> 本节为**opencv数字图像处理**（6）：**频率域滤波**的第三小节，**二维取样定理与二维傅里叶变换**，主要包括：二维连续/离散傅立叶变换、二维取样及二维取样定理与二维离散傅立叶变换的性质。

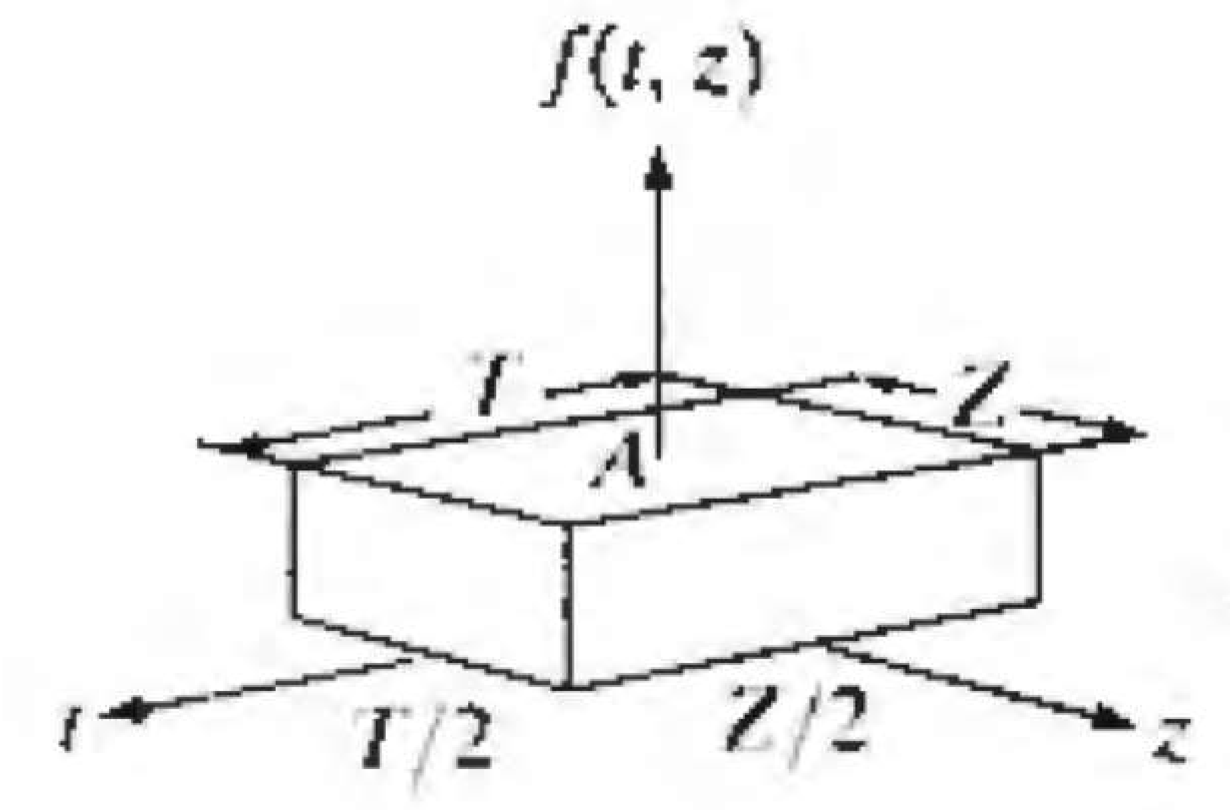
1. 二维连续傅里叶变换对

令$f(t,z)$是两个连续变量t和z的连续函数，则其二维连续傅里叶变换对由如下表达式给出：

$$F(\mu,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,z)e^{-j2\pi(\mu t+vz)}dtdz$$

$$f(t,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mu,v)e^{j2\pi(\mu t+vz)}d\mu dv$$

其中，μ和v是频率变量，它们的域定义了连续频率域；当涉及图像时，t和z解释为连续空间变量。



如上图所示的二维函数，对应的傅立叶变换为：

$$F(\mu,\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(\mu t+\nu z)}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z=\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-Z/2}^{Z/2}A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(\mu t+\nu z)}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z=ATZ\left[\frac{\sin(\pi\mu T)}{(\pi\mu T)}\right]\left[\frac{\sin(\pi\nu Z)}{(\pi\nu Z)}\right]$$

其幅度由下式给出：

$$|F(\mu,v)| = ATZ\left|\frac{\sin(\pi\mu T)}{(\pi\mu T)}\right|\left|\frac{\sin(\pi v Z)}{(\pi v Z)}\right|$$

如下图所示，在幅度中零的位置与T和Z的值成反比，二者越大，则幅度变得更加“收缩”。

2. 二维取样和二维取样定理

与上一节提到的一位情况类似，二维取样可用取样函数（二维冲激串建模），如下：

$$s_{\Delta T\Delta Z}(t,z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-m\Delta T, z-n\Delta Z)$$

其中ΔT和ΔZ是连续函数$f(t,z)$沿t轴和z轴的样本间间隔，上式描述了沿着两个轴无限扩展的周期冲激的集合，如下图所示。我们可以用上式所示的取样函数乘以$f(t,z)$得到取样后的函数，如果由区间$[-\mu_{max},\mu_{max}]$和区间$[-v_{max},v_{max}]$建立的矩形之外的傅里叶变换是零，则函数$f(t,z)$称为带限函数，即：

$$F(\mu,v)=0, |\mu|\geq\mu_{max} \text{ 且 } |v|\geq v_{max}$$

二维取样定理表明，如果取样间隔满足：

$$\Delta T<\frac{1}{2\mu_{max}} \text{ 且 } \Delta Z<\frac{1}{2\mu_{max}}$$

或写为关于取样率的表达即：

$$\frac{1}{\Delta T}>2\mu_{max} \text{ 且 } \frac{1}{\Delta Z}>2v_{max}$$

则连续带限函数$f(t,z)$可以由其一组样本无误地恢复，也即：**如果一个二维带限函数在μ和v两个方向上由大于该函数最高频率两倍的取样率取样获得的样本表示，则没有信息丢失。**

3. 二维离散傅立叶变换及其反变换

二维离散傅里叶变换DFT可由下式说明：

$$F(\mu,v)=\Sigma_{x=0}^{M-1}\Sigma_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\mu x/M+vy/N)}$$

其中，$f(x,y)$是大小为$M\times N$的数字图像。同时，给出变换$F(\mu,v)$，利用傅里叶反变换IDFT可以得到$f(x,y)$：

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\Sigma_{x=0}^{M-1}\Sigma_{y=0}^{N-1}F(\mu,v)e^{j2\pi(\mu x/M+vy/N)}$$

4. 二维离散傅里叶变换的性质

4.1 空间和频率间隔的关系

假设对连续函数$f(t,z)$取样生成了一幅数字图像$f(x,y)$，分别由在t和z方向所取的$M\times N$个样点组成，令ΔT和ΔZ表示样本间的间隔，则相应离散频率域变量间的间隔分别由：

$$\Delta\mu=\frac{1}{M\Delta T} \text{ 和 } \Delta v=\frac{1}{N\Delta z}$$

给出，频率域样本间的间隔和空间样本间的间距和样本数成反比。

4.2 平移和旋转

傅立叶变换变换对满足下列平移特性：

$$f(x,y)e^{j2\pi(\mu x/M+vy/N)}\Leftrightarrow F(\mu-\mu_0,v-v_0)$$

$$f(x-x_0,y-y_0)\Leftrightarrow F(\mu,v)e^{-j2\pi(\mu x/M+vy/N)}$$

即指数项乘以$f(x,y)$将使DTY的原点移到点(μ_0,v_0)，反之，用负指数乘以$F(\mu,v)$将使$f(x,y)$移到点(x_0,y_0)。　　使用极坐标

$$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$$

$$\mu=\omega\cos\varphi,v=\omega\sin\varphi$$

可得到下列变换对：

$$f(r,\theta+\theta_0)\Leftrightarrow F(\omega,\varphi+\varphi_0)$$

也就是说，若$f(x,y)$旋转θ_0角度，则$F(\mu,v)$也旋转相同的角度，反之亦然。

4.3 周期性

二维傅立叶变换及其反变换在μ和v方向上是无限周期的，即：

$$F(u,v)=F(u+k_1M,v)=F(u,v+k_2N)=F(u+k_1M,v+k_2N)$$

$$f(x,y)=f(x+k_1M,y)=f(x,y+k_2N)=f(x+k_1M,y+k_2N)$$

4.4 共轭对称性与共轭反对称

也称为哈密特对称和反哈密特对称。当$f(x,y)$是实函数，则其傅立叶变换是共轭对称即$F^*(\mu,v)=F(-\mu,-v)$；当$f(x,y)$是虚函数，则其傅里叶变换是共轭反对称的即$F^*(-\mu,v)=-F(\mu,v)$。

4.5 傅里叶谱和相角

通常二维DFT是付函数，因此可用极坐标形式来表示：

$$F(u,v)=\left|F(u,v)\right|e^{j\phi(u,v)}$$

其中幅度，也就是傅里叶谱（频谱）：

$$\left|F(u,v)\right|=\left[R^2(u,v)+F^2(u,v)\right]^{1/2}$$

相角：

$$\phi(u,v)=\arctan\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

功率谱：

$$F(u,v)=\left|F(u,v)\right|^2=R^2(u,v)+I^2(u,v)$$

因为实函数的傅立叶变换是共轭对称的，这表明谱是关于原点偶对称的，即：

$$\left|F(u,v)\right|=\left|F(-u,-v)\right|$$

而相角关于原点奇对称：

$$\phi(u,v)=-\phi(-u,-v)$$

4.6 二维卷积定理

二维循环卷积的表达式：

$$f(x,y)\star h(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)h(x-m,y-n)$$

二维卷积定理由下式给出：

$$f(x,y)\star h(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$$

$$f(x,y)h(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)\star H(u,v)$$

4.7 二维连傅立叶变换性质总结

下表涉及主要的DFT中的定义：

名　称	表 达 式
1) $f(x,y)$的离散傅里叶变换(DFT)	$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$
2) $F(u,v)$的离散傅里叶反变换(IDFT)	$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$
3) 极坐标表示	$F(u,v)=\lvert F(u,v)\rvert e^{j\phi(u,v)}$
4) 谱	$\lvert F(u,v)\rvert=\left[R^2(u,v)+I^2(u,v)\right]^{1/2}$ $R=\mathrm{Real}(F)$;　$I=\mathrm{Imag}(F)$
5) 相角	$\phi(u,v)=\arctan\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$
6) 功率谱	$P(u,v)=\lvert F(u,v)\rvert^2$
7) 均值	$\bar{f}(x,y)\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)=\frac{1}{MN}F(0,0)$
8) 周期性(k_1 和 k_2 为整数)	$F(u,v)=F(u+k_1M,v)=F(u,v+k_2N)=F(u+k_1M,v+k_2N)$ $f(x,y)=f(x+k_1M,y)=f(x,y+k_2N)=f(x+k_1M,y+k_2N)$
9) 卷积	$f(x,y)\star h(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)h(x-m,y-n)$
10) 相关	$f(x,y)\star h(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f^*(m,n)h(x+m,y+n)$
11) 可分性	二维 DFT 可以用先沿图像的行(列)计算一维 DFT 变换，然后沿结果的列(行)计算一维变换。见 4.11.1 节
12) 使用正变换算法得到傅里叶反变换	$MNf^*(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F^*(u,v)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$ 该式指出，将 $F^*(u,v)$输入计算正变换的算法(上式右侧)中，将得到 $MNf^*(x,y)$。取复共轭并除以 MN 就可给出希望的反变换。见 4.11.2 节

下表给出了DFT对的一些定义和性质：

名　　称	DFT 对
1）对称性	见表 4.1
2）线性	$af_1(x,y)+bf_2(x,y) \Leftrightarrow aF_1(u,v)+bF_2(u,v)$
3）平移性(一般)	$f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$ $f(x-x_0,y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$
4）平移到频率矩形的中心(M/2, N/2)	$f(x,y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u-M/2,u-N/2)$ $f(x-M/2,y-N/2) \Leftrightarrow F(u,v)(-1)^{u+v}$
5）旋转	$f(r,\theta+\theta_0) \Leftrightarrow F(\omega,\varphi+\theta_0)$ $x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta \quad u=\omega\cos\varphi \quad v=\omega\sin\varphi$
6）卷积定理*	$f(x,y)\bigstar h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$ $f(x,y)h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)\bigstar H(u,v)$
7）相关定理*	$f(x,y)\star h(x,y) \Leftrightarrow F^*(u,v)H(u,v)$ $f^*(x,y)h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)\star H(u,v)$
8）离散单位冲激	$\delta(x,y) \Leftrightarrow 1$
9）矩形函数	$\mathrm{rect}[a,b] \Leftrightarrow ab\dfrac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)}\dfrac{\sin(\pi ub)}{(\pi ub)}e^{-j\pi(ua+vb)}$
10）正弦函数	$\sin(2\pi u_0x+2\pi v_0y) \Leftrightarrow j\frac{1}{2}[\delta(u+Mu_0,v+Nu_0)-\delta(u-Mu_0,v-Nv_0)]$
11）余弦函数	$\cos(2\pi u_0x+2\pi v_0y) \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(u+Mu_0,v+Nu_0)+\delta(u-Mu_0,v-Nv_0)]$
下面的傅里叶变换对仅连续变量可推导，如之前那样，用 t 和 z 表示空间变量，用 μ 和 v 表示频率变量。对连续函数取样后，这些结果可用于 DFT 处理。	
12）微分［右边的表达式假定 $f(\pm\infty,\pm\infty)=0$］	$\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^m\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^n f(t,z) \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m(j2\pi v)^n F(\mu,v)$ $\dfrac{\partial^m f(t,z)}{\partial t^m} \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m F(\mu,v);\dfrac{\partial^n f(t,z)}{\partial z^n} \Leftrightarrow (j2\pi v)^n F(\mu,v)$
13）高斯	$A2\pi\sigma^2e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2+z^2)} \Leftrightarrow Ae^{-(\mu^2+v^2)/2\sigma^2}$ （A 是常数）

欢迎扫描二维码关注微信公众号 深度学习与数学　　[每天获取免费的大数据、AI等相关的学习资源、经典和最新的深度学习相关的论文研读，算法和其他互联网技能的学习，概率论、线性代数等高等数学知识的回顾]