

TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
DORTMUND

ANFÄNGERPRAKTIKUM PHYSIK  
WINTERSEMESTER  
13/14

---

**V355**  
**Gekoppelte Schwingkreise**

19. Dezember 2013

---

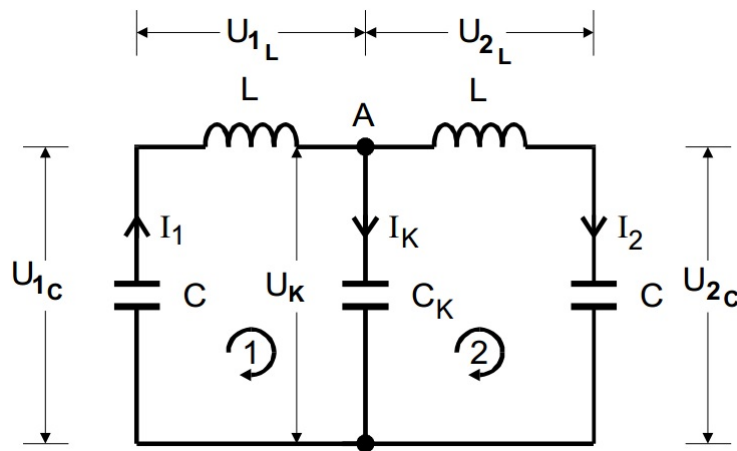
Johannes Schlüter  
Joshua Luckey

johannes.schlueter@udo.edu  
joshua.luckey@udo.edu

# 1 Einleitung

Im Versuch "Gekoppelte Schwingkreise" V355 werden zwei kapazitiv gekoppelte Schwingkreise untersucht. Dies wird realisiert durch eine Schaltung mit zwei Schwingkreisen, bestehend aus je einem Kondensator und einer Induktivität, die über einen weiteren Kondensator gekoppelt werden.

# 2 Theorie



**Abbildung 1:** Prinzipschaltbild zweier kapazitiv gekoppelter Schwingkreise [1]

Nach der Kirchhoff'schen Knotenregel gilt der Betrag der in einen Knoten fließenden Ströme entspricht dem, der hinaus fließenden Ströme. (s. Abb.1)

$$I_K = I_1 - I_2 \quad (1)$$

Für die Maschen aus Abb.2 gilt:

$$U_{1C} + U_{1L} + U_K = 0 \quad (2)$$

und

$$U_{2C} + U_{2L} + U_K = 0 \quad (3)$$

Aus diesen Grundsätzlichen Gleichungen lässt sich die Schwingungsfrequenz

$$v^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (4)$$

und die Frequenz

$$v^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1}}} \quad (5)$$

bestimmen.

Mit Hilfe der Maschenregel und Betrachtung der komplexen Widerstände ergibt sich der Betrag von  $I_2$  zu:

$$|\mathfrak{I}_2| = |\mathfrak{U}| \frac{1}{\sqrt{4\omega^2 C_K^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left(\frac{1}{\omega C_K} - \omega C_K Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_K\right)}} \quad (6)$$

mit der Vereinfachung:

$$Z(\omega) := \omega L - \frac{1}{\omega} \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_K} \right)$$

## 3 Durchführung

### 3.1 Aufbau

In Abb.2 ist der erste Aufbau dargestellt, dieser wird für die erste Justierung benötigt und ist ein noch nicht gekoppelter Schwingkreis, bestehend aus einem Sinusgenerator für die Anregung, einer Kapazität und einer Induktivität, sowie einem  $48\Omega$  Widerstand an dem mit dem Oszilloskop die Spannung abgenommen wird. Zusätzlich wird noch eine Verbindung in den X-Eingang des Oszilloskops gelegt, was notwendig ist um mit Hilfe der Lissajous-Figuren Aussagen zu treffen.

In Abb.3 wird nun ein zusätzlicher Schwingkreis mit Hilfe von einem Kondensator  $C_K$  gekoppelt und dann mit einem Rechtecksignal angeregt. Zu erwähnen ist noch, dass beim tatsächlichen Versuch wieder ein  $48\Omega$  Widerstand verwendet wird.

Beim letzten Aufbau (Abb.4) wird nun an den gekoppelte Schwingkreis ein Wobbelgenerator angeschlossen, dieser erzeugt ein Gleichspannungssignal, welches proportional zur Momentanfrequenz ist, ein XY-Schreiber existiert zwar nicht, jedoch lässt sich auch ein Bild am Oszilloskop erzeugen.

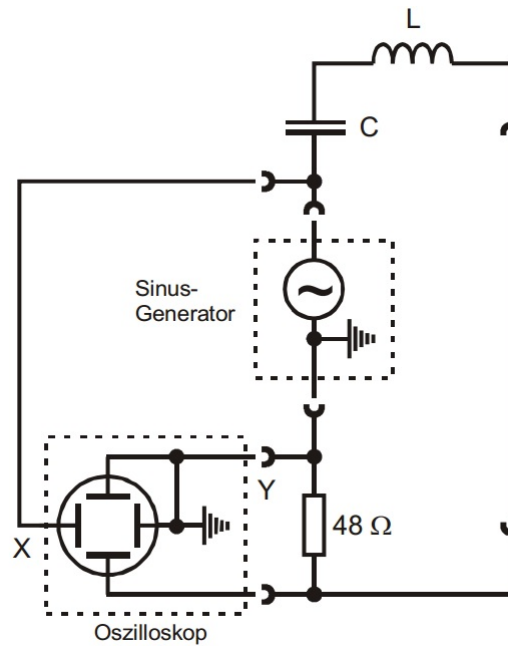
### 3.2 Messung

Zu erst wird die Schaltung (Abb.2) nachgebaut um dann die Resonanzfrequenz des abgestimmten Schwingkreises zu ermitteln, dies geschieht unter zu Hilfenahme der Lissajous-Figuren.

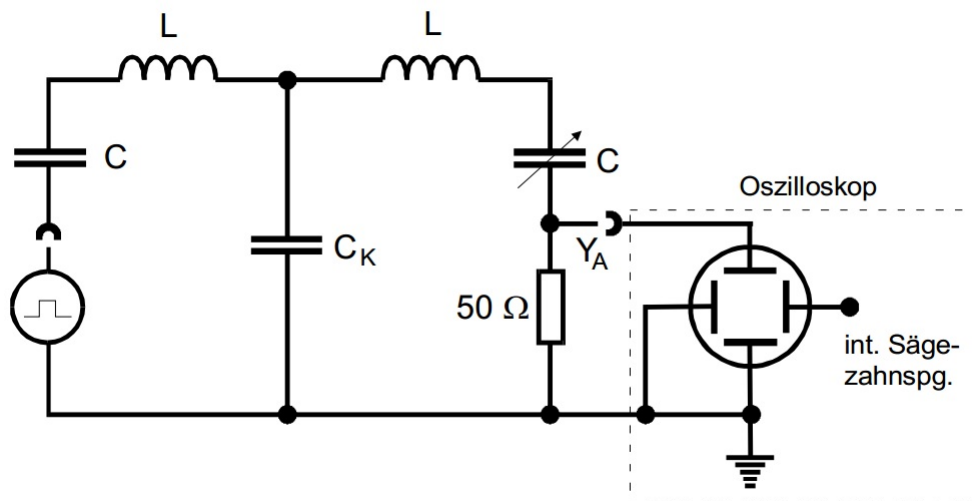
Danach wird der Schwingkreis mit einem über den Generator erzeugten Rechtecksignal zum Schwingen angeregt. (In Abb.3 illustriert) Bei der nun folgenden Messung wird für verschiedene  $C_K$  das Verhältnis der Schwingungs- und Schwebungsfrequenz ermittelt. Im nächsten Schritt wird der Rechteck- durch einen Sinusgenerator ersetzt und die Frequenzen  $v^+$  und  $v^-$  werden in Abhängigkeit von  $C_K$  mit Hilfe der Lissajous-Figuren gemessen bei denen die Frequenz 0 oder  $\pi$  ist.

Zu Letzt wird gemäß Abb.4 eine Schaltung erstellt und am Oszilloskop die entstandenen

Bilder abgenommen.



**Abbildung 2:** Messschaltung zur genauen Bestimmung der Resonanzfrequenz eines Schwingkreises [1]



**Abbildung 3:** Schaltung zur Untersuchung von Schwebungsvorgängen in einem gekoppelten System [1]

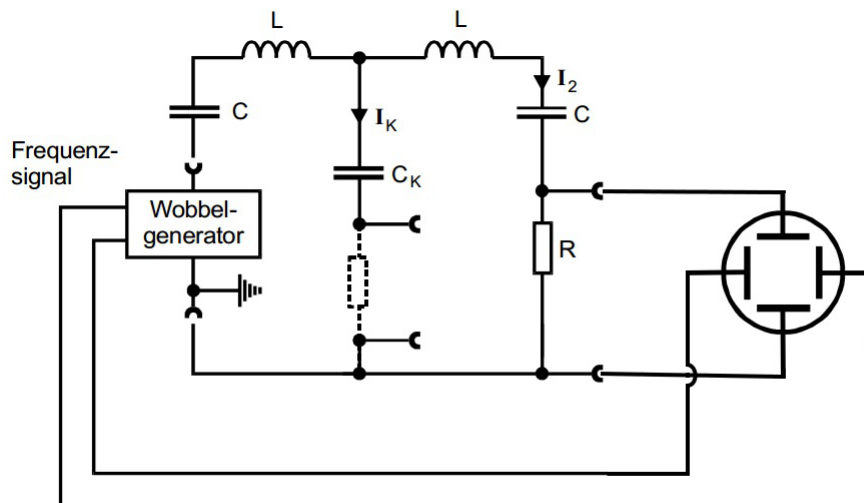


Abbildung 4: Schaltung zur Aufnahme von Stromkurven (bearbeitet)[1]

## 4 Auswertung

Im Folgenden sind die während des Versuchs aufgenommenen Messwert und die aus diesen berechneten Größen tabellarisch aufgeführt. An entsprechender Stelle sind Erklärungen zu den Rechnungen und Messwerten gegeben. Die Gleichungen zur Berechnung der angegebenen Fehler sind Aufgrund ihrer hohen Komplexität nicht angegeben.

### 4.1 Messung des Frequenzverhältnisses

Die durch Abzählen bestimmte Anzahl der Schwingungamplituden  $A_1$  pro Schwebungsamplitude, das entsprechende Verhältnis sind in Tabelle 1 mit der jeweiligen Kapazität eingetragen dargestellt.

Kapazität $C_K$ [nF]	Amplitudenzahl $A_1$	Amplitudenverhältnis $1/A_1$
$1,00 \pm 0,03$	2	0,500
$2,19 \pm 0,07$	3	0,333
$2,86 \pm 0,09$	4	0,250
$4,7 \pm 0,1$	7	0,143
$6,9 \pm 0,2$	9	0,111
$8,2 \pm 0,2$	11	0,091
$10,0 \pm 0,3$	13	0,077
$12,0 \pm 0,4$	15	0,067

Tabelle 1: Messwerte zur Bestimmung des Frequenzverhältnisses

Mit Hilfe von (4) und (5) können die Fundamentalfrequenzen  $\nu^+$  und  $\nu^-$  aus den gege-

benen Größen

$$C = (0,793\,20 \pm 0,000\,05) \text{ nF} \quad (7a)$$

$$C_{sp} = 0,028 \text{ nF} \quad (7b)$$

$$L = (23,95 \pm 0,05) \text{ mH} \quad (7c)$$

bestimmt werden. Diese Frequenzen sind in Tabelle 2 zu finden, in der auch das jeweilige Verhältnis  $\frac{2(\nu^- - \nu^+)}{\nu^- + \nu^+}$  der Schwebungs- zur Schwingungsfrequenz eingetragen ist.

Kapazitäten $C_K$ [nF]	Fundamentalfrequenz $\nu^+$ [kHz]	Fundamentalfrequenz $\nu^-$ [kHz]	Frequenzverhältnis $\frac{2(\nu^- - \nu^+)}{\nu^- + \nu^+}$
$1,00 \pm 0,03$	$35,88 \pm 0,04$	$56,3 \pm 0,5$	$0,442 \pm 0,008$
$2,19 \pm 0,07$	$35,88 \pm 0,04$	$46,6 \pm 0,3$	$0,259 \pm 0,006$
$2,86 \pm 0,09$	$35,88 \pm 0,04$	$44,3 \pm 0,2$	$0,210 \pm 0,005$
$4,7 \pm 0,1$	$35,88 \pm 0,04$	$41,2 \pm 0,2$	$0,138 \pm 0,004$
$6,9 \pm 0,2$	$35,88 \pm 0,04$	$39,7 \pm 0,1$	$0,100 \pm 0,003$
$8,2 \pm 0,2$	$35,88 \pm 0,04$	$39,1 \pm 0,1$	$0,085 \pm 0,002$
$10,0 \pm 0,3$	$35,88 \pm 0,04$	$38,52 \pm 0,09$	$0,071 \pm 0,002$
$12,0 \pm 0,4$	$35,88 \pm 0,04$	$38,10 \pm 0,08$	$0,060 \pm 0,002$

**Tabelle 2:** Berechnete Fundamentalfrequenzen und das Frequenzverhältnis der Schwebung

Die relativen Abweichungen der gemessenen von den berechneten Werten des Frequenzverhältnisses  $N_t := \frac{2(\nu^- - \nu^+)}{\nu^- + \nu^+}$  und  $N_m := \frac{1}{A_1}$  sind in Tabelle 3 enthalten.

Relative Abweichung $\frac{ N_m - N_t }{N_t}$	
$0,13 \pm 0,02$	$0,11 \pm 0,03$
$0,29 \pm 0,03$	$0,07 \pm 0,03$
$0,19 \pm 0,03$	$0,08 \pm 0,03$
$0,03 \pm 0,03$	$0,11 \pm 0,03$

**Tabelle 3:** Relative Abweichung der gemessenen Frequenzverhältnisse

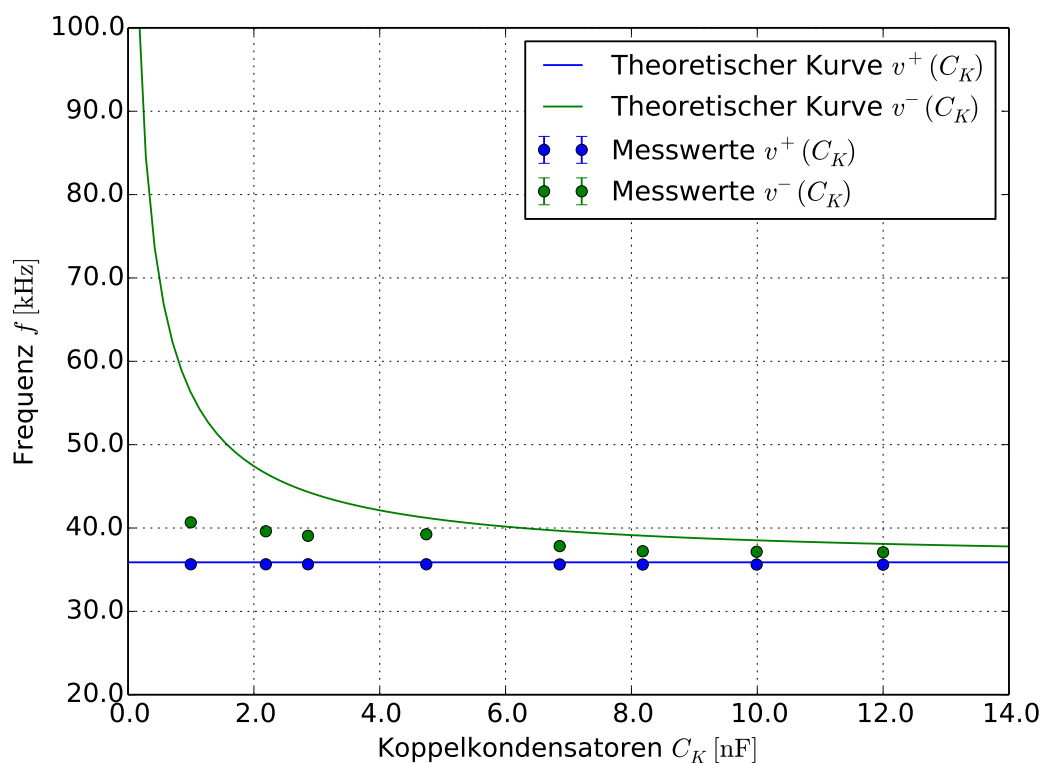
## 4.2 Messung der Fundamentalfrequenzen

Die gemessenen Fundamentalfrequenzen der gekoppelten Schwingkreise sind in Tabelle 4 zusammen mit den berechneten Fundamentalfrequenzen aus Tabelle 2 zu finden. Neben diesen sind dort auch die Verhältnisse von gemessener zu berechneter Frequenz angegeben.

Berechnete Fundamentalfrequenzen		Gemessene Fundamentalfrequenzen		Frequenzverhältnis	
$\nu_{theo}^+$ [kHz]	$\nu_{theo}^-$ [kHz]	$\nu^+$ [kHz]	$\nu^-$ [kHz]	$\nu^+/\nu_{theo}^+$	$\nu^-/\nu_{theo}^-$
$35,88 \pm 0,04$	$56,3 \pm 0,5$	$35,65 \pm 0,01$	$40,68 \pm 0,01$	$0,993 \pm 0,001$	$0,723 \pm 0,006$
$35,88 \pm 0,04$	$46,6 \pm 0,3$	$35,65 \pm 0,01$	$39,61 \pm 0,01$	$0,993 \pm 0,001$	$0,851 \pm 0,005$
$35,88 \pm 0,04$	$44,3 \pm 0,2$	$35,65 \pm 0,01$	$39,06 \pm 0,01$	$0,993 \pm 0,001$	$0,881 \pm 0,005$
$35,88 \pm 0,04$	$41,2 \pm 0,2$	$35,65 \pm 0,01$	$39,25 \pm 0,01$	$0,993 \pm 0,001$	$0,952 \pm 0,004$
$35,88 \pm 0,04$	$39,7 \pm 0,1$	$35,63 \pm 0,01$	$37,83 \pm 0,01$	$0,993 \pm 0,001$	$0,954 \pm 0,003$
$35,88 \pm 0,04$	$39,1 \pm 0,1$	$35,62 \pm 0,01$	$37,22 \pm 0,01$	$0,993 \pm 0,001$	$0,952 \pm 0,002$
$35,88 \pm 0,04$	$38,52 \pm 0,09$	$35,62 \pm 0,01$	$37,15 \pm 0,01$	$0,993 \pm 0,001$	$0,964 \pm 0,002$
$35,88 \pm 0,04$	$38,10 \pm 0,08$	$35,60 \pm 0,01$	$37,09 \pm 0,01$	$0,992 \pm 0,001$	$0,974 \pm 0,002$

**Tabelle 4:** Berechnete und gemessene Fundamentalfrequenzen mit jeweiligem Verhältnis

In Abbildung 5 sind die gemessenen Fundamentalfrequenzen  $\nu^+$  und  $\nu^-$  in Abhängigkeit von der Kapazität des Koppelkondensators  $C_K$  zusammen mit dem theoretischen Verlauf dieser Abhängigkeit aufgetragen.



**Abbildung 5:** Darstellung der gemessenen Fundamentalfrequenzen und deren Theoriekurven

### 4.3 Messung des Verlaufs des Stroms $I_2$

Der auf dem Oszilloskop angezeigte Verlauf der Spannung in Abhängigkeit von der Frequenz, ist für jeden Koppelkondensator  $C_K$  ähnlich zu dem in Abbildung 6 für den Kondensator mit  $C_K = (2,19 \pm 0,07)$  nF dargestellten.

Die aus diesen Bildern bestimmten Messwerte für die Fundamentalfrequenzen und die zugehörigen Spannungen sind in Tabelle 5 aufgeführt.

Kapazitäten $C_K$ [nF]	Fundamentalfrequenz $\nu^+$ [kHz]	Fundamentalfrequenz $\nu^-$ [kHz]	Spannung $U^+$ [V]	Spannung $U^-$ [V]
$2,19 \pm 0,07$	$38,0 \pm 0,8$	$48,5 \pm 0,8$	$2,00 \pm 0,05$	$1,10 \pm 0,05$
$2,86 \pm 0,09$	$37,2 \pm 0,8$	$46,2 \pm 0,8$	$2,00 \pm 0,05$	$1,10 \pm 0,05$
$4,7 \pm 0,1$	$38,0 \pm 0,8$	$43,2 \pm 0,8$	$2,05 \pm 0,05$	$1,15 \pm 0,05$
$6,9 \pm 0,2$	$38,0 \pm 0,8$	$41,0 \pm 0,8$	$2,05 \pm 0,05$	$1,15 \pm 0,05$
$8,2 \pm 0,2$	$38,0 \pm 0,8$	$40,2 \pm 0,8$	$2,10 \pm 0,05$	$1,15 \pm 0,05$
$10,0 \pm 0,3$	$38,0 \pm 0,8$	$39,5 \pm 0,8$	$2,10 \pm 0,05$	$1,20 \pm 0,05$
$12,0 \pm 0,4$	$37,2 \pm 0,8$	$38,8 \pm 0,8$	$2,10 \pm 0,05$	$1,25 \pm 0,05$

**Tabelle 5:** Fundamentalfrequenzen und jeweilige Spannungsspitzen

Die zu untersuchende Stromstärke lässt sich aus den Spannungen in Tabelle 5 mit Hilfe von

$$I = \frac{U}{R} \quad (8)$$

berechnen. Zusammen mit den Mitteln (6) berechneten Werten für diese Stromstärke, sind diese in Tabelle 6 eingetragen. Für die Berechnung der Stromstärken, wurde die Generatorspannung  $|\mathfrak{U}| = 4$  V verwendet.

Berechnet		Gemessen	
Stromstärke $I^+$ [A]	Stromstärke $I^-$ [A]	Stromstärke $I^+$ [A]	Stromstärke $I^-$ [A]
$0,005 \pm 0,002$	$0,01 \pm 0,01$	$0,0256 \pm 0,0006$	$0,0141 \pm 0,0006$
$0,009 \pm 0,008$	$0,008 \pm 0,008$	$0,0256 \pm 0,0006$	$0,0141 \pm 0,0006$
$0,006 \pm 0,002$	$0,005 \pm 0,004$	$0,0263 \pm 0,0006$	$0,0147 \pm 0,0006$
$0,007 \pm 0,001$	$0,01 \pm 0,01$	$0,0263 \pm 0,0006$	$0,0147 \pm 0,0006$
$0,0078 \pm 0,0008$	$0,01 \pm 0,02$	$0,0269 \pm 0,0006$	$0,0147 \pm 0,0006$
$0,0092 \pm 0,0007$	$0,02 \pm 0,03$	$0,0269 \pm 0,0006$	$0,0154 \pm 0,0006$
$0,012 \pm 0,005$	$0,02 \pm 0,02$	$0,0269 \pm 0,0006$	$0,0160 \pm 0,0006$

**Tabelle 6:** Theoretisch bestimmte und gemessene Stromstärken

Die in Abbildung 7a bis 7d dargestellten Graphen zeigen den theoretischen Verlauf der Stromstärke nach (6), für eine Auswahl der verwendeten Koppelkondensatoren.



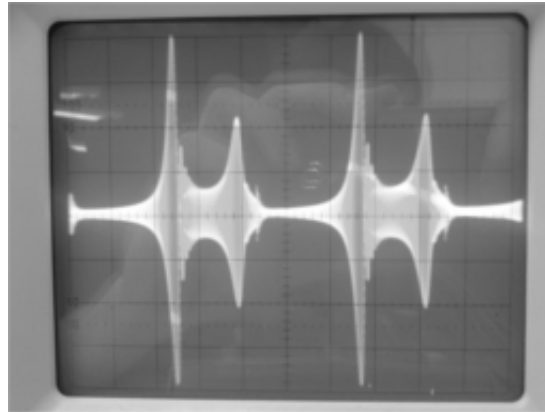
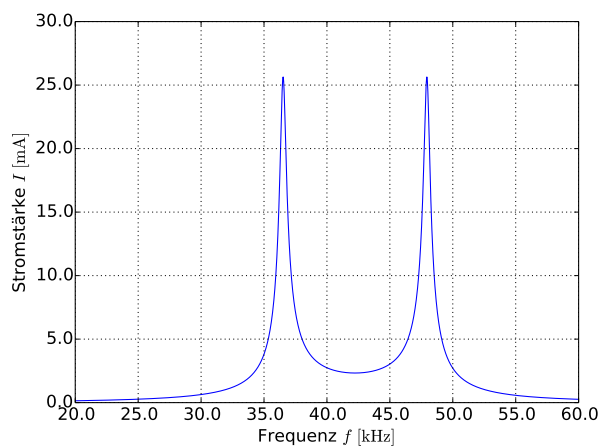
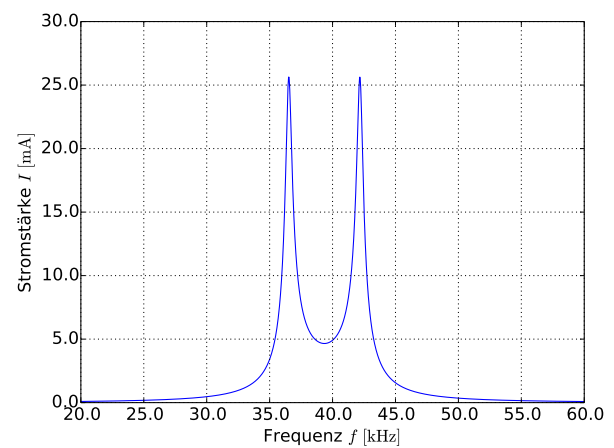


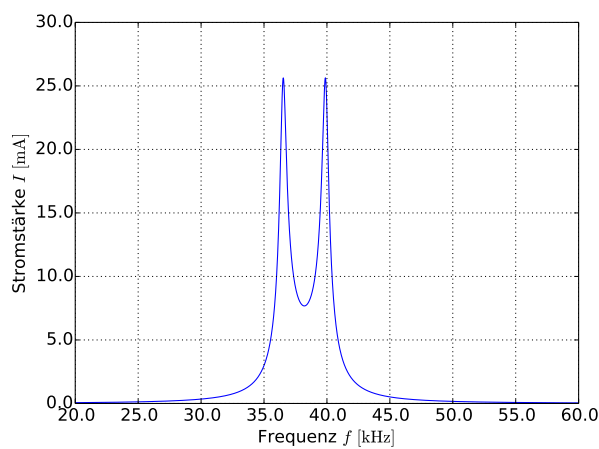
Abbildung 6: Beispielhafter Verlauf der Spannung für  $C_K = (2,19 \pm 0,07) \text{ nF}$



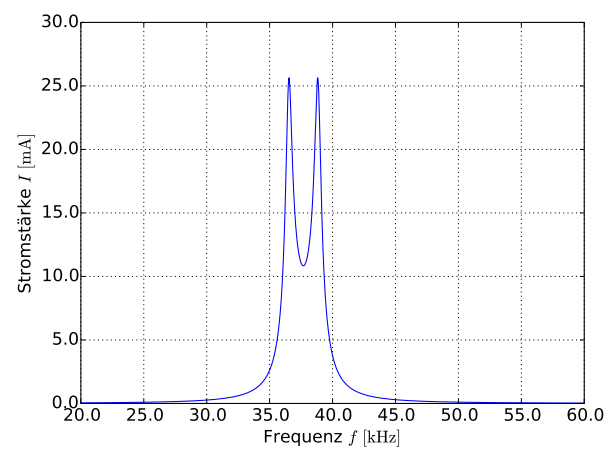
(a)  $C_K = (2,19 \pm 0,07) \text{ nF}$



(b)  $C_K = (4,7 \pm 0,1) \text{ nF}$



(c)  $C_K = (8,2 \pm 0,2) \text{ nF}$



(d)  $C_K = (12,0 \pm 0,4) \text{ nF}$

Abbildung 7: Stromverläufe unter Verwendung verschiedener Koppelkondensatoren  $C_K$

## 5 Diskussion

Im folgenden Abschnitt werden die in Abschnitt 4 erarbeiteten Ergebnisse, durch Vergleich mit den theoretisch berechneten Werten auf Plausibilität hin untersucht. Dabei wird auch auf den verwendeten Versuchsaufbau und die Versuchsdurchführung Bezug genommen.

Die in Abschnitt 4.1 erhaltenen Amplitudenverhältnisse in Tabelle 1 stimmen mit den, aus den berechneten Werten der Fundamentalschwingung bestimmten, Frequenzverhältnissen in Tabelle 4 nicht exakt, jedoch in plausibler Weise überein. Wie aus den Werten in Tabelle 3 zu berechnen ist weichen die gemessenen Werte im Mittel um weniger als 13 % ab. Dabei sind die erhalten Messwerte jeweils größer als der theoretisch bestimmte Wert, es handelt sich demnach um eine allgemeine Abweichung nach oben.

Eine Erklärung für dies Abweichung ist die verwendete Messmethode, da sich durch Abzählen der Schwingungsamplituden pro Schwebungsamplitude nur Frequenzverhältnisse bestimmen lassen die als Bruch mit ganzzahligem Nenner beschreibbar sind, wodurch nicht ganzzahlige Verhältnisse nicht bestimmbar sind. Eine Erhöhung der Genauigkeit erhalte man durch mitteln der Anzahl an Schwingungsamplituden über mehrere Schwebungsamplituden.

Die in Abschnitt 4.2 gemessenen Fundamentalfrequenzen stimmen vom Verlauf mit den theoretischen Fundamentalfrequenzen der gekoppelten Schwingkreise überein. So ist die gemessene Fundamentalfrequenz  $\nu^+$  aus Tabelle 2 genau wie die berechnete Frequenz bis auf geringe Änderungen konstant und mit einer Abweichung von unter 1 % vom Theoriewert sehr genau. Die gemessenen Fundamentalfrequenzen  $\nu^-$  zeigen für die ersten drei Messungen mit durchschnittlich 18 % größere Abweichungen als die der folgenden Messungen bei denen die Abweichung bei durchschnittlich 4 % liegt. Auch bei dieser Messung haben alle Abweichungen das selbe (negative) Vorzeichen, wodurch auch hier wider von einem systematischen Fehler auszugehen ist.

Die in Abschnitt 4.3 theoretisch berechneten Stromstärken zeigen deutliche Abweichungen von den gemessenen. So haben einige der berechneten Stromstärken  $I^+$  eine geringe Abweichung zu den gemessenen, wohingegen die Werte für  $I^-$  deutlich von den gemessenen abweichen. Eine Begründung für diese mitunter starken Abweichungen könnte das Einbrechen der Generatorspannung sein die beim Erreichen der Resonanzfrequenz Eintritt, wodurch diese folglich nicht mehr konstant wäre. Eine weiterführende Begründung ist die Tatsache, dass die aus den Abbildungen wie 6 abgelesene Resonanzfrequenzen nicht exakt der tatsächlichen entspricht, wodurch diese Abweichung ebenfalls in die Berechnung der Ströme einfließt.

## Literatur

- [1] *Versuchsanleitung. V355 Gekoppelte Schwingkreise.* URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V355.pdf> (besucht am 16.01.2014).