Matrix rekenen / Lineaire algebra

I Lineaire ~~algebra~~ formule:

vb:
$$3x + 5 = 20$$
$$x = 5$$

Systeem van lineaire formules:

vb
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$x = 8, \quad y = 4$$

Een lineaire formule is van de vorm:

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$$

De oplossingen zijn van vorm:

$$a_1 s_1 + \dots + a_n s_n = b$$

Een systeem van lineaire formules is van de vorm van m lineaire formules met n variabelen.

Systeem van formules:

vb.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 3x_3 &= 9 \\
2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\
3x_1 + x_2 + x_3 &= 8
\end{aligned}
$$

~~Hde~~ Q Hoe lossen we dit op?

$\longrightarrow$ Gaussian elemination

Eerst vertalen we het systeem naar een matrix:

vb.

$$
\begin{aligned}
2x + 3y + z &= 4 \\
x + 2y + 2z &= 5 \\
3x + y + 5z &= -1
\end{aligned}
$$

coefficient matrix:

$$
\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}
$$

augmented matrix:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right)
$$

Transformeren van een matrix:

verwisselen van rijen	$R_i \longleftrightarrow R_j$
vermenigvuldiging met $c \neq 0$	$R_i := cR_i$
optelling met $c \neq 0$	$R_i := R_i + cR_j$

Deze operaties vervangen altijd 1 rij (behalve verwisselen)

Echelon form:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

verkleinde Echelon form:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Echelon form : (x = pivot)

$$\begin{pmatrix} X & \cdot & \cdot \\ 0 & X & \cdot \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} X & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & X & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & X & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & X & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} X & \cdot \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Een systeem van lineaire formules is onoplosbaar dan en slechts dan als :

- Er alleen nullen voor de streep staan !
- Er een getal na de streep staat dat niet nul is.

vb. $0 \; 0 \; \ldots \; 0 \mid c$ met $c \neq 0$

Een systeem van lineaire formules heeft 1 oplossing dan en slechts dan als:

het aantal pivots gelijk is aan het aantal variabelen. (in echelon vorm)

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{2 variabelen} \\ \text{2 pivots} \end{array}\right\} \longrightarrow 1 \text{ oplossing}$$

Anders zijn e meerdere oplossingen.

II

Pivot: eerste niet-nul element van een rij
Zero row: een rij zonder Pivot (alleen 0en)

Echelon form: - Alle rijen met Pivots staan voor de zero rows en
- Pivots staan altijd aan de rechterkant van de voorgaande Pivot

Voor elke ~~punt~~ hoeveelheid punten in een grafiek bestaat er precies een functie met de graad n-1 die alle punten verbindt.

Data fitting: het vinden van zo'n functie door alle punten n.

Vb. punten: $(1,6)$, $(2,3)$, $(3,2)$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Waarvoor geldt:
- $f(1) = 6$
- $f(2) = 3$
- $f(3) = 2$

$$a_0 + 1a_1 + 1a_2 = 6$$
$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 3$$
$$a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 2$$

Dit kan worden opgelost door een matrix:

matrix:

echelon:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

oplossing: $a_2 = 1$, $a_1 = -6$, $a_0 = 11$

$(11, -6, 1)$

$\downarrow$

$f(x) = 11 \cancel{+} -6x + x^2$

Dit was een voorbeeld met een unieke oplossing, wat als er meer oplossingen zijn?

Vector: lijst nummers

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

of:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

~~Vectors~~ ~~heeft~~

Vector vermenigvuldigen:

$$c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \dots \\ cx_n \end{pmatrix}$$

Vectors optellen (met dezelfde lengte):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \dots + \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Lineaire onafhankelijkheid: Een set met vectoren is lineair onafhankelijk als geen enkele vector in de set kan worden geschreven als een lineaire combinatie van de andere vectoren in de set.

vb. $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Niet lineair onafhankelijk want $v_3 = v_1 + v_2$

vb. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Wel lineair onafhankelijk

Lineaire onafhankelijkheid bepalen:

Een set vectoren is lineair onafhankelijk dan en slechts dan als

$$a_1 \cdot v_1 + \dots + a_n \cdot v_n = 0 \iff a_1 = \dots = a_n = 0$$

Dus: er zijn geen a's die niet nul zijn.

~~Lineaire~~ ~~afhankelijkheid~~

~~Een set vector~~

Stappenplan:

Om te kijken of een set met vectoren onafhankelijk is.

1. Schrijf de vectoren als kolommen van een matrix
2. Converteer de matrix naar Echelon vorm.
3. Tel de ~~piv~~ Pivots

→ # pivots = # kolommen
↳ onafhankelijk (alleen 0 als oplossing)

→ # pivots < # kolommen
↳ afhankelijk

$a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ is altijd een oplossing.

Vb.

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \\ 2a_1 - a_2 + 5a_3 = 0 \\ 3a_1 + 4a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pivots : 2

$\Downarrow$

\# pivots < \# kolommen dus meerdere oplossingen dus afhankelijk

Homogene systemen : Een systeem is homogeen als er alleen nullen zijn na de streep |.

Generale oplossing : een oplossing die de ruimte van de andere oplossingen bepaald.

Basis oplossingen : De oplossingen die nodig zijn om homogene systemen op te lossen.

Het vinden van basisoplossingen: (Homogene Systemen)

I

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pivot variabele: een variabele met een Pivot in de kolom (x_1 en x_3)

Vrije variabele: een variabele zonder een Pivot in de kolom (x_2, x_4 en x_5)

1. # basisoplossingen = # variabelen − # pivots

$5 - 2 = 3$ basis oplossingen

2. $$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 4x_4 - x_5 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_4 - x_5 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases}$$

Schrijf Pivots in termen van niet Pivots.

3. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_4 - x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) ~~Schrijf~~ We kunnen basis oplossingen vinden door alle vrije variabelen 1 voor 1 op 1 te zetten en de andere variabelen op 0.

Dus:

$$\begin{array}{ccc} x_2=1 & x_2=0 & x_2=0 \\ x_4=0 & x_4=1 & x_4=0 \\ x_5=0 & x_5=0 & x_5=1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_4 - x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu is de generale oplossing:

$$x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_4 - x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Deze basisoplossingen zijn automatisch lineair onafhankelijk.

II

1. $$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 \end{pmatrix}$$

2 pivots dus $4-2=2$ basisoplossingen

2. Hou alleen 1 kolom zonder pivot tegelijk.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \text{oplossing}: (x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 0)$$

Voeg nu voor alle variabelen die niet in de matrix standen een 0 toe.

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, 0, 0)$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \text{oplossing}: (x_1, x_3, x_4) = (4, 1, -1)$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 0, 1, -1)$

3. Check: (dat alle vectoren 0 opleveren)

$$c_1 \cdot (4,0,1,-1) + c_2 \cdot (1,-1,0,0)$$
$$= (4 \cdot c_1, 0, 1 \cdot c_1, -1 \cdot c_1) + (1 \cdot c_2, -1 \cdot c_2, 0, 0)$$
$$= (4c_1 + c_2, -c_2, c_1, -c_1)$$
$$= (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(4c_1 + c_2) - c_2 + 4 \cdot -c_1 = 0$$
$$2c_1 - 2c_1 = 0 \quad \checkmark$$

~~Het vinden van basisoplossingen: (Non-homogene systemen)~~

4. $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ \quad\; y + 3z = 4 \end{cases}$

met oplossingen $(0,7,1)$ en $(5,4,0)$

$\downarrow$

$(0,7,1) = (5,4,0) + (-5,3,1)$

Het vinden van oplossingen: (Non-homogene systemen)

1.
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

2 ~~Ba~~ basisoplossingen

Om "particular" oplossingen te vinden halen we alle non-pivot rijen weg.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

2 Zoek de oplossingen: $(10, -11, 4)$

↓

Zet een 0 op de plaats van de overige variabelen

↓

$(10, 0, -11, 0, 4)$

↳ "particular" oplossing

3. Nu gaan we alle non-pivot rijen één voor één weghalen (in het homogene systeem):

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

De basisoplossingen worden gevonden door steeds één non-pivot vrij te houden.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ en } \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$(1, -2, 1, 0) \text{ en } (-1, 1, 0, 0)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$(1, 0, -2, 1, 0) \text{ en } (-1, 1, 0, 0, 0)$$

4. Alle oplossingen: (generale oplossing)

$$\underbrace{(10, 0, \cancel{-4}\,0, 0, 4)}_{\text{particular}} + \underbrace{c_1 \cdot (1, 0, -2, 1, 0) + c_2 \cdot (-1, 1, 0, 0, 0)}_{\text{basisoplossingen}}$$

~~IV~~ ~~IE~~ III Commutative monoid: ~~a set wil~~ een set met opelling

vb. $(S, +, 0)$

Een commutative monoid heeft bepaalde eigenschappen:

1. $a + b = b + a$
2. $(a+b)+c = a + (b+c)$
3. $0 \in S$

~~(Lofteel een set met plus)~~

Elke set met getallen is een commutative monoid $(\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \ldots)$

Ook $\mathbb{R}^n$:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$0 := (0, \ldots, 0)$$

Linear combination:

$$a \cdot v + b \cdot w = u$$

Een linear combination kan worden gemaakt met sets die beschikken over optelling en $\underbrace{\text{scalar multiplication}}_{\text{vermenigvuldigen met } \in \mathbb{R}}$.

Vector space: een set met optelling $(V, +, 0)$ en een extra operatie: " $\cdot$ "

de "$\cdot$" houdt zich aan de volgende afspraken:

1. $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$
2. $(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$

~~3. $a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$~~

3. $a \cdot (b \cdot v) = \underbrace{ab}_{\text{vermenigvuldiging met reële getallen}} \cdot v$

4. $1 \cdot v = v$
5. $0 \cdot v = 0$

Een vector space is een Set V met een speciaal element $0 \in V$ en twee operaties '$+$' en '$\cdot$':

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$
2. $v+w = w+v$
3. $v+0 = v$
4. $a \cdot (v+w) = a \cdot v + a \cdot w$
5. $(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
6. $a \cdot (b \cdot v) = ab \cdot v$
7. $1 \cdot v = v$
8. $0 \cdot v = 0$

Voor alle $u, v, w \in V$ en $a, b \in \mathbb{R}$

Sommige subsets van $V \in \mathbb{R}^n$ zijn ook vector spaces:

$$V = \{(v_1, v_2, 0) \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$
$$W = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Als de subsets voldoen aan '$+$' en '$\cdot$' dan zijn het subspaces:

- $v, w \in V \longrightarrow v + w \in V$
- $v \in V, a \in \mathbb{R} \longrightarrow a \cdot v \in V$

→ De set van oplossingen van een homogenius system is een vector space.

Functies: een fuctie f is een operatie die elementen van X naar een andere set Y.

$$f: X \longrightarrow Y \quad \text{of} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

X is het domein en Y is het codomein

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z: \quad g \circ f: X \longrightarrow Z$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Linear map: een linear map is een functie die alle extra dingen van de sets $(+, \cdot, 0)$ behoud.

$$f: V \longrightarrow W$$

- $f(v + v') = f(v) + f(v')$
- $\underbrace{f(a \cdot v)}_{\text{in } V} = \underbrace{a \cdot f(v)}_{\text{in } W}$
- $f(0) = 0$
- $f(-v) = -f(v)$

IV - Vector spaces zijn speciale verzamelingen met elementen die vectors genoemd worden.

- Vectors kunnen bij elkaar opgeteld of vermenigvuldigd worden met een reëel getal.

$$v + w \in V \qquad a \cdot v \in V$$

$$v, w \in V \; ; \; a \in \mathbb{R}$$

- Lineaire maps: een functie die twee dingen behoud.

$$f(v + w) = f(v) + f(w) \qquad f(a \cdot v) = a \cdot f(v)$$

→ Matrices zijn een handige manier om linear maps te representeren.

Basises van vector spaces:

Basis: een Basis van vectoren voor een vector space zijn de vectoren waarmee alle elementen uit een vector space met behulp van lineaire combinaties kan worden gemaakt.

vb. vector space : $\mathbb{R}^3$

$$\underbrace{(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \quad (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3 \quad (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3}_{\text{basis van vector space } \mathbb{R}^3}$$

$$(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$$
$$= x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)$$

→ Een basis is zo klein mogelijk!
↳ de vectoren zijn lineair independent

Dus: vectoren vormen een basis voor een vector space
<u>als</u>: - ze lineair afhankelijk zijn
- ze de hele vector space kunnen bereiken

Notation:

Basis $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$

$v \in V$

$v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$

new notation

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}_\beta$$

vb Linear map: $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3)$

Deze lineaire map is geheel bepaald door de basis vectoren:

$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$

$\downarrow$

$f((1,0,0)) = (1, 0)$
$f((0,1,0)) = (-1, 1)$
$f((0,0,1)) = (0, 1)$

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= f((x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)) \\
&= f(x_1 \cdot (1,0,0) + x_2 \cdot (0,1,0) + x_3 \cdot (0,0,1)) \\
&= f(x_1 \cdot (1,0,0)) + f(x_2 \cdot (0,1,0)) + f(x_3 \cdot (0,0,1)) \\
&= x_1 \cdot f((1,0,0)) + x_2 \cdot f((0,1,0)) + x_3 \cdot f((0,0,1)) \\
&= x_1 \cdot (1,0) + x_2 \cdot (-1,1) + x_3 \cdot (0,1) \\
&= (x_1 - x_2, x_2 + x_3)
\end{aligned}
$$

We kunnen deze data in een 2×3 matrix zetten:

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Als we dan f toepassen met een nieuwe manier van vermenigvuldigen:

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & 0 \\ \cancel{x_1}\,0 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}
$$

Vermenigvuldiging:

$$A \cdot b = c$$

$$\begin{pmatrix} a_{\vdots} & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i1}b_1 + \ldots + a_{in}b_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ c_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

vb.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f((1, 2, -1)) = (1-2, 2-1) = (-1, 1)$$

Maar we kunnen ook de matrix vermenigvuldigen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + -1 \cdot 2 + 0 \cdot -1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

From matrix to linear map.

vb matrix: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

→ De matrix heeft 3 kolommen (input) en 2 rijen (output) dus een lineaire map van R^3 naar R^2

$$f: R^3 \longrightarrow R^2$$

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - x_3, 5x_1 + x_2 - 3x_3)$$

Projecties: De lineaire maps die meer dimensies naar minder dimensies toe projecteren

$$f: R^n \longrightarrow R^{m<n}$$

↓

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lineaire maps kunnen ook van vector space naar vector space:

$$f : V \longrightarrow W$$

Maar dan moeten er basissen gedefinieerd zijn:

$$\beta := \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$$
$$\mathcal{C} := \{w_1, \ldots, w_m\} \subset W$$

Dan:

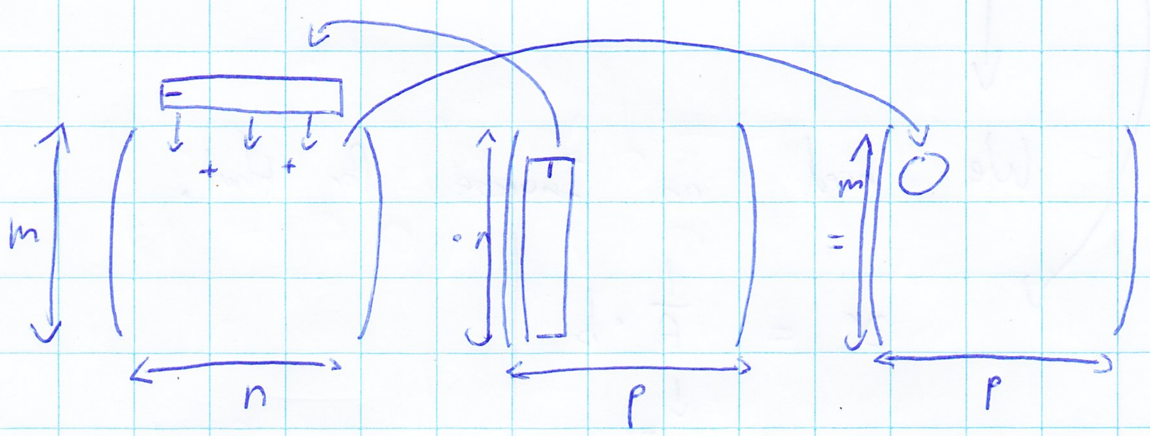
$$f(x) = A \cdot x$$

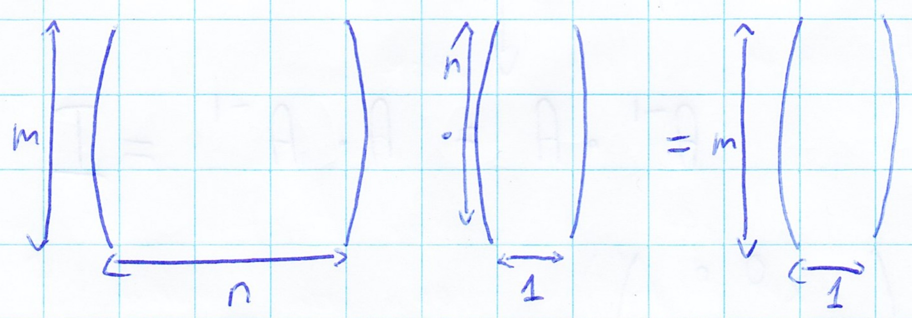
A is de ~~matrische~~ matrix met i'de kolom $f(v_i)$ geschreven wordt als:

$$f(v_i) = a_{1i} w_1 + \ldots + a_{mi} w_m = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Matrix vermenigvuldiging:

Van een matrix $m \times n$ en een matrix $n \times p$ naar matrix $m \times p$:





V System of equations:

$$A \cdot x = b$$

Goal: to solve x in terms of A and B.

$\downarrow$

We need an Inverse for that.

$$x = \frac{1}{A} \cdot b$$

$$\frac{1}{A} \rightarrow A^{-1}$$

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Not all matrices have invases.</u>

Finding an Inverse:

augmented matrix: $(A|B)$
matrix: C

$$C \cdot (A|B) = (C \cdot A \mid C \cdot B)$$

$$\downarrow$$

To find an inverse: $(A|I) = (I \mid A^{-1} \cdot I)$
$= (I \mid A^{-1})$

vb. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Then:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

So: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Not every matrix has an inverse:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

We need n pivots so B does not have an inverse

$\downarrow$

An $n \times n$ matrix has an inverse if and only if it has n pivots in its echelon form.

Explicitly computing an inverse

↓

We need to find A^{-1} for $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax+bu & \overset{ay+bv}{\cancel{cx+du}} \\ cx+du & cy+dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

This becomes a system of 4 equations:

$$\begin{cases} ax+bu = 1 \\ cx+du = 0 \\ ay+bv = 0 \\ cy+dv = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+bu = 1 \\ cx+du = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ay+bv = 0 \\ cy+dv = 1 \end{cases}$$

↓

$$u = \frac{-c}{ad-bc} \quad x = \frac{d}{ad-bc} \quad v = \frac{a}{ad-bc} \quad y = \frac{-b}{ad-bc}$$

Conclusion :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -b \\ \frac{-c}{ad-bc} & \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

A 2×2 matrix has an inverse if and only if $ad - bc \neq 0$.

Determinants : For a matrix A, the determinant $\det(A)$ is a number (in $\mathbb{R}$)

If $\det(A) = 0 \iff A$ is not ~~determinant~~ invertible
$\iff A^{-1}$ does not exist
$\iff A$ has $< n$ pivots in its echelon form.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

For a 3x3 matrix this is different

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = +a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

For two nxn matrices:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Transforming bases

Basis B: $\{(100,0),(100,1)\}$

To write basis B as a standard basis:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B = x \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 100x + 100y \\ \cancel{4}y \end{pmatrix}_S = T_{B \to S}$$

To transform back we need a matrix $T_{S \to B}$ whitch is the inverse of $T_{B \to S}$

$$(T_{B \to S})^{-1} = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

To transform to another basis, we first transfer to the standard basis and then to the other basis:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

We need to find a' and b' such that:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_B$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \circ \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_{B \Rightarrow C}} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

VI

Multiplying matrices is hard:

- transform matrice to diagonal matrix

$\downarrow$

multiplying diagonal matrices is easy.

Vb

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}_S \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}_B$$

We need to find basis B in ~~which~~ which the matrix is diagonal.

$\downarrow$

B consists of eigenvectors of a matrix

Assume an $n \times n$ matrix A.
An eigenvector for A is a non-zero vector $v \neq 0$ which there is an eigenvalue $\lambda \in \mathbb{R}$ with:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ is an eigenvector for

$$P = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$ with $\lambda = 1$

An eigenvector has at most one eigenvalue.

and

If v is an eigenvector, then so is $a \cdot v$ with $a \neq 0$

To find eigenvectors, we first need to find eigenvalues:

Finding eigenvalues:

we need $\det(A - \lambda \cdot I) \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda) - 5 \cdot 3 = 0$$

$$(\lambda - 6)(\lambda + 2) = 0 \longrightarrow \lambda = 6 \,\|\, \lambda = -2$$

Solving x^3 functions:

$$-\lambda^3 + 2x^2 + \lambda - 2 = 0$$

first try "obvious" solutions

$\lambda = 1$ works

now rewrite the ~~function~~ equation

$$-\lambda^3 + 2x^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(a\lambda^2 + b\lambda + c)$$
$$= a\lambda^3 + (b-a)\lambda^2 + (c-b)\lambda - c$$

$a = -1$, $b = 1$, $c = 2$

⋮

v

solutions: $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = 2$

Eigenvectors : once we have eigenvalues λ_i for matrix A, we can find eigenvectors v_i with $\vec{A} \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i$

For finding eigenvectors, we need to solve:

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot v = 0$$

Suppose $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ with eigenvalues $\lambda = -2$ & $\lambda = 6$

$\lambda=-2$: $A - \lambda \cdot I = \begin{pmatrix} 1+2 & 5 \\ 3 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

We need to solve:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$$

$x = -5$ & $y = 3$ so $(-5, 3)$ or $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ is an eigenvector.

Wa

We can check the solution by:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

$$\downarrow$$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+15 \\ -15+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \cdot v$$

for $\lambda = 6$, the eigenvector $= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

~~Now we have basis~~ $\cancel{\beta = \{v_1, \dots, v_{m}\}}$

Now we have basis $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ where v_i is an eigenvector.

- v_1 to v_n are linearly independent

And: (2.2.2.)

- There is an invertible basis transformation matrix $T_{B \Rightarrow S}$ giving a diagonalization:

$$A = T_{B \Rightarrow S} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}} \cdot T_{S \Rightarrow B}$$

representation of A with respect to the eigenvector basis B

It may happen that a particular eigenvalue occurs multiple times for a matrix.

If an eigenvalue λ occurs n times, then there are at most n independent eigenvectors for this λ

- linear combinations of eigenvectors with the same eigenvalue λ are also eigenvectors with eigenvalue λ

We can calculate a matrix^n by this formula:

$$P^n = T \cdot \text{matrix}^n \cdot T^{-1}$$

Where T is the transformation matrix

consists of eigenvectors

inverse of T

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

VII

Each vector v has a length $\|v\|$ calculated as:

$$v = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Distance between two vectors:

$$v = (x_1, \dots x_n)$$
$$w = (y_1, \dots y_n)$$

$$d(v, w) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$
$$= \|v - w\|$$
$$= \|w - v\|$$

Inner products:

For $v = (x_1, \dots, x_n)$

$w = (y_1, \dots, y_n)$

The inner product $\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

Note: $\|v\|$ can be written as: $\sqrt{\langle v, v \rangle}$

Transposition: for a matrix A, the transpose A^T is a matrix A mirrored in its diagonal.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ & \vdots & \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

The inner product of two vectors is then:

$$\langle v, w \rangle = v^T \cdot w = (x_1, \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$(= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)$$

Properties of the inner product:

1. Symmetry: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
2. Linearity:

$$\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$$
$$\langle av, w \rangle = a \langle v, w \rangle$$

3 Positive definite:

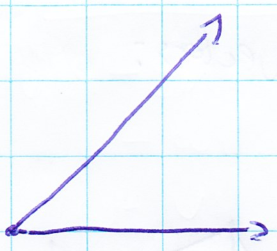
$$v \neq 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle > 0$$

Angles:

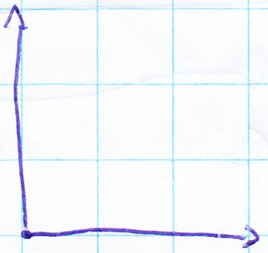
$v = w = (1,0)$:

$\langle v, w \rangle = 1$

As we start rotating w, $\langle v, w \rangle$ goes to 0

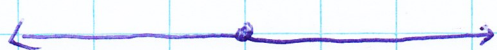


$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}$



$\langle v, w \rangle = 0$

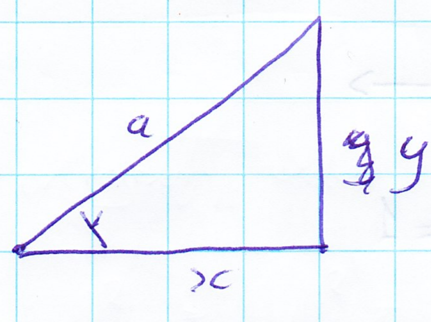
And then -1:



$\langle v, w \rangle = -1$

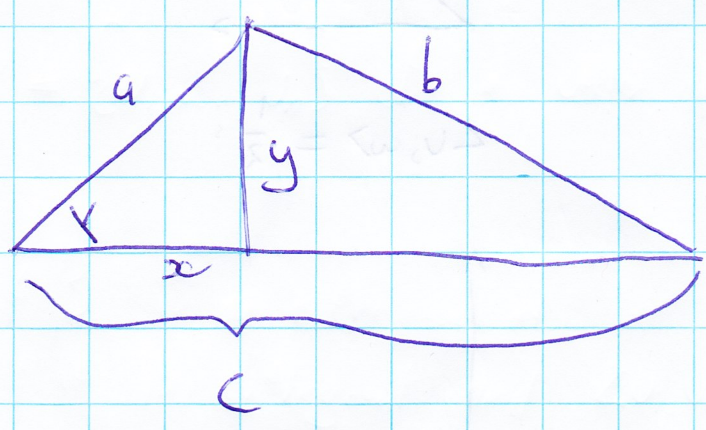
$\langle u, w\rangle$ has something to do with the cosine

Definition:

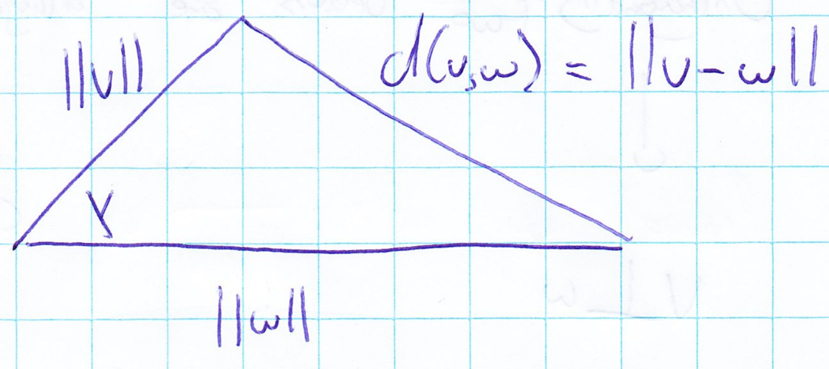


$$\cos(\gamma) = \frac{x}{a} \longrightarrow x = a \cdot \cos(\gamma)$$

Translating to vectors:



$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



$$\cos(\gamma) = \frac{\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2}{2\|v\|\,\|w\|}$$

$$= \frac{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}^{\,2} + \sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}^{\,2} - \sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}^{\,2}}{2\|v\|\,\|w\|}$$

$$= \frac{x_1^2+\dots+x_n^2 + y_1^2+\dots+y_n^2 - (x_1-y_1)^2 - \dots - (x_n-y_n)^2}{2\|v\|\,\|w\|}$$

$$= \frac{x_1^2+\dots+x_n^2 + y_1^2+\dots+y_n^2 - x_1^2 - y_1^2 + 2x_1y_1 + \dots - x_n^2 - y_n^2 + 2x_ny_n}{2\|v\|\,\|w\|}$$

$$= \frac{2x_1y_1+\dots+2x_ny_n}{2\|v\|\,\|w\|}$$

$$= \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \longrightarrow \cos(\gamma) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$$

Orthogonality: two vectors are orthogonal if $\langle v, w \rangle = 0$

$v \perp w$

cosine $= 0$

For two orthogonal vectors:

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

If a set of vectors is orthogonal, they are also independent, but not the other way around.

A Basis $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ of a vector space is called:

- Orthogonal if β is an orthogonal set
- Orthonormal if it is orthogonal and $\langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\| = 1$

Orthonormal basis:

Calculating $T_{B=>S}$ is easy, it's just all vectors written as columns.

$$\begin{pmatrix} \\ \\ v_1 & v_2 & \dots & v_i \\ \\ \\ \end{pmatrix} = T_{B=>S}$$

And $T_{S=>B} = (T_{B=>S})^T$

Transforming a Basis to a orthogonal basis.

Independent set $\{v_1, \dots, v_n\}$

1. Take $v_1' = v_1$
2. Take $v_2' = v_2 - \dfrac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$
3. Set $v_i' = v_i - \dfrac{\langle v_i, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' - \dots - \dfrac{\langle v_i, v_{i-1}' \rangle}{\langle v_{i-1}', v_{i-1}' \rangle} v_{i-1}'$
4. Set $\{v_1', \dots, v_n'\}$ is now ~~orthogonal~~ orthogonal

Transforming a orthogonal basis to a orthonormal basis:

5. Replace v_i with $\frac{1}{\|v_i\|} v_i$

$$v_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i$$