算法导论习题选集

作业 1

节选自《算法导论》教材第三版

课程网站：https://algorithm.cuijiacai.com

Problem 1

（在归并排序中对小数组采用插入排序） 虽然归并排序的最坏情况运行时间为 $\Theta(n \log n)$，而插入排序的最坏情况运行时间为 $\Theta(n^2)$，但是插入排序中的常量因子可能使得它在 n 较小时，在许多机器上实际运行得更快。因此，在归并排序中，当子问题变得足够小时，采用插入排序来使递归的叶 **变粗**是有意义的。考虑对归并排序的一种修改，其中使用插入排序来排序排序长度为 k 的 n/k 个子表，然后使用标准的合并机制来合并这些字表，这里 k 是一个待定的值。

1. 证明：插入排序最坏情况可以在 $\Theta(nk)$ 的时间内排序每个长度为 k 的 n/k 个子表。
2. 表明在最坏情况下如何在 $\Theta(n \log(n/k))$ 时间内合并这些子表。
3. 假定修改后的算法的最坏情况运行时间为 $\Theta(nk + n \log(n/k))$，要使修改后的算法与标准的归并排序具有相同的运行时间，作为 n 的一个函数，借助 Θ 记号，k 的最大值是什么?
4. 在实践中，我们应该如何选择 k？

Problem 2

（冒泡排序的正确性）冒泡排序是一种流行但低效的排序算法，它的作用是反复交换相邻的未按次序排列的元素。

Algorithm 1 Bubble-Sort($A[1..n]$)

```
1: for i = 1 to n − 1 do
2:     for j = n downto i + 1 do
3:         if A[j] < A[j − 1] then
4:             SWAP(A[j], A[j − 1])
5:         end if
6:     end for
7: end for
```

1. 假设 A' 表示 Bubble-Sort(A) 的输出。为了证明 Bubble-Sort(A) 正确，我们必须证明它将终止并且有：

$$A'[1] \le A'[2] \le \ldots \le A'[n]$$

其中 $n = A.length$ 。为了证明 $Bubble - Sort$ 确实完成了排序，我们还需要证明什么？
下面两部分将证明上述不等式。
2. 为第 2-6 行的 **for** 循环精确地说明一个循环不变式，并证明该循环不变式成立。你的证明应该使用第一讲中给出的循环不变式的证明结构。
3. 使用第 2 问证明的循环不变式的终止条件，为第 1-7 行的 **for** 循环说明一个循环不变式，并证明该循环不变式成立；该不变式将使你能证明第 1 问中提出的不等式。你的证明应该使用第一讲中给出的循环不变式的证明结构。
4. 冒泡排序的最坏情况运行时间是多少？与插入排序的运行时间相比，其性能如何？

Problem 2 continued on next page…

(续页)

Problem 3

（霍纳 (Horner) 规则的正确性） 给定系数 $a_0, a_1, ..., a_n$ 和 x 的值，代码片段

```
1: y = 0
2: for i = n downto 0 do
3:     y = a_i + x · y
4: end for
```

实现了用于求值多项式

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + xa_n)\cdots))$$

的霍纳规则。

1. 借助 Θ 记号，实现霍纳规则的以上代码片段的运行时间是多少?

2. 编写伪代码来实现朴素的多项式求值算法，该算法从头开始计算多项式的每个项。该算法的运行时间是多少？与霍纳规则相比，其性能如何？

3. 考虑以下循环不变式：

在第 2-4 行 **for** 循环每次迭代的开始有

$$y = \sum_{k=0}^{n-(i+1)} a_{k+i+1} x^k$$

把没有项的和式解释为等于 0 。遵照第 1 讲中给出的循环不变式证明的结构，使用该循环不变式来证明终止时有 $y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ 。

4. 最后证明上面给出的代码片段将正确地求由系数 $a_0, a_1, ..., a_n$ 刻画的多项式的值。

Problem 3 continued on next page…

(续页)

Problem 4

（逆序对） 假设 $A[1..n]$ 是一个有 n 个不同数的数组。若 $i < j$ 且 $A[i] > A[j]$ ，则二元组 (i, j) 称为 A 的一个 **逆序对 (inversion)** 。

1. 列出数组 $\langle 2, 3, 8, 6, 1 \rangle$ 的 5 个逆序对。

2. 由集合 $\{1, 2, ..., n\}$ 中的元素构成的什么数组具有最多的逆序对？它有多少逆序对？

3. 插入排序的运行时间与输入数组中逆序对的数量之间是什么关系？证明你的回答。

4. 给出一个确定在 n 个元素的任何排列中逆序对数量的算法，最坏情况需要 $\Theta(n \log n)$ 时间。（提示：修改归并排序。）

Problem 4 continued on next page…

(续页)