

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DORTMUND

ANFÄNGERPRAKTIKUM PHYSIK
WINTERSEMESTER
13/14

V355
**Relaxationsverhalten eines
RC-Kreises**

16. Januar 2014

Johannes Schlüter
Joshua Luckey

johannes.schlueter@udo.edu
joshua.luckey@udo.edu

1 Einleitung

Im Versuch "Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises" V353, dabei wird zuerst die Zeitkonstante, im zweiten Teil wird die Amplitude und danach die Phasendifferenz zwischen Kondensator- und Erregerspannung in Abhängigkeit der Frequenz bestimmt. Zu Letzt wird gezeigt, dass das RC-Glied auch als Integrator fungieren kann.

2 Theorie

Zunächst lässt sich die Entladung des RC-Kreises beschreiben durch:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (1)$$

Die Aufladung durch:

$$Q(t) = CU_0(1 - \exp(-\frac{t}{RC})) \quad (2)$$

Beim Wechsel von Gleich- auf Wechselstrom wird eine Spannung mit der Frequenz ω angelegt:

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) \quad (3)$$

mit $\omega \ll \frac{1}{RC}$.

Für die Amplitude gilt nun:

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (4)$$

Wegen der gesteigerten Frequenz lässt nun die resultierende Phasenverschiebung bestimmen durch:

$$\varphi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \quad (5)$$

bzw.

$$\varphi = \frac{a}{b} \cdot 360 \quad (6)$$

Auch die Phasendifferenz zwischen Generator- und Kondensatorspannung unterliegt einer Frequenzabhängigkeit die mit der Gleichung

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (7)$$

beschrieben werden kann. Auch lässt sich die Abhängigkeit der Amplitude von Frequenz und Phase durch

$$A(\omega) = -\frac{\sin(\varphi)}{\omega RC} U_0 \quad (8)$$

bestimmen.

Über die Theorie zur Integration des RC-Kreises lässt sich folgendes sagen:

$$U_c(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt' \quad (9)$$

3 Durchführung

3.1 Bestimmung der Zeitkonstanten des RC-Gliedes

Durch Aufnahmen des Auf- oder Entladevorgangs am Kondensator kann die Zeitkonstante RC bestimmt werden.

Hierbei wird ein Oszilloskop verwendet, auf dem die Kondensatorspannung $U(t)$ gegen die Zeit betrachtet wird.

Nun werden die Auf- bzw. Entladekurve einzeln mit Hilfe des Digitaloszilloskops fotografiert und später in der Auswertung genauer betrachtet.

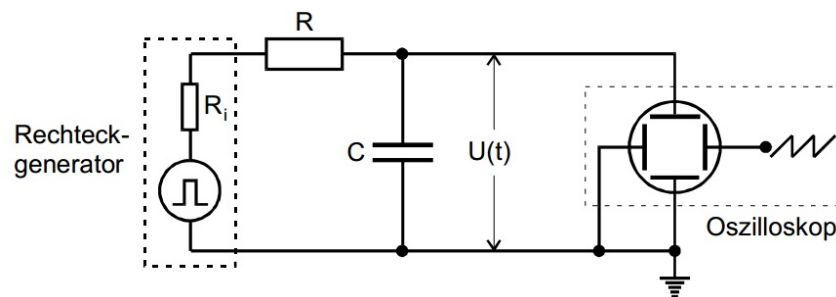


Abbildung 1: Messschaltung zur Bestimmung der Zeitkonstanten eines RC-Gliedes durch Beobachtung des Auf- oder Entladevorganges des Kondensators

3.2 Bestimmung der Amplitude der Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Frequenz

Nun wird die Amplitude ermittelt, indem Spannung am Kondensator gemessen wird und jetzt die Amplitude gegen die Frequenz vermessen.

3.3 Messung der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung

Um die Phasendifferenz φ in Abhängigkeit der Frequenz ω zu bestimmen, werden beide Signale auf jeweils einen Kanal am Oszilloskop gelegt und die Abstände der Perioden für verschiedene Frequenzen gemessen.

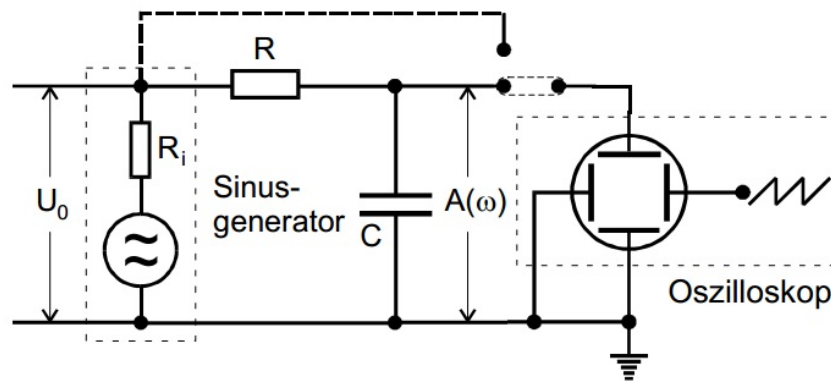


Abbildung 2: Messschaltung zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannungsamplitude A in einem RC-Kreis

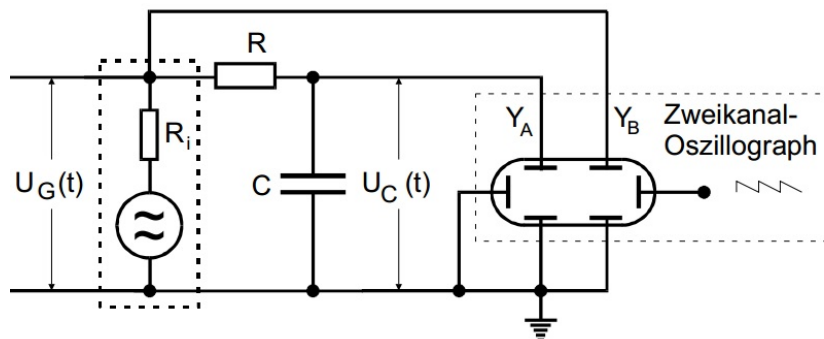


Abbildung 3: Schaltung zur Messung der Phasenverschiebung zwischen zwei Spannungen mit einem Zweikanal-Oszilloskop

3.4 Der RC-Kreis als Integrator

Für hohe Frequenzen lässt sich feststellen, dass das RC-Glied als Integrator funktioniert. Es werden hier mit dem Oszilloskop die zu integrierende Spannung und die integrierte Spannung angezeigt. Jetzt werden verschiedene Spannungen eingestellt: Rechteck-, Sinus- und Dreieckspannung. (Und jeweils einzeln aufgenommen.)

4 Auswertung

Im Folgenden sind die während des Versuchs aufgenommenen Messwerte tabellarisch und durch Grafiken dargestellt. An entsprechender Stelle sind Anmerkungen und Erklärungen zu den Messwerten und den vollzogenen Rechnungen gegeben.

4.1 Messung der Zeitkonstante durch Entladung des Kondensators

Die in Tabelle 1 gelisteten Messwerte sind aus dem in Abbildung 4 dargestellten zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung $U_C(t)$ entnommen.

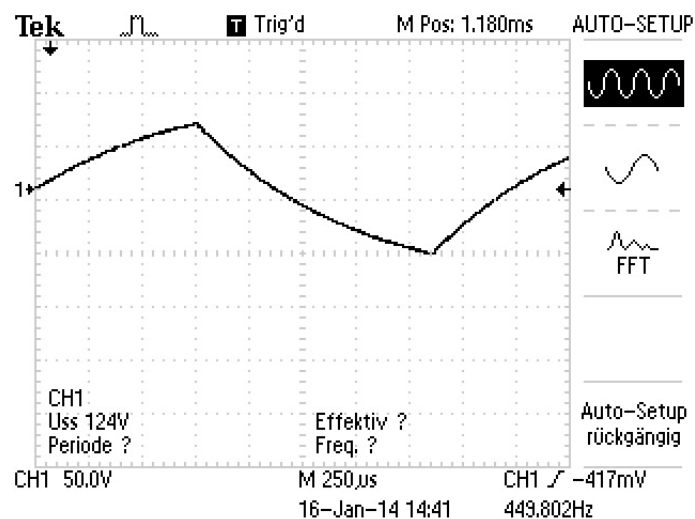


Abbildung 4: Zeitlicher Verlauf der Kondensatorspannung bei Entladung

Zeit t [ms]	Kondensatorspannung U_C [V]	Zeit t [ms]	Kondensatorspannung U_C [V]
0,0	121 ± 1	0,5	44 ± 1
0,1	102 ± 1	0,6	34 ± 1
0,2	84 ± 1	0,7	25 ± 1
0,3	68 ± 1	0,8	17 ± 1
0,4	56 ± 1		

Tabelle 1: Kondensatorspannung zur Zeit t nach Beginn der Entladung

Durch Regression der in Abbildung 5 halb-logarithmisch aufgetragenen Messwerte, unter Verwendung der Python Bibliothek *SciPy* [1], ergeben sich die Parameter a und b der angesetzten Regressionsfunktion

$$f(t) = at + b \quad (10)$$

zu

$$a = (-2127 \pm 84) \text{ s}^{-1} \quad (10a)$$

$$b = 125 \pm 3. \quad (10b)$$

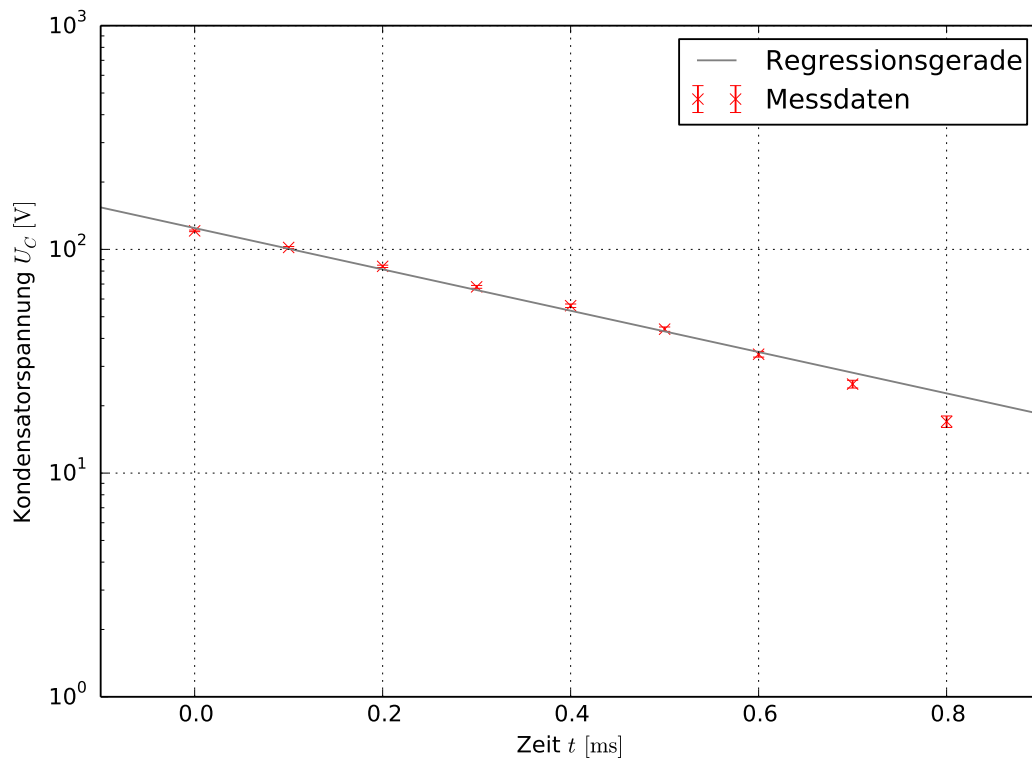


Abbildung 5: Messwerte des Entladungsvorgangs mit entsprechender Regressionsgeraden

Mit der theoretischen Form dieser Regressionsgeraden

$$\ln \left(\frac{U(t)}{U(0)} \right) = -\frac{t}{RC}, \quad (11)$$

die man durch logarithmieren von (1) ^① erhält lässt sich zeigen, dass die reziproke Steigung dieser Geraden der Zeitkonstante RC entspricht. Diese hat, mit der Steigung (10a) somit den Wert

$$RC = \frac{1}{a} = (4,7 \pm 0,2) \cdot 10^{-4} \text{ s.}^{\text{②}} \quad (12)$$

^①Da $U = qE$ gilt sind zeitlicher Verlauf von Spannung und Ladung äquivalent

^②Dabei wurde der Fehler mittels (I) bestimmt.

4.2 Messung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorsspannungsamplitude

In Tabelle 2 sind die, in Abhängigkeit der Frequenz f_G der angelegten Sinusspannung gemessenen, Amplituden der Kondensatorspannung $A(f)$ und die mit $U_0 = 80 \text{ V}$ normierten Amplituden $\frac{A(f)}{U_0}$ eingetragen.

Frequenz $f \text{ [Hz]}$	Amplitude $A(f) \text{ [V]}$	normierte Amplitude (II) $\frac{A(f)}{U_0}$
30	$75,2 \pm 0,1$	$0,940 \pm 0,001$
50	$75,0 \pm 0,1$	$0,938 \pm 0,001$
70	$74,4 \pm 0,1$	$0,930 \pm 0,001$
90	$71,2 \pm 0,1$	$0,890 \pm 0,001$
100	$70,0 \pm 0,1$	$0,875 \pm 0,001$
300	$44,0 \pm 0,1$	$0,550 \pm 0,001$
500	$30,0 \pm 0,1$	$0,375 \pm 0,001$
700	$22,0 \pm 0,1$	$0,275 \pm 0,001$
900	$17,4 \pm 0,1$	$0,217 \pm 0,001$
1000	$15,8 \pm 0,1$	$0,198 \pm 0,001$
3000	$5,6 \pm 0,1$	$0,070 \pm 0,001$
5000	$3,4 \pm 0,1$	$0,042 \pm 0,001$
7000	$2,6 \pm 0,1$	$0,033 \pm 0,001$
9000	$1,78 \pm 0,01$	$0,0222 \pm 0,0001$
10 000	$1,62 \pm 0,01$	$0,0203 \pm 0,0001$
30 000	$0,56 \pm 0,01$	$0,0070 \pm 0,0001$
50 000	$0,33 \pm 0,01$	$0,0041 \pm 0,0001$
70 000	$0,24 \pm 0,01$	$0,0030 \pm 0,0001$
100 000	$0,17 \pm 0,01$	$0,0021 \pm 0,0001$

Tabelle 2: Amplitude und normierte Amplitude der Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Frequenz

In Abbildung 6 sind die normierten Amplituden gegen die Frequenzen halb-logarithmisch aufgetragen.

Durch Regression der Messwerte für die normierte Amplitude in Abbildung 6 mit eine Funktion der Form

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2(2\pi f)^2}}, \quad (13)$$

ergibt sich der Regressionsparameter zu

$$c = (8,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (13a)$$

Der theoretische Verlauf der Amplitude in Abhängigkeit der Frequenz (4) zeigt, dass

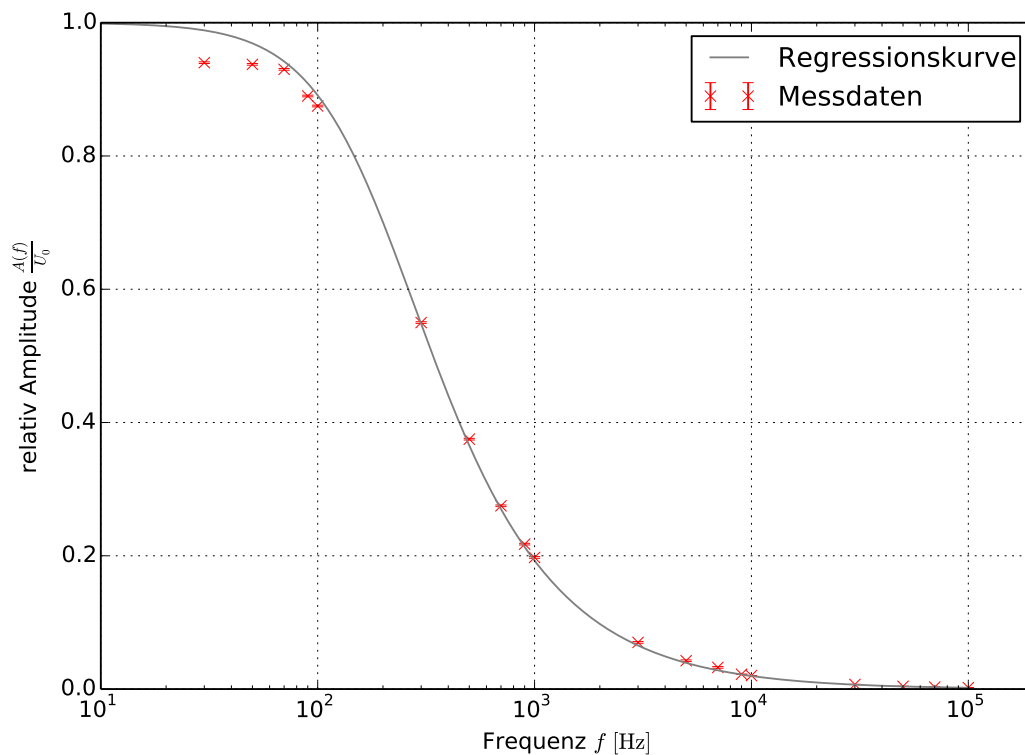


Abbildung 6: Normierte Amplituden in Abhängigkeit von der Frequenz mit entsprechender Regressionskurve

mit (13a) für die Zeitkonstante RC des RC-Gliedes

$$RC = c = (8,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (14)$$

gilt.

4.3 Messung der Frequenzabhängigkeit der Phasendifferenz zwischen Generator- und Kondensatorspannung

Die in Abhängigkeit von der Frequenz aufgenommenen Messwerte für die Phasendifferenz zwischen Generator- und Kondensatorspannung $U_G(t)$ bzw. $U_C(t)$ sind in Tabelle 3 zu finden.

Die mit einer Funktion der Form

$$\varphi(f) = \arctan(d \cdot 2\pi f) \quad (15)$$

durchgeführte Regression der in Abbildung 7 dargestellten Messwerte liefert den Regressionsparameter

$$d = (8,2 \pm 0,8) \cdot 10^{-4} \text{ s}. \quad (15a)$$

Frequenz f [Hz]	Phasendifferenz $\varphi(f)$ [°]	Frequenz f [Hz]	Phasendifferenz $\varphi(f)$ [°]
100	18,0	10 000	90,0
200	54,0	20 000	86,4
300	64,8	30 000	86,4
400	57,6	40 000	86,4
500	63,0	50 000	90,0
1000	81,0	100 000	90,0
2000	86,4	200 000	93,6
3000	86,4	300 000	97,2
4000	93,6	400 000	100,8
5000	90,0	500 000	90,0

Tabelle 3: Phasendifferenz der Kondensator- und Generatorspannung in Abhängigkeit der Frequenz

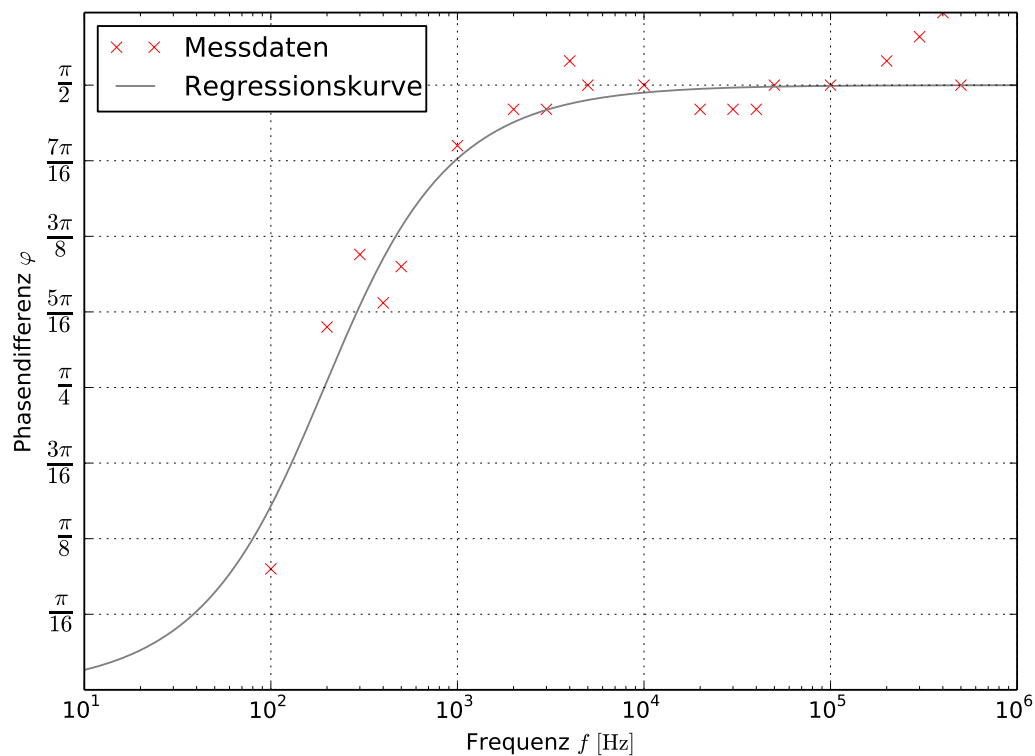


Abbildung 7: Phasendifferenz in Abhängigkeit der Frequenz mit entsprechender Regressionskurve

Aus diesem lässt sich wiederum, durch Vergleich mit dem theoretischen Verlauf der Phasendifferenz (7) die Zeitkonstante RC des RC-Gliedes zu

$$RC = d = (8,2 \pm 0,8) \cdot 10^{-4} \text{ s.} \quad (16)$$

4.4 Darstellung der Kondensatorsspannungsamplitude in Abhängigkeit der Frequenz und der Phasendifferenz

Durch das Einsetzen der Gleichungen für die Frequenzabhängigkeit der Amplitude und Phasendifferenz (4) bzw. (7) in (8) ergibt sich der Zusammenhang zwischen normierter Amplitude und Phasendifferenz zu:

$$\begin{aligned}
 \frac{A(\omega)}{U_0} &= -\frac{\sin(\arctan(-\omega RC))}{\omega RC} \\
 &= \frac{\sin(\arctan(\omega RC))}{\omega RC} \\
 &= \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2} \omega RC} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \\
 &= \cos(\arctan(-\omega RC)) \\
 \frac{A(\omega)}{U_0} &= \cos(\varphi(\omega))
 \end{aligned} \tag{17}$$

Mit dieser Gleichung erhält man den in Abbildung 8 dargestellten Verlauf. Die ebenso eingezeichneten Messwerte sind Tabelle 2 und 3 entnommen.

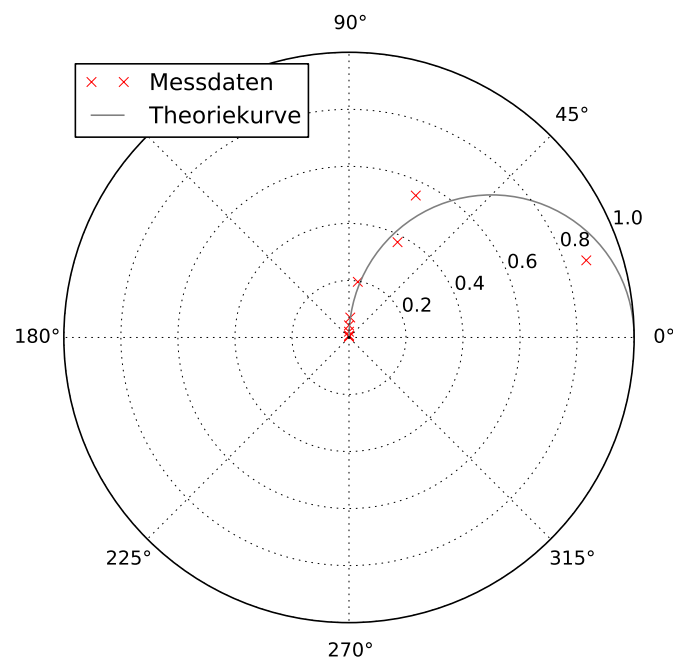


Abbildung 8: Verlauf der normierten Amplitude in Abhängigkeit von der Phasendifferenz

4.5 Das RC-Glied als Integrator

In den folgenden Abbildungen sind die aufgenommenen Spannungsverläufe der Sinus-, Dreieck- und Rechteckspannung und dem jeweiligen Spannungsverlauf U_C der Kondensatorspannung dargestellt.

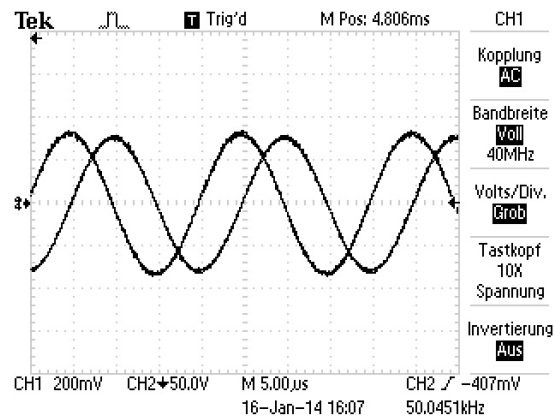


Abbildung 9: Integration des Sinusspannung

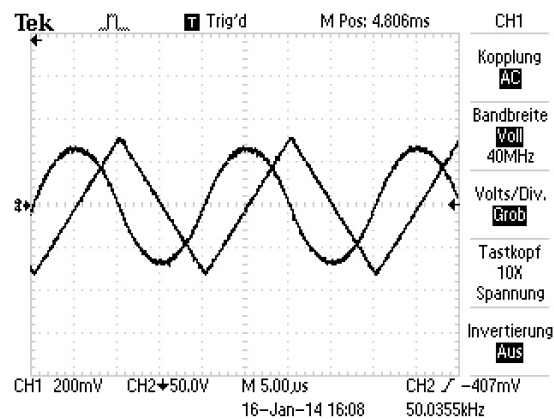


Abbildung 10: Integration des Dreieckspannung

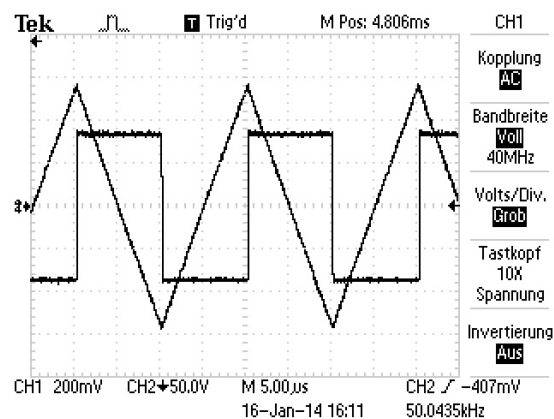


Abbildung 11: Integration der Rechteckspannung

Durch Integration der Spannungsverläufe ergeben sich die Spannungen:

$$\text{Sinusspannung: } \int \sin(t) dt = \cos(t) + C$$

$$\text{Dreieckspannung}^{\textcircled{3}}: \int A - \frac{2A}{T}|t| dt = \begin{cases} At - \frac{A}{T}t^2 + C & , -T < t < 0 \\ At + \frac{A}{T}t^2 + C & , 0 < t < T \end{cases}$$

$$\text{Rechteckspannung}^{\textcircled{3}}: \int \begin{cases} A & , -T < t < 0 \\ -A & , 0 < t < T \end{cases} dt = \begin{cases} At + C & , -T < t < 0 \\ -At + C & , 0 < t < T \end{cases}$$

4.6 Fehlerrechnung

In folgendem Abschnitt sind die, für die Fehlerberechnung verwendeten Gleichungen aufgeführt. Diese Gleichungen sind dabei mittels gaußscher Fehlerfortpflanzung bestimmt.

Der Fehler der Zeitkonstante (12) ergibt sich vereinfacht aus:

$$\sigma_{RC} = \frac{RC}{a} \sigma_a \quad (\text{I})$$

Der Fehler der normierten Amplituden in Tabelle 2 folgt aus:

$$\sigma_{A/U_0} = \frac{1}{U_0} \sigma_A \quad (\text{II})$$

^③Die Definition gilt für Werte von t mit $-T < t < T$

5 Diskussion

In diesem Abschnitt werden die in Abschnitt 4 erhaltenen Ergebnisse noch einmal abschließend diskutiert und dabei auf Plausibilität geprüft. Dabei wird auch ein Bezug zu dem verwendeten Aufbau und der Versuchsdurchführung genommen.

Der Vergleich, der in den Abschnitten 4.1 bis 4.3 erhaltenen Werte (12), (14) und (16) für die Zeitkonstante RC des RC-Gliedes teilweise weisen systematische Abweichungen auf. So sind die beiden Zeitkonstanten, die über die Frequenzabhängigkeiten von Amplitude beziehungsweise Phasendifferenz bestimmt wurden mit einem relativen Unterschied von 2 % sehr nah beieinander und liegen jeweils innerhalb einer Standardabweichung des anderen Wertes. Dahingegen weist der über die Entladung des Kondensators bestimmte Wert der Zeitkonstante mit einem mittleren Unterschied von 58 % eine wesentlich größere Abweichung zu den anderen Werten auf.

Eine Begründung dieser starken Abweichung, könnte die Genauigkeit des jeweils verwendeten Messverfahrens sein, die wie sich mit den gewonnenen Werten vermuten lässt bei den beiden Messungen zur Frequenzabhängigkeit größer ist. Diese Vermutung lässt sich anstellen, da für diese beiden Verfahren insgesamt mehr Messwerte zur Verfügung standen und somit ein genaueres Ergebnis zu erwarten ist. Ferner ist ein Ergebnis, welches mit nur geringen Abweichungen aus zwei unterschiedlichen Versuchen folgt als plausibler anzunehmen als ein einzelnes abweichendes Ergebnis. Die Abweichung der Messung über die Entladung könnte darin begründet sein, dass der theoretisch prognostizierte exponentielle Verlauf in der Realität nicht vollständig richtig ist. Dies lässt sich auch an den letzten Messwerten in Abbildung 5 die dem linearen Verlauf nicht mehr exakt folgen.

Andererseits zeigt das in Abschnitt 4.4 erhaltene Ergebnis, dass die Amplitude der Kondensatorspannung auch eine Abhängigkeit von der Phasendifferenz zwischen Generator- und Kondensatorspannung besitzt. Diese wiederum ist eine weitere mögliche Begründung die geringe Abweichungen zwischen den beiden frequenzabhängigen Messungen, wodurch letztlich nur die größere Menge an Messdaten für diese beiden Versuche bleibt, die dieses Ergebnis plausibler erscheinen lässt.

Das Wirken eines RC-Gliedes als Integrator ist in Abschnitt 4.5 gezeigt, da die erhaltenen Verläufe der Kondensatorspannung proportional zu den berechneten Stammfunktionen sind. Unterschiede lassen sich dabei lediglich in Phasenverschiebung und Amplitude der einzelnen Kondensatorspannungen finden.

Literatur

- [1] *SciPy*. URL: <http://docs.scipy.org/doc/> (besucht am 18.01.2014).