

# 1 Einleitung

In dem Versuch V206 „Die Wärmepumpe“ wird der Vorgang, Energie einem kälteren Reservoir zu entziehen und einem wärmeren hinzuzufügen, mit Hilfe der sog. Wärmepumpe realisiert.

# 2 Theorie

Aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik geht hervor, dass die innere Energie, die Summe Wärmeänderung und der verrichteten Arbeit ist.

$$dU = \delta Q + \delta W \quad (1)$$

Sobald dem kälteren Reservoir die Wärmemenge  $Q_2$  abgezogen wird, wird die Wärmemenge  $Q_1$  dem wärmeren Reservoir zu geführt, dies geschieht nur mit der verrichteten Arbeit  $A$ :

$$Q_1 = Q_2 + A \quad (2)$$

Die Gütezahl  $\nu$  gibt an wie „gut“, also wie gering der Verlust ist. Sie sagt aus, dass bei kleiner Temperaturdifferenz weniger Arbeitsaufwand geleistet werden muss.

$$\nu_{ideal} = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (3)$$

Da das System nicht vollständig isoliert ist, gibt es Abweichungen von  $\nu_{ideal}$  und der Vorgang ist somit auch nicht reversibel unter realen Voraussetzungen, daher folgt:

$$\nu_{real} < \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (4)$$

Berechnen lässt sich die reale Gütezahl durch die aufgenommene elektrische Leistung  $P$  und der Änderung der Wärmemenge  $Q_1$ , welche sich wiederum aus der Änderung der Temperatur  $T_1$  bestimmen lässt. Man bedarf demnach der zwei Gleichungen

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_1}{\Delta t} \quad (5)$$

$$\frac{1}{P} \frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \nu_{real}. \quad (6)$$

Der Massendurchsatz des Transportgases, jene Größe die beschreibt wie viel Masse des Transportgases pro Zeiteinheit durch das Drosselventil  $D$  strömen.

Dieser lässt sich vergleichbar zur realen Gütezahl mit den Gleichungen

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_2}{\Delta t} \quad (7)$$

$$\frac{1}{L} \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (8)$$

bestimmen, wobei  $L$  die Verdampfungswärme des verwendeten Gases darstellt.

Mit Hilfe des Massendurchsatzes ist nun die mechanische Leistung des Kompressor durch

$$P_{mech} = \frac{1}{\kappa - 1} \left( p_b \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{1}{\rho} \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (9)$$

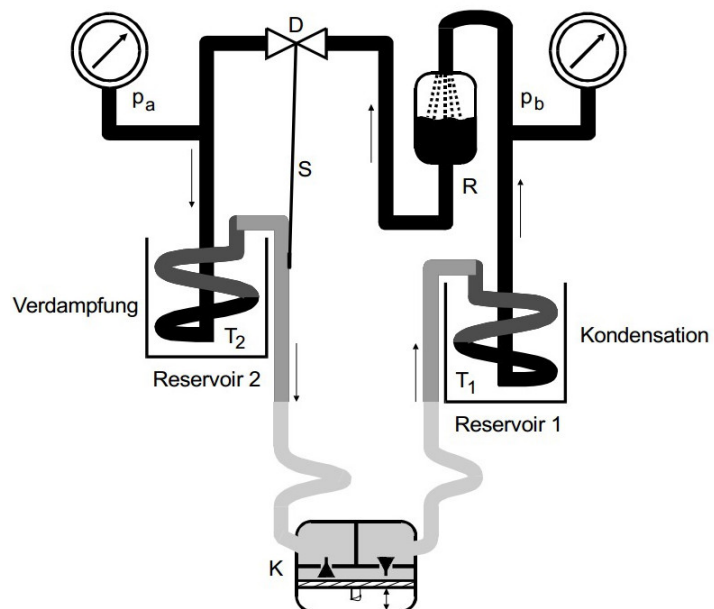
berechnen. Dabei ist  $\kappa$  der Adiabatenexponent und  $\rho$  die Dichte des verwendeten Gases.

### 3 Durchführung

Mit Abbildung 1 wird der prinzipielle Aufbau der Wärmepumpe dargestellt. Der Kompressor  $K$  erzeugt einen ständigen Kreislauf des Systems, indem er den Aggregatzustand des Transportgases ( $\text{Cl}_2\text{F}_2\text{C}$ ) beeinflusst von flüssig zu gasförmig und umgekehrt.

Durch das Drosselventil  $D$  wird ein Druckunterschied erzeugt, unter dem Druck  $p_a$  und bei Temperatur  $T_2$  ist das Wasser gasförmig und unter  $p_b$  und  $T_1$  flüssig.

Im kalten Reservoir 2 verdampft das Transportgas unter Wärmeaufnahme und wird im Kompressor komprimiert, dadurch erhöhen sich Druck und Temperatur, danach gibt es bei der Kondensation die Wärme ab und so erhöht sich die Temperatur in Reservoir 1, während sie in Reservoir 2 sinkt. Bei jedem Messgang werden Temperaturen und Drücke von  $T_1$  und  $T_2$ , bzw. von  $p_a$  und  $p_b$  notiert. Abgelesen wird im 90 Sekunden Takt bis Reservoir 1 maximal 50 Grad Celsius erreicht hat.



**Abbildung 1:** Prinzipieller Aufbau einer Wärmepumpe  
( $p_a < p_b$  ;  $T_2 < T_1$ )

## 4 Auswertung

Im Folgenden sind die während des Versuchs aufgenommenen Daten und die aus diesen berechneten Größen tabellarisch aufgetragen. An entsprechender Stelle sind Erklärungen zu den Werten und Berechnungen gegeben.

In Tabelle 1 befinden sich die für die Auswertung verwendeten Messdaten für die Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ , die Drücke  $p_b$  und  $p_a$ , sowie die Zeit  $t$  der Aufnahme nach Beginn des Versuchs.

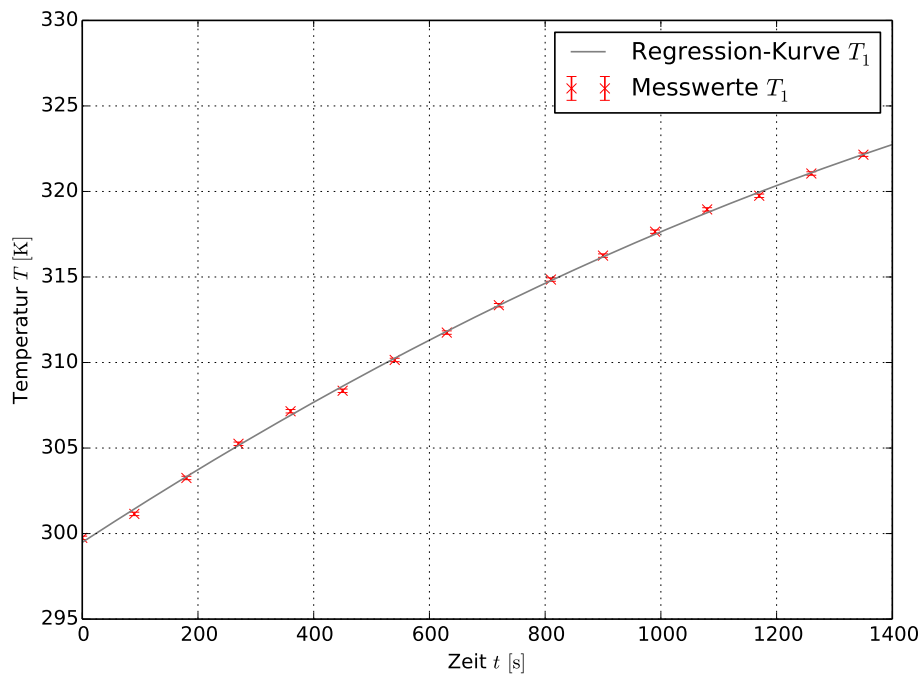
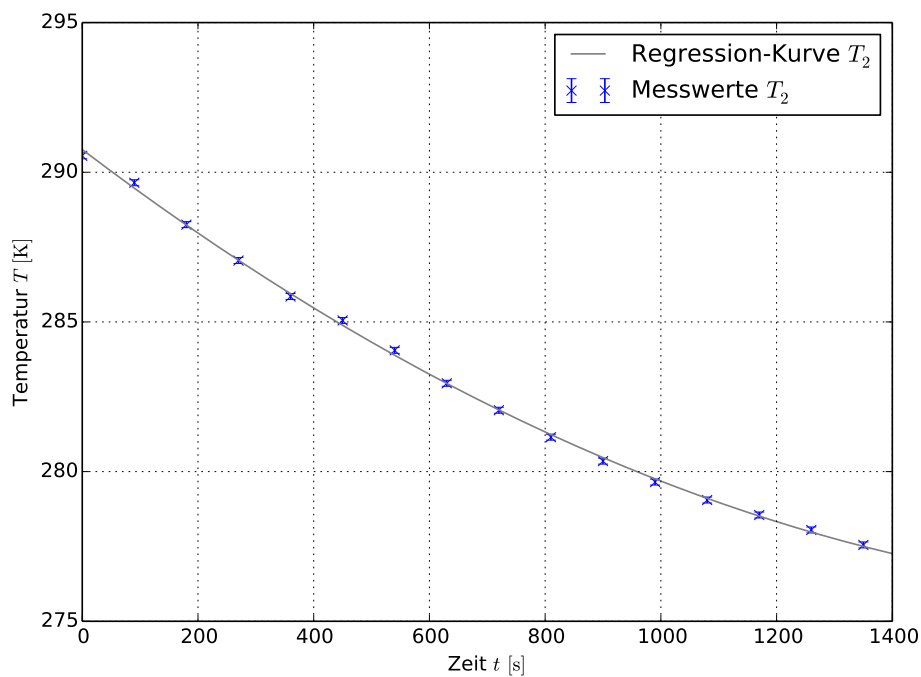
Zeit $t$ [s]	Temperatur $T_1$ [°C]	Druck $p_b$ [bar]	Temperatur $T_2$ [°C]	Druck $p_a$ [bar]
0	$26,6 \pm 0,1$	$7,0 \pm 0,5$	$17,4 \pm 0,1$	$4,6 \pm 0,2$
90	$28,0 \pm 0,1$	$7,5 \pm 0,5$	$16,5 \pm 0,1$	$4,6 \pm 0,2$
180	$30,1 \pm 0,1$	$7,9 \pm 0,5$	$15,1 \pm 0,1$	$4,4 \pm 0,2$
270	$32,1 \pm 0,1$	$8,0 \pm 0,5$	$13,9 \pm 0,1$	$4,2 \pm 0,2$
360	$34,0 \pm 0,1$	$8,5 \pm 0,5$	$12,7 \pm 0,1$	$4,1 \pm 0,2$
450	$35,2 \pm 0,1$	$9,0 \pm 0,5$	$11,9 \pm 0,1$	$4,0 \pm 0,2$
540	$37,0 \pm 0,1$	$9,0 \pm 0,5$	$10,9 \pm 0,1$	$4,0 \pm 0,2$
630	$38,6 \pm 0,1$	$9,5 \pm 0,5$	$9,8 \pm 0,1$	$3,9 \pm 0,2$
720	$40,2 \pm 0,1$	$10,0 \pm 0,5$	$8,9 \pm 0,1$	$3,9 \pm 0,2$
810	$41,7 \pm 0,1$	$10,0 \pm 0,5$	$8,0 \pm 0,1$	$3,8 \pm 0,2$
900	$43,1 \pm 0,1$	$10,5 \pm 0,5$	$7,2 \pm 0,1$	$3,6 \pm 0,2$
990	$44,5 \pm 0,1$	$11,0 \pm 0,5$	$6,5 \pm 0,1$	$3,6 \pm 0,2$
1080	$45,8 \pm 0,1$	$11,0 \pm 0,5$	$5,9 \pm 0,1$	$3,6 \pm 0,2$
1170	$46,6 \pm 0,1$	$11,5 \pm 0,5$	$5,4 \pm 0,1$	$3,6 \pm 0,2$
1260	$47,9 \pm 0,1$	$12,0 \pm 0,5$	$4,9 \pm 0,1$	$3,6 \pm 0,2$
1350	$49,0 \pm 0,1$	$12,0 \pm 0,5$	$4,4 \pm 0,1$	$3,5 \pm 0,2$

**Tabelle 1:** Messwerte der Temperaturen und Drücke

In Abbildung 2 und 3 sind die Temperaturverläufe für  $T_1$  und  $T_2$  jeweils mit der entsprechenden Regressionskurve dargestellt. Die mit Hilfe der Python Bibliothek *SciPy*[2] bestimmten Regressionsparameter für die Kurven der Form  $T(t) = At^2 + Bt + C$  sind in Tabelle 2 gelistet.

Funktion	A	B	C
$T_1$	$(-3,87 \pm 0,29) \cdot 10^{-6}$	$(2,20 \pm 0,04) \cdot 10^{-4}$	$299,49 \pm 0,12$
$T_2$	$(3,59 \pm 0,20) \cdot 10^{-6}$	$(-1,47 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$	$290,76 \pm 0,09$

**Tabelle 2:** Parameter der Regression mit  $T(t) = At^2 + Bt + C$

Abbildung 2: Temperaturverlauf mit Regressionskurve von  $T_1$ Abbildung 3: Temperaturverlauf mit Regressionskurve von  $T_2$ 

Aus den Regressionskurven für die Temperaturverläufe lassen sich nun deren Differentialquotienten  $\frac{dT_1}{dt}$  und  $\frac{dT_2}{dt}$  bestimmen, durch die, die gesuchten Apparaturgrößen berechnet werden können. Die Differentialquotienten  $\frac{dT_1}{dt}$  und die berechneten, idealen und realen, Güteeffizienzen sowie deren Verhältnis sind in Tabelle 3 und die Differentialquotienten  $\frac{dT_2}{dt}$  und der daraus bestimmte Massendurchsatz des Transportgases  $\frac{dm}{dt}$  in Tabelle 4 zu

finden.

## 4.1 Güteziffern

Die Berechnung der idealen Güteziffer erfolgt nach (3) durch einsetzen der Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  zu den entsprechenden Zeiten. Die reale Güteziffer errechnet sich aus durch Einsetzen von (5) in (6) und Ersetzen des Differenzenquotienten  $\frac{\Delta T_1}{\Delta t}$  durch den Differentialquotienten  $\frac{dT_1}{dt}$  sodass man

$$\nu_{real} = \frac{(m_1 c_w + m_k c_k)}{P} \frac{dT_1}{dt} \quad (10)$$

erhält. Dabei ist  $m_1 c_w$  die Wärmekapazität des Wassers in Reservoir 1, die sich aus dem Produkt der Masse  $m_1$  und der spezifischen Wärmekapazität  $c_w$  des Wassers ergibt. Mit  $c_w = 4,182 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  [1] und  $m_1 = V_1 \rho_w = 3,992 \text{ kg}$ , wobei  $V_1 = 4 \text{ dm}^3$  das Volumen und  $\rho_w = 0,998 \text{ g cm}^{-3}$  die Dichte des Wassers bei  $21^\circ \text{C}$  [1] sind. Die Wärmekapazität der Apparatur ist gegeben durch  $m_k c_k = 750 \text{ J K}^{-1}$  und die gemessene Leistung ist  $P = (125 \pm 5) \text{ W}$ .

Zeit $t$ [s]	Differentialquotient $\frac{dT_1}{dt} [\text{K s}^{-1}]$	reale Güteziffer $\nu_{real}$ [1]	ideale Güteziffer $\nu_{id}$ [1]	relativer Unterschied $\frac{\nu_{real}}{\nu_{id}}$
270	$0,0206 \pm 0,0004$	$2,879 \pm 0,115$	$20,217 \pm 0,186$	0,142
450	$0,0192 \pm 0,0005$	$2,684 \pm 0,107$	$14,420 \pm 0,093$	0,186
630	$0,0178 \pm 0,0005$	$2,490 \pm 0,100$	$11,883 \pm 0,062$	0,210
810	$0,0165 \pm 0,0006$	$2,296 \pm 0,092$	$10,011 \pm 0,043$	0,229

**Tabelle 3:** Reale und ideale Güteziffer im Verhältnis

## 4.2 Massendurchsatz und mechanische Leistung

Die Berechnung des Massendurchsatzes  $\frac{dm}{dt}$  erfolgt durch Einsetzen von (7) in (8) (mit Differentialquotienten), wodurch man die Gleichung

$$(m_2 c_w + m_k c_k) \frac{dT_2}{dt} = L \frac{dm}{dt} \quad (11)$$

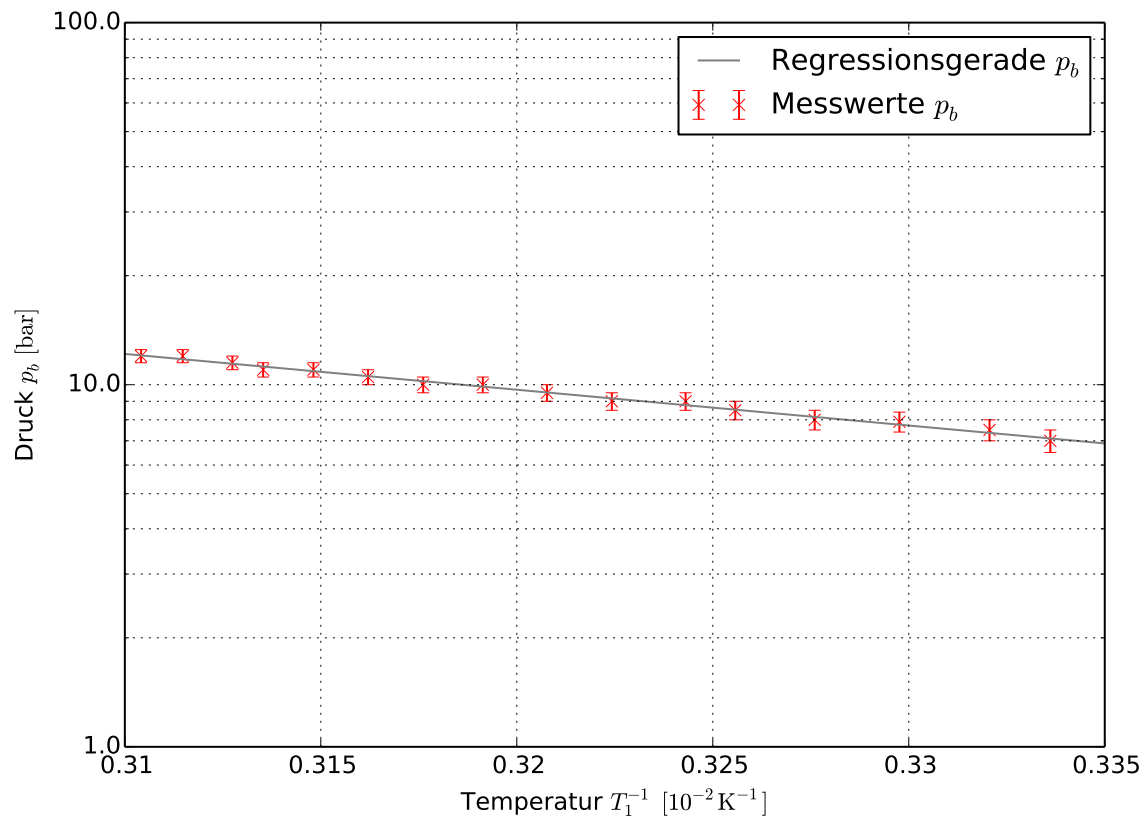
erhält.

Zur Bestimmung der Verdampfungswärme  $L$  wurden in Abbildung 4 die Messwerte für  $p_b$  halb-logarithmisch gegen die reziproken Temperaturen  $\frac{1}{T_1}$  aufgetragen. Aus [3] kann entnommen werden das zwischen  $p$  und  $T$  der exponentielle Zusammenhang

$$p(T) = p_0 \exp\left(\frac{-L}{RT}\right) \quad (12)$$

besteht. Durch die halb-logarithmische Skalierung und dem Aufrufen gegen den Kehrwert der Temperatur  $x := \frac{1}{T_1}$  erhält man daraus eine Geradengleichung der Form

$$\ln(p(x)) = \frac{-L}{R}x + \ln(p_0). \quad (13)$$



**Abbildung 4:** Regression der  $(T_1, p_b)$  Wertepaare

Durch die mit *Scipy*[2] durchgeführte lineare Regression erhält man die Geradensteigung

$$\frac{-L}{R} = (-2276,72 \pm 59,81) \text{ K}$$

und daraus mit der allgemeinen Gaskonstante  $R = 8,315 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$ [2] die Verdampfungswärme zu

$$L = (1,89 \pm 0,05) \cdot 10^4 \text{ Jmol}^{-1}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes und der Werte  $m_2 c_w = 16\,694,44 \text{ JK}^{-1}$  und  $m_k c_k = 750 \text{ JK}^{-1}$  in (11) ergibt sich jeweils der gesuchte Massendurchsatz.

Bei Betrachtung der Einheiten

$$\begin{aligned} \text{Js}^{-1} &= \text{Jmol}^{-1} \cdot \left[ \frac{\text{dm}}{\text{dt}} \right] \\ \Leftrightarrow \text{mols}^{-1} &= \left[ \frac{\text{dm}}{\text{dt}} \right] \end{aligned}$$

ist festzustellen, dass sich dieser Massendurchsatz auf ein Mol des gesuchten Stoffes bezieht. Durch Multiplikation des erhaltenen Massendurchsatzes mit der molaren Masse von Dichlordifluormethan  $M_{\text{Cl}_2\text{F}_2\text{C}} = 120 \text{ g mol}^{-1}$ <sup>①</sup> erhält man den in Tabelle 4 aufgeführten Massendurchsatz.

Durch diesen kann unter Verwendung von (9) die mechanische Leistung des Kompressors bestimmt werden. Das  $\rho$  in (9) ist dabei durch die allgemeine Gasgleichung

$$pV = nRT \quad (14)$$

den gegebenen Größen[4] des verwendeten Gases ( $\text{Cl}_2\text{F}_2\text{C}$ ), Dichte unter Normalbedingungen<sup>②</sup>  $\rho_0 = 5,51 \text{ g l}^{-1}$  und dem Adiabatenexponent  $\kappa = 1,14$  und den vorliegenden Zustandsgrößen  $T_2$  und  $p_a$  zu berechnen. Man erhält damit die Gleichung

$$\rho = \frac{T_2 p_0}{p_a T_0 \rho_0}. \quad (15)$$

Durch Einsetzen von (15) in (9) erhält man

$$P_{\text{mech}} = \frac{1}{\kappa - 1} \left( p_b \sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{p_a T_0 \rho_0}{T_2 p_0} \frac{\text{dm}}{\text{dt}} \quad (16)$$

womit die gesuchte mechanische Leistung aus den gegebenen Größen berechnen kann.

Zeit $t$ [s]	Differentialquotient $\frac{\text{dT}_2}{\text{dt}}$ [ $\text{K s}^{-1}$ ]	Massendurchsatz $\frac{\text{dm}}{\text{dt}}$ [ $\text{g s}^{-1}$ ]	Mechanische Leistung $P_{\text{mech}}$ [W]
270	$-0,0134 \pm 0,0002$	$1,479 \pm 0,050$	15,075
450	$-0,0121 \pm 0,0003$	$1,336 \pm 0,049$	16,976
630	$-0,0108 \pm 0,0003$	$1,193 \pm 0,049$	16,843
810	$-0,0095 \pm 0,0004$	$1,050 \pm 0,051$	17,234

**Tabelle 4:** Massendurchsatz und mechanische Leistung des Transportgases

<sup>①</sup>Berechnet aus den molaren Massen der Komponenten [1]

<sup>②</sup>  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  und  $p_0 = 1 \text{ bar}$

### 4.3 Fehlerrechnung

Im Folgende sind die, mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmten Gleichungen für die Fehler der zu bestimmenden Größen. Lediglich von der Angabe eines Fehler für  $P_{mech}$  wurde abgesehen, da die entsprechende Fehlergleichung eine zu hohe Komplexität aufwies.

Der Fehler der realen Güteziffer  $\nu_{real}(\frac{dT_1}{dt}, P)$  er gibt sich aus:

$$\sigma_{\nu_{real}} = (c_k m_k + c_w m_1) \sqrt{\frac{\sigma_{dT_1}^2}{P^2} + \frac{dT_1^2 \sigma_P^2}{P^4}}$$

Für den Fehler der idealen Güteziffer  $\nu_{id}(T_1, T_2)$  erhält man, wegen  $\sigma_{T_1} = \sigma_{T_2} = \sigma_T$  die Gleichung:

$$\sigma_{\nu_{ideal}} = \sigma_T \sqrt{\frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)^4} + \left( -\frac{T_1}{(T_1 - T_2)^2} + \frac{1}{T_1 - T_2} \right)^2}$$

Der Fehler des Massendurchsatzes  $\frac{dm}{dt}(\frac{dT_2}{dt}, L)$  erhält man analog zu  $\sigma_{\nu_{real}}$  aus:

$$\sigma_{\nu_{real}} = (c_k m_k + c_w m_2) \sqrt{\frac{\sigma_{dT_2}^2}{L^2} + \frac{dT_2^2 \sigma_L^2}{L^4}}$$

Der Fehler der Verdampfungswärme  $L$  ergibt sich vereinfacht aus:

$$\sigma_L = R \sigma_{L/R}$$



## 5 Diskussion

Wie schon durch die Fragestellung in der Anleitung suggeriert weisen die realen Güteziffern einen großen Unterschied zu den idealen Güteziffern auf. An dem in Tabelle 3 aufgeführten Verhältnis dieser beiden Güteziffern ist zusehen, dass die reale Güteziffer durchschnittlich nur ca. 20% der idealen Güteziffer entspricht. Eine Begründung für diese große Abweichung ist der hohe Verlust an Energie durch Reibung und Widerstand, dies ist gut an der Mechanischen Leistung in Seite 7 zu sehen. Das Verhältnis von mechanischer zu aufgewandter elektrischer Leistung  $P = (125 \pm 5) \text{ W}$  liegt im Mittel ( $\langle P_{\text{mech}} \rangle = 16,53 \text{ W}$ ) bei ca. 13%. Das heißt, dass nur etwas mehr als ein Zehntel der elektrischen Leistung in der realen Situation tatsächlich genutzt werden kann.

Auch ist zu bemerken, dass, obwohl beide Güteziffern mit voranschreitender Zeit abnehmen, das Verhältnis mit der Zeit zunimmt. Der Grund dafür ist auch aus Tabelle 3 zu entnehmen. Während die reale Güteziffer bei der letzten gezeigten Zeit noch etwa 80% des ersten Wertes hat, hat sich der Wert der idealen Güteziffer mehr als halbiert. Dies lässt sich durch den schon in der Anleitung herausgestellten Zusammenhang des idealen Wirkungsgrads und der Temperaturdifferenz zwischen den beiden Reservoirs (siehe (3)) begründen, da die Temperatur in dem einen Reservoir größer und in dem anderen kleiner wird fällt die ideale Güteziffer schneller als die reale. Im Gegensatz dazu hängt die reale Güteziffer nur von der Änderung der Temperatur in Reservoir 1 ab und verringert sich somit nicht auch noch bei abnehmender Temperatur in Reservoir 2, dies führt zu einem langsameren abfallen der Güteziffer.

Zusammenfassend ist somit zuzusagen, dass die Effizienz thermodynamische Maschinen weit unter der theoretisch möglichen liegen, da immer Verlust in Form von nicht konservativen Kräften auftreten, die die Leistung einer solchen Maschine im Vergleich zum idealisierten Fall erheblich verringern.

## Literatur

- [1] Horst Kuchling. *Taschenbuch der Physik*. Bd. 19. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag München, 2007.
- [2] *SciPy*. URL: <http://docs.scipy.org/doc/>.
- [3] *Versuchsanleitung. V203 Verdampfungswärme und Dampfdruck-Kurve*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V203.pdf>.
- [4] *Versuchsanleitung. V206 Wärmepumpe*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V206.pdf>.