

TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
DORTMUND

ANFÄNGERPRAKTIKUM PHYSIK  
WINTERSEMESTER  
13/14

---

**V104**  
**Der Doppler-Effekt**

23. Januar 2014

---

Johannes Schlüter  
Joshua Luckey

johannes.schlueter@udo.edu  
joshua.luckey@udo.edu

# 1 Einleitung

# 2 Theorie

# 3 Durchführung

# 4 Auswertung

Im Folgenden sind die während des Versuchs aufgenommenen Messwerte sowie die aus diesen berechneten Messergebnisse tabellarisch aufgeführt. An entsprechender Stelle sind Anmerkungen und Erklärungen zu den Rechnungen gegeben. Die jeweils mit aufgeführten Fehler der Ergebnisse wurden mit den mit römischen Zahlen nummerierten Gleichungen in Abschnitt 4.7 berechnet, die jeweilige Gleichung ist dabei angegeben.

## 4.1 Direkte Bestimmung der Ruhewellenlänge

Die Messwerte zur Bestimmung der Ruhewellenlänge, des verwendeten Signals sind in Tabelle 1 zusammen mit den daraus bestimmten Werten für die Wellenlänge und deren Inverses eingetragen.

Strecke $s$ [m]	Wellenlängenanzahl $n$	Ruhewellenlänge $\lambda_0$ [m]	inverse Ruhewellenlänge $\lambda_0^{-1}$ [m <sup>-1</sup> ]
$0,0462 \pm 0,0001$	3,0	$0,015\,40 \pm 0,000\,03$	$64,9 \pm 0,2$
$0,0465 \pm 0,0001$	2,5	$0,018\,60 \pm 0,000\,04$	$53,8 \pm 0,2$
$0,0479 \pm 0,0001$	2,5	$0,019\,16 \pm 0,000\,04$	$52,2 \pm 0,2$
$0,0493 \pm 0,0001$	2,5	$0,019\,72 \pm 0,000\,04$	$50,7 \pm 0,1$
$0,0441 \pm 0,0001$	2,5	$0,017\,64 \pm 0,000\,04$	$56,7 \pm 0,2$

**Tabelle 1:** Messdaten der Wellenlängenbestimmung und Wellenlänge sowie inverse Wellenlänge

Für die zu untersuchende inverse Wellenlänge erhält man daraus den Mittelwert

$$\langle \lambda_0^{-1} \rangle = (56 \pm 2) \text{ m}^{-1}. \quad (1)$$

Dabei ist der angegebene Fehler die Abweichung vom Mittelwert und nicht durch Fehlerfortpflanzung bestimmt, da diese Abweichungen wesentlich geringer ausfallen.

## 4.2 Bestimmung der Wagengeschwindigkeiten

Die zur Bestimmung der Wagengeschwindigkeiten in den verschiedenen Gängen aufgenommenen Fahrt dauern über die Messstrecke

$$\langle l \rangle = (0,458 \pm 0,001) \text{ m} \quad (2)$$

sind in Tabelle 2 angegeben.

Gang $g$	Zeit hin		Zeit zurück	
	$t_{h1}$ [s]	$t_{h2}$ [s]	$t_{r1}$ [s]	$t_{r2}$ [s]
6	$9,10 \pm 0,01$	$9,09 \pm 0,01$	$9,05 \pm 0,01$	$9,03 \pm 0,01$
12	$4,55 \pm 0,01$	$4,55 \pm 0,01$	$4,52 \pm 0,01$	$4,52 \pm 0,01$
18	$3,03 \pm 0,01$	$3,04 \pm 0,01$	$3,01 \pm 0,01$	$3,02 \pm 0,01$
24	$2,28 \pm 0,01$	$2,29 \pm 0,01$	$2,26 \pm 0,01$	$2,25 \pm 0,01$
30	$1,82 \pm 0,01$	$1,82 \pm 0,01$	$1,81 \pm 0,01$	$1,83 \pm 0,01$
36	$1,52 \pm 0,01$	$1,59 \pm 0,01$	$1,51 \pm 0,01$	$1,51 \pm 0,01$
42	$1,30 \pm 0,01$	$1,31 \pm 0,01$	$1,34 \pm 0,01$	$1,30 \pm 0,01$
48	$1,14 \pm 0,01$	$1,19 \pm 0,01$	$1,13 \pm 0,01$	$1,13 \pm 0,01$
54	$1,02 \pm 0,01$	$1,02 \pm 0,01$	$1,00 \pm 0,01$	$1,00 \pm 0,01$
60	$0,92 \pm 0,01$	$0,91 \pm 0,01$	$0,91 \pm 0,01$	$0,90 \pm 0,01$

**Tabelle 2:** Fahrt dauern des Wagens in den verschiedenen Gängen

Aus den hieraus, jeweils für Hin- und Rückfahrt, gemittelten Zeiten und der Messstrecke (2) lassen sich die Geschwindigkeiten des Wagens für die unterschiedlichen Gänge in Tabelle 3 berechnen.

Gang $g$	Geschwindigkeit hin	Geschwindigkeit zurück
	$v_{h1}$ [m s <sup>-1</sup> ]	$v_{h2}$ [m s <sup>-1</sup> ]
6	$0,0504 \pm 0,0001$	$0,0507 \pm 0,0001$
12	$0,1007 \pm 0,0002$	$0,1013 \pm 0,0002$
18	$0,1509 \pm 0,0004$	$0,1519 \pm 0,0004$
24	$0,2004 \pm 0,0007$	$0,2031 \pm 0,0007$
30	$0,252 \pm 0,001$	$0,252 \pm 0,001$
36	$0,295 \pm 0,001$	$0,303 \pm 0,001$
42	$0,351 \pm 0,002$	$0,347 \pm 0,002$
48	$0,393 \pm 0,002$	$0,405 \pm 0,003$
54	$0,449 \pm 0,003$	$0,458 \pm 0,003$
60	$0,501 \pm 0,004$	$0,506 \pm 0,004$

**Tabelle 3:** Geschwindigkeiten des Wagens in den verschiedenen Gängen

## 4.3 Bestimmung von Ruhfrequenz und Schallgeschwindigkeit

Zur direkten Bestimmung der Frequenzänderung muss zunächst die Ruhfrequenz des verwendeten Signals bestimmt werden, die dafür genommenen Messwerte sind in Tabelle 4

zu finden.

Ruhefrequenz $\nu_0$ [Hz]	Ruhefrequenz $\nu_0$ [Hz]
$20\,165 \pm 1$	$20\,166 \pm 1$
$20\,165 \pm 1$	$20\,166 \pm 1$
$20\,166 \pm 1$	$20\,166 \pm 1$
$20\,113 \pm 1$	$19\,915 \pm 1$
$19\,646 \pm 1$	$19\,773 \pm 1$

**Tabelle 4:** Gemessene Ruhfrequenzen

Für die Berechnung des Mittelwertes wurden die hervorgehobenen Werte nicht verwendet, da diese eine zu große Abweichung zu den übrigen Messwerten aufweisen. Es folgt der Mittelwert mit der Abweichung vom diesem

$$\langle \nu_0 \rangle = (20\,158 \pm 7) \text{ Hz.} \quad (3)$$

Aus dieser Ruhfrequenz  $\langle \nu_0 \rangle$  und der zuvor bestimmten inversen Wellenlänge (1) kann nun die Schallgeschwindigkeit  $c$  zu

$$c = \langle \lambda_0 \rangle \cdot \langle \nu_0 \rangle = (362 \pm 15) \text{ m s}^{-1} \quad (4)$$

berechnet werde.

Mit der berechneten Schallgeschwindigkeit  $c$ , der Maximalgeschwindigkeit des Wagens  $v_{max}$  aus Tabelle 3 und der Ruhfrequenz  $\nu_0$  (3) lässt sich nun der Unterschied der beiden Gleichungen ?? und ?? berechnen, da aus der Taylorentwicklung der letzteren

$$\nu_Q = \nu_E + \nu_0 \cdot \mathcal{O}\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \quad (5)$$

gilt. Der größte Term der dieser Restglieder hat mit den bestimmten Größen den Wert

$$\nu_0 \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 = (0,039 \pm 0,003) \text{ Hz} \quad (6)$$

und ist damit um zwei Größenordnungen kleiner als der angenommene Fehler bei den Frequenzmessungen. Daher ist bei dem verwendeten Versuchsaufbau keine Unterscheidung zwischen bewegtem Sender und Empfänger nötig beziehungsweise möglich.

#### 4.4 Direkte Bestimmung der Frequenzänderung

Die für die verschiedenen Gänge gemessenen erhöhten beziehungsweise verringerten Frequenzen während der Bewegung des Wagens sind in Tabelle 5 eingetragen.

Gang $g$	Frequenzen hin		Frequenzen zurück	
	$\nu_{h1}$ [Hz]	$\nu_{h2}$ [Hz]	$\nu_{r1}$ [Hz]	$\nu_{r2}$ [Hz]
6	$20\,169 \pm 1$	$20\,168 \pm 1$	$20\,162 \pm 1$	$20\,163 \pm 1$
12	$20\,171 \pm 1$	$20\,172 \pm 1$	$20\,160 \pm 1$	$20\,160 \pm 1$
18	$20\,175 \pm 1$	$20\,175 \pm 1$	$20\,158 \pm 1$	$20\,157 \pm 1$
24	$20\,178 \pm 1$	$20\,177 \pm 1$	$20\,154 \pm 1$	$20\,155 \pm 1$
30	$20\,180 \pm 1$	$20\,180 \pm 1$	$20\,151 \pm 1$	$20\,151 \pm 1$
36	$20\,183 \pm 1$	$20\,183 \pm 1$	$20\,148 \pm 1$	$20\,148 \pm 1$
42	$20\,186 \pm 1$	$20\,186 \pm 1$	$20\,146 \pm 1$	$20\,145 \pm 1$
48	$20\,189 \pm 1$	$20\,189 \pm 1$	$20\,143 \pm 1$	$20\,143 \pm 1$
54	$20\,191 \pm 1$	$20\,192 \pm 1$	$20\,139 \pm 1$	$20\,139 \pm 1$
60	$20\,195 \pm 1$	$20\,195 \pm 1$	$20\,137 \pm 1$	$20\,136 \pm 1$

**Tabelle 5:** Direkt gemessene Frequenzen des Wagens in den verschiedenen Gängen

Aus den, aus diesen Messwerten, gemittelten Frequenzen für Hin- und Rückfahrt und der Ruhfrequenz (3) können nun die in Tabelle 6 gelisteten Frequenzdifferenzen für Hin- und Rückfahrt berechnet werden.

Gang $g$	Differenzfrequenz hin	Differenzfrequenz zurück
	$\Delta\nu_h$ [Hz]	$\Delta\nu_r$ [Hz]
6	$10 \pm 7$	$4 \pm 7$
12	$13 \pm 7$	$2 \pm 7$
18	$17 \pm 7$	$-1 \pm 7$
24	$19 \pm 7$	$-4 \pm 7$
30	$22 \pm 7$	$-7 \pm 7$
36	$25 \pm 7$	$-10 \pm 7$
42	$28 \pm 7$	$-13 \pm 7$
48	$31 \pm 7$	$-15 \pm 7$
54	$33 \pm 7$	$-19 \pm 7$
60	$37 \pm 7$	$-22 \pm 7$

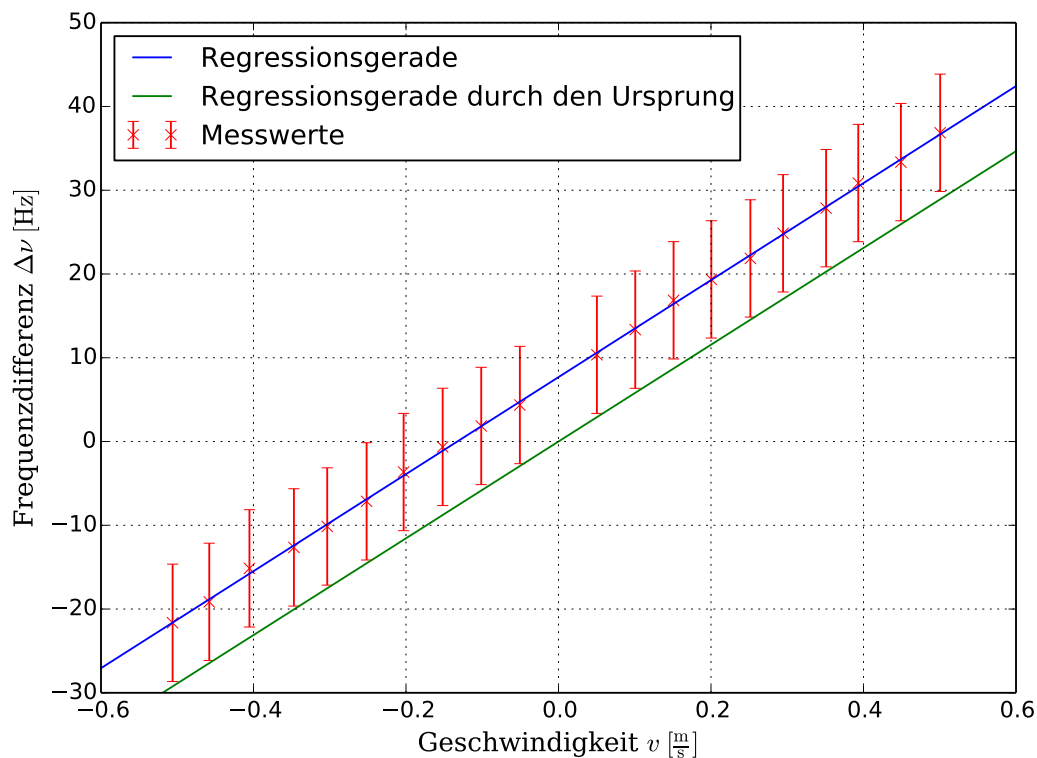
**Tabelle 6:** Frequenzänderungen des Wagens nach der Direkten Methode in den verschiedenen Gängen

Diese Frequenzdifferenzen sind in Abschnitt 4.4 grafische in Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten in Tabelle 3 dargestellt. Dabei sind die Geschwindigkeiten  $v_h$  auf das Mikrofon zu (hin) mit positivem Vorzeichen und die  $v_r$  von diesem weg (zurück) mit negativem Vorzeichen versehen.

Die ebenfalls in Abschnitt 4.4 aufgetragene Regressionsgerade wurde mit Hilfe der Python-Bibliothek *SciPy* [3] bestimmt. Hierfür wurde ein Funktion der Form

$$g(v) = A \cdot v + B \quad (7)$$

als Ansatz gewählt. Die für diesen bestimmten Regressionsparameter  $A$  und  $B$  ergeben



**Abbildung 1:** Direkt bestimmte Frequenzänderung in Abhängigkeit der Geschwindigkeit mit entsprechenden Regressionsgeraden

sich durch die Regression zu

$$A = (57,9 \pm 0,2) \text{ m}^{-1} \quad (7a)$$

$$B = (7,69 \pm 0,08) \text{ Hz} \quad (7b)$$

Nach ?? müsste die eingezeichnete Gerade jedoch durch den Ursprung gehen, mit dieser Prämisse erhält man die zweite ebenfalls in Abschnitt 4.4 eingezeichnete Gerade, deren Parameter

$$A' = (58 \pm 6) \text{ m}^{-1} \quad (7c)$$

$$B' = 0 \text{ Hz} \quad (7d)$$

Im Vergleich mit ?? ist nun offensichtlich, dass der Regressionsparameter  $A$  der inversen Ruhewellenlänge entspricht. Aufgrund der geringen Abweichung der Steigung  $A'$  von  $A$ , wird hier der Wert mit dem geringeren Fehler für den späteren Vergleich als inverse Wellenlänge

$$\lambda_{0,direkt} = A = (57,9 \pm 0,2) \text{ m}^{-1} \quad (8)$$

verwendet.

## 4.5 Bestimmung der Frequenzänderung mit der Schwebungsmethode

Die Messwerte, die für die Frequenzänderung mit Hilfe der Schwebungsmethode aufgenommen wurden befinden sich in Tabelle 7 in der auch die Mittelwerte dieser Messwerte angegeben sind.

Gang $g$	Frequenzdifferenz hin			Frequenzdifferenz zurück		
	$\Delta\nu_{h1}$ [Hz]	$\Delta\nu_{h2}$ [Hz]	$\langle\Delta\nu_h\rangle$ [Hz]	$\Delta\nu_{r1}$ [Hz]	$\Delta\nu_{r2}$ [Hz]	$\langle\Delta\nu_r\rangle$ [Hz]
6	-	-	-	-	-	-
12	$4 \pm 1$	$4 \pm 1$	$4,0 \pm 0,7$	$-11 \pm 1$	$-12 \pm 1$	$-11,5 \pm 0,7$
18	$14 \pm 1$	$14 \pm 1$	$14,0 \pm 0,7$	$-18 \pm 1$	$-18 \pm 1$	$-18,0 \pm 0,7$
24	$17 \pm 1$	$18 \pm 1$	$17,5 \pm 0,7$	$-24 \pm 1$	$-23 \pm 1$	$-23,5 \pm 0,7$
30	$16 \pm 1$	$14 \pm 1$	$15,0 \pm 0,7$	$-28 \pm 1$	$-29 \pm 1$	$-28,5 \pm 0,7$
36	$20 \pm 1$	$19 \pm 1$	$19,5 \pm 0,7$	$-34 \pm 1$	$-34 \pm 1$	$-34,0 \pm 0,7$
42	$28 \pm 1$	$24 \pm 1$	$26,0 \pm 0,7$	$-34 \pm 1$	$-35 \pm 1$	$-34,5 \pm 0,7$
48	$33 \pm 1$	$32 \pm 1$	$32,5 \pm 0,7$	$-34 \pm 1$	$-33 \pm 1$	$-33,5 \pm 0,7$
54	$35 \pm 1$	$36 \pm 1$	$35,5 \pm 0,7$	$-30 \pm 1$	$-28 \pm 1$	$-29,0 \pm 0,7$
60	$39 \pm 1$	$56 \pm 1$	$47,5 \pm 0,7$	$-27 \pm 1$	$-23 \pm 1$	$-25,0 \pm 0,7$

**Tabelle 7:** Direkt gemessene Frequenzen des Wagens in den verschiedenen Gängen

In ?? sind die Mittelwerte der Frequenzänderungen gegen die Geschwindigkeiten aus Tabelle 3 zusammen mit zwei Regressionsgeraden aufgetragen. Dabei sind diese analog zu der in Abschnitt 4.4 beschriebenen Weise mit Hilfe *SciPy* bestimmt worden und die entsprechenden Parameter des Ansatzes

$$g(v) = C \cdot v + D \quad (9)$$

sind

$$C = (80 \pm 5) \text{ m}^{-1} \quad (9a)$$

$$D = (-1 \pm 2) \text{ Hz} \quad (9b)$$

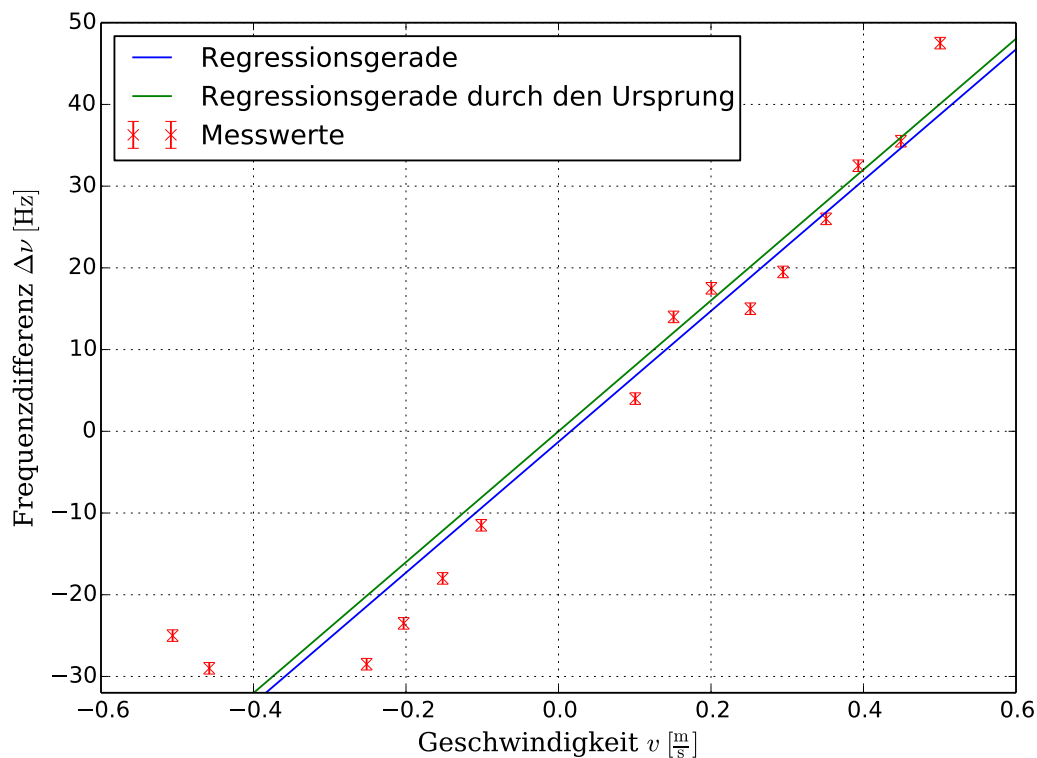
beziehungsweise

$$C' = (80 \pm 5) \text{ m}^{-1} \quad (9c)$$

$$D' = 0 \text{ Hz.} \quad (9d)$$

Da auch diese Regressionsgerade die Form von ?? besitzt zeigt sich, dass die Steigung der Geraden der inversen Ruhewellenlänge entspricht. Da die beiden Geraden keinen Unterschied in ihrer Steigung aufweisen ergibt sich aus der Schwebungsmethode die inverse Wellenlänge

$$\lambda_{0,\text{Schwebung}} = C = (80 \pm 5) \text{ m}^{-1}. \quad (10)$$



**Abbildung 2:** Mit der Schwebungsmethode bestimmte Frequenzänderung in Abhängigkeit der Geschwindigkeit mit entsprechenden Regressionsgeraden

## 4.6 Beurteilung der Messergebnisse durch einen t-Test

Zur Beurteilung, ob zwischen zwei Messreihen  $x_i$  und  $y_i$  vom Umfang  $n_x$  bzw.  $n_y$  der selben Messgröße ein systematischer Fehler besteht, kann der sogenannte studentsche t-Test verwendet werden. Für diesen benötigt man die Prüfgröße  $t$  mit der Definition

$$t = \frac{\langle x \rangle - \langle y \rangle}{\sigma_{\langle x \rangle - \langle y \rangle}}. \quad (11)$$

Die benötigten Größen sind dabei die Mittelwerte  $\langle x \rangle$  und  $\langle y \rangle$  der zwei zu vergleichenden Messreihen, sowie die Standardabweichung der Differenz dieser Mittelwerte  $\sigma_{\langle x \rangle - \langle y \rangle}$ , die unter der Verwendung der Standardabweichungen der Mittelwerte  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  wie folgt definiert ist.

$$\sigma_{\langle x \rangle - \langle y \rangle} = \sqrt{\frac{(n_x - 1)\sigma_x^2 + (n_y - 1)\sigma_y^2}{(n_x - 1) + (n_y - 1)} \cdot \frac{n_x + n_y}{n_x n_y}} \quad (12)$$

In ?? sind die auf diese Weise berechneten Werte für  $\sigma_{\langle x \rangle - \langle y \rangle}$  und  $t$  für die drei Vergleiche der Ergebnisse aus Abschnitt 4.1, 4.4 und 4.5 zu finden. Um eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit eines systematischen Fehlers zwischen den Werten treffen zu können muss, ein aus der Literatur [2] entnommener Referenzwert  $t_{ref}$  bekannt sein. Wird dieser von dem Betrag der Testgröße  $|t|$  überschritten so besteht mit der Wahrscheinlichkeit



$1 - \alpha$  ein systematischer Fehler zwischen den Versuchsergebnissen. Die Größe  $\alpha$  ist damit die vor dem Test festzulegende Irrtumswahrscheinlichkeit, für diesen Test sei  $\alpha = 0.01$ . Die zu vergleichenden Werte seien hier noch einmal gegeben:

$$\lambda_0 = (56 \pm 2) \text{ m}^{-1}$$

$$\lambda_{0,d} = (57,9 \pm 0,2) \text{ m}^{-1}$$

$$\lambda_{0,s} = (80 \pm 5) \text{ m}^{-1}$$

Vergleich	gewichtete Abweichung $\sigma_{\langle x \rangle - \langle y \rangle} [\text{m}^{-1}]$	Prüfgröße $ t $	Referenzwert $t_{ref}$	Wahrscheinlichkeit $P [\%]$
$\lambda_0$ und $\lambda_{0,d}$	0,483	4,668	2,81	99,0
$\lambda_0$ und $\lambda_{0,s}$	2,219	10,986	2,81	99,0
$\lambda_{0,s}$ und $\lambda_{0,d}$	1,068	20,707	2,70	99,0

**Tabelle 8:** Ergebnisse des Studentschen T-Tests

## 4.7 Fehlerrechnung

In diesem Abschnitt sind die mit Hilfe der gaußschen Fehlerfortpflanzung berechneten Fehlergleichungen gegeben, mit denen die Abweichungen der in Abschnitt 4 erhaltenen Messergebnisse berechnet wurden.

Der allgemeine Fehler, des Mittelwerts  $\mathbb{M}(x_i)$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  durch Gaußsche Fortpflanzung ergibt sich aus der Gleichung:

$$\sigma_{\mathbb{M}} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2} \quad (\text{I})$$

Die Fehler der Wellenlängen in Tabelle 1 berechnen sich nach:

$$\sigma_{\lambda} = \frac{\sigma_s}{n} \quad (\text{II})$$

Der Fehler der inversen Wellenlängen in Tabelle 1 ergibt sich vereinfacht aus:

$$\sigma_{\lambda^{-1}} = \frac{\sigma_{\lambda}}{\lambda^2} \quad (\text{III})$$

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{l^2 \sigma_t^2}{t^4} + \frac{\sigma_l^2}{t^2}} \quad (\text{IV})$$

$$\sigma_c = \sqrt{\lambda^2 \sigma_{\nu}^2 + \nu^2 \sigma_{\lambda}^2} \quad (\text{V})$$

$$\sigma_{\Delta\nu} = \sqrt{\sigma_{\nu}^2 + \sigma_{\nu_0}^2} \quad (\text{VI})$$

## 5 Diskussion

Im Folgenden sollen die in Abschnitt 4 gewonnenen Messergebnisse noch einmal abschließend diskutiert und auf ihre Plausibilität hin untersucht werden. Dabei werden auch der verwendete Versuchsaufbau und die Versuchsdurchführung mit diesen in Bezug gesetzt.

Die in Abschnitt 4.3 bestimmte Schallgeschwindigkeit zeigt eine Abweichung von  $(6 \pm 4) \%$  vom Literaturwert  $c_{lit} = 343 \text{ m s}^{-1}$  [1] für trockene Luft bei  $20^\circ\text{C}$ . Diese Abweichung ist durch Ungenauigkeiten der Messungen für die Ruhfrequenz und -wellenlänge, welche sich vor allem in Tabelle 4 zeigt. Ein Grund für diese Ungenauigkeit ist das kurze Messintervall von nur einer Sekunde, durch eine Messung über mehrere Sekunden würden diese Abweichungen durch das Mitteln über einen längeren Zeitraum verringert wodurch eine genauere Messung möglich wäre.

Die Bestimmung der inversen Wellenlänge in den drei Teilversuchen in den Abschnitten 4.1, 4.4 und 4.5 erfolgte in allen drei Versuchen mittels einer anderen Messmethode und so ergeben sich für jede dieser Methoden unterschiedliche und unterschiedlich genaue Messwerte. Schon offensichtlich ist, dass der mit Hilfe der Schwebungsmethode bestimmte Wert mit  $44 \%$  zur Wellenlängenmessung und  $38 \%$  zur direkten Messung große Abweichungen aufweist. Während die Abweichung zwischen den andern beiden Messungen mit  $4 \%$  nicht besonders groß ausfällt. Der mit diesen Werten durchgeführte studentsche t-Test unterstreicht einerseits den beschriebenen ersten Eindruck, da die Prüfgrößen der beiden Vergleiche mit dem Ergebnis der Schwebungsmethode unverhältnismäßig viel höher sind als die jeweilige Referenzgröße. Somit zeigt auch der t-Test, dass mit hoher Wahrscheinlichkeit systematische Fehler zwischen diesem und den anderen Werten vorliegen. Andererseits liefert der t-Test dieses Ergebnis auch für den Vergleich zwischen den anderen beiden Werten, obwohl sich diese auf den ersten Blick nicht wesentlich unterscheiden.

Gründe für die abweichenden Ergebnisse der drei Messungen sind in dem verwendeten Versuchsaufbau zu finden. Hier ist vor allem die Zugvorrichtung und das Fahrverhalten des Wagens zu nennen, da dieser vor allem bei den hohen Geschwindigkeiten eher über die Schiene schleift als zu rollen. Dies beeinflusst maßgeblich die Ergebnisse der Schwebungsmessung, wodurch die in Tabelle 7 zu sehenden Abweichungen auftreten.

## Literatur

- [1] Günther Simon Dietmar Mende. *Physik. Gleichungen und Tabellen*. 16. Aufl. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag München, 2009.
- [2] Christof Schuster Jürgen Bortz. *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler*. 7. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [3] *SciPy*. URL: <http://docs.scipy.org/doc/> (besucht am 18.01.2014).