算法导论习题选集

练习 4-1

节选自《算法导论》教材第三版

课程网站：https://algorithm.cuijiacai.com

Problem 1

请描述 $RANDOM(a, b)$ 过程的一种实现，它只调用 $RANDOM(0, 1)$ 。作为 a 和 b 的函数，你的过程的期望运行时间是多少?

Problem 2

假设你希望以 1/2 的概率输出 0 与 1 。你可以自由使用一个输出 0 或 1 的过程 BIASED-RANDOM 。它以某概率 p 输出 1 ，概率 $1-p$ 输出 0 ，其中 $0<p<1$ ，但是 p 的值未知。
请给出一个利用 BIASED-RANDOM 作为子程序的算法，返回一个无偏的结果，能以概率 1/2 返回 0 ，以概率 1/2 返回 1 。作为 p 的函数，你的算法的期望运行时间是多少?

Problem 3

在 HIRE-ASSISTANT 中，假设应聘者以随机顺序出现，你正好雇佣一次的概率是多少？正好雇佣 n 次的概率是多少？正好雇佣两次的概率是多少？

Problem 4

利用指示器随机变量来解决如下的 **帽子核对问题**（hat-heck problem）：n 位顾客，他们每个人给餐厅核对帽子的服务生一顶帽子。服务生以随机顺序将帽子还给顾客。请问拿到自己帽子的客户的期望数是多少？

Problem 5

设 $A[1..n]$ 是由 n 个不同数构成的数列。如果 $i < j$ 且 $A[i] > A[j]$ ，则称 (i, j) 对为 A 的一个 **逆序对 (inversion)** 。(参看作业 1 问题 4 中更多关于逆序对的例子。) 假设 A 的元素构成 $\langle 1, 2, \cdots, n \rangle$ 上的一个均匀随机排列。请用指示器随机变量来计算其中逆序对的数目期望。

Problem 6

熊大教授不同意引理 5.5 证明 (见第 4 讲 PPT 第 19 页) 中使用的循环不变式。他对第 1 次迭代之前循环不变式是否为真提出质疑。他的理由是，我们可以很容易宣称一个空数组不包含 0 排列。因此，一个空的子数组包含一个 0 排列的概率是 0，从而第 1 次迭代之前循环不变式无效。

请重写算法 RANDOMIZE-IN-PLACE，使得相关循环不变式适用于第 1 次迭代之前的非空子数组，并为你的算法修改引理 5.5 的证明。

Problem 7

熊二教授决定写一个过程来随机产生除恒等排列（identity permutation）外的任意排列。他提出了如下算法：

Algorithm 1 Permute Without Identity

Input: an array A of length n

Output: a uniform random permutation of A

```
for i = 1 to n − 1 do
    swap A[i] with A[RANDOM(i + 1, n)]
end for
```

这个算法实现了熊二教授的意图吗？

Problem 8

熊翠花教授建议用下面的过程来产生一个均匀随机排列：

Algorithm 2 Permute By Cyclic

Input: an array A of length n

Output: a uniform random permutation of A

let $B[1..n]$ be a new array
$offset = \text{RANDOM}(1, n)$
for $i = 1$ **to** n **do**
  $dest = i + offset$
  if $dest > n$ **then**
    $dest = dest - n$
  end if
  $B[dest] = A[i]$
end for
return B

请说明每个元素 $A[i]$ 出现在 B 中任何特定位置的概率是 $1/n$ 。然后通过说明排列结果不是均匀随机排列，表明熊翠花教授错了。

Problem 8 continued on next page…

(续页)