1 Einleitung

Im Versuch "elektrische Brückenschaltungen" V302 werden verschiedene Schaltungen aufgebaut, um (Wirk- und Blind-)Widerstände ausmessen zu können.

2 Vorbereitungsaufgaben

3 Theorie

In der Elektrotechnik sind die Kirchhoff'schen Gesetze essentiell.

$$\sum_{k} I_k = 0 \tag{1}$$

lautet die Knotenregel und sagt aus, dass der Betrag aller Ströme, die in einen Punkt laufen gleich dem Betrag der Herauslaufenden sein muss.

Die Maschenregel

$$\sum_{k} E_k = \sum_{k} I_k R_k \tag{2}$$

sagt aus, dass die Summe der Energie, innerhalb einer Masche, gleich der Summe aus Strömen und Widerständen ist. Weiterhin wichtig für die Wheatstone'sche-, die Kapazitätsmess-, die Induktivitätsmess- und die Maxwell-Brücke ist die Gleichung:

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \tag{3}$$

um den Betrag des unbekannten Widerstandes zu ermitteln.

Speziell für die Kapazitätsbrücke, um den Wert des unbekannten Kondensators zu berechnen:

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3} \tag{4}$$

Analog dazu für die Induktivitätsmessbrücke:

$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4} \tag{5}$$

Da die Maxwell-Brücke nicht analog zu den vorherigen Brücken aufgebaut ist, verändert sich dem entsprechend auch die Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten.

$$L_x = R_2 R_3 C_4 \tag{6}$$

Bei der Wien-Robinson-Brücke sind nun alle Teile bekannt und die Frequenz ist veränderlich so ergibt sich für die Brückenspannung \mathfrak{u}_{Br} und die Eingangsspannung \mathfrak{u}_{S} :

$$\left| \frac{\mathfrak{u}_{Br}}{\mathfrak{u}_S} \right|^2 = \frac{1}{9} \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2} = f(\Omega)^2 \tag{7}$$

Die theoretische Kreisfrequenz $\omega_{0,theo}$ ergibt sich aus den Bauteilen der Wien-Robinson-Brücke zu:

$$\omega_{0,theo} = \frac{1}{RC} \tag{8}$$

Um den Klirrfaktor k zu bestimmen, welcher ein Bewertungskriterium für den Sinusgenerator ist, benötigen wir:

$$k := \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}}{U_1} \tag{9}$$

Um die Spannung U_2 am Ausgang des Generators zu errechnen, benötigt man zusätzlich noch:

$$U_2 = \frac{U_{Br}}{f(\Omega)} \tag{10}$$

(mit $\Omega = 2$).

4 Durchführung

4.1 Aufbau

Im Experiment werden fünf Brückenschaltungen aufgebaut und vermessen.

Die erste Brücke, bei der es einen realen Widerstand zu messen gilt, ist die Wheatstone'sche Brücke. Sie besteht im Wesentlichen aus einem bekannten und einem unbekannten Widerstand, Spannungsversorgung und zum Ablesen der Oszillograph. Das Verhältnis von R_3/R_4 wird in der Schaltung mit einem Potentiometer realisiert.

Sowohl die Kapazitäts-, als auch die Induktivitätsmessbrücke haben einen analogen Aufbau, hier sind lediglich zu R_x und R_2 Kondensatoren bzw. Spulen zwischen geschaltet, um einen komplexen Widerstand in die Schaltung einzubauen, dabei dienen

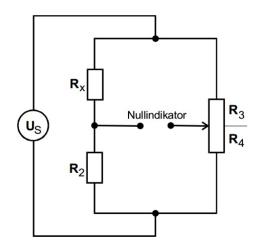


Abbildung 1: Wheatstonesche Brückenschaltung [1]

 R_x und R_2 als Stellglied, sprich stellvertretend für die dielektrische Verlustwärme, die z.B. durch Wärme entsteht. Bei der Maxwell-Brücke wird wie bei der Induktivitätsmessbrücke

eine Spule L_x mit einem Stellglied und R_2 in Reihe geschaltet, parallel dazu ist - entgegen der Anleitung - wieder das Potentiometer geschaltet, dieses mal ist es allerdings zusätzlich R_4 mit einem bekannten Kondensator C_4 parallel geschaltet.

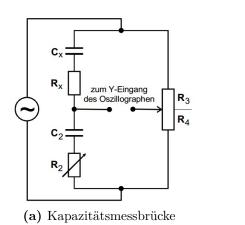
Nun folgt noch die Wien-Robinson-Brücke, sie soll keine Abgleichelemente haben. Der Aufbau ähnelt dem der Maxwellbrücke in gewissem Maße: L_x und R_x werden hier durch den doppelten Widerstand R_2 ersetzt und nun R' genannt, zusätzlich wird der verstellbare Widerstand R_3 durch einen Kondensator mit einem festen Widerstand R ($\neq R'$) ersetzt, außerdem ist R_4 natürlich nun auch nicht mehr verstellbar, da nun nur noch die Frequenz geändert wird. Die Wien-Robinson-Brücke fungiert als Frequenzfilter.

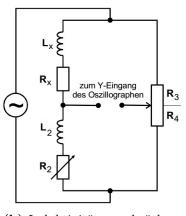
4.2 eigentliche Durchführung

Zu erst wird die Wheatstone'sche Brücke mit 3 verschiedenen R_2 für eine Unbekannte R_x mit Hilfe des Potentiometers ausgemessen, dabei wird ein Minimum für die dargestellte Spannung am Oszillographen gesucht.

Das wird dies analog für die Kapazitätsmessbrücke und für die Induktivitätsmessbrücke durchgeführt, allerdings nur für zwei anstatt drei bekannte Spulen und für die Maxwell-Brücke anstelle der dritten Spule nur ein Mal.

Zuletzt werden noch für die Wien-Robinson-Brücke die Peak-to-Peak-Spannung für die Frequenzen von 20 bis 30.000 Hertz abgelesen.





(b) Induktivitätsmessbrücke

Abbildung 2: Kapazitätsmessbrücke und Induktivitätsmessbrücke [1]

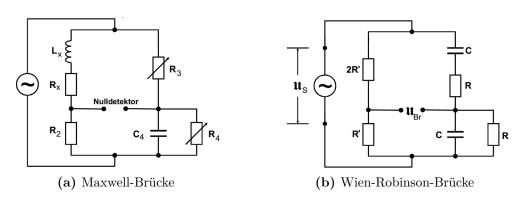


Abbildung 3: Maxwell-Brücke und Wien-Robinson-Brücke [1]

5 Auswertung

Im Folgenden sind die aufgenommenen Messwerte und die aus diesen berechneten Größen vorwiegend tabellarisch aufgetragen. Die jeweiligen Fehler der berechneten Werte, wurden mit den angegebenen, in römischen Zahlen nummerierten Fehlergleichung nach Gauß bestimmt, welche sich in Abschnitt 5.5 befinden. An entsprechender Stelle sind Erklärungen zu den Werten und Rechnungen gegeben.

In den Abschnitten 5.1 bis 5.3.2 wird, wie in Abschnitt 4 beschrieben ein Potentiometer verwendet, um den Widerstand R_3 einzustellen. Mit dem Maximalwiderstand $R_{max} = 1003 \Omega$ des Potentiometers, erhält man den Widerstand R_4 als:

$$R_4 = R_{max} - R_3 = 1003 \,\Omega - R_3 \tag{11}$$

5.1 Bestimmung eines Widerstandes mit der Wheatstonebrücke

Bei dieser Messung wurde der unbekannte Widerstand Wert 10 vermessen. Der am Potentiometer eingestellte Widerstand R_3 , der Quotient aus diesen und den nach (11) berechneten Widerständen R_4 , die jeweiligen Abgleichwiderstände R_2 und die mit Hilfe von (3) aus diesen berechneten Werte für R_x sind in Tabelle 1 zu finden.

Widerstand	Widerstand	Quotient	Widerstand
$R_2\left[\Omega\right]$	$R_3 [\Omega]$	$\frac{R_3}{R_4}$	$R_x\left[\Omega\right](II)$
$332,0 \pm 0,7$	421	0.723 ± 0.004	240 ± 1
664 ± 1	266	0.361 ± 0.002	240 ± 1
1000 ± 2	195	0.241 ± 0.001	241 ± 1

Tabelle 1: Werte der Messung an der Wheatstonebrücke

Der Mittelwert der errechneten Werte für R_x ergibt sich aus den Messwerten zu,

$$\langle R_x \rangle = (240.4 \pm 0.7) \,\Omega \tag{12}$$

wobei der Fehler mit (I) bestimmt wurde.

5.2 Bestimmung von Kapazitäten mit einer Kapazitätsmessbrücke

In den zwei nachfolgenden Abschnitten werden die Kapazitäten einer idealen und einer realen Kapazität mit Hilfe einer Kapazitätsmessbrücke bestimmt.

5.2.1 Bestimmung einer idealen Kapazität

Aus den in Tabelle 2 gelisteten Messwerten für die Abgleichkapazitäten C_2 , den am Potentiometer eingestellten Widerständen R_3 und den mit (11) aus diesen bestimmten R_4 wurden die ebenfalls in Tabelle 2 dargestellten unbekannten Kapazitäten C_x (Wert 3) unter Verwendung von (4) bestimmt.

Kapazität	Widerstand	Quotient	Widerstand
$C_2 [\mathrm{nF}]$	$R_3\left[\Omega\right]$	$rac{R_3}{R_4}$	$C_x [nF] (II)$
994 ± 2	705	$2,37 \pm 0,01$	420 ± 2
750 ± 2	640	$1,763 \pm 0,009$	425 ± 2
597 ± 1	589	$1,423 \pm 0,007$	420 ± 2

Tabelle 2: Werte der Messung einer idealen Kapazitätan der Kapazitätsmessbrücke

Als Mittelwert der unbekannten Kapazität C_x erhält man hieraus,

$$\langle C_x \rangle = (422 \pm 1) \,\mathrm{nF} \tag{13}$$

mit dem Fehler nach (I).

5.2.2 Bestimmung einer realen Kapazität

Für die Bestimmung einer realen Kapazität (Wert 9) wird, anderes als bei der einer idealen Kapazität, ein Stellglied $R_2 = (500 \pm 15) \Omega$ benötigt. Die anderen bekannten Größen sind analog zu Abschnitt 5.2.1 zusammen mit den aus diesen berechneten unbekannten Größen, die Kapazität C_x bestimmt durch (4) und deren Wirkwiderstand R_x bestimmt durch (3) in Tabelle 3 eingetragen.

Kapazität	Widerstand	Quotient	Kapazität	Widerstand
$C_2 [\mathrm{nF}]$	$R_3 [\Omega]$	$\frac{R_3}{R_4}$	$C_x [nF] (II)$	$R_x\left[\Omega\right](II)$
994 ± 2	632	$1,704 \pm 0,009$	584 ± 3	852 ± 4
750 ± 2	586	$1,405 \pm 0,007$	534 ± 3	703 ± 4
597 ± 1	561	$1,269 \pm 0,006$	470 ± 3	635 ± 3

Tabelle 3: Werte der Messung einer idealen Kapazitätan der Kapazitätsmessbrücke

Die Mittelwerte der unbekannten Größen C_x und R_x ergeben sich somit zu:

$$\langle C_x \rangle = (529 \pm 2) \,\text{nF} \quad \text{und} \quad \langle R_x \rangle = (730 \pm 2) \,\Omega$$
 (14)

Der Fehler wurde jeweils mit Hilfe von (I) bestimmt.

5.3 Bestimmung von Induktivitäten

Nachfolgend wird eine reale Induktivität (Wert 16) zunächst mit Hilfe einer Induktivitätsmessbrücke und anschließend mit einer Maxwellbrücke vermessen. Bei beiden Untersuchungen wird ein Stellglied $R_2 = 1000\,\Omega$ verwendet.

5.3.1 Bestimmung Mittels einer Induktivitätsmessbrücke

Die verwendeten Abgleichinduktivitäten L_2 , der am Potentiometer eingestellten Widerstand R_3 sowie die Quotienten aus diesen und den nach (11) berechneten Widerständen R_4 und die mit Hilfe von (5) und (3) berechneten unbekannten L_x und R_x sind in ?? zu finden.

Induktivität	Widerstand	Quotient	Induktivität	Widerstand
$L_2 [\mathrm{mH}]$	$R_3 [\Omega]$	$\frac{R_3}{R_4}$	$L_x [\mathrm{mH}] (II)$	$R_x\left[\Omega\right](II)$
$20,10 \pm 0,04$	305	0.437 ± 0.002	$8,78 \pm 0,05$	437 ± 13
$27,50 \pm 0,06$	321	0.471 ± 0.002	$12,94 \pm 0,07$	471 ± 14

Tabelle 4: Werte der Messung einer realen Induktivität mit einer Induktivitätsmessbrücke

Die aus diesen Werten bestimmten Mittelwerte der Unbekannten Größen, mit den Fehlern nach (I) sind:

$$\langle L_x \rangle = (10,86 \pm 0,04) \,\text{mH} \quad \text{und} \quad \langle R_x \rangle = (454 \pm 10) \,\Omega$$
 (15)

5.3.2 Bestimmung Mittels einer Maxwellbrücke

Bei der Bestimmung der Induktivität L_x und deren Wirkwiderstand R_x werden nur der am Potentiometer eingestellte Widerstand $R_3 = (210 \pm 6) \Omega$, der mit (11) daraus bestimmte Widerstand $R_4 = (793 \pm 30) \Omega$ und die verwendete Kapazität $C_4 = 994 \,\mathrm{nF}$ benötigt. Mit (6) und (3) sowie dem Stellglied R_2 erhält man:

$$L_x = (0.209 \pm 0.009) \,\mathrm{H} \quad \text{und} \quad R_x = (265 \pm 15) \,\Omega$$
 (16)

Die Fehler dieser beiden Größen wurden dabei mit (III) beziehungsweise (IV) bestimmt.

5.4 Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung

Für die Durchführung dieses Versuches wurde eine Wien-Robinson-Brücke, mit folgenden Bauteilen verwendet:

$$R' = 500 \,\Omega$$

$$R = 332 \,\Omega$$

$$C = \langle C_x \rangle^{\text{\tiny 1}} = (242 \pm 1) \,\mathrm{nF}$$

Die eingestellten Generatorfrequenzen ν sind zusammen mit den jeweils gemessenen, doppelten Amplituden der, Brückenspannungen U_{Br} in Tabelle 5 zu finden. Die doppelte Amplitude der Generatorspannung wurde zu $_S = (4,250 \pm 0,001) \,\mathrm{V}$ gemessen.

Frequenz	Brückenspannung	Frequenz	Brückenspannung
$\nu [\mathrm{Hz}]$	$U_{Br}\left[\mathbf{V}\right]$	$\nu [\mathrm{Hz}]$	$U_{Br}\left[\mathrm{V}\right]$
$20,3 \pm 0,1$	$1,438 \pm 0,001$	$6010,3 \pm 0,1$	$1,025 \pm 0,001$
$350,4 \pm 0,1$	0.944 ± 0.001	$7000,3 \pm 0,1$	$1,050 \pm 0,001$
$670,3 \pm 0,1$	$0,469 \pm 0,001$	$8000,3 \pm 0,1$	$1,075 \pm 0,001$
$800,3 \pm 0,1$	0.319 ± 0.001	$10030,3\pm0,1$	$1,094 \pm 0,001$
$900,3 \pm 0,1$	$0,209 \pm 0,001$	$15000,0\pm0,1$	$1,100 \pm 0,001$
$1000,3 \pm 0,1$	$0,119 \pm 0,001$	$20030,3\pm0,1$	$1,075 \pm 0,001$
$1110,3 \pm 0,1$	$0,033 \pm 0,001$	$23100,0\pm0,1$	$1,044 \pm 0,001$
$1400,3 \pm 0,1$	$0,178 \pm 0,001$	$25000,0\pm0,1$	$1,038 \pm 0,001$
$2000,3 \pm 0,1$	$0,463 \pm 0,001$	$27000,0\pm0,1$	$1,019 \pm 0,001$
$3200,3 \pm 0,1$	$0,772 \pm 0,001$	$28000,0\pm0,1$	$1,013 \pm 0,001$
$4000,3 \pm 0,1$	$0,888 \pm 0,001$	$29000,0\pm0,1$	$1,006 \pm 0,001$
$5000,3 \pm 0,1$	$0,975 \pm 0,001$	$30100,0\pm0,1$	$0,994 \pm 0,001$

Tabelle 5: Generatorfrequenzen und gemessene Brückenspannungen

Dabei sind die hervorgehobenen Werte die Frequenz $\nu_0 = (1110,3\pm0,1)$ Hz bei der die minimale Spannung $U_0 = (0,033\pm0,001)$ V gemessen wurde. Die durch Division von (8) durch 2π theoretisch bestimmte Frequenz, bei der die Brückenspannung verschwindet beziehungsweise minimal wird ist $\nu_{0,theo} = (1137\pm3)$ Hz mit dem Fehler nach (V).

In Abbildung 4 ist der Quotient $\frac{U_{Br}}{U_S}$ gegen den Quotienten $\Omega = \frac{\nu}{\nu_0}$ halblogarithmisch aufgetragen, wobei die Zähler dieser Quotienten, jeweils die Werte aus Tabelle 5 darstellen. Des Weiteren ist noch die Theoriekurve dieses Verlaufes, bestimmt durch radizieren von (7), eingezeichnet.

^①Aus Abschnitt 5.2.1

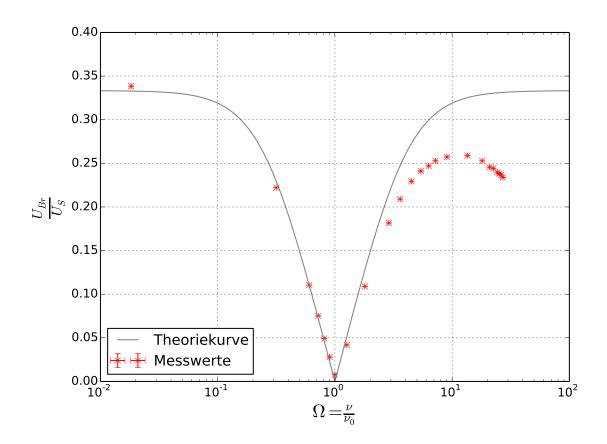


Abbildung 4: Messwerte und Theoriekurve der Spannungs- und Frequenzverhältnisse

5.4.1 Bestimmung des Klirrfaktors eins Frequenzgenerators

Den Klirrfaktor eines Frequenzgenetrators erhält, unter der Annahme $U_2^2 = \sum_{i=2}^n U_i^2$, nach (9), durch die Gleichung:

$$k = \frac{U_2}{U_1} \tag{17}$$

Wobei sich die doppelte Amplitude der ersten Oberschwingung U_2 durch (10) ergibt. Damit ist die doppelte Amplitude der ersten Oberwelle $U_2 = (0.221 \pm 0.007) \,\mathrm{V}$ mit dem Fehler nach (VI), woraus sich der Klirrfaktor

$$k = 0.052 \pm 0.002 \tag{18}$$

ergibt, dessen Fehler unter Verwendung von (VII) berechnet wurde.

5.5 Fehlerrechnung

In diesem Abschnitt sind die, mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung, bestimmten Gleichungen gelistet, mit denen die in der Auswertung angegebenen Fehler berechnet werden können.

Der allgemeine Fehler, des Mittelwerts $\mathbb{M}(x_i)$ mit $i \in \{1, ..., n\}$ durch Gaußsche Fortpflanzung ergibt sich aus der Gleichung:

$$\sigma_{\mathbb{M}} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2} \tag{I}$$

Den Fehler von Gleichungen der Form $f(X, r_X) = X r_X$ erhält man durch die Gleichung:

$$\sigma_f = \sqrt{X^2 \sigma_{r_X}^2 + \sigma_X^2 r_X^2} \tag{II}$$

Der Fehler der, durch (6), errechneten Induktivität ist:

$$\sigma_{L_x} = \sqrt{C_4^2 R_2^2 \sigma_{R_3}^2 + C_4^2 R_3^2 \sigma_{R_2}^2 + R_2^2 R_3^2 \sigma_{C_4}^2}$$
 (III)

Der Fehler des entsprechenden Wirkwiderstandes aus (3), ergibt sich nach:

$$\sigma_{R_x} = \sqrt{\frac{R_2^2 R_3^2}{R_4^4} \sigma_{R_4}^2 + \frac{R_2^2 \sigma_{R_3}^2}{R_4^2} + \frac{R_3^2 \sigma_{R_2}^2}{R_4^2}}$$
 (IV)

Der Fehler der theoretische Frequenz $\nu_{0,theo}$ nach (8) berechnet sich durch:

$$\sigma_{\nu_{0,theo}} = \sqrt{\frac{\sigma_R^2}{C^2 R^4} + \frac{\sigma_C^2}{C^4 R^2}}$$
 (V)

Der Fehler der doppelten Amplitude der ersten Oberwelle (10) ergibt sich vereinfacht aus:

$$\sigma_{U_2} = \frac{\sigma_{U_{Br}}}{f(2)} \tag{VI}$$

Und den Fehler des Klirrfaktors aus (17) erhält man mit:

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{\sigma_{U_2}^2}{U_1^2} + \frac{U_2^2 \sigma_{U_1}^2}{U_1^4}} \tag{VII}$$

6 Diskussion

In diesem Abschnitt werden die in Abschnitt 5 berechneten Größen abschließend diskutiert und auf deren Genauigkeit beziehungsweise Plausibilität hin untersucht, wobei auch auf die verwendeten Versuchsaufbauten Bezug genommen wird.

Die mit Hilfe der Messbrücken in Abschnitt 5.1 und 5.2 berechneten Größen des ohmschen Widerstandes, der ideale Kapazität und der Kapazität mit Wirkwiderstand, sind aufgrund der relativ geringen Abweichungen vom Mittelwert als plausible anzusehen. Die vorliegenden Abweichungen sind zum einen durch die Toleranzen der verwendeten Bauteile und zum anderen dadurch zu begründen, dass es aufgrund der in Abschnitt 5.4.1 untersuchten "Unreinheit" der vom Generator erzeugten Frequenzen nicht möglich ist, die Brückenspannung exakt auf Null abzustimmen. Hier zeigt sich wiederum der Vorteil der Brückenschaltungen, da nur eine Spannung gemessen werden muss bleiben die Abweichung die durch die Messinstrumente verursacht werden gering und man erhält schon mit 3 Messungen ein Ergebnis mit hoher Genauigkeit.

Für die Messung der Induktivität mit Wirkwiderstand in Abschnitt 5.3.1 gelten die zu vor angesprochen Vorteile der Brückenschaltung im gleichen Maße, auch wenn die Abweichung bei dieser Messung größer ausfallen als bei den vorherigen Messungen. Ein Grund dafür ist die zwar nur um einen, dennoch geringer Anzahl an Messungen, da "Ausreißer" in den Messwerten, bei weniger Messungen eine größere Gewichtung erhalten. Die Messung in Abschnitt 5.3.2 mit Hilfe der Maxwell-Brücke ist jedoch ein sehr ungenau und liefert ein unplausibles Ergebnis. Dieser Eindruck entsteht nicht durch die Abweichungen der erhaltenen Werte, denn auch diese sind eher gering, sondern durch eine Vergleich mit den in Abschnitt 5.3.1 erhaltenen Werte. So unterscheiden sich die berechneten Induktivitäten $\langle L_x \rangle$ in (15) und L_x in (16) um einen Faktor > 10, was in Anbetracht der Tatsache, dass in beiden Fällen die selbe Spule vermessen wurde ein sehr unrealistisches Ergebnis darstellt. Ein Grund für diese große Abweichung ist wiederum die einmalige Durchführung der Messung, da durch eine mehrmalige Messung neben der schon angesprochene Genauigkeit, auch das Vermögen stiege eine Aussage über den Ursprung dieses Fehlers zu machen. Bei der einen vorliegenden großen Abweichung, ist es jedoch unmöglich zu bestimmen ob es sich bei dem Grund für diese Abweichung um einen zufälligen, einen systematischen oder einen groben Fehler handelt.

Zu der Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Wien-Robinson-Brücke Abschnitt 5.4 ist zusagen, dass der gemessene Wert der Frequenz bei der die Brückenspannung minimal wird mit einer relativen Abweichung von $\frac{|\nu_{0,theo}-\nu_{0}|}{|\nu_{0,theo}|}=2,3\,\%$ zur theoretisch bestimmten Frequenz ein genaues und plausibles Ergebnis darstellt. Dies Genauigkeit, spiegelt sich auch in der Abbildung 4 wider, so folgen die Messwerte dem theoretischen Verlauf mit großer Übereinstimmung für Frequenzverhältnisse $\frac{\nu}{\nu_{0}}<2$. Der veränderte Verlauf der Messwerte für größere Frequenzen und vor allem das erneute Abfallen der Messwerte für die höchsten gemessenen Frequenzen, sind auf den im Versuchsaufbau verwendeten Tiefpass zurückzuführen, der vor den Eingang des Oszilloskops geschaltet wurde.

Der Berechnete Klirrfaktor des Frequenzgenerators (18) liegt mit ungefähr 5 % in einem, für relative Werte dieser Art, erwartbaren Bereich und ist damit plausibel.

Abschließend lässt sich sagen, das Brückenschaltungen, bis auf "Ausreißer", eine sehr genaue und gute Methode darstellen, den Widerstand eines elektrischen Bauteils zu bestimmen.

Literatur

[1] Versuchsanleitung. V302 Elektrische Bückenschaltungen. URL: http://129.217. 224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V302.pdf.