5 Dreieck

a) Zielfunktion $z(u) = u \cdot (f(u) - g(u))$

$z(u) = u \cdot \left(-u + 4 - \frac{1}{3}u + 4\right)$

$z(u) = u \cdot \left(-\frac{4}{3}u + 8\right)$

$z(u) = -\frac{4}{3}u^2 + 8u$

$z'(u) = -\frac{8}{3}u + 8;\quad z''(u) = -\frac{8}{3}$

$z'(u) = 0$

$-\frac{8}{3}u + 8 = 0 \quad | -8$

$-\frac{8}{3}u = -8 \quad | : \left(-\frac{8}{3}\right)$

$u = \frac{8 \cdot 3}{8} = 3$

Rechteck: $a = 3$

$b = f(3) - g(3) = 1 - (-3) = 4$

$A_{Rechteck} = 3 \cdot 4 = 12$ FE

b) Dreieck: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} g \cdot h$ mit g als Seite auf der y-Achse und h als Senkrechte vom Schnittpunkt von f und g zur y-Achse $g = 4 - (-4) = 8$.

Berechnung von h:
Schnittpunkt von f und g

$-x + 4 = \frac{1}{3}x - 4 \quad | -\frac{1}{3}x + 4$

$-\frac{4}{3}x + 8 = 0 \quad | +8$

$-\frac{4}{3}x = -8 \quad | : \left(-\frac{4}{3}\right)$

$x = \frac{8 \cdot 3}{4} = 6 \quad \Rightarrow \quad h = 6$

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$

$A_{Rechteck} : A_{Dreieck} = 12 : 24 = 1 : 2$

6 Rechtwinkliges Dreieck

a) $\frac{5}{x-4} + 5 = 0 \quad | -5$

$\frac{5}{x-4} = -5 \quad | \cdot (x-4)$

$5 = -5(x-4)$

$5 = -5x + 20 \quad | +5x - 5$

$5x = 15 \quad | : 5$

$x = 3$

b) Zielfunktion $z(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u)$

$z(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot \left(\frac{5}{u-4} + 5\right)$

$z(u) = \frac{1}{2}u \cdot \frac{5}{u-4} + \frac{5}{2}u$

c) $z'(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{u-4} + \frac{1}{2}u \cdot \frac{-5}{(u-4)^2} + \frac{5}{2}$ (Produktregel)

$z'(u) = \frac{5}{2 \cdot (u-4)} - \frac{5u}{2 \cdot (u-4)^2} + \frac{5}{2} = 0 \quad | \cdot 2 \cdot (u-4)^2$

$5 \cdot (u-4) - 5u + 5(u-4)^2 = 0$

$5u - 20 - 5u + 5(u^2 - 8u + 16) = 0$

$-20 + 5u^2 - 40u + 80 = 0$

$5u^2 - 40u + 60 = 0 \quad | : 5$

$u^2 - 8u + 12 = 0$

Lösung mit der abc- oder pq-Formel:
$u_1 = 6$ scheidet aus
$u_2 = 2$

$z(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{5}{-2} + 5\right)$

$z(2) = 2{,}5$

Da $z(0) = 0$ und $z(3) = 0$, ist das Dreieck mit $x = 2$ und $f(2) = 2{,}5$ am größten: 2,5 FE.

7 Kreis

Die Zielfunktion z(u) ist der Abstand vom Kreismittelpunkt P zu einem beliebigen Punkt $\left(u \middle| -\frac{1}{2}u - 1\right)$ der Geraden:

$z^2 = a^2 + b^2$

$a = u - 0 = u$

$b = f(u) - 4$

$z(u) = \sqrt{u^2 + \left(-\frac{1}{2}u - 1 - 4\right)^2}$

$z(u) = \sqrt{u^2 + \left(-\frac{1}{2}u - 5\right)^2}$

$z(u) = \sqrt{u^2 + \frac{1}{4}u^2 + 5u + 25}$

$z(u) = \sqrt{\frac{5}{4}u^2 + 5u + 25} = \left(\frac{5}{4}u^2 + 5u + 25\right)^{\frac{1}{2}}$

$z'(u) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{4}u^2 + 5u + 25\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5}{2}u + 5\right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{4}u^2 + 5u + 25}} \cdot \left(\frac{5}{2}u + 5\right) = 0$

$\frac{5}{2}u + 5 = 0 \quad | -5$

$\frac{5}{2}u = -5 \quad | : \frac{5}{2}$

$u = -2$

$z(-2) = \sqrt{\frac{5}{4} \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 25}$

$z(-2) = \sqrt{5 - 10 + 25} = \sqrt{20} \approx 4{,}47 > 4$

Der kleinste Abstand ist größer als 4; daher schneidet der Kreis um P nirgends die Gerade.

Alternative Lösung:
Du kannst diese Abstands-Aufgaben auch oft mit der Normalen lösen:
Steigung der Normalen zu g durch P:

$m_n = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$

Normale n: $y = 2x + 4$ (mit der Form $y = m \cdot x + b$)

n X g: $2x + 4 = -\frac{1}{2}x - 1 \quad | +\frac{1}{2}x - 4$

$2{,}5x = -5 \quad | : 2{,}5$

$x = -2 \qquad S(-2|0)$

Abstand $|\overline{SP}| = \sqrt{(0+2)^2 + (4-0)^2}$

$|\overline{SP}| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} > 4$

$z'(t) = 2 - 4{,}5t^{-2} = 2 - \frac{4{,}5}{t^2}$

$z''(t) = 9t^{-3} = \frac{9}{t^3}$

$z'(t) = 0$

$4{,}5t^{-2} = 2 \quad | \cdot t^2$

$4{,}5 = 2t^2 \quad | : 2$

$2{,}25 = t^2$

$t_1 = 1{,}5; \; t_2 = -1{,}5$

t_2 ist nicht im Definitionsbereich, da $t > 0$.

$z''(1{,}5) = \frac{8}{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Tiefpunkt

Für $t \approx 1{,}5$ wird der Flächeninhalt des beschriebenen Dreiecks am kleinsten.

TRAINING 6

1 Gemeinsame Punkte

a) Gemeinsame Punkte: $f(x) = g(x)$

$0{,}5x^2 - 0{,}5x + 2{,}5 = 0{,}5x - 1 \quad | -0{,}5x + 1$

$0{,}5x^2 - x + 3{,}5 = 0 \quad | : 0{,}5$

$x^2 - 2x + 7 = 0$

Lösung mit pq- oder abc-Formel führt zu negativem Wert unter der Wurzel $\Rightarrow$ keine Lösung, also keine Schnittpunkte.

b) Zielfunktion $z(u) = f(u) - g(u)$

$z(u) = 0{,}5 \cdot u^2 - u + 3{,}5$

$z'(u) = u - 1; \; z''(u) = 1$

Extempunkt:

$z'(u) = 0$

$u - 1 = 0$

$z''(1) = 1 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt

$u = 1$

$z(1) = 0{,}5 - 1 + 3{,}5 = 3{,}5$ LE

2 Senkrechter Abstand

a) $\frac{4}{x+1} = -x + 4 \quad | \cdot (x+1)$

$4 = (-x + 4) \cdot (x + 1)$

$4 = -x^2 - x + 4x + 4$

$4 = -x^2 + 3x + 4$

$x^2 - 3x = 0$

$x \cdot (x - 3) = 0$

1. $x_1 = 0; \; g(0) = 4 \Rightarrow S_1(0|4)$
2. $x - 3 = 0$

   $x_2 = 3; \; g(3) = -3 + 4 = 1 \Rightarrow S_2(3|1)$

b) $f(1) = \frac{4}{2} = 2$

$g(1) = -1 + 4 = 3$

$\Rightarrow \; g(x) > f(x)$ für $0 < x < 3$

Zielfunktion $z(u) = g(u) - f(u); \; 0 < u < 3$

$z(u) = -u + 4 - \frac{4}{u+1}$

$z'(u) = -1 + \frac{4}{(u+1)^2} = 0 \quad | \cdot (u+1)^2$

$-(u+1)^2 + 4 = 0$

$-u^2 - 2u - 1 + 4 = 0 \quad | \cdot (-1)$

$u^2 + 2u - 3 = 0$

Lösung mit der abc- oder pq-Formel:

$u_1 = -3$ scheidet aus

$u_2 = 1$

$z(1) = -1 + 4 - \frac{4}{1+1} = 3 - 2 = 1$ LE

3 Abstand und Tangente

a) $f'(x) = -0{,}2x^3 + 0{,}75x^2 + 0{,}8$

$f'(0) = -0{,}8$

Ursprungsgerade: $y = m \cdot x$

$t: \; y = 0{,}8x$

b) Zielfunktion $z(u) = f(u) - t(u)$

$z(u) = -0{,}05u^4 + 0{,}25u^3 + 0{,}8x - 0{,}8x$

$= -0{,}05u^4 + 0{,}25u^3$

c) $z'(u) = -0{,}2u^3 + 0{,}75u^2 = 0; \; z''(u) = -0{,}6u^2 + 1{,}5u$

$u^2(-0{,}2u + 0{,}75) = 0$

1. $u_1 = 0$: $z(0) = 0 \Rightarrow$ Randminimum

2: $-0{,}2u + 0{,}75 = 0 \quad | -0{,}75$

$-0{,}2u = -0{,}75 \quad | : (-0{,}2)$

$u = 3{,}75; \quad z''(3{,}75) = -2{,}8125 < 0$: Hochpunkt

4 Parabel

a) Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 2$

Abstand von $(0|2)$ zum Ursprung: $d = 2$ LE

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$

$-0{,}5x^2 + 2 = 0 \quad | -2$

$-0{,}5x^2 = -2 \quad | : (-0{,}5)$

$x_2 = 4$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad d = 2$

b) Mit $a = 0$ und $b = 0$, da der betrachtete Punkt $P(a|b)$ der Ursprung ist.

Zielfunktion $z(u) = \sqrt{u^2 + (f(u))^2}$

$z(u) = \sqrt{u^2 + (-0{,}5u^2 + 2)^2}$

$z(u) = \sqrt{u^2 + 0{,}25u^4 - 2u^2 + 4}$

$z(u) = \sqrt{0{,}25u^4 - u^2 + 4} = (0{,}25u^4 - u^2 + 4)^{\frac{1}{2}}$

c) $z'(u) = \frac{1}{2}(0{,}25u^4 - u^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (u^3 - 2u)$

$= \frac{1}{2\sqrt{0{,}25u^4 - u^2 + 4}} \cdot (u^3 - 2u) = 0$

$u^3 - 2u = 0$

$u(u^2 - 2) = 0$

1. $u_1 = 0$: $z(0) = 2$ (Teilaufgabe a))
2. $u^2 = 2$

   $u_{2,3} = \pm\sqrt{2}$

   $f(\pm\sqrt{2}) = -0{,}5 \cdot 2 + 2 = 1 \quad \Rightarrow$

   $P_1(\sqrt{2}|1)$ und $P_2(-\sqrt{2}|1)$ haben den kleinsten Abstand.

   $d = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3} = 1{,}73$ LE