$$

- 又 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $x=e$ 时取最大值，所以 $\frac{n}{k}=e$ 时，$\Pr\{S\}$ 的下界 $f\left(\frac{n}{k}\right)$ 最大化为 $\frac{1}{e}$。因此，取 $k=\frac{n}{e}$ 时，至少有 $\frac{1}{e}$ 的概率雇佣到最好的应聘者。

本讲小结



内容提要

- 通过“雇佣问题”来学习算法分析与设计中的“概率”手段
  - 概率分析
  - 指示器随机变量
- 随机算法
  - 随机排列数组
- 问题选讲
  - 生日悖论
  - 球与箱子
  - 特征序列
  - 在线雇佣问题

The End!