算法导论习题选集

作业 2

节选自《算法导论》教材第三版
课程网站：https://algorithm.cuijiacai.com

Problem 1

（渐近记号的性质） 假设 $f(n)$ 和 $g(n)$ 为渐近正函数。证明或反驳下面的每个猜测。

1. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$ 。
2. $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$ 。
3. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow \log(f(n)) = O(\log(g(n)))$ ，其中对所有足够大的 n ，有 $\log(g(n)) \geq 1$ 且 $f(n) \geq 1$ 。
4. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$ 。
5. $f(n) = O((f(n))^2)$ 。
6. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = \Omega(f(n))$ 。
7. $f(n) = \Theta(f(n/2))$ 。
8. $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$ 。

Problem 2

（O 与 Ω 的一些变形） 某些作者用一种与我们稍微不同的方式来定义 Ω： 假设我们使用 $\overset{\infty}{\Omega}$（读作“Ω 无穷”）来表示这种可选的定义。若存在常量 c ，使得对无穷多个整数 n ，有 $f(n) \geq cg(n) \geq 0$ ，则称 $f(n) = \overset{\infty}{\Omega}(g(n))$ 。

1. 证明：对渐近非负的任意两个函数 $f(n)$ 和 $g(n)$ ，或者 $f(n) = O(g(n))$ 或者 $f(n) = \overset{\infty}{\Omega}(g(n))$ 或者二者均成立，然而，如果使用 Ω 来代替 $\overset{\infty}{\Omega}$ ，那么该命题并不为真。
2. 描述用 $\overset{\infty}{\Omega}$ 代替 Ω 来刻画程序运行时间的潜在优点与缺点。

某些作者也用一种稍微不同的方式来定义 O ；假设使用 O' 来表示这种可选的定义。我们称 $f(n) = O'(g(n))$ 当且仅当 $|f(n)| = O(g(n))$ 。

3. 如果使用 O' 代替 O 但仍然使用 Ω ，定理 3.1（见 PPT 第 2 讲第 6 页或者教材 3.1 节）中的“当且仅当”的每个方向将出现什么情况？

有些作者定义 $\tilde{O}$ （读作“软 O”）来意指忽略对数因子的 O ：

$$\tilde{O} = \{f(n) | \exists c > 0, k > 0, n_0 > 0, \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq cg(n)\log^k(n)\}$$

4. 用一种类似的方式定义 $\tilde{\Omega}$ 和 $\tilde{\Theta}$ 。证明与定理 3.1（见 PPT 第 2 讲第 6 页或者教材 3.1 节）相对应的类似结论。

Problem 2 continued on next page…

(续页)