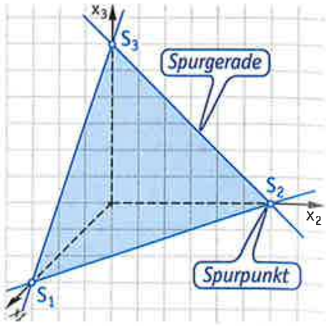
## Weiterführende Aufgaben

*Spurpunkte einer Ebene sind die Schnittpunkte der Koordinatenachsen mit dieser Ebene.*

**1 Schrägbild einer Ebene mithilfe der Spurpunkte zeichnen**

Man kann das Schrägbild einer Ebene leicht zeichnen, wenn man die Ebenenpunkte kennt, die auf den Koordinatenachsen liegen. Diese Punkte heißen **Spurpunkte der Ebene**. Entsprechend nennt man die Schnittgeraden einer Ebene mit den Koordinatenebenen **Spurgeraden der Ebene**.

Skizzieren Sie, wie in der Abbildung rechts, die Ebene E mit der Koordinatengleichung $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12$ mithilfe ihrer Spurpunkte.




**2 Koordinatengleichung mit dem GTR bestimmen**

**a)** Zeigen Sie: Die Ebene mit der Koordinatengleichung $\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_3 = 1$ hat die Spurpunkte $S_1(5\,|\,0\,|\,0)$, $S_2\left(0\,\middle|\,\frac{3}{2}\,\middle|\,0\right)$ und $S_3(0\,|\,0\,|\,-6)$. Erläutern Sie, wie sich aus einer Koordinatengleichung einer Ebene der Form $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = 1$ die Spurpunkte bestimmen lassen.

**b)** Gegeben ist die Parameterdarstellung der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

Rechts ist dargestellt, wie die Koordinatengleichung $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{8}x_3 = 1$ dieser Ebene mithilfe eines GTR bestimmt wurde. Erläutern Sie die Vorgehensweise.

Zeigen Sie, dass die Koordinatengleichung die Ebene E beschreibt.

Zeichnen Sie die Ebene mithilfe ihrer Spurpunkte.

```
[A]
 [[-3 5  8   1]
  [3  5  -16 0]
  [-9 10 8   0]]
```

*In der ersten Zeile stehen die Koordinaten des Stützpunktes und*

*In den anderen Zeilen stehen jeweils die Koordinaten der Richtungsvektoren und eine Null.*

```
rref([A])
[[1 0 0 .333333...
 [0 1 0 .2     ...
 [0 0 1 .125   ...
```

```
Ans▸Frac
 [[1 0 0 1/3]
  [0 1 0 1/5]
  [0 0 1 1/8]]
```

$$\mathrm{rref}\left(\begin{bmatrix} -3 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & -16 & 0 \\ -9 & 10 & 8 & 0 \end{bmatrix}\right) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

*Hier Eingabe über* [▦]

**3 Koordinatengleichungen für Ebenen durch den Koordinatenursprung**

**a)** Zeigen Sie: Geht eine Ebene durch den Koordinatenursprung, so wird sie immer durch eine Koordinatengleichung der Form $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = 0$ beschrieben.

**b)** Gegeben ist die Parameterdarstellung einer Ebene E.

E: $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie, dass die Ebene durch den Koordinatenursprung geht.

Im GTR-Fenster ist dargestellt, mit welchem Ansatz man eine Koordinatengleichung dieser Ebene mithilfe eines GTR bestimmen kann. Führen Sie diesen Ansatz zu Ende und zeigen Sie, dass alle Koordinatengleichungen der Form $-\frac{9}{13}c \cdot x_1 - \frac{8}{13}c \cdot x_2 + c \cdot x_3 = 0$ mit $c \in \mathbb{R}^*$ die Ebene E beschreiben.

Was ist gegenüber dem Ansatz aus Aufgabe 2 b) anders?

```
[A]
 [[-3 5  1  0]
  [3  -5 -1 0]
  [2  1  2  0]]
```

**c)** Bestimmen Sie die Spurgeraden der Ebene E aus Teilaufgabe b) und skizzieren Sie die Ebene.

## Übungsaufgaben

**4** Zeigen Sie, dass die beiden Parameterdarstellungen aus der Einführung (1) und (2) dieselbe Ebene beschreiben.

(1) E: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und

(2) E: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Zeichnen Sie auch ein Schrägbild der Ebene.