

1 Einleitung

Im Versuch Drehschwingungen V102 sind verschiedene Messungen durchzuführen und mit Hilfe derer die elastischen Konstanten eines Material zu bestimmen. Hierbei kann ein beliebiges Material untersucht werden - In diesem Fall ein Metalldraht. Außerdem wird in einem zweiten Messgang noch das magnetische Moment eines Magneten durch Drehschwingungen unter Einfluss eines homogenen Magnetfeldes, welches mit Hilfe von Helmholtzspulen erzeugt wird, untersucht.

2 Theorie

Bei den im ersten Versuchsteil zu bestimmenden Größen, handelt es sich um sogenannte *elastische Konstanten*, die im Allgemeinen ein Maß für die relative Form- und Volumenveränderung eines Materials sind, welches äußeren Kräften ausgesetzt ist. Sind diese Veränderungen elastisch, also reversibel, so nennt man den Zusammenhang zwischen Kraft und relativer Veränderung: Hooksches Gesetz. Kräfte die dabei auf die Oberfläche eines Materials einwirken, wie beispielsweise der Druck, werden im Allgemeinen Spannungen genannt. Die Anzahl, der zur Beschreibung eines Materials nötigen, elastischen Konstanten hängt vor allem von der inneren Struktur des Materials ab und reicht von einem Maximum von 36 Konstanten, zu einem Minimum von 2 Konstanten für isotrope Materialien, wie sie auch in diesem Versuch untersucht werden. Zu den zwei benötigten Konstanten, dem Torsionsmodul G und dem Kompressionsmodul Q kommen in diesem Versuch noch zwei weitere hinzu: das Elastizitätsmodul E und die Poissonsche Querkontraktionszahl μ . Der Zusammenhang dieser vier Größen lässt sich mit den Gleichungen (1) und (2) beschreiben.

$$E = 2G(\mu + 1) \quad (1)$$

$$E = 3Q(1 - 2\mu) \quad (2)$$

Die Bestimmung des Torsionsmoduls erfolgt in diesem Versuch mit Hilfe einer dynamischen Methode, d.h. auf den hier zu untersuchenden Draht wirken periodisch zeitabhängige Spannungen. Dies ist der statischen Methode gegenüber vorteilhafter, da keine elastischen Nachwirkungen auftreten, durch die das Material nur verzögert in seinen Ausgangszustand zurück geht. Für die hier verwendete dynamische Methode, wird der zu untersuchende Draht in harmonische Drehschwingungen mit der Periodendauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \quad (3)$$

versetzt. Dabei ist J das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers und D die Richt-

größe des als Zylinder idealisierten Drahtes, welche durch

$$D = \frac{\pi G R^4}{2L} \quad (4)$$

beschrieben wird. Dabei ist L die Länge des Drahtes und R dessen Radius.

Für die Bestimmung des magnetischen Moments m im zweiten Versuchsteil wird die durch

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{8}{\sqrt{125}} \frac{IN}{R} \quad (5)$$

aus [1] berechenbare magnetische Flussdichte eines Helmholtzspulenpaares benötigt, für die somit der Radius R und die Windungszahl N der Spulen, sowie der durch diese fließende Strom I benötigt werden. Für die Permeabilitätskonstante gilt nach [2]

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ VsA}^{-1}\text{m}^{-1}$ und da die Spulen keinen Kern (aus z.B. Eisen) besitzen, ist die relative Permeabilitätszahl $\mu_r = \mu_{Luft} \approx 1$. Auch in diesem Versuchsteil wird der Draht in harmonische Schwingungen versetzt, deren Periodendauer

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mB + D}} \quad (6)$$

ist.

3 Durchführung

Der Versuchsaufbau entspricht dem in Abbildung 1 mit dem Zusatz, dass links von der Apparatur noch eine Glühlampe mit Blende und Fokussierlinse steht und um etwa 90° versetzt eine Photodiode, welche ein analoges Signal weitergibt, wenn diese von dem Lichtstrahl über den Spiegel getroffen wird. Als erstes wird eine Stoppuhr mit einer Logikschaltung selber erstellt, diese soll beim ersten Signal ausgelöst werden, beim zweiten Überstreichen wird durch die RS-Flipflops in der Schaltung lediglich ein H-Signal gespeichert, beim dritten Auslösen ist die Periode abgeschlossen, die Uhr stoppt und kann abgelesen werden und

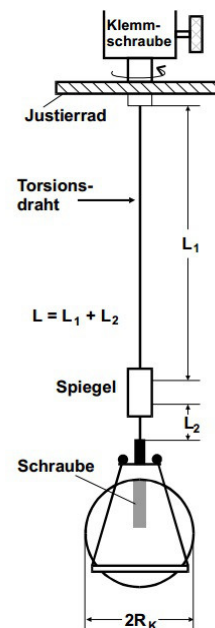


Abbildung 1: Skizze des Versuchsaufbaus

nach weiterem überstreichen wird die Stoppuhr zurückgesetzt.

Danach wird die Dicke des Drahtes an 4 verschiedenen Stellen vermessen und andere feste Größen an der Apparatur abgelesen. Durch das Justierad mit Klemmschraube wird der Spiegel so ausgerichtet, dass der Lichtstrahl neben der Photodiode auf der dort justierten Mattscheibe zu sehen ist, danach wird eine Auslenkung durch das Justierad erzeugt und die Periodendauern von der Stoppuhr abgelesen und notiert bis eine ausreichende Menge an Messwerten vorhanden ist. Schlussendlich werden nun die Helmholtzspulen eingeschaltet, die ein homogenes Magnetfeld erzeugen, in dem die Messung des magnetischen Moments, des in der Kugel eingelassenen Stabmagneten, auf die gleiche oben beschriebene Weise, durchgeführt wird.

4 Auswertung

Im Folgenden sind die aufgenommenen Messwerte, sowie die aus diesen berechneten Werte aufgeführt. An entsprechenden Stellen sind Erläuterungen zu den Berechnungen gegeben. Der nachfolgende Abschnitt 4.3 enthält die Fehlergleichungen für die hier aufgeführten Größen.

4.1 Bestimmung der elastischen Konstanten

In den Tabellen 1 bis 3 sind für die noch folgenden Rechnungen benötigten Apparaturgrößen angegeben.

Durchmesser d [mm]	Länge L [cm]
0,195 \pm 0,001	62,7 \pm 0,1
0,198 \pm 0,001	
0,201 \pm 0,001	
0,196 \pm 0,001	
$\langle d \rangle = (0,1975 \pm 0,0005)$ mm	

Tabelle 1: Messgrößen des Drahtes

Masse m_K [g]	Durchmesser d_K [mm]	Trägheitsmoment der Halterung J_H [gcm ²]
512,50 \pm 0,04	50,76 \pm 0,36	22,5

Tabelle 2: Messgrößen der Kugel und Halterung

Tabelle 4 enthält die gemessenen Periodendauern für die Schwingung ohne äußeres Magnetfeld und deren Mittel.

Radius $R[\text{mm}]$	Windungszahl N
78,0	390

Tabelle 3: Messgrößen der Spulen

Periodendauer $T[\text{s}]$	Periodendauer $T[\text{s}]$
$18,364 \pm 0,001$	$18,330 \pm 0,001$
$18,377 \pm 0,001$	$18,333 \pm 0,001$
$18,353 \pm 0,001$	$18,343 \pm 0,001$
$18,359 \pm 0,001$	$18,320 \pm 0,001$
$18,346 \pm 0,001$	$18,342 \pm 0,001$
$18,349 \pm 0,001$	
$\langle T \rangle = (18,347 \pm 0,002) \text{ s}$	

Tabelle 4: Gemessene Periodendauern ohne äußeres Magnetfeld

Mit Hilfe der Gleichung (3) für die theoretische Periodendauer dieser harmonischen Schwingung, mit $J = J_K + J_H$, da sich das Gesamtträgheitsmoment aus dem der Kugel und dem der Halterung zusammensetzt und der Gleichung (4) erhält man mit den Werten aus Tabelle 1 und der mittleren Periodendauer \bar{T} aus Tabelle 4 das Torsionsmodul G .

$$G = \frac{8\pi L}{\bar{T}^2 R^4} (J_K + J_H) \quad (7)$$

Das Trägheitsmoment der Kugel berechnet sich mit $J_K = 0,4m_K r_K^2$ und den Werten aus Tabelle 2 zu $J_K = (0,132\,05 \pm 0,000\,06) \text{ gm}^2$ somit ergibt sich das Torsionsmodul zu

$$G = (6,61 \pm 0,07) \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}.$$

Daraus lassen sich mit dem gegebenen Elastizitätsmodul $E = (21,00 \pm 0,05) \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$, die beiden noch übrigen elastischen Konstanten aus den Gleichungen (1) und (2) bestimmen. Man erhält die Poissonsche Querkontraktionszahl

$$\mu = 0,588 \pm 0,017$$

und das Kompressionsmodul

$$Q = (-4,0 \pm 0,8) \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}.$$

4.2 Bestimmung des magnetischen Moments

In Tabelle 5 sind die Periodendauern der Schwingung mit dem äußerem Magnetfeld der Helmholtzspulen eingetragen.

Periodendauer $T[\text{s}]$	Periodendauer $T[\text{s}]$
$4,995 \pm 0,001$	$4,551 \pm 0,001$
$4,975 \pm 0,001$	$4,545 \pm 0,001$
$4,937 \pm 0,001$	$4,538 \pm 0,001$
$4,897 \pm 0,001$	$4,628 \pm 0,001$
$4,838 \pm 0,001$	$4,594 \pm 0,001$
$\langle T_m \rangle = 4,750 \pm 0,021$	

Tabelle 5: Gemessene Periodendauern mit äußerem Magnetfeld

Mit der Spulenstromstärke $I = (1,00 \pm 0,02) \text{ A}$ und den Werten aus Tabelle 3 ergibt sich die magnetische Flussdichte des Spulenpaares aus der Gleichung (5) zu

$$B = (4,50 \pm 0,07) \text{ T}.$$

Eine Gleichung für das magnetische Moment m erhält man aus den Gleichungen (6) und (4) durch umformen.

$$m = \frac{4\pi^2(J_K + J_H)}{T_m^2 B} - \frac{\pi G R^4}{2LB} \quad (8)$$

Und mit den Werten aus den Tabellen 1, 2 und 5 sowie der magnetischen Flussdichte B erhält man das magnetische Moment

$$m = (0,0488 \pm 0,0007) \text{ Am}^2.$$

4.3 Fehlerrechnung

Im Folgenden sind die mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung bestimmten Gleichungen für die Fehler der in Abschnitt 4 berechneten Größen.

Der Fehler des Trägheitsmoments der Kugel J_K ergibt sich aus:

$$\sigma_{J_K} = \sqrt{0.16\sigma_{m_K}^2 r_K^4 + 0.64\sigma_{r_K}^2 m_K^2 r_K^2}$$

Den Fehler der für das Torsionsmodul aus Gleichung (7) erhält man durch:

$$\sigma_G = \sqrt{\frac{64\pi^2 L^2 \sigma_{J_K}^2}{R^8 T^4} + \frac{256\pi^2 L^2 \sigma_T^2}{R^8 T^6} (J_H + J_K)^2 + \frac{1024\pi^2 L^2 \sigma_R^2}{R^{10} T^4} (J_H + J_K)^2 + \frac{64\pi^2 \sigma_L^2}{R^8 T^4} (J_H + J_K)^2}$$

Für die Poissonsche Querkontraktionszahl aus Gleichung (1) erhält man den Fehler:

$$\sigma_\mu = \sqrt{\frac{E^2 \sigma_G^2}{4G^4} + \frac{\sigma_E^2}{4G^2}}$$

Der Fehler des Kompressionsmoduls Q nach Gleichung (2) ist:

$$\sigma_Q = \sqrt{\frac{36E^2 \sigma_\mu^2}{(-6\mu + 3)^4} + \frac{\sigma_E^2}{(-6\mu + 3)^2}}$$

Der Fehler der magnetischen Flussdichte B der Helmholtzspulen nach Gleichung (5) ergibt sich zu:

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{I^2 N^2}{R^4} \frac{64}{125} \mu_0^2 \sigma_R^2 + \frac{I^2 \sigma_N^2}{R^2} \frac{64}{125} \mu_0^2 + \frac{N^2 \sigma_I^2}{R^2} \frac{64}{125} \mu_0^2}$$

Für den Fehler des magnetischen Moments m nach der Gleichung (8) erhält man:

$$\sigma_m = \sqrt{\sigma_B^2 \left(\frac{\pi G R^4}{2B^2 L} - \frac{4\pi^2}{B^2 T^2} (I_H + I_K) \right)^2 + \frac{4\pi^2 G^2 R^6 \sigma_R^2}{B^2 L^2} + \frac{\pi^2 G^2 R^8 \sigma_L^2}{4B^2 L^4} + \frac{16\pi^4 \sigma_{I_K}^2}{B^2 T^4} + \frac{16\pi^2 \sigma_T^2}{B^2 T^6} (I_H + I_K)^2 + \frac{\pi^2 R^8 \sigma_G^2}{4B^2 L^2}}$$

5 Diskussion

Die aus den Versuchsergebnissen errechneten Werte für die elastischen Konstanten wirken auf den ersten Blick plausibel, da Torsions-, Elastizitäts- und Kompressionsmodul, wie zu erwarten ist, in etwa die gleiche Größenordnung haben. Dennoch ist das negative Vorzeichen des Kompressionsmoduls nicht sinnvoll und entspricht, wie im Weiteren erläutert, auch nicht der Realität.

Diese Einschätzungen werden durch den Vergleich mit den Literaturwerten aus [2] bestätigt. Ausgehend von dem Elastizitätsmodul, welches nicht gemessen wurde, sondern gegeben war, kommen für das Material des Drahtes Eisen und Baustahl in Betracht, wobei Baustahl mit $E_{lit,Stahl} = 210 \text{ GNm}^{-2}$, die genaueste Übereinstimmung zeigt, Eisen mit $E_{lit,Fe} = 211 \text{ GNm}^{-2}$ aber noch in der angegebenen Standardabweichung liegt.

Im Vergleich zu den Literaturwerten für den Baustahl zeigt sich für das Torsionsmodul $G_{lit,Stahl} = 85 \text{ GNm}^{-2}$ eine geringere Abweichung nach oben, wohingegen das Kompressionsmodul sehr stark vom Literaturwert $Q_{lit,Stahl} = 167 \text{ GNm}^{-2}$ abweicht und außerdem noch das falsche Vorzeichen aufweist. Wie in [2, S.189] gegeben gilt für die Poissonschen Querkontraktionszahlen $0,0 < \mu < 0,5$, womit der in diesem Versuch bestimmte Wert allgemein und auch im Vergleich zu den gegebenen Literaturwert für Baustahl $\mu_{lit,Stahl} = 0,28$ zu hoch ist.

Da alle Größen, außer dem Kompressionsmodul, nach oben abweichen, handelt es sich hierbei um einen systematischen Fehler. Die Abweichung des Kompressionsmoduls nach unten kann jedoch durch die Abweichung der Querkontraktionszahl nach oben begründet werden.

Die Quelle dieses systematischen Fehlers liegt in der Art der Zeitmessung. Da die Versuchsvorrichtung nur mit unzureichender Verlässlichkeit funktionierte, ist anzunehmen, dass die erhaltenen Periodendauern nicht den tatsächlichen entsprechen.

Aufgrund der bereits erwähnten Unzuverlässigkeit der Versuchsvorrichtung war es nicht möglich, die Periodendauer der Schwingung im äußeren Magnetfeld für mehrere magnetische Flussdichten durchzuführen. Dadurch konnte für diesen Teil keine Regression der Messwerte verwendet werden, um das magnetische Moment zu bestimmen.

Literatur

- [1] Schaaf, Peter und Große-Knetter, Jörn(2008): *Das Physikalische Praktikum*,
Universitätsverlag Göttingen.
- [2] Kuchling, Horst(2007): *Taschenbuch der Physik*, 19. Auflage,
Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag München.