231 **3. a)** Der Stützvektor muss ein Ortsvektor eines Punktes der Ebene sein, und der Richtungsvektor der Geraden muss eine Linearkombination der Richtungsvektoren der Ebene sein.
Beispiele:

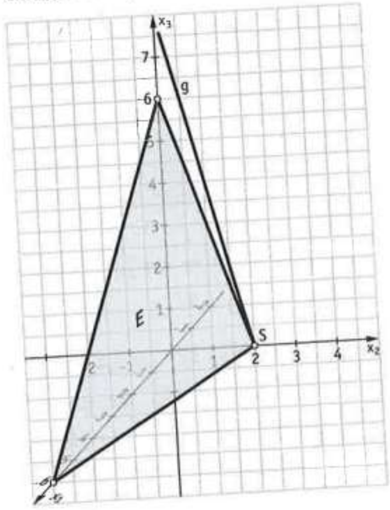
$$g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$$

$$g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$$

$$g_3:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$$

b) Ist der Richtungsvektor der Geraden eine Linearkombination der Richtungsvektoren der Ebene, so sind Ebene und Gerade parallel.

231 **4.** Andreas hat den Ortsvektor des Schnittpunktes über die Darstellung der Geraden parametrisiert und diese Darstellung in die Koordinatengleichung der Ebene eingesetzt. Das resultierende Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung für den Parameter, somit existiert der Schnittpunkt.



232 **5.** Parameterdarstellung der Trägergeraden des Seils:

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}8\\11\\21\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Ortsvektor des Schnittpunkts: $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}8+t\\11+3t\\21+4t\end{pmatrix}$

Dieser Ortsvektor muss auch die Ebenengleichung erfüllen; Einsetzen liefert $t = -4$.
Aus der Parameterdarstellung der Geraden folgt $S(4\,|\,-1\,|\,5)$, dies ist ungefähr der Punkt, an dem die Verankerung angebracht werden sollte.

6. a) (1) $S(-3\,|\,8\,|\,1)$
(2) keine Lösung, $g \parallel E$
(3) keine Lösung, $g \parallel E$
(4) g liegt in E

b) g und E haben den gleichen Stützvektor.
Richtungsvektor von g ist auch Richtungsvektor von E.

232

7. (1) Gerade und Ebene sind parallel, sie haben keinen Schnittpunkt.
(2) Gerade liegt in der Ebene.
(3) Gerade und Ebene schneiden sich in einem Punkt.

8. a) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$

$(1+2s)-2(2+s)-3(3-3s)=6 \Leftrightarrow s=2$

$S\,(5\mid 4\mid -3)$

b) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$2(0+s)-(3+2s)+2(2+3s)=3 \Leftrightarrow s=\frac{1}{3}$

$S\left(\frac{1}{3}\middle|\ \frac{11}{3}\middle|3\ \right)$

c) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$(-4+s)+20-s=16 \Leftrightarrow 16=16$

Die Gerade liegt in der Ebene.

d) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

$4\cdot(-1)+-4=-8 \Leftrightarrow -8=-8$

Die Gerade liegt in der Ebene.

233

9. a) Z. B.: g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}12\\13\\2\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$

b) Z. B.: g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$

oder g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$

233

9. c) Z. B.: g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$

oder g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$

10. a) Z. B.: E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

b) Z. B.: E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

11. Ebene $P_1P_2P_3$: $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{P_1P_2}+\mu\overrightarrow{P_1P_3}$

Gerade AB: $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\varphi\cdot\overrightarrow{AB}$

$\lambda\overrightarrow{P_1P_2}+\mu\overrightarrow{P_1P_3}-\varphi\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP_1}$

Für einen Schnittpunkt müssen wir Parameter λ, μ und φ finden.

$\lambda\begin{pmatrix}-7\\5\\-3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}14\\-10\\-2\end{pmatrix}-\varphi\begin{pmatrix}-3\\3\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-14\end{pmatrix}$

$\lambda=1,\ \varphi=\frac{2}{3}$ und $\mu=\frac{1}{2}$.

$S(-1\mid 3\mid 1)$

12

12. Das Tauchboot taucht auf im Punkt ([redacted] | 0 | 0).

13. Der Parameter der Geraden r hat die gleiche Bezeichnung wie einer der Parameter der Ebene. Der Parameter der Geraden sollte t genannt werden. Es müssen 3 unterschiedliche Parameter sein.

14. Für a = −1 sind die 3 Richtungsvektoren linear abhängig und somit Ebene und Gerade parallel. Der Stützvektor der Geraden liegt nicht in der Ebene.

233

15. Ebene, in der das Parallelogramm liegt:

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt von g mit E: $\left(-\frac{31}{9} \mid -\frac{59}{36} \mid \frac{109}{12}\right)$

für Parameterwerte $s = \frac{109}{72} > 1$ und $r = -\frac{20}{9} < 0$.

Alle Punkte des Parallelogramms werden beschrieben für Parameterwerte $0 \le s \le 1$ und $0 \le r \le 1$.

Die Gerade trifft nicht das Parallelogramm.