

算法导论习题选集

作业 5

节选自《算法导论》教材第三版

课程网站: <https://algorithm.cuijiacai.com>

Problem 1

(用插入的方法建堆) 我们可以通过反复调用 MAX-HEAP-INSERT (详见第 5 讲 PPT 第 43 页) 实现向一个堆中插入元素, 考虑 BUILD-MAX-HEAP 的如下实现方式:

BUILD-MAX-HEAP'(A)

1 $A.heap-size = 1$

2 **for** $i = 2$ **to** $A.length$

3 MAX-HEAP-INSERT($A, A[i]$)

1. 当输入数据相同的时候, BUILD-MAX-HEAP 和 BUILD-MAX-HEAP' 生成的堆是否总是一样的? 如果是, 请证明; 否则, 请举出一个反例。
2. 证明: 在最坏情况下, 调用 BUILD-MAX-HEAP' 建立一个包含 n 个元素的堆的时间复杂度是 $\Theta(n \log n)$ 。

Problem 2

(对 d 叉堆的分析) d 叉堆与二叉堆很类似, 但其中的每个非叶结点有 d 个孩子, 而不是仅仅 2 个。

1. 如何在一个数组中表示一个 d 叉堆?
2. 包含 n 个元素的 d 叉堆的高度是多少? 请用 n 和 d 表示。
3. 请给出 EXTRACT-MAX 在 d 叉最大堆上的一个有效实现, 并用 d 和 n 表示出它的时间复杂度。
4. 给出 INSERT 在 d 叉最大堆上的一个有效实现, 并用 d 和 n 表示出它的时间复杂度。
5. 给出 INCREASE-KEY(A, i, k) 的一个有效实现。当 $k < A[i]$ 时, 它会触发一个错误, 否则执行 $A[i] = k$, 并更新相应的 d 叉最大堆。请用 d 和 n 表示出它的时间复杂度。

(续页)

Problem 3

(Young 氏矩阵) 在一个 $m \times n$ 的 Young 氏矩阵 (Young tableau) 中, 每一行的数据都是从左到右排序的, 每一列的数据都是从上到下排序的。Young 氏矩阵中也会存在一些值为 ∞ 的数据项, 表示那些不存在的元素。因此, Young 氏矩阵可以用来存储 $r \leq mn$ 个有限的数。

1. 画出一个包含元素为 $\{9, 16, 3, 2, 4, 8, 5, 14, 12\}$ 的 4×4 Young 氏矩阵。
2. 对于一个 $m \times n$ 的 Young 氏矩阵 Y 来说, 请证明: 如果 $Y[1, 1] = \infty$, 则 Y 为空; 如果 $Y[m, n] < \infty$, 则 Y 为满 (即包含 mn 个元素)。
3. 请给出一个在 $m \times n$ Young 氏矩阵上时间复杂度为 $O(m+n)$ 的 EXTRACT-MIN 的算法实现。你的算法可以考虑使用一个递归过程, 它可以把一个规模为 $m \times n$ 的问题分解为规模为 $(m-1) \times n$ 或者 $m \times (n-1)$ 的子问题。这里, 定义 $T(p)$ 用来表示 EXTRACT-MIN 在任一 $m \times n$ 的 Young 氏矩阵上的时间复杂度, 其中 $p = m+n$ 。给出求解 $T(p)$ 的递归表达式, 其结果为 $O(m+n)$ 。
4. 试说明如何在 $O(m+n)$ 的时间内, 将一个新元素插入到一个未满足的 $m \times n$ 的 Young 氏矩阵中。
5. 在不用其他排序算法的情况下, 试说明如何利用一个 $n \times n$ 的 Young 氏矩阵在 $O(n^3)$ 时间内将 n^2 个数进行排序。
6. 设计一个时间复杂度为 $O(m+n)$ 的算法, 它可以用来判断一个给定的数是否存储在 $m \times n$ 的 Young 氏矩阵中。

(续页)

(续页)