

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR  
PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM  
ENGENHARIA - PPGMNE**

**BÁRBARA DE CÁSSIA XAVIER CASSINS AGUIAR**

**OTIMIZAÇÃO POR NUVEM DE PARTÍCULAS PARA PROBLEMAS DE  
ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS CAPACITADOS COM FROTA HETEROGÊNEA  
E COLETA E ENTREGA SIMULTÂNEA**

**CURITIBA  
2014**

**BÁRBARA DE CÁSSIA XAVIER CASSINS AGUIAR**

**OTIMIZAÇÃO POR NUVEM DE PARTÍCULAS PARA PROBLEMAS DE  
ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS CAPACITADOS COM FROTA HETEROGRÊNEA  
E COLETA E ENTREGA SIMULTÂNEA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, na Área de Concentração em Programação Matemática, dos Setores de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique Siqueira

Coorientadora: Profa. Dra. Luzia Vidal de Souza

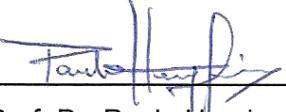
**CURITIBA  
2014**

## TERMO DE APROVAÇÃO

BÁRBARA DE CÁSSIA XAVIER CASSINS AGUIAR

OTIMIZAÇÃO POR NUVEM DE PARTÍCULAS PARA PROBLEMAS DE  
ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS CAPACITADOS COM FROTA HETEROGÊNEA E  
COLETA E ENTREGA SIMULTÂNEA.

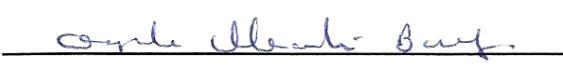
Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de doutor no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

  
Prof. Dr. Paulo Henrique Siqueira.

Orientador – Membro do PPGMNE/UFPR.

  
Prof. Dr. Alan Ricardo da Silva.

Membro da UNB.

  
Prof.ª Dr.ª Ângela Olandoski Barboza.

Membro da UTFPR.

  
Prof.ª Dr.ª Deise Maria Bertholdi Costa.

Membro do PPGMNE/UFPR.

  
Prof. Dr. Luiz Fernando Nunes.

Membro da UTFPR.

Curitiba, 01 de agosto de 2014.

*Para os meus amores:  
Giancarlo, Eduardo e Guilherme.*

## **Agradecimentos**

Agradeço a todas as pessoas que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Ao professor, amigo e orientador Paulo Henrique Siqueira pela orientação, ensinamentos, colaboração, paciência e incentivo, que tornaram possível a realização deste trabalho.

À professora Luzia Vidal de Souza, pela coorientação, amizade e também pela leitura cuidadosa do texto, cujas sugestões melhoraram a redação final.

Aos professores do Programa de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, por todo o conhecimento transmitido.

Aos meus queridos filhos Eduardo e Guilherme, que tornam a minha vida mais feliz e compensadora.

Ao meu querido marido Giancarlo de França Aguiar, que eu tanto admiro, pelo amor, carinho, atenção, assistência, paciência e incentivo em tudo o que faço.

À minha mãe, Ligia, por todo amor, apoio, compreensão e auxílio sempre presentes em minha vida.

Aos meus irmãos, Juliano e Samanta, pelo apoio, torcida e companheirismo nos momentos difíceis.

Aos meus amigos do Departamento de Expressão Gráfica, que sempre me apoiaram e me incentivaram.

À Universidade Federal do Paraná, pela oportunidade de cursar o doutorado.

A DEUS, nosso Senhor, pois é nele em que me apoio nos momentos mais difíceis e também nos mais alegres.

A todos vocês, meus sinceros agradecimentos.

“O homem que decide parar até que as coisas melhorem, verificará mais tarde que aquele que não parou e colaborou com o tempo, estará tão adiante que jamais será alcançado.”

Rui Barbosa.

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma nova estratégia de solução para problemas de roteirização de veículos capacitados, com frota heterogênea fixa e entrega e coleta simultânea utilizando a meta-heurística Otimização por Nuvem de Partículas Discreta Adaptada (ONPDA) proposta. O algoritmo Otimização por Nuvem de Partículas (ONP) faz parte de uma área de estudos conhecida como Inteligência de Enxame, que é baseado no comportamento inteligente de revoadas de pássaros, e contempla uma série de algoritmos que simulam o comportamento social encontrado na natureza para aplicações na área de otimização. O modelo proposto difere do ONP clássico, as adaptações propostas estão presentes na codificação das partículas e nas operações estabelecidas. A criação de novas gerações de partículas, a fim de aumentar a diversidade de busca para o problema também foi utilizada. A técnica ONPDA proposta foi aplicada ao Problema do Transporte Escolar em 32 municípios do Estado do Paraná e os resultados dos experimentos computacionais foram comparados com os resultados obtidos com a utilização da heurística *ALBH* (*Adapted Location Based Heuristic*). Os resultados apresentados pela metodologia proposta foram superiores à técnica *ALBH* em 29 dos 32 municípios testados, proporcionando uma economia para estes municípios que variou de 0,10% à 21,37% na quilometragem diária total percorrida. Os resultados encontrados pelo ONPDA foram também comparados à solução exata para o problema executada no Software Lingo aplicado ao problema do Transporte Escolar a quatro municípios do Paraná. Para a solução exata foram escolhidos os menores municípios devido à complexidade computacional da formulação do problema. Os resultados mostraram que o modelo proposto encontrou a solução ótima para três dos quatro municípios testados. A experiência computacional realizada mostrou que o algoritmo desenvolvido obteve soluções de boa qualidade. Os resultados apontam para a efetividade da abordagem proposta para os conjuntos de problemas analisados.

Palavras-chave: Otimização por Nuvem de Partículas. Roteirização. Transporte Escolar.

## ABSTRACT

This work presents a new strategy for solving problems of capacitated vehicle routing with heterogeneous fixed fleet and delivery and simultaneous collection using meta-heuristic Particle Swarm Optimization Discrete Adapted (PSODA) suggestion. The algorithm Particle Swarm Optimization (PSO) is part of an area of research known as Swarm Intelligence which is based on the intelligent behavior of flight of birds, and comprises a series of algorithms that simulate the social behavior found in nature for applications in the area of optimization. The proposed model differs from classic PSO, suggested adaptations are present in the coding of the particles and on established operations. The development of new generations of particles in order to increase the diversity of search to the problem was also used. The proposed technique PSODA was applied to Problem of School Transportation in 32 municipalities of the State of Paraná and the results of computational experiments were compared with the results obtained from the use of heuristic *ALBH* (Adapted Location Based Heuristic). The results presented by the proposed methodology were superior in comparison to ALBH technique in 29 of 32 cities tested, providing savings for these counties ranged from 0,10% to 21,37% in the total daily mileage. The results were also compared by PSODA to the exact solution to the problem implemented in software Lingo applied to the problem of the School Transportation in four municipalities of Paraná. Exact solution for the smaller municipalities were chosen due to the computational complexity of the problem formulation. The results showed that the proposed model found the optimal solution in three of four cities tested. The computational experiment conducted showed that the proposed algorithm could obtain good quality solutions. The results show the effectiveness of the proposed approach for sets of analyzed problems.

Keywords: Particle Swarm Optimization. Routing. School Transportation.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 - ALGORITMO CLÁSSICO DE NUVEM DE PARTÍCULAS.....	39
FIGURA 2.2 - FLUXOGRAMA DO ALGORITMO ONP .....	40
FIGURA 3.1 - TRAJETO PERCORRIDO PELO VEÍCULO 2 ( $V_2$ ) .....	55
FIGURA 3.2 - TRAJETO PERCORRIDO POR ( $V_2$ ).....	61
FIGURA 3.3 - PROCESSO DE CRIAÇÃO DAS GERAÇÕES .....	68
FIGURA 3.4 - ALGORITMO DE NUVEM DE PARTÍCULAS DISCRETA.....	69
FIGURA 5.1 - TEMPO DE EXECUÇÃO DAS TÉCNICAS <i>ALBH</i> E <i>ONPDA</i> .....	85
FIGURA 5.2 - NÚMERO DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL (MANHÃ) .....	88
FIGURA 5.3 - NÚMERO DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL (TARDE) .....	89
FIGURA 5.4 - NÚMERO DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL (NOITE) .....	91
FIGURA 5.5 - DIFERENÇAS ENTRE AS QUILOMETRAGENS OBTIDAS PELOS DOIS ALGORITMOS .....	91
FIGURA 5.6 - DIFERENÇAS ENTRE AS QUILOMETRAGENS OBTIDAS PELOS DOIS ALGORITMOS .....	92
FIGURA 5.7 - MAPA DE ANAHY COM A ROTA DO TURNO DA MANHÃ ( <i>ALBH</i> ) ...	94
FIGURA 5.8 - MAPA DE ANAHY COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ ( <i>ONPDA</i> ).....	94
FIGURA 5.9 - MAPA DE IRACEMA DO OESTE COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ ( <i>ALBH</i> ) .....	95
FIGURA 5.10 - MAPA DE IRACEMA DO OESTE COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ ( <i>ONPDA</i> ) .....	95
FIGURA 5.11 - MAPA DE SÃO SEBASTIÃO DA AMOREIRA COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ ( <i>ALBH</i> ).....	96
FIGURA 5.12 - MAPA DE SÃO SEBASTIÃO DA AMOREIRA COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ ( <i>ONPDA</i> ) .....	96
FIGURA 5.13 - MAPA DE ABATIÁ COM AS ROTAS DO TURNO DA TARDE ( <i>ALBH</i> ) .....	97
FIGURA 5.14 - MAPA DE ABATIÁ COM AS ROTAS DO TURNO DA TARDE ( <i>ONPDA</i> ).....	97
FIGURA 5.15 - MAPA DE AGUDOS DO SUL COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ ( <i>ALBH</i> ) .....	98

FIGURA 5.16 - MAPA DE AGUDOS DO SUL COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ (ONPDA) .....	98
FIGURA 5.17 - MAPA DE AGUDOS DO SUL COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ (ALBH) .....	99
FIGURA 5.18 - MAPA DE AGUDOS DO SUL COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ (ONPDA) .....	99
FIGURA 5.19 - MAPA DE CAFEARA COM A ROTA DO TURNO DA MANHÃ (ALBH) .....	100
FIGURA 5.20 - MAPA DE CAFEARA COM A ROTA DO TURNO DA MANHÃ (ONPDA) .....	100
FIGURA 5.21 - MAPA DE FERNANDES PINHEIRO COM AS ROTAS DO TURNO DA TARDE (ALBH) .....	101
FIGURA 5.22 - MAPA DE FERNANDES PINHEIRO COM AS ROTAS DO TURNO DA TARDE (ONPDA) .....	101
FIGURA 5.23 - MAPA DE PAULA FREITAS COM AS ROTAS DO TURNO DA TARDE (ALBH) .....	102
FIGURA 5.24 - MAPA DE PAULA FREITAS COM AS ROTAS DO TURNO DA TARDE (ONPDA) .....	102
FIGURA 5.25 - MAPA DE PINHAIS COM AS ROTAS DO TURNO DA TARDE (ALBH) .....	103
FIGURA 5.26 - MAPA DE PINHAIS COM AS ROTAS DO TURNO DA TARDE (ONPDA) .....	103
FIGURA 5.27 - MAPA DE SANTA AMÉLIA COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ (ALBH) .....	104
FIGURA 5.28 - MAPA DE SANTA AMÉLIA COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ (ONPDA) .....	104
FIGURA 5.29 - MAPA DE URAÍ COM AS ROTAS DO TURNO DA NOITE (ALBH) .....	105
FIGURA 5.30 - MAPA DE URAÍ COM AS ROTAS DO TURNO DA NOITE (ONPDA) .....	105
FIGURA 5.31 - DIFERENÇAS ENTRE AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS .....	107
FIGURA 5.32 - MAPA DE ANAHY COM OS TRÊS TRAJETOS DO TURNO DA NOITE (ONPDA) .....	107
FIGURA 5.33 - MAPA DE ANAHY COM AS ROTAS DO TURNO DA NOITE (ONPDA) .....	108
FIGURA 5.34 - MAPA DE ANAHY COM A ROTA DO TURNO DA NOITE (ALBH) .....	108
FIGURA 5.35 - MAPA DE ANAHY COM OS TRÊS TRAJETOS DO TURNO DA NOITE (EXATO) .....	109

FIGURA 5.36 - MAPA DE ANAHY COM AS ROTAS DO TURNO DA NOITE (EXATO) .....	109
FIGURA 5.37 - NÚMERO DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL PARA A SOLUÇÃO EXATA.....	110
FIGURA C1 - DIFERENÇAS ENTRE AS QUILOMETRAGENS NO TURNO DA MANHÃ.....	127
FIGURA C2 - DIFERENÇAS ENTRE AS QUILOMETRAGENS NO TURNO DA TARDE.....	128
FIGURA C3 - DIFERENÇAS ENTRE AS QUILOMETRAGENS NO TURNO DA NOITE.....	129

## LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1 - DADOS DAS ESCOLAS, DOS ALUNOS QUE UTILIZAM O TRANSPORTE ESCOLAR, DOS VEÍCULOS, PONTOS DE PARADA E NÚMERO DE RESTRIÇÕES DO PROBLEMA NO TURNO DA MANHÃ .....	56
TABELA 5.1 - RESULTADOS DA APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS <i>ALBH</i> E <i>ONPDA</i> PARA 32 MUNICÍPIOS DO PARANÁ .....	79
TABELA 5.2 - ECONOMIA ANUAL COM A APLICAÇÃO DA TÉCNICA <i>ONPDA</i> PARA 32 MUNICÍPIOS DO PARANÁ .....	82
TABELA 5.3 - DIFERENÇA DOS TEMPOS COMPUTACIONAIS ENTRE <i>ONPDA</i> E <i>ALBH</i> NOS TRÊS PERÍODOS DE ESTUDO.....	84
TABELA 5.4 - NÚMERO DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL DA TÉCNICA <i>ONPDA</i> NOS TRÊS PERÍODOS DE ESTUDO.....	86
TABELA 5.5 - NÚMERO DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL DA TÉCNICA <i>ONPDA</i> NO PERÍODO DA MANHÃ .....	87
TABELA 5.6 - NÚMERO DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL DA TÉCNICA <i>ONPDA</i> NO PERÍODO DA TARDE.....	88
TABELA 5.7 - NÚMERO DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL DA TÉCNICA <i>ONPDA</i> NO PERÍODO DA NOITE .....	90
TABELA 5.8 - COMPARAÇÃO ENTRE AS SOLUÇÕES OBTIDAS PELAS TÉCNICAS <i>ONPDA</i> E <i>ALBH</i> E A FORMULAÇÃO MATEMÁTICA ...	106
TABELA A1 - RELAÇÃO ENTRE O Nº DE NÓS E O Nº DE RESTRIÇÕES PARA O PROBLEMA DO TRANSPORTE ESCOLAR COM A FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	121
TABELA B1 - RELAÇÃO ENTRE O Nº DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL PARA O PROBLEMA DO TRANSPORTE ESCOLAR NO TURNO DA MANHÃ COM O MÉTODO EXATO.....	123
TABELA B2 - RELAÇÃO ENTRE O Nº DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL PARA O PROBLEMA DO TRANSPORTE ESCOLAR NO TURNO DA TARDE COM O MÉTODO EXATO .....	123
TABELA B3 - RELAÇÃO ENTRE O Nº DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL PARA O PROBLEMA DO TRANSPORTE ESCOLAR NO TURNO DA NOITE COM O MÉTODO EXATO.....	124
TABELA C1 - COMPARAÇÃO ENTRE AS QUILOMETRAGENS DIÁRIAS OBTIDAS EM CADA PERÍODO DE ESTUDO PELAS TÉCNICAS <i>ALBH</i> E <i>ONPDA</i> .....	125

## **LISTA DE QUADROS**

QUADRO 2.1 - TAXONOMIA DOS PROBLEMAS DE ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS.....	24
QUADRO 3.1 - CONJUNTOS DE NÓS E ARCOS.....	51
QUADRO 3.2 - ROTA FACTÍVEL .....	54
QUADRO 3.3 - CONTROLE DE CAPACIDADE.....	54
QUADRO 3.4 - QUILOMETRAGEM ACUMULADA .....	55
QUADRO 3.5 - MATRIZ DE CUSTOS .....	58
QUADRO 3.6 - POSIÇÃO SORTEADA É UM ALUNO.....	60
QUADRO 3.7 - QUILOMETRAGEM ACUMULADA .....	61
QUADRO 3.8 - POSIÇÃO SORTEADA É UMA ESCOLA. ....	62
QUADRO 3.9 - POSIÇÃO SORTEADA É UM VEÍCULO. ....	63
QUADRO 4.1 - VEÍCULOS UTILIZADOS .....	71
QUADRO 4.2 - DADOS UTILIZADOS POR PERÍODO DE ESTUDO .....	73
QUADRO 4.3 - NÚMERO DE NÓS POR PERÍODO DE ESTUDO .....	75

## **LISTA DE SIGLAS**

AES	Algoritmos evolutivos
AG	Algoritmos Genéticos
ALBH	<i>Adapted Location Based Heuristic</i>
ALNS	<i>Adaptive Large Neighborhood Search</i>
AS	<i>Simulated Anneling</i>
BT	Busca Tabu
CF	Colônia de Formigas
IA	Inteligência Artificial
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas
ONPDA	Otimização por Nuvem de Partículas Discreto Adaptado
ONP	Otimização por Nuvem de Partículas
PCV	Problema do Caixeiro Viajante
PRVC	Problema de Roteirização de veículos capacitado
PSO	Particle Swarm Optimization
RNA	Redes Neurais Artificiais
SEDU	Secretaria Estadual de Desenvolvimento Urbano
SEED	Secretaria Estadual de Educação

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	17
1.1 MOTIVAÇÃO .....	17
1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO .....	19
1.2.1 Objetivo Geral.....	19
1.2.2 Objetivos Específicos.....	19
1.3 METODOLOGIA .....	20
1.4 CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO .....	21
1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	21
<b>2 REVISÃO DA LITERATURA .....</b>	23
2.1 INTRODUÇÃO.....	23
2.2 MÉTODOS PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE ROTEIRIZAÇÃO .....	23
2.3 OTIMIZAÇÃO POR NUVEM DE PARTÍCULAS PARA RESOLVER O PROBLEMA DE ROTEIRIZAÇÃO .....	27
2.4 MÉTODOS PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE ROTEIRIZAÇÃO ESCOLAR .....	31
2.5 HEURÍSTICAS E METAHEURÍSTICAS.....	33
2.6 ALGORITMOS EVOLUTIVOS (AES).....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
2.7 INTELIGÊNCIA COLETIVA.....	36
2.8 OTIMIZAÇÃO POR NUVEM DE PARTÍCULAS (ONP).....	36
2.9 OTIMIZAÇÃO POR NUVEM DE PARTÍCULAS DISCRETA .....	39
2.9.1 População Inicial.....	42
2.9.2 Operadores Discretos .....	42
2.10 FITNESS.....	44
2.11 COMPARAÇÕES ENTRE ALGORITMOS GENÉTICOS E ONP.....	44
<b>3 MODELAGEM E METODOLOGIA .....</b>	46
3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE ESTUDO.....	46
3.2 A MODELAGEM .....	49
3.3 MODELAGEM DO PTE UTILIZANDO A META-HEURÍSTICA NUVEM DE PARTÍCULAS .....	57
3.3.1 A Matriz de Custos.....	58
3.3.2 Mudança de Posição dos Elementos na Partícula .....	59
3.4 O ALGORITMO PROPOSTO (ONPDA).....	63
3.4.1 Codificação da partícula .....	63
3.5 UTILIZAÇÃO DE GERAÇÕES.....	67
3.6 INÉRCIA NO ALGORITMO ONP ( $w$ ) .....	68

3.7 PSEUDO-CÓDIGO DO ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO POR NUVEM DE PARTÍCULAS DISCRETA ADAPTADO.....	68
<b>4 ESTUDO DE CASO.....</b>	<b>70</b>
4.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA.....	70
4.2 DADOS UTILIZADOS .....	71
4.3 UTILIZAÇÃO DA ONP DISCRETA .....	72
4. 4 ESTUDOS REALIZADOS .....	72
4.5 PARÂMETROS UTILIZADOS .....	76
4.6 SOLUÇÃO EXATA.....	77
<b>5 ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>78</b>
5.1 INTRODUÇÃO.....	78
5.2 RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MODELO PROPOSTO ONPDA NO PROBLEMA DO TRANSPORTE ESCOLAR .....	78
5.3 RESULTADOS DA COMPARAÇÃO ENTRE A SOLUÇÃO EXATA E A SOLUÇÃO OBTIDA PELA TÉCNICA PROPOSTA ONPDA .....	106
<b>6 CONCLUSÃO E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>111</b>
6.1 CONCLUSÕES.....	111
6.2 PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS .....	113
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>114</b>
<b>APÊNDICES .....</b>	<b>121</b>

## CAPÍTULO I

### 1 INTRODUÇÃO

#### 1.1 MOTIVAÇÃO

Soluções para problemas de otimização são importantes na vida cotidiana. Muitos problemas sociais, econômicos, científicos e de engenharia possuem variáveis que podem ser ajustadas de forma a produzir melhores resultados, podendo aumentar lucros ou diminuir custos. Ao longo dos anos foram desenvolvidas inúmeras técnicas para resolver tais problemas.

O desenvolvimento acelerado das técnicas de otimização e sua flexibilidade para aplicação em problemas complexos são fatores que favorecem sua utilização. Neste contexto, a análise, projeto e pesquisas envolvendo algoritmos de otimização são tópicos importantes a serem estudados. Uma das áreas em que técnicas de otimização vêm sendo aplicadas e que será objetivo de estudo desta pesquisa são as que envolvem problemas de roteirização.

O problema de roteirização de veículos consiste em definir roteiros de veículos que minimizem o custo total de atendimento, cada um dos quais iniciando e terminando no depósito ou base dos veículos, assegurando que cada ponto seja visitado exatamente uma vez e a demanda em qualquer rota não exceda a capacidade do veículo que a atende (LAPORTE *et al.*, 2000).

Em Cunha (2000) a roteirização de veículos é definida como o termo utilizado para designar o processo de determinação de um ou mais roteiros ou sequências de paradas a serem cumpridas por veículos de uma frota, com o objetivo de visitar um conjunto de pontos geograficamente dispersos, em locais pré-determinados, que necessitam de atendimento.

Os modelos de roteirização têm a função de determinar a melhor rota para coleta, entrega ou visitas para atendimento de solicitações de serviços e de definir os pontos de parada em cada roteiro de um dado veículo. Adicionalmente, podem servir de subsídio à determinação do número de veículos envolvidos e suas

capacidades num processo de roteirização (BALLOU, 1993), de forma a reduzir os custos de transporte e o tempo de atendimento aos clientes.

Sob a ótica de otimização, os problemas de roteirização de veículos, pertencem à categoria conhecida como *NP-hard*, o que significa que possuem ordem de complexidade exponencial, ou seja, não se conhece um algoritmo com tempo polinomial em função do tamanho da entrada (número de requisições de transporte e veículos disponíveis) capaz de, dada uma solução, verificar se esta é a de custo mínimo (solução ótima), justificando a utilização de heurísticas e meta-heurísticas para solução do problema.

Dentre os problemas de roteirização de veículos está o problema do Transporte Escolar (PTE). Neste, os veículos coletam os estudantes em seus pontos de parada e os entregam em suas respectivas escolas.

De acordo com o INEP (2006) o transporte escolar representa o segundo maior custo com educação para os municípios. O alto custo se deve principalmente aos gastos de manutenção exigidos e a aquisição de veículos apropriados e seguros para o transporte dos alunos (SOUZA, 2004). Outros fatores importantes a serem considerados, são o tempo de viagem dos estudantes, a lotação dos veículos, os horários de entrada e saída das escolas, dentre outros. Todos estes fatores dificultam o gerenciamento do sistema do transporte escolar, justificando a importância da utilização de ferramentas adequadas, que auxiliem na tomada de decisões na elaboração dos roteiros e na designação dos veículos a serem utilizados.

De acordo com o trabalho abrangente de Park e Kim (2010), os problemas de roteirização do Transporte Escolar disponíveis na literatura são normalmente desenvolvidos em um processo que envolve cinco etapas principais com algoritmos e aplicações existentes para estudos de casos reais, são elas: identificação dos pontos de parada; atribuição dos alunos aos pontos de parada; geração da rota de cada veículo; ajuste do tempo de início das aulas na escola e, finalmente, a construção das rotas.

Os algoritmos utilizados na solução do problema de roteirização do Transporte Escolar, mostram que não há uma abordagem padronizada para resolver este problema, estando intimamente relacionado com outros tipos de problema.

O problema de roteamento do Transporte Escolar tem sido exaustivamente estudado no campo da pesquisa operacional, desde a sua primeira discussão em

uma publicação de Newton e Thomas (1969), quando foi formulado como uma variação do problema de roteamento de veículos tradicional. No entanto, a pesquisa sobre este problema continua sendo de extrema importância, pois as aplicações do problema aos casos reais apresentam configurações diferentes do sistema e restrições específicas para cada caso (PARK; KIM, 2010).

O presente trabalho apresenta uma estratégia de solução para o problema do Transporte Escolar e suas aplicações em alguns municípios do Estado do Paraná. Um estudo sobre o algoritmo de Otimização por Nuvem de Partículas (ONP) é apresentado, e o algoritmo proposto é aplicado ao problema de Roteirização de Veículos no Transporte Escolar para 32 municípios do Estado do Paraná. ONP é uma técnica de otimização meta-heurística desenvolvida em 1995 por Kennedy e Eberhart, com base na análise do comportamento inteligente de revoadas de pássaros. O algoritmo ONP faz parte de uma área de estudos conhecida como Inteligência de Enxame, que contempla uma série de algoritmos que simulam o comportamento social encontrado na natureza e objetiva otimizar problemas computacionais utilizando estas técnicas.

Neste trabalho, o problema do Transporte Escolar estudado pode ser classificado como um problema de roteirização de veículos capacitado, com frota heterogênea fixa e entrega e coleta simultânea.

Com a aplicação do algoritmo proposto, espera-se reduzir os custos referentes à quilometragem diária total e o tempo de permanência dos alunos dentro dos veículos.

## 1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

### 1.2.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo geral desenvolver e testar uma nova estratégia de solução para problemas de roteirização de veículos capacitado, com frota heterogênea fixa e entrega e coleta simultânea com a aplicação da meta-heurística proposta Otimização por Nuvem de Partículas Discreta Adaptada (ONPDA).

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Realizar um estudo teórico sobre o algoritmo ONP e seu comportamento;
- Propor um método de otimização para o problema de roteirização de veículos capacitado, com frota heterogênea e entrega e coleta simultânea, adaptando a meta-heurística ONP desenvolvida originalmente para problemas contínuos para o problema considerado que é discreto;
- Desenvolver e testar o novo algoritmo ONPDA e mostrar sua eficiência quando aplicado para resolver o problema do Transporte Escolar no Paraná.
- Comparar os resultados obtidos com o novo algoritmo ONPDA e a heurística *ALBH (Adapted Local Based Heuristic)* de Siqueira e Souza (2012) para o problema do Transporte Escolar;
- Comparar os resultados do ONPDA com os resultados obtidos pela solução exata executada no Software Lingo para problemas do Transporte Escolar de pequeno porte; e
- Mostrar as vantagens e limitações do método proposto, com a realização de testes para a validação da metodologia proposta.

### 1.3 METODOLOGIA

Estudos teóricos e práticos são apresentados neste trabalho, iniciando-se por um estudo teórico sobre o ONP e seu comportamento. Neste estudo de caso, o algoritmo proposto é aplicado a um problema de roteirização de veículos para o Transporte Escolar em 32 municípios do Estado do Paraná. Para cumprir os objetivos desse trabalho, a seguinte metodologia é adotada: são realizadas várias simulações com o algoritmo ONPDA proposto variando-se o número de partículas na população, o número de iterações e os parâmetros envolvidos no ONP. O algoritmo proposto difere do ONP clássico na codificação das partículas e nas operações estabelecidas.

Finalmente os resultados são analisados e comparados com resultados encontrados pela heurística *ALBH* de Siqueira e Souza (2012) e com os resultados obtidos pelo método exato executado no Software Lingo para problemas do Transporte Escolar de pequeno porte.

## 1.4 CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

O presente trabalho apresenta contribuições relacionadas aos seguintes aspectos principais:

- O desenvolvimento de um algoritmo baseado em ONP eficiente para a resolução de problemas de roteirização;
- Desenvolvimento e a aplicação de um novo algoritmo de Otimização por Nuvem de Partículas na resolução do Problema de Roteirização do Transporte Escolar;
- Oferecer novas ferramentas para a solução dos Problemas de Otimização Combinatória, que possuem grande aplicabilidade prática e são dos mais conhecidos dentre os problemas de otimização, pois, ainda não é significativo o número de aplicações do ONP na resolução de problemas desta categoria;
- Contribuir com a investigação do problema do Transporte Escolar sob a perspectiva de uma aplicação prática, e com a proposta de uma abordagem eficiente baseada no algoritmo ONP para a sua solução.

Como contribuição também desta tese, foram submetidos e publicados artigos em congresso e revista: (AGUIAR; SIQUEIRA; SOUZA, 2013; AGUIAR, et al., 2014).

## 1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em 6 capítulos, incluindo-se esta introdução.

No capítulo II são apresentadas algumas referências de trabalhos sobre os problemas de roteirização do Transporte Escolar, além de aplicações do Algoritmo Otimização por Nuvem de Partículas na resolução de problemas de roteirização.

No capítulo III são definidos o problema da roteirização de veículos escolar e o Algoritmo de Otimização por Nuvem de Partículas. A técnica de Otimização por Nuvem de Partículas Discreta Adaptada é apresentada, o problema específico tratado neste trabalho é definido e apresenta-se sua solução por meio da Otimização por Nuvem de Partículas.

O capítulo IV mostra um estudo de caso para o problema de Roteirização Escolar em 32 municípios do Estado do Paraná. São definidas as restrições para a

construção das matrizes de distâncias deste problema e os dados de entrada para o treinamento do algoritmo para a obtenção das rotas.

O capítulo V apresenta os resultados encontrados com o Algoritmo definido no capítulo III.

No capítulo VI são feitas as considerações finais do trabalho e a proposta de continuidade da pesquisa.

## CAPÍTULO II

### 2 REVISÃO DA LITERATURA

#### 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são relacionados alguns dos trabalhos publicados recentemente que utilizam técnicas heurísticas para a solução do problema de roteirização de veículos e do problema do Transporte Escolar. São também citadas algumas publicações que mostram diversas aplicações da meta-heurística Otimização por Nuvem de Partículas (ONP) para resolver Problemas de Roteirização, em particular a versão do problema ONP discreto, que é a versão proposta com adaptações neste trabalho chamada de ONPDA.

Também serão apresentados alguns trabalhos que propuseram adaptações de técnicas conhecidas que geram bons resultados em problemas de otimização combinatória *NP-hard*, tais como: Algoritmos Genéticos (AG), Redes Neurais Artificiais (RNA), *Simulated Annealing* (SA), Busca Tabu (BT), Otimização por Nuvem de partículas (ONP), Colônia de Formigas (CF), e outras técnicas, como podem ser observadas na próxima seção.

#### 2.2 MÉTODOS PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE ROTEIRIZAÇÃO

Os problemas de roteirização de veículos pertencem a uma categoria ampla de problemas da pesquisa operacional conhecida como problemas de otimização em redes. Nessa categoria encontram-se problemas clássicos, como o problema do fluxo máximo, problema do caminho mínimo, problema de transporte e o problema de designação (GOLDEN, *et al.*, 1981).

Em Laporte (1992) os métodos de solução de problemas de roteirização são classificados em dois grupos: algoritmos exatos e heurísticos. Cunha (2000), propôs a seguinte classificação para os métodos de solução de problemas de roteirização de veículos:

- métodos exatos – métodos que possibilitam a obtenção da solução ótima;

- métodos heurísticos – métodos que permitem obter apenas soluções aproximadas, que em geral, são obtidas mais rapidamente;
- métodos emergentes – métodos que reúnem as técnicas mais recentes e avançadas, não tradicionais, baseadas em sistemas especialistas, ou em métodos de busca ou iterativos, como por exemplo, Algoritmos Genéticos e Busca Tabu.

As características para taxonomia aplicáveis a problemas de roteirização de veículos, conforme definidas por Bodin *et al.*(1983), são apresentadas no Quadro 2.1.

QUADRO 2.1 - TAXONOMIA DOS PROBLEMAS DE ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS  
(continua)

<b>Características</b>	<b>Opções possíveis</b>
1.Tamanho da frota disponível	- um único veículo - mais de um veículo
2.Tipo de frota disponível	- frota homogênea - frota heterogênea - Tipos especiais de veículos (ex:corpartimentalizados)
3. Localização da frota disponível	- uma única garagem - múltiplas garagens
4. Natureza da demanda	- demanda determinística - demanda estocástica - permitida satisfação parcial da demanda
5. Localização da demanda	- nos nós (não necessariamente todos) - nos arcos (não necessariamente todos) - combinação de nós e arcos
6. Restrições temporais da demanda	- não existentes - janelas de tempo rígidas - janelas de tempo flexíveis com penalidade - combinação de janelas de tempo rígidas e flexíveis
7. Rede subjacente	- rede direcionada - rede não-direcionada - Combinação de rede direcionada e não-direcionada - rede euclidiana
8. Restrições de capacidade do veículo	- não existentes - iguais para todos os veículos - diferentes para cada veículo
9. Restrições de duração máxima da rota	- não existentes - iguais para todos os veículos - diferentes para cada veículo

(conclusão)

10. Operação	<ul style="list-style-type: none"> <li>- somente coletas</li> <li>- somente entregas</li> <li>- combinação de coleta e entrega</li> <li>- com ou sem desmembramento de carga</li> </ul>
11. Custos	<ul style="list-style-type: none"> <li>- custos fixos</li> <li>- custos variáveis</li> <li>- custos por violação de restrições</li> <li>- custos por não atendimento de demandas</li> </ul>
12. Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> <li>- minimizar total de custos variáveis</li> <li>- minimizar soma de custos fixos e variáveis</li> <li>- minimizar número de veículos (fixo)</li> <li>- maximizar função objetivo baseada em nível de serviço ou conveniência</li> <li>- maximizar função objetivo baseada em prioridades do usuário</li> </ul>

Diante da diversidade de fatores e condicionantes que aparecem em problemas de roteirização, como ilustrado no Quadro 2.1, para que possam ser atingidas soluções de qualidade e para que sejam supridas as demandas particulares de cada problema originado de situações reais, são necessárias estratégias matemáticas eficazes e robustas o suficiente para serem aplicadas aos mais diferentes problemas.

A seguir são apresentados alguns trabalhos publicados para solucionar o Problema de Roteirização de Veículos.

Modares *et al.* (1999) mostraram como uma Rede Neural auto organizável pode resolver tanto o problema dos Múltiplos Caixeiros Viajantes, quanto o problema de roteirização de veículos capacitado. Os resultados obtidos foram comparados com técnicas similares encontradas na literatura e apresentaram resultados satisfatórios.

No trabalho de Laporte *et al.* (2000), diversas técnicas para resolver o problema de roteirização de veículos são apresentadas, incluindo técnicas tradicionais como *savings* de Clark e Wright, métodos de duas fases, e meta-heurísticas como Busca Tabu. Foram apresentados resultados comparativos entre todas as técnicas mostradas no artigo, usando como parâmetros o tempo computacional e a qualidade das soluções encontradas.

Os autores Toth e Vigo (2003) utilizaram a técnica de Busca Tabu Granular para resolver o problema de roteirização de veículos tradicional, aplicando a metodologia a vários conjuntos de dados encontrados na literatura e apresentando

comparações dos resultados com outras técnicas. Os resultados dos testes computacionais mostraram que a abordagem proposta é promissora para a resolução do problema.

Lu e Dessouky (2004), apresentaram uma abordagem alternativa para o problema de roteirização de veículos com entrega e coleta simultâneas com frota heterogênea. Este problema de programação inteira é resolvido com um algoritmo *branch-and-cut* com o uso de 4 classes de desigualdades válidas da formulação matemática. Os autores mostraram que a técnica é capaz de determinar soluções ótimas para problemas com 5 veículos e 17 clientes.

A heurística ALNS (*Adaptive Large Neighborhood Search*), proposta por Ropke e Pisinger (2006a), foi aplicada a um conjunto de testes de problemas de roteirização com entrega e coleta simultâneas considerando restrições de janelas de tempo. Os resultados obtidos apresentaram redução considerável no tempo de percurso das rotas. A ideia básica desta técnica consiste na combinação de várias heurísticas em uma mesma heurística para obter melhores resultados. A técnica foi utilizada em uma base de dados contendo 350 problemas com mais de 500 instâncias, apresentando resultados com melhoria no tempo computacional e na qualidade da solução em 50% dos problemas.

Em Ropke e Pisinger (2006b; 2007), os autores aplicaram a técnica ALNS na resolução de 5 diferentes tipos de problemas de roteirização de veículos: capacitado, com janelas de tempo, com múltiplos depósitos, dependente do local, no qual os clientes só podem ser atendidos por determinados tipos de veículos devido aos acessos, e aberto, no qual os veículos não precisam retornar ao depósito. A heurística foi aplicada a um conjunto de 338 problemas encontrados na literatura para os quais houve melhoria em 67,15% dos casos.

O trabalho de Belfiore (2006), aborda o problema de roteirização de veículos com entregas fracionadas e frota heterogênea. As estratégias de solução propostas consistem na implementação de heurísticas construtivas e da meta-heurística *Scatter Search*. Os modelos foram testados em uma rede de varejo do Brasil que é abastecida a partir de um centro de distribuição e em algumas instâncias de três conjuntos de problemas da literatura. Os resultados apresentados são similares ou superiores às melhores soluções encontradas.

## 2.3 OTIMIZAÇÃO POR NUVEM DE PARTÍCULAS PARA RESOLVER O PROBLEMA DE ROTEIRIZAÇÃO

Souza (2006), apresenta algoritmos baseados na técnica de Otimização por Nuvem de Partículas para dois problemas de otimização combinatória: o Problema do Caixeiro Viajante e o Problema da Árvore Geradora Mínima Restrita em Grau Multicritério. Os resultados foram comparados com três heurísticas de alta qualidade para estes problemas, são elas: LK de Lin e Kernighan (1973), AESSEA (*Archived Elitist Steady-State Evolutionary Algorithm*) apresentada por Knowles e Corne (2001) e Tourmerge de Cook e Seymour (2003). A comparação dos resultados mostrou que o algoritmo proposto supera em tempo computacional e qualidade da solução as três heurísticas em relação aos melhores resultados encontrados.

Chen *et al.* (2006) utilizaram um algoritmo híbrido discreto de Otimização por Enxame de Partículas para o problema de roteamento de veículos capacitado. O algoritmo utilizado combina pesquisa global e busca local para encontrar os melhores resultados e usa *Simulated Annealing* para evitar que a busca não estacione em um mínimo ou máximo local. O estudo mostrou que o tempo computacional do algoritmo proposto é viável e que a abordagem é eficaz para problemas de roteamento de veículos capacitado, especialmente para problemas de grande porte.

No trabalho de Wang *et al.* (2006), o problema de roteamento de veículo aberto é resolvido com o método de Otimização por Nuvem de Partículas. No problema de roteamento de veículo aberto, o veículo não retorna ao depósito depois de atender o último cliente em uma rota. Um novo método de codificação das partículas é proposto nos experimentos realizados pelos autores e uma série de exemplos numéricos foi testada. A fim de melhorar a qualidade da solução e modificar soluções infactíveis, algumas heurísticas como 2-Opt e o algoritmo GENI (*Nearest Insertion Algorithm*) foram utilizadas. Os resultados mostraram que o algoritmo ONP é eficiente para o problema de roteamento de veículos aberto, pois apresentou melhorias na qualidade da solução.

No trabalho de Goldbarg *et al.* (2008), os autores apresentam um algoritmo que se baseia na técnica de Otimização por Nuvem de Partículas para o problema do Caixeiro Viajante (PCV). A abordagem proposta utiliza operadores de *Path-Relinking* e busca local através de um método de inversão. Os experimentos

computacionais foram realizados em 29 instâncias de um banco de dados do PCV e mostraram que o algoritmo proposto produz soluções de alta qualidade quando comparadas às obtidas nas abordagens anteriores.

O trabalho de Ai e Kachitvichyanukul (2009a) apresenta duas representações de partículas para resolver o problema de roteamento de veículos capacitados (CVRP) usando Otimização por Enxame de Partículas (ONP). Na primeira solução apresentada considera que cada partícula tem dimensão  $(n+2m)$  para problemas com  $n$  clientes e  $m$  veículos. O método de decodificação para esta representação começa com a transformação da partícula em uma lista de prioridades do cliente para entrar na rota e uma matriz de prioridade de veículo para atender cada cliente. As rotas de veículos são construídas com base na lista de prioridades do cliente e na matriz de prioridade do veículo. Na segunda representação cada partícula tem dimensão  $3m$ . O método de decodificação para esta representação começa com a transformação da partícula para os pontos de orientação do veículo e o raio de cobertura do veículo. As rotas são construídas com base nesses pontos e raios. A metodologia foi aplicada a alguns problemas da literatura. O resultado computacional mostra que a segunda representação é melhor do que a primeira e também competitiva com outros métodos para resolver o CVRP.

Ai e Kachitvichyanukul (2009b) abordam o problema de roteamento de veículos com coleta e entrega simultânea propondo um algoritmo que envolve Otimização por Enxame de Partículas. A representação da solução para o problema com  $n$  clientes e  $m$  veículos é uma partícula com dimensão  $(n+2m)$ . O método de decodificação inicia pela transformação da partícula em uma lista de prioridades de clientes para entrar no percurso e uma matriz de prioridade de veículos para servir cada cliente. As rotas de veículos são construídas com base na lista de prioridades do cliente e da matriz de prioridade do veículo. O algoritmo proposto é testado utilizando três conjuntos de referência de dados disponíveis na literatura. O resultado computacional mostra que o método proposto é competitivo com outros resultados publicados para resolver o problema de roteamento de veículos com coleta e entrega simultânea.

No trabalho de Marinakis *et al.* (2010) o problema de roteamento de veículos é abordado utilizando o algoritmo de Otimização por Nuvem de Partículas combinado com *Grasp* e *Path Relinking*. Os autores concluíram que o algoritmo

proposto neste trabalho para a solução do problema de roteamento de veículos, é adequado para resolver problemas de roteirização de veículos de grande porte. Foram testadas instâncias da literatura com resultados promissores.

O trabalho de Marinakis e Marinaki (2010) utiliza um método híbrido inspirado na natureza, que consiste em uma combinação de Otimização por Nuvem de Partículas e algoritmos genéticos para resolver o problema de roteamento de veículos. O algoritmo proposto tem a possibilidade de explorar de forma mais eficaz o espaço de soluções do problema, uma vez que usa uma fase intermediária entre as duas gerações (pais e filhos), a fase de evolução da população resulta em indivíduos mais eficientes e, portanto, melhora a eficácia do algoritmo.

Mirhassani e Abolghasemi (2011) utilizaram a técnica Nuvem de Partículas (ONP) para resolver o problema de roteamento de veículo aberto (OVRP), que é um problema conhecido de otimização combinatória. Um método de decodificação em particular é proposto para a execução de ONP para o OVRP. Neste problema um vetor de posição do cliente foi construído em ordem decrescente. Avaliações experimentais em conjuntos de dados demonstraram a competitividade do algoritmo proposto. Os resultados computacionais mostram que o método ONP proposto encontrou para 80% dos casos testados a solução ótima, sendo considerado eficaz para solucionar problemas OVRP.

No trabalho de Moghaddam *et al.* (2012) um novo esquema de decodificação foi desenvolvido para aumentar a eficiência do algoritmo de Otimização por Nuvem de Partículas para o problema de roteirização de veículos com demandas estocásticas. O método de decodificação proposto inclui três operadores de busca local em um *loop*, a fim de melhorar a qualidade das soluções. Foi testado e comparado com o trabalho de Ai e Kachitvichyanukul (2009b) e os resultados mostraram que a abordagem proposta é superior com um ganho de 7% na qualidade da solução podendo ser aplicada em problemas de grande porte.

Na publicação de Norouzi *et al.* (2012), um modelo baseado em Otimização por Nuvem de Partículas multi-objetivo é apresentado para resolver o problema de roteamento de veículos aberto, capacitado com janelas de tempo competitivas. Neste problema existe concorrência entre os distribuidores e o objetivo é minimizar o custo de viagem das rotas e maximizar as vendas obtidas enquanto equilibra simultaneamente os bens distribuídos entre os veículos. Os resultados foram

comparados com três indicadores de desempenho, que mostram que a abordagem proposta é eficiente para resolver o problema com um custo computacional razoável.

A publicação de Kim e Son (2012), aborda o problema de roteirização de veículos capacitado através de um modelo baseado em Otimização por Nuvem de Partículas que utiliza uma matriz de probabilidade para codificação e decodificação das partículas. Os resultados computacionais mostraram que a abordagem proposta foi capaz de produzir excelentes resultados em termos de qualidade de solução, quando comparados com outras abordagens baseadas em ONP existentes. Por outro lado, o modelo exige maior tempo computacional em problemas de grande porte.

No trabalho de Belmecheri *et al.* (2013), um modelo baseado em Otimização por Nuvem de Partículas com busca local é proposto para resolver o problema de roteirização de veículos com frota heterogênea, janelas de tempo e coleta e entrega simultânea. A adaptação desta abordagem para o problema estudado foi aplicado em problemas da literatura. Os resultados mostraram que o modelo proposto quando aplicado à problemas pequenos pôde obter soluções de qualidade e em vários casos, as soluções ótimas. Para problemas de grande porte, o modelo melhorou os resultados apresentados pelos autores em trabalhos anteriores em 29 casos de 56, com uma melhoria na qualidade da solução em torno de 5,62%.

No trabalho de Goksal *et al.* (2013), o problema de roteamento de veículos com entrega e coleta simultânea é resolvido com base em uma abordagem heurística de Otimização por Nuvem de Partículas, em que uma busca local por bairros é realizada para melhorar soluções selecionadas aleatoriamente durante o processo de busca da ONP. Além disso, os autores implementam uma estratégia chamada *annealing-like* para preservar a diversidade do enxame. Os resultados computacionais mostraram que o algoritmo proposto compete com as abordagens heurísticas da literatura e melhora em torno de 2% soluções conhecidas em termos de qualidade da solução.

Em Marinakis *et al.* (2013) um modelo de Otimização por Nuvem de Partículas é utilizado para resolver o problema de roteamento de veículos com demanda estocástica. O modelo proposto utiliza os algoritmos de busca local 2-opt e 3-opt com a estratégia de *Path Relinking* para a melhoria da solução encontrada. O algoritmo desenvolvido foi testado em alguns casos da literatura propostos por Christofides (1979) para o Problema de roteamento de veículos capacitado com

adaptações nas restrições de demanda. Os resultados encontrados foram considerados satisfatórios pelos autores quando comparados com outros algoritmos da literatura para os mesmos problemas testados.

Em Zou *et al.* (2013) encontra-se uma proposta para a solução do problema de roteamento de veículos com frota homogênea, janelas de tempo e coleta e entrega, utilizando-se Nuvem de Partículas. O método proposto trabalha com as partículas separadas por bairros e adiciona as informações da vizinhança para diversificar o enxame de partícula e para aumentar a velocidade de convergência do algoritmo. Os testes realizados pelos autores mostraram que o modelo proposto é eficaz, pois conseguiu reduzir o número de veículos utilizados e a distância total das viagens.

## 2.4 MÉTODOS PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE ROTEIRIZAÇÃO ESCOLAR

Nesta seção são apresentados alguns dos principais trabalhos publicados para solucionar o Problema de Transporte Escolar.

Segundo Bodin e Golden (1981), no problema de roteirização e programação de veículos escolares há um número de escolas e cada uma delas possui um conjunto de pontos de parada associados. Há também um número de estudantes associados a estes pontos. Cada escola tem um horário para o início e fim das aulas com uma janela de tempo para a entrega dos estudantes em cada turno. O problema consiste em minimizar o número de veículos utilizados ou reduzir o custo total com o transporte, e ao mesmo tempo atender os alunos com um nível de serviço pré- especificado, satisfazendo as janelas de tempo.

Em Steiner *et al.* (2000) os autores abordam o problema do transporte escolar aplicado a um caso real. Primeiramente os pontos foram divididos em grupos (*clusters*), e em cada grupo foi gerada uma semente inicial que servia como depósito. Foram criadas as rotas para cada grupo utilizando o algoritmo de construção de rotas de Clarke e Wright, e em seguida, foi aplicado o algoritmo de melhoria 2-opt na rota construída e entre as demais rotas. Os resultados encontrados mostraram uma economia em torno de 20% na quilometragem total percorrida diariamente.

O trabalho de Spada *et al.* (2003), buscou otimizar o nível de serviço oferecido pelos operadores dos veículos. Primeiro foi construída uma solução inicial para o problema. A heurística inicial ignora o número de veículos disponíveis para o transporte dos alunos e utiliza o número necessário para atender todas as restrições do problema. As escolas são inseridas em ordem crescente relativo ao horário de início das aulas e a cada uma delas são associados os pontos de parada em ordem decrescente de suas distâncias até a escola. Para cada escola é utilizado um veículo. Para melhorar os resultados da solução inicial foram utilizadas duas meta-heurísticas: *Simulated Annealing* e Busca Tabu. Os resultados foram comparados e mostraram que o *Simulated Annealing* mostrou um melhor desempenho que o algoritmo Busca Tabu.

No trabalho de Park e Kim (2010) os autores apresentaram uma revisão dos problemas de roteirização escolar, onde são apresentados alguns métodos para solução do problema, tais como *Simulated Annealing*, *Deterministic Annealing*, Busca Tabu, Algoritmos Genéticos, Colônia de Formigas e Redes Neurais Artificiais. Os problemas são separados de acordo com suas principais características, tais como frota homogênea ou heterogênea, número de escolas atendidas, e a quantidade de turnos de atendimento.

Martinez e Viegas (2010) desenvolveram um projeto de implementação de um serviço de roteamento de veículos para escolas de Lisboa. A concepção do trabalho introduz um processo integrado baseado em formulações tradicionais do problema de roteamento de veículos com uma programação linear inteira mista (PLIM). A solução adotada foi dividir o problema em duas etapas: uma primeira etapa identifica os pontos de parada com maior número de alunos, e a segunda etapa calcula as rotas ideais que atendem os pontos de parada. Os resultados mostram que o modelo é eficaz para problemas de médio porte.

Siqueira e Souza (2012) aplicaram o problema de roteirização de veículos ao problema do transporte escolar. A metodologia utilizada é composta de três fases: a primeira consiste na determinação de pontos de parada dos veículos; na segunda são calculadas as distâncias reais a partir das informações das vias de cada município e na terceira as rotas são formadas aplicando a heurística *Adapted Location Based Heuristic (ALBH)*. Os testes foram realizados considerando 20 municípios do estado do Paraná. Os resultados obtidos foram comparados às rotas que são efetivamente realizadas em cada município, verificando-se uma economia

que varia de 3 a 39% na quilometragem total percorrida, além de uma redução considerável na quantidade de pontos de parada dos veículos e no número de veículos utilizados.

## 2.5 HEURÍSTICAS E METAHEURÍSTICAS

O nome Heurística é derivado da palavra grega *heuriskein*, que significa descobrir. Hoje esse termo é usado para descrever um método “que, baseado na experiência ou julgamento, parece conduzir a uma boa solução de um problema, mas que não garante produzir uma solução ótima” (FOULDS, 1984). Também podemos considerar esse termo como associado a um conhecimento circunstancial, não verificável matematicamente.

Uma desvantagem das heurísticas reside na dificuldade de fugir de ótimos locais, o que deu origem à outra classe de metodologias, denominada meta-heurística, que possui ferramentas que possibilitam sair destes ótimos locais, permitindo a busca em regiões mais promissoras. O desafio é produzir, em tempo mínimo, soluções tão próximas quanto possíveis da solução ótima (quando conhecida *a priori*, principalmente para problemas teste da literatura).

O termo “meta-heurística” refere-se a um conjunto de conceitos que podem ser usados para definir métodos heurísticos, os quais podem ser aplicados a um conjunto amplo de diferentes problemas. Em outras palavras, uma meta-heurística pode ser vista como uma ferramenta algorítmica geral que pode ser aplicada a diferentes problemas de otimização, com modificações relativamente pequenas para torná-la adaptável a um problema específico” (GOMES, 2011).

Uma meta-heurística é uma estratégia de busca, não específica para um determinado problema, que tenta explorar eficientemente o espaço das soluções viáveis desse problema. São algoritmos aproximados que incorporam mecanismos para evitar confinamento em mínimos ou máximos locais. Conhecimentos específicos do problema podem ser utilizados na forma de heurística para auxiliar no processo de busca (por exemplo, na busca de um possível bom vizinho de um determinado ponto). Resumindo, podemos dizer que meta-heurísticas são mecanismos de alto nível para explorar espaços de busca, cada uma usando um determinado tipo de estratégia para “fugir” de mínimos locais.

Dizemos que uma meta-heurística é bio-inspirada quando suas regras de busca tentam simular alguns aspectos do comportamento de seres vivos como, por exemplo, o Algoritmo das Formigas, o algoritmo de Otimização por Nuvem de Partículas (EBERHART; SHI, 2001a) ou o algoritmo das Abelhas (ABBASS, 2001).

Para Oliveira (2004), meta-heurística de busca é uma estratégia de alto-nível capaz de guiar outras heurísticas para produzir soluções de qualidade em tempo computacional admissível. Considera que as heurísticas guiadas por tais meta-estratégias podem ser procedimentos completos de busca ou podem apenas encapsular descrições de movimentos para transformar uma solução candidata em outra. De um modo geral, o estudo das meta-heurísticas tem atraído o interesse de pesquisadores devido a seus atributos, dentre os quais, destacam-se:

- São facilmente implementáveis;
- São modulares e facilmente adaptáveis a qualquer tipo de problema, mesmo os mais complexos;
- São métodos de otimização global, mais robustos à ótimos locais;
- Necessitam de pouca informação sobre o problema, basicamente, custo ou ganho de cada possível solução;
- Podem encontrar soluções aproximadas, de boa qualidade e, até mesmo, ótimas;
- Podem utilizar um grande número de parâmetros discretos, contínuos ou combinações deles;
- Realizam buscas simultâneas em várias regiões do espaço de busca (paralelismo inerente);
- Podem ser adaptados para encontrar várias soluções ótimas; e
- Podem ser eficientemente combinadas com outras heurísticas de busca.

O sucesso da aplicação de uma meta-heurística depende muito do equilíbrio entre diversificação e intensificação. A diversificação está relacionada com a avaliação de soluções em regiões distantes do espaço de busca, explorando novas regiões em busca de melhores soluções, enquanto que a intensificação refere-se à avaliação de soluções em pequenas regiões limitadas ou dentro de uma determinada vizinhança. O equilíbrio entre estes dois aspectos é fundamental, uma vez que o algoritmo tem que encontrar rapidamente as regiões mais promissoras

(diversificação) e estas regiões promissoras precisam ser profundamente exploradas (intensificação).

Algumas meta-heurísticas são mais voltadas à intensificação como, por exemplo, a Busca Tabu, enquanto outras possuem características mais fortes de diversificação como, por exemplo, os Algoritmos Genéticos.

## 2.6 ALGORITMOS EVOLUTIVOS (AES)

Algoritmos Evolutivos (AES) são baseados em uma gama de mecanismos da evolução biológica. A motivação para a construção desses modelos surgiu de teorias através das quais a Natureza, por meio de seus recursos, resolveu problemas complexos, isto é, conseguiu determinar a quantidade de “recursos” para resolver “problemas” ligados às questões de sobrevivência. Assim, pode-se dizer que a natureza otimiza seus mecanismos para resolver um ou mais problemas.

O estudo de algoritmos evolutivos tem se expandido rapidamente nos últimos anos. Dentre os principais motivos desta expansão pode-se destacar:

- O desenvolvimento de algoritmos capazes de encontrar soluções adequadas para problemas complexos, ainda não resolvidos por outras técnicas computacionais;
- A simplicidade dos algoritmos evolutivos, que utilizam princípios básicos de Teoria da Evolução e Genética e que podem ser modelados por poucas e simples linhas de código;
- Adaptação relativamente fácil para problemas das mais diversas áreas.

Essa área de pesquisa teve origem em várias frentes de estudo, cuja interação produziu os AES atuais. Dentre esses, sem dúvidas os algoritmos genéticos (AG's) são os mais conhecidos, principalmente devido à sua utilização em Inteligência Artificial (IA) (REZENDE, 2003).

A Inteligência Artificial tem se mostrado uma área de pesquisa em evidência e que pode ser aplicada na solução dos diversos problemas de Otimização Combinatória.

## 2.7 INTELIGÊNCIA COLETIVA

Muitas pesquisas têm se inspirado nos processos do mundo biológico para o desenvolvimento de métodos de otimização. Estas técnicas têm se mostrado mais eficientes do que a heurística clássica ou baseada em métodos de otimização que utilizam gradiente, especialmente quando aplicadas a problemas de otimização multi-modal, não diferenciáveis ou a funções descontínuas, que necessitam de comparação entre indivíduos para a obtenção da primeira solução aceitável. A inteligência coletiva é parte de um sistema onde o comportamento coletivo, e não sofisticado de agentes interagindo localmente dentro de seu ambiente, propiciam o aparecimento de um modelo funcional e coerente. A inteligência coletiva provê uma base, de forma a possibilitar a exploração coletiva ou distribuída, para a resolução de problemas sem um controle centralizado ou a necessidade de um modelo global.

A meta-heurística Nuvem de Partículas, que serviu de inspiração para o desenvolvimento do modelo proposto neste trabalho, é classificada como uma técnica de Inteligência Coletiva.

## 2.8 OTIMIZAÇÃO POR NUVEM DE PARTÍCULAS (ONP)

A técnica de otimização *Particle Swarm Optimization (PSO)*, traduzida para o português como Otimização por Nuvem de Partículas (ONP) foi proposta por Kennedy e Eberhart (1995). Tal como outras meta-heurísticas recentemente desenvolvidas, foi inspirada no comportamento social encontrado em populações. A técnica foi desenvolvida a partir da observação de bandos de pássaros e cardumes de peixes em busca de alimento em uma determinada região. Ao analisar o comportamento desses grupos, observa-se que o comportamento do grupo é influenciado pela experiência individual acumulada por indivíduo bem como pelo resultado da experiência acumulada pelo grupo.

De acordo com Kennedy e Eberhart (1997b), ONP possui muitas similaridades com os Algoritmos Genéticos. Apesar de não possuir operadores genéticos, sua população evolui no espaço de busca através da melhoria das posições das partículas, a cada iteração, rumo a melhores soluções.

ONP possui uma estratégia de busca eficiente, Kennedy e Eberhart (1995) ressaltaram as vantagens do algoritmo:

- (i) Possui fácil implementação computacional, já que uma versão do algoritmo com poucos ajustes pode apresentar uma larga variedade de aplicações (HU *et al.*, 2003);
- (ii) Utiliza pouca memória e requer pouca velocidade de processamento; e
- (iii) O processo de busca é racionalizado pelo contínuo aprendizado das partículas.

A população no ONP, denominada nuvem (ou enxame), é composta por partículas que são candidatas a solução para o problema. As partículas se movem em um espaço  $n$ -dimensional, dentro de um subespaço de busca  $S$  (VESTERSTROM; RIGET, 2002).

Segundo Zuben e Attux (2008), a Inteligência de Enxame tem origem em um sistema resultante das seguintes propriedades:

- proximidade: os agentes devem ser capazes de interagir;
- qualidade: os agentes devem ser capazes de avaliar seus comportamentos;
- diversidade: permite ao sistema reagir diante de situações inesperadas;
- estabilidade: nem todas as variações ambientais devem afetar o comportamento de um agente;
- adaptabilidade: capacidade de adequação a variações no ambiente.

A seguir será descrito o funcionamento do algoritmo de otimização por Nuvem de Partículas.

Cada partícula  $p$ , numa dada iteração  $t$ , tem uma posição em  $R^n$ , dada por  $\vec{X}(t)$  e uma velocidade de deslocamento nesse espaço, denotada por  $\vec{V}(t)$ . Possui também uma memória contendo sua melhor posição já alcançada, o  $pBest(t)$  e a melhor posição já alcançada pelas partículas vizinhas a  $p$ , o  $gBest(t)$ . É importante ressaltar que  $\vec{X}(t)$ ,  $\vec{V}(t)$ ,  $pBest(t)$  e  $gBest(t)$  são vetores  $n$ -dimensionais, sendo  $n$  determinado pelo problema que está sendo resolvido pelo algoritmo. Se este fosse, por exemplo, o conhecido problema do Caixeiro Viajante,  $n$  seria o número total de cidades que devem ser visitadas como apresentado em Wang *et al.* (2003).

Sejam  $\vec{X}_i(t) = (x_{i,1}(t), \dots, x_{i,n}(t))$  e  $\vec{V}_i(t) = (v_{i,1}(t), \dots, v_{i,n}(t))$ , respectivamente, a posição (o próprio vetor candidato à solução) e a velocidade (sua taxa de mudança), da partícula  $i$  no tempo  $t$ , em um espaço de busca  $n$ -dimensional. Considere também  $\vec{pBest}_i(t) = \{pBest_{i,1}(t), \dots, pBest_{i,n}(t)\}$  a melhor posição encontrada pela partícula  $i$

até o tempo  $t$  e  $\vec{gBest}(t) = \{gBest_1(t), \dots, gBest_n(t)\}$  a melhor posição encontrada pelo grupo até o tempo  $t$ .

No algoritmo ONP padrão, as partículas são manipuladas de acordo com as seguintes equações vetoriais (SHI; EBERHART, 1998):

$$v_i(t+1) = w \times v_i(t) + c_1 \times \phi_1 \times (pBest_i(t) - x_i(t)) + c_2 \times \phi_2 \times (gBest(t) - x_i(t)) \quad (2.1)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \quad (2.2)$$

Onde:

- $\phi_1$  e  $\phi_2$  são números randômicos uniformemente distribuídos entre 0 e 1;
- $w$  é o coeficiente de inércia, importante para definir o espaço de busca;
- $c_1$  e  $c_2$  são constantes de aceleração e determinam a influência de  $pBest$  e  $gBest$  sobre a partícula, respectivamente;

Os vetores nas Equações (2.1) e (2.2) são de dimensão  $nx1$ , onde  $n$  é o número de parâmetros (variáveis) que serão otimizados.

O procedimento para implementação do algoritmo ONP é regido pelas seguintes etapas segundo Tebaldi *et al.* (2006):

- (i) Iniciar uma população (matriz) de partículas, com posições e velocidades em um espaço de problema  $n$  dimensional, aleatoriamente com distribuição uniforme;
- (ii) Para cada partícula, avaliar a função de aptidão (função objetivo a ser minimizada- *fitness*);
- (iii) Comparar a avaliação da função de aptidão da partícula com o  $pBest$  da partícula. Se o valor corrente é melhor que  $gBest$ , então o valor de  $pBest$  passa a ser igual ao valor da função de aptidão da partícula, e a localização do  $pBest$  passa a ser igual a localização atual no espaço  $n$  dimensional;
- (iv) Comparar a avaliação da função de aptidão de toda a população com o melhor valor de aptidão da população. Se o valor atual é melhor que o  $gBest$ , atualizar o valor de  $gBest$  para o índice e valor da partícula atual;
- (v) Modificar a velocidade e a posição da partícula de acordo com as Equações (2.1) e (2.2), respectivamente.

O pseudo-código para um algoritmo de Nuvem de Partículas é mostrado na Figura 2.1.

```

Para cada partícula
    Inicie partícula com uma posição e velocidade aleatórias;
Fim_para

Faça
    Para cada partícula p
        Calcule o valor da função fitness de p
        Se o fitness de p é melhor que o fitness de pBest então
            pBest←p
    Fim_Para

        Defina a partícula de melhor fitness como gBest
    Para cada partícula p
        Calcule a velocidade
        Atualize a posição da partícula
    Fim_Para

Enquanto (iterações máximas) ou (critérios de erro mínimo) não são atendidos.

```

FIGURA 2.1 - ALGORITMO CLÁSSICO DE NUVEM DE PARTÍCULAS

## 2.9 OTIMIZAÇÃO POR NUVEM DE PARTÍCULAS DISCRETA

Nesta seção são citados os métodos de otimização por Nuvem de Partículas Discreta utilizados na literatura.

É possível observar que existem diferentes implementações e adaptações do ONP para a otimização de problemas cujo espaço de busca é discreto. Nota-se nestes trabalhos que são duas as abordagens mais comuns para a codificação das partículas:

- Codificação binária (KENNEDY; EBERHART, 1997; SHA; HSU, 2006; LIAO *et al.*, 2007);
- Codificação com sequências de posições (HU *et al.*, 2003; GOLDBARG *et al.*, 2006a; LIU *et al.*, 2008; SHA; HSU, 2008; ROSENDO; POZO, 2010; LIU *et al.*, 2011).

Nesta tese, a codificação com sequências de posições com algumas adaptações é utilizada.

A Figura 2.2 mostra a estrutura básica de um algoritmo de ONP.

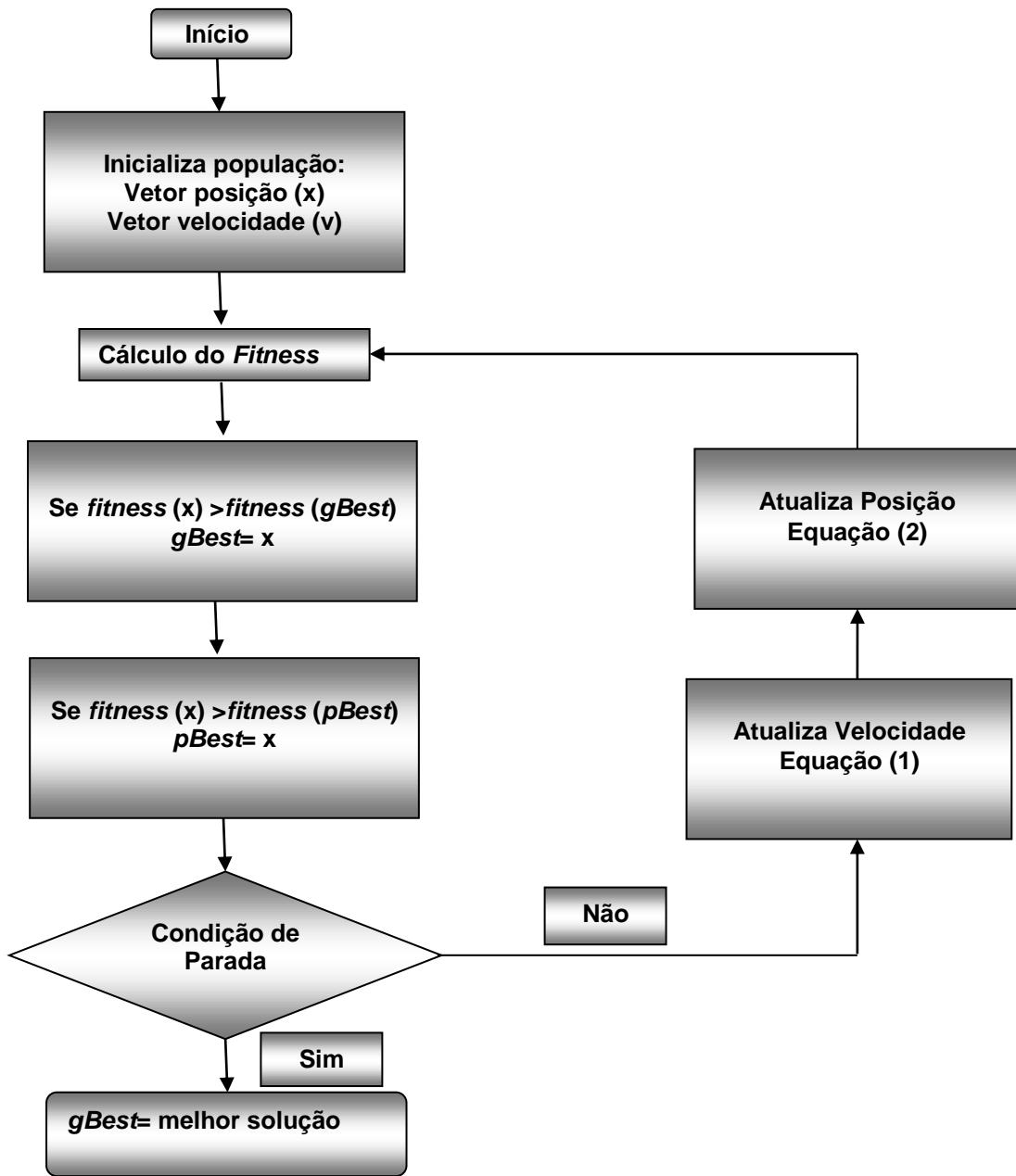


FIGURA 2.2 - FLUXOGRAMA DO ALGORITMO ONP

O primeiro trabalho que apresenta uma versão discreta do algoritmo de Otimização por Nuvem de Partículas ONP foi proposto por Kennedy e Eberhart (1997). Neste trabalho partículas foram codificadas como sequências binárias e a velocidade  $V(t)$  como um conjunto de probabilidades. Dessa forma, uma partícula  $X(t)$  se move em um espaço de estados restrito a zero e um em cada dimensão, onde cada  $v_i(t)$  representa a probabilidade do bit  $x_i(t)$  assumir o valor 1.

Esta representação binária para solução de problemas de otimização discretos proposta por Kennedy e Eberhart (1997a) serviu de modelo para vários outros trabalhos. Alguns destes são citados nesta seção.

Hu *et al.* (2003) implementaram um algoritmo de Nuvem de Partículas para o problema das *N*-Rainhas. Neste trabalho a velocidade também foi implementada como um vetor de probabilidades, mas com algumas diferenças: a velocidade foi normalizada através da divisão de cada valor do vetor velocidade pelo maior valor do vetor. Em seguida, cada dimensão da partícula foi escolhida aleatoriamente, então foi verificado se haveria uma troca naquela posição. Quanto maior o valor da velocidade associado à dimensão *x*, maior a probabilidade da troca ocorrer em *x*.

Desde a primeira versão do ONP para problemas discretos, desenvolvida por Kennedy e Eberhart (1997a), outros trabalhos de otimização combinatória que utilizam o ONP foram elaborados.

Em boa parte destes trabalhos, o ONP apresentou melhores resultados quando comparado com outros métodos de otimização bio-inspirados como Algoritmos Genéticos (AG's) (SALMAN, 2002; HU *et al.*, 2003; SHA; HSU, 2006; LIAO *et al.*, 2007; SHA; HSU, 2008; KUO *et al.*, 2009; ROSENDO; POZO, 2010; SHA; LIN, 2010; LIU *et al.*, 2011) e Otimização por Colônia de Formigas, do inglês *Ant Colony Optimization* (ACO) (JARBOUI *et al.*, 2008; SHA; HSU, 2008), além de algumas outras meta-heurísticas conhecidas, como Busca Tabu (BT) (SHA; HSU, 2006) e *Simulated Annealing* (SA) (FANG *et al.*, 2007). O ONP tem sido pouco utilizado na otimização de problemas de otimização combinatória, apesar dos resultados se mostrarem promissores nos trabalhos onde foi testado.

Nesta seção são apresentadas as modificações presentes na literatura, que são necessárias para aplicar o algoritmo de Otimização por Nuvem de Partículas (ONP) em trabalhos que abordam problemas combinatórios. No ONP discreto, tanto o algoritmo quanto as equações permanecem sem alteração. Os fatores a serem modificados são os operadores utilizados no espaço de busca e as soluções encontradas (CLERK, 2004; WANG *et al.*, 2003; ALOISE, 2006).

Segundo Poli (2008), apenas 3,5% das publicações sobre ONP tratam de problemas de otimização combinatória. Isto se deve ao fato de que o ONP foi originalmente desenvolvido para problemas contínuos, e não discretos como é o caso dos problemas de Otimização Combinatória.

## 2.9.1 População Inicial

As partículas no PSO discreto são representadas através de arestas/nós, sendo cada um destes elementos uma dimensão do vetor posição.

## 2.9.2 Operadores Discretos

### 2.9.2.1 Velocidade

No espaço discreto, a velocidade não é somente um número. Esta deve ser um operador que, quando aplicado a uma posição, gera uma nova posição. Sendo assim, a velocidade é definida como uma lista de  $k$  transposições :

$v = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)\}$ , que significa a troca do vértice de índice  $i_1$  pelo de índice  $j_1$ , de índice  $i_2$  pelo  $j_2$ , e assim por diante, até a troca dos vértices  $i_k$  e  $j_k$ . Duas velocidades serão equivalentes ( $v_1 = v_2$ ), se após aplicadas  $v_1$  ou  $v_2$  em uma posição obtêm-se a mesma partícula. Uma velocidade nula é uma lista de velocidades sem transposições, onde  $|v|$  denota o tamanho da velocidade  $v$ , que é igual ao número de transposições em  $v$ .

### 2.9.2.2 Movimentação da partícula

Seja  $P$  uma posição e  $v$  uma velocidade.  $P'$  será uma nova posição, onde  $P' = P + v$ , onde devem ser aplicadas todas as transposições pertencentes a  $v$ .

Por exemplo, sejam  $P = [1, 2, 4, 5, 3]$  e  $v = \{T(3,4), T(1,5)\}$ . A operação é realizada da seguinte forma: aplique a transposição  $(3,4)$ , ou seja, troque o conteúdo da 3<sup>a</sup> célula com a da 4<sup>a</sup> célula em  $P$ . Desta forma, tem-se  $P_1 = [1, 2, 5, 4, 3]$ . Em seguida, aplica-se a transposição  $(1,5)$ , resultando em  $P_2 = [3, 2, 5, 4, 1]$ . Como a última transposição foi alcançada, uma nova posição  $P'$  é obtida:  $P' = P_2 = [3, 2, 5, 4, 1]$ .

### 2.9.2.3 Obtenção da Velocidade

Sejam  $P_1$  e  $P_2$  duas posições. A diferença  $P_1 - P_2$  é definida como sendo a velocidade  $v$ , onde o sinal de “-” possui um novo significado. Através dessa

diferença, obtemos a lista de transposições, resultando na seguinte equação:

$$P_2 = P_1 + v.$$

O exemplo abaixo mostra como é obtida a velocidade a partir de duas posições  $P_1 = [1, 2, 3, 4, 5]$  e  $P_2 = [3, 1, 2, 5, 4]$ :

$$P_1[1] = P_2[2] = 1, \text{ logo a primeira transposição será } (1,2).$$

Aplicando a transposição, vem:

$$P_2' = P_2 + T(1,2). \text{ Portanto, } P_2' = [1, 3, 2, 5, 4]$$

$$P_1[4] = P_2'[5] = 4, \text{ logo a segunda transposição será } (4,5), \text{ tem-se:}$$

$$P_2'' = P_2' + T(4,5). \text{ Portanto, } P_2'' = [1, 3, 2, 4, 5].$$

Seguindo na sequência, o terceiro operador será  $(2,3)$ , logo tem-se a lista de transposição ( $v$ ), que será igual a  $P_1 - P_2 = \{T(1,2), T(4,5), T(2,3)\}$ .

#### 2.9.2.4 Adição entre velocidades

A adição de duas velocidades consiste na concatenação de listas de transposições, que resulta numa nova lista.

Por exemplo, sejam as velocidades:

$$v_1 = \{T(1,2), T(2,4)\} \text{ e } v_2 = \{T(3,2), T(5,4)\},$$

A velocidade resultante será uma lista de transposições que contém primeiro as transposições de  $v_1$ , seguidas pelas transposições de  $v_2$ , gerando a lista  $v_3 = \{T(1,2), T(2,4), T(3,2), T(5,4)\}$ .

#### 2.9.2.5 Multiplicação

Seja  $c$  um coeficiente e  $v$  uma velocidade. Então, são possíveis quatro casos, de acordo com o valor de  $c$ :

- i.  $c = 0$ , tem-se  $c \times v = \emptyset$ ;
- ii.  $c \in ]0,1]$ , truncase  $v$  por  $c \times |v|$ . Então, define-se  $c \times v$  como a lista formada pelos primeiros pares de  $v$ .
- iii.  $c > 1$ , aplica-se  $v$ ,  $c$  vezes para a parte inteira e aplica-se (ii) para a parte fracionária;
- iv.  $c < 0$ , não se aplica para este tipo de implementação.

## 2.10 FITNESS

A função de *fitness*, geralmente vinculada à minimização (maximização) de uma função objetivo é utilizada para avaliar a qualidade da solução obtida. O valor do *fitness* de um indivíduo é um número positivo que mede o quanto adequado é o valor da solução encontrada. Em problemas de otimização, o *fitness* pode ser o custo da solução. Se o problema for de minimização, as soluções de melhor *fitness* são as de menor custo.

Segundo Locatelli e Neto (2004), o *fitness* é uma medida de desempenho em que um valor numérico é associado a cada indivíduo. Esse valor determina o quanto boa é a sua capacidade de evolução, ou seja, o quanto esse indivíduo pode contribuir na geração de novos indivíduos.

## 2.11 COMPARAÇÕES ENTRE ALGORITMOS GENÉTICOS E ONP

O algoritmo de Otimização por Nuvem de Partículas (ONP) tem muitas características em comum com técnicas evolucionárias como os algoritmos genéticos. O sistema é iniciado com uma população de soluções aleatórias e procura por um resultado ótimo melhorando gerações. Entretanto, diferentemente de algoritmos genéticos, o ONP não tem operadores de evolução como crossover e mutação. Em ONP as soluções potenciais, chamadas de partículas, “voam” com velocidade interna através do espaço de busca do problema seguindo as “melhores partículas” (que possuem os melhores valores até o momento). Estas partículas também possuem memória, o que contribui para a convergência do algoritmo.

A seguir são listados alguns procedimentos usuais em sistemas que utilizam técnicas evolucionárias:

1. Definir o problema a ser resolvido – codificar uma solução candidata em um indivíduo, e especificar uma função de *fitness*;
2. Iniciar a população – tipicamente atribuindo valores aleatórios aos indivíduos da população inicial;
3. Permitir a seleção dos mais aptos e extinção dos menos aptos;
4. Permitir que uma nova geração seja formada aplicando-se a seleção aos indivíduos da geração anterior;

5. Parar quando algum dos seguintes critérios for atingido:
  - A solução é boa o suficiente;
  - O algoritmo atingiu o número determinado de gerações;
  - O algoritmo não consegue mais evoluir.
6. Caso contrário, retorna ao passo 3.

Comparado com Algoritmos Genéticos, o mecanismo de compartilhamento de informação de ONP é significativamente diferente. Nos algoritmos genéticos, os cromossomos compartilham informação uns com os outros. Então, toda a população se move como um grupo em busca da região ótima. Em ONP, apenas o *gBest*, ou *pBest*, dependendo do escopo do problema, é compartilhado entre todos, constituindo um mecanismo de comunicação de sentido único. A evolução leva em consideração apenas o melhor valor. As partículas permanecem vivas e habitam o espaço da busca durante o funcionamento, visto que em AG's os indivíduos são substituídos a cada geração (VESTERSTROM; RIGET, 2002).

"No enxame de partículas o objetivo é alcançado com a busca cooperativa da partícula sendo diferente do que nos AG's onde a busca é competitiva" (VESTERSTROM; RIGET, 2002). Ainda, comparado aos AG's, no ONP, todas as partículas tendem a convergir para a melhor solução rapidamente, mesmo em versões que consideram buscas locais, o que ocorre na maioria dos casos.

## CAPÍTULO III

### 3 MODELAGEM E METODOLOGIA

O presente trabalho busca contribuir com a pesquisa de novas estratégias e métodos de solução para o problema de roteirização de veículos aplicadas ao Transporte Escolar, através de uma nova proposta de implementação da metaheurística Otimização por Nuvem de Partículas Discreta Adaptada, chamada neste trabalho de ONPDA.

Neste capítulo é definido o problema a ser estudado e são estabelecidas a modelagem matemática e a metodologia a serem utilizadas para a solução do problema do Transporte Escolar. A metodologia é aplicada em 32 municípios no Estado do Paraná.

#### 3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE ESTUDO

Conforme citado anteriormente, o presente trabalho trata de um problema de roteirização de veículos capacitado, com frota heterogênea fixa e entrega e coleta simultânea.

Uma das principais dificuldades encontradas para modelar e resolver problemas que envolvem roteirização de veículos tem origem na quantidade e tipo de restrições que podem influenciar o problema em estudo. Os problemas de roteirização de veículos (VRP) variam quanto a sua complexidade, dependendo do número de variáveis e restrições que estão envolvidas em sua formulação e, mesmo com o avanço dos computadores, ainda há muitas dificuldades em sua resolução. Não se trata somente de aumentar a capacidade de processamento da máquina, pois as dificuldades residem na natureza combinatória desse tipo de problema que, até hoje, tem dificultado a concepção de algoritmos eficientes de solução. Devido ao seu caráter combinatório, a maioria dos problemas práticos de roteirização de veículos é do tipo NP-completo (GOLDBARG; LUNA, 2000). Em outras palavras, o esforço computacional para a resolução cresce exponencialmente com o tamanho do problema, diretamente relacionado número de pontos (nós) a serem atendidos.

Para esses problemas complexos, a otimização utiliza técnicas para alcançar soluções próximas da ótima, como as heurísticas e meta-heurísticas.

A complexidade computacional pode ser definida como o comportamento de algoritmos para sua solução e baseia-se no número de operações necessárias para resolver um dado problema. Um problema é chamado “tratável” ou de classe P (polinomial) quando existe um algoritmo polinomial para sua solução. Por outro lado, muitos problemas só podem ser resolvidos em tempos exponenciais e são ditos “inratáveis” ou NP-completos (BODIN *et al.*, 1983).

Lenstra e Rinnooy Kan (1981) analisaram a complexidade de problemas de roteirização de veículos, e concluíram que praticamente todos os problemas de roteirização de veículos são NP-completos, entre eles o problema do caixearo viajante e o problema clássico de roteirização de veículos, pois não são resolvidos em tempo polinomial. De acordo com Bodin (1990), muitos dos problemas descritos na literatura modelam de forma simplificada os problemas reais.

A seguir, é descrito o modelo matemático do problema de roteamento de veículos capacitado apresentado por Bodin *et al.* (1983):

$$\text{Minimizar } \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N C_{ij}^k X_{ij}^k \quad (3.1)$$

Sujeito a:

$$X_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se o veículo } k \text{ faz viagem do cliente } i \text{ para } j, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\sum_{K=1}^K \sum_{i=0}^N X_{ij}^k = 1, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.3)$$

$$\sum_{K=1}^K \sum_{j=0}^N X_{ij}^k = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=0}^N X_{it}^k - \sum_{j=0}^N X_{tj}^k = 0, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N d_{ij}^k X_{ij}^k \leq D_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (3.6)$$

$$\sum_{j=0}^N q_j \left( \sum_{i=0}^N X_{ij}^k \right) \leq Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (3.7)$$

$$\sum_{j=1}^N X_{0j}^k \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (3.8)$$

$$\sum_{i=1}^N X_{i0}^k \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (3.9)$$

$$X_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (3.10)$$

Onde:

$N$  = número total de clientes a serem atendidos;

$K$  = número total de veículos;

$C_{ij}^K$  = custo do veículo  $K$  fazer a viagem do cliente  $i$  para o cliente  $j$ ;

$d_{ij}^k$  = comprimento da rota percorrida pelo veículo  $K$  do cliente  $i$  para o cliente  $j$ ;

$D_k$  = comprimento da rota percorrida pelo veículo  $K$ ;

$Q_k$  = capacidade do veículo  $K$ ;

$q_j$  = demanda do cliente  $j$ .

A função objetivo (3.1) minimiza o custo total da rota. A restrição (3.2) é de integralidade da variável  $X$ . As restrições (3.3) e (3.4) garantem que cada cliente é atendido exatamente uma vez. A restrição (3.5) garante a continuidade da rota. A restrição (3.6) garante que o comprimento total de uma rota tem um limite  $D$ . A restrição (3.7) garante que em qualquer ponto da rota, a lotação de cada veículo não excederá sua respectiva capacidade. As restrições (3.8) e (3.9) garantem que a disponibilidade do veículo não pode ser excedida. A restrição (3.10) assegura que a variável  $X_{ij}^k$  é binária.

O problema estudado neste trabalho é uma combinação dos problemas de roteirização de veículos capacitados, com frota heterogênea fixa e dos problemas de roteirização de veículos com entrega e coleta simultânea. Este problema é foco de diversas pesquisas dentre os de otimização combinatória. Sua solução analítica é de alta complexidade, inviabilizando a resolução de situações para um grande número de pontos de demanda a serem visitados. Neste contexto, as heurísticas e meta-heurísticas desempenham um papel importante como ferramenta de resolução. A descrição completa e detalhada do problema está listada a seguir.

No problema real a ser solucionado, estudantes do ensino fundamental e médio, que residem no interior do estado do Paraná são transportados até suas

respectivas escolas em seus períodos de estudo.

As empresas que realizam os serviços de Transporte Escolar no Estado possuem frota heterogênea. Os alunos são coletados, levando-se em consideração a minimização total do percurso do veículo (ida e volta), o que implica na redução do tempo de permanência dos estudantes, economia de combustível e desgaste dos veículos.

O modelo matemático associado a esse problema visa a minimização do custo total de entrega e/ou coleta de passageiros, considerando as restrições de demanda, de comprimento máximo da rota, e de capacidade dos veículos. O número de alunos a ser transportado é conhecido *a priori*. A frota considerada neste trabalho é heterogênea e fixa (composta de veículos de diferentes tamanhos e capacidades).

As restrições do problema abordado nesta pesquisa são:

- Todos os alunos que utilizam o transporte escolar, devem ser atendidos por uma rota;
- Cada tipo de veículo tem uma capacidade  $C_v$ ; e
- As rotas têm um limite máximo de comprimento.

As principais Hipóteses e características do problema são:

- A demanda das escolas é determinística;
- A frota de veículos é heterogênea e limitada;
- Todos os veículos iniciam e terminam seu trajeto na garagem;
- Cada escola pode ser atendida por mais de um veículo;
- Podem existir veículos que não são utilizados;
- Na maior parte dos casos, existe mais do que um aluno em cada ponto de parada;
- Alunos de diferentes escolas podem estar no mesmo ponto de parada;
- Coleta e entrega simultânea; e
- Para reduzir o custo de uma rota um aluno poderá trocar de veículo.

### 3.2 A MODELAGEM

O problema em estudo é tratado, como um problema de roteirização de veículos capacitado com coleta e entrega simultânea. A frota dos veículos é heterogênea e limitada.

O PTE para o Estado do Paraná pode ser modelado como um problema de Programação não Linear Inteira Binária. Considerando-se  $v$  veículos para atender a demanda de  $n$  alunos distribuídos em  $n$  pontos de parada, inicialmente definem-se conjuntos de nós ( $N$ ), arcos ( $A$ ) e as variáveis do problema (SIQUEIRA e SOUZA, 2012):

$N_P = \{1, \dots, n\}$ : alunos em seus respectivos pontos de parada (coleta);

$N_E = \{n + 1, \dots, 2n\}$ : pontos das escolas dos respectivos alunos (entrega);

$N_{PE} = \{1, \dots, 2n\}$ : conjunto de pontos de parada e escolas (coleta e entrega);

$A_{PE}$  : arcos entre os nós de  $N_{PE}$ , excluindo-se os arcos  $(i + n, i)$  para  $i \in N_P$ , pois estes arcos violam a restrição de que o ponto de coleta deve estar antes do respectivo ponto de entrega;

$$A_{PE} = \{(i, j) / i, j \in N_{PE}\} - \{(i + n, i) / i \in N_P\}$$

$N_V = \{2n + 1, \dots, 2n + v\}$ : conjunto de garagens, sendo  $2n + k$  a garagem do veículo  $k$ , com  $k = 1, 2, \dots, v$ .

$A_{EV}$  : arcos entre os nós de  $N_E$  e  $N_V$ , excluindo-se o nó  $2n + 1$  de  $N_V$ , pois a garagem do primeiro veículo da frota é o primeiro nó considerado na formação de uma solução factível;

$$A_{EV} = \{(i, j) / i \in N_E, j \in N_V\} - \{(i, 2n+1) / i \in N_E\}$$

$A_{VP}$ : arcos entre os nós de  $N_V$  e  $N_P$ , desconsiderando-se o nó  $2n + v$ , pois a garagem do veículo  $v$  é o último nó considerado na formação de uma solução factível;

$$A_{VP} = \{(i, j) / i \in N_V, j \in N_P\} - \{(2n + v, j) / j \in N_P\}$$

$A_V$ : arcos entre os nós de  $N_V$ ;

$$A_V = \{(i, j) / i, j \in N_V\}$$

$N = \{1, \dots, 2n + v\}$ : conjunto de todos os nós, e

$A = A_{PE} \cup A_{EV} \cup A_{VP} \cup A_V$ : conjunto de todos os arcos.

Coeficientes e variáveis:

$$c_{i,j} : \begin{cases} \text{distância entre os nós } i \text{ e } j & (i, j) \in A_{PE}, \\ \text{distância entre a garagem do veículo } i - 2n \text{ e o ponto de parada } j & (i, j) \in A_{VP}, \\ \text{distância entre a escola } i \text{ e a garagem do veículo } j - 2n & (i, j) \in A_{EV}, \\ 0 & (i, j) \in A_V; \end{cases}$$

$M$ : maior custo permitido para cada veículo;

$C_k$ : capacidade do veículo  $k$ ;

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i,j) \text{ é usado na rota,} \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \text{ é anterior ao vértice } j \text{ na rota,} \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$b_{i,j}$  é um controlador de ordem e garante que o vértice  $i$  é anterior ao vértice  $j$  na rota.

$$f_i = \begin{cases} C_1 & i = 2n+1, \\ C_{i-2n} - C_{i-2n-1} & i = 2n+2, \dots, 2n+v \end{cases}$$

$f_i$  funciona como um controle de capacidade do veículo que é utilizado na restrição (3.21) da formulação matemática apresentada a seguir.

O Quadro 3.1 ilustra os conjuntos de nós e arcos envolvidos no problema.

QUADRO 3.1 - CONJUNTOS DE NÓS E ARCOS

Conjuntos	$N_P = \{1, \dots, n\}$	$N_E = \{n + 1, \dots, 2n\}$	$N_V = \{2n + 1, \dots, 2n + v\}$
$N_P = \{1, \dots, n\}$	$A_{PE}$	$A_{PE}$	$A_{VP}$
$N_E = \{n + 1, \dots, 2n\}$ :	$A_{PE}$	$A_{PE}$	$A_{EV}$
$N_V = \{2n + 1, \dots, 2n + v\}$	$A_{VP}$	$A_{EV}$	$A_V$

A formulação matemática para o PTE é apresentada a seguir. Esta formulação está baseada no trabalho de Lu e Dessouky (2004). Nesta aplicação a restrição (3.25) foi incluída para garantir que cada rota não ultrapasse o limite máximo de comprimento  $M$  (para que os horários de início e término das aulas sejam respeitados).

A função objetivo (3.11) minimiza o custo total das rotas e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } \sum_{i,j \in N} c_{i,j} x_{i,j} \quad (3.11)$$

As restrições do modelo são:

$$\sum_{j \in N} x_{i,j} = 1 \quad i \in N \quad (3.12)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i,j} = 1 \quad j \in N \quad (3.13)$$

As restrições (3.12) e (3.13) garantem que somente um veículo atende cada ponto de entrega ou coleta.

$$b_{k,i} \leq b_{k,j} + 1 - x_{i,j} \quad (i, j) \in A, k \in N/\{i\} \quad (3.14)$$

$$b_{k,j} \leq b_{k,i} + 1 - x_{i,j} \quad (i, j) \in A, k \in N/\{j\} \quad (3.15)$$

As restrições (3.14) e (3.15) garantem que se  $x_{i,j} = 1$ , o vértice  $i$  é imediatamente anterior ao vértice  $j$ , fazendo com que  $b_{k,i} = b_{k,j}$  para todo  $k \in N$  e  $k \neq i$ .

$$x_{i,j} \leq b_{i,j} \quad i, j \in A \quad (3.16)$$

$$b_{i,i} = 0 \quad i \in N \quad (3.17)$$

Se  $x_{i,j} = 1$ , a restrição (3.16) faz com que  $b_{i,j} = 1$ , e a restrição (3.17) garante que  $b_{i,i} = 0$ .

$$b_{n+i,i} = 0 \quad i \in N_P \quad (3.18)$$

$$b_{i,n+i} = 1 \quad i \in N_P \quad (3.19)$$

As restrições (3.18) e (3.19) garantem que o vértice de coleta (ponto de parada) é visitado antes do vértice correspondente de entrega (respectiva escola).

$$b_{i,j} = b_{n+i,j} \quad i \in N_P, j \in N_V \quad (3.20)$$

A restrição (3.20) é de ‘pareamento’, e garante que o ponto de coleta é atendido pelo mesmo veículo que atende o respectivo ponto de entrega.

$$1 + \sum_{i \in N_P} b_{i,j} - \sum_{i \in N_E} b_{i,j} \leq \sum_{k \in N_V} f_k b_{k,j} \quad j \in N_P \quad (3.21)$$

A restrição (3.21) garante que em qualquer ponto da rota, a lotação de cada

veículo não excede sua respectiva capacidade. Em cada ponto de parada  $j$  a capacidade do veículo será igual a  $\sum_{k \in N_V} f_k b_{k,j}$ , e após a visita ao vértice  $j$  é igual a

$$1 + \sum_{i \in N_P} b_{i,j} - \sum_{i \in N_E} b_{i,j}.$$

$$b_{i,2n+1} = 0 \quad i \in N \quad (3.22)$$

A restrição (3.22) coloca a origem do primeiro veículo, cujo índice é  $2n + 1$ , designada para a primeira rota.

$$b_{k,j} = 1 \quad j, k \in N_V, k < j \quad (3.23)$$

$$b_{j,k} = 0 \quad j, k \in N_V, k < j \quad (3.24)$$

As restrições (3.23) e (3.24) reforçam que os veículos entram na rota em sequência.

$$\sum_{(i,j) \in A} (b_{k,j} - b_{k+1,j}) c_{i,j} x_{i,j} \leq M \quad k \in N_V \quad (3.25)$$

A restrição (3.25) garante que cada veículo  $k$  não excede o limite máximo de comprimento das rotas  $M$ , pois quando  $b_{k,j} - b_{k+1,j} = 1$  o vértice  $j$  (aluno ou escola) é atendido pelo veículo  $k$ , e o custo  $c_{i,j}$  deve ser considerado para o cálculo do custo total da rota do veículo  $k$ .

$$b_{i,j} \in \{0,1\} \quad i, j \in N \quad (3.26)$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\} \quad (i, j) \in A \quad (3.27)$$

As restrições (3.26) e (3.27) são de integralidade das variáveis  $x$  e  $b$ .

Com o intuito de esclarecer os significados dos coeficientes e variáveis envolvidos no Problema do Transporte Escolar considere o exemplo seguinte, com  $n=5$  e  $v=2$ :

$N_P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ : alunos em seus pontos de parada (coleta);

$N_E = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ : pontos das escolas dos respectivos alunos (entrega);

$N_V = \{11, 12\}$ : conjunto de garagens.

Neste modelo, um aluno  $i$  tem sua escola indexada como  $i + n$ , respeitando as ordens dos elementos dos conjuntos  $N_P$  e  $N_E$ .

Neste trabalho define-se rota factível como uma sequência de nós, onde uma rota começa com um veículo e termina com uma escola ou um outro veículo, ou seja, os arcos utilizados na rota devem ligar veículo a aluno, aluno a aluno e aluno à escola. No Quadro 3.2 pode ser observado um exemplo de rota factível. Este percurso é uma rota de ida. Considera-se que o veículo permanece na última escola visitada durante o período de aula, e, ao final deste período retorna coletando os alunos em suas escolas e deixando-os em seus respectivos pontos de parada, retornando para a garagem de origem.

QUADRO 3.2 - ROTA FACTÍVEL

Elementos dos conjuntos	$V_1$	$V_2$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$
Índice do elemento na formulação matemática	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

No Quadro 3.2, o veículo 1 ( $V_1$ ) está sem passageiro e o veículo 2 ( $V_2$ ) coleta os alunos  $A_1, A_2, A_3, A_4$  e  $A_5$  e os deixa em suas respectivas escolas  $E_1, E_2, E_3, E_4$  e  $E_5$ .

O Quadro 3.3 ilustra o controle de capacidade do veículo que é realizado durante a rota.

QUADRO 3.3 - CONTROLE DE CAPACIDADE

Elementos dos conjuntos	$V_1$	$V_2$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$
Índice do elemento na formulação matemática	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Capacidade acumulada do veículo	0	0	1	2	3	4	5	4	3	2	1	0

↑ Embarque      ↑ Desembarque

O controle da capacidade do veículo é feito através de um contador. No Quadro 3.2 o veículo 1 ( $V_1$ ) está sem passageiro, o veículo 2 ( $V_2$ ) coleta os alunos 1, 2, 3, 4 e 5. Nota-se que na linha do controle de capacidade para cada aluno coletado pelo veículo há um aumento no valor da capacidade, e quando o veículo deixa os

alunos em suas respectivas escolas  $E_1$ ,  $E_2$   $E_3$ ,  $E_4$  e  $E_5$  a capacidade acumulada do veículo vai diminuindo até zerar, o que indica que o veículo está vazio. Este controle é feito pela restrição (3.21) da Formulação Matemática.

A Figura 3.1 mostra o trajeto percorrido pelo veículo 2 ( $V_2$ ).

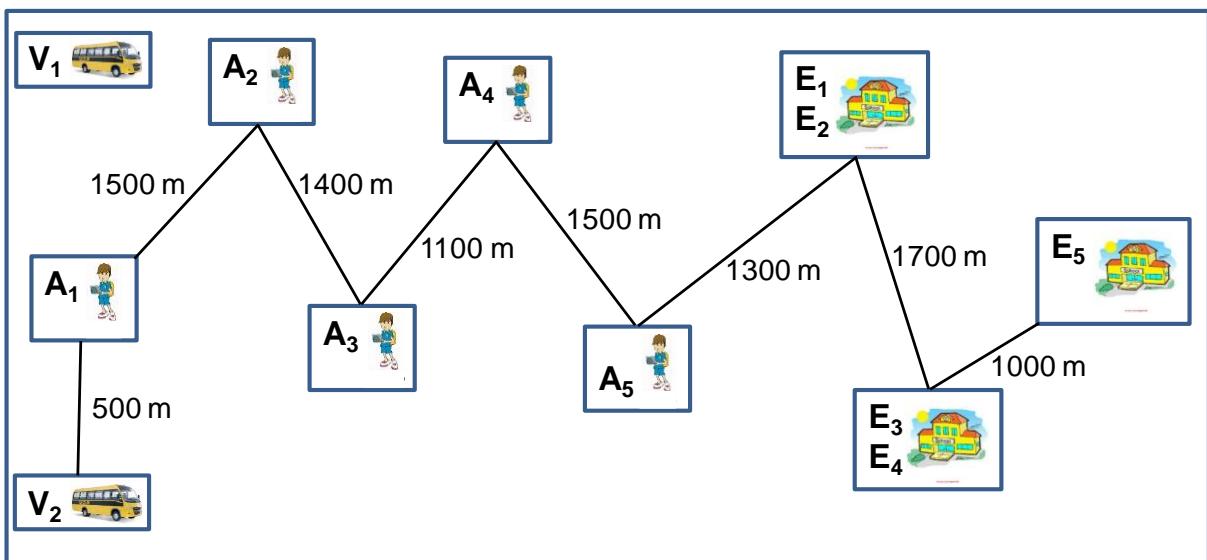


FIGURA 3.1 - TRAJETO PERCORRIDO PELO VEÍCULO 2 ( $V_2$ )

O Quadro 3.4 mostra como é feito o controle da quilometragem acumulada em uma rota.

QUADRO 3.4 - QUILOMETRAGEM ACUMULADA

Partícula	$V_1$	$V_2$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$
Índice do elemento na formulação matemática	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Capacidade acumulada do veículo	0	0	1	2	3	4	5	4	3	2	1	0
Quilometragem acumulada (m)	0	0	500	2000	3400	4500	6000	7300	7300	9000	9000	10000

No Quadro 3.4 pode-se notar que na linha da quilometragem acumulada o percurso total realizado pelo veículo 2 ( $V_2$ ) é de 10.000 metros. O fato de a quilometragem ter permanecido constante entre as escolas  $E_1$  e  $E_2$  e entre as escolas  $E_3$  e  $E_4$  significa que os alunos 1 ( $A_1$ ) e 2 ( $A_2$ ) estudam na mesma escola, analogamente para os alunos 3 ( $A_3$ ) e 4 ( $A_4$ ). O controle do comprimento máximo da rota é feito pela restrição (3.25) da Formulação Matemática.

Nas restrições (3.14) e (3.15) da formulação matemática se  $x_{i,j} = 1$ , observamos que se o arco que liga o aluno 5 ( $A_5$ ) com índice 5 na formulação matemática à escola 1 ( $E_1$ ) com índice 6 na formulação matemática é utilizado na rota, isso pode ser representado pela igualdade  $x_{5,6} = 1$  e isto implica em  $b_{k,5} = b_{k,6}$  para todo  $k \in N$  e  $k \neq i$ .

No exemplo, se  $k = 1$ , teremos  $b_{1,5} = b_{1,6} = 1$ , pois o vértice 1 é anterior aos vértices 5 e 6 na rota. Já para  $k = 7$ , teremos  $b_{7,5} = b_{7,6} = 0$ , pois o vértice 7 é posterior aos vértices 5 e 6 na rota.

Neste trabalho a meta-heurística proposta Otimização por Nuvem de Partículas Discreta Adaptada (ONPDA) considera a lógica das restrições e variáveis da formulação apresentada na seção 3.2 e é aplicada ao problema do Transporte Escolar para 32 municípios do Estado do Paraná. A Tabela 3.1 mostra os dados que serão utilizados neste trabalho para dois destes municípios, Anahy e Rio Negro, sendo que os dados consideram o turno da manhã.

TABELA 3.1 - DADOS DAS ESCOLAS, DOS ALUNOS QUE UTILIZAM O TRANSPORTE ESCOLAR, DOS VEÍCULOS, PONTOS DE PARADA E NÚMERO DE RESTRIÇÕES DO PROBLEMA NO TURNO DA MANHÃ

Município	Alunos	Pontos de parada	Escolas	Veículos	Restrições do Problema
Anahy	19	8	2	5	$9,2158 \times 10^4$
Rio Negro	353	52	13	28	$2,3764 \times 10^{41}$

Para definir o Problema do Transporte Escolar no Paraná utilizando a formulação matemática mostrada na seção 3.2, para o município Anahy são necessários 43 nós (considerando 19 alunos, 19 escolas e 5 veículos) e efetuando os cálculos para os 17 conjuntos de restrições da formulação matemática é possível constatar que seriam necessárias  $9,2158 \times 10^4$  restrições. Para o município de Rio Negro com 353 alunos, 353 escolas e 28 veículos, são ao todo 734 nós, fazendo com que o número de restrições necessárias para resolver o problema chegue à cerca de  $2,3764 \times 10^{41}$  restrições, o que torna a solução pelo método exato inviável, justificando a utilização de meta-heurísticas para a solução do problema.

A relação entre o número de nós para cada município em cada período de estudo e o número de restrições necessárias para resolver o problema utilizando a formulação matemática apresentada na seção 3.2 encontra-se no Apêndice A.

### 3.3 MODELAGEM DO PTE UTILIZANDO A META-HEURÍSTICA NUVEM DE PARTÍCULAS

Neste trabalho, a meta-heurística Otimização por Nuvem de Partículas Discreta Adaptada (ONPDA) é aplicada ao problema de roteirização de veículos do Transporte Escolar. Para aplicar o modelo proposto, algumas adaptações devem ser consideradas. O ONP pode ser aplicado em problemas de otimização combinatória desde que se defina como os parâmetros básicos serão definidos. A abordagem proposta nesta tese foi inspirada em pesquisas anteriores sobre a aplicação da ONP em problemas discretos, alterando a forma como os operadores de velocidade são utilizados. Essa aplicação é descrita nas seções seguintes.

Uma partícula consiste de um vetor de ordem  $(2n+v)$ , com  $n$  alunos,  $n$  escolas e  $v$  veículos. Os elementos de 1 a  $n$  representam os alunos, de  $n+1$  a  $2n$ , as escolas e de  $2n+1$  a  $2n+v$ , os veículos. Cada elemento da partícula representa o veículo utilizado no transporte considerando a sua capacidade, a localização do aluno e a localização da escola.

- Exemplo de partícula factível (Rota Factível):

$$\vec{X}(t) = (V_1, A_1, A_2, A_5, E_2, E_1, E_5, V_2, A_4, A_6, A_9, E_9, E_6, E_4, V_3, A_3, A_7, A_8, A_{10}, E_3, E_7, E_{10}, E_8)$$

No exemplo anterior o veículo 1 ( $V_1$ ) coleta os alunos 1, 2 e 5 e os deixa em suas respectivas escolas ( $E_1, E_2, E_5$ ), o veículo 2 ( $V_2$ ) coleta os alunos 4, 6 e 9 e os deixa em suas escolas ( $E_4, E_6, E_9$ ). Analogamente, o veículo 3 ( $V_3$ ) coleta os alunos 3, 7, 8 e 10, e os deixa em suas respectivas escolas ( $E_3, E_7, E_8, E_{10}$ ).

- Exemplo de partícula infactível (Rota infactível):

$$\vec{X}(t) = (V_1, A_1, A_4, A_6, E_2, E_1, E_5, V_2, A_2, A_5, A_9, E_9, E_6, E_4, V_3, A_3, A_7, A_8, A_{10}, E_3, E_7, E_{10}, E_8)$$

No exemplo de partícula infactível, o veículo 1 ( $V_1$ ) coleta os alunos 1, 4 e 6 e deixa o aluno 1 em sua escola ( $E_1$ ), e passa pelas escolas 2 e 5 sem ter alunos para o desembarque. O veículo 2 ( $V_2$ ) coleta os alunos 2, 5 e 9, deixa o aluno 9 ( $A_9$ ) na escola 9 ( $E_9$ ), e passa pelas escolas 6 e 4 sem ter alunos para o desembarque. Analogamente para o veículo 3 ( $V_3$ ).

### 3.3.1 A Matriz de Custos

A matriz de custos considerada neste estudo apresenta os custos (distâncias) entre as garagens dos veículos e os pontos de parada dos alunos e das escolas, entre pontos de parada dos alunos, entre os pontos de parada dos alunos e suas respectivas escolas e as distâncias entre os pontos de parada das escolas. Na matriz de custos mostrada no Quadro 3.5, o número de alunos é igual ao número de escolas, ou seja, para a representação da partícula no vetor de solução, cada aluno tem sua escola, usando a mesma lógica da formulação matemática apresentada em 3.2.

QUADRO 3.5 - MATRIZ DE CUSTOS

	<b>A<sub>1</sub></b>	<b>A<sub>2</sub></b>	<b>A<sub>3</sub></b>	...	<b>A<sub>n</sub></b>	<b>E<sub>1</sub></b>	<b>E<sub>2</sub></b>	<b>E<sub>3</sub></b>	...	<b>E<sub>n</sub></b>	<b>V<sub>1</sub></b>	<b>V<sub>2</sub></b>	<b>V<sub>3</sub></b>	...	<b>V<sub>v</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	0	C <sub>1, 2</sub>	C <sub>1, 3</sub>	...	C <sub>1, n</sub>	C <sub>1, n+1</sub>	C <sub>1, n+2</sub>	C <sub>1, n+3</sub>	...	C <sub>1, 2n</sub>	∞	∞	∞	...	∞
<b>A<sub>2</sub></b>	C <sub>2, 1</sub>	0	C <sub>2, 3</sub>	...	C <sub>2, n</sub>	C <sub>2, n+1</sub>	C <sub>2, n+2</sub>	C <sub>2, n+3</sub>	...	C <sub>2, 2n</sub>	∞	∞	∞	...	∞
<b>A<sub>3</sub></b>	C <sub>3, 1</sub>	d <sub>1, n</sub>	0	...	C <sub>3, n</sub>	C <sub>3, n+1</sub>	C <sub>3, n+2</sub>	d <sub>3, n+3</sub>	...	C <sub>3, 2n</sub>	∞	∞	∞	...	∞
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
<b>A<sub>n</sub></b>	C <sub>n, 1</sub>	C <sub>n, 2</sub>	C <sub>n, 3</sub>	...	0	C <sub>n, n+1</sub>	C <sub>n, n+2</sub>	C <sub>n, n+3</sub>	...	C <sub>n, 2n</sub>	∞	∞	∞	...	∞
<b>E<sub>1</sub></b>	∞	C <sub>n+1, 2</sub>	C <sub>n+1, 3</sub>	...	C <sub>n+1, n</sub>	0	d <sub>n+1, n+2</sub>	C <sub>n+1, n+3</sub>	...	C <sub>n+1, 2n</sub>	0	0	0	...	0
<b>E<sub>2</sub></b>	C <sub>n+2, 1</sub>	∞	C <sub>n+2, 3</sub>	...	C <sub>n+2, n</sub>	C <sub>n+2, n+1</sub>	0	C <sub>n+2, n+3</sub>	...	C <sub>n+2, 2n</sub>	0	0	0	...	0
<b>E<sub>3</sub></b>	C <sub>n+3, 1</sub>	C <sub>n+3, 2</sub>	∞	...	C <sub>n+3, n</sub>	C <sub>n+3, n+1</sub>	C <sub>n+3, n+2</sub>	0	...	C <sub>n+3, 2n</sub>	0	0	0	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
<b>E<sub>n</sub></b>	C <sub>2n, 1</sub>	C <sub>2n, 2</sub>	C <sub>2n, 3</sub>	...	∞	C <sub>2n, n+1</sub>	C <sub>2n, n+2</sub>	C <sub>2n, n+3</sub>	...	0	0	0	0	...	0
<b>V<sub>1</sub></b>	C <sub>2n+1, 1</sub>	C <sub>2n+1, 2</sub>	C <sub>2n+1, 3</sub>	...	C <sub>2n+1, n</sub>	∞	∞	∞	...	∞	0	0	0	...	0
<b>V<sub>2</sub></b>	C <sub>2n+2, 1</sub>	C <sub>2n+2, 2</sub>	C <sub>2n+2, 3</sub>	...	C <sub>2n+2, n</sub>	∞	∞	∞	...	∞	0	0	0	...	0
<b>V<sub>3</sub></b>	C <sub>2n+3, 1</sub>	C <sub>2n+3, 2</sub>	C <sub>2n+3, 3</sub>	...	C <sub>2n+3, n</sub>	∞	∞	∞	...	∞	0	0	0	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
<b>V<sub>v</sub></b>	C <sub>2n+v, 1</sub>	C <sub>2n+v, 2</sub>	C <sub>2n+v, 3</sub>	...	C <sub>2n+v, n</sub>	∞	∞	∞	...	∞	0	0	0	...	0

Na matriz de custos representada no Quadro 3.5, observa-se que a distância entre as escolas e seus respectivos alunos é igual a  $\infty$ . Esta penalidade é fixada para garantir que no vetor solução (vetor rota) o arco que liga uma escola e seu

aluno não seja utilizado na rota. A diagonal principal da matriz de custos é nula, pois representa a distância entre um vértice  $i$  e ele mesmo.

Ainda na matriz de custos é possível observar que as distâncias entre os veículos  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_v$  e as escolas  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$  é  $\infty$ . Isso acontece para que arcos ligando veículos às escolas não sejam utilizados na rota, pois neste caso não haveria alunos para embarque. Analogamente as distâncias entre os alunos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  e os veículos  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_v$  é igual a  $\infty$ , novamente para garantir que arcos ligando alunos a veículos nesta ordem não sejam utilizados na rota, pois não haveria desembarque de alunos. A sequência correta de arcos deve acontecer como ilustrado no exemplo de Rota Factível da seção anterior. Para que uma partícula seja factível devem existir arcos ligando, veículos a alunos, alunos a alunos, alunos a escolas e escolas a veículos.

As distâncias das escolas  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$  para os veículos  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_v$  é zero. Isso acontece porque uma rota inicia com um veículo e termina com uma escola. As distâncias entre os veículos também é zero, pois isso faz com que o algoritmo tente utilizar um número menor de veículos para atender toda a demanda.

Com estas características particulares a matriz de custos inicialmente gera somente partículas factíveis, sendo que partícula factível é aquela que apresenta uma determinada ordem entre os elementos que a compõem, conforme descrito na seção 3.3. Por exemplo, uma partícula é infactível quando um arco ligando à escola  $i+n$  ao aluno  $i$  é utilizado na rota. Quando se aplica o operador velocidade uma partícula pode se tornar infactível dependendo da troca de posição efetuada. Desta forma a movimentação deve ser restrita a alguns tipos particulares, que são expostos na próxima seção.

### 3.3.2 Mudança de Posição dos Elementos na Partícula

A seguir é mostrado o mecanismo para efetuar as possíveis trocas de posição para os elementos que compõem a partícula, com o objetivo de obter redução na quilometragem total da rota.

O processo para manter uma partícula factível envolve três tipos de movimentação dentro do vetor. Qualquer elemento da rota pode mudar de posição, ou seja, um aluno, uma escola ou um veículo. Para realizar a movimentação faz-se um sorteio aleatório como ilustrado nos três casos abaixo.

### 3.3.2.1 A posição sorteada é um aluno

O Quadro 3.6 mostra um exemplo de sorteio aleatório para definir qual o elemento que muda de posição dentro da partícula com o objetivo de reduzir o custo total do percurso (quilometragem da rota). Para mudar o aluno de posição dentro do vetor é preciso verificar se após a troca ele permanece antes de sua escola e no mesmo veículo.

QUADRO 3.6 - POSIÇÃO SORTEADA É UM ALUNO

Partícula	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>5</sub>
Capacidade acumulada do veículo	0	0	1	2	3	4	5	4	3	2	1	0
Posição do aluno/escola/veículo na partícula	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quilometragem acumulada (m)	0	0	500	2000	3400	4500	6000	7300	7300	9000	9000	10000

↑ Limites para troca de posição ↑

No Quadro 3.6, para fazer o sorteio do elemento que vai mudar de posição dentro da partícula, temos 12 candidatos à troca. Se a posição 5 for sorteada, o elemento que irá trocar de posição é o aluno 3 (A<sub>3</sub>). O aluno 3 só pode mudar de posição se permanecer no mesmo veículo e ficar em uma posição anterior à sua escola (E<sub>3</sub>), que no exemplo, está ocupando a posição 10 na partícula. Caso contrário a troca não será realizada.

Neste momento é necessário percorrer os elementos do vetor que representa a partícula, para descobrir quais são os limites para fazer a troca de posição, garantindo que a mudança de posição efetuada não torne a partícula infactível. O procedimento para percorrer o vetor deve ser feito de trás para frente até que o veículo seja encontrado. No exemplo mostrado no Quadro 3.6 o A<sub>3</sub> está no veículo 2 (V<sub>2</sub>). Neste caso, o aluno 3 (A<sub>3</sub>) poderá trocar de posição variando de mínimo= 3 e máximo= 10-1= 9, garantindo que o A<sub>3</sub> esteja no vetor após o veículo 2 (V<sub>2</sub>) e antes da sua escola (E<sub>3</sub>). As trocas de posição dentro da partícula são efetuadas somente se a nova partícula for factível. Ainda no Quadro 3.6 se a velocidade fosse a lista de trocas  $v = \{(5,10),(5,9)\}$  a primeira troca (5,10) não seria realizada, pois não está dentro dos limites de mínimo= 3 e máximo= 9. Já a troca (5,9) poderá ser efetuada.

No Quadro 3.7, pode-se verificar que os alunos 1 ( $A_1$ ) e 2 ( $A_2$ ) estão no mesmo ponto de parada e estudam na mesma escola, pois a quilometragem acumulada permanece constante quando o veículo 2 ( $V_2$ ) coleta o aluno 1 ( $A_1$ ) e em seguida o aluno 2. O mesmo ocorre no desembarque, quando o veículo 2 ( $V_2$ ) deixa os alunos 1 ( $A_1$ ) e 2 ( $A_2$ ) em suas escolas  $E_1$  e  $E_2$ .

QUADRO 3.7 - QUILOMETRAGEM ACUMULADA

Partícula	$V_1$	$V_2$	$A_1$	$A_2$	$E_1$	$E_2$	$A_3$	$E_3$	$A_4$	$E_4$	$A_5$	$E_5$
<b>Capacidade do veículo</b>	0	0	1	2	1	0	1	0	1	0	1	0
<b>Posição do aluno/escola/veículo na partícula</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>Quilometragem acumulada (m)</b>	0	0	1000	1000	3000	3000	5000	6500	7000	8000	9000	10000

Na Figura 3.2 pode ser observado o trajeto realizado pelo veículo 2 ( $V_2$ ).

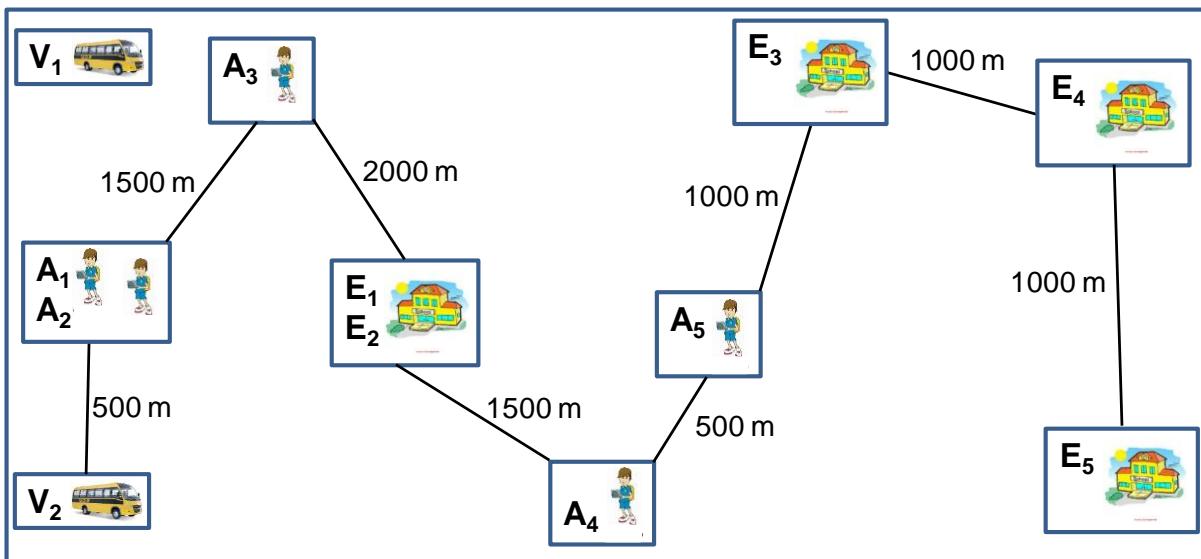


FIGURA 3.2 - TRAJETO PERCORRIDO POR ( $V_2$ )

### 3.3.2.2 A posição sorteada é uma escola

No Quadro 3.8, o sorteio aleatório é realizado entre os 12 possíveis candidatos à troca. Se a posição 10 for sorteada, por exemplo, a escola 4 ( $E_4$ ) é o elemento que deve mudar de posição. Novamente não pode ocorrer da escola aparecer no vetor antes do respectivo aluno, logo as opções possíveis de troca são

as posições 11 e 12 dentro da partícula. Neste caso a escola  $E_4$  poderá trocar de posição variando de  $mín= 11$  e  $máx= 12$ .

QUADRO 3.8 - POSIÇÃO SORTEADA É UMA ESCOLA.

Partícula	$V_1$	$V_2$	$A_1$	$E_1$	$A_3$	$A_2$	$E_2$	$E_3$	$A_4$	$E_4$	$A_5$	$E_5$
Capacidade do veículo	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
Posição do aluno/escola/veículo na partícula	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

↓  
↑  
↑  
Limites para troca de posição

Para trocar a posição da escola dentro do vetor é preciso verificar se após a troca ela permanece depois do aluno, caso contrário a troca não é realizada.

### 3.3.2.3 A posição sorteada é um veículo

No Quadro 3.9, o elemento sorteado aleatoriamente é um veículo, por exemplo, a posição 2, o veículo 2 ( $V_2$ ) deve mudar de posição na partícula. No caso de troca de posição do veículo deve-se considerar que um veículo não pode ocupar uma posição que separe um aluno de sua escola. Se a posição do veículo na partícula é anterior à posição do aluno  $i$ , o veículo só pode trocar de posição na partícula se trocar de lugar com outro veículo ou com uma escola. Neste caso, se o veículo ocupar a posição do aluno  $i$ , ele estará separando o aluno de sua escola. Se a posição do veículo é posterior à posição do aluno  $i$  na partícula, a troca pode ser realizada. Com a partícula mostrada no Quadro 3.9 e a lista de trocas  $v = \{(2,4),(2,5),(2,8)\}$ , a primeira troca (2,4) é dita factível, pois o veículo 2 ( $V_2$ ) que ocupa a posição 2 na partícula deve mudar para a posição 4, fazendo com que a escola 1 ( $E_1$ ) ocupe a posição 3. A segunda troca (2,5) é dita infactível, pois o veículo 2 ( $V_2$ ) que ocupa a posição 2 na partícula deve mudar para a posição 5, fazendo com que o aluno 3 ( $A_3$ ) ocupe a posição 4. Esta troca faz com que o veículo 2 separe o aluno 3 ( $A_3$ ) da escola 3 ( $E_3$ ) na rota. A última troca (2,8) é factível, uma vez que o veículo 2 deve mudar para a posição 8, fazendo com que a escola 3 ( $E_3$ ) ocupe a posição 7, neste caso o veículo não separou um aluno de sua escola.

QUADRO 3.9 - POSIÇÃO SORTEADA É UM VEÍCULO.

Partícula	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	A <sub>1</sub>	E <sub>1</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>2</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>5</sub>
Capacidade do veículo	0	0	1	2	3	4	5	4	3	2	1	0
Posição do aluno/escola/veículo na partícula	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

As trocas de posição dentro da partícula nos três casos descritos acima são efetuadas somente se as restrições de capacidade e de comprimento máximo da rota forem respeitadas.

### 3.4 O ALGORITMO PROPOSTO (ONPDA)

Nesta seção é descrita a meta-heurística segundo a abordagem de Otimização por Nuvem de Partículas Discreta Adaptada (ONPDA) proposta nesse trabalho para o problema de roteirização de veículos capacitado com frota heterogênea fixa e coleta e entrega simultânea. As inovações propostas neste trabalho são apresentadas, tanto no que diz respeito à codificação das partículas quanto nas operações estabelecidas.

#### 3.4.1 Codificação da partícula

O procedimento para implementação da técnica ONPDA proposta neste trabalho está descrito no algoritmo apresentado a seguir:

Passo 1: Iniciar uma população (matriz) de partículas factíveis, com posições e velocidades em um espaço de problema com dimensão  $2n+v$ .

Passo 2: Para cada partícula, avaliar a função de aptidão (função objetivo a ser minimizada- *fitness*);

- Cada partícula teve o seu custo calculado (somatório da quilometragem total percorrida).

$$\sum_{i,j \in N} c_{i,j} x_{i,j}$$

Onde  $c_{i,j}$ , representa o custo (quilometragem) do arco que liga o vértice  $i$  ao vértice  $j$  entrar na rota.

Uma rota com a sequência  $(V_1, A_1, \dots)$ , indica que o veículo 1 ( $V_1$ ) coleta o aluno 1 ( $A_1$ ), ou seja  $x_{2n+1,1} = 1$ .

Passo 3: Após a geração das partículas:

- Para cada partícula iniciar posição (rota factível) e velocidade (lista de transposições aleatórias), onde a posição inicial de cada partícula é igual ao  $pBest$  inicial da partícula e o número de transposições iniciais é igual à dimensão  $k$  da partícula.

Passo 4: Encontrar o  $gBest$  da população (custo mínimo).

Passo 5: A partir da segunda iteração:

- Comparar a avaliação da função de aptidão da partícula com o  $pBest$  da partícula. Se o valor corrente (somatório da quilometragem) é melhor que  $pBest$ , então o valor de  $pBest$  passa a ser igual ao valor da função de aptidão da partícula, e a localização do  $pBest$  passa a ser igual à localização atual no espaço  $2n+v$  dimensional;

Passo 6: Comparar a avaliação da função de aptidão com o prévio melhor valor de aptidão da população. Se o valor atual é melhor que o  $gBest$ , atualizar o valor de  $gBest$  para o índice e valor da partícula atual;

Passo 7: Atualizar a velocidade e a posição da partícula, respectivamente, de acordo com as Equações (2.1) e (2.2) a seguir:

$$v_i(t+1) = w \times v_i(t) + c_1 \times \phi_1 \times (pBest_i(t) - x_i(t)) + c_2 \times \phi_2 \times (gBest(t) - x_i(t)) \quad (2.1)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \quad (2.2)$$

Para aplicar a velocidade à posição de uma partícula, foram utilizadas as definições para ONP Discreta apresentadas na seção 2.9, com algumas adaptações. As listas de troca (velocidades) foram obtidas conforme definido na seção 2.9. A velocidade foi definida como uma lista de  $k$  transposições aleatórias:

$v = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)\}$ , que significa a troca dos nós de índices  $i_1$  e  $j_1, i_2$  e  $j_2$ , até a troca dos vértices  $i_k$  e  $j_k$ . Neste trabalho dada uma lista de transposições e a posição de uma partícula existem três possibilidades distintas:

- Se  $i < j$ ,  $i$  ocupa a posição  $j$  e  $\forall k \in \{i+1, i+2, \dots, j\}$ ,  $k$  ocupa a posição  $k-1$  na partícula após a troca;
- Se  $i = j$  não há troca; e
- Se  $i > j$ ,  $i$  ocupa a posição  $j$  e  $\forall k \in \{j, j+1, \dots, i-1\}$ ,  $k$  ocupa a posição  $k+1$  na partícula após a troca;

### 3.4.2 Funcionamento do algoritmo

Um exemplo de funcionamento do algoritmo apresentado nesta seção é mostrado a seguir.

Seja uma partícula de uma população com posição inicial, velocidade inicial,  $pBest$  e  $gBest$  dados por:

$$x_i(t) = (V_1, A_1, A_2, E_1, E_2, V_2, A_3, A_4, A_5, E_3, E_4, E_5),$$

$$v_i(t) = \{(2,3),(5,10),(1,5),(4,1),(3,5),(7,9),(2,8),(3,1),(10,11),(8,9),(3,7),(1,6)\}$$

$$pBest_i(t) = (V_1, A_1, E_1, A_2, E_2, V_2, A_5, A_4, A_3, E_4, E_3, E_5)$$

$$gBest(t) = (V_1, A_2, E_2, A_1, E_1, V_2, A_4, A_5, A_3, E_4, E_5, E_3)$$

Considerando os parâmetros  $w = 0,5$ ,  $c_1 = 0,7$ ,  $c_2 = 0,3$  e  $\phi_1 = \phi_2 = 1$ , a atualização da velocidade é descrita como segue:

$$v_i(t+1) = w \times v_i(t) + c_1 \times \phi_1 \times (pBest_i(t) - x_i(t)) + c_2 \times \phi_2 \times (gBest(t) - x_i(t))$$

$$\begin{aligned} v_i(t+1) = & 0,5 * \{(2,3),(5,10),(1,5),(4,1),(3,5),(7,9),(2,8),(3,1),(10,11),(8,9),(3,7),(1,6)\} \\ & + 0,7 * 1 * ((V_1, A_1, E_1, A_2, E_2, V_2, A_5, A_4, A_3, E_4, E_3, E_5) - (V_1, A_1, A_2, E_1, E_2, V_2, A_3, A_4, A_5, E_3, E_4, E_5)) \\ & + 0,3 * 1 * ((V_1, A_2, E_2, A_1, E_1, V_2, A_4, A_5, A_3, E_4, E_5, E_3) - (V_1, A_1, A_2, E_1, E_2, V_2, A_3, A_4, A_5, E_3, E_4, E_5)) \end{aligned}$$

Os resultados de:

$$pBest_i(t) - x_i(t) = \{(1,1),(2,2),(3,4),(4,3),(5,5),(6,6),(7,9),(8,8),(9,7),(10,11),(11,10),(12,12)\} \text{ e}$$

$$gBest(t) - x_i(t) = \{(1,1),(1,3),(3,5),(4,2),(5,4),(6,6),(7,8),(8,9),(9,7),(10,11),(11,10),(12,10)\}$$

são listas de transposições (listas de troca de posição), o que resulta em:

$$\begin{aligned} v_i(t+1) = & 0,5 * \{(2,3),(5,10),(1,5),(4,1),(3,5),(7,9),(2,8),(3,1),(10,11),(8,9),(3,7),(2,9)\} + \\ & 0,7 * 1 * \{(1,1),(2,2),(3,4),(4,3),(5,5),(6,6),(7,9),(8,8),(9,7),(10,11),(11,10),(12,12)\} + \\ & 0,3 * 1 * \{(1,1),(1,3),(3,5),(4,2),(5,4),(6,6),(7,8),(8,9),(9,7),(10,11),(11,10),(12,10)\} \end{aligned}$$

Na primeira parcela da equação da velocidade acima são sorteadas 50% das trocas disponíveis aleatoriamente, na segunda são sorteadas 70% das trocas e na terceira são sorteadas 30% das trocas. O vetor resultante para atualização da velocidade pode ser observado a seguir:

$$v_i(t+1) = \{(2,3), (1,5), (7,9), (3,5), (2,9), (5,5), (9,7), (8,8), (7,9), (10,11), (11,10)(12,12), (4,2), (5,4), (7,8)\}$$

A seguir será mostrado um exemplo do funcionamento das transposições definidas neste trabalho. Dadas uma posição e uma velocidade, as trocas ocorrem como mostra o exemplo dado a seguir.

Sejam:

$$v_i(t+1) = \{(2,3), (1,5), (7,9), (3,5), (2,9), (5,5), (9,7), (8,8), (7,9), (10,11), (11,10)(12,12), (4,2), (5,4), (7,8)\}$$

$$x_i(t) = (V_1, A_1, A_2, E_1, E_2, V_2, A_3, A_4, A_5, E_3, E_4, E_5)$$

Para aplicar a lista de transposições à posição da partícula, a primeira transposição a ser efetuada é (2,3), ou seja, o elemento que ocupa a posição 2 na partícula deve ocupar a posição 3, levando o elemento que ocupa a posição 3 para a posição 2 na partícula. Esta troca é dita factível, pois o aluno 2 ( $A_2$ ) permanece antes da escola 2 ( $E_2$ ) após a troca de posição. Como mostra o exemplo abaixo:

$$\begin{array}{c} \text{Troca factível} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \\ x_i(t) = (V_1, A_1, A_2, E_1, E_2, V_2, A_3, A_4, A_5, E_3, E_4, E_5) \\ \xleftarrow{\quad\quad\quad} \\ x_i(t) = (V_1, A_2, A_1, E_1, E_2, V_2, A_3, A_4, A_5, E_3, E_4, E_5) \end{array}$$

A próxima transposição é (1,5). Quando realizada, fará com que a partícula se torne infactível, pois o veículo 1 que ocupa a posição 1 na partícula deve mudar para a posição 5, o que não pode ocorrer pois desta forma os alunos 1 ( $A_1$ ) e 2 ( $A_2$ ) ficam sem veículo para o transporte. Neste caso a troca não é realizada. O próximo passo é verificar a terceira transposição (7,9). O elemento que ocupa a posição 7 ( $A_3$ ) pode mudar para a posição 9, esta troca é possível pois os alunos 3 ( $A_3$ ) e 5 ( $A_5$ ) permanecem antes das escolas 3 ( $E_3$ ) e 5 ( $E_5$ ) depois de efetuada a troca, como mostra o exemplo abaixo:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad\quad\quad} \\ x_i(t) = (V_1, A_2, A_1, E_1, E_2, V_2, A_3, A_4, A_5, E_3, E_4, E_5) \\ \xleftarrow{\quad\quad\quad} \\ \text{Troca infactível} \qquad \qquad \qquad \text{Troca factível} \end{array}$$

A quarta transposição é (3,5), o aluno 1 ( $A_1$ ) que está na posição 3 deve ocupar a posição 5, se for realizada fará com que a partícula se torne infactível, pois o aluno 1 ficará após a sua escola na partícula. A troca não é realizada.

$$x_i(t) = (V_1, A_2, A_1, E_1, E_2, V_2, A_4, A_5, A_3, E_3, E_4, E_5)$$

A próxima transposição é (2,9), esta transposição é infactível pois o aluno 2 ( $A_2$ ) deve mudar para a posição 9, ficando depois da sua escola na partícula após a troca. Esta troca não é realizada.

Para a transposição (5,5) não há troca.

Na transposição (9,7) o aluno 4 ( $A_4$ ) que ocupa a posição 9 na partícula deve ir para a posição 7 e o aluno 5 ( $A_5$ ) que está na posição 7 vai para a posição 8, esta troca é factível. A mudança na partícula pode ser observada abaixo:

$$x_i(t) = (V_1, A_2, E_2, A_1, E_1, V_2, A_5, A_3, A_4, E_3, E_4, E_5)$$

$$x_i(t) = (V_1, A_2, E_2, A_1, E_1, V_2, A_4, A_5, A_3, E_3, E_4, E_5)$$

As transposições seguintes são efetuadas da mesma forma. Após todas as transposições factíveis serem efetuadas a nova posição da partícula é dada por:

$$x_i(t+1) = (V_1, A_1, A_2, E_1, E_2, V_2, A_4, A_5, A_3, E_3, E_4, E_5)$$

### 3.5 UTILIZAÇÃO DE GERAÇÕES

Uma das contribuições (inovações) deste trabalho está na utilização de novas gerações de partículas, a fim de aumentar a diversidade de busca para o problema. O algoritmo proposto inicia com uma população de  $p$  partículas, em seguida um número de iterações é realizado. Por fim uma nova população é criada, considerando partículas factíveis. Esta nova população possui  $p-1$  partículas e a partícula de melhor *fitness* (*gBest*) da geração anterior é inserida na geração atual.

O processo de criação das gerações para uma população com  $p$  partículas pode ser observado na Figura 3.3.

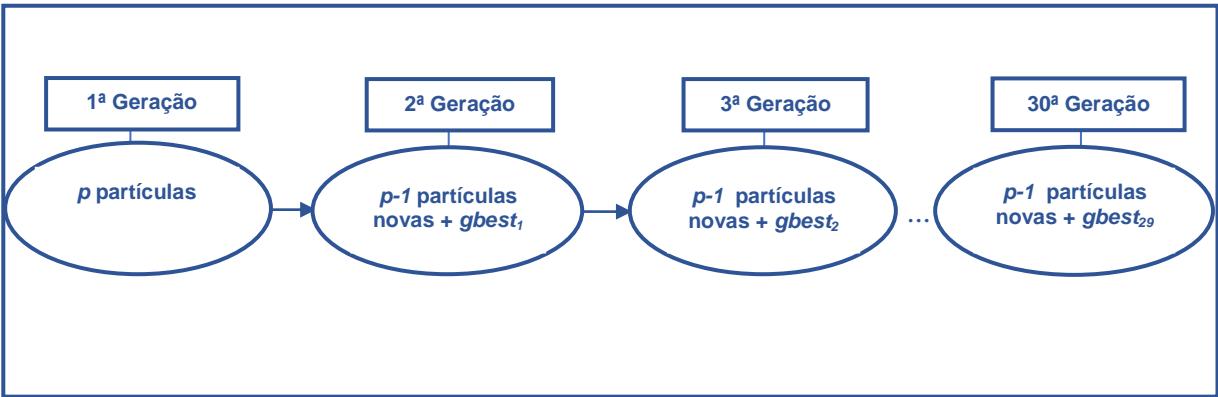


FIGURA 3.3 - PROCESSO DE CRIAÇÃO DAS GERACÕES

### 3.6 INÉRCIA NO ALGORITMO ONP ( $w$ )

O fator de inércia diminui gradativamente a cada iteração  $t$  do algoritmo (SHI; EBERHART, 1998). O decaimento da inércia  $w$  é definido pela Equação 3:

$$w = \frac{(T - t) * (w_{final} - w_{inicial})}{T} + w_{inicial}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (3.28)$$

onde  $T$  é o número máximo de iterações do algoritmo,  $w_{inicial}$  o valor inicial de  $w$  e  $w_{final}$  o valor final de  $w$ , definidos como parâmetros.

A utilização desta equação de ajuste se justifica pelo fato de que um peso de inércia maior no início da busca facilita a localização de boas regiões, as quais podem ser melhor aproveitadas com peso de inércia menor. Em outras palavras, um fator de inércia alto facilita uma exploração global do espaço de busca, enquanto que um valor pequeno deste parâmetro possibilita uma busca local.

### 3.7 PSEUDO-CÓDIGO DO ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO POR NUVEM DE PARTÍCULAS DISCRETA ADAPTADO

O pseudo- código para o algoritmo de Otimização por Nuvem de Partículas Discreta Adaptado (ONPDA) é apresentado na Figura 3.4

```

Para cada Geração

    Para cada partícula

        Inicie partículas factíveis com velocidade aleatória;

        Fim_para
    Faça

        Faça

        Para cada partícula  $p$ 

            Calcule o valor da função fitness de  $p$ 

            Se o fitness de  $p$  é melhor que o fitness de  $pBest$  então

                 $pBest \leftarrow p$ 

            Fim_Para

            Defina a partícula de melhor fitness como  $gBest$ 

            Para cada partícula  $p$ 

                Calcule a velocidade

                 $v_i(t+1) = w \times v_i(t) + c_1 \times \phi_1 \times (pBest_i(t) - x_i(t)) + c_2 \times \phi_2 \times (gBest(t) - x_i(t))$ 

                Atualize a posição da partícula utilizando somente trocas factíveis

                 $x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1)$ 

            Fim_Para
        Fim_Para

    Fim_Para

    Enquanto (iterações máximas) ou (critérios de erro mínimo) não são atendidos.

    Inicie nova geração incluindo a partícula de melhor fitness da geração anterior

```

FIGURA 3.4 - ALGORITMO DE NUVEM DE PARTÍCULAS DISCRETA

Pesquisas anteriores (GOLDBARG *et al.*, 2005; GOLDBARG *et al.*, 2006a; GOLDBARG *et al.*, 2006b; SOUZA, 2006) também apontam que o ONP, com algumas modificações nos operadores, vem a ser uma técnica promissora para problemas de otimização combinatória.

No capítulo IV um estudo de caso é apresentado, no qual a metodologia proposta neste trabalho foi implementada.

## CAPÍTULO IV

### 4 ESTUDO DE CASO

#### 4.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O algoritmo proposto no Capítulo III é aplicado na resolução do Problema do Transporte Escolar para 32 municípios do Estado do Paraná.

No problema real a ser solucionado, estudantes do ensino fundamental e médio, que residem no interior do estado são transportados até suas respectivas escolas em seus períodos de estudo. O serviço de transporte é de responsabilidade das secretarias municipais de educação, e cada município é encarregado de designar a frota de veículos que será utilizada para fazer o transporte dos estudantes. Em geral estes veículos pertencem a empresas terceirizadas e o custo é calculado por quilômetro rodado, de acordo com a frota utilizada.

As empresas que realizam os serviços de Transporte Escolar no estado possuem frota heterogênea, mesmo porque existem regiões onde determinados veículos ficam impossibilitados de trafegar em função das condições das estradas, que em geral são muito íngremes e estreitas, tornando-se impossível o tráfego de veículos grandes. Assim, são contratados diversos tipos de veículos com diferentes capacidades. O banco de dados ainda não possui as informações sobre restrições de tráfego das vias, portanto possíveis restrições de tráfego não puderam ser consideradas. Desta forma, estas alterações de rotas, se necessárias, deverão ser feitas pelo gestor do transporte escolar.

Os alunos são transportados, levando-se em consideração a redução total do percurso do veículo, o que implica na redução do tempo de permanência dos estudantes no veículo e, além disso, estudantes de diferentes séries e escolas são transportados na maioria das vezes na mesma rota.

O Quadro 4.1 apresenta as características dos veículos utilizados nestes municípios.

QUADRO 4.1 - VEÍCULOS UTILIZADOS

<b>Tipo de veículo</b>	<b>Capacidade</b>
Perua	8-12
Van	15
Micro-ônibus	20-32
Ônibus	40-60

O Quadro 4.1 mostra que os veículos utilizados no Transporte Escolar são classificados em 4 tipos: peruas, com capacidades que variam entre 8 e 12 lugares; vans, com capacidades de 15 lugares; micro-ônibus, com capacidades que variam entre 20 e 32 lugares; e ônibus, com capacidades que variam entre 40 e 60 lugares.

A heterogeneidade da frota aumenta consideravelmente a complexidade do problema de roteirização. Em alguns problemas pode haver limitações quanto ao número de veículos de cada tipo que estão disponíveis para utilização, além da eventual limitação da frota como um todo.

Esta meta-heurística busca minimizar a quilometragem diária total percorrida pelos veículos utilizados, através do seu máximo aproveitamento e, buscando para cada um dos veículos, a solução mais eficiente em termos da distância e/ou tempo de viagem.

Neste capítulo são discutidos detalhadamente como foram obtidos, tratados e inseridos todos os dados de entrada do modelo.

## 4.2 DADOS UTILIZADOS

O estudo de caso realizado nesta tese está baseado no trabalho de Siqueira e Souza (2012), onde os autores utilizaram três etapas para obter a solução do problema do Transporte Escolar em 32 municípios do Estado do Paraná. As três etapas podem ser divididas em: determinação do conjunto dos pontos de parada; determinação das distâncias entre os pontos; construção das rotas com o algoritmo *ALBH - Adapted Location Based Heuristic*.

A metodologia apresentada por Siqueira e Souza (2012), proporcionou uma economia para estes municípios que varia entre 3,10% e 39,13% na quilometragem total diária. A distância máxima considerada entre os pontos de parada foi  $d_{máx} = 1500$  metros. Os resultados foram comparados às rotas que eram

efetivamente realizadas nos municípios. Para a comparação, o mapeamento das rotas foi obtido com o auxílio de um aparelho de *GPS* (*Global Positioning System*). Atualmente os municípios do Estado do Paraná utilizam a metodologia desenvolvida por Siqueira e Souza (2012) para designar as rotas para o Transporte Escolar.

Nesta tese foram utilizados o número de pontos de parada e as distâncias reais obtidas com a metodologia proposta no trabalho acima citado. Para a 3<sup>a</sup> etapa, no processo de construção das rotas, foi utilizada a meta-heurística proposta Otimização por Nuvem de Partículas Discreta Adaptada (ONPDA).

#### 4.3 UTILIZAÇÃO DA ONP DISCRETA

Devido às suas capacidades globais e locais de exploração, simplicidade na codificação e consistência na performance, o Algoritmo ONP tem sido amplamente aplicado à diversas áreas do conhecimento. Embora o algoritmo ONP tenha sido originalmente proposto para problemas de otimização contínua, este trabalho mostra a aplicação da ONPDA para dados discretos.

Para a resolução do Problema do Transporte Escolar, por meio do ONPDA, foi utilizada a seguinte codificação: cada partícula consiste em um vetor de ordem  $(2n+v)$ . No vetor com  $n$  alunos,  $n$  escolas e  $v$  veículos, cada posição na partícula representa o veículo utilizado no transporte considerando a sua capacidade, a localização do aluno e a localização da escola. Em outras palavras, tal codificação representa o vetor de variáveis de decisão  $x$ .

#### 4.4 ESTUDOS REALIZADOS

Os experimentos foram realizados com as bases de dados de 32 municípios do Estado do Paraná, são eles: Abatiá, Agudos do Sul, Anahy, Ângulo, Ariranha do Ivaí, Bom Jesus do Sul, Cafeara, Céu Azul, Diamante do Oeste, Fernandes Pinheiro, Figueira, Flor da Serra do Sul, Iracema do Oeste, Loanda, Lobato, Marilena, Mirador, Moreira Sales, Nova América da Colina, Paraíso do Norte, Paula Freitas, Pinhais, Prado Ferreira, Rio Negro, Santa Amélia, Santa Mariana, São Sebastião da Amoreira, Teixeira Soares, Tunas do Paraná, Uniflor, Uraí e Ventania. Estes dados foram disponibilizados pela Secretaria de Educação do Estado (SEED) e pela

Secretaria de Desenvolvimento Urbano (SEDU), e são referentes ao ano letivo de 2014.

O Quadro 4.2 apresenta os dados de cada município, considerando-se: escolas, veículos disponíveis, pontos de parada e número de alunos que utilizam o transporte escolar nos períodos manhã, tarde e noite.

**QUADRO 4.2 - DADOS UTILIZADOS POR PERÍODO DE ESTUDO**  
(continua)

Municípios	Variáveis/períodos de estudo	Manhã	Tarde	Noite
Abatiá	Veículos Disponíveis	14	14	14
	Alunos	236	76	56
	Pontos de parada	76	21	35
	Escolas	4	5	2
Agudos do Sul	Veículos Disponíveis	13	13	13
	Alunos	275	325	41
	Pontos de parada	48	51	19
	Escolas	7	5	3
Anahy	Veículos Disponíveis	5	5	5
	Alunos	19	22	7
	Pontos de parada	8	15	6
	Escolas	2	2	1
Ângulo	Veículos Disponíveis	4	4	4
	Alunos	57	41	7
	Pontos de parada	17	12	6
	Escolas	3	3	1
Airanha do Ivaí	Veículos Disponíveis	10	10	10
	Alunos	91	104	44
	Pontos de parada	44	48	24
	Escolas	4	3	1
Bom Jesus do Sul	Veículos Disponíveis	13	13	13
	Alunos	137	1	271
	Pontos de parada	74	1	81
	Escolas	2	1	5
Cafeara	Veículos Disponíveis	6	6	6
	Alunos	9	53	44
	Pontos de parada	6	21	10
	Escolas	2	2	2
Céu Azul	Veículos Disponíveis	17	17	17
	Alunos	147	397	43
	Pontos de parada	44	78	21
	Escolas	6	7	2
Diamante do Oeste	Veículos Disponíveis	9	9	-
	Alunos	262	279	-
	Pontos de parada	6	50	-
	Escolas	2	2	-
Fernandes Pinheiro	Veículos Disponíveis	11	11	11
	Alunos	599	179	41
	Pontos de parada	95	60	17
	Escolas	6	4	1
Figueira	Veículos Disponíveis	11	11	11
	Alunos	422	331	101
	Pontos de parada	49	28	20
	Escolas	8	8	3

(continuação)

Municípios	Variáveis/ períodos de estudo	Manhã	Tarde	Noite
Flor da Serra do Sul	Veículos Disponíveis	14	14	14
	Alunos	386	230	9
	Pontos de parada	109	57	6
	Escolas	4	5	1
Iracema do Oeste	Veículos Disponíveis	4	4	4
	Alunos	47	1	4
	Pontos de parada	22	1	4
	Escolas	3	1	1
Loanda	Veículos Disponíveis	13	13	13
	Alunos	233	139	21
	Pontos de parada	75	19	11
	Escolas	10	9	3
Lobato	Veículos Disponíveis	4	-	4
	Alunos	59	-	1
	Pontos de parada	27	-	1
	Escolas	5	-	1
Marilena	Veículos Disponíveis	9	9	9
	Alunos	179	175	10
	Pontos de parada	67	55	9
	Escolas	6	6	1
Mirador	Veículos Disponíveis	8	8	8
	Alunos	40	4	12
	Pontos de parada	23	2	8
	Escolas	3	2	2
Moreira Sales	Veículos Disponíveis	19	19	19
	Alunos	84	274	90
	Pontos de parada	42	96	41
	Escolas	6	6	3
Nova América da Colina	Veículos Disponíveis	5	5	5
	Alunos	57	30	10
	Pontos de parada	17	16	7
	Escolas	2	2	1
Paraíso do Norte	Veículos Disponíveis	8	8	8
	Alunos	124	170	70
	Pontos de parada	29	29	19
	Escolas	3	3	2
Paula Freitas	Veículos Disponíveis	10	10	10
	Alunos	258	370	95
	Pontos de parada	88	102	42
	Escolas	2	8	2
Pinhais	Veículos Disponíveis	18	18	18
	Alunos	113	117	37
	Pontos de parada	29	34	12
	Escolas	18	14	3
Prado Ferreira	Veículos Disponíveis	4	4	4
	Alunos	45	12	18
	Pontos de parada	12	3	6
	Escolas	2	1	1
Rio Negro	Veículos Disponíveis	28	28	28
	Alunos	353	401	67
	Pontos de parada	52	52	19
	Escolas	13	15	3

(conclusão)

Municípios	Variáveis/períodos de estudo	Manhã	Tarde	Noite
Santa Amélia	Veículos Disponíveis	5	5	5
	Alunos	174	63	40
	Pontos de parada	31	17	18
	Escolas	5	4	2
Santa Mariana	Veículos Disponíveis	12	12	12
	Alunos	33	76	50
	Pontos de parada	14	21	12
	Escolas	6	5	4
São Sebastião da Amoreira	Veículos Disponíveis	5	5	5
	Alunos	118	33	9
	Pontos de parada	28	10	4
	Escolas	5	4	2
Teixeira Soares	Veículos Disponíveis	14	14	14
	Alunos	488	613	87
	Pontos de parada	129	21	50
	Escolas	9	5	2
Tunas do Paraná	Veículos Disponíveis	8	8	8
	Alunos	204	259	124
	Pontos de parada	26	26	33
	Escolas	2	3	2
Uniflor	Veículos Disponíveis	5	5	5
	Alunos	40	51	20
	Pontos de parada	19	17	11
	Escolas	2	2	2
Uraí	Veículos Disponíveis	20	20	20
	Alunos	235	226	94
	Pontos de parada	65	64	25
	Escolas	7	7	3
Ventania	Veículos Disponíveis	18	18	18
	Alunos	214	359	101
	Pontos de parada	33	66	28
	Escolas	5	6	2

O Quadro 4.3 mostra o número de nós ( $n$  alunos,  $n$  escolas e  $v$  veículos) para cada município em cada período de estudo.

QUADRO 4.3 - NÚMERO DE NÓS POR PERÍODO DE ESTUDO

(continua)

Número de Nós				Número de Nós			
Municípios	Manhã	Tarde	Noite	Municípios	Manhã	Tarde	Noite
Abatiá	486	166	126	Mirador	88	16	32
Anahy	43	49	19	Nova A. da Colina	119	65	25
Ângulo	118	86	18	Paraíso do Norte	256	348	148
Ariranha do Ivaí	218	192	98	Paula Freitas	526	750	200
Bom Jesus do Sul	287	15	555	Pinhais	244	252	92

(conclusão)

Número de Nós				Número de Nós			
Municípios	Manhã	Tarde	Noite	Municípios	Manhã	Tarde	Noite
Cafeara	24	112	94	Prado Ferreira	94	28	40
Céu Azul	311	811	103	Rio Negro	734	830	162
Diamante do Oeste	533	567	-	Santa Amélia	354	132	86
Fernandes Pinheiro	1209	369	93	Santa Mariana	78	152	112
Figueira	855	673	213	São S. da Amoreira	241	71	23
Flor da Serra do Sul	790	478	32	Teixeira Soares	990	1240	188
Iracema do Oeste	98	6	12	Tunas do Paraná	416	526	256
Loanda	479	291	55	Uniflor	85	107	45
Lobato	122	-	6	Uraí	490	472	208
Marilena	367	359	29	Ventania	446	736	220

Como se pode observar no Quadro 4.3, o número de nós varia de 6 (Iracema do Oeste/tarde) a 1240 nós (Teixeira Soares/tarde). Os municípios de Diamante do Oeste no período da noite e Lobato no período da tarde não possuem alunos que utilizam o Transporte Escolar.

#### 4.5 PARÂMETROS UTILIZADOS

Conforme descrito na seção 2.8, a cada iteração a velocidade da partícula deve ser atualizada considerando os três coeficientes  $w$ ,  $c_1$  e  $c_2$  e, então, aplicada à a partícula para a atualização da posição. Diversos testes foram realizados variando-se os parâmetros envolvidos e os melhores resultados foram obtidos com base em testes exaustivos (empiricamente) com o intuito de encontrar o melhor conjunto de parâmetros para o problema.

Os intervalos para os parâmetros selecionados foram:

$w$  - variando de 0,15 à 0,05 usando o decaimento da Equação (3) mostrada na seção 3.6.

$c_1$  - variando de 0,3 à 0,6;

$c_2$  - variando de 0,45 à 0,9.

Também foram realizados diversos testes, variando-se o número de partículas e o número de iterações. Para a aplicação da metodologia proposta ao problema do Transporte Escolar, foram inicializadas populações com 20 partículas para todos os municípios testados. Observou-se que para este problema, um número de partículas maior do que 20 não ofereceu ganhos no valor da função objetivo, somente aumentou o tempo computacional.

O critério de parada pré-definido utilizado foi: número de gerações variando de 30 a 45 com número de iterações igual a 1.000 em cada geração para todos os problemas testados. Verificou-se que após 1.000 iterações não houve mudança significativa no valor da função objetivo. Após a primeira rodada (1.000 iterações para a primeira geração de partículas) a partícula com melhor *fitness* foi inserida na segunda geração, e assim sucessivamente.

O controle do comprimento da rota é feito com uma restrição que limita a quilometragem percorrida pelo veículo. O valor limite da quilometragem acumulada foi de 40 km para todos os municípios.

#### 4.6 SOLUÇÃO EXATA

Para validar o modelo ONPDA proposto, foram realizadas comparações entre os resultados obtidos com a solução exata, o modelo proposto e a técnica ALBH (SIQUEIRA; SOUZA, 2012). Para obter a solução exata, a formulação matemática apresentada na seção 3.2 foi executada no Software Lingo. O Lingo é um Software de modelagem e resolução de problemas lineares e não-lineares de otimização (SOUZA; GOMES, 2004). A linguagem de modelagem do Lingo permite representar a função objetivo e as restrições do problema de forma bastante simples e intuitiva.

No capítulo V são apresentados os resultados obtidos com a aplicação da meta-heurística Otimização por Nuvem de Partículas Discreta Adaptada (ONPDA) proposta neste trabalho para o Problema do Transporte Escolar. São também apresentados os resultados obtidos pelo Software Lingo para os problemas do Transporte Escolar para municípios com um número de nós menor ou igual à 19.

## CAPÍTULO V

### 5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

#### 5.1 INTRODUÇÃO

Os métodos descritos no capítulo III foram, primeiramente, aplicados para a solução de um caso real de roteirização de veículos escolares para 32 municípios do Estado do Paraná. Posteriormente, com o objetivo de avaliar o desempenho da meta-heurística Otimização por Nuvem de Partículas Discreta Adaptada (ONPDA) proposta neste trabalho, os resultados obtidos pelo ONPDA foram comparados aos resultados obtidos pela heurística *ALBH* de Siqueira e Souza (2012) e com a solução exata obtida com o auxílio do Software Lingo para os problemas de pequeno porte.

Os resultados do estudo de caso, do conjunto de problemas do Transporte Escolar encontram-se na próxima seção.

#### 5.2 RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MODELO PROPOSTO ONPDA NO PROBLEMA DO TRANSPORTE ESCOLAR

Nesta seção são apresentados os testes computacionais realizados com o algoritmo descrito no capítulo III. O computador utilizado possui processador Intel (R) Corel (TM) i5 CPU M480 @ 2.67GHz, com 4 GB de memória RAM e sistema operacional: Windows 7 Professional (32 bits). O algoritmo foi implementado na linguagem de programação Visual Basic 2010.

Os resultados encontrados com a técnica proposta neste trabalho para o problema do Transporte Escolar no Paraná são comparados com os resultados obtidos com a aplicação da heurística *ALBH* (*Adapted Location Based Heuristic*) proposta por Siqueira e Souza (2012).

A Tabela 5.1 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos com a aplicação das metodologias ONPDA proposta e *ALBH* para 32 municípios

considerando o somatório da quilometragem dos percursos de ida e volta dos três períodos de estudo: manhã, tarde e noite. Na Tabela o Erro Absoluto e o Erro relativo foram calculados como:

$$\text{Erro Absoluto} = \text{ALBH(Km)} - \text{ONPDA(Km)}$$

$$\text{Erro Relativo} = \frac{\text{Erro Absoluto}}{\text{ALBH(Km)}}$$

TABELA 5.1 - RESULTADOS DA APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS ALBH E ONPDA PARA 32 MUNICÍPIOS DO PARANÁ

Municípios	Alunos	Veículos disponíveis	Pontos de parada	Técnica	Quilometragem diária total (km)	Erro absoluto	Erro relativo	(continua) Economia diária (%)
Abatiá	368	14	132	ALBH	1.285,38	17,886	0,0139	<b>1,39</b>
				ONPDA	1.267,50			
Agudos do Sul	641	13	118	ALBH	1.037,460	78,974	0,0761	<b>7,61</b>
				ONPDA	958,486			
Anahy	48	5	29	ALBH	219,626	32,362	0,1474	<b>14,74</b>
				ONPDA	187,264			
Ângulo	105	4	35	ALBH	351,162	45,772	0,1303	<b>13,03</b>
				ONPDA	305,390			
Ariranha do Ivaí	239	10	116	ALBH	764,426	10,760	0,0141	<b>1,41</b>
				ONPDA	753,666			
Bom J. do Sul	409	13	156	ALBH	1.050,968	-5,413	-0,0052	<b>-0,52</b>
				ONPDA	1.056,381			
Cafeara	106	6	37	ALBH	404,730	26,562	0,0656	<b>6,56</b>
				ONPDA	378,168			
Céu Azul	587	17	143	ALBH	1.698,998	22,656	0,0133	<b>1,33</b>
				ONPDA	1676,342			
Diamante do Oeste	541	9	56	ALBH	524,942	3,460	0,0066	<b>0,66</b>
				ONPDA	521,482			
Fernandes Pinheiro	819	11	172	ALBH	1.875,266	59,260	0,0316	<b>3,16</b>
				ONPDA	1.816,006			
Figueira	854	11	97	ALBH	1.155,094	1,196	0,0010	<b>0,10</b>
				ONPDA	1.153,898			
Flor da S. do Sul	625	14	172	ALBH	1.824,160	79,754	0,0437	<b>4,37</b>
				ONPDA	1.744,406			

(continuação)

Municípios	Alunos	Veículos disponíveis	Pontos de parada	Técnica	Quilometragem diária total (km)	Erro absoluto	Erro relativo	Economia diária (%)
Iracema do Oeste	52	4	27	<i>ALBH</i> ONPDA	217,740 191,792	25,948	0,1192	<b>11,92</b>
Loanda	393	13	105	<i>ALBH</i> ONPDA	1.235,196 1.177,940	57,256	0,0464	<b>4,64</b>
Lobato	60	4	28	<i>ALBH</i> ONPDA	214,694 213,674	1,020	0,0048	<b>0,48</b>
Marilena	364	9	131	<i>ALBH</i> ONPDA	1.108,276 1.095,786	12,490	0,0113	<b>1,13</b>
Mirador	56	8	33	<i>ALBH</i> ONPDA	338,620 266,272	72,348	0,2137	<b>21,37</b>
Moreira Sales	448	19	179	<i>ALBH</i> ONPDA	1.606,714 1.550,744	55,970	0,0348	<b>3,48</b>
Nova A. da Colina	97	5	40	<i>ALBH</i> ONPDA	374,626 348,218	26,408	0,0705	<b>7,05</b>
Paraíso do Norte	364	8	77	<i>ALBH</i> ONPDA	618,304 621,742	-3,438	-0,0056	<b>-0,56</b>
Paula Freitas	723	10	232	<i>ALBH</i> ONPDA	1.941,674 1.887,062	54,612	0,0281	<b>2,81</b>
Pinhais	267	18	75	<i>ALBH</i> ONPDA	637,700 606,282	31,418	0,0493	<b>4,93</b>
Prado Ferreira	75	4	21	<i>ALBH</i> ONPDA	149,378 150,374	-0,996	-0,0067	<b>-0,67</b>
Rio Negro	821	28	123	<i>ALBH</i> ONPDA	1.004,848 987,100	17,748	0,0177	<b>1,77</b>
Santa Amélia	277	5	66	<i>ALBH</i> ONPDA	792,368 723,760	68,608	0,0866	<b>8,66</b>
Santa Mariana	159	12	47	<i>ALBH</i> ONPDA	597,318 573,412	23,906	0,0400	<b>4,00</b>
São S. da Amoreira	160	5	42	<i>ALBH</i> ONPDA	508,358 428,974	79,384	0,1562	<b>15,62</b>
Teixeira Soares	1188	14	200	<i>ALBH</i> ONPDA	3.474,762 3.424,722	50,040	0,0144	<b>1,44</b>
Tunas do Paraná	587	8	85	<i>ALBH</i> ONPDA	835,762 781,404	54,358	0,0650	<b>6,50</b>

(conclusão)

Municípios	Alunos	Veículos disponíveis	Pontos de parada	Técnica	Quilometragem diária total (km)	Erro absoluto	Erro relativo	Economia diária (%)
Uniflor	111	5	47	<i>ALBH</i> ONPDA	430,768 370,346	60,422	0,1403	<b>14,03</b>
Uraí	555	20	154	<i>ALBH</i> ONPDA	1.386,016 1.360,522	25,494	0,0184	<b>1,84</b>
Ventania	674	18	127	<i>ALBH</i> ONPDA	1.517,004 1.443,332	73,672	0,0486	<b>4,86</b>
Total (m)				<i>ALBH</i> ONPDA	31.182,34 30.022,44	1.159,897	0,0590	<b>5,29</b>

Os dados desta tabela mostram que a metodologia apresentada proporcionou uma economia para estes municípios que varia entre 0,10% e 21,37% na quilometragem total diária percorrida. Neste estudo considerou-se o trajeto de ida e volta. Dos 32 municípios em questão, houve redução da quilometragem diária total percorrida em 29 municípios. Na Tabela 5.1 é possível observar que, utilizando a técnica *ALBH*, a quilometragem total diária para os 32 municípios foi de 31.182,344 km e utilizando a técnica proposta ONPDA a quilometragem diária total foi de 30.022,447 km, a diferença é de 1.159,897 km diários. Considerando que um ano letivo tem 200 dias a economia que é possível realizar com a utilização da técnica proposta chega à 231.979,4 km por ano.

Como citado anteriormente, o serviço de Transporte Escolar é de responsabilidade das secretarias municipais de educação, e cada município é encarregado de designar a frota de veículos que será utilizada para fazer o transporte dos estudantes. Em geral estes veículos pertencem a empresas terceirizadas, e o custo é calculado por quilômetro rodado, de acordo com a frota utilizada.

A Tabela 5.2 mostra a economia anual em km de cada município utilizando a técnica ONPDA.

TABELA 5.2 - ECONOMIA ANUAL COM A APLICAÇÃO DA TÉCNICA ONPDA PARA 32 MUNICÍPIOS DO PARANÁ

(continua)

Município	Técnica	Quilometragem diária total (Km)	Economia diária (km)	Economia Anual (km)
Abatiá	ALBH	1285,386		
	ONPDA	1267,500	17,886	<b>3.577,2</b>
Agudos do Sul	ALBH	1037,460		
	ONPDA	958,486	78,974	<b>15.794,8</b>
Anahy	ALBH	219,626		
	ONPDA	187,264	32,362	<b>6.472,4</b>
Ângulo	ALBH	351,162		
	ONPDA	305,390	45,772	<b>9.154,4</b>
Ariranha do Ivaí	ALBH	764,426		
	ONPDA	753,666	10,760	<b>2152</b>
Bom J. do Sul	ALBH	1050,968		
	ONPDA	1056,381	-5,413	<b>-1.082,6</b>
Cafeara	ALBH	404,730		
	ONPDA	378,168	26,562	<b>5.312,4</b>
Céu Azul	ALBH	1.698,998		
	ONPDA	1.676,342	22,656	<b>4.531,2</b>
Diamante do Oeste	ALBH	524,942		
	ONPDA	521,482	3,460	<b>692</b>
Fernandes Pinheiro	ALBH	1875,266		
	ONPDA	1816,006	59,260	<b>1.1852</b>
Figueira	ALBH	1155,094		
	ONPDA	1153,898	1,196	<b>239,2</b>
Flor da S. do Sul	ALBH	1824,160		
	ONPDA	1744,406	79,754	<b>15.950,8</b>
Iracema do Oeste	ALBH	217,740		
	ONPDA	191,792	25,948	<b>5.189,6</b>
Loanda	ALBH	1235,196		
	ONPDA	1177,940	57,256	<b>11.451,2</b>
Lobato	ALBH	214,694		
	ONPDA	213,674	1,020	<b>204</b>
Marilena	ALBH	1108,276		
	ONPDA	1095,786	12,490	<b>2.498</b>
Mirador	ALBH	338,620		
	ONPDA	266,272	72,348	<b>14.469,6</b>

(conclusão)				
Município	Técnica	Quilometragem diária total (km)	Economia diária (km)	Economia Anual (km)
Moreira Sales	ALBH	1606,714		
	ONPDA	1550,744	55,970	<b>11.194</b>
Nova A. da Colina	ALBH	374,626		
	ONPDA	348,218	26,408	<b>5.281,6</b>
Paraíso do Norte	ALBH	618,304		
	ONPDA	621,742	-3,438	<b>-687,6</b>
Paula Freitas	ALBH	1941,674		
	ONPDA	1887,062	54,612	<b>10.922,4</b>
Pinhais	ALBH	637,700		
	ONPDA	606,282	31,418	<b>6.283,6</b>
Prado Ferreira	ALBH	149,378		
	ONPDA	150,374	-0,996	<b>-199,2</b>
Rio Negro	ALBH	1004,848		
	ONPDA	987,100	17,748	<b>3.549,6</b>
Santa Amélia	ALBH	792,368		
	ONPDA	723,760	68,608	<b>13.721,6</b>
Santa Mariana	ALBH	597,318		
	ONPDA	573,412	23,906	<b>4.781,2</b>
São S. da Amoreira	ALBH	508,358		
	ONPDA	428,974	79,384	<b>15.876,8</b>
Teixeira Soares	ALBH	3474,762		
	ONPDA	3424,722	50,040	<b>10.008</b>
Tunas do Paraná	ALBH	835,762		
	ONPDA	781,404	54,358	<b>10.871,6</b>
Uniflor	ALBH	430,768		
	ONPDA	370,346	60,422	<b>12.084,4</b>
Uraí	ALBH	1386,016		
	ONPDA	1360,522	25,494	<b>5.098,8</b>
Ventania	ALBH	1517,004		
	ONPDA	1443,332	73,672	<b>14.734,4</b>

A Tabela 5.2 mostra que para alguns municípios a economia em km chega a cerca de 15 mil quilômetros anual como é o caso de Agudos do Sul, Flor da Serra do Sul, Mirador, Santa Amélia, São Sebastião da Amoreira e Ventania. Nos municípios de Ângulo, Fernandes Pinheiro, Loanda, Moreira Sales, Paula Freitas, Teixeira Soares, Tunas do Paraná e Uniflor a economia é de aproximadamente 10 mil

quilômetros anuais. Para efeito de comparação a distância de carro do Oiapoque - AP ao Chuí- RS é de 7.269 km e a distância em linha reta é de 4.181 km. De acordo com a tabela 5.2 podemos observar que a economia anual em km para 22 dos 32 municípios testados é superior à distância do Oiapoque - AP ao Chuí- RS em linha reta.

A Tabela 5.3 compara os tempos computacionais em segundos entre os dois métodos.

TABELA 5.3 - DIFERENÇA DOS TEMPOS COMPUTACIONAIS ENTRE ONPDA E ALBH NOS TRÊS PERÍODOS DE ESTUDO

(continua)					
Município	Técnica	Tempo (s)	Município	Técnica	Tempo (s)
Abatiá	ALBH	136	Mirador	ALBH	12
	ONPDA	2.996		ONPDA	139
Agudos do Sul	ALBH	160	Moreira Sales	ALBH	177
	ONPDA	6.182		ONPDA	4.364
Anahy	ALBH	13	Nova A. da Colina	ALBH	14
	ONPDA	66		ONPDA	236
Ângulo	ALBH	13	Paraíso do Norte	ALBH	41
	ONPDA	204		ONPDA	4.232
Ariranha do Ivaí	ALBH	93	Paula Freitas	ALBH	538
	ONPDA	1.586		ONPDA	11.036
Bom J. do Sul	ALBH	260	Pinhais	ALBH	204
	ONPDA	3.984		ONPDA	2.028
Cafeara	ALBH	16	Prado Ferreira	ALBH	7
	ONPDA	176		ONPDA	176
Céu Azul	ALBH	302	Rio Negro	ALBH	1.095
	ONPDA	8.714		ONPDA	15.549
Diamante do Oeste	ALBH	126	Santa Amélia	ALBH	45
	ONPDA	5.335		ONPDA	3.085
Fernandes Pinheiro	ALBH	911	Santa Mariana	ALBH	137
	ONPDA	54.795		ONPDA	701
Figueira	ALBH	212	São S. da Amoreira	ALBH	34
	ONPDA	11.740		ONPDA	1.185
Flor da S. do Sul	ALBH	395	Teixeira Soares	ALBH	2.602
	ONPDA	10.254		ONPDA	76.312
Iracema do Oeste	ALBH	11	Tunas do Paraná	ALBH	1.425
	ONPDA	149		ONPDA	6.413

(conclusão)					
Município	Técnica	Tempo (s)	Município	Técnica	Tempo (s)
Loanda	<i>ALBH</i>	239	Uniflor	<i>ALBH</i>	17
	ONPDA	3.781		ONPDA	344
Lobato	<i>ALBH</i>	18	Uraí	<i>ALBH</i>	343
	ONPDA	160		ONPDA	5.402
Marilena	<i>ALBH</i>	141	Ventania	<i>ALBH</i>	865
	ONPDA	5.574		ONPDA	10.887

Na Tabela 5.3 podem ser observados os tempos de execução das técnicas *ALBH* e *ONPDA*, é possível verificar que em todos os casos a técnica *ALBH* superou a *ONPDA*, isso se deve ao fato de que a *ALBH* funciona como uma espécie de algoritmo guloso, enquanto que a *ONPDA* faz mais verificações de melhoria nas rotas.

A Figura 5.1 mostra o tempo de execução das técnicas *ALBH* e *ONPDA*.

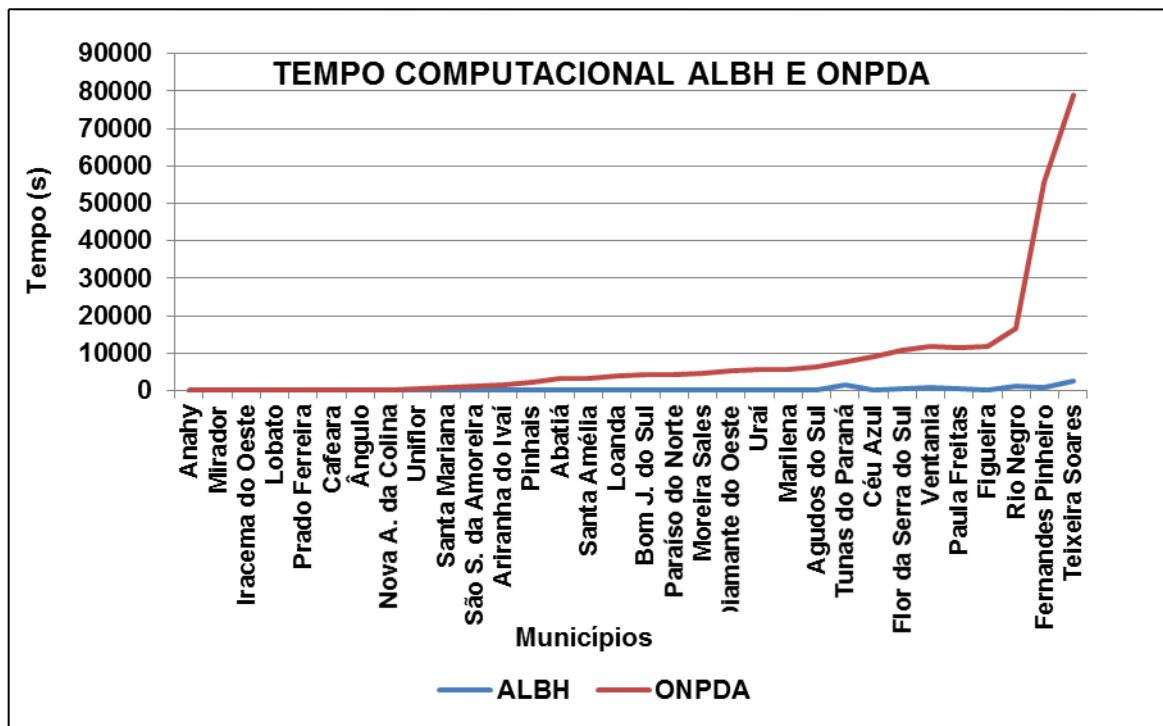


FIGURA 5.1 - TEMPO DE EXECUÇÃO DAS TÉCNICAS *ALBH* E *ONPDA*.

A Tabela 5.4 apresenta o número de nós e o tempo computacional da técnica *ONPDA* nos três períodos de estudo: manhã, tarde e noite.

TABELA 5.4 - NÚMERO DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL DA TÉCNICA ONPDA NOS TRÊS PERÍODOS DE ESTUDO

(continua)

Municípios	Manhã		Tarde		Noite	
	Nº de Nós	Tempo Computacional (s)	Nº de Nós	Tempo Computacional (s)	Nº de Nós	Tempo Computacional (s)
Abatiá	486	2.131	166	495	126	370
Agudos do Sul	564	2.805	664	3.220	96	157
Anahy	43	27	49	32	19	7
Ângulo	118	150	86	112	18	2
Ariranha do Ivaí	218	536	192	913	98	137
Bom Jesus do Sul	287	837	15	2	555	3145
Cafeara	24	5	112	148	94	23
Céu Azul	311	855	811	7.641	103	218
Diamante do Oeste	533	2.595	567	2.740	-	-
Fernandes Pinheiro	1.209	52.035	369	2.602	93	158
Figueira	855	7.934	673	2.833	213	973
Flor da Serra do Sul	790	7.634	478	2.595	32	25
Iracema do Oeste	98	145	6	1	12	3
Loanda	479	2.835	291	895	55	51
Lobato	122	159	-	-	6	1
Marilena	367	2.722	359	2.833	29	19
Mirador	88	122	16	4	32	13
Moreira Sales	187	615	567	2.957	199	792
Nova A. da Colina	119	165	65	57	25	14
Paraíso do Norte	256	803	348	2.958	148	471
Paula Freitas	526	2.475	750	7.758	200	803
Pinhais	244	1042	252	973	92	13
Prado Ferreira	94	165	28	10	40	1
Rio Negro	734	6.897	830	8.234	162	418
Santa Amélia	354	2.714	132	221	86	150
Santa Mariana	78	85	152	443	112	173
São S. da Amoreira	241	1.104	71	75	23	6

Municípios	Nº de Nós	Tempo Computacional (s)	(conclusão)			
			Nº de Nós	Tempo Computacional (s)	Nº de Nós	Tempo Computacional (s)
Teixeira Soares	990	24.192	1.240	51.375	188	745
Tunas do Paraná	416	2.413	526	2.755	256	1.245
Uniflor	85	123	107	174	45	47
Uraí	490	2.350	472	2.247	208	805
Ventania	446	2.115	736	7.757	220	1.015

A Tabela 5.5 mostra a relação entre o número de nós e o tempo computacional da técnica ONPDA dos 32 municípios no período da manhã em ordem crescente do número de nós.

TABELA 5.5 - NÚMERO DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL DA TÉCNICA ONPDA NO PERÍODO DA MANHÃ

Municípios	Nº de Nós	Tempo Computacional (s)	Municípios	Nº de Nós	Tempo Computacional (s)
Cafeara	24	5	Céu Azul	311	855
Anahy	43	27	Santa Amélia	354	2.714
Santa Mariana	78	85	Marilena	367	2.722
Uniflor	85	123	Tunas do Paraná	416	2.413
Mirador	88	122	Ventania	446	2.115
Prado Ferreira	94	165	Loanda	479	2.835
Iracema do Oeste	98	145	Abatiá	486	2.131
Ângulo	118	150	Uraí	490	2.350
Nova A. da Colina	119	165	Paula Freitas	526	2.475
Lobato	122	159	Diamante do Oeste	533	2.595
Moreira Sales	187	615	Agudos do Sul	564	2.805
Ariranha do Ivaí	218	536	Rio Negro	734	6.897
São S. da Amoreira	241	1.104	Flor da Serra do Sul	790	7.634
Pinhais	244	1.042	Figueira	855	7.934
Paraíso do Norte	256	803	Teixeira Soares	990	24.192
Bom Jesus do Sul	287	837	Fernandes Pinheiro	1209	52.035

A Figura 5.2 mostra a relação entre o número de nós e o tempo computacional dos 32 municípios em ordem crescente do número de nós no período

da manhã. Observa-se que o tempo computacional cresce polinomialmente em relação ao número de nós do problema com a técnica ONPDA.

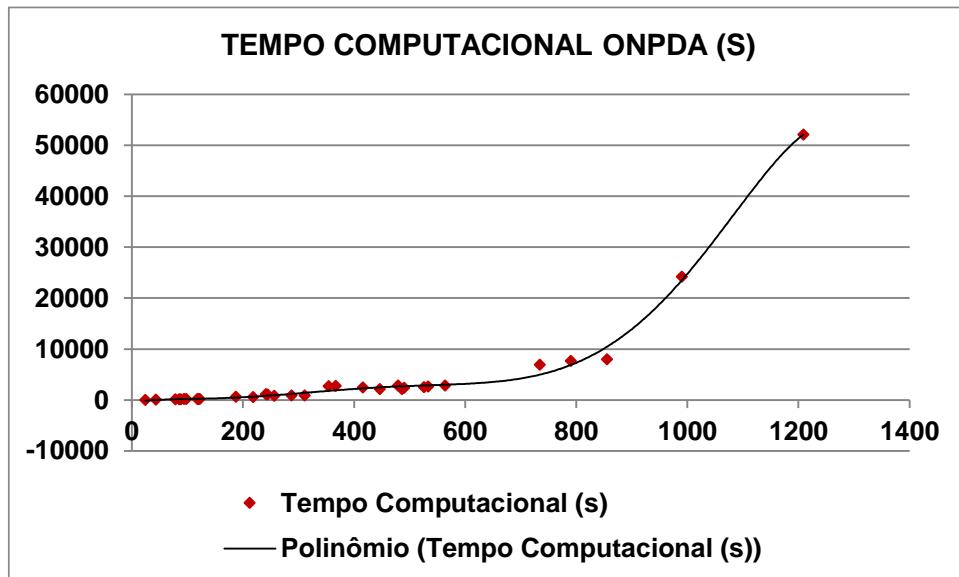


FIGURA 5.2 - NÚMERO DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL (MANHÃ)

A Tabela 5.6 mostra a relação entre o número de nós e o tempo computacional da técnica ONPDA dos 32 municípios no período da tarde em ordem crescente do número de nós.

TABELA 5.6 - NÚMERO DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL DA TÉCNICA ONPDA NO PERÍODO DA TARDE

(continua)

Municípios	Nº de Nós	Tempo Computacional (s)	Municípios	Nº de Nós	Tempo Computacional (s)
Iracema do Oeste	6	1	Paraíso do Norte	348	2.958
Bom Jesus do Sul	15	2	Marilena	359	2.833
Mirador	16	4	Fernandes Pinheiro	369	2.602
Prado Ferreira	28	10	Uraí	472	2.247
Anahy	49	32	Flor da Serra do Sul	478	2.595
Nova América da Colina	65	57	Tunas do Paraná	526	2.755
São Sebastião da Amoreira	71	75	Diamante do Oeste	567	2.740
Ângulo	86	112	Moreira Sales	567	2.957
Uniflor	107	174	Agudos do Sul	664	3.220

(conclusão)					
Municípios	Nº de Nós	Tempo Computacional (s)	Municípios	Nº de Nós	Tempo Computacional (s)
Cafeara	112	148	Figueira	673	2.833
Santa Amélia	132	221	Ventania	736	7.757
Santa Mariana	152	443	Paula Freitas	750	7.758
Abatiá	166	495	Céu Azul	811	7.641
Ariranha do Ivaí	192	913	Rio Negro	830	8.234
Pinhais	252	973	Teixeira Soares	1240	51.375
Loanda	291	895	Lobato	-	-

A Figura 5.3 mostra a relação entre o número de nós e o tempo computacional dos 32 municípios em ordem crescente do número de nós no período da tarde. Na Figura 5.3 pode-se observar que o tempo computacional cresce polinomialmente em relação ao número de nós do problema com a técnica ONPDA.

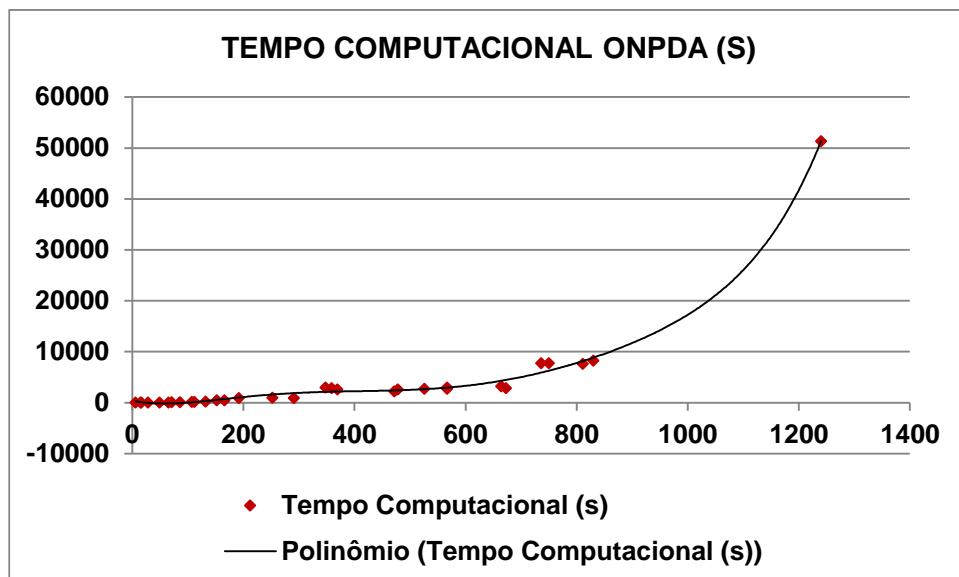


FIGURA 5.3 - NÚMERO DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL (TARDE)

A Tabela 5.7 mostra a relação entre o número de nós e o tempo computacional da técnica ONPDA dos 32 municípios no período da noite em ordem crescente do número de nós.

TABELA 5.7 - NÚMERO DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL DA TÉCNICA ONPDA NO PERÍODO DA NOITE

Municípios	Nº de Nós	Tempo Computacional (s)	Municípios	Nº de Nós	Tempo Computacional (s)
Lobato	6	1	Agudos do Sul	96	179
Iracema do Oeste	12	3	Ariranha do Ivaí	98	198
Ângulo	18	2	Céu Azul	103	218
Anahy	19	7	Santa Mariana	112	230
São Sebastião da Amoreira	23	10	Abatiá	126	370
Nova América da Colina	25	14	Paraíso do Norte	148	471
Marilena	29	19	Rio Negro	162	490
Flor da Serra do Sul	32	25	Teixeira Soares	188	745
Mirador	32	30	Moreira Sales	199	792
Prado Ferreira	40	36	Paula Freitas	200	803
Uniflor	45	47	Uraí	208	805
Loanda	55	51	Figueira	213	973
Santa Amélia	86	130	Ventania	220	1.015
Pinhais	92	150	Tunas do Paraná	256	1.245
Fernandes Pinheiro	93	165	Bom Jesus do Sul	555	5.790
Cafeara	94	170	Diamante do Oeste	-	-

A Figura 5.4 mostra a relação entre o número de nós e o tempo computacional dos 32 municípios em ordem crescente do número de nós no período da noite. Na Figura 5.4 pode-se observar que o tempo computacional cresce polinomialmente em relação ao número de nós do problema com a técnica ONPDA.

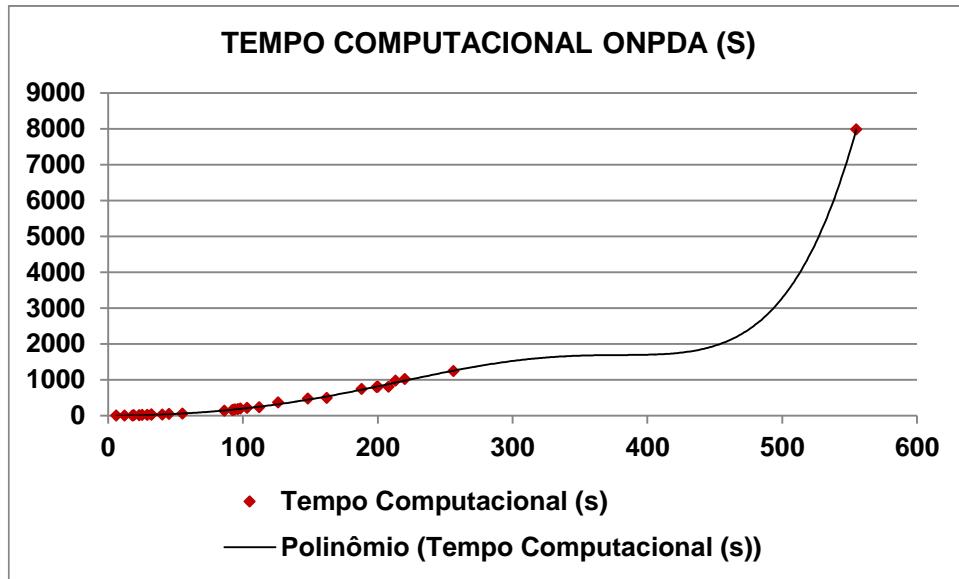


FIGURA 5.4 - NÚMERO DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL (NOITE)

A Figura 5.5 ilustra graficamente a diferença entre os percentuais da quilometragem diária total obtida pelos dois algoritmos nos 16 primeiros municípios em ordem alfabética.

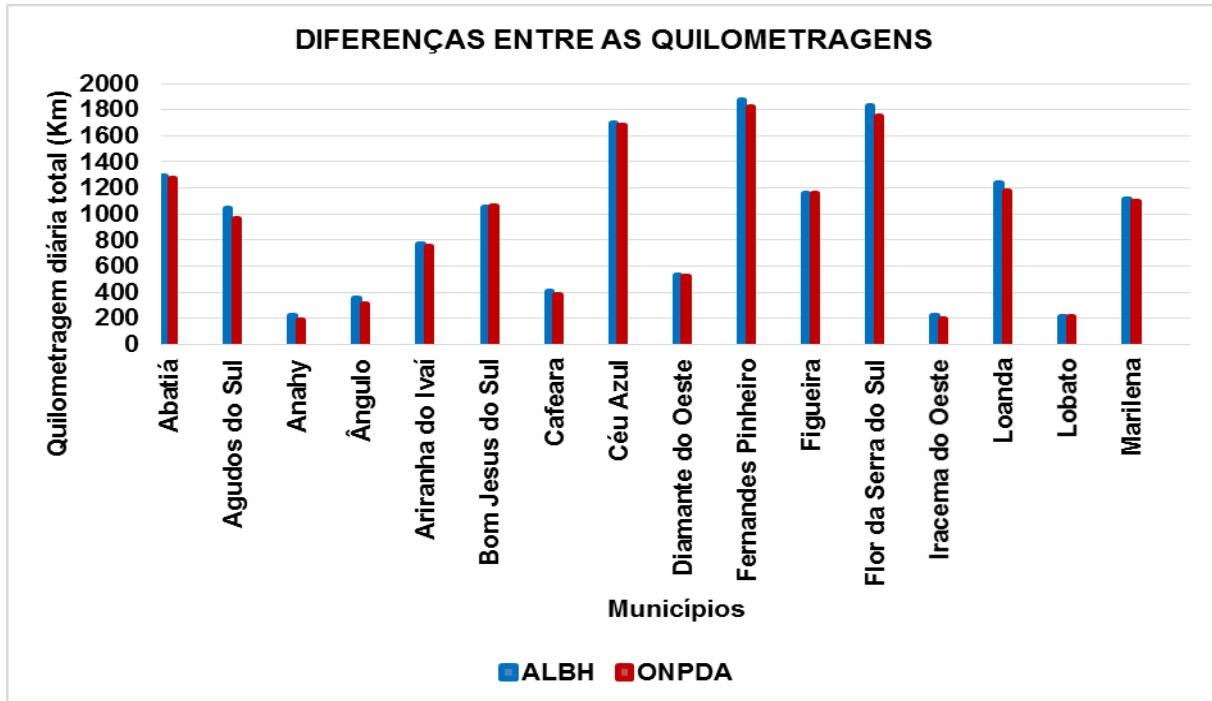


FIGURA 5.5 - DIFERENÇAS ENTRE AS QUILOMETRAGENS OBTIDAS PELOS DOIS ALGORITMOS

A Figura 5.6 ilustra graficamente a diferença entre os percentuais obtidos pelos dois algoritmos nos 16 últimos municípios.

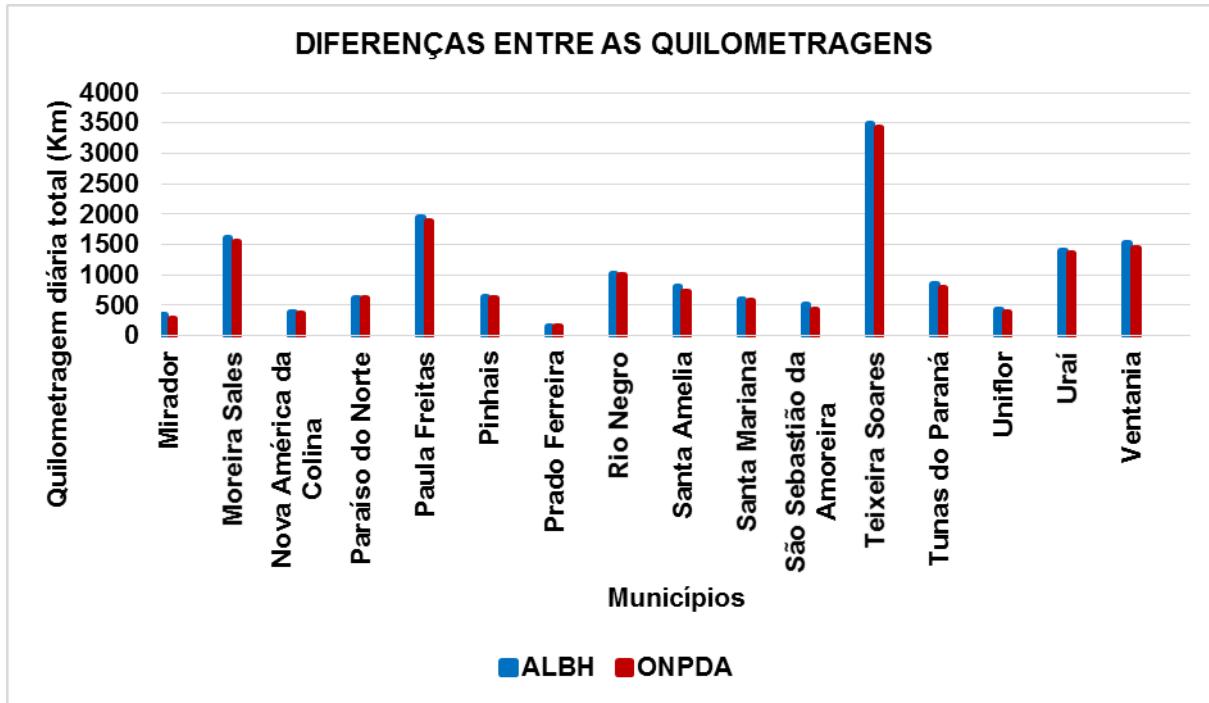


FIGURA 5.6 - DIFERENÇAS ENTRE AS QUILOMETRAGENS OBTIDAS PELOS DOIS ALGORITMOS

Os resultados obtidos (Tabela 5.1 e Figuras 5.5 e 5.6) mostram que a meta-heurística Otimização por Nuvem de Partículas Discreta Adaptada (ONPDA) gerou soluções de qualidade superior às encontradas pela heurística *ALBH* para 90,62% dos casos testados em tempos computacionais variando de 1 segundo até 52035 segundos. Para a cidade Lobato no período da noite com 6 nós, o tempo computacional foi de 1 segundo e para a cidade de Rio Negro no período da noite com 162 nós, o tempo foi de 6 minutos e 58 segundos para problemas com 20 partículas considerando 30 gerações.

As diferenças entre as quilometragens diárias encontradas pelas técnicas *ALBH* e *ONPDA* em cada período de estudo: manhã, tarde e noite respectivamente encontram-se no Apêndice C.

Como a realidade dos municípios paranaenses não difere muito da realidade dos demais estados brasileiros, a metodologia proposta neste trabalho pode ser implementada em outros municípios, minimizando assim os custos com o Transporte Escolar. Com a possibilidade de alterações dos parâmetros das distâncias entre pontos de parada e a criação de uma área de abrangência das escolas, o gestor de Transporte Escolar de cada município pode adequar esta metodologia à realidade de seu município. Atualmente, os municípios do Estado do Paraná usam um modelo

que utiliza a técnica *ALBH* para o problema do Transporte Escolar. A metodologia é aplicada de duas a três vezes por ano dependendo da necessidade de cada município.

Com a finalidade de ilustrar e comparar as rotas geradas pelas técnicas *ALBH* e *ONPDA*, a seguir serão apresentados os mapas de alguns municípios por período de estudo, são eles:

- Anahy (manhã);
- Iracema do Oeste (manhã);
- São Sebastião da Amoreira (manhã);
- Abatiá (Tarde);
- Agudos do sul (manhã);
- Ariranha do Ivaí (noite);
- Cafeara (manhã);
- Fernandes Pinheiro (tarde);
- Paula Freitas (tarde);
- Pinhais (tarde);
- Santa Amélia (manhã); e
- Uraí (noite).

Os mapas mostram os pontos de parada dos alunos e os pontos de parada das escolas. Também são mostradas as rotas geradas com a utilização das duas técnicas *ALBH* e *ONPDA*. Em todos os mapas mostrados, a rota gerada pela técnica *ONPDA* é menor do que a rota criada pela heurística *ALBH*. Cada cor de linha (trajeto) nos mapas indica a rota de um veículo.

Neste estudo não foram utilizadas as distâncias das garagens dos veículos até os pontos de parada dos alunos e das escolas, pois estas distâncias ainda não foram cadastradas. A quilometragem da rota começa a ser considerada a partir do embarque do primeiro aluno.

A Figura 5.7 mostra a rota encontrada para o município de Anahy no turno da manhã pela heurística *ALBH*. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 70,09 km.

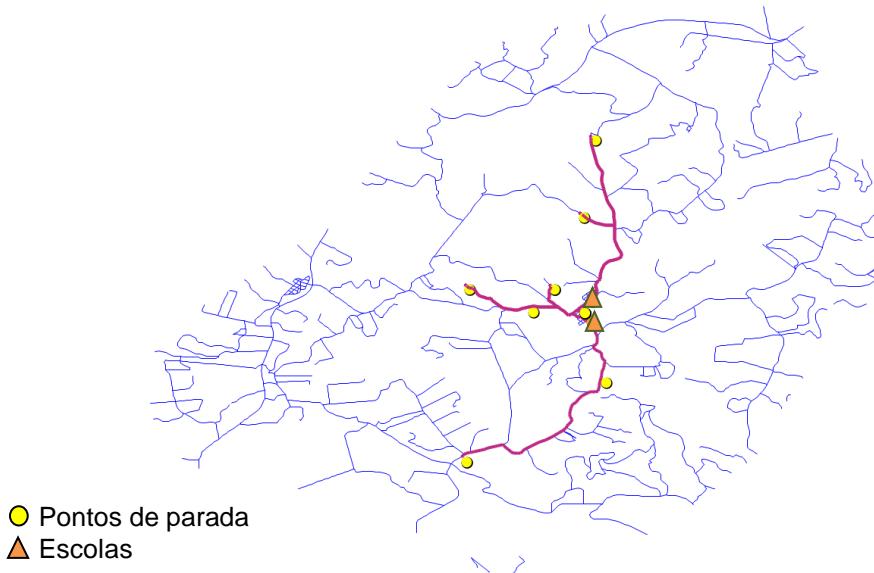


FIGURA 5.7 - MAPA DE ANAHY COM A ROTA DO TURNO DA MANHÃ (*ALBH*)

Na Figura 5.7 é possível observar 8 pontos de parada de alunos e 2 escolas. Neste turno 19 alunos utilizam o transporte escolar.

A Figura 5.8 mostra as rotas encontradas para o município de Anahy no turno da manhã pela técnica ONPDA. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 53,06 km.

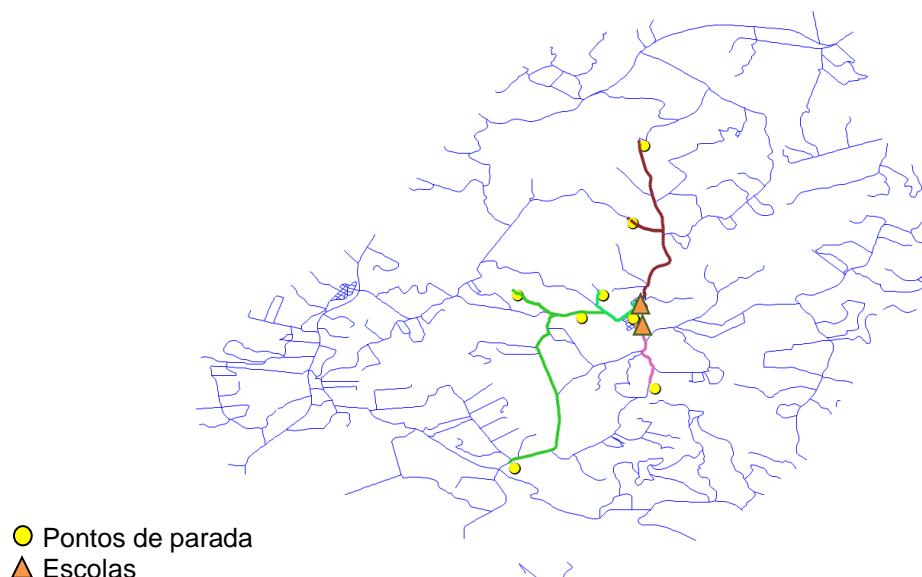


FIGURA 5.8 - MAPA DE ANAHY COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ (ONPDA)

Nota-se que a *ALBH* definiu apenas uma rota com 70 km, porém a *ONPDA* define 3 rotas, com 53 km no total.

A Figura 5.9 mostra as rotas encontradas para o município de Iracema do Oeste no turno da manhã pela heurística *ALBH*. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 173,71 km.

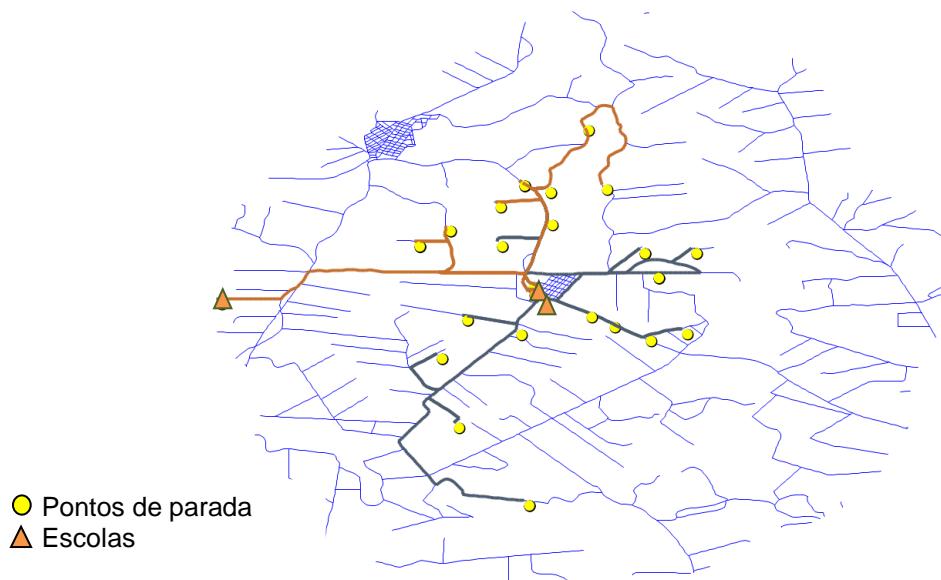


FIGURA 5.9 - MAPA DE IRACEMA DO OESTE COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ (*ALBH*)

A Figura 5.10 mostra as rotas encontradas para o município de Iracema do Oeste no turno da manhã pela técnica *ONPDA*. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 157,06 km.

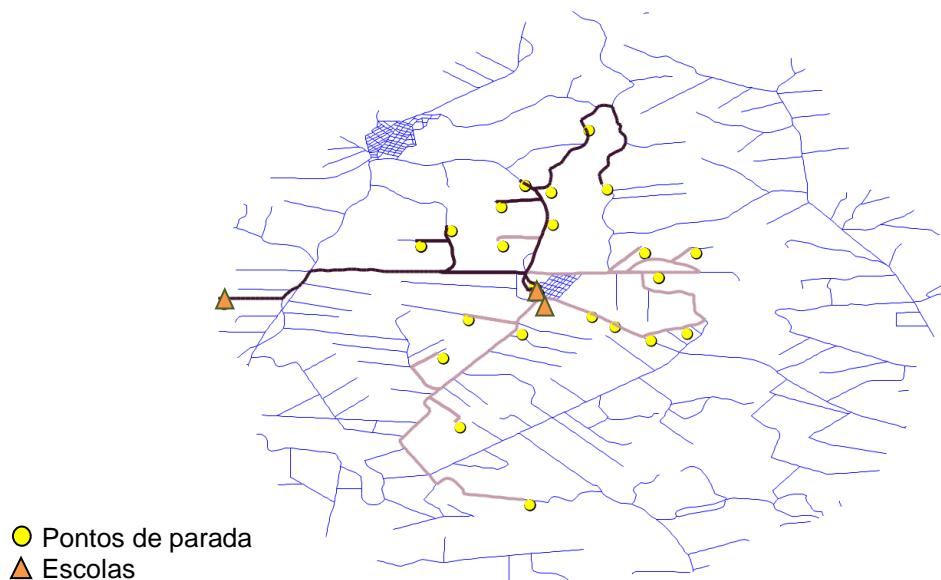


FIGURA 5.10 - MAPA DE IRACEMA DO OESTE COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ (*ONPDA*)

A Figura 5.11 mostra as rotas encontradas para o município de São Sebastião da Amoreira no turno da manhã pela heurística *ALBH*. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 373,42 km.

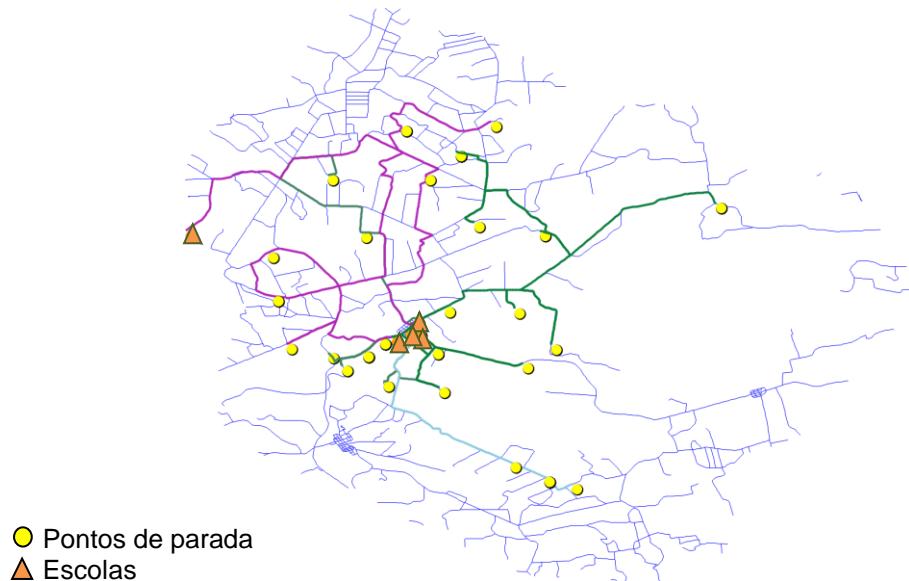


FIGURA 5.11 - MAPA DE SÃO SEBASTIÃO DA AMOREIRA COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ (*ALBH*)

A Figura 5.12 mostra as rotas encontradas para o município de São Sebastião da Amoreira no turno da manhã pela técnica ONPDA. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 334,172 km.

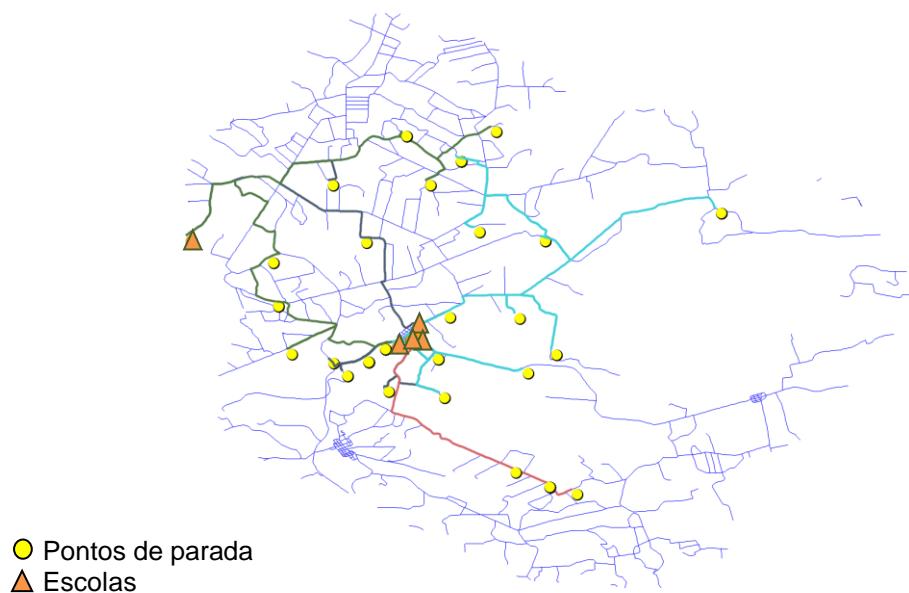


FIGURA 5.12 - MAPA DE SÃO SEBASTIÃO DA AMOREIRA COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ (*ONPDA*)

A Figura 5.13 mostra as rotas encontradas para o município de Abatiá no turno da tarde pela heurística *ALBH*. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 310,73 km.

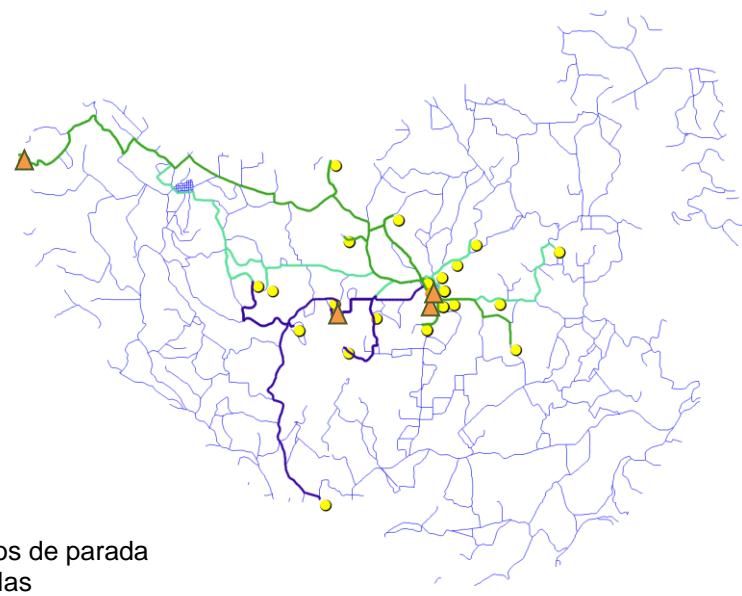


FIGURA 5.13 - MAPA DE ABATIÁ COM AS ROTAS DO TURNO DA TARDE (*ALBH*)

A Figura 5.14 mostra as rotas encontradas para o município de Abatiá no turno da tarde pela técnica ONPDA. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 297,21 km.

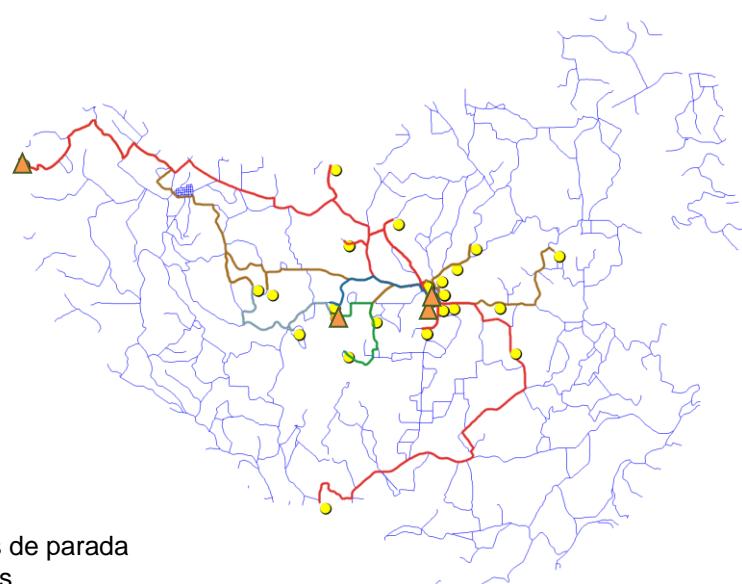


FIGURA 5.14 - MAPA DE ABATIÁ COM AS ROTAS DO TURNO DA TARDE (ONPDA)

A Figura 5.15 mostra as rotas encontradas para o município de Agudos do sul no turno da manhã pela heurística *ALBH*. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 434,22 km.

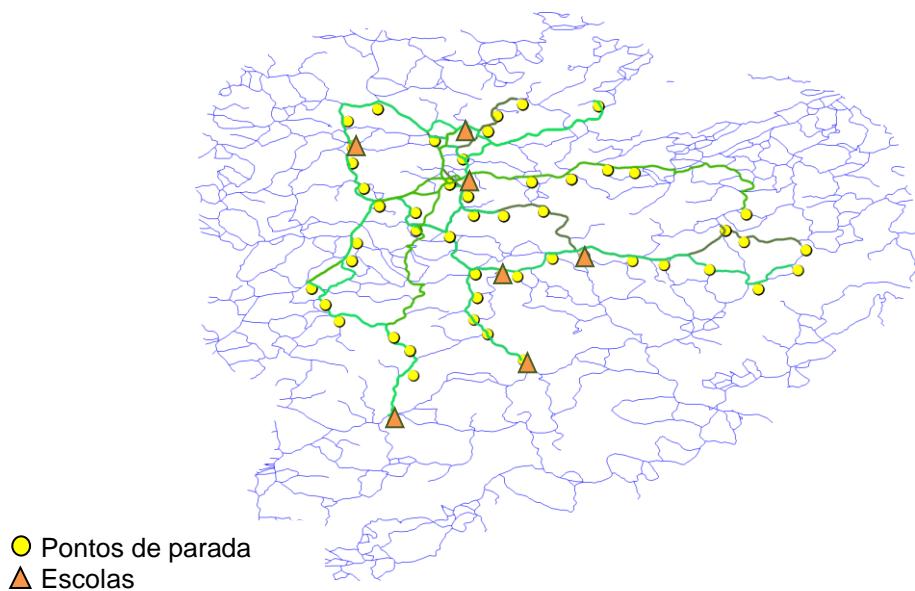


FIGURA 5.15 - MAPA DE AGUDOS DO SUL COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ (*ALBH*)

A Figura 5.16 mostra as rotas encontradas para o município de Agudos do sul no turno da manhã pela técnica ONPDA. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 404,81 km.

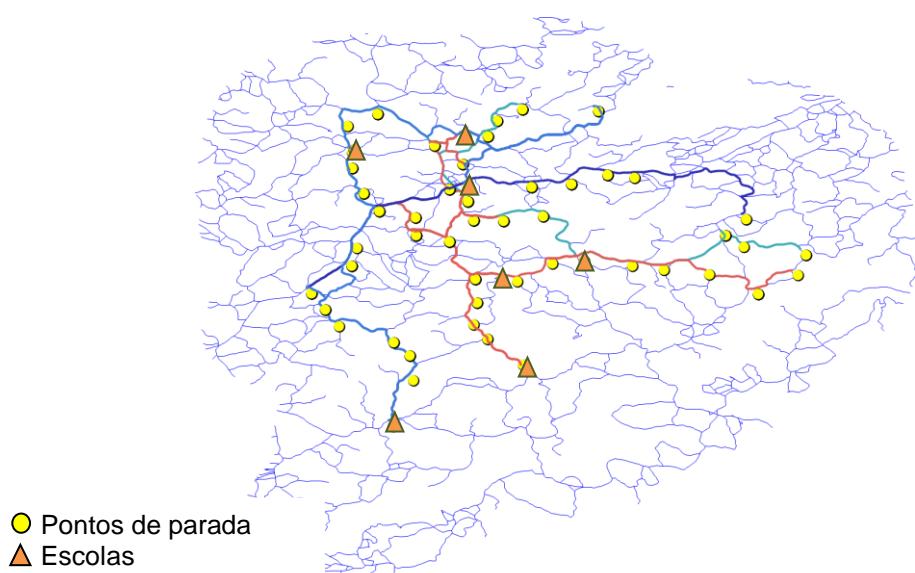


FIGURA 5.16 - MAPA DE AGUDOS DO SUL COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ (ONPDA)

A Figura 5.17 mostra as rotas encontradas para o município de Ariranha do Ivaí no turno da noite pela heurística ALBH. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 203,19 km.

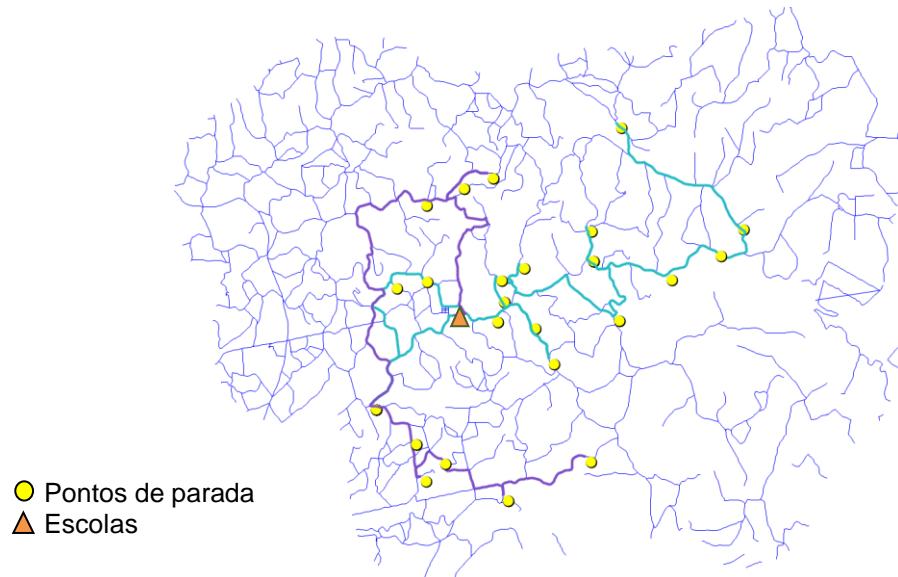


FIGURA 5.17 - MAPA DE AGUDOS DO SUL COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ (ALBH)

A Figura 5.18 mostra as rotas encontradas para o município de Ariranha do Ivaí no turno da noite pela técnica ONPDA. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 195,87 km.

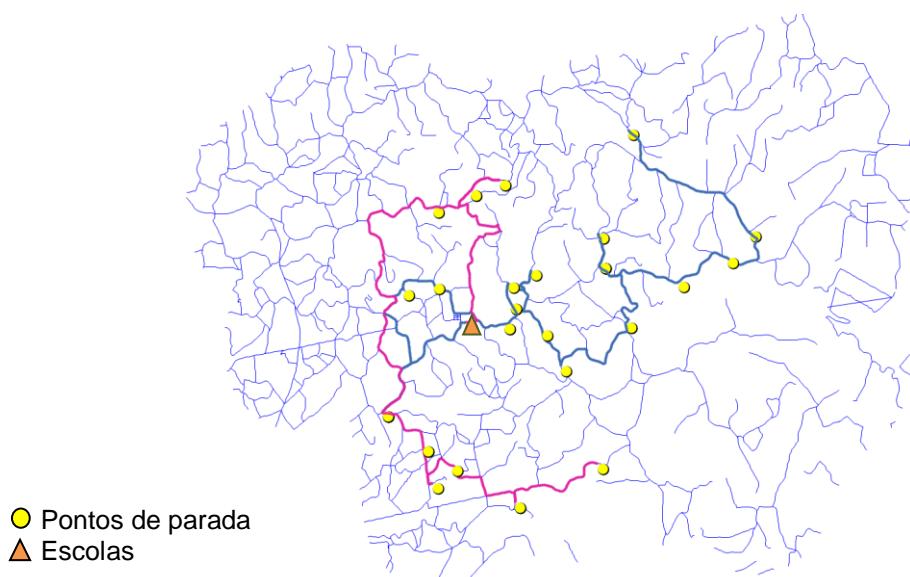


FIGURA 5.18 - MAPA DE AGUDOS DO SUL COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ (ONPDA)

A Figura 5.19 mostra a rota encontrada para o município de Cafeara no turno da manhã pela heurística *ALBH*. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 67,84 km.

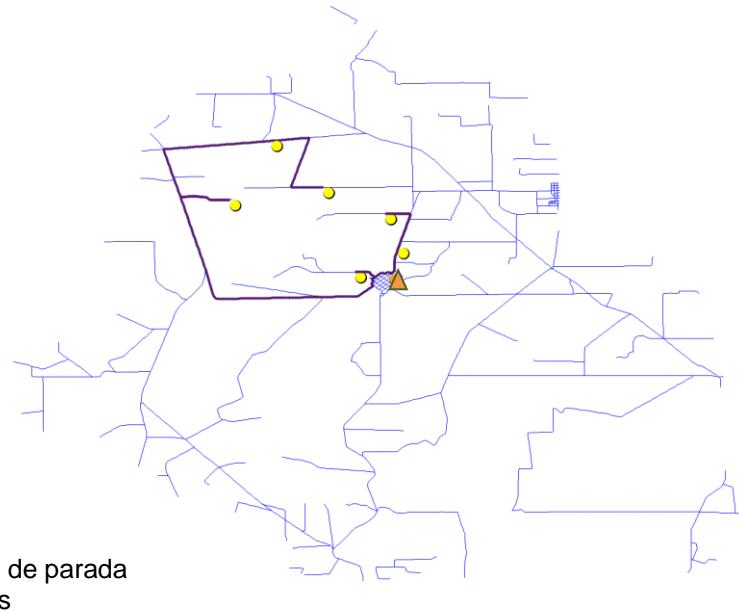


FIGURA 5.19 - MAPA DE CAFEARA COM A ROTA DO TURNO DA MANHÃ (*ALBH*)

A Figura 5.20 mostra a rota encontrada para o município de Cafeara no turno da manhã pela técnica ONPDA. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 46,91 km.

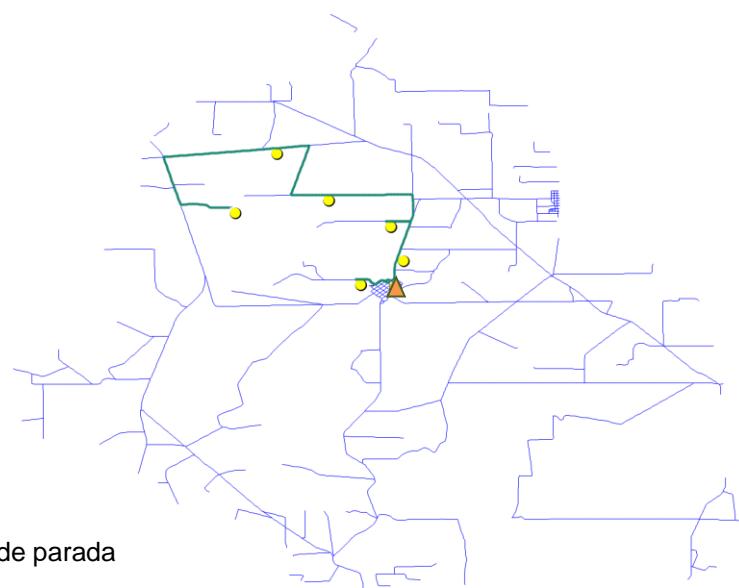


FIGURA 5.20 - MAPA DE CAFEARA COM A ROTA DO TURNO DA MANHÃ (ONPDA)

A Figura 5.21 mostra as rotas encontradas para o município de Fernandes Pinheiro no turno da tarde pela heurística *ALBH*. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 610,46 km.

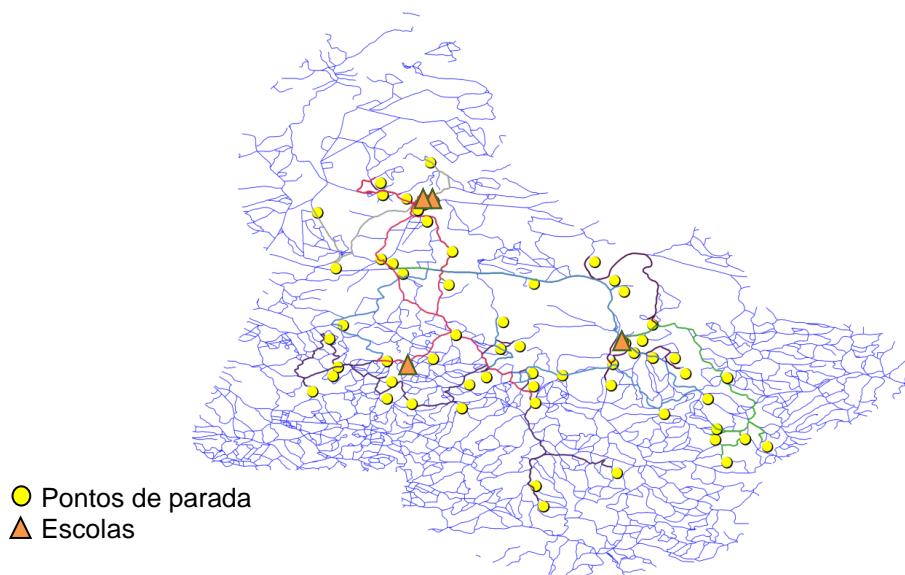


FIGURA 5.21 - MAPA DE FERNANDES PINHEIRO COM AS ROTAS DO TURNO DA TARDE (*ALBH*)

A Figura 5.22 mostra as rotas encontradas para o município de Fernandes Pinheiro no turno da tarde pela técnica ONPDA. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 576,01 km.

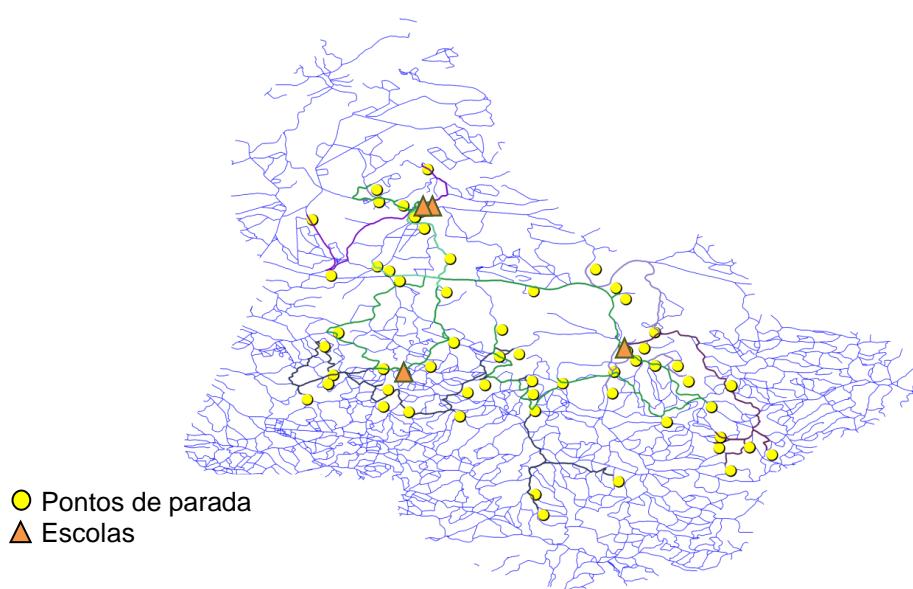


FIGURA 5.22 - MAPA DE FERNANDES PINHEIRO COM AS ROTAS DO TURNO DA TARDE (ONPDA)

A Figura 5.23 mostra as rotas encontradas para o município de Paula Freitas no turno da tarde pela heurística *ALBH*. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 928,26 km.

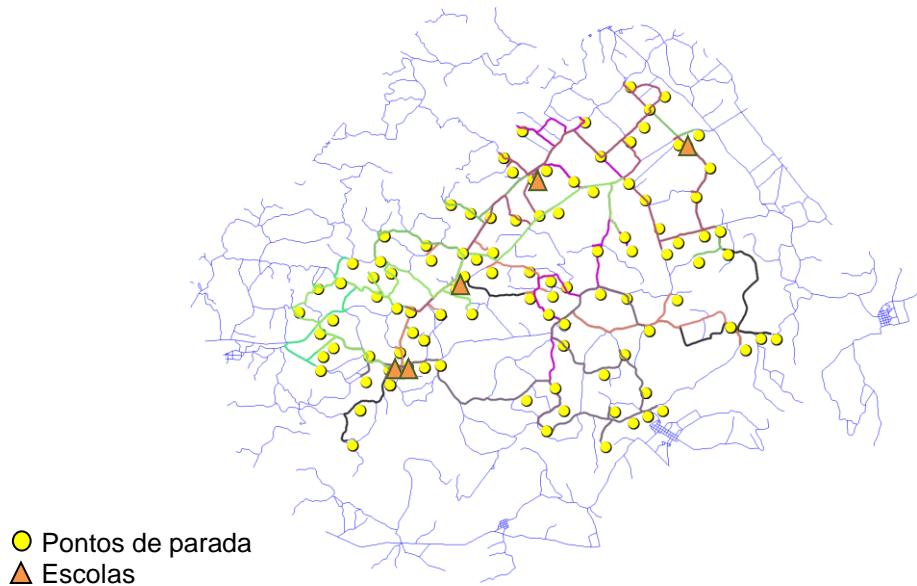


FIGURA 5.23 - MAPA DE PAULA FREITAS COM AS ROTAS DO TURNO DA TARDE (*ALBH*)

A Figura 5.24 mostra as rotas encontradas para o município de Paula Freitas no turno da tarde pela técnica ONPDA. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 876,28 km.

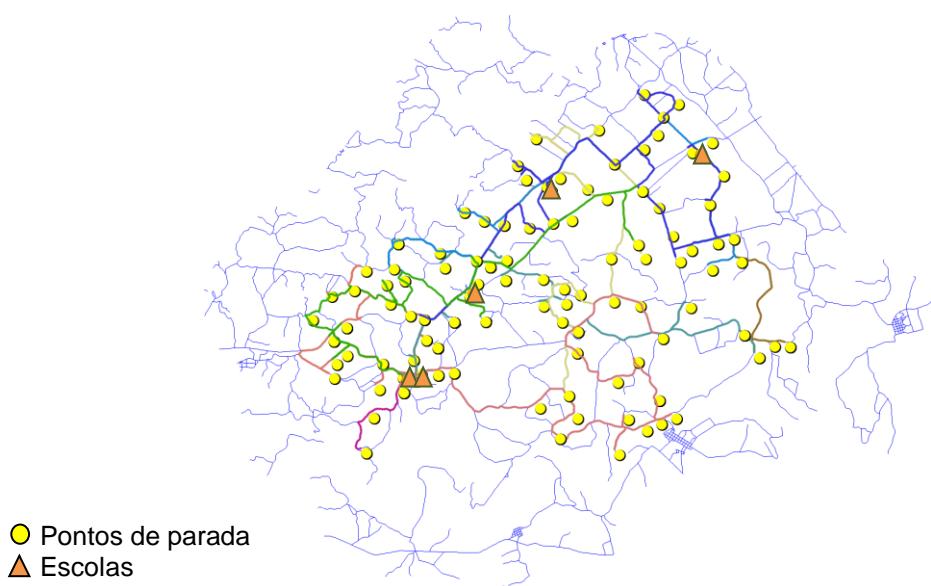


FIGURA 5.24 - MAPA DE PAULA FREITAS COM AS ROTAS DO TURNO DA TARDE (ONPDA)

A Figura 5.25 mostra as rotas encontradas para o município de Pinhais no turno da tarde pela heurística *ALBH*. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 297,46 km.

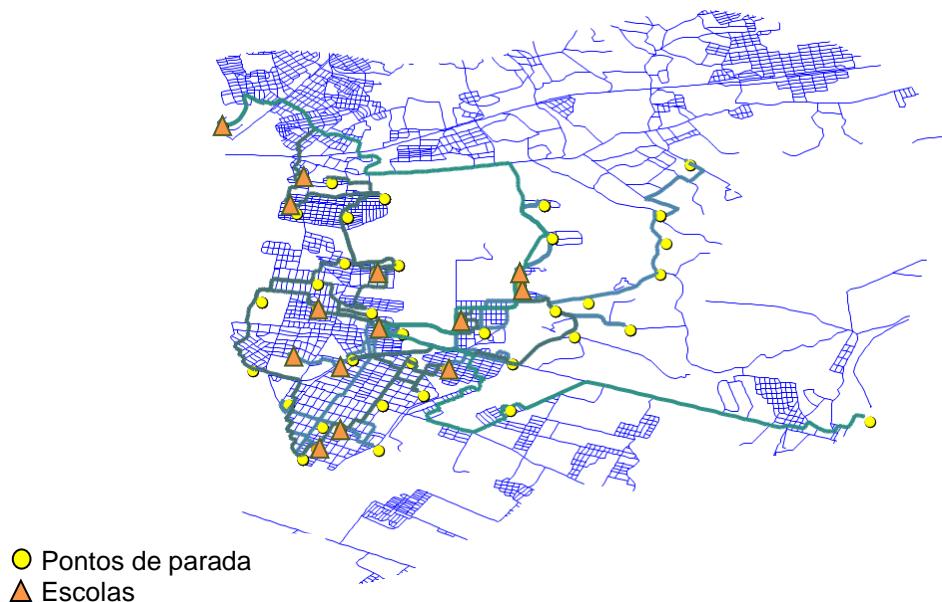


FIGURA 5.25 - MAPA DE PINHAIS COM AS ROTAS DO TURNO DA TARDE (*ALBH*)

A Figura 5.26 mostra as rotas encontradas para o município de Pinhais no turno da tarde pela técnica ONPDA. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 278,06 km.

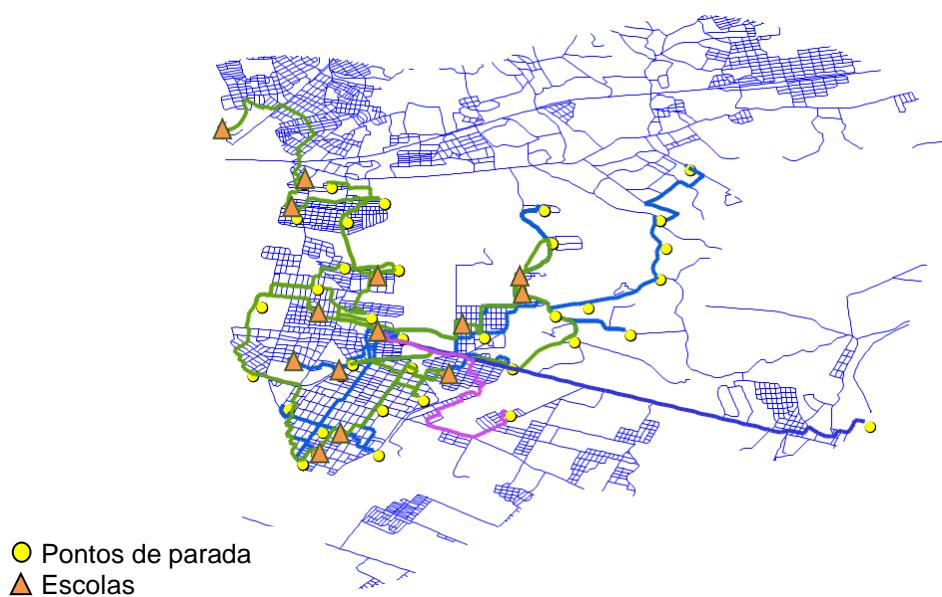


FIGURA 5.26 - MAPA DE PINHAIS COM AS ROTAS DO TURNO DA TARDE (ONPDA)

A Figura 5.27 mostra as rotas encontradas para o município de Santa Amélia no turno da manhã pela heurística *ALBH*. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 410,67 km.

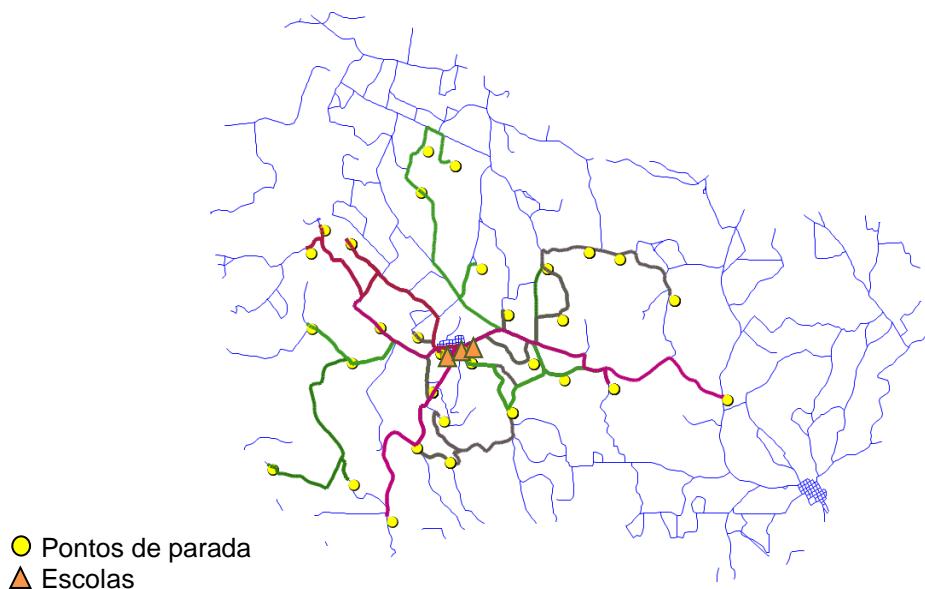


FIGURA 5.27 - MAPA DE SANTA AMÉLIA COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ (*ALBH*)

A Figura 5.28 mostra as rotas encontradas para o município de Santa Amélia no turno da manhã pela técnica ONPDA. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 381,63 km.

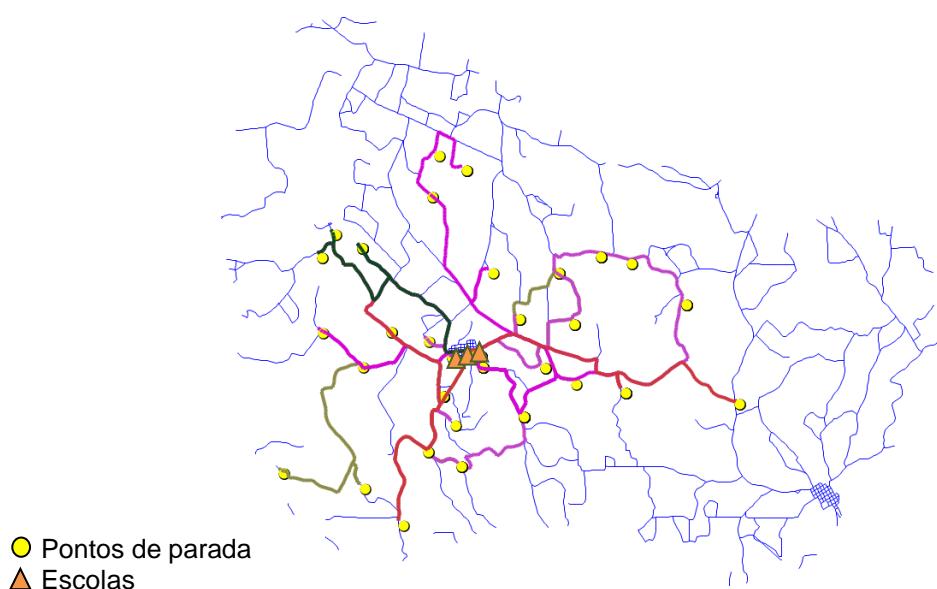


FIGURA 5.28 - MAPA DE SANTA AMÉLIA COM AS ROTAS DO TURNO DA MANHÃ (ONPDA)

A Figura 5.29 mostra as rotas encontradas para o município de Uraí no turno da noite pela heurística *ALBH*. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 220,20 km.

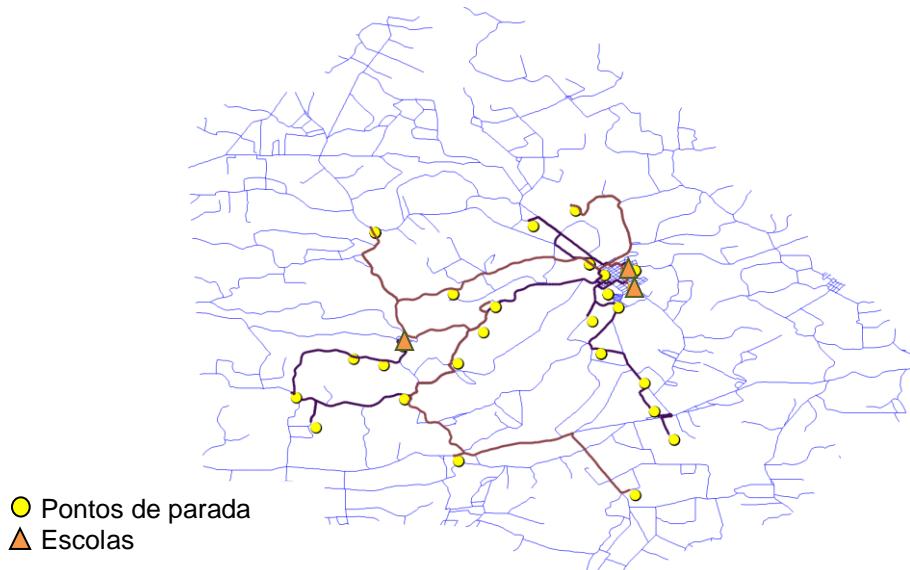


FIGURA 5.29 - MAPA DE URAÍ COM AS ROTAS DO TURNO DA NOITE (*ALBH*)

A Figura 5.30 mostra as rotas encontradas para o município de Uraí no turno da noite pela técnica ONPDA. A distância total percorrida considerando os trajetos de ida e volta foi de 202,95 km.

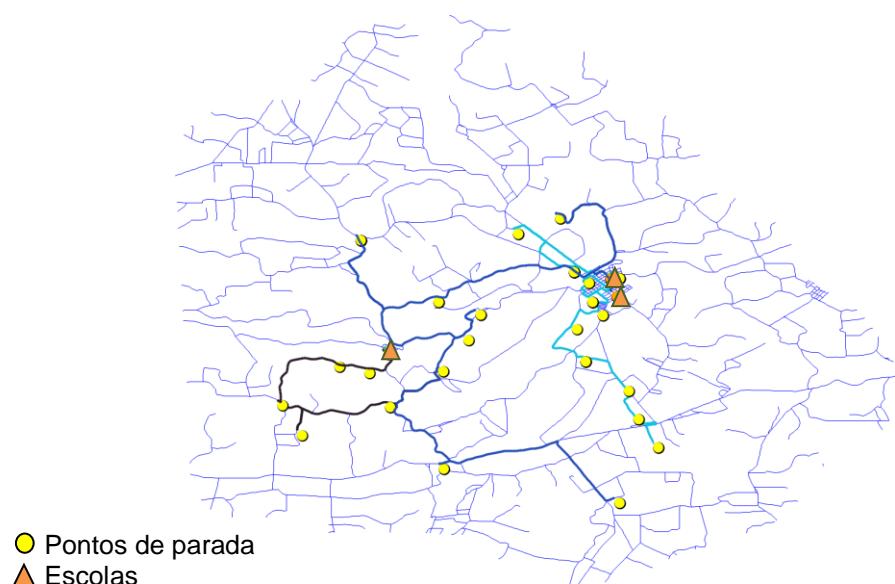


FIGURA 5.30 - MAPA DE URAÍ COM AS ROTAS DO TURNO DA NOITE (ONPDA)

### 5.3 RESULTADOS DA COMPARAÇÃO ENTRE A SOLUÇÃO EXATA E A SOLUÇÃO OBTIDA PELA TÉCNICA PROPOSTA ONPDA

Com o objetivo de avaliar o desempenho da meta-heurística Otimização por Nuvem de Partículas Discreta Adaptada (ONPDA) em relação às características do problema (veículo capacitado, frota heterogênea fixa, e coleta e entrega simultânea), os resultados obtidos pelo ONPDA foram comparados aos resultados obtidos com aplicação do modelo exato executado com o auxílio do Software Lingo para o problema do Transporte Escolar em alguns municípios do Estado do Paraná. Foram escolhidos os municípios com menor número de nós para fazer o teste devido à complexidade computacional do problema.

A Tabela 5.8 mostra a solução exata dos testes realizados em 4 municípios do Estado.

TABELA 5.8 - COMPARAÇÃO ENTRE AS SOLUÇÕES OBTIDAS PELAS TÉCNICAS ONPDA E ALBH E A FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Municípios	Nº de Nós	Solução Ótima LINGO (km)	Tempo computacional LINGO (s)	Melhor Solução ONPDA (km)	Tempo computacional ONPDA (s)	Melhor Solução ALBH (km)	Tempo computacional ALBH (s)
Iracema (Noite)	12	26,822	3	26,822	3	36,128	3
Mirador (Tarde)	16	12,960	743	12,960	4	13,564	4
Ângulo (Noite)	18	37,590	4,11401x10 <sup>5</sup>	37,590	2	48,548	5
Anahy (Noite)	19	21,314	9,81354 x10 <sup>5</sup>	23,114	7	27,606	5

Esta Tabela apresenta uma comparação entre as soluções exatas encontradas pelo Software Lingo para o problema do Transporte Escolar apresentado na seção 3.2 e as soluções encontradas com a utilização das técnicas ONPDA e ALBH para quatro municípios cujos problemas podem ser considerados de pequeno porte. De acordo com os resultados obtidos, o modelo ONPDA proposto encontrou a solução ótima para três dos quatro municípios testados com tempos computacionais expressivamente menores do que com a utilização do Software Lingo. Na tabela 5.8 observa-se que o tempo de execução das técnicas ALBH e ONPDA para problemas de pequeno porte é menor ou igual a 7 segundos. Por outro lado, o tempo computacional do modelo exato executado no Software Lingo para o município Ângulo (Noite) com 18 nós foi de 4,11401x10<sup>5</sup> segundos, este tempo é equivalente a 4 dias, 18 horas e 16 minutos. Para o município Anahy (Noite) com 19

nós, o tempo de execução foi de  $9,81354 \times 10^5$  segundos, o que é equivalente a 11 dias, 8 horas e 35 minutos.

A Figura 5.31 ilustra as soluções obtidas pelas técnicas *ALBH*, *ONPDA* e a solução exata executada no Software Lingo em km para os quatro municípios.

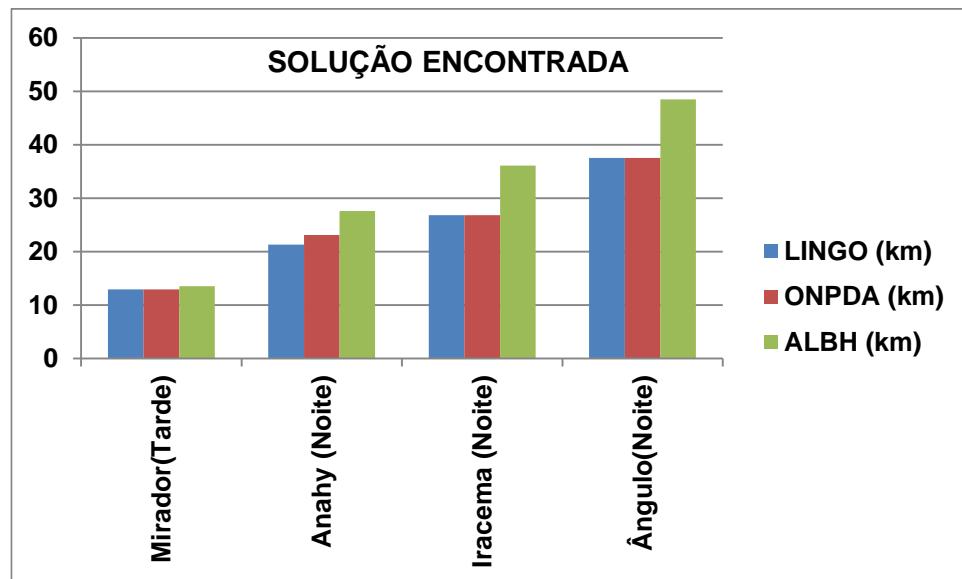


FIGURA 5.31 - DIFERENÇAS ENTRE AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS

Para municípios com número de nós superior a 19, não foi possível obter a solução exata com a utilização do Software Lingo, devido ao alto custo computacional.

Uma estimativa do tempo computacional necessário para resolver o problema do Transporte Escolar usando o método exato executado no Software Lingo nos turnos da manhã, tarde e noite respectivamente é apresentada no Apêndice B.

A Figura 5.32 mostra os três trajetos encontrados pelo método *ONPDA* para o município de Anahy no turno da noite.

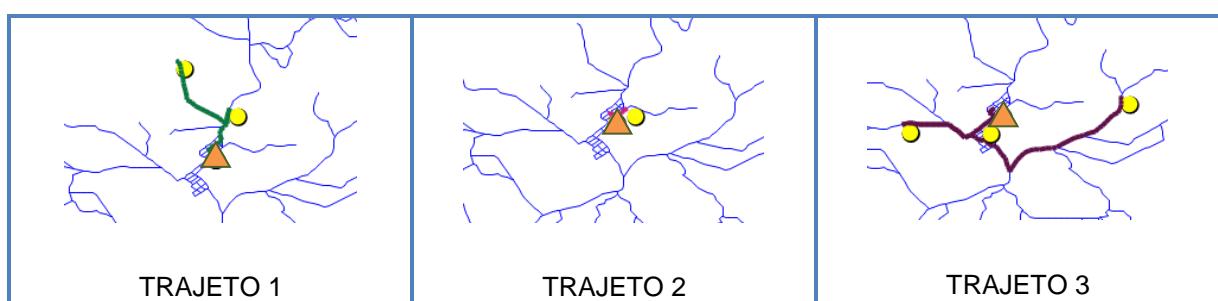


FIGURA 5.32 - MAPA DE ANAHY COM OS TRÊS TRAJETOS DO TURNO DA NOITE (ONPDA)

A Figura 5.33 mostra a rota total encontrada pelo método ONPDA para o município de Anahy no turno da noite.

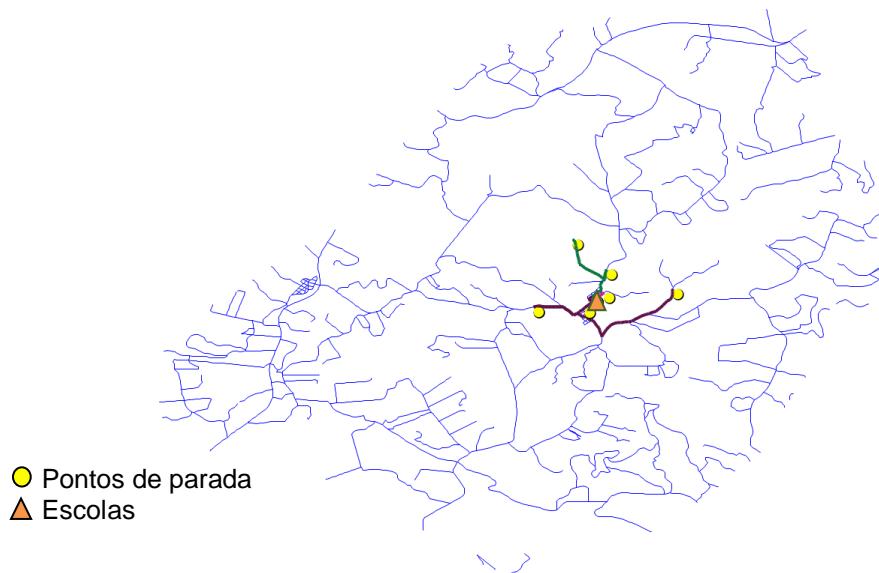


FIGURA 5.33 - MAPA DE ANAHY COM AS ROTAS DO TURNO DA NOITE (ONPDA)

A heurística *ALBH* encontrou apenas uma rota para o município de Anahy no período da noite. A Figura 5.34 mostra a rota encontrada pela heurística *ALBH*.

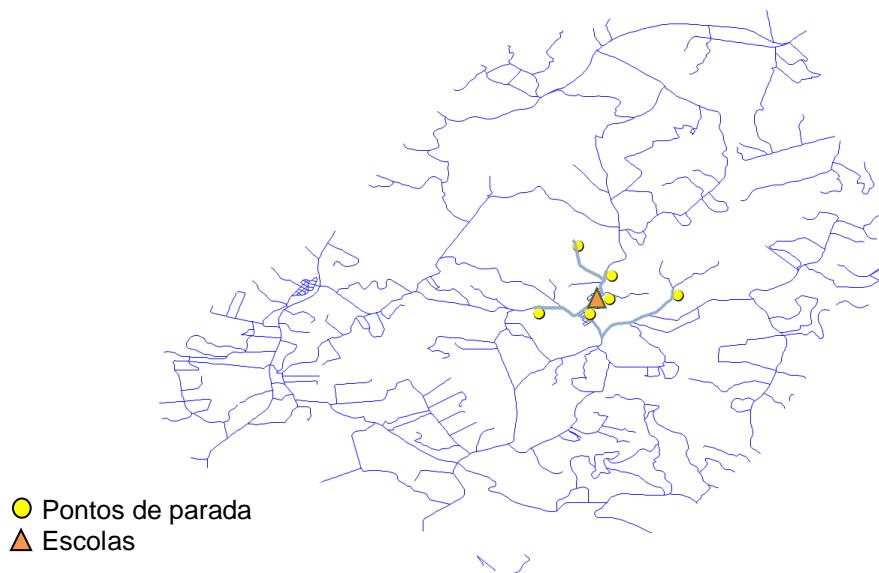


FIGURA 5.34 - MAPA DE ANAHY COM A ROTA DO TURNO DA NOITE (*ALBH*)

A Figura 5.35 mostra os três trajetos encontrados pelo método exato executado no Lingo para o município de Anahy no turno da noite.

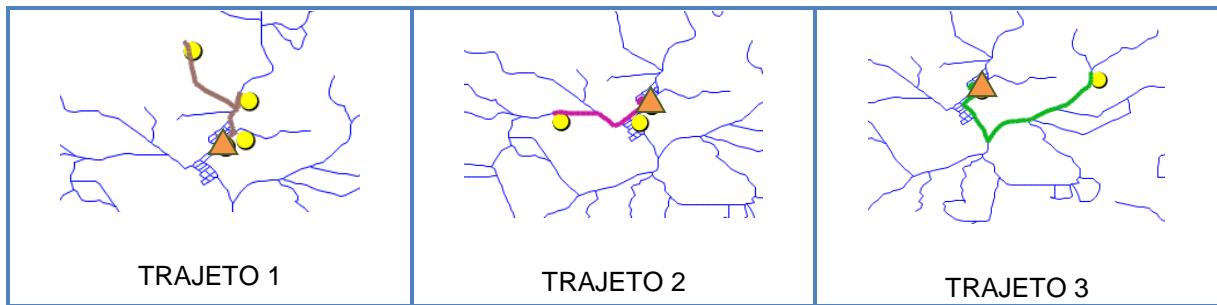


FIGURA 5.35 - MAPA DE ANAHY COM OS TRÊS TRAJETOS DO TURNO DA NOITE (EXATO)

A Figura 5.36 mostra a rota total encontrada pelo método exato para o município de Anahy no turno da noite.

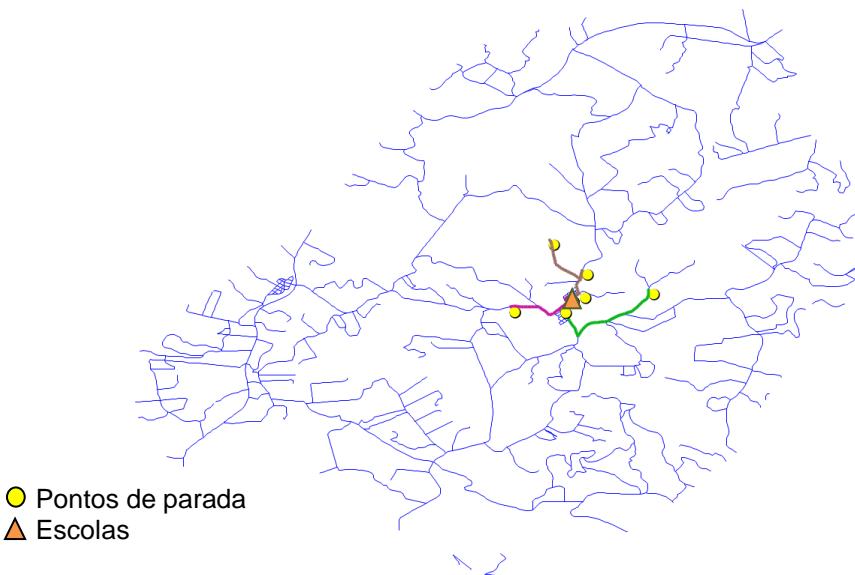


FIGURA 5.36 - MAPA DE ANAHY COM AS ROTAS DO TURNO DA NOITE (EXATO)

Para os testes realizados nos quatro municípios analisados, a solução encontrada pela técnica ONPDA é melhor do que a solução encontrada pela ALBH.

Para o município Anahy, com 19 nós o tempo de execução no Lingo foi superior a 272 horas, e este tempo aumenta exponencialmente conforme aumenta o tamanho do problema.

A Figura 5.37 mostra a relação entre o número de nós e o tempo computacional para obter a solução exata executada no Software Lingo.

Pode-se observar que o tempo computacional cresce exponencialmente com o número de nós.

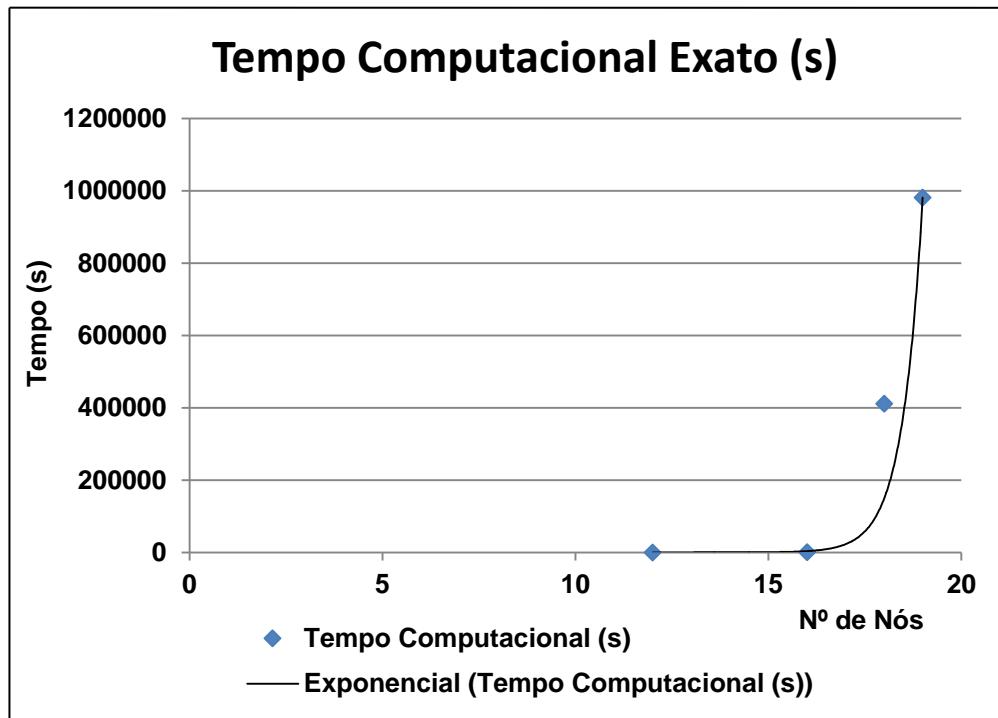


FIGURA 5.37 - NÚMERO DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL PARA A SOLUÇÃO EXATA

## CAPÍTULO VI

### 6 CONCLUSÃO E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho teve como objetivo apresentar uma nova estratégia de solução para problemas de roteirização de veículos capacitados, com frota heterogênea fixa e entrega e coleta simultânea com a aplicação da meta-heurística proposta Otimização por Nuvem de Partículas Discreta Adaptada (ONPDA).

No problema real a ser solucionado, estudantes do ensino fundamental e médio, que residem no interior do estado do Paraná são transportados até suas respectivas escolas em seus períodos de estudo.

O modelo matemático associado a esse problema visa à minimização do custo total de entrega e/ou embarque de passageiros, considerando as restrições de demanda, de comprimento máximo da rota, e de capacidade dos veículos.

O algoritmo proposto difere do ONP clássico, as adaptações estão presentes na codificação das partículas e nas operações estabelecidas. A criação de novas gerações de partículas, a fim de aumentar a diversidade de busca para o problema também foi utilizada.

#### 6.1 CONCLUSÕES

O modelo proposto foi inicialmente aplicado ao problema do Transporte Escolar em 32 municípios do estado do Paraná e os resultados dos experimentos computacionais foram comparados com os resultados obtidos com a aplicação da heurística *ALBH (Adapted Location Based Heuristic)* proposta por Siqueira e Souza (2012).

O método ONPDA proposto foi superior à técnica *ALBH* em 29 dos 32 municípios testados, proporcionando uma economia para estes municípios que varia entre 0,10% e 21,37% na quilometragem total diária percorrida.

Posteriormente, com o objetivo de avaliar o desempenho da meta-heurística Otimização por Nuvem de Partículas Discreta Adaptada (ONPDA) proposta neste

trabalho em relação às características do problema (frota heterogênea fixa, e coleta e entrega simultânea), os resultados obtidos pelo ONPDA foram comparados às soluções exatas obtidas pela formulação matemática executada no Software Lingo aplicado ao problema do Transporte Escolar do Paraná. Foram escolhidos os menores municípios para fazer o teste devido à complexidade computacional do problema. Os resultados mostraram que o modelo proposto encontrou a solução ótima para três dos quatro municípios testados com tempos computacionais menores.

O estudo realizado nesta pesquisa oferece uma oportunidade para o desenvolvimento de uma metodologia capaz de contribuir para formatação e alternativas para implementações práticas para o transporte, e especificamente o Transporte Escolar.

A experiência computacional realizada mostrou que o algoritmo desenvolvido obteve soluções promissoras. O processo de aprendizagem coletiva das partículas permitiu que a população de soluções geradas percorresse, com eficácia e eficiência o espaço de soluções do problema. Os resultados obtidos apontam para a efetividade da abordagem proposta, para os conjuntos de problemas analisados.

A roteirização do transporte é um aspecto de grande importância, pois tem influência direta em outros fatores envolvidos no planejamento do serviço, visto que uma roteirização eficiente pode minimizar o tempo de viagem, otimizar a ocupação dos veículos e melhorar o atendimento aos clientes, o que reduz os custos com o sistema e melhora sua qualidade.

Destaca-se, em especial, que o procedimento proposto foi capaz de resolver todos os problemas, independentemente do número de pontos. A meta-heurística proposta mostra-se adequada para o problema do Transporte Escolar, pois é capaz de produzir soluções de boa qualidade em tempo computacional aceitável.

Enfim, os resultados mostram claramente o potencial da abordagem apresentada, onde soluções de menores custos são obtidas, para problemas com um número considerável de restrições e com a obtenção de resultados satisfatórios considerando a qualidade da solução e o tempo computacional.

## 6.2 PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Algumas sugestões, para trabalho futuros, são propostas:

- Aplicar o modelo proposto em problemas de roteirização do Transporte Escolar considerando a troca de turnos das escolas, ou seja, aproveitar a rota de retorno dos alunos da manhã para coletar os alunos da ida do turno da tarde. O mesmo pode ser feito com o retorno da tarde e ida do turno da noite;
- Adicionar restrições de janelas de tempo ao modelo atual;
- Definir novos parâmetros para o modelo ONPDA;
- A fim de estender os resultados recomenda-se aplicar o método a um número maior de problemas.
- Quanto à sensibilidade dos coeficientes, outros experimentos poderiam ser feitos, variando-se o valor dos fatores de individualidade e sociabilidade entre si.
- Ainda como trabalho futuro, o ONPDA poderia ser adaptado a problemas com mais de uma função objetivo a ser otimizada.

O modelo proposto neste trabalho ONPDA apresenta vários parâmetros de configuração e implementação que afetam diretamente a desempenho do algoritmo proposto. Novas investigações podem ser realizadas, variando os parâmetros do algoritmo ONPDA e assim adequá-los a cada um dos problemas a ser testado. Podendo-se variar o tamanho da população, número de iterações e os coeficientes  $w$ ,  $c_1$  e  $c_2$ .

Finalmente, é importante indicar que os métodos utilizados neste trabalho podem ser objetos de novas pesquisas, podendo ser aplicados em outros problemas de roteirização de veículos. Alguns novos critérios e restrições também podem ser adicionados.

## REFERÊNCIAS

- ABBASS, H. A., *Marriage in Honey Bees Optimization, A Haplometrosis Polygynous Swarming Approach*. In Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation, p. 207-214, 2001.
- AI, T. J.; KACHITVCHYANUKUL, V., *Particle warm optimization and two solution representations for solving the capacitated vehicle routing problem*. International Journal of the Systems, v.2, n.56, p.380-387, 2009a.
- AI, T. J.; KACHITVCHYANUKUL, V., *A particles warm optimization for the vehicle routing problem with simultaneous pickup and delivery*. International Journal of the Systems, v.2, n.36, p. 1693-1702, 2009b.
- AGUIAR, B. C. X. C.; SIQUEIRA, P. H.; SOUZA, L. V., **Roteirização por Nuvem de Partículas** In: XLV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2013, Natal. Anais do Sobrapo 2013. Natal: UFRN, p. 11-21, 2013.
- AGUIAR, B. C. X. C.; AGUIAR, G. F.; SIQUEIRA, P. H.; SOUZA, L. V., *Particle Swarm Optimization for Vehicle Routing Problem with Fleet Heterogeneous and Simultaneous Collection and Delivery*. Applied Mathematical Sciences, v. 8, n. 77, p.3833-3849, 2014a.
- ALOISE, D. J.; OLIVEIRA, M. C. S.; SILVA, T. L., **Otimização discreta por nuvem de partículas aplicada ao problema do caixeiro viajante**. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2006.
- BALLOU, R. H., **Logística empresarial**. São Paulo: Atlas, 1993.
- BELFIORE, P. P., *Scatter Search para Problemas de Roteirização de Veículos com Frota Heterogênea, Janelas de Tempo e Entregas Fracionadas*. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Produção, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2006.
- BELMECHERI, F.; PRINS, C.; YALAOUI, F.; AMODEO, L., *Particle swarm optimization algorithm for a vehicle routing problem with heterogeneous fleet, mixed backhauls, and time Windows*. J Intell Manuf, v.24, p.775-789, 2013.
- BODIN, L.; GOLDEN, B., *Classification in Vehicle Routing and Scheduling*. Networks, v. 11, n. 2, p. 97-108. 1981.
- BODIN, L.D.; GOLDEN, B.L.; ASSAD, A.; BALL, M., *Routing and scheduling of vehicles and crews: the state of the art*. Computers and Operations Research, v. 10, p.69-211, 1983.
- BODIN, L. D., *Twenty years of routing and scheduling*. Operations Research, v.38, n.4, p.571-579, 1990.
- CHEN A. L.; YANG G.; WU Z., *Hybrid discrete particle swarm optimization algorithm for capacitated vehicle routing problem*. Journal of Zhejiang University

Science A, v. 7, n.4, p. 607-614, 2006.

CHRISTOFIDES, N.; MINGOZZI, A.; TOTH, P., *The vehicle routing problem*, P.& Sandi, C. (Eds.), Combinatorial Optimization, p.315-338, 1979.

CLERC, M., *Discrete particle swarm optimization, illustrated by the traveling salesman problem*. In: Studies in Fuzziness and Soft Computing New optimization techniques in engineering, Babu, B.V. & Onwubolu, Berlin, G.C. (Eds.), v. 141, p. 219-239, 2004.

COOK, W. J., SEYMOUR, P., *Tour merging via branch-decomposition*. INFORMS Journal on Computing, n.15, p.233-248, 2003.

CUNHA, C. B.; GUALDA, N. D. F., **Heurísticas baseadas em Relaxação Lagrangiana para o problema de roteirização de veículos com restrições operacionais**. In: XI Congresso de Pesquisa e Ensino em Transportes, 1997, Rio de Janeiro (RJ). Anais do XI Congresso de Pesquisa e Ensino em Transportes- ANPET. v. 2, p. 843-855, Rio de Janeiro 1997.

CUNHA, C. B., **Aspectos práticos da aplicação de modelos de roteirização de veículos a problemas reais**. Associação Nacional de Pesquisa e Ensino em Transportes- ANPET. v. 8, n. 2, p. 51-74, 2000.

EBERHART, R. C.; KENNEDY, J. A., *New Optimizer Using Particles Swarm Theory*. Proc. Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science. IEEE Service Center, Piscataway, NJ, p. 39-43, Nagoya, Japan, 1995.

EBERHART, R. C.; SHI, Y., *Particle swarm optimization: developments, applications and resources*. Proc. congress on evolutionary computation (Seoul, Korea.), IEEE Service Center, Piscataway, NJ., 2001a.

EBERHART, R. C.; SHI, Y., *Tracking and optimizing dynamic systems with particle swarms*. In: Evolutionary Computation, 2001. Proceedings of the 2001 Congress on Piscataway, NJ, USA: IEEE Service Center, v. 1, p. 94-100, 2001b.

FANG, L.; CHEN, P.; LIU, S., *Particle swarm optimization with simulated annealing for tsp*. In: Proceedings of the 6th Conference on 6th WSEAS Int. Conf. on Artificial Intelligence, Knowledge Engineering and Data Bases - Volume 6. Stevens Point, WI, USA: World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), p. 206-210, 2007.

FOULDS, L. R., *Combinatorial Optimization for Undergraduates*. New York: Springer-Verlag, p. 114, 1984.

GOKSAL, F. P.; KARAOGLAN, I.; ALTIPARMAK, F., *A hybrid discrete particle swarm optimization for vehicle routing problem with simultaneous pickup and delivery*. Computers & Industrial Engineering, v. 65, p. 39-53, 2013.

GOLDBARG, M.C. LUNA, H.P.L., **Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos**. Rio de Janeiro, Campus, 2000.

GOLDBARG, E. F. G.; SOUZA, G. R.; GOLDBARG, M. C., **Otimização por nuvem de partículas para o problema do caixeiro viajante**. In: *XXXVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2005.

GOLDBARG, E. F. G.; SOUZA, G. R.; GOLDBARG, M. C., **Particle swarm for the traveling salesman problem**. In: GOTTLIEB, J.; RAIDL, G. (Ed.). *Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization*. [S.l.]: Springer Berlin / Heidelberg, 2006, (Lecture Notes in Computer Science, v. 3906). p. 99-110, 2006a.

GOLDBARG, E. F. G.; SOUZA, G. R.; GOLDBARG, M. C., **Particle swarm optimization for the bi-objective degree constrained minimum spanning tree**. In: *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, p. 420-427, 2006b.

GOLDBARG, E. F.; GOLDBARG, M. C.; SOUZA, G. R., **Particle Swarm Optimization Algorithm for the Traveling Salesman Problem**, Traveling Salesman Problem, Federico Greco (Ed.), ISBN:978-953-7619-10-7, 2008.

GOLDEN, B.; BALL, M.; BODIN, L., **Current and future research directions in network optimization**. Computers & Operations Research, v.8, n.2, p.71-81, 1981.

GOMES, R.F.S.; **Aplicação da Metaheurística Tabu Search na Otimização de Rotas de Manutenção Preventiva em Campo**. Dissertação de Mestrado em Logística e Pesquisa Operacional. Universidade Federal do Ceará, 2011.

GUNST, R.F., MASON, R.L., **Regression Analys is and Its Application**: A Data-Oriented Approach, Marcel Dekker, New York, 1980.

HU, X.; EBERHART, R.C.; SHI, Y., **Swarm intelligence for permutation optimization: A case study on n-queens problem**. Proceeding of the IEEE Swarm Intelligence Symposium, April 24-26, Indianapolis, Indiana, p. 243-246, 2003.

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Sinopses Estatísticas de Educação Básica, 2006**. Disponível em: [www.inep.gov.br/basica/censo/Escolar/Sinopse/sinopse.asp](http://www.inep.gov.br/basica/censo/Escolar/Sinopse/sinopse.asp). Acesso em 28 de novembro de 2011.

JARBOUI, B.; IBRAHIM, S.; SIARRY, P.; REBAI, A., **A combinatorial particle swarm optimisation for solving permutation flowshop problems**. Computers & Industrial Engineering, Pergamon Press, Inc., Tarrytown,NY, USA, v. 54, p. 526-538, 2008.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. C. **Particle swarm optimization**. In: Proceeding of IEEE International Conference on Neural Networks. Piscataway, NJ, USA: IEEE Computer Society, p. 1942-1948, 1995.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. C., **A discrete binary version of the particle swarm algorithm**. Systems, Man, and Cybernetics, 1997. 'Computational Cybernetics and Simulation', 1997 IEEE International Conference on, v. 5, p. 4104-4108, 1997a.

KENNEDY, J., *The Particle Swarm: Social Adaptation of Knowledge*, Proc. IEEE International Conference on Evolutionary Computation (Indianapolis, Indiana), IEEE Service Center, Piscataway, NJ, p. 303-308, 1997b.

KIM, B. I.; SON, S. J., *A probability matrix based particle swarm optimization for the capacitated vehicle routing problem*. J Intell Manuf, v. 23, p.1119-1126, 2012.

KNOWLES, J.D.; CORNE, D. W., *A comparison of encodings and algorithms for multiobjective minimum spanning tree problems*. Congress on Evolutionary Computation, v.1, p.544-551, 2001.

KUO, I. H.; HORNG, S. J.; KAO, T. W.; LIN, T. W.; LEE, C. L.; TERANO, T.; PAN, Y., *An efficient flow-shop scheduling algorithm based on a hybrid particle swarm optimization model*. Expert Systems with Applications, Pergamon Press, Inc., Tarrytown, NY, USA, v. 36, n. 3, p. 7027-7032, 2009.

LAPORTE, G., *The vehicle routing problem: an overview of exact and approximate methods*. European Journal of Operational Research, v. 59, p. 345-358, 1992.

LAPORTE, G.; GENDREAU , M.; POTVIN , J.Y.; SEMET , E. F., *Classical and modern heuristics for the vehicle routing problem*, International Transactions in Operational Research, v.7, n.4/5, p.285-300, 2000.

LENSTRA, J. K.; RINNOOY KAN, A. H. G., *Complexity of Vehicle and Scheduling Problems*. Networks. v.11, n.2, p.221-227, 1981.

LIAO, C. J.; TSENG, C. T.; LUARN, P., *A discrete version of particle swarm optimization for flowshop scheduling problems*. Computers & Operations Research, Elsevier Science Ltd., Oxford, UK, v. 34, n. 10, p. 3099-3111, 2007.

LIN, S.; KERNIGHAN, B., *An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem*. Operations Reserch, n.21, p.498-516, 1973.

LIU, H.; GAO, L.; PAN, Q., *A hybrid particle swarm optimization with estimation of distribution algorithm for solving permutation flowshop scheduling problem*. Expert Systems with Applications, Pergamon Press, Inc., Tarrytown, NY, USA, v. 38, n. 4, p. 4348-4360, 2011.

LOCATELLI, L. K.; NETO, W. A., *Seleção de Atributos a Partir de Algoritmos Genéticos*. Monografia de conclusão de graduação, Bacharel em Ciência da Computação. Universidade Tuiuti do Paraná – UTP, Curitiba, PR, 2004.

LU, Q.; DESSOUKY, M., *An Exact algorithm for the Multiple Vehicle Pickup and Delivery Problem*. Transportation Science, v. 38, n. 4, p. 503-514, 2004.

MARTÍNEZ, L. M.; VIEGAS, J. M., *Design and Deployment of an Innovative School Bus Service in Lisbon*. 14th EURO Working Group on Transportation Meeting. Procedia Social and Behavioral Sciences, 2010.

MARINAKIS, Y.; MARINAKI, M.; DOUNIAS, G., **A hibrid particle swarm optimization for the vehicle routing problem.** Engineering Applications of Artificial Intelligence, n. 23, p. 463-472, 2010.

MARINAKIS, Y.; MARINAKI, M., **A hibrid genetic - Particle Swarm Optimization for the vehicle routing problem.** Engineering Applications of Artificial Intelligence, n. 37, p. 1446-1455, 2010.

MARINAKIS, Y.; IORDANIDOU, G. R.; MARINAKI, M., **Particle Swarm Optimization for the Vehicle Routing Problem with Stochastic Demands.** Applied Soft Computing, v. 13, p.1693-1704, 2013.

MIRHASSANI, S. A.; ABOLGHASEMI, N., **A particle swarm optimization algorithm for open vehicle routing problem.** Expert Systems with Applications, v. 38, n. 9, p. 11547-11551, September 2011.

MODARES, A.; SOMHOM, S.; ENKAWA, T.A., **A self-organizing neural network approach for multiple traveling salesman and vehicle routing problems.** International Transactions in Operational Research, v. 6, n. 6, p. 591-606, 1999.

MOGHADDAM, B. F.; RUIZ, R.; SADJADI, S. J., **Vehicle routing problem with uncertain demands: An advanced particle swarm algorithm,** Computers & Industrial Engineering, v. 62, p. 306-317, 2012.

NEWTON, R. M.; THOMAS, W. H., **Design of School Bus Routes by Computer.** Socio-Economic Planning Sciences, v.3, n.1, p. 75-85, 1969.

NOROUEZA, N.; MOGHADDAM, R. T.; GHAZANFARI, M.; ALINAGHIAN, M.; SALAMATBAKHSH, A., **A New Multi-objective Competitive Open Vehicle Routing Problem Solved by Particle Swarm Optimization.** Computers & Industrial Engineering, v. 12, p. 609-633, 2012.

OLIVEIRA, M. C. S.; SILVA, T. L.; ALOISE, D. J., **Otimização por nuvem de partículas: diferença entre aplicações a problemas contínuos e discretos.** Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2004.

PARK, J.; KIM, B.I., **The school bus routing problem: A review.** European Journal of Operational Research, v. 202, n. 2, p. 311-319, 2010.

POLI, R., **Analysis of the publications on the applications of particle swarm optimisation.** Journal of Artificial Evolution and Applications, v. 2, n.1, p.1-10, 2008.

REZENDE, S. O., **Sistemas inteligentes: fundamentos e aplicações.** Barueri, SP: Malone, 2003.

ROPKE, S.; PISINGER, D., **An Adaptive Large Neighborhood Search Heuristic for the Pickup and Delivery Problem with Time Windows.** Transportation Science, v. 40, p. 455-472, 2006a.

ROPKE, S.; PISINGER, D., **A unified heuristic for a large class of Vehicle Routing Problems with Backhauls.** *European Journal of Operational Research*, v. 171, n. 3, p. 750-775, 2006b.

ROPKE, S.; PISINGER, D., **A general heuristic for vehicle routing problems.** *Computers & Operations Research*, v. 34, n. 8, p. 2403-2435, 2007.

ROSENDÓ, M.; POZO, A., **A hybrid particle swarm optimization algorithm for combinatorial optimization problems.** In: Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2010. Barcelona, Spain: IEEE Computer Society, p.1-8, 2010.

SALMAN, A., **Particle swarm optimization for task assignment problem.** *Microprocessors and Microsystems*, v. 26, p. 363-371, 2002.

SHA, D. Y.; HSU, C.-Y., **A hybrid particle swarm optimization for job shop scheduling problem.** *Computers & Industrial Engineering*, Pergamon Press, Inc., Tarrytown, NY, USA, v. 51, p. 791-808, 2006.

SHA, D. Y.; HSU, C.-Y., **A new particle swarm optimization for the open shop scheduling problem.** *Computers & Operations Research*, Elsevier Science Ltd., Oxford, UK, v. 35, p.3243-3261, 2008.

SHA, D. Y.; LIN, H.-H., **A multi-objective pso for job-shop scheduling problems.** *Expert Systems with Applications*, Pergamon Press, Inc., Tarrytown, NY, USA, v. 37, n. 2, p. 1065-1070, 2010.

SIQUEIRA, P. H.; SOUZA, L. V., **Métodos Heurísticos aplicados na construção de roteiros de Transporte Escolar para o Estado do Paraná.** *Transportes*, v. 20, n. 3, p. 28-40, 2012.

SCHITTEKAT, P.; SEVAUX, M.; SORENSEN, K., **A mathematical formulation for a school bus routing problem.** *Anais do ICSSSM'06: International Conference on Service Systems and Service Management*, França, p. 1552-1557, 2006.

SHI, Y.; EBERHART, R.C., **A Modified Particle Swarm Optimizer,** In: Proceedings of the IEEE International Conference on Evolutionary computation, IEEE Press, Piscataway, NJ, p. 69-73, 1998.

SPADA, M.; BIERLAIRE, M.; LEIBLING, T., **Decision-aid Methodology for the School Bus Routing and Scheduling Problem.** In: Swiss Transport Research Conference, v. 3, 2003. Disponível em: <http://infoscience.epfl.ch/record/117131/files/>. Acesso em 10 de maio de 2013.

SOUZA, M. J. F.; GOMES, A. C. J., **Lingo parte 1: Manual de Referência.** Departamento de Computação, Universidade Federal de Ouro Preto, 2004.

SOUZA, G. R., **Uma Abordagem por Nuvem de Partículas para Problemas de Otimização Combinatória.** Dissertação (Mestrado em Sistemas e Computação)-Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2006.

SOUZA, W. M., **Aplicação de mineração de dados para o levantamento de critérios do Programa Nacional do Transporte Escolar.** Dissertação (Mestrado em Transportes/Engenharia Civil e Ambiental) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, 2004.

STEINER, M.T.A.; ZAMBONI, L.V.S.; COSTA, D.M.B.; CARNIERI, C. E SILVA, A.L., **O Problema de roteamento no Transporte Escolar.** *Pesquisa Operacional*, v. 20, n. 1, p. 83-99, 2000.

TEBALDI, A.; COELHO, L.S.; LOPES JR, V., **Detecção de Falhas em Estruturas Inteligentes Usando Otimização por Nuvem de Partículas:** Fundamentos e Estudos de Casos, SBA Controle & Automação, v. 17, n. 3, p. 312-330, 2006.

TOTH, P.; VIGO, D., **The Granular Tabu Search and Its Application to the Vehicle-Routing Problem.** *INFORMS Journal on Computing*, v. 15, n. 4, p. 333-346, 2003.

VESTERSTROM, J. S.; RIGET, J., **Particle Swarms: Extensions for improved local, multi-modal, dynamic search in numerical optimization.** 203 p. Dissertação (Mestrado) - Faculty of Science, Aarhus Universitet, 2002.

WANG, K. P.; HUANG, L.; ZHOU, C. G.; PANG, W., **Particle swarm optimization for traveling salesman problem.** In: Proceedings of the 2003 International Conference on Machine Learning and Cybernetics, v.3, p. 1583-1585, 2003.

WANG, W.; YANWEI Z.; DINGZHONG FENG.; WU, B., **Particle Swarm Optimization for Open Vehicle Routing Problem.** Irwin (Eds.): ICIC 2006, LNAI 4114, p. 999-1007, 2006.

ZOU, S.; LI, J.; LI, X., **A Hybrid Particle Swarm Optimization Algorithm for Multi-Objective Pickup and Delivery Problem with Time Windows.** *Journal of Computers*, v. 8, n. 10, p. 2583-2589, 2013.

ZUBEN, F. J. V.; ATTUX, R. R. F., **Inteligência de enxame.** DCA/FEEC/Unicamp e DECOM/-FEEC/Unicamp, 2008.

## APÊNDICES

### APÊNDICE A - NÚMERO DE RESTRIÇÕES PARA RESOLVER O PROBLEMA COM A FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A Tabela A1 apresenta a relação entre o número de nós para cada município em cada período de estudo e o número de restrições necessárias para resolver o problema utilizando a formulação matemática apresentada na seção 3.2.

TABELA A1 - RELAÇÃO ENTRE O Nº DE NÓS E O Nº DE RESTRIÇÕES PARA O PROBLEMA DO TRANSPORTE ESCOLAR COM A FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

(continua)

Municípios	Nós (Manhã)	Total de restrições	Nós (Tarde)	Total de restrições	Nós (Noite)	Total de restrições
<b>Abatiá</b>	486	$1,2871 \times 10^{28}$	166	$6,8725 \times 10^{14}$	126	$5,8047 \times 10^{12}$
<b>Agudos do Sul</b>	563	$6,1937 \times 10^{21}$	663	$5,6834 \times 10^{22}$	95	$1,7620 \times 10^{10}$
<b>Anahy</b>	43	$9,2158 \times 10^4$	49	$1,4530 \times 10^5$	19	$7,119 \times 10^3$
<b>Ângulo</b>	118	$2,0452 \times 10^6$	86	$7,4118 \times 10^5$	18	$6,078 \times 10^3$
<b>Ariranha do Ivaí</b>	218	$6,4269 \times 10^{12}$	192	$2,6100 \times 10^{13}$	98	$2,4822 \times 10^9$
<b>Bom Jesus do Sul</b>	287	$5,3449 \times 10^{17}$	15	$3,679 \times 10^3$	555	$5,0974 \times 10^{21}$
<b>Cafeara</b>	24	$1,4272 \times 10^4$	112	$2,4368 \times 10^7$	94	$7,8942 \times 10^6$
<b>Céu Azul</b>	311	$7,5091 \times 10^{21}$	811	$3,0025 \times 10^{29}$	103	$42117 \times 10^{11}$
<b>Diamante do Oeste</b>	533	$13951 \times 10^{16}$	567	$2,4777 \times 10^{16}$	-	-
<b>Fernandes Pinheiro</b>	1209	$8,1363 \times 10^{22}$	369	$1,1068 \times 10^{17}$	93	$3,1602 \times 10^9$
<b>Figueira</b>	855	$1,6603 \times 10^{21}$	673	$1,1066 \times 10^{20}$	213	$1,5894 \times 10^{14}$
<b>Flor da Serra do Sul</b>	790	$1,4730 \times 10^{25}$	478	$8,8815 \times 10^{21}$	32	$3,5522 \times 10^4$
<b>Iracema do Oeste</b>	98	$1,1245 \times 10^6$	6	259	12	$1,837 \times 10^3$
<b>Loanda</b>	479	$6,8122 \times 10^{20}$	291	$6,5096 \times 10^{17}$	55	$3,7163 \times 10^5$
<b>Lobato</b>	122	$2,2786 \times 10^6$	-	-	6	259
<b>Marilena</b>	367	$4,2379 \times 10^{14}$	359	$3,4415 \times 10^{14}$	29	$2,4951 \times 10^4$

Municípios	Nós (Manhã)	Total de restrições	Nós (Tarde)	Total de restrições	Nós (Noite)	Total de restrições
<b>Mirador</b>	88	$7,7590 \times 10^7$	16	$4,376 \times 10^3$	32	$3,3893 \times 10^4$
<b>Moreira Sales</b>	187	$3,3033 \times 10^{18}$	567	$9,0118 \times 10^{28}$	199	$1,4360 \times 10^{19}$
<b>Nova América da Colina</b>	119	$5,8795 \times 10^6$	65	$4,1939 \times 10^5$	25	$1,6259 \times 10^4$
<b>Paraíso do Norte</b>	256	$1,1009 \times 10^{12}$	348	$1,4637 \times 10^{13}$	148	$9,4436 \times 10^9$
<b>Paula Freitas</b>	526	$3,0181 \times 10^{17}$	750	$1,1721 \times 10^{19}$	200	$1,0104 \times 10^{13}$
<b>Pinhais</b>	244	$3,3736 \times 10^{20}$	252	$6,6441 \times 10^{20}$	92	$1,7673 \times 10^{10}$
<b>Prado Ferreira</b>	94	$9,8417 \times 10^5$	28	$2,2897 \times 10^4$	40	$6,7942 \times 10^4$
<b>Rio Negro</b>	734	$2,3764 \times 10^{41}$	830	$9,6565 \times 10^{42}$	162	$5,8643 \times 10^{18}$
<b>Santa Amélia</b>	354	$1,2983 \times 10^9$	132	$9,2857 \times 10^6$	86	$1,2759 \times 10^6$
<b>Santa Mariana</b>	78	$3,5529 \times 10^8$	152	$3,1022 \times 10^{13}$	112	$1,2140 \times 10^{11}$
<b>São Sebastião da Amoreira</b>	241	$1,8899 \times 10^8$	71	$5,9791 \times 10^5$	23	$1,2618 \times 10^4$
<b>Teixeira Soares</b>	990	$4,1278 \times 10^{26}$	1240	$1,0449 \times 10^{28}$	188	$5,4087 \times 10^{15}$
<b>Tunas do Paraná</b>	416	$6,4739 \times 10^{13}$	526	$4,5026 \times 10^{14}$	256	$1,1009 \times 10^{12}$
<b>Uniflor</b>	85	$1,2759 \times 10^6$	107	$3,5800 \times 10^6$	45	$1,0774 \times 10^5$
<b>Uraí</b>	490	$4,7202 \times 10^{28}$	472	$2,0890 \times 10^{28}$	208	$1,3511 \times 10^{20}$
<b>Ventania</b>	446	$6,6340 \times 10^{25}$	736	$9,9354 \times 10^{29}$	220	$3,7314 \times 10^{19}$

## APÊNDICE B - TEMPO COMPUTACIONAL NECESSÁRIO PARA RESOLVER O PROBLEMA PELO MÉTODO EXATO

As Tabelas B1, B2 e B3 mostram uma estimativa do tempo computacional necessário para resolver o problema do Transporte Escolar usando o método exato executado no Software Lingo nos turnos da manhã, tarde e noite respectivamente. A estimativa foi obtida pelo Excel com a função crescimento.

TABELA B1 - RELAÇÃO ENTRE O Nº DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL PARA O PROBLEMA DO TRANSPORTE ESCOLAR NO TURNO DA MANHÃ COM O MÉTODO EXATO

Municípios	Nº de Nós	Tempo (s)	Tempo (Anos)
Cafeara	24	$1,2265 \times 10^{10}$	388,94169
Anahy	43	$4,5371 \times 10^{25}$	$1,4387 \times 10^{18}$
Santa Mariana	78	$2,1618 \times 10^{54}$	$6,8553 \times 10^{46}$
Uniflor	85	$1,1761 \times 10^{60}$	$3,7293 \times 10^{52}$
Mirador	88	$3,3772 \times 10^{62}$	$1,0709 \times 10^{55}$
Prado Ferreira	94	$2,7848 \times 10^{67}$	$8,8306 \times 10^{59}$
Iracema do Oeste	98	$5,2758 \times 10^{70}$	$1,6729 \times 10^{63}$
Ângulo	118	$1,2875 \times 10^{87}$	$4,0826 \times 10^{79}$
Nova A. da Colina	119	$8,4942 \times 10^{87}$	$2,6935 \times 10^{80}$
Lobato	122	$2,4391 \times 10^{90}$	$7,7346 \times 10^{82}$
Moreira Sales	187	$4,4309 \times 10^{143}$	$1,405 \times 10^{136}$
Ariranha do Ivaí	218	$1,1144 \times 10^{169}$	$3,5338 \times 10^{161}$
São S. da Amoreira	241	$7,8096 \times 10^{187}$	$2,4764 \times 10^{180}$
Pinhais	244	$2,2426 \times 10^{190}$	$7,1112 \times 10^{182}$
Paraíso do Norte	256	$1,5248 \times 10^{200}$	$4,8353 \times 10^{192}$
Bom Jesus do Sul	287	$3,8352 \times 10^{225}$	$1,2161 \times 10^{218}$
Céu Azul	311	$1,7731 \times 10^{245}$	$5,6226 \times 10^{237}$
Santa Amélia	354	$3,0324 \times 10^{280}$	$9,6155 \times 10^{272}$
Marilena	367	$1,3603 \times 10^{291}$	$4,3134 \times 10^{283}$

TABELA B2 - RELAÇÃO ENTRE O Nº DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL PARA O PROBLEMA DO TRANSPORTE ESCOLAR NO TURNO DA TARDE COM O MÉTODO EXATO

(continua)

Municípios	Nº de Nós	Tempo (s)	Tempo (Anos)
Iracema do Oeste	6	$2,18765 \times 10^{-5}$	$6,9369 \times 10^{-3}$
Bom Jesus do Sul	15	$5,1800 \times 10^2$	$1,6425 \times 10^{-5}$
Mirador	16	$3,4174 \times 10^3$	$1,0836 \times 10^{-5}$
Prado Ferreira	28	$2,3237 \times 10^{13}$	$7,3684 \times 10^5$
Anahy	49	$3,7412 \times 10^{30}$	$1,1863 \times 10^{23}$
Nova A. da Colina	65	$4,8193 \times 10^{43}$	$1,5281 \times 10^{36}$
São S. da Amoreira	71	$3,9739 \times 10^{48}$	$1,2601 \times 10^{41}$
Ângulo	86	$7,7592 \times 10^{60}$	$2,4604 \times 10^{53}$
Uniflor	107	$1,2492 \times 10^{78}$	$3,9613 \times 10^{70}$

(conclusão)

Municípios	Nº de Nós	Tempo (s)	Tempo (Anos)
Cafeara	112	$1,5614 \times 10^{82}$	$4,9511 \times 10^{74}$
Santa Amélia	132	$3,8104 \times 10^{98}$	$1,2082 \times 10^{91}$
Santa Mariana	152	$9,299 \times 10^{114}$	$2,9487 \times 10^{107}$
Abatiá	166	$2,7521 \times 10^{126}$	$8,7267 \times 10^{118}$
Ariranha do Ivaí	192	$5,538 \times 10^{147}$	$1,7561 \times 10^{140}$
Pinhais	252	$8,0489 \times 10^{196}$	$2,5523 \times 10^{189}$
Loanda	291	$7,2658 \times 10^{228}$	$2,304 \times 10^{221}$
Paraíso do Norte	348	$3,6774 \times 10^{275}$	$1,1661 \times 10^{268}$
Marilena	359	$3,7901 \times 10^{284}$	$1,2018 \times 10^{277}$
Fernandes Pinheiro	369	$5,9207 \times 10^{292}$	$1,8775 \times 10^{285}$

TABELA B3 - RELAÇÃO ENTRE O Nº DE NÓS E TEMPO COMPUTACIONAL PARA O PROBLEMA DO TRANSPORTE ESCOLAR NO TURNO DA NOITE COM O MÉTODO EXATO

Municípios	Nº de Nós	Tempo (s)	Tempo (Anos)
Lobato	6	$2,1876 \times 10^{-5}$	$6,9369 \times 10^{-13}$
Iracema do Oeste	12	1,8039	$5,7201 \times 10^{-8}$
Ângulo	18	$1,4874 \times 10^5$	$4,7167 \times 10^{-3}$
Anahy	19	$9,8135 \times 10^5$	$3,1118 \times 10^{-2}$
São S. da Amoreira	23	$1,8591 \times 10^9$	$5,8953 \times 10$
Nova A. da Colina	25	$8,0921 \times 10^9$	$2,5660 \times 10^3$
Marilena	29	$1,5330 \times 10^{14}$	$4,8612 \times 10^6$
Flor da Serra do Sul	32	$4,4022 \times 10^{16}$	$1,3959 \times 10^9$
Mirador	32	$4,4022 \times 10^{16}$	$1,3959 \times 10^9$
Prado Ferreira	40	$1,5800 \times 10^{23}$	$5,0101 \times 10^{15}$
Uniflor	45	$1,9748 \times 10^{27}$	$6,2620 \times 10^{19}$
Loanda	55	$3,0849 \times 10^{35}$	$9,7824 \times 10^{27}$
Santa Amélia	86	$7,7592 \times 10^{60}$	$2,4604 \times 10^{53}$
Pinhais	92	$6,3981 \times 10^{65}$	$2,0288 \times 10^{58}$
Fernandes Pinheiro	93	$4,2211 \times 10^{66}$	$1,3385 \times 10^{59}$
Cafeara	94	$2,7848 \times 10^{67}$	$8,8306 \times 10^{59}$
Agudos do Sul	96	$1,2121 \times 10^{69}$	$3,8436 \times 10^{61}$
Ariranha do Ivaí	98	$5,2758 \times 10^{70}$	$1,6729 \times 10^{63}$
Céu Azul	103	$6,5941 \times 10^{74}$	$2,0909 \times 10^{67}$
Santa Mariana	112	$1,5614 \times 10^{82}$	$4,9511 \times 10^{74}$
Abatiá	126	$4,6210 \times 10^{93}$	$1,4653 \times 10^{86}$
Paraíso do Norte	148	$4,9084 \times 10^{111}$	$1,5565 \times 10^{104}$
Rio Negro	162	$1,4527 \times 10^{123}$	$4,6064 \times 10^{115}$
Teixeira Soares	188	$2,9232 \times 10^{144}$	$9,2695 \times 10^{136}$
Moreira Sales	199	$3,0128 \times 10^{153}$	$9,5534 \times 10^{145}$
Paula Freitas	200	$1,9876 \times 10^{154}$	$6,3028 \times 10^{146}$
Uraí	208	$7,1338 \times 10^{160}$	$2,2621 \times 10^{153}$
Figueira	213	$8,9164 \times 10^{164}$	$2,8274 \times 10^{157}$
Ventania	220	$4,8506 \times 10^{170}$	$1,5381 \times 10^{163}$
Tunas do Paraná	256	$1,5248 \times 10^{200}$	$4,8353 \times 10^{192}$

**APÊNDICE C - COMPARAÇÃO ENTRE A QUILOMETRAGEM DIÁRIA EM CADA PERÍODO DE ESTUDO OBTIDAS PELAS TÉCNICAS ALBH E ONPDA**

A Tabela C1 mostra uma comparação entre as quilometragens diárias em cada período de estudo apresentadas pelas técnicas ALBH e ONPDA.

**TABELA C1 - COMPARAÇÃO ENTRE AS QUILOMETRAGENS DIÁRIAS OBTIDAS EM CADA PERÍODO DE ESTUDO PELAS TÉCNICAS ALBH E ONPDA**

(continua)

<b>Municípios</b>	<b>Manhã</b>		<b>Tarde</b>		<b>Noite</b>		<b>Total</b>		<b>Erro Abs (km)</b>
	<b>ALBH (km)</b>	<b>ONPDA (km)</b>							
<b>Abatiá</b>	714,04	714,03	310,73	297,21	260,61	256,25	1285,38	1267,5	17,88
<b>Agudos do Sul</b>	434,22	404,81	434,58	409,24	168,65	144,43	1037,46	958,48	78,97
<b>Anahy</b>	70,09	53,06	121,92	111,08	27,606	23,11	219,62	187,26	32,36
<b>Ângulo</b>	134,23	134,16	168,38	133,63	48,548	37,59	351,16	305,39	45,77
<b>Ariranha do Ivaí</b>	257,32	257,19	303,90	300,59	203,19	195,87	764,42	753,66	10,76
<b>Bom J. do Sul</b>	449,53	451,24	7,59	7,59	593,84	597,54	1050,96	1056,38	-5,41
<b>Cafeara</b>	67,84	46,91	234,58	228,95	102,29	102,29	404,73	378,16	26,56
<b>Céu Azul</b>	507,10	507,10	940,99	918,34	250,89	250,89	1698,99	1676,34	22,65
<b>Diamante do Oeste</b>	91,87	91,87	433,07	429,61	-	-	524,94	521,48	3,46
<b>Fernandes Pinheiro</b>	1106,85	1104,06	610,46	576,01	157,94	135,92	1875,26	1816,00	59,26
<b>Figueira</b>	549,53	549,53	448,97	448,97	156,59	155,39	1155,09	1153,89	1,19
<b>Flor da S. do Sul</b>	1034,62	1017,76	719,05	674,69	70,48	51,95	1824,16	1744,40	79,75
<b>Iracema do Oeste</b>	173,71	157,06	7,90	7,90	36,12	26,82	217,74	191,79	25,94
<b>Loanda</b>	797,62	797,62	258,41	228,54	179,16	151,78	1235,19	1177,94	57,25
<b>Lobato</b>	207,82	206,80	-	-	6,87	6,87	214,69	213,674	1,02
<b>Marilena</b>	510,35	510,32	516,16	513,85	81,76	71,60	1108,27	1095,78	12,49
<b>Mirador</b>	226,49	154,74	13,56	12,96	98,56	98,56	338,62	266,27	72,34
<b>Moreira Sales</b>	355,93	325,64	801,34	800,50	449,44	424,60	1606,71	1550,74	55,97
<b>Nova A. da Colina</b>	160,24	160,24	163,05	146,42	51,33	41,55	374,62	348,21	26,40
<b>Paraíso do Norte</b>	224,68	226,16	266,16	268,12	127,45	127,45	618,30	621,74	-3,43
<b>Paula Freitas</b>	672,43	672,43	928,26	876,28	340,97	338,33	1941,67	1887,06	54,61
<b>Pinhais</b>	308,52	305,32	297,46	278,06	31,71	22,89	637,70	606,28	31,41
<b>Prado Ferreira</b>	79,14	80,14	5,70	5,70	64,52	64,52	149,37	150,37	-0,99
<b>Rio Negro</b>	420,94	415,03	504,12	504,12	79,77	67,94	1004,84	987,10	17,74
<b>Santa Amélia</b>	410,67	381,63	216,67	191,86	165,01	150,26	792,36	723,76	68,608
<b>Santa Mariana</b>	130,30	120,48	370,13	359,63	96,87	93,29	597,31	573,41	23,90

(conclusão)

<b>Municípios</b>	<b>Manhã</b>		<b>Tarde</b>		<b>Noite</b>		<b>Total</b>		<b>Erro Abs (km)</b>
	<i>ALBH</i> (km)	ONPDA (km)	<i>ALBH</i> (km)	ONPDA (km)	<i>ALBH</i> (km)	ONPDA (km)	<i>ALBH</i> (km)	ONPDA (km)	
<b>Teixeira Soares</b>	1377,99	1377,99	1533,94	1533,09	562,82	513,63	3474,76	3424,72	50,04
<b>Tunas do Paraná</b>	178,22	178,22	325,46	298,15	332,07	305,02	835,76	781,40	54,35
<b>Uniflor</b>	153,64	144,99	172,68	133,34	104,43	92,01	430,76	370,34	60,42
<b>Uraí</b>	581,05	572,85	584,76	584,71	220,20	202,95	1386,01	1360,52	25,49
<b>Ventania</b>	392,22	353,81	835,10	799,84	289,67	289,67	1517,00	1443,33	73,67

As Figuras C1, C2 e C3 mostram as diferenças entre a quilometragens diárias encontradas pelas técnicas *ALBH* e ONPDA em cada período de estudo: manhã tarde e noite respectivamente.

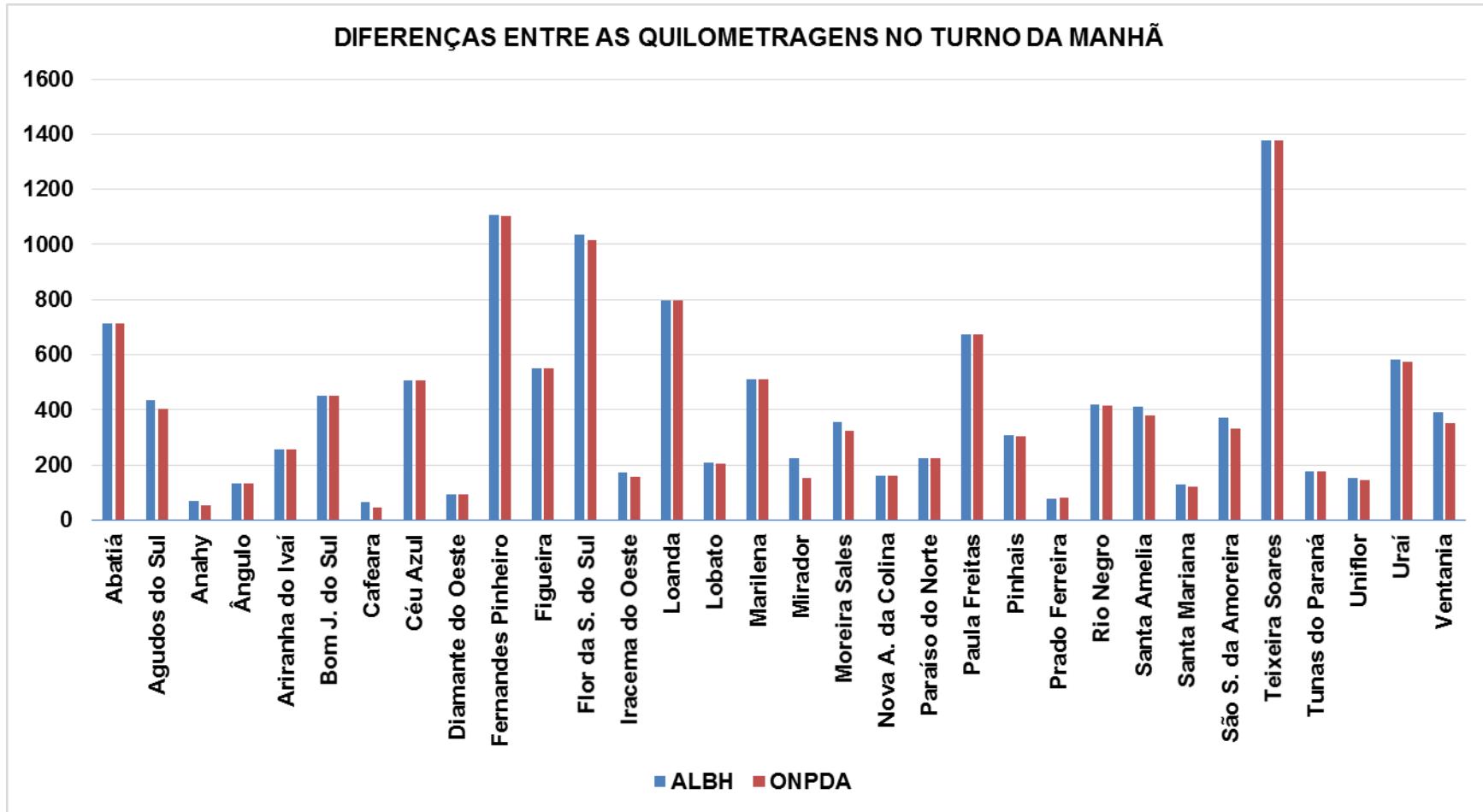


FIGURA C1 - DIFERENÇAS ENTRE AS QUILOMETRAGENS NO TURNO DA MANHÃ.

### DIFERENÇAS ENTRE AS QUILOMETRAGENS NO TURNO DA TARDE

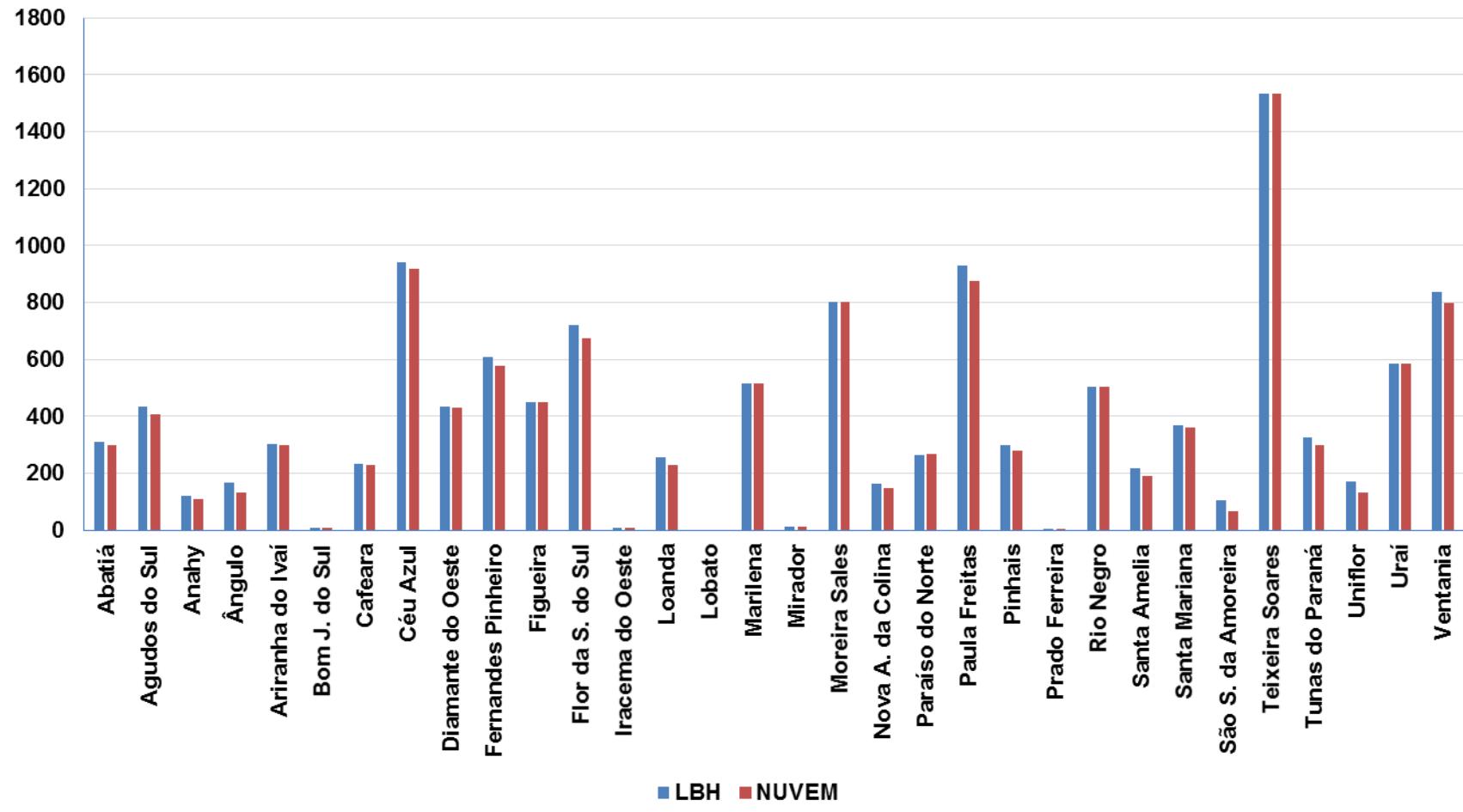


FIGURA C2 - DIFERENÇAS ENTRE AS QUILOMETRAGENS NO TURNO DA TARDE.

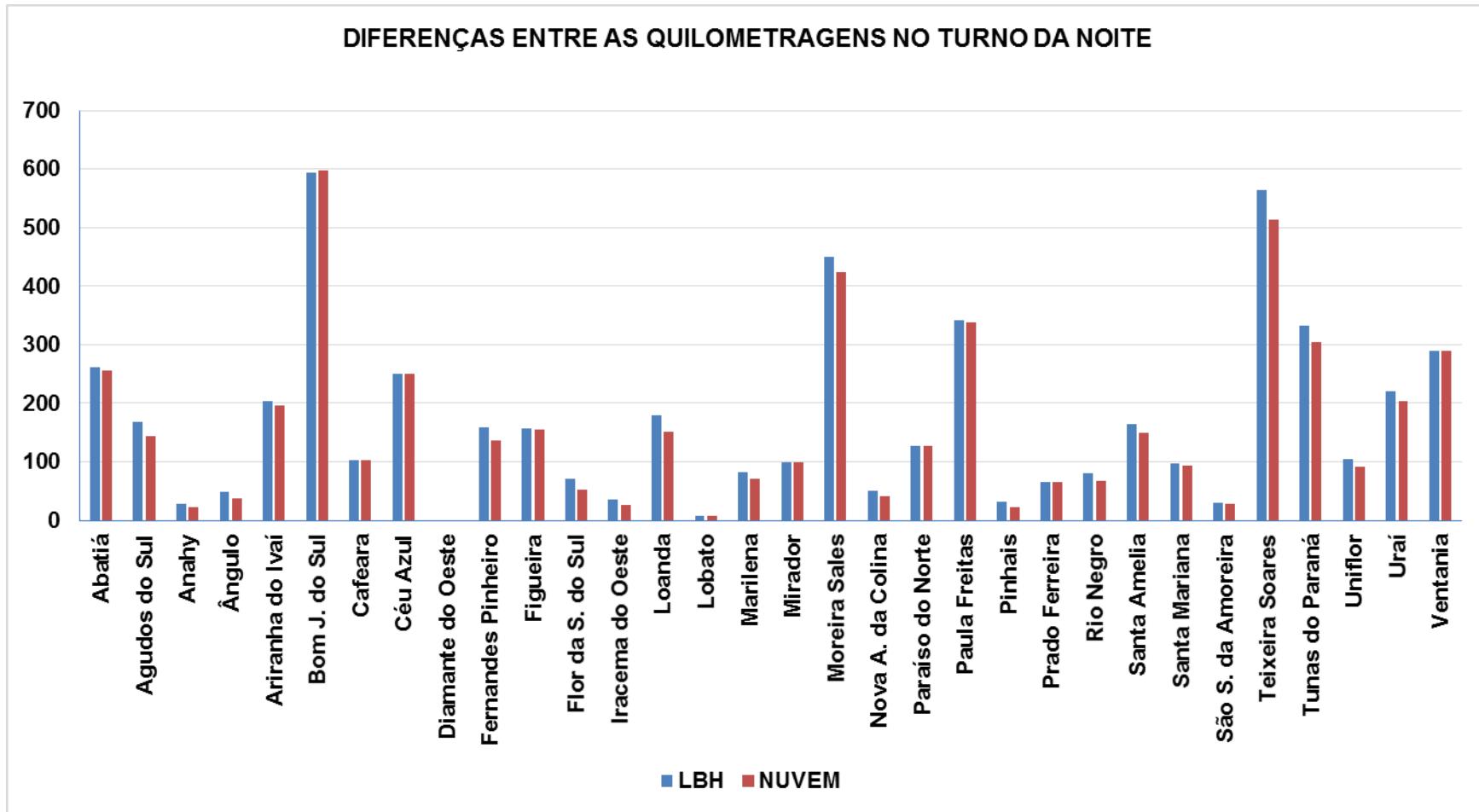


FIGURA C3 - DIFERENÇAS ENTRE AS QUILOMETRAGENS NO TURNO DA NOITE.