Aufgabe

2 Lage von Gerade und Ebene zueinander

a) Wie können eine Gerade und eine Ebene im Raum zueinander liegen? Was bedeuten diese verschiedenen Möglichkeiten in der Lösung des Gleichungssystems?

b) Welcher Fall liegt hier vor?

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-6\end{pmatrix};\quad E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix};\quad r, s, t \in \mathbb{R}$

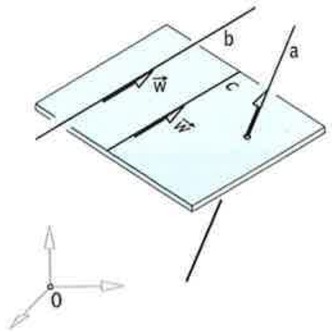
Lösung

a) Es gibt genau drei verschiedene Fälle:

(1) Die Gerade a hat mit der Ebene genau einen Punkt gemeinsam; sie schneidet die Ebene in einem Punkt S. Das bedeutet:
Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

(2) Die Gerade b verläuft parallel zur Ebene und hat mit dieser keinen gemeinsamen Punkt. Das bedeutet:
Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.

(3) Die Gerade c liegt ganz in der Ebene. Das bedeutet:
Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.



b) Wir prüfen, ob die Gerade g und die Ebene E gemeinsame Punkte haben. Wenn die Gerade und die Ebene gemeinsame Punkte haben, so gibt es Werte r, s, und t, die die Vektorgleichung

$\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$ erfüllen, andernfalls nicht.

Durch Umstellen ergibt sich $r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix} - t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}$.

Umgeschrieben erhält man ein Gleichungssystem für r, s und t

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} r & & & - & 2t & = & 0 \\ 2r & - & 3s & - & t & = & -3 \\ -4r & + & 2s & + & 6t & = & 3 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{rcrcrcr} r & & & - & 2t & = & 0 \\ & & s & - & t & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right|$$

```
[[1  0  -2 0 ]
 [2  -3 -1 -3]
 [-4 2  6  3 ]]
rref([A])
   [[1 0 -2 0]
    [0 1 -1 0]
    [0 0 0  1]]
```

Das Gleichungssystem besitzt keine Lösung, da die letzte Zeile eine falsche Aussage ist. Die Gerade und die Ebene haben also keinen Punkt gemeinsam. Dann sagt man:
Die Gerade und die Ebene sind parallel zueinander und haben keine gemeinsamen Punkte.

Weiterführende Aufgaben

3 Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene an den Richtungsvektoren erkennen

a) Gegeben ist die Ebene $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Parameterdarstellung von drei Geraden an, die nicht parallel zueinander sind und die alle in der Ebene E liegen.

b) Wie kann man durch Untersuchen der Richtungsvektoren von Gerade und Ebene feststellen, ob die Gerade zur Ebene parallel ist?

4 Lagebeziehung bei gegebener Koordinatengleichung der Ebene untersuchen

Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene E.

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\4\\12\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix};\quad E\colon x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$

Andreas hat rechts den Schnittpunkt S von g mit E berechnet. Erläutern Sie sein Vorgehen.
Zeichnen Sie die Gerade g und die Ebene E zusammen mit dem Schnittpunkt S.

Beispiel:

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8+4t\\4+t\\12+6t\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} s_1 + 3s_2 + s_3 &= 6 \\ 8 + 4t + 3\cdot(4+t) + 12 + 6t &= 6 \\ 32 + 13t &= 6 \\ 13t &= -26 \\ \underline{t} &\underline{= -2} \end{aligned}$$

$S(0|2|0)$