

算法导论习题选集

作业 4

节选自《算法导论》教材第三版

课程网站: <https://algorithm.cuijiacai.com>

Problem 1

(概率计数) 利用一个 b 位的计数器, 我们一般只能计数到 $2^b - 1$ 。而用 R.Morris 的 **概率计数法**, 我们可以计数到一个大得多的值, 代价是精度有所损失。

对 $i = 0, 1, \dots, 2^b - 1$, 令计数器值 i 表示 n_i 的计数, 其中 n_i 构成了一个非负的递增序列。假设计数器初值为 0, 表示计数 $n_0 = 0$ 。INCREMENT 运算单元工作在一个计数器上, 它以概率的方式包含值 i 。如果 $i = 2^b - 1$, 则该运算单元报告溢出错误; 否则, INCREMENT 运算单元以概率 $1/(n_{i+1} - n_i)$ 把计数器增加 1, 以概率 $1 - 1/(n_{i+1} - n_i)$ 保持计数器不变。

对所有的 $i \geq 0$, 若选择 $n_i = i$, 此计数器就是一个普通的计数器。若选择 $n_i = 2^{i-1} (i > 0)$, 或者 $n_i = F_i$ (第 i 个斐波那契数, 参见作业 3 问题 2), 则会出现更多有趣的情形。

对于这个问题, 假设 n_{2^b-1} 已经足够大, 发生一个溢出错误的概率可以忽略。

1. 请说明在执行 n 次 INCREMENT 操作后, 计数器所表示的数期望值正好是 n 。
2. 分析计数器表示的计数的方差依赖于 n_i 序列。我们来看一个简单情形: 对所有 $i \geq 0$, $n_i = 100i$ 。在执行了 n 次 INCREMENT 操作后, 请估计计数器所表示数的方差。

(续页)

Problem 2

(查找一个无序数组) 本题将分析三个算法, 他们在一个包含 n 个元素的无序数组 A 中查找一个值 x 。

考虑如下的随机策略: 随机挑选 A 中的一个下标 i 。如果 $A[i] = x$, 则终止; 否则, 继续挑选 A 中一个新的随机下标。重复随机挑选下标, 直到找到一个下标 j , 使 $A[j] = x$ 或者直到我们已经检查过 A 中的每一个元素。注意, 我们每次都是从全部下标的集合中挑选, 于是可能会不止一次地检查某个元素。

1. 请写出过程 RANDOM-SEARCH 的伪代码来实现上述策略。确保当 A 中所有下标都挑选过时, 你的算法应停止。
2. 假定恰好有一个下标 i 使得 $A[i] = x$ 。在我们找到 x 和 RANDOM-SEARCH 结束之前, 必须挑选 A 下标的数目期望是多少?
3. 假设有 $k \geq 1$ 个下标 i 使得 $A[i] = x$, 推广你对第 2 问的解答。在找到 x 或 RANDOM-SEARCH 结束之前, 必须挑选 A 下标的数目期望是多少? 你的答案应该是 n 和 k 的函数。
4. 假设没有下标 i 使得 $A[i] = x$ 。在检查完 A 的所有元素或 RANDOM-SEARCH 结束之前, 我们必须挑选的 A 的下标的数目期望是多少?

现在考虑一个确定性的线性查找算法, 我们称之为 DETERMINSTIC-SEARCH。具体地说, 这个算法在 A 中顺序查找 x , 考虑 $A[1], A[2], A[3], \dots, A[n]$, 直到找到 $A[i] = x$, 或者到达数组的末尾。假设输入数组的所有排列都是等可能的。

5. 假设恰好有一个下标 i 使得 $A[i] = x$ 。DETERMINSTIC-SEARCH 平均情形的运行时间是多少? DETERMINSTIC-SEARCH 最坏情况的运行时间又是多少?
6. 假设有 $k \geq 1$ 个下标 i 使得 $A[i] = x$, 推广你对第 5 问的解答。DETERMINSTIC-SEARCH 平均情形的运行时间是多少? DETERMINSTIC-SEARCH 最坏情形的运行时间又是多少? 你的答案应该是 n 与 k 的函数。
7. 假设没有下标 i 使得 $A[i] = x$ 。DETERMINSTIC-SEARCH 平均情形的运行时间是多少? DETERMINSTIC-SEARCH 最坏情形的运行时间又是多少?

最后, 考虑一个随机算法 SCRAMBLE-SEARCH, 它先将输入数组随机变换排列, 然后在排列变换后的数组上, 运行上面的确定性线性查找算法。

8. 设 k 是满足 $A[i] = x$ 的下标的数目, 请给出在 $k = 0$ 和 $k = 1$ 情况下, 算法 SCRAMBLE-SEARCH 最坏情况的运行时间和运行时间期望。推广你的解答以处理 $k \geq 1$ 的情况。
9. 你将会使用 3 种查找算法中的哪一个? 解释你的答案。

(续页)

(续页)