

1 Einleitung

2 Theorie

3 Durchführung

4 Auswertung

Im Folgenden sind die während des Versuchs aufgenommenen Daten und die aus diesen berechneten Größen tabellarisch aufgetragen. An entsprechender Stelle sind Erklärungen zu den Werten und Berechnungen gegeben.

In Tabelle 1 befinden sich die für die Auswertung verwendeten Messdaten für die Temperaturen T_1 und T_2 , die Drücke p_b und p_a , sowie die Zeit t der Aufnahme nach Beginn des Versuchs.

Zeit t [s]	Temperatur T_1 [°C]	Druck p_b [bar]	Temperatur T_2 [°C]	Druck p_a [bar]
0	$26,6 \pm 0,1$	$7,0 \pm 0,5$	$17,4 \pm 0,1$	$4,6 \pm 0,2$
90	$28,0 \pm 0,1$	$7,5 \pm 0,5$	$16,5 \pm 0,1$	$4,6 \pm 0,2$
180	$30,1 \pm 0,1$	$7,9 \pm 0,5$	$15,1 \pm 0,1$	$4,4 \pm 0,2$
270	$32,1 \pm 0,1$	$8,0 \pm 0,5$	$13,9 \pm 0,1$	$4,2 \pm 0,2$
360	$34,0 \pm 0,1$	$8,5 \pm 0,5$	$12,7 \pm 0,1$	$4,1 \pm 0,2$
450	$35,2 \pm 0,1$	$9,0 \pm 0,5$	$11,9 \pm 0,1$	$4,0 \pm 0,2$
540	$37,0 \pm 0,1$	$9,0 \pm 0,5$	$10,9 \pm 0,1$	$4,0 \pm 0,2$
630	$38,6 \pm 0,1$	$9,5 \pm 0,5$	$9,8 \pm 0,1$	$3,9 \pm 0,2$
720	$40,2 \pm 0,1$	$10,0 \pm 0,5$	$8,9 \pm 0,1$	$3,9 \pm 0,2$
810	$41,7 \pm 0,1$	$10,0 \pm 0,5$	$8,0 \pm 0,1$	$3,8 \pm 0,2$
900	$43,1 \pm 0,1$	$10,5 \pm 0,5$	$7,2 \pm 0,1$	$3,6 \pm 0,2$
990	$44,5 \pm 0,1$	$11,0 \pm 0,5$	$6,5 \pm 0,1$	$3,6 \pm 0,2$
1080	$45,8 \pm 0,1$	$11,0 \pm 0,5$	$5,9 \pm 0,1$	$3,6 \pm 0,2$
1170	$46,6 \pm 0,1$	$11,5 \pm 0,5$	$5,4 \pm 0,1$	$3,6 \pm 0,2$
1260	$47,9 \pm 0,1$	$12,0 \pm 0,5$	$4,9 \pm 0,1$	$3,6 \pm 0,2$
1350	$49,0 \pm 0,1$	$12,0 \pm 0,5$	$4,4 \pm 0,1$	$3,5 \pm 0,2$

Tabelle 1: Messwerte der Temperaturen und Drücke

In Abbildung 1 und 2 sind die Temperaturverläufe für T_1 und T_2 jeweils mit der entsprechenden Regressionskurve dargestellt. Die mit Hilfe der Python Bibliothek *SciPy* bestimmten Regressionsparameter für die Kurven der Form $T(t) = At^2 + Bt + C$ sind in Tabelle ?? gelistet.

Aus den Regressionskurven für die Temperaturverläufe lassen sich nun deren Differentialquotienten $\frac{dT_1}{dt}$ und $\frac{dT_2}{dt}$ bestimmen, durch die, die gesuchten Apparaturgrößen berech-

Funktion	A	B	C
T_1	$(-3,87 \pm 0,29) \cdot 10^{-6}$	$(2,20 \pm 0,04) \cdot 10^{-4}$	$299,49 \pm 0,12$
T_2	$(3,59 \pm 0,20) \cdot 10^{-6}$	$(-1,47 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$	$290,76 \pm 0,09$

Tabelle 2: Parameter der Regression mit $T(t) = At^2 + Bt + C$

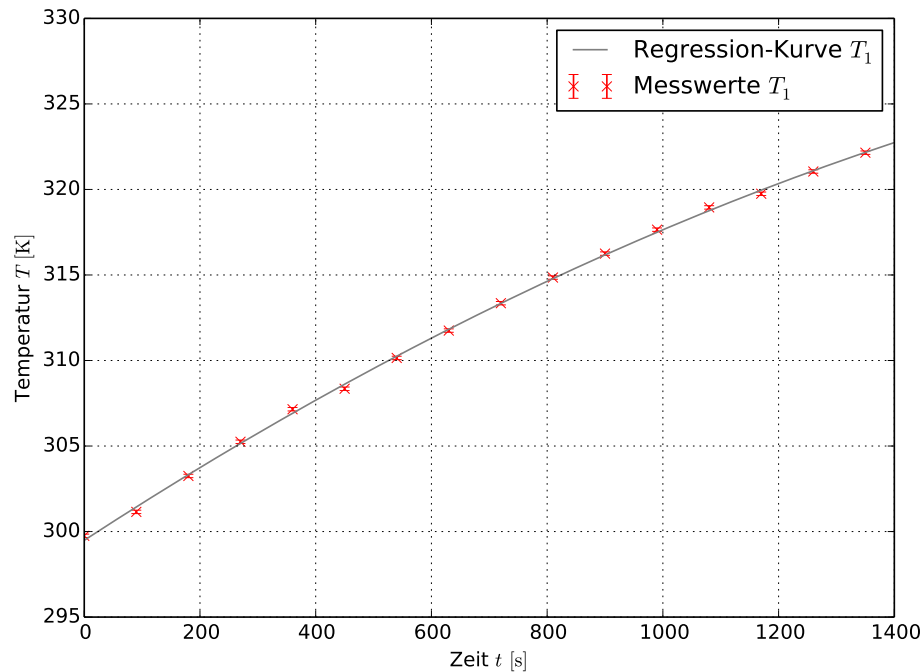


Abbildung 1: Temperaturverlauf mit Regressionskurve von T_1

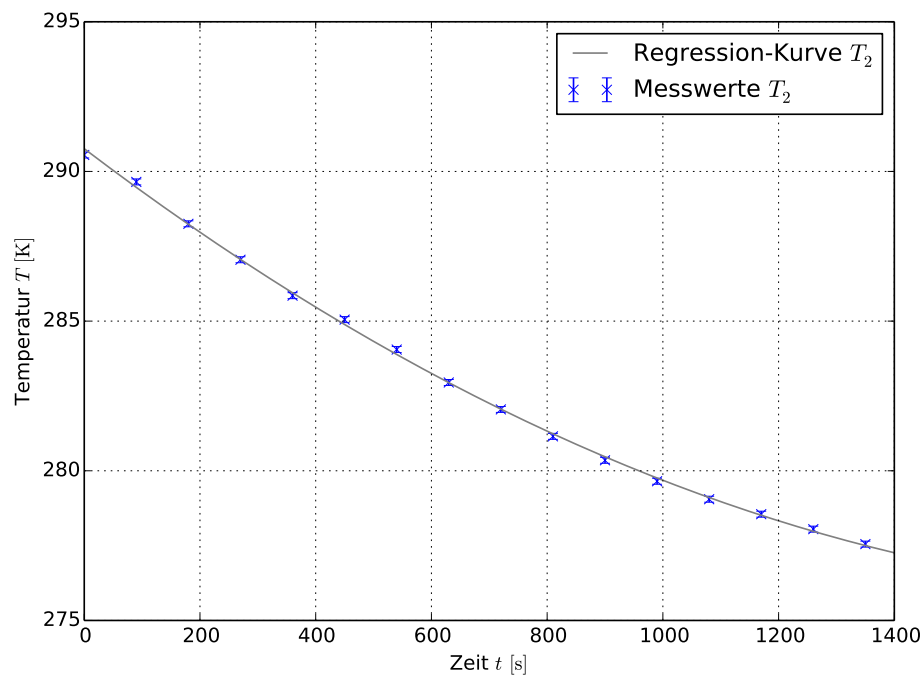


Abbildung 2: Temperaturverlauf mit Regressionskurve von T_2

net werden können. Die Differentialquotienten $\frac{dT_1}{dt}$ und die berechneten, idealen und realen, Güteziffern sowie deren Verhältnis sind in Tabelle 3 und die Differentialquotienten $\frac{dT_2}{dt}$ und der daraus bestimmte Massendurchsatz des Transportgases $\frac{dm}{dt}$ in Tabelle 4 zu finden.

4.1 Güteziffern

Die Berechnung der idealen Güteziffer erfolgt nach (??) durch einsetzen der Temperaturen T_1 und T_2 zu den entsprechenden Zeiten. Die reale Güteziffer errechnet sich aus durch Einsetzen von (??) in (??) und Ersetzen des Differenzenquotienten $\frac{\Delta T_1}{\Delta t}$ durch den Differentialquotienten $\frac{dT_1}{dt}$ sodass man

$$\nu_{real} = \frac{(m_1 c_w + m_k c_k)}{P} \frac{dT_1}{dt} \quad (1)$$

erhält. Dabei ist $m_1 c_w$ die Wärmekapazität des Wassers in Reservoir 1, die sich aus dem Produkt der Masse m_1 und der spezifischen Wärmekapazität c_w des Wassers ergibt. Mit $c_w = 4,182 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ und $m_1 = V_1 \rho_w = 3,992 \text{ kg}$, wobei $V_1 = 3 \text{ dm}^3$ das Volumen und $\rho_w = 0,998 \text{ g cm}^{-3}$ die Dichte des Wassers bei 21°C sind. Die Wärmekapazität der Apparatur ist gegeben durch $m_k c_k = 750 \text{ J K}^{-1}$ und die gemessene Leistung $P = (125 \pm 5) \text{ W}$.

Zeit $t \text{ [s]}$	Differentialquotient $\frac{dT_1}{dt} [\text{K s}^{-1}]$	reale Güteziffer $\nu_{real} [1]$	ideale Güteziffer $\nu_{id} [1]$	relativer Unterschied $\frac{\nu_{real}}{\nu_{id}}$
270	$0,0206 \pm 0,0004$	$2,879 \pm 0,115$	$20,217 \pm 0,186$	0,142
450	$0,0192 \pm 0,0005$	$2,684 \pm 0,107$	$14,420 \pm 0,093$	0,186
630	$0,0178 \pm 0,0005$	$2,490 \pm 0,100$	$11,883 \pm 0,062$	0,210
810	$0,0165 \pm 0,0006$	$2,296 \pm 0,092$	$10,011 \pm 0,043$	0,229

Tabelle 3: Reale und ideale Güteziffer im Verhältnis

4.2 Massendurchsatz und mechanische Leistung

Die Berechnung des Massendurchsatzes $\frac{dm}{dt}$ erfolgt durch Einsetzen von (??) in (??) (mit Differentialquotienten), wodurch man die Gleichung

$$(m_2 c_w + m_k c_k) \frac{dT_2}{dt} = L \frac{dm}{dt} \quad (2)$$

erhält.

Zur Bestimmung der Verdampfungswärme L wurden in Abbildung 3 die Messwerte für p_b halb-logarithmisch gegen die reziproken Temperaturen $\frac{1}{T_1}$ aufgetragen. Aus **V203** kann entnommen werden das zwischen p und T der exponentielle Zusammenhang

$$p(T) = p_0 \exp\left(\frac{-L}{RT}\right) \quad (3)$$

besteht. Durch die halb-logarithmische Skalierung und dem Aufrufen gegen den Kehrwert der Temperatur $x := \frac{1}{T_1}$ erhält man daraus eine Geradengleichung der Form

$$\ln(p(x)) = \frac{-L}{R}x + \ln(p_0). \quad (4)$$

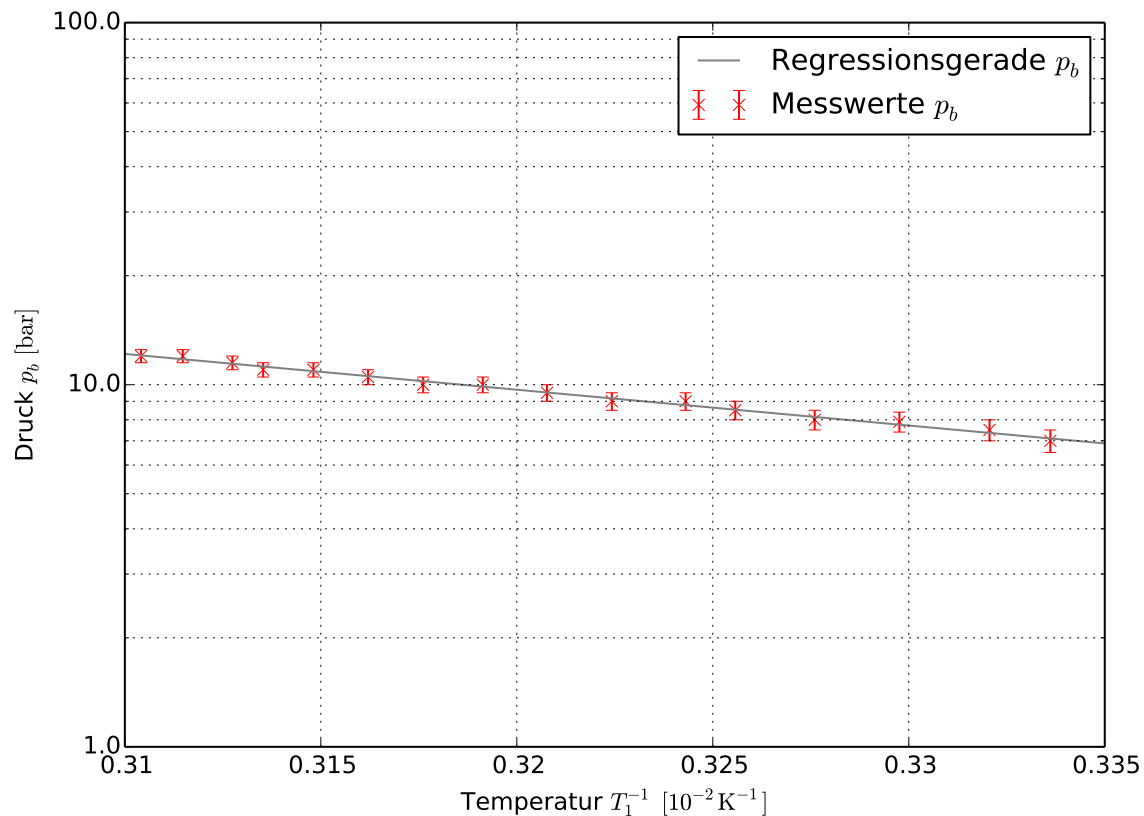


Abbildung 3: Regression der (T_1, p_b) Wertepaare

Durch die mit *Scipy* durchgeführte lineare Regression erhält man die Geradensteigung

$$\frac{-L}{R} = (-2276,72 \pm 59,81) \text{ K}$$

und daraus mit der allgemeinen Gaskonstante $R = 8,315 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$ **SciPy** die Verdampfungswärme zu

$$L = (1,89 \pm 0,05) \cdot 10^4 \text{ Jmol}^{-1}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes und der Werte $m_2 c_w = 3,992 \text{ kg}$ und $m_k c_k = 750 \text{ JK}^{-1}$ in (2) ergibt sich jeweils der gesuchte Massendurchsatz.

Durch den Massendurchsatz kann unter Verwendung von (??) die mechanische Leistung des Kompressors bestimmt werden. Das ρ in (??) ist dabei durch die allgemeine

Gasgleichung

$$pV = nRT \quad (5)$$

den gegebenen Größen des verwendeten Gas ($\text{Cl}_2\text{F}_2\text{C}$), Dichte unter Normalbedingungen¹ $\rho_0 = 5,51 \text{ gl}^{-1}$ und dem Adiabatenexponent $\kappa = 1,14$ und den vorliegenden Zustandsgrößen T_2 und p_a zu berechnen. Man erhält damit die Gleichung

$$\rho = \frac{T_2 p_0}{p_a T_0 \rho_0}. \quad (6)$$

Durch Einsetzen von (6) in (??) erhält man

$$P_{\text{mech}} = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b \sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{p_a T_0 \rho_0}{T_2 p_0} \frac{dm}{dt} \quad (7)$$

womit die gesuchte mechanische Leistung aus den gegebenen Größen berechnen kann.

Zeit t [s]	Differentialquotient $\frac{dT_2}{dt} [K s^{-1}]$	Massendurchsatz $\frac{dm}{dt} [\text{gs}^{-1}]$	Mechanische Leistung $P_{\text{mech}} [\text{W}]$
270	$-0,0134 \pm 0,0002$	$1,479 \pm 0,050$	15,075
450	$-0,0121 \pm 0,0003$	$1,336 \pm 0,049$	16,976
630	$-0,0108 \pm 0,0003$	$1,193 \pm 0,049$	16,843
810	$-0,0095 \pm 0,0004$	$1,050 \pm 0,051$	17,234

Tabelle 4: Massendurchsatz und mechanische Leistung des Transportgases

4.3 Fehlerrechnung

Im Folgende sind die, mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmten Gleichungen für die Fehler der zu bestimmenden Größen. Lediglich von der Angabe eines Fehler für P_{mech} wurde abgesehen, da die entsprechende Fehlergleichung eine zu hohe Komplexität aufwies.

Der Fehler der realen Güteziffer $\nu_{\text{real}}(\frac{dT_1}{dt}, P)$ er gibt sich aus:

$$\sigma_{\nu_{\text{real}}} = (c_k m_k + c_w m_1) \sqrt{\frac{\sigma_{dT_1}^2}{P^2} + \frac{dT_1^2 \sigma_P^2}{P^4}}$$

Für den Fehler der idealen Güteziffer $\nu_{\text{id}}(T_1, T_2)$ erhält man, wegen $\sigma_{T_1} = \sigma_{T_2} = \sigma_T$ die

¹ $T_0 = 0^\circ\text{C}$ und $p_0 = 1 \text{ bar}$

Gleichung:

$$\sigma_{\nu_{ideal}} = \sigma_T \sqrt{\frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)^4} + \left(-\frac{T_1}{(T_1 - T_2)^2} + \frac{1}{T_1 - T_2} \right)^2}$$

Der Fehler des Massendurchsatzes $\frac{dm}{dt}(\frac{dT_2}{dt}, L)$ erhält man analog zu $\sigma_{\nu_{real}}$ aus:

$$\sigma_{\nu_{real}} = (c_k m_k + c_w m_2) \sqrt{\frac{\sigma_{dT_2}^2}{L^2} + \frac{dT_2^2 \sigma_L^2}{L^4}}$$

Der Fehler der Verdampfungswärme L ergibt sich vereinfacht aus:

$$\sigma_L = R \sigma_{L/R}$$

5 Diskussion

Wie schon durch die Fragestellung in der Anleitung suggeriert weisen die realen Güteziffern einen großen Unterschied zu den idealen Güteziffern auf. An dem in Tabelle 3 aufgeführten Verhältnis dieser beiden Güteziffern ist zusehen, dass die reale Güteziffer durchschnittlich nur ca. 20% der idealen Güteziffer entspricht. Eine Begründung für diese große Abweichung ist der hohe Verlust an Energie durch Reibung und Widerstand, dies ist gut an der Mechanischen Leistung in Seite 5 zu sehen. Das Verhältnis von mechanischer zu aufgewandter elektrischer Leistung $P = (125 \pm 5) \text{ W}$ liegt im Mittel ($\langle P_{\text{mech}} \rangle = 16,53 \text{ W}$) bei ca. 13%. Das heißt, dass nur etwas mehr als ein Zehntel der bei der idealisierten Rechnung verwendeten Leistung in der realen Situation tatsächlich genutzt werden kann.

Auch ist zu bemerken, dass, obwohl beide Güteziffern mit voranschreitender Zeit abnehmen, das Verhältnis mit der Zeit zunimmt. Der Grund dafür ist auch aus Tabelle 3 zu entnehmen. Während die reale Güteziffer bei der letzten gezeigten Zeit noch etwa 80% des ersten Wertes hat, hat sich der Wert der idealen Güteziffer mehr als halbiert. Dies lässt sich durch den schon in der Anleitung herausgestellten Zusammenhang des idealen Wirkungsgrads und der Temperaturdifferenz zwischen den beiden Reservoirs (siehe (??)) begründen, da die Temperatur in dem einen Reservoir größer und in dem anderen kleiner wird fällt die ideale Güteziffer schneller als die reale. Im Gegensatz dazu hängt die reale Güteziffer nur von der Änderung der Temperatur in Reservoir 1 ab und verringert sich somit nicht auch noch bei abnehmender Temperatur in Reservoir 2, dies führt zu einem langsameren Abfallen der Güteziffer.

Zusammenfassend ist somit zu sagen, dass die Effizienz thermodynamische Maschinen weit unter der theoretisch möglichen liegen, da immer Verlust in Form von nicht konservativen Kräften auftreten, die die Leistung einer solchen Maschine im Vergleich zum idealisierten Fall erheblich verringern.