

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DORTMUND

ANFÄNGERPRAKTIKUM PHYSIK
SOMMERSEMESTER
2014

V501/2

**Elektronen im elektrischen
und magnetischen Feld**

22.04.2014

2. ABGABE: 13.05.2014

Johannes Schlüter

johannes.schlueter@udo.edu

Joshua Luckey

joshua.luckey@udo.edu

1 Einleitung

Im Versuch „Ablenkung eines Elektronenstrahls im elektrischen Feld“ V501 und „Ablenkung eines Elektronenstrahls im transversalen Magnetfeld“ V502 wird ein Elektronenstrahl im elektrischen und magnetischen Feld untersucht. Durch diesen Versuch wollen wir die spezifische Ladung des Elektrons und die Intensität des lokalen Erdmagnetfeldes bestimmen.

2 Theorie

2.1 Ablenkung des Strahls im elektrischen Feld

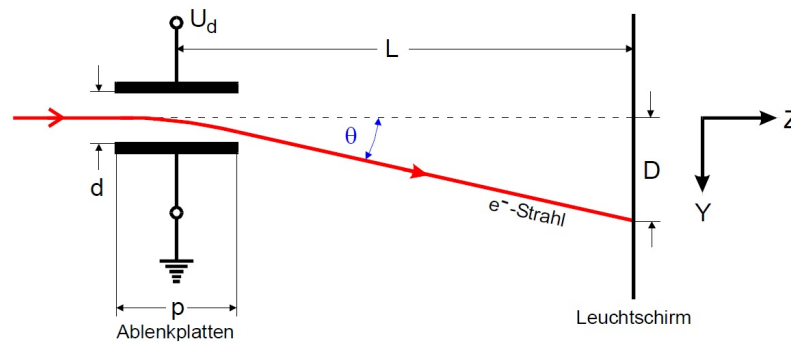


Abbildung 1: Strahlablenkung in der Kathodenstrahlröhre [4]

Bewegt sich ein Elektron im homogenen elektrischen Feld wirkt eine Kraft am Elektron. Diese Kraft ist betragsmäßig gleich dem Produkt von Feldstärke und Ladung:

$$|\vec{F}| = |e_0 \vec{E}| \quad (1)$$

Nach mehreren Umrechnungsschritten ($E = \frac{U_d}{d}$) gilt für die Ablenkgeschwindigkeit v_{ab} :

$$v_{ab} = \frac{F \Delta t}{m_0} = \frac{e_0 U_d \Delta t}{m_0} \quad (2)$$

mit $\Delta t = \frac{p}{v}$:

$$v_{ab} = \frac{F \Delta t}{m_0} = \frac{e_0 U_d p}{m_0 v} \quad (3)$$

Die Position des Leuchtflecks lässt sich dabei beschreiben durch:

$$\frac{D}{L} = \tan(\theta) = \frac{v_{ab}}{v} \quad (4)$$

Mit D:

$$D = \frac{e_0 \cdot U_d \cdot p \cdot L}{d \cdot m_0 \cdot v^2} \quad (5)$$

und durch Elimination von v mit Hilfe der Energiebeziehung $\frac{mv^2}{2} = eU_b$:

$$D = \frac{pL}{2d} \frac{U_d}{U_b} \quad (6)$$

2.2 Ablenkung des Strahls im magnetischen Feld

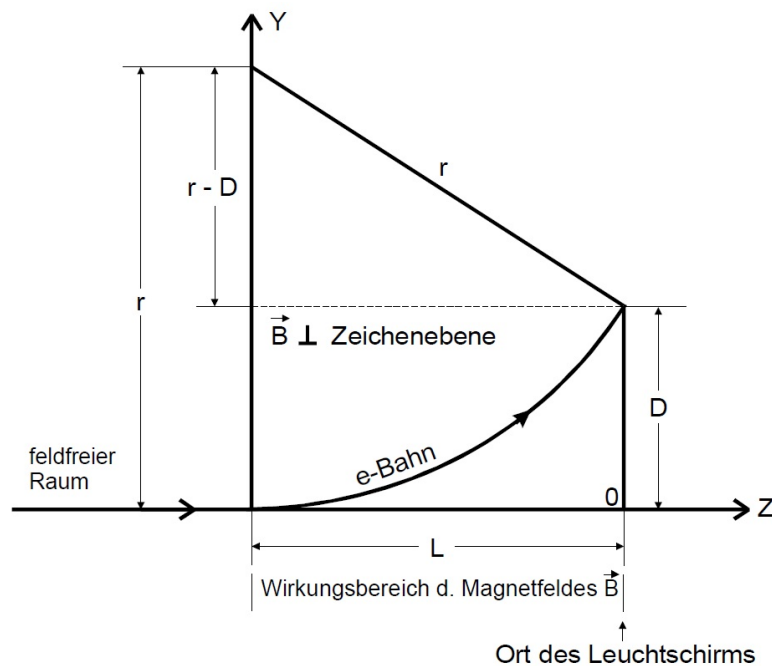


Abbildung 2: Skizze zur Ableitung einer Beziehung zwischen L , D und r

Befindet sich ein Elektron nun in einem magnetischen Feld, wirkt auf das Elektron die Lorentz-Kraft \vec{F}_L :

$$\vec{F} = e_0(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (7)$$

Für die Betrachtung entlang der Z-Achse gilt:

$$F = e_0 v_0 B \quad (8)$$

Wenn man nun die Lorentz- und Zentrifugal-Kraft gleichsetzt gilt für den Radius r :

$$r = \frac{m_0 v_0}{e_0 B} \quad (9)$$

Die Verschiebung des Leuchtflecks lässt sich auch Darstellen als:

$$r = \frac{L^2 + D^2}{2D} \quad (10)$$

Damit gilt:

$$\frac{L^2 + D^2}{2D} = \frac{m_0 v_0}{e_0 B} \quad (11)$$

Hiermit lässt sich nun die spezifische Ladung $\frac{e_0}{m_0}$ bestimmen.

3 Durchführung

3.1 E-Feld

Für ein festes U_B werden die Ablenkspannungen gemessen, die die Verschiebung des Leuchtpunkts genau auf eine der Gitternetzlinien (Abstand $\frac{1}{4}$ inch.) auf dem Schirm bewirken. Dieser Vorgang wird für sechs verschiedene Beschleunigungsspannungen wiederholt. Jetzt werden zwei Funktionsgeneratoren (Sinus- und Sägezahnspannung) auf die X- und Y-Eingänge gelegt und Frequenzen gemessen, bei denen sich das Verhältnis

$$n \cdot \nu_{\text{Sägezahn}} = m \cdot \nu_{\text{Sinus}} \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (12)$$

einstellt.

3.2 B-Feld

Ein homogenes Magnetfeld wird mit Hilfe eines Helmholtzspulenpaares erzeugt. Zunächst muss mit einem Inklinatorium die Horizontalkomponente des Erdmagnetfelds bestimmt und die Messapparatur in diese Richtung gedreht werden, damit das Erdmagnetfeld den Versuch nicht verfälscht, danach wird mit konstanter Beschleunigungsspannung die Strahlverschiebung in Abhängigkeit vom Magnetfeld gemessen, das bei einem Helmholtz-Spulenpaar vom durchfließenden Strom abhängt.

$$B = \mu_0 \frac{8NI}{\sqrt{125}R} \quad (13)$$

Dabei ist N die Windungszahl (hier: 20) und R den Spulenradius (hier: 0,282 m). Des weiteren wird die Stärke des Erdmagnetfeldes durch Ausrichten des Leuchtpunkts auf die Mitte des Schirmes und dann durch drehen des Versuchsaufbaus um 90° bestimmt. Dabei verschiebt sich der Elektronenstrahl. Nun wird das von der Helmholtz-Spule erzeugte Magnetfeld gerade so hoch geregelt, dass der Elektronenpunkt in der Mitte des Schirmes ist. Aus diesem Wert des Magnetfeldes und dem Inklinationswinkel des Erdmagnetfeldes, der ebenfalls mit dem Inklinatorium bestimmt wird, kann man die Stärke des Erdmagnetfeldes errechnen.

4 Auswertung

4.1 Auswertung des Versuchs Elektronen im elektrischen Feld

Im Folgenden sind die während der Versuche aufgenommenen Daten und die aus diesen berechneten Ergebnisse tabellarisch und graphisch dargestellt. An entsprechender Stelle sind Erklärungen zu den durchgeführten Rechnungen und Ergebnissen gegeben. Die für die Fehlerrechnung verwendeten Fehlergleichungen befinden sich in Abschnitt 4.3 und sind mit römischen Ziffern nummeriert.

4.1.1 Ablenkung von Elektronen im elektrischen Feld

Die während den fünf Messdurchgängen aufgenommenen Werte für die Ablenk- und Beschleunigungsspannung sowie die Verschiebung sind in Tabelle 1 zu finden. Die Fehler der Messwerte, wurden dabei mit der kleinsten Skaleneinteilung des jeweiligen Messgerätes abgeschätzt.

Messreihe Nr.	1	2	3	4	5	Verschiebung D [cm]
Ablenk- spannung U_d [V]	$-20,7 \pm 0,1$	$-33,5 \pm 0,1$	$-35,0 \pm 0,1$	-	-	$0,0 \pm 0,1$
	$-17,5 \pm 0,1$	$-27,6 \pm 0,1$	$-28,2 \pm 0,1$	$-35,6 \pm 0,1$	-	$0,6 \pm 0,1$
	$-14,1 \pm 0,1$	$-21,8 \pm 0,1$	$-21,8 \pm 0,1$	$-29,4 \pm 0,1$	$-35,6 \pm 0,1$	$1,3 \pm 0,1$
	$-10,5 \pm 0,1$	$-16,6 \pm 0,1$	$-15,2 \pm 0,1$	$-21,9 \pm 0,1$	$-26,7 \pm 0,1$	$1,9 \pm 0,1$
	$-6,9 \pm 0,1$	$-10,6 \pm 0,1$	$-8,4 \pm 0,1$	$-14,6 \pm 0,1$	$-17,7 \pm 0,1$	$2,5 \pm 0,1$
	$-3,4 \pm 0,1$	$-4,7 \pm 0,1$	$-2,0 \pm 0,1$	$-6,8 \pm 0,1$	$-7,9 \pm 0,1$	$3,2 \pm 0,1$
	$0,4 \pm 0,1$	$1,5 \pm 0,1$	$5,6 \pm 0,1$	$0,8 \pm 0,1$	$1,4 \pm 0,1$	$3,8 \pm 0,1$
	$4,7 \pm 0,1$	$7,6 \pm 0,1$	$13,2 \pm 0,1$	$8,8 \pm 0,1$	$11,1 \pm 0,1$	$4,4 \pm 0,1$
	$8,5 \pm 0,1$	$13,5 \pm 0,1$	$19,3 \pm 0,1$	$16,9 \pm 0,1$	$22,9 \pm 0,1$	$5,1 \pm 0,1$
Beschl. Spannung U_b [V]	180 ± 5	300 ± 5	350 ± 5	400 ± 5	500 ± 5	

Tabelle 1: Messdaten zur Bestimmung des Zusammenhangs zwischen U_d und D

In den Abbildungen 3, 4, 5, 6 und 7 sind die gemessenen Verschiebungen D gegen die entsprechenden Ablenkspannungen U_d aufgetragen. Die mittels lineare Ausgleichsrechnung mit dem Ansatz

$$D(U_d) = m \cdot U_d + b, \quad (14)$$

unter Verwendung der Python Bibliothek *SciPy* [3], berechneten Parameter m_i, b_i sind in Tabelle 2 aufgelistet.

Die Steigung dieser Graphen stellt die Empfindlichkeit $\frac{D}{U_d}$ der Apparatur dar, die in Abbildung 8 gegen die reziproke Beschleunigungsspannung aus Tabelle 1 aufgetragen ist.

Die durch Regression mit dem Ansatz

$$\frac{D}{U_d}(U_b^{-1}) = \frac{\alpha}{U_b} + \beta, \quad (15)$$

Steigung m [m V ⁻¹]	y-Achsenabschnitt b [cm]
$0,173 \pm 0,002$	$3,69 \pm 0,03$
$0,108 \pm 0,001$	$3,65 \pm 0,01$
$0,093 \pm 0,001$	$3,29 \pm 0,02$
$0,084 \pm 0,001$	$3,72 \pm 0,02$
$0,066 \pm 0,001$	$3,67 \pm 0,02$

Tabelle 2: Fit-Parameter der Daten aus den fünf Messreihen

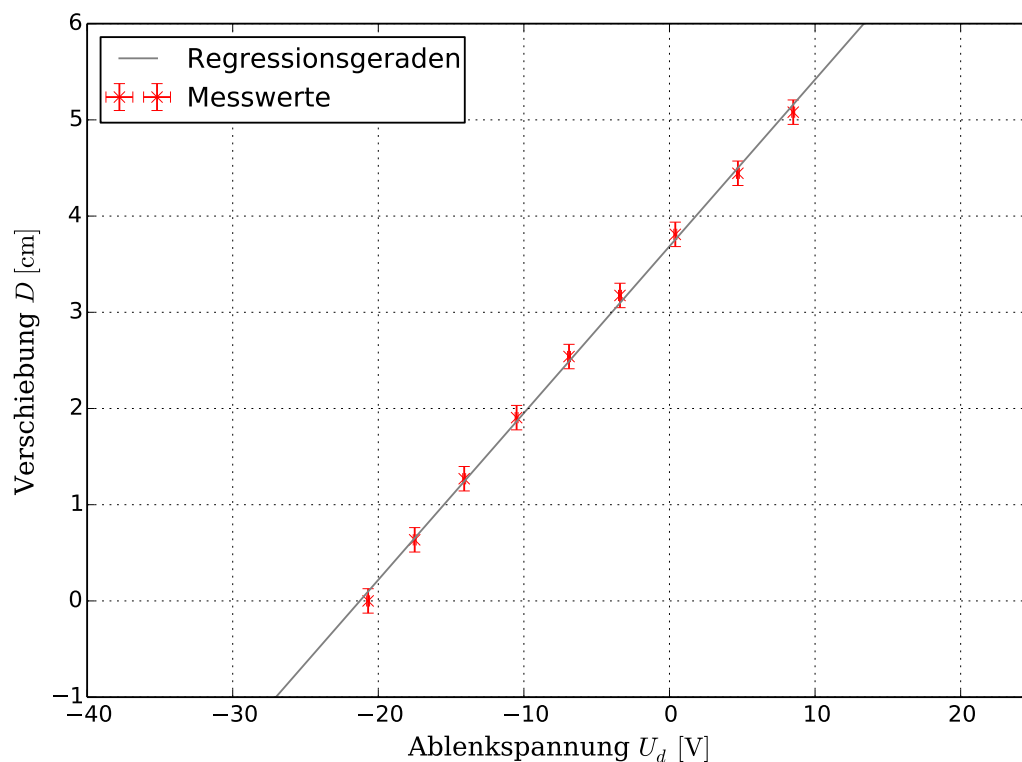


Abbildung 3: Grafische Darstellung der ersten Messreihe im E-Feld

erhält man die Parameter

$$\alpha = (30,3 \pm 0,8) \text{ cm} \quad (15a)$$

$$\beta = (0,006 \pm 0,003) \text{ cm V}^{-1}. \quad (15b)$$

Ein theoretischer Vergleichswert zu dem in Abbildung 8 dargestellten Zusammenhang erhält man mittels (6) und den Angaben im Bauplan [4] der Kathodenstrahlröhre zu den Maßen $L = 14,5 \text{ cm}$, $p = 1,9 \text{ cm}$ und $d = 0,38 \text{ cm}$.

Aus den genannten Größen berechnet sich die theoretische Steigung der Geraden in Abbildung 8 zu

$$\alpha_{theo} = 36,25 \text{ cm}. \quad (16)$$

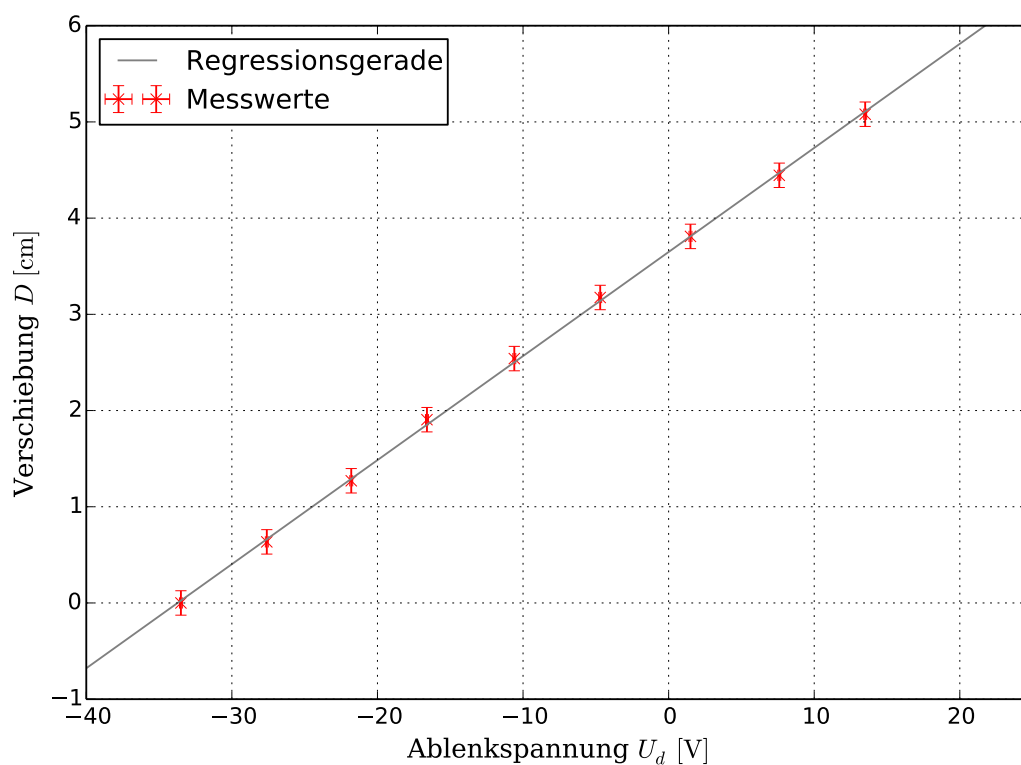


Abbildung 4: Grafische Darstellung der zweiten Messreihe im E-Feld

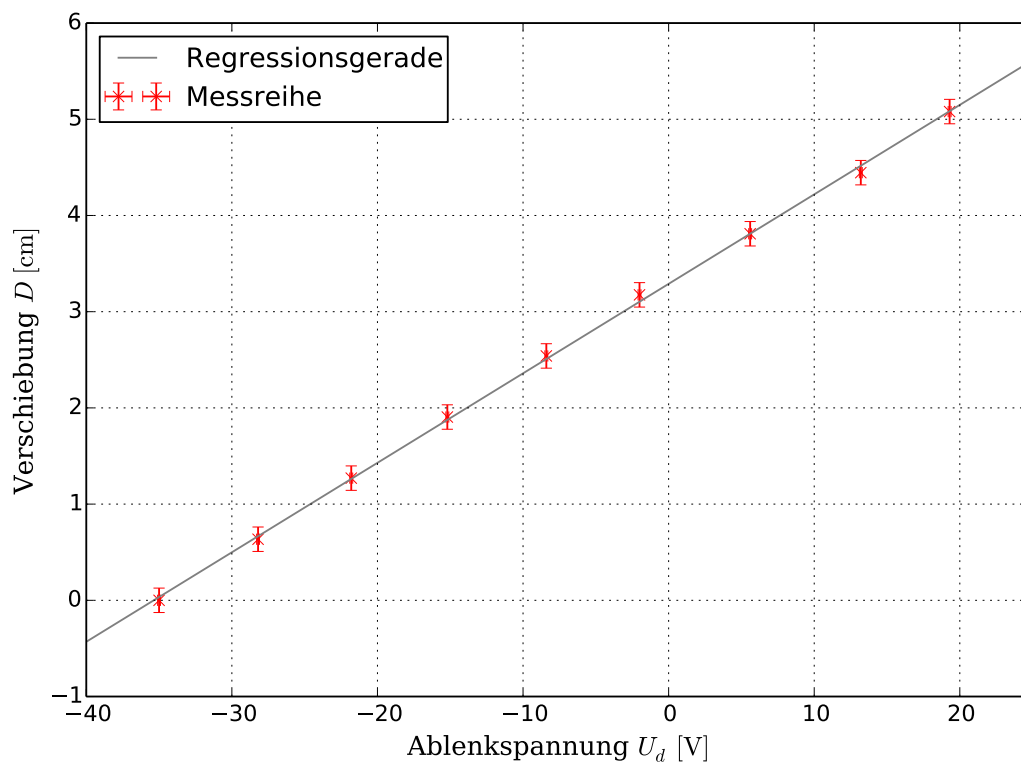


Abbildung 5: Grafische Darstellung der dritten Messreihe im E-Feld

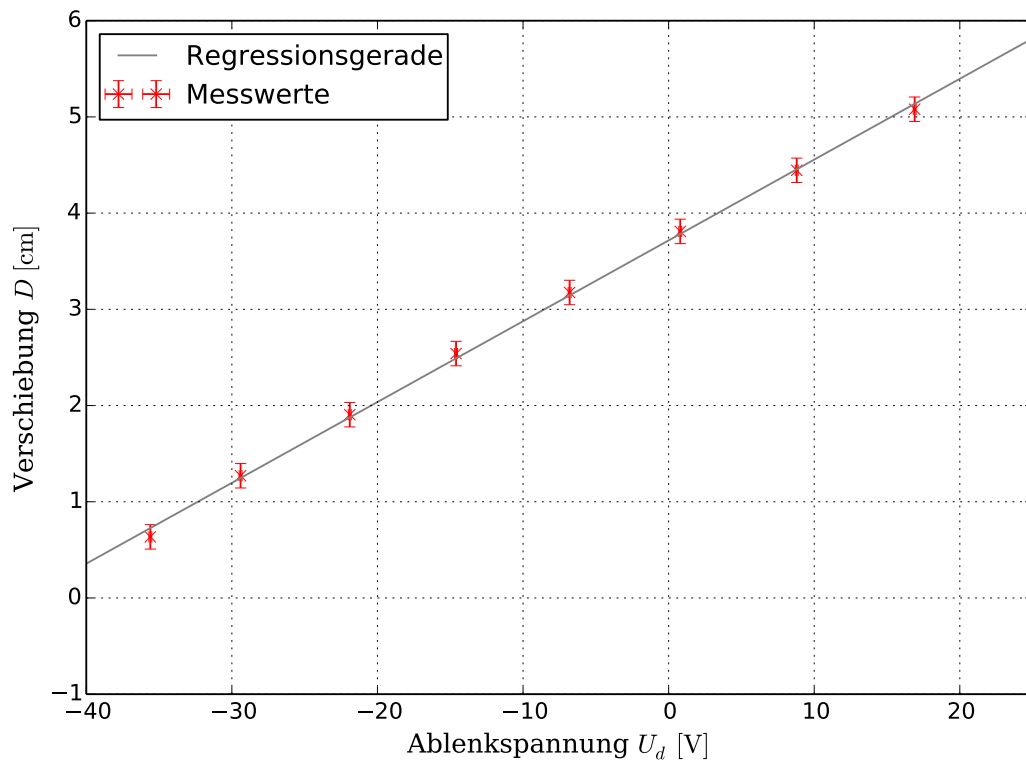


Abbildung 6: Grafische Darstellung der vierten Messreihe im E-Feld

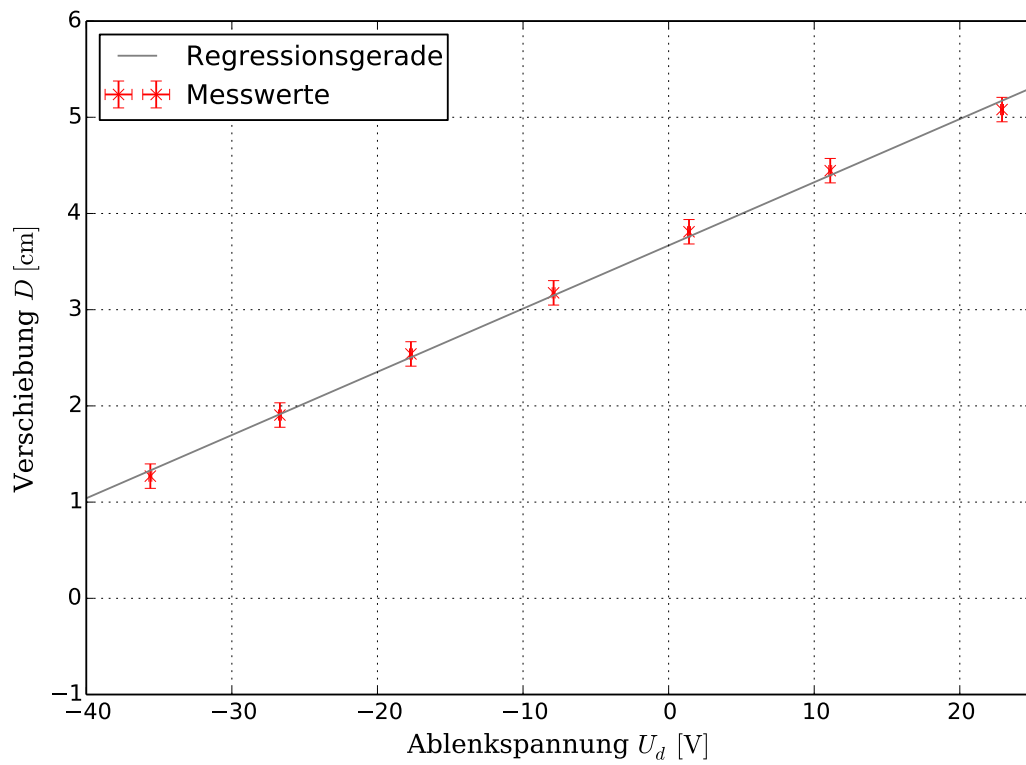


Abbildung 7: Grafische Darstellung der fünften Messreihe im E-Feld

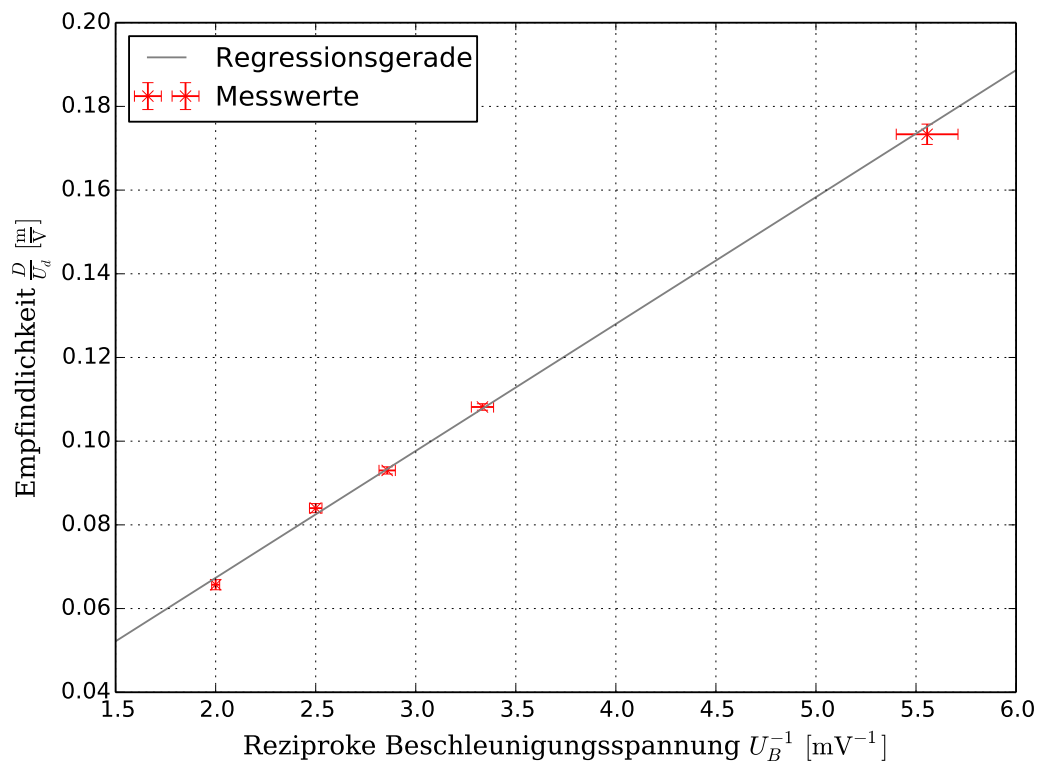


Abbildung 8: Darstellung des Zusammenhangs von Empfindlichkeit Beschleunigungsspannung

4.1.2 Stehende Sinuswellen am Oszilloskop

Die zur Erzeugung eingestellten Sägezahn-Frequenzen f_{sz} sind mit den Verhältnissen n und der aus diesen berechneten Sinus-Frequenz f_{sin} in Tabelle 3 eingetragen.

Sägezahn-Frequenz f_{sz} [Hz]	Verhältnis n	Sinus-Frequenz f_{sin} [Hz]
$19,96 \pm 0,01$	4	$79,84 \pm 0,04$
$39,94 \pm 0,01$	2	$79,88 \pm 0,02$
$79,84 \pm 0,01$	1	$79,84 \pm 0,01$
$159,68 \pm 0,01$	0,5	$79,84 \pm 0,01$

Tabelle 3: Frequenzen f_{sz} und f_{sin} für stehende Wellen

Der Mittelwert der berechneten Frequenzen ergibt sich zu

$$f = (79,85 \pm 0,01) \text{ cm.} \quad (17)$$

4.2 Auswertung des Versuchs Elektronen im magnetischen Feld

4.2.1 Ablenkung von Elektronen im magnetischen Feld

Die in den vier Messreihen aufgenommenen Werte für Ablenkstrom I_d , die daraus resultierende Verschiebung D und die jeweilige Beschleunigungsspannung U_b befinden sich in

Tabelle 4 und das von dem Strom I_d erzeugte und mit (13) berechnete Magnetfeld B_d in Tabelle 5. Auch hier wurde der Fehler des Stroms mit der kleinsten Skaleneinheit des Messgerätes abgeschätzt.

Messreihe Nr.	1	2	3	4	Verschiebung D [cm]
Ablenk- strom I_d [A]	$0,00 \pm 0,01$	$0,00 \pm 0,01$	$0,00 \pm 0,01$	$0,00 \pm 0,01$	$0,0 \pm 0,1$
	$0,32 \pm 0,01$	$0,36 \pm 0,01$	$0,38 \pm 0,01$	$0,38 \pm 0,01$	$0,6 \pm 0,1$
	$0,68 \pm 0,01$	$0,74 \pm 0,01$	$0,82 \pm 0,01$	$0,84 \pm 0,01$	$1,3 \pm 0,1$
	$1,00 \pm 0,01$	$1,10 \pm 0,01$	$1,20 \pm 0,01$	$1,15 \pm 0,01$	$1,9 \pm 0,1$
	$1,30 \pm 0,01$	$1,45 \pm 0,01$	$1,60 \pm 0,01$	$1,60 \pm 0,01$	$2,5 \pm 0,1$
	$1,65 \pm 0,01$	$1,80 \pm 0,01$	$1,95 \pm 0,01$	$2,00 \pm 0,01$	$3,2 \pm 0,1$
	$2,00 \pm 0,01$	$2,20 \pm 0,01$	-	-	$3,8 \pm 0,1$
	$2,25 \pm 0,01$	-	-	-	$4,4 \pm 0,1$
Beschl. Spannung U_b [V]	250 ± 5	300 ± 5	350 ± 5	400 ± 5	

Tabelle 4: Messdaten zur Bestimmung des Zusammenhangs zwischen I_d und D

Messreihe Nr.	1	2	3	4	Verschiebung D [cm]
Ablenk- B-Feld B_d [mT]	$0,0000 \pm 0,0006$	$0,0000 \pm 0,0006$	$0,0000 \pm 0,0006$	$0,0000 \pm 0,0006$	$0,0 \pm 0,1$
	$0,0204 \pm 0,0006$	$0,0230 \pm 0,0006$	$0,0242 \pm 0,0006$	$0,0242 \pm 0,0006$	$0,6 \pm 0,1$
	$0,0434 \pm 0,0006$	$0,0472 \pm 0,0006$	$0,0523 \pm 0,0006$	$0,0536 \pm 0,0006$	$1,3 \pm 0,1$
	$0,0638 \pm 0,0006$	$0,0701 \pm 0,0006$	$0,0765 \pm 0,0006$	$0,0733 \pm 0,0006$	$1,9 \pm 0,1$
	$0,0829 \pm 0,0006$	$0,0925 \pm 0,0006$	$0,1020 \pm 0,0006$	$0,1020 \pm 0,0006$	$2,5 \pm 0,1$
	$0,1052 \pm 0,0006$	$0,1148 \pm 0,0006$	$0,1244 \pm 0,0006$	$0,1275 \pm 0,0006$	$3,2 \pm 0,1$
	$0,1275 \pm 0,0006$	$0,1403 \pm 0,0006$	-	-	$3,8 \pm 0,1$
	$0,1435 \pm 0,0006$	-	-	-	$4,4 \pm 0,1$
Beschl. Spannung U_b [V]	250 ± 5	300 ± 5	350 ± 5	400 ± 5	

Tabelle 5: Messdaten zur Bestimmung des Zusammenhangs zwischen B_d und D

In den Abbildungen 9, 10 11 und 12 ist der Quotient $D' = \frac{D}{D^2 + L^2}$ mit der Länge der Kathodenstrahlröhre $L = 17,5$ cm und der gemessenen Verschiebung D gegen die jeweilige Magnetfeldstärke B_d aufgetragen. Die Regressionsparameter der linearen Regression mit dem Ansatz

$$D'(B_d) = \gamma \cdot B_d + \delta, \quad (18)$$

befinden sich in Tabelle 6.

Die ebenfalls in Tabelle 6 angegebene spezifische Ladung des Elektrons lässt sich nun unter Umformung von (11) zu

$$\frac{e_0}{m_e} = 8 \cdot \gamma^2 \cdot U_b \quad (19)$$

aus der Steigung γ der Regressionsgeraden berechnen.

Steigung γ [m V ⁻¹]	y-Achsenabschnitt δ [m ⁻¹]	spezifische Ladung $\frac{e_0}{m_e}$ [C kg ⁻¹]	rel. Abweichung zur Literatur Δ_{rel} [%]
94 ± 1	$0,01 \pm 0,01$	$(1,77 \pm 0,05) \cdot 10^{11}$	1
85 ± 1	$0,01 \pm 0,01$	$(1,75 \pm 0,05) \cdot 10^{11}$	1
80 ± 1	$0,01 \pm 0,01$	$(1,79 \pm 0,04) \cdot 10^{11}$	2
79 ± 2	$0,01 \pm 0,01$	$(1,98 \pm 0,09) \cdot 10^{11}$	11

Tabelle 6: Fit-Parameter der Daten aus den vier Messreihen

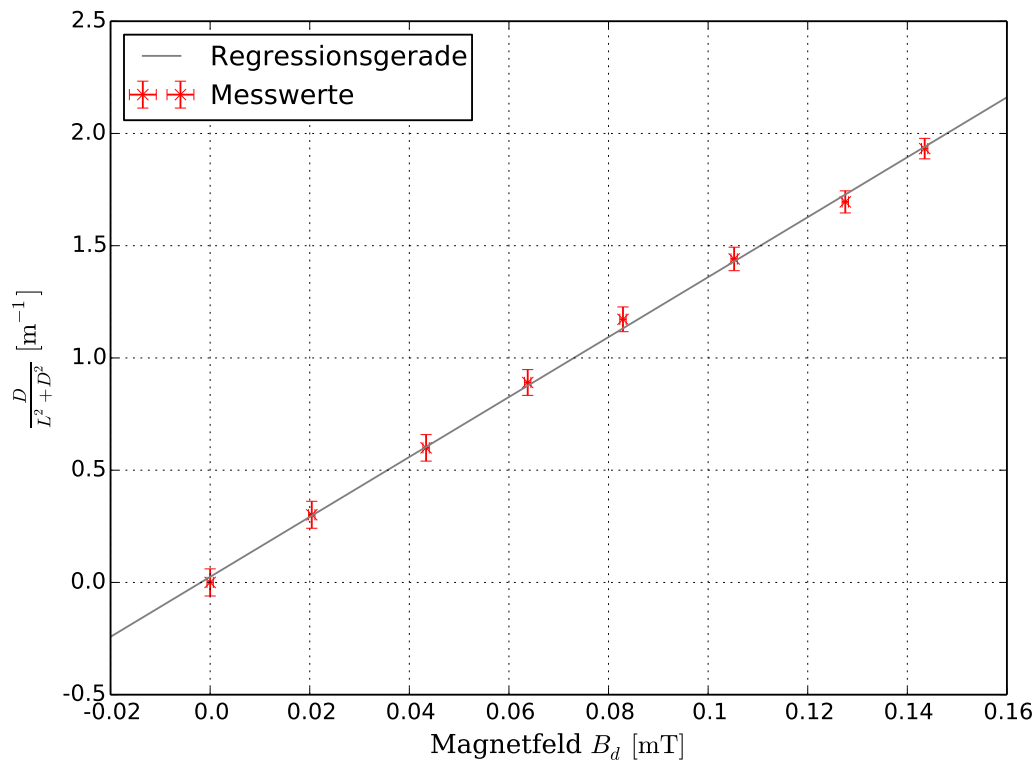


Abbildung 9: Grafische Darstellung der ersten Messreihe im B-Feld

4.2.2 Bestimmung der Intensität des Magnetfeldes

Für den Ausgleich der von dem Erdmagnetfeld verursachten Verschiebung wurde die Stromstärke

$$I_{hor} = (0,28 \pm 0,01) \text{ A} \quad (20)$$

an die Helmholtz-Spule angelegt. Mit (13) ergibt sich damit der Betrag des Erdmagnetfeldes zu

$$B_{hor} = (0,0179 \pm 0,0006) \text{ mT}. \quad (21)$$

Die totale Intensität des Erdmagnetfeldes erhält ist mit dem Inklinationswinkel $\varphi = 70^\circ$ zu

$$B_{total} = \frac{B_{hor}}{\cos(\varphi)} = (52 \pm 2) \mu\text{T}. \quad (22)$$

bestimmbar.

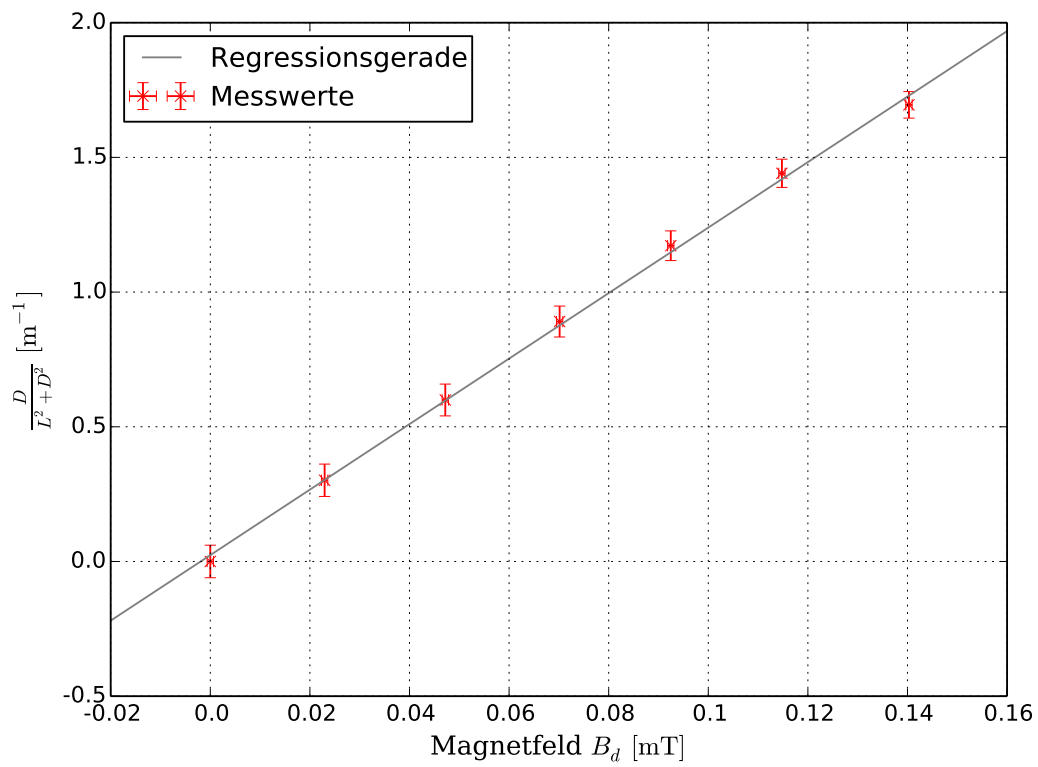


Abbildung 10: Grafische Darstellung der zweiten Messreihe im B-Feld

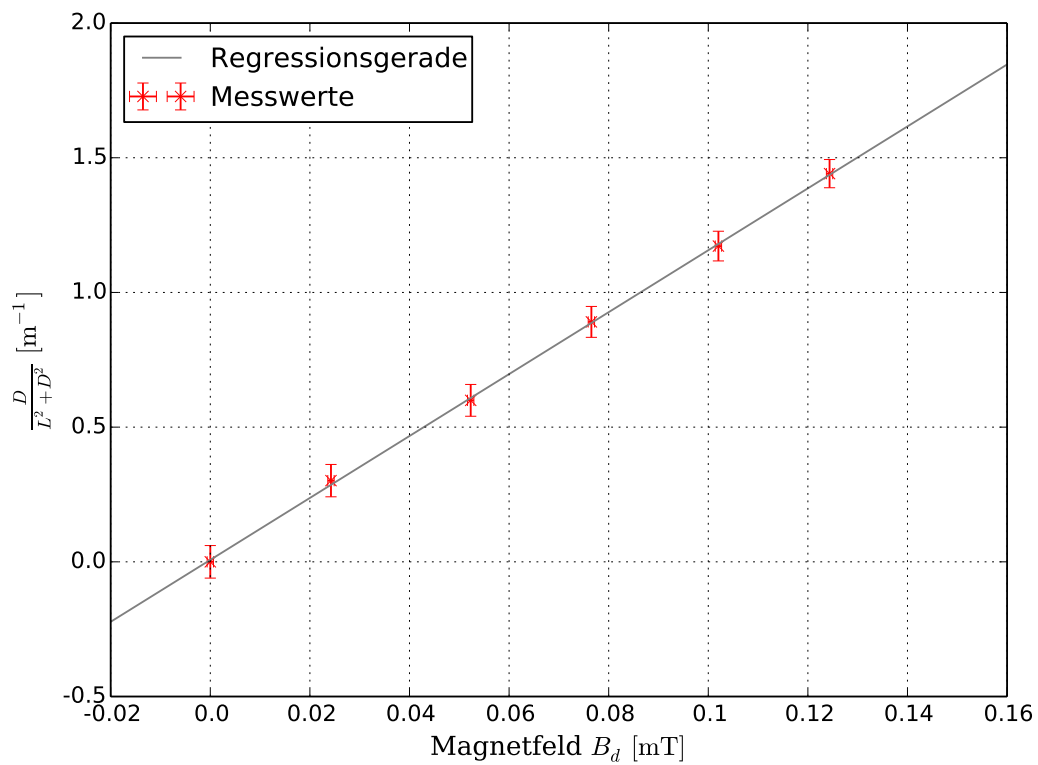


Abbildung 11: Grafische Darstellung der dritten Messreihe im B-Feld

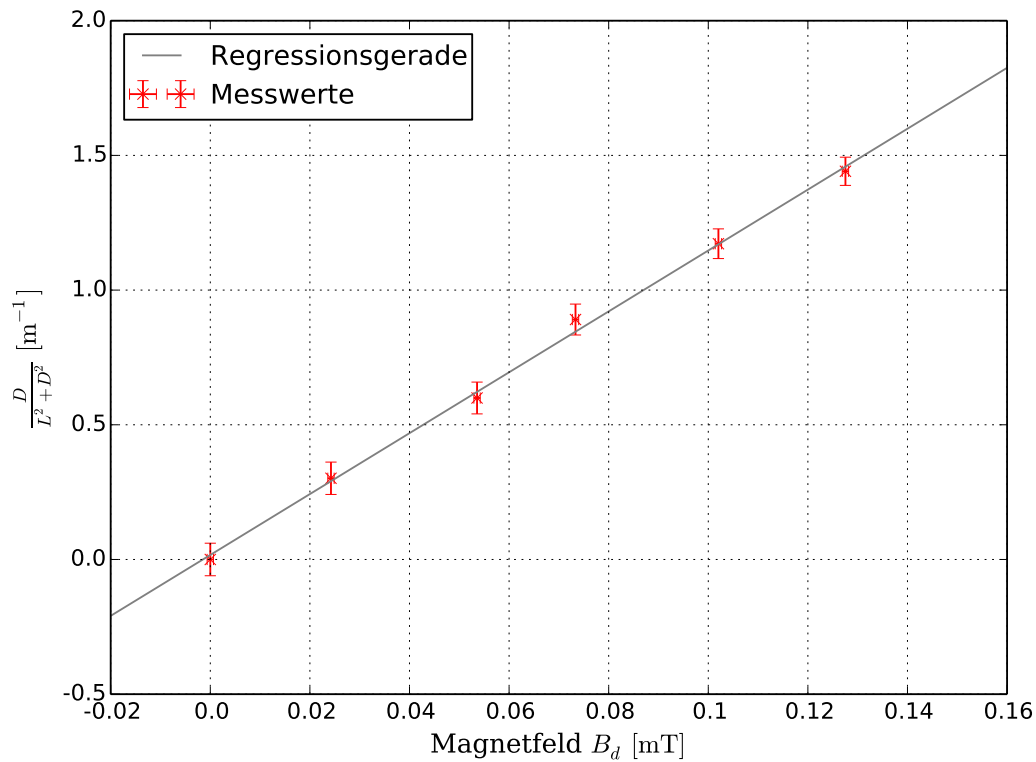


Abbildung 12: Grafische Darstellung der vierten Messreihe im B-Feld

4.3 Fehlerrechnung

In diesem Abschnitt sind die zur Berechnung der Fehler in Abschnitt 4 verwendeten Fehlergleichungen aufgelistet, die mittels der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet wurden.

Den Fehler der berechneten Sinusfrequenz f_{sin} erhält man vereinfacht durch:

$$\sigma_{f_{sin}} = n \cdot \sigma_{f_{sz}} \quad (\text{I})$$

Der Fehler der magnetischen Flussdichte B_d berechnet sich durch die Gleichung:

$$\sigma_{B_d} = \frac{8}{\sqrt{125}} \frac{\mu_0 N}{R} \sigma_I \quad (\text{II})$$

Der Fehler der spezifischen Ladung $e_{spez} = \frac{e_0}{m_e}$ ergibt sich aus:

$$\sigma_{e_{spez}} = 8 \sqrt{\gamma^4 \sigma_{U_b}^2 + 4 \gamma^2 U_b^2 \sigma_\gamma^2} \quad (\text{III})$$

Den Fehler des totalen Magnetfelds B_{total} der Erde wurde bestimmt durch:

$$\sigma_{B_{total}} = \frac{\sigma_{B_{hor}}}{\cos(\varphi)} \quad (\text{IV})$$

5 Diskussion

In diesem Abschnitt werden die in der Auswertung erhaltenen Ergebnisse noch einmal aufgegriffen und durch Vergleich mit Literaturwerten oder ähnlichem auf ihre Plausibilität hin untersucht. Dabei wird, falls erforderlich auch Bezug auf die Versuchsdurchführung und den Aufbau genommen.

Der aus den fünf Messreihen in Tabelle 1 erhaltene Proportionalitätsfaktor $\alpha = (30,3 \pm 0,8) \text{ cm (15a)}$ stellt mit einer relativen Abweichung von $\Delta_{rel}(\alpha) = (7 \pm 3) \%$ zum Theoriewert (16) ein, für die relativ geringe Anzahl an Messungen, plausibles und genaues Ergebnis dar. Ein Grund für diese Abweichung könnten die für die Herleitung verwendeten, vereinfachten Annahmen sein, wie die als parallel angenommenen Platten des Ablenkkondensators, wodurch der theoretische Wert nur ein Näherungswert bzw. idealisierten Wert darstellt.

Die Ermittlung der Sinusfrequenz f_{sin} zeigt in allen vier Fällen Tabelle 3 eine Übereinstimmung bis zur ersten und in drei Fällen sogar bis zu zweiten Nachkommastelle. Wodurch die Plausibilität der Relation (12) gezeigt ist.

Die Ergebnisse der Messung der spezifischen Ladung des Elektrons Tabelle 6 zeigen, in bis auf einem Fall, im Vergleich zum Literaturwert $\frac{e_0}{m_0} = 1,7588 \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$ [2] nur geringe Abweichungen. Dies ist auch daran zu erkennen, dass der Literaturwert in den berechneten Fehlern der Ergebnisse liegt.

Das bestimmte Erdmagnetfeld mit $B_{total} = (52 \pm 2) \mu\text{T}$ (22) stellt sich im Vergleich mit dem Literaturwert von $B_{total,lit} = 47 \mu\text{T}$ [1] für Mitteleuropa, in Anbetracht der Tatsache, dass nur eine Messung durchgeführt wurde, als plausibles und gutes Ergebnis heraus.

Alles in allem lässt sich somit sagen, dass alle Ergebnisse dieses Versuchs plausibel und mehr noch, in Anbetracht der geringen Zahl an Wiederholungen, relativ genau sind. Dies lässt darauf schließen, dass der verwendete Versuchsaufbau zur Messung der erhaltenen Größen gut geeignet und dabei außerdem noch unanfällig für äußere Störungen ist.

Literatur

- [1] *Die Geomagnetik*. URL: http://www.ggukarlsruhe.de/Messverfahren_Geophysik_zersto/Geomagnetik_Magnetik_Erdmagnet/hauptteil_geomagnetik_magnetik_erdmagnet.html.
- [2] Günther Simon Dietmar Mende. *Physik. Gleichungen und Tabellen*. 16. Aufl. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag München, 2009.
- [3] *SciPy*. URL: <http://docs.scipy.org/doc/> (besucht am 21.04.2014).
- [4] *Versuchsanleitung. V501 Elektronen im elektrischen Feld*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V501.pdf> (besucht am 23.04.2014).