Aufgabe B2

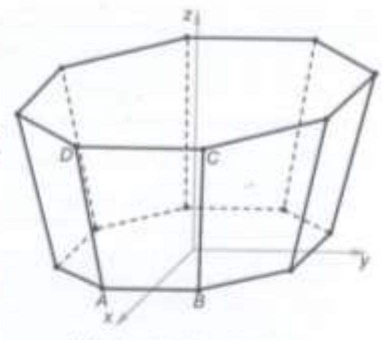

Abbildung (nicht maßstäblich)

Die Abbildung zeigt die Kanzel eines Flughafentowers.

Die Kanzel hat die Form eines Pyramidenstumpfes. Dieser Pyramidenstumpf entsteht, indem von einer geraden Pyramide mit einem regelmäßigen 8-Eck als Grundfläche parallel zu dieser Grundfläche eine kleinere Pyramide abgeschnitten wird.

In diese Kanzel wird ein kartesisches Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) gelegt.

Die Seitenfläche $ABCD$ hat die Eckpunkte $A(3|-3\cdot\sqrt{2}+3|0)$, $B(3|3\cdot\sqrt{2}-3|0)$, $C(4|4\cdot\sqrt{2}-4|4)$, $D(4|-4\cdot\sqrt{2}+4|4)$ und liegt in der Ebene ε .

Die Bodenfläche der Kanzel liegt in der x-y-Ebene. Die z-Achse ist die Symmetrieachse der Kanzel.

2.1. Begründen Sie, dass die Seitenfläche $ABCD$ ein Trapez mit gleichlangen Diagonalen ist. Erreichbare BE-Anzahl: 04

2.2. Zeigen Sie, dass die Ebene ε durch die Gleichung $4\cdot x-z=12$ beschrieben werden kann.

Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den die Seitenfläche $ABCD$ mit der Bodenfläche der Kanzel einschließt. Erreichbare BE-Anzahl: 05

2.3. Untersuchen Sie, für welche Werte von b die Gerade

$$g_b:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\cdot\sqrt{2}-3\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}b^2-3\\1\\2\cdot b\end{pmatrix}\quad(t\in\mathbb{R};b\in\mathbb{R})$$ in der Ebene ε liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

2.4. Der ebene Fußboden des Arbeitsraumes der Fluglotsen befindet sich in der Ebene $z=1$.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche dieses Fußbodens.

Erreichbare BE-Anzahl: 06

2.5. Auf dem Dach der Kanzel werden Antennen errichtet, die in den Punkten $P(2|-3|6)$ und $S_h(1|3|4+h)$ mit $h\in\mathbb{R},h>0$ enden. Zur Stabilisierung werden Stahlseile genutzt, die geradlinig von den Punkten P und S_h zum Mittelpunkt M der Strecke $\overline{CD}$ verlaufen. Dabei schließen die Stahlseile den Winkel $\alpha=\sphericalangle S_hMP$ ein.

Bestimmen Sie die z-Koordinate des Punktes S_h so, dass $\alpha=80°$ ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 06

Achtung: In der folgenden Lösungsdarstellung sind Taschenrechnerbefehle eines anderen Taschenrechner-Typs aufgeführt. Die Lösung habe ich erstmal so übernommen. Ihr könnt eure Ergebnisse also vergleichen.

Es gilt trotzdem, dass Taschenrechnerbefehle kein Lösungsansatz sind und nicht bewertet werden dürfen.

2.1 $\vec{AB}=k\cdot\vec{DC}$ $\quad \begin{pmatrix}0\\6\cdot\sqrt{2}-6\\0\end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix}0\\8\cdot\sqrt{2}-8\\0\end{pmatrix}$ mit $k=\frac{3}{4}$

$|\vec{AC}|=\sqrt{1+(7\cdot\sqrt{2}-7)^2+16}=|\vec{DB}|$

Bei Spiegelung an der x-z-Ebene ist B der Spiegelpunkt von A und C der Spiegelpunkt von D. Damit müssen AC und BD gleich lang sein.

2.2 Punktprobe mit den Punkten

A: $4\cdot3-0=12$

B: $4\cdot3-0=12$

C: $4\cdot4-4=12$

D: $4\cdot4-4=12$

$angle\left(\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\approx104.04°$, also $\alpha=180°-104.04°=75.96°$

2.3 Gerade in die Ebenengleichung einsetzen:

$4\cdot(3+t\cdot(b^2-3))-2\cdot t\cdot b=12$

$t\cdot(4b^2-2b-12)=0$

Da dies für alle $t\in\mathbb{R}$ gelten soll, muss $4b^2-2b-12=0$ gelten.

Das ergibt $b_1=\frac{-3}{2}$ und $b_2=2$.

2.4 Man benötigt A' und B' in 1m Höhe:

$\vec{OA}'=\vec{OA}+\frac{1}{4}\vec{AD}=\begin{pmatrix}3.25\\-3.25\cdot\sqrt{2}+3.25\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{OB}'=\vec{OB}+\frac{1}{4}\vec{BC}=\begin{pmatrix}3.25\\3.25\cdot\sqrt{2}-3.25\\1\end{pmatrix}$

$A=\frac{8\cdot1}{2}\cdot|\overrightarrow{A'B'}|\cdot x_A'\approx35$ also 35 m^2

2.5 $M(4|0|4)$

$solve(angle(\vec{MP},\vec{MS_h}))=80°$

$solve\left(angle\left(\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\3\\h\end{pmatrix}\right)\right)=80°$ ergibt $h\approx3.4598$ also $z\approx7.5$