

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DORTMUND

ANFÄNGERPRAKTIKUM PHYSIK
WINTERSEMESTER
13/14

V351
Fourier-Analyse und Synthese

09. Januar 2014

Johannes Schlüter
Joshua Luckey

johannes.schlueter@udo.edu
joshua.luckey@udo.edu

1 Einleitung

Bei der Fourier-Analyse werden bei verschiedenen Spannungen (hier: Dreieck-, Rechteck- und Sägezahnspannung) die Fourier-Amplituden vermessen und mit den vorher ermittelten, theoretischen Werten verglichen. Anschließend werden aus errechneten Oberschwingungen verschiedene Spannungen synthetisiert.

2 Theorie

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n \frac{2\pi}{T} t) + b_n \sin(n \frac{2\pi}{T} t)) \quad (1)$$

Mithilfe von Fourier-Reihen (1) lassen sich periodische Funktionen sehr gut approximieren. Eine Einschränkung ist hierbei das Gibb'sche Phänomen, es tritt an Unstetigkeiten der ursprünglichen Funktion auf. An diesen Stellen tritt eine endlich große Abweichung auf, welche durch erhöhte Anzahl der Polynome auch nicht verschwindet.

Für die Fourier-Koeffizienten gilt:

$$a_n = \frac{T}{2} \int_0^T f(t) \cos(n \frac{2\pi}{T} t) dt \quad (2)$$

und

$$b_n = \frac{T}{2} \int_0^T f(t) \sin(n \frac{2\pi}{T} t) dt \quad (3)$$

Die Fourier-Transformation einer Funktion ist gegeben durch

$$g(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ivt} dt. \quad (4)$$

Mithilfe dieser Transformation lässt sich das Frequenzspektrum der Funktion direkt bestimmen. Dabei erhält man für eine bestimmte Frequenz v die entsprechende Amplitude.

3 Berechnung der Fourierkoeffizienten

Im Folgendem werden die für den Versuch benötigten Fourierkoeffizienten der in den Abbildungen 1 bis 3 dargestellten Spannungen berechnet.

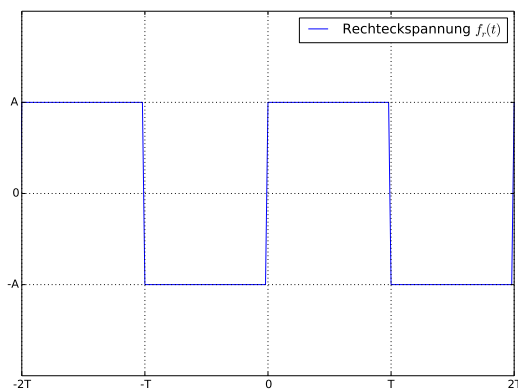


Abbildung 1: Für die Berechnung genutzte Rechteckspannung

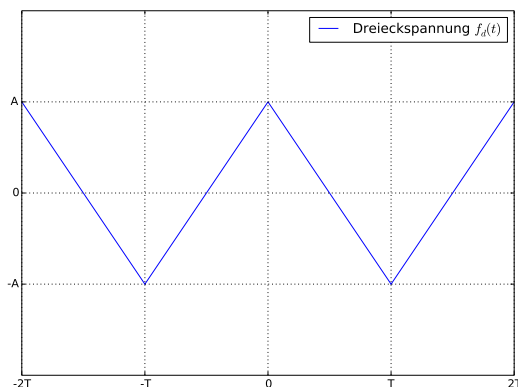


Abbildung 2: Für die Berechnung genutzte Dreieckspannung

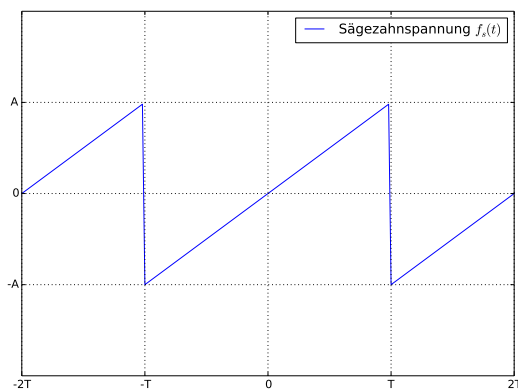


Abbildung 3: Für die Berechnung genutzte Sägezahnspannung

3.1 Rechteckspannung

Die Fourierkoeffizienten der in Abbildung 1 dargestellten Spannung mit der Definition

$$f_r(t) = \begin{cases} -A & , -T < t < 0 \\ A & , 0 < t < T \end{cases} \quad (5)$$

berechnen sich zu:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) dt = 0, \text{ da } f(t) \text{ ungerade} \quad (6)$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt = 0, \text{ da } f(t) \text{ ungerade} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T A \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \\ &= \frac{2A}{n\pi} \left[-\cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) \right]_0^T \\ b_n &= \frac{2A}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] = \begin{cases} \frac{4A}{n\pi} & , n \bmod 2 \neq 0 \\ 0 & , n \bmod 2 = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

3.2 Dreieckspannung

Die Fourierkoeffizienten der in Abbildung 2 dargestellten Spannung mit der Definition

$$f_d(t) = A - \frac{2A}{T}|t|, \quad -T < t < T \quad (9)$$

berechnen sich zu:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) dt = 0, \text{ in Abbildung 2 ersichtlich} \quad (10)$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt = 0, \text{ da } f(t) \text{ gerade} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(A - \frac{2A}{T}|t| \right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \\
&= \frac{2}{T} \int_0^T \left(A - \frac{2A}{T}t \right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \\
&= \frac{2A}{T} \left(\underbrace{\int_0^T \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt}_{=0} \right) - \frac{4A}{T^2} \left(\int_0^T t \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \right) \\
&= -\frac{4A}{T^2} \left(\underbrace{\left[\frac{Tt}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) \right]_0^T}_{=0} - \frac{T}{n\pi} \int_0^T \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \right) \\
&= -\frac{4A}{T^2} \left(-\frac{T^2}{(n\pi)^2} \left[-\cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) \right]_0^T \right) \\
&= -\frac{4A}{(n\pi)^2} (\cos(n\pi) - 1)
\end{aligned}$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{8A}{(n\pi)^2} & , n \bmod 2 \neq 0 \\ 0 & , n \bmod 2 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

3.3 Sägezahnspannung

Die Fourierkoeffizienten der in Abbildung 3 dargestellten Spannung mit der Definition

$$f_s(t) = -\frac{A}{T}t, \quad -T < t < T \quad (13)$$

berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) dt = 0, \text{ da } f(t) \text{ ungerade} \\ a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt = 0, \text{ da } f(t) \text{ ungerade} \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \\ &= -\frac{2A}{T^2} \int_0^T t \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \\ &= -\frac{2A}{T^2} \left[-\frac{tT}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) + \frac{T^2}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) \right]_0^T \\ b_n &= \frac{2A}{n\pi} \cos(n\pi) = \begin{cases} -\frac{2A}{n\pi}, & n \bmod 2 \neq 0 \\ \frac{2A}{n\pi}, & n \bmod 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4 Durchführung

4.1 Fourier-Analyse

Der Versuchsaufbau für den ersten Versuchsteil besteht aus einem Funktionengenerator und einem Digitaloszilloskop.

Bei der Fourier-Analyse wird vom Funktionsgenerator jeweils eine Dreieck-, Rechteck- und Sägezahnspannung generiert. Die erzeugten Spannungen werden vom Oszilloskop mittels einer Fast-Fourier-Transformation (FFT) in das Frequenzspektrum umgerechnet und angezeigt. Die Amplituden und Frequenzen können am Oszilloskop abgelesen werden.

4.2 Fourier-Synthese

Für den Aufbau wird natürlich weiterhin das Oszilloskop verwendet, dazu kommt nun noch der Oberwellengenerator. Bei der Fourier-Synthese werden mit dem Oberwellengenerator bis zu zehn Sinus-Schwingungen mit ganzzahligen Frequenzverhältnissen so eingestellt, dass die Amplitudenverhältnisse und Phasen in Relation zur Grundschwingung mit denen der Errechneten übereinstimmen.

Die Phasen werden über die Lissajous-Figuren des Phasenverhältnisses der Grundschwingung und der jeweiligen Oberschwingung eingestellt. Alle Phasen bei ungeraden Fourier-Amplituden werden auf $\phi = 0$ ausgerichtet und die geraden auf $\phi = \pi/2$. Anschließend wird die Summenspannung auf dem Oszilloskop ausgegeben.

5 Auswertung

Im Folgenden sind die während des Versuchs aufgenommenen Messwerte tabellarisch dargestellt. Da die selbst berechneten Fourierkoeffizienten zu Beginn des Versuchs noch Fehler aufwiesen, wurden für die Versuchsdurchführung folgende Fourierkoeffizienten verwendet.

$$\text{Rechteck: } b_n = \frac{4A}{n\pi}, n \bmod 2 \neq 0 \quad (14a)$$

$$\text{Dreieck: } b_n = \frac{4A}{(n\pi)^2}, n \bmod 2 \neq 0 \quad (14b)$$

$$\text{Sägezahn: } b_n = \frac{2A}{n\pi}, \forall n \quad (14c)$$

5.1 Fourier-Analyse

In Tabelle 1 befinden sich sowohl die im Versuch gemessenen, als auch die aus den Koeffizienten (14a) bis (14c) berechneten Amplituden der ersten Oberschwingungen, aus denen sich das jeweilige Signal mit der Frequenz $\nu_1 = 100 \text{ Hz}$ und der Amplitude $\hat{U} = 2 \text{ V}$ zusammensetzt.

Frequenzen $\nu \text{ [Hz]}$	Gemessene Amplitude $b_n \text{ [V]}$	Berechnete Amplitude $b_n \text{ [V]}$	Relative Abweichung $\left 1 - \frac{b_n}{b_{n,theo}}\right $
100	1,80	1,800	0,00
300	0,60	0,600	0,00
500	0,34	0,360	0,06
700	0,25	0,257	0,03
900	0,19	0,200	0,05
1100	0,14	0,164	0,14

Tabelle 1: Gemessene und Berechnete Amplituden der Oberschwingung der Rechtspannung

Frequenzen $\nu \text{ [Hz]}$	Gemessene Amplitude $b_n \text{ [V]}$	Berechnete Amplitude $b_n \text{ [V]}$	relative Abweichung $\left 1 - \frac{b_n}{b_{n,theo}}\right \text{ []}$
100	1,16	1,160	0,00
300	0,16	0,129	0,24
500	0,08	0,046	0,72
700	0,05	0,024	0,94
900	0,04	0,014	1,79

Tabelle 2: Gemessene und Berechnete Amplituden der Oberschwingung der Dreieckspannung

Frequenzen $\nu \text{ [Hz]}$	Gemessene Amplitude $b_n \text{ [V]}$	Berechnete Amplitude $b_n \text{ [V]}$	relative Abweichung $\left 1 - \frac{b_n}{b_{n,theo}}\right \text{ []}$
100	0,88	0,880	0,00
200	0,45	0,440	0,02
300	0,29	0,293	0,01
400	0,24	0,220	0,07
500	0,20	0,176	0,14
600	0,15	0,147	0,01
700	0,12	0,126	0,05

Tabelle 3: Gemessene und Berechnete Amplituden der Oberschwingung der Sägezahnspannung

5.2 Fourier-Synthese

Die für die Fourier-Synthese benötigten Amplituden wurden aus den Koeffizienten (14a) bis (14c) bestimmt. Wobei die Amplitude A der zu erzeugenden Spannung jeweils aus dem Koeffizienten der ersten Oberwelle $b_1 = 0,8 \text{ V}$ berechnet wurde. Die Berechnung sei beispielhaft an der Rechteckspannung gezeigt:

$$b_n = \frac{4A_r}{n\pi}, \quad n = 1$$

$$b_1 = \frac{4A_r}{\pi}$$

$$A_r = b_1 \frac{\pi}{4}, \quad b_1 = 0,8 \text{ V}$$

$$A_r = 0,2 \text{ V} \cdot \pi$$

Damit ergeben sich die Amplituden A der Koeffizienten zu:

$$\begin{aligned} \text{Rechteck:} \quad A_r &= 0,2 \text{ V} \cdot \pi \\ \text{Dreieck:} \quad A_d &= 0,2 \text{ V} \cdot \pi^2 \\ \text{Sägezahn:} \quad A_s &= 0,4 \text{ V} \cdot \pi \end{aligned}$$

Die aus diesen berechneten Amplituden der Oberwellen sind in Tabelle 4 zu finden, wobei nicht auftretende Amplituden durch „-“ dargestellt sind.

Oberwelle n	Rechteck Amplitude $b_{n,r} [\text{V}]$	Dreieck Amplitude $b_{n,d} [\text{V}]$	Sägezahn Amplitude $b_{n,s} [\text{V}]$
1	0,80	0,80	0,80
2	-	-	0,40
3	0,27	0,09	0,27
4	-	-	0,20
5	0,16	0,03	0,16
6	-	-	0,13
7	0,11	0,02	0,11
8	-	-	0,10
9	0,09	0,01	0,09
10	-	-	0,08

Tabelle 4: Zur Synthese verwandte Amplituden der ersten 10 Oberwellen

Durch Einstellen der Amplituden aus Tabelle 4 und der Phasen zwischen den Oberwellen am Oberwellengenerator erhält man die in Abbildungen 4 bis 6 dargestellten Spannungsverläufe.

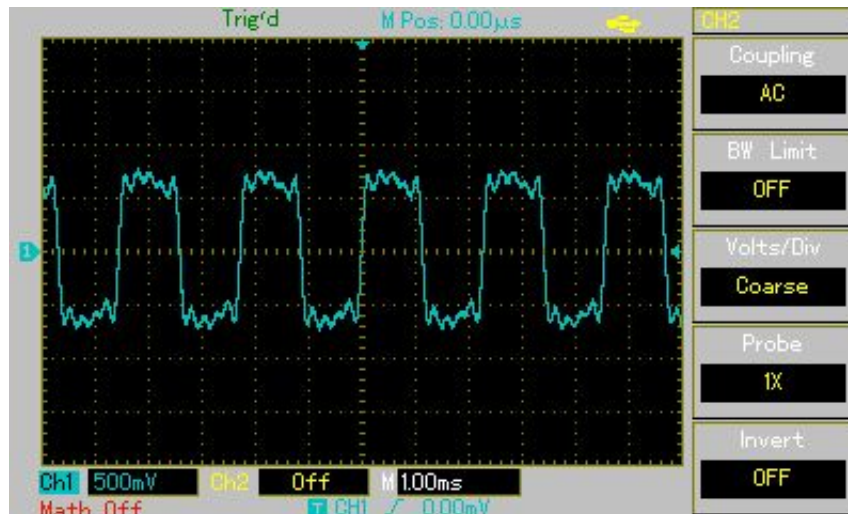


Abbildung 4: Synthetisierte Rechteckspannung

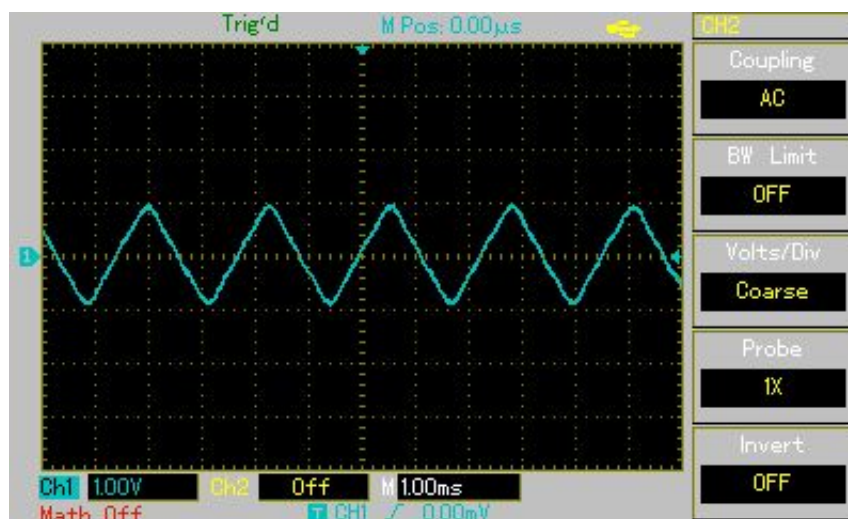


Abbildung 5: Synthetisierte Dreieckspannung

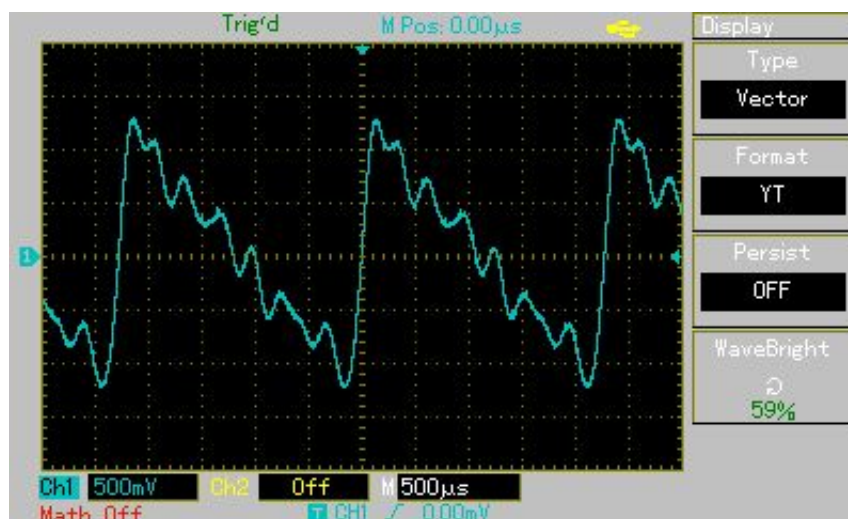


Abbildung 6: Synthetisierte Sägezahnspannung

6 Diskussion

Im folgenden Abschnitt werden die in der Auswertung gewonnen Ergebnisse noch einmal abschließend diskutiert und auf ihre Plausibilität hin untersucht. Dabei werden, falls erforderlich, auch Versuchsauswertung und Durchführung mit den erhaltenen Ergebnissen in Bezug gesetzt.

Die in Abschnitt 5.1 gemessenen Amplituden der ersten Oberschwingungen weisen nur kleine Abweichungen gegenüber den theoretische berechneten Koeffizienten auf und zeigen somit einen plausiblen Verlauf. Bei Betrachtung der Amplituden der Rechteck- und Sägezahnspannung in Tabelle 1 und 3 ist festzustellen, dass die Abweichungen im Bereich von 0 % bis 14 % liegen. Diese Abweichungen sind durch systematische Fehler der Versuchsdurchführung zu begründen. So wird die Fouriertransformation (FFT) des Signals nur auf den Bereich ausgeführt der auf dem Oszilloskop angezeigt wird, wohingegen die theoretischen Werte die Koeffizienten einer unendlichen Summe(Reihe) darstellen.

Die Größere Abweichungen für die höheren Frequenzen lassen sich ebenfalls dadurch Begründen, da der so gemachte Fehler für kleine Amplituden relativ größer ist.

Die teils sehr großen Abweichungen der Amplituden in Tabelle 2 lassen sich ähnlich Begründen, da die Koeffizienten im Gegensatz zu den andren Spannungen bei der Dreiecksspannung mit n^{-2} abfallen werden diese wie in Tabelle 2 zu sehen schnell klein, wodurch wiederum der relative Fehler der gemessen Werte wächst.

Die aus den berechneten Werten in Tabelle 4 erstellten Spannungen, zeigen wie in Abbildung 4, 5 und 6 zu sehen einen erkennbaren und somit plausiblen Verlauf, wobei vor allem die Dreiecksspannung als einziges stetiges Signal schon mit 5 Oberschwingungen eine sehr klare Darstellung besitzt. Dies liegt wie bereits gesagt, an dem schnellen Abfall der Koeffizienten, sodass höhere Oberschwingungen nur noch geringe Auswirkungen auf den Kurvenverlauf haben. Bei den anderen beiden Spannungen lassen sich noch größere Abweichungen von dem gewünschten Verlauf feststellen, dies liegt jedoch einerseits an dem wenige starken Abfall der Koeffizienten und andererseits an der Unstetigkeit der beiden Signale und dem daraus folgenden Gibbschen Phänomen, welches zu einem Überspringen an eben diesen Unstetigkeits-/Sprungstellen führt.