

文章编号: 1001-0920(2005)05-0481-09

一类非线性滤波器——UKF综述

潘泉, 杨峰, 叶亮, 梁彦, 程咏梅

(西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710072)

摘要: 回顾了UKF算法的发展, 从一般意义讨论了UT变换算法和采样策略的选择依据, 并给出了UKF算法描述. 从条件函数和代价函数入手, 在给出多种采样策略的基础上对UKF采样策略进行了分析和比较. 最后对UKF算法未来可能的研究方向进行了探讨.

关键词: 非线性滤波器; unscented 卡尔曼波滤波器; UT变换; 采样策略

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Survey of a kind of nonlinear filters—UKF

PAN Quan, YANG Feng, YE Liang, LIANG Yan, CHENG Yongmei

(College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China Correspondent: YANG Feng, E-mail: flying_yangfeng@hotmail.com)

Abstract: The advances of unscented Kalman filter (UKF) are firstly reviewed. The combination of the Kalman linear filtering with the unscented transformation (UT) is discussed in general sense. UKF and its typical sampling strategies are given and analyzed. Finally, the possible future directions of the UKF are also discussed.

Key words: nonlinear filtering; unscented Kalman filter; unscented transformation; sampling strategy

1 引言

在许多实际应用问题中, 状态方程或量测方程为非线性而噪声为非高斯情况时, 滤波问题也表现为非线性. 解决非线性滤波问题的最优方案需要得到其条件后验概率的完整描述, 然而这种精确的描述需要无尽的参数而无法实际应用^[1], 为此人们提出了大量次优的近似方法^[2,3]. 对于非线性滤波问题的次优近似, 有两大途径:

1) 将非线性环节线性化, 对高阶项采用忽略或逼近措施;

2) 用采样方法近似非线性分布.

对非线性函数进行线性化近似, 对高阶项采用忽略或逼近是解决非线性问题的传统途径. 其中最广泛使用的是扩展卡尔曼滤波器(EKF)^[4,5]. EKF通过对非线性函数的Taylor展开式进行一阶线性

化截断, 从而将非线性问题转化为线性. 尽管EKF得到了广泛的使用, 但它存在如下不足:

1) 当非线性函数Taylor展开式的高阶项无法忽略时, 线性化会使系统产生较大的误差, 甚至于滤波器难以稳定^[6];

2) 在许多实际问题中很难得到非线性函数的雅克比矩阵求导;

3) EKF需要求导, 所以必须清楚了解非线性函数的具体形式, 无法作到黑盒封装, 从而难以模块化应用.

目前, 虽然对EKF有众多的改进方法^[2,3,7], 如高阶截断EKF^[2,7], 迭代EKF^[3]等, 但这些缺陷仍然难以克服.

由于近似非线性函数的概率密度分布比近似非线性函数更容易, 使用采样方法近似非线性分布来解决非线性问题的途径在最近得到了人们的广泛关

收稿日期: 2004-05-29; 修回日期: 2004-09-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(60172037); 陕西省科学技术研究发展计划项目(2003K06-G15); 西北工业大学引进高层次人才科研启动费项目.

作者简介: 潘泉(1961—), 男, 重庆人, 教授, 博士生导师, 从事信息融合理论与应用、自适应滤波、估计与控制等研究; 杨峰(1977—), 男, 陕西西安人, 博士生, 从事多传感信息融合理论、机动目标跟踪等研究.

注 粒子滤波器(PF)^[8~10]使用参考分布,随机产生大量粒子;然后将这些粒子通过非线性函数变换得到的值,通过一定的策略统计组合,得到系统的估计.该方法解决了EKF所存在的问题,但要得到高精度的估计,需要较多数目的粒子,即使在二维、三维情况下,也要达到数以千计^[11],从而产生较大的计算量,很难满足实时性的需要.同时,粒子经过迭代后会产生退化问题.尽管目前已有一些降低粒子退化的方法,如重采样方法SIS等^[8,10],但仍无法彻底解决.

UKF^[12~21]是另外一大类用采样策略逼近非线性分布的方法. UKF以UT变换为基础,采用卡尔曼线性滤波框架,具体采样形式为确定性采样,而非PF的随机采样. UKF采样的粒子点(一般称为Sigma点)的个数很少,具体个数根据所选择的采样策略而定.最常用的是 $2n+1$ 个Sigma点对称采样^[12]. UKF的计算量基本与EKF算法相当,但性能优于EKF^[12],并且采用的是确定性采样,从而避免了PF的粒子点退化问题.通过分析,UKF算法具有如下特点:

- 1) 对非线性函数的概率密度分布进行近似,而不是对非线性函数进行近似;
- 2) 非线性分布统计量的计算精度至少达到2阶^[13,18],对于采用特殊的采样策略,如高斯分布4阶采样和偏度采样等可达到更高阶精度^[14];
- 3) 不要求导计算Jacobian矩阵^[12];
- 4) 可处理非加性噪声情况以及离散系统,扩展了应用范围;
- 5) 计算量与EKF同阶次^[15];
- 6) 由于采用确定性采样策略,而非PF的随机采样,避免了粒子衰退问题.

由于UKF的上述特点,UKF日益得到关注,其应用领域也不断扩展^[22~74]. UKF首先被应用于导航、跟踪方面,如导弹再入问题^[13,24]、自治机器人定位^[25]、地面车辆导航^[12,20]和图像跟踪^[29]等.最近在随机信号处理^[28]、语音识别和增强^[28,30]等方面也有应用. Merwe将UKF和目前流行的非线性估计算法particle filter方法结合,提出了unscented particle filter算法^[32]. Julier在提出UKF时使用的仿真实例就是导弹再入问题,用UKF处理状态方程中的强非线性^[13]. Ristic对UKF在导弹再入问题中的性能进行了分析^[24]. Brunke将UKF用于自治机器人定位,处理定位中的非线性变换问题^[25]. Julier用UKF处理车辆导航中状态方程的强非线性^[12,20]. Cheng等将UKF算法应用于椭圆轮廓物体(如人脸)的跟踪中^[29],取得了优于EKF的跟踪效果.另外,

MITRE公司的研究人员将UKF算法用于导弹发射阶段参数估计问题^[33],取得了比EKF算法更好的估计精度. Romanenko将UKF应用于热化学反应中^[39];黄强宇将UKF应用于小行星软着陆问题^[49];李培华将UKF应用于复杂背景条件下的轮廓跟踪^[50]; Camps等将UKF应用于Caratheodory-fejer多帧视觉跟踪^[52]; Crassidis将UKF用于飞机姿态估计. 还有人将UKF应用于CDMA系统中,以处理联合通道系数和时延^[67]. 作者将UKF的应用领域扩展到空间配准问题,并结合具体配准问题对多种采样策略进行了比较和分析^[69],同时,还将UKF应用于多尺度估计,取得了较好效果.

UKF最近在应用领域不断拓宽^[12~67,71~74],但对于UKF的各种采样策略形式,尚没有较为深入的分析,对于采样策略的分析已滞后于其应用研究.为此,本文回顾了UKF算法的发展,从一般意义讨论了UT变换算法和采样策略选择依据,并给出了UKF算法描述.在UKF算法中从条件函数和代价函数入手,对不同的采样策略进行分析和比较.最后对UKF算法未来可能的研究方向进行了讨论.

2 问题描述

考虑如下非线性系统:

$$x(k+1) = f[x(k), u(k), v(k)], \quad (1)$$

$$z(k) = h[x(k), u(k), w(k)] \quad (2)$$

式中: $x(k)$ 为 k 时刻系统的 n 维状态向量, $u(k)$ 为输入向量, $v(k)$ 为 q 维零均值过程噪声向量, $z(k)$ 为量测向量, $w(k)$ 为 m 维零均值量测噪声. $v(k)$ 与 $w(k)$ 线性无关,且满足

$$E\{v(i)v^T(j)\} = \delta_{ij}Q(i), \quad \forall i, j;$$

$$E\{w(i)w^T(j)\} = \delta_{ij}R(i), \quad \forall i, j.$$

卡尔曼滤波器在其更新规则中仅用到状态的前两阶信息(均值和协方差),因此卡尔曼滤波器具有如下优点^[68]:

- 1) 未知分布的均值和协方差的获得仅需要保存较少的信息量,但却能支持大多数的操作过程,如确定搜索目标的区域等;
- 2) 均值和协方差具有线性传递性;
- 3) 均值和协方差估计的集合能用来表征分布的附加特征,例如重要模式等.

正是由于以上优点,人们仍然希望在非线性滤波方法中应用卡尔曼线性估计形式^[2,3,7].

卡尔曼滤波包括两个步骤:预测与更新.假设 $\hat{x}(i|j)$ 是利用从开始到 j 时刻的量测信息 $Z^j = [z(1), \dots, z(j)]$ 而得到的 $x(i)$ 的估计,估计的协方差为 $P(i|j)$. 给定 $x(k|k)$, 则预测与更新公式如下^[15]:

预测方程为

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1|k) &= E\{f[\hat{x}(k|k), u(k), v(k)]|Z^k\}, \\ P(k+1|k) &= E\{(\hat{x}(k+1) - \hat{x}(k+1|k))(\hat{x}(k+1) - \hat{x}(k+1|k))^T|Z^k\}, \\ \hat{z}(k+1|k) &= E\{h(\hat{x}(k+1|k))|Z^k\}, \\ P_{vv}(k+1|k) &= E\{(\hat{z}(k+1) - \hat{z}(k+1|k))(\hat{z}(k+1) - \hat{z}(k+1|k))^T|Z^k\}; \end{aligned} \tag{3}$$

更新方程为

$$\begin{aligned} v(k+1) &= z(k+1) - \hat{z}(k+1|k), \\ W(k+1) &= P_{zv}(k+1|k)P_{vv}^{-1}(k+1|k), \\ \hat{x}(k+1|k+1) &= \hat{x}(k+1|k) + W(k+1)v(k+1), \\ P(k+1|k+1) &= P(k+1|k) - W(k+1)P_{vv}(k+1|k)W^T(k+1). \end{aligned} \tag{4}$$

当可以获取预测方程中的数学期望值时, 整个更新方程均可以线性计算 当 $f(\bullet)$ 和 $h(\bullet)$ 均为线性时, 则是完整的卡尔曼滤波公式 $f(\bullet)$ 和 $h(\bullet)$ 为非线性时, 当只有已知条件 Z^k 下的状态 $x(k)$ 的分布时, 才能得到上述统计量的值 然而, 这种状态分布却没有一般形式 要应用卡尔曼线性滤波公式, 则问题可转化为下面针对均值和协方差估计的非线性变换问题

2 1 均值和协方差的非线性变换

假设随机变量 x 为 n 维向量, 均值为 \bar{x} , 协方差为 P_{xx} , 要预测 m 维随机变量 y 的均值 \bar{y} 和协方差 P_{yy} , y 与 x 的关系由如下非线性变换定义:

$$y = f(x). \tag{5}$$

对式(5)在 \bar{x} 点进行 Taylor 展开, 有

$$y = f(\bar{x} + e) = f(\bar{x}) + f^{(1)}e^1 + \frac{f^{(2)}e^2}{2!} + \frac{f^{(3)}e^3}{3!} + \dots \tag{6}$$

式中: $f^{(i)}$ 为 x 在 \bar{x} 点的 i 阶偏导值, e 为 x 在 \bar{x} 的邻域偏值 则 y 的均值 \bar{y} 和协方差 P_{yy} 为

$$\begin{aligned} \bar{y} &= E(y) = E\left[f(\bar{x}) + f^{(1)}e^1 + \frac{f^{(2)}e^2}{2!} + \frac{f^{(3)}e^3}{3!} + \dots\right], \\ P_{yy} &= E((y - \bar{y})(y - \bar{y})^T) = E\left[\left(f^{(1)}e^1 + \frac{f^{(2)}e^2}{2!} + \frac{f^{(3)}e^3}{3!} + \dots\right)(\bullet)^T\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

如果可以精确得到 $f(\bullet)$ 的各阶偏导, 则可以得到 \bar{y} 和 P_{yy} 的真实统计量 但在实际系统中, 这一点是很难满足的, 一般实际系统仅可获得 $f(\bullet)$ 的前两

阶统计量 因此, 一般只能获取 \bar{y} 和 P_{yy} 近似值

对于 EKF 而言, 仅用到 $f(\bullet)$ 中 Taylor 展开式的第 1 项, 得到 \bar{y} 和 P_{yy} 的近似值为^[2, 3]

$$\begin{aligned} \bar{y} &= f(\bar{x}), \\ P_{yy} &= E(f^{(1)}e^1 \cdot (f^{(1)}e^1)^T) = f^{(1)} \cdot P_{xx} \cdot (f^{(1)})^T. \end{aligned} \tag{8}$$

在引言中介绍了 EKF 存在的不足, 正是由于这些不足, 人们寻求 \bar{y} 和 P_{yy} 的更精确的近似 UT 变换采用确定性采样策略, 用多个粒子点逼近 $f(\bullet)$ 的概率密度分布, 从而得到 \bar{y} 和 P_{yy} 更高阶的近似

2 2 UT 变换

UT 变换基于先验知识^[12, 14]: 近似非线性函数的概率密度分布比近似其函数更容易 具体变换方法可用图 1 解释 在确保采样均值和协方差为 \bar{x} 和 P_{xx} 的前提下, 选择一组点集 (Sigma 点集), 将非线性变换应用于采样的每个 Sigma 点, 得到非线性变换后的点集 \bar{y} 和 P_{yy} 是变换后 Sigma 点集的统计量

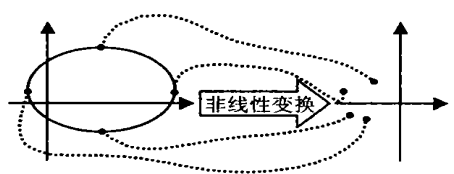


图 1 UT 变换原理 LUTU^[13~15]

为了说明问题, 下面给出一般意义下的 UT 变换算法 (可应用任何 Sigma 采样策略). 一般意义下 UT 变换算法框架的步骤如下:

1) 根据输入变量 x 的统计量 \bar{x} 和 P_{xx} , 选择一种 Sigma 点采样策略, 得到输入变量的 Sigma 点集 $\{X_i\}, i = 1, \dots, L$, 以及对应的权值 W_i^m 和 W_i^c 其中: L 为所采用的采样策略的采样 Sigma 点个数, W_i^m 为均值加权所用权值, W_i^c 为协方差加权所用权值 如果不采用比例修正, 则 $W_i^m = W_i^c = W_i$

2) 对所采样的输入变量 Sigma 点集 $\{X_i\}$ 中的每个 Sigma 点进行 $f(\bullet)$ 非线性变换, 得到变换后的 Sigma 点集 $\{y_i\}$.

$$y_i = f(X_i), i = 1, \dots, L. \tag{9}$$

3) 对变换后的变 Sigma 点集 $\{y_i\}$ 进行加权处理, 从而得到输出变量 y 的统计量 \bar{y} 和 P_{yy} . 具体的权值仍然依据对输入变量 x 进行采样的各个 Sigma 点的对应权值

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \sum_{i=0}^{L-1} W_i^m y_i, \\ P_{yy} &= \sum_{i=0}^{L-1} W_i^c (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})^T. \end{aligned} \tag{10}$$

文献[13, 18]对UT变化的精度给出了具体证明, 得到 \bar{y} 和 P_{yy} 的近似值为

$$\bar{y} = f(\bar{x}) + E(f^{(2)}e^2),$$

$$P_{yy} = f^{(1)} \cdot P_{xx} \cdot (f^{(1)})^T. \quad (11)$$

从式(11)可以看出, UKF的均值精度较EKF高一阶(噪声均值为零), UKF方差与EKF同阶

UT变换的特点如下:

1) 对非线性函数的概率密度分布进行近似, 而不是对非线性函数进行近似, 不需要知道非线性函数的显式表达式;

2) 非线性函数统计量的精度至少达到2阶^[13, 18], 对于采用特殊的采样策略, 如高斯分布4阶采样和偏度采样等可达到更高阶精度^[14];

3) 计算量与EKF同阶^[15];

4) 不要求导计算Jacobian矩阵, 可以处理非可导的非线性函数

在UT变换算法中, 最重要的是确定Sigma点采样策略, 也就是确定使用Sigma点的个数、位置以及相应权值。Sigma点的选择应确保其抓住输入变量 x 的最重要的特征。假设 $p_x(x)$ 是 x 的密度函数, Sigma点选择遵循如下条件函数来确保其抓住 x 的必要特征^[13]:

$$g[\{X_i\}, p_x(x)] = 0 \quad (12)$$

在满足如上条件的前提下, Sigma点的选择可能仍有一定自由度。代价函数 $c[\{X_i\}, p_x(x)]$ 可用来进一步优化Sigma点的选取^[13]。代价函数的目的是进一步引入所需要的特征, 但并不要求完全满足所引入特征。随着代价函数值的增大, 采样策略的精度将降低。将条件函数和代价函数结合起来, 就可以得到Sigma点采样策略的一般性选择依据: 在 $g[\{X_i\}, p_x(x)] = 0$ 的条件下, 最小化 $c[\{X_i\}, p_x(x)]$ 。

目前已有的Sigma点采样策略有对称采样^[12~15]、单形采样^[17, 20]、3阶矩偏度采样^[16]以及高斯分布4阶矩对称采样等^[14]。其后, 为了确保输出变量 y 协方差的半正定性, 提出了对上述基本采样策略进行比例修正的算法框架^[21]。目前应用中最普遍使用的还是对称采样以及应用比例修正框架的比例对称采样。

3 UKF算法

在上述卡尔曼滤波算法中, 对于一步预测方程, 使用UT变换来处理均值和协方差的非线性传递, 就成为UKF算法^[28, 68]。

在UKF算法中, 由于具有噪声项, 需要对状态进行扩维处理^[28, 68]。针对式(1)和(2)定义的系统, 令 $x^a = [x^T \ v^T \ w^T]^T$, 具体算法流程如下:

状态初始条件为

$$\hat{x}_0 = E(x_0),$$

$$P_0 = E((x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T); \quad (13)$$

状态的初始条件扩维, 即

$$\hat{x}_0^a = E(x_0^a) = [\hat{x}_0; 0; 0],$$

$$P_0^a = E((x_0^a - \hat{x}_0^a)(x_0^a - \hat{x}_0^a)^T) =$$

$$\begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}. \quad (14)$$

1) Sigma点采样

采用某种采样策略, 得到 k 时刻状态估计的Sigma点集 $\{X_i^k(k)|k\}$, $i = 1, \dots, L$, 其中 L 为所采用的采样策略的采样Sigma点个数。需要注意的是, 此时的状态维数为 $n + q + m$ 。 X_i^k 为粒子 X_i^k 的前 n 维组成的列向量, X_i^k 为粒子 X_i^k 的 $n + 1$ 维到 $n + q$ 维组成的列向量, X_i^k 为粒子 X_i^k 的 $n + q + 1$ 维到 $n + q + m$ 维组成的列向量。

2) 预测方程

$$X_i^k(k+1|k) =$$

$$f[X_i^k(k|k), u(k), X_i^k(k)], \quad (15a)$$

$$\hat{x}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{L-1} W_i^m X_i^k(k+1|k), \quad (15b)$$

$$P(k+1|k) =$$

$$\sum_{i=0}^{L-1} W_i^c (X_i^k(k+1|k) - \hat{x}(k+1|k) \\ 1|k)(X_i^k(k+1|k) - \hat{x}(k+1|k))^T, \quad (15c)$$

$$z_i(k+1|k) =$$

$$h[X_i^k(k+1|k), u(k), X_i^k(k+1)], \quad (15d)$$

$$\hat{z}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{L-1} W_i^m z_i(k+1|k), \quad (15e)$$

$$P_{vv}(k+1|k) =$$

$$\sum_{i=0}^{L-1} W_i^c (z_i(k+1|k) - \hat{z}(k+1|k) \\ 1|k)(z_i(k+1|k) - \hat{z}(k+1|k))^T, \quad (15f)$$

$$P_{xv}(k+1|k) =$$

$$\sum_{i=0}^{L-1} W_i^c (X_i^k(k+1|k) - \hat{x}(k+1|k) \\ 1|k)(z_i(k+1|k) - \hat{z}(k+1|k))^T. \quad (15g)$$

3) 更新方程

$$W(k+1) =$$

$$P_{xv}(k+1|k)P_{vv}^{-1}(k+1|k), \quad (16a)$$

$$\hat{x}(k+1|k+1) =$$

$$\hat{x}(k+1|k) + W(k+1)(z(k+1) - \hat{z}(k+1|k)), \quad (16b)$$

$$P(k+1|k+1) =$$

$$P(k+1|k) - W(k+1)P_{vv}(k+1|k)W^T(k+1|k).$$

$$1 | k) W^T(k + 1). \tag{16c}$$

在 U KF 算法公式中, 状态是按扩维处理的, Sigma 粒子的个数会比较多. 以对称采样为例, $L = 2(n + q + m) + 1$. 随着维数的增大, 计算量上升得比较快

当系统过程噪声 $w(k)$ 和量测噪声 $v(k)$ 为加性噪声时, 针对加性噪声, 可以得到简化 U KF 算法^[28]. 简化 U KF 算法只对状态进行 Sigma 点采样, 而将过程噪声和量测噪声的信息提出来处理^[28].

从处理一般情况的扩维 U KF 算法和处理加性噪声的简化 U KF 看, 加性噪声简化 U KF 的 Sigma 点较处理一般情况的扩维 U KF 要少许多. 对于对称采样, 简化 U KF 的 Sigma 点个数为 $L = 2n + 1$, 非简化 U KF 为 $L = 2(n + q + m) + 1$. 对于单形采样而言, 简化 U KF 的 Sigma 点个数为 $L = n + 2$, 非简化 U KF 为 $L = (n + q + m) + 2$. 由上述分析可知, 简化 U KF 的计算量较之扩维 U KF 大大降低

在上述 U KF 算法中, 应用不同采样策略的区别仅在于算法的第 1) 步和后续计算的 Sigma 点个数 L . 下面给出 U KF 算法中采用不同采样策略的讨论

3 1 对称采样^[15]

在仅考虑 x 的均值 \bar{x} 和协方差 P_{xx} 的情况下, 将 \bar{x} 和 P_{xx} 由 $L = 2n + 1$ 个对称 Sigma 点近似, 得到条件函数

$$g[(\{X_i\}, p_x(x))] = \begin{bmatrix} 2n \\ W_i - 1 \\ i = 0 \\ 2n \\ W_i X_i - \bar{x} \\ i = 0 \\ 2n \\ W_i (X_i - \bar{x})(X_i - \bar{x})^T - P_{xx} \\ i = 0 \end{bmatrix}.$$

求解得到 Sigma 点为

$$\{X_i\} = [\bar{x} \quad \bar{x} + \gamma \sqrt{P_{xx}} \quad \bar{x} - \gamma \sqrt{P_{xx}}], \tag{17}$$

其中 $\gamma = \sqrt{n + \kappa}$ 对应的权值为

$$W_i = \begin{cases} \kappa / (n + \kappa), & i = 0, \\ 1 / 2(n + \kappa), & i = 0 \end{cases} \tag{18}$$

其中: κ 为比例参数, 可用于调节 Sigma 点和 \bar{x} 的距离, 仅影响二阶之后的高阶矩带来的偏差; $(\sqrt{(n + \kappa) P_{xx}})_i$ 为 $(n + \kappa) P_{xx}$ 的平方根矩阵的第 i 行或列; W_i 为第 i 个 Sigma 点权值, 且有 $\sum_{i=0}^{2n} W_i = 1$.

对称采样的计算量基本与 EKF 相当, 均为 $O(n^3)$.

在对称采样中, Sigma 点除中心点外, 其他 Sigma 点的权值相同, 且到中心点的距离也相同. 这说明在对称性采样中, 除中心点外的所有 Sigma 点具有相同的重要性, 而且从 Sigma 点的分布可以看到, Sigma 点是空间中心对称和轴对称的. 对称采样确保任意分布的近似精度达到 Taylor 展开式 2 阶截断. 这种 Sigma 点选取策略使得高于 1 阶的 x 奇次中心矩为 0. 这一点使其比较吻合高斯分布的特征, 对于高斯分布, 可达到 Taylor 展开式 3 阶截断. 对于 κ 值的选取, 应进一步考虑 x 分布的高阶矩, 也就是考虑代价函数 $c[\{X_i\}, p_x(x)]$. 对于高斯分布, 考虑 4 阶矩的统计量, 求解 $c[\{X_i\}, p_x(x)] = 0$ 得到 κ 的有效选取为 $n + \kappa = 3$ ^[15]. 由于 κ 值可取正值或负值, 当 κ 为负时, 无法保证式 (32) 的半正定性. 对式 (29) 进行如下修改^[18]:

$$P_{vv} = \sum_{i=0}^{L-1} W_i^c (z_i - z_0)(z_i - z_0)^T. \tag{19}$$

3 2 单形采样^[17, 20]

在对称采样中, Sigma 点的个数为 $L = 2n + 1$. 在对实时性要求比较高的系统中, 要求进一步减少 Sigma 点的数目, 从而降低计算负载. 根据文献 [20] 的分析, 对于一个 n 维分布状态空间, 最少需要 $n + 1$ 个点才能确定. 在单形采样策略中, Sigma 点的个数为 $L = n + 2$ (考虑中心点). 需要注意的是, 在单形采样策略中, Sigma 点分布不是中心对称的. 目前的单形采样策略有两种: 最小偏度单形采样^[20] 和超球体单形采样^[17].

最小偏度单形采样要求在匹配前两阶矩的前提下使得 3 阶矩 (即偏度) 最小. 根据这一要求, 代入前面所给出的 Sigma 点采样策略的选择依据: 在 $g[\{X_i\}, p_x(x)] = 0$ 的条件下, 最小化 $c[\{X_i\}, p_x(x)]$, 求解得到 Sigma 点集如下^[20]:

- 1) 选择 0 $W_0 < 1$
- 2) Sigma 点权值为
$$W_i = \begin{cases} 1 - W_0, & i = 1, 2; \\ 2^{i-1} W_1, & i = 3, \dots, L. \end{cases} \tag{20}$$

- 3) 迭代初始向量 (对应于状态为 1 维情况)
$$X_0 = [0], X_1 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2W}}\right], X_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2W}}\right]. \tag{21}$$

- 4) 对于输入维数 $j = 2, \dots, n$ 时, 迭代公式为

$$X_i^{j+1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \end{bmatrix}, & i = 0; \\ \begin{bmatrix} X_i^j \\ -\frac{1}{\sqrt{2W_{j+1}}} \end{bmatrix}, & i = 1, \dots, j; \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2W_{j+1}}} \end{bmatrix}, & i = j+1. \end{cases} \quad (22)$$

5) 对所生成的Sigma点加入 x 的均值和协方差信息

$$X_i = \bar{x} + (\sqrt{P_{xx}}) X_i^j \quad (23)$$

由上述采样点公式, 在最小偏度单形采样中, 所选择的Sigma点的权值和距离都是不同的, 也就是说各个Sigma点的重要性是不同的。低维扩维形成的Sigma点的权重较高维直接形成的Sigma点权重重大, 而且距中心点更近。随着维数的增大, 有些Sigma点的权值会变得很小, 距中心点的距离也会很远。最小偏度单形采样的Sigma点分布不是中心对称的, 但服从轴对称。公式推导是依照3阶矩为0进行推导的, 也就是分布的3阶矩为0, 确保了对于任意分布达到2阶截断精度, 对于高斯分布达到3阶截断精度。

超球体单形采样只要求匹配前两阶矩, 但要求除中心点外的其他Sigma点权值相同, 而且与中心点距离相同。在如上要求下, Sigma点分布在空间上呈现超球体状, 所以称之为超球体单形采样。将上述条件代入 $g[\{X_i\}, p_x(x)] = 0$ 中, 可确定Sigma点如下^[17]:

1) 选择 $0 < W_0 < 1$

2) Sigma点权值为

$$W_i = (1 - W_0)/(n + 1). \quad (24)$$

3) 迭代初始向量(对应于状态为1维情况)

$$X_0 = [0], X_i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2W}} \\ \frac{1}{\sqrt{2W}} \end{bmatrix}, X_{i+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2W}} \\ \frac{1}{\sqrt{2W}} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

4) 对于输入维数 $j = 2, \dots, n$ 时, 迭代公式为

$$X_i^j = \begin{cases} \begin{bmatrix} X_0^{j-1} \\ 0 \end{bmatrix}, & i = 0; \\ \begin{bmatrix} X_i^{j-1} \\ -\frac{1}{\sqrt{j(j+1)W}} \end{bmatrix}, & i = 1, \dots, j; \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{j(j+1)W}} \end{bmatrix}, & i = j+1. \end{cases} \quad (26)$$

5) 对所生成的Sigma点加入 x 的均值和协方差信息

$$X_i = \bar{x} + (\sqrt{P_{xx}}) X_i^j \quad (27)$$

由上述采样点公式, 在超球体单形采样中, 除中心点外的所有Sigma点的权值和到中心点的距离是相同的。这说明除中心点外的所有Sigma点具有相同的重要性。超球体单形采样不是中心对称的。公式推导是依照前两阶矩进行推导的, 推导中分布的3阶矩不为0, 确保了对于任意分布达到2阶截断精度, 对于高斯分布也不例外。显然, 如果分布是高斯分布, 对称采样以及最小偏度采样的精度高于超球体采样1阶。

当输入变量的维数 $n = 1$ 时, 最小偏度采样和超球体采样的Sigma点分布是一致的。在单形采样中, 仅需确定的参数为 W_0 , 也就是 x 的均值点的Sigma点权值。当 $W_0 = 0$ 时, 说明没有使用均值点的Sigma点, L 退化为 $n + 1$ 个Sigma点。

3.3 比例修正^[21]

上述采样中, Sigma点到中心 \bar{x} 的距离随 x 的维数的增加而越来越远, 会产生采样的非局部效应, 对于许多非线性函数(如指数函数和三角函数等)会产生一些问题, 如 κ 为负, 则导致式(6)半正定性不满足^[21]。尽管有修正算法^[18], 但该方法要用到高阶矩信息, 而且仅验证了对于对称采样策略修正的有效性, 对其他采样策略(如单形采样)则无法保证。文献[21]提出了比例采样, 可有效地解决采样非局部效应问题, 并可适用于修正多种采样策略。比例采样修正算法如下:

$$\begin{aligned} X_i &= X_0 + \alpha(X_i - X_0); \\ W_i^m &= \begin{cases} W_0/\alpha^2 + (1/\alpha^2 - 1), & i = 0, \\ W_i/\alpha^2, & i = 0; \end{cases} \\ W_i^c &= \begin{cases} W_0^m + (W_0^m + 1 + \beta - \alpha^2), & i = 0, \\ W_i^m, & i = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

式中: α 为正值的比例缩放因子, 可通过调整 α 的取值来调节Sigma点与 \bar{x} 的距离; β 为引入 $f(\bullet)$ 高阶项信息的参数, 当不使用 $f(\bullet)$ 高阶项信息时, $\beta = 2^{[21]}$ 。

将比例修正算法应用于对称采样中, 得到比例对称采样方法^[28]。具体的Sigma点采样公式为

$$\{X_i\} = [\bar{x} - \bar{x} + \lambda\sqrt{P_{xx}} \quad \bar{x} - \lambda\sqrt{P_{xx}}] \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } \lambda &= \sqrt{n + \lambda}, \lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n \\ W_i^m &= \begin{cases} \lambda/(n + \lambda), & i = 0, \\ 1/2(n + \lambda), & i = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$W_i^c = \begin{cases} \lambda/(n + \lambda + (1 - \alpha^2 + \beta)), i = 0, \\ 1/2(n + \lambda), i = 1 \dots n \end{cases}$$

比例对称采样中需要确定 α 、 β 和 κ 共3个参数。文献[28]给出了参数确定的一般取值范围: α 确定 x 周围Sigma点的分布,通常设为一个较小的正数(例如 $1 > \alpha \geq 1e^{-4}$);对于高斯分布, $\beta=2$ 是最优的;而 κ 是一个比例参数,通常设置为0或 $3-n$ 。

3.4 其他采样策略

针对输入变量为高斯分布情况,为了进一步提高精度,文献[14]给出了一种高斯分布4阶矩对称采样方法,使用 $L=2n^2+1$ 个Sigma点近似,其计算复杂度为 $O(n^4)$ 。该方法将精度提高到4阶矩,将误差限制于6阶矩,但计算量也增大了许多。

对于达到任意分布的3阶精度,Julier^[16]给出了利用3阶矩信息的偏度采样的方法,以保证前3阶矩精度,但计算过于复杂,目前很少使用。

4 展望

UKF算法及其基础UT变换是一个较新的研究领域,目前虽取得了一些理论成果(如多种采样策略^[12~21]、UT变换的精度证明^[18]等),但尚有以下几方面问题值得关注:

1) 对UKF算法的稳定性问题进行研究。目前虽然可以得到UT变换的精确证明,但对于UT变化与卡尔曼滤波相结合来处理非线性问题的UKF算法尚不能象EKF那样给出稳定性分析。

2) UKF算法和UT变换在处理非线性问题时具有普遍性。如果针对特定的一类非线性问题,则有可能利用一些特定领域的知识,以获取这一类具体问题更为有效的解决方法。

3) 采样策略自适应研究。可根据系统的性能指标(计算复杂度、精度要求和存储量等)对采样策略进行自适应选取,从而将滤波问题转化为优化问题。

4) 研究UKF算法的复杂度和性能分析。

5 结语

本文对UKF算法的优点进行了分析和总结,对其应用领域进行了讨论。并从条件函数和代价函数入手,对目前几种典型的采样策略以及Sigma点的分布特征进行了分析和探讨,给出了UKF算法应用具体采样策略的优缺点。随着研究的进一步深入,UKF算法将应用到更多的领域。需要指出的是,目前国内已有不少学者在这一领域开展了卓有成效的工作^[29,49,50,71~74],但大多属于UKF的应用研究。

参考文献(References)

[1] Kushner H J. Dynamical equations for optimum nonlinear filtering [J]. *J of Differential Equations*,

1967, 26(3): 179-190.

[2] Maybeck P S. *Stochastic models estimation and control* [M]. New York: Academic, 1982.

[3] Jazwinski A H. *Stochastic processes and filtering theory* [M]. New York: Academic, 1970.

[4] Uhlmann J K. Algorithm for multiple target tracking [J]. *American Science*, 1992, 80(2): 128-141.

[5] Sorenson H W. *Kalman filtering: Theory and application* [M]. New York: IEEE Press, 1985.

[6] Lerro D, Bar-Shalom Y K. Tracking with Debiased Consistent Converted Measurement vs EKF [J]. *IEEE Trans on Aerospace and Electronics Systems*, 1993, 29(3): 1015-1022.

[7] Caballero-Gil P, Fuster-Sabater A. A wide family of nonlinear filter functions with a large linear span [J]. *Information Sciences*, 2003, 164(1-4): 197-207.

[8] Gordon N J, Salmond D J, Smith A F M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation [J]. *IEEE Proc on Radar and Signal Processing*, 1993, 140(2): 107-113.

[9] Doucet A, De Freitas A, Gordon N. *Sequential monte carlo methods in practice* [M]. New York: Springer-Verlag, 2001.

[10] Arulampalam S, Maskell S, Gordon N, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2002, 50(2): 174-188.

[11] Thrun S, Fox D, Burgard W, et al. Robust monte carlo localization for mobile robots [J]. *Artificial Intelligence*, 2001, 128(1-2): 99-141.

[12] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyten H F. A new approach for filtering nonlinear system [A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. Washington: Seattle, 1995: 1628-1632.

[13] Julier S J, Uhlmann J K. A general method for approximating nonlinear transformations of probability distributions [EB/OL]. <http://www.robots.ox.ac.uk/~siju/work/publications/Unscented.zip>, 1997-09-27.

[14] Julier S J, Uhlmann J K. A consistent, debiased method for converting between polar and Cartesian coordinate systems [A]. *The Proc of AeroSense: The 11th Int Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls* [C]. Orlando, 1997: 110-121.

[15] Julier S J, Uhlmann J K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems [A]. *The Proc of AeroSense: 11th Int Symposium Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls* [C]. Orlando, 1997: 54-65.

[16] Julier S J. A skewed approach to filtering [A]. *The Proc of AeroSense: 12th Int Symposium Aerospace/*

- Defense Sensing Simulation Control* [C]. Orlando, 1998: 271-282
- [17] Julier S J. The spherical simplex unscented transformation [A]. *American Control Conf* [C]. Denver, 2003: 2430-2434
- [18] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A new approach for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(3): 477-482
- [19] Lefebvre T, Bruyninckx H, De Schutter J. Comment on "a new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators" [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(8): 1406-1408
- [20] Julier S J, Uhlmann J K. Reduced sigma point filters for the propagation of means and covariances through nonlinear transformations [A]. *Proc of American Control Conf* [C]. Jefferson City, 2002: 887-892
- [21] Julier S J. The scaled unscented transformation [A]. *Proc of American Control Conf* [C]. Jefferson City, 2002: 4555-4559
- [22] Farina A, Ristic B, Benvenuti D. Tracking a ballistic target: Comparison of several nonlinear filters [J]. *IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems*, 2002, 38(3): 854-867
- [23] Vijay K C, Rajagopal R, Ravi K N. An optimal integrated tracing (ITS) for passive DOA tracking using unscented Kalman filter [A]. *Information, Decision and Control*, 2002[C]. Adelaide, 2002: 253-258
- [24] Ristic B, Farina A, Benvenuti D, Arulampalam M S. Performance bounds and comparison of nonlinear filters for tracking a ballistic object on re-entry Radar [J]. *IEE Proc on Radar, Sonar and Navigation*, 2003, 150(2): 65-70
- [25] Brunke S, Campbell M. Estimation architecture for future autonomous vehicles [A]. *Proc of American Control Conf* [C]. Jefferson City, 2002: 1108-1114
- [26] Wan E A, Van der Merwe R. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation [A]. *Proc of Symposium 2000 on Adaptive Systems for Signal Processing, Communication and Control* [C]. Lake Louise, Alberta, 2000: 153-158
- [27] Ristic B, Arulampalam M S. Tracking a maneuvering target using angle-only measurements: Algorithm and performance [J]. *Signal Processing*, 2003, 83(6): 1223-1238
- [28] Wan E A, Van der Merwe R. The unscented Kalman filter, in Kalman filtering and neural networks [DB/OL]. <http://www.cse.ogi.edu/PacSoft/projects/sec/wan01b.ps>, 2004-03-10
- [29] Chen Y Q, Huang T, Yong R. Parametric contour tracking using unscented Kalman filter [A]. *2002 Int Conf on Image Proc* [C]. New York, 2002: 613-616
- [30] Van der Merwe R, Wan E A. The square-root unscented Kalman filter for state and parameter estimation [A]. *Int Conf on Acoustics, Speech, and Signal Proc* [C]. Salt Lake City, 2001: 3461-3466
- [31] Stenger B, Mendonca P R S, Cipolla R. Model-based hand tracking using an unscented Kalman filter [A]. *Proc British Machine Vision Conf (BMVC 2001)* [C]. Nchester, 2001: 63-72
- [32] Rudolph der Merwe, Doucet A, De Freitas N, et al. The unscented particle filter [A]. *Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS 13)* [C]. <http://speech.bme.ogi.edu/publications/ps/merwe00a.pdf>, 2004-03-10
- [33] James R, Van Zandt. Boost phase tracking with an unscented filter [A]. *Signal and Data Proc of Small Targets 2002* [C]. Orlando, 2002, 4728: 263-274
- [34] Van der Merwe R, Wan E A. Efficient derivative-free Kalman filters for online learning [A]. *ESANN '2001 Proc - European Symposium on Artificial Neural Networks Bridges* [C]. Belgium, 2001: 205-210
- [35] Wan E A, Van der Merwe R, Nelson A T. Dual estimation and the unscented transformation [A]. *Advances in Neural Information Processing Systems 12* [C]. MIT Press, 2000: 666-672
- [36] Rudolph der Merwe, Doucet A, De Freitas N, et al. The unscented particle filter [EB/OL]. <http://speech.bme.ogi.edu/publications/ps/merwe00.pdf>, 2004-03-10
- [37] Van der Merwe R, Wan E A. Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models [DB/OL]. <http://www.iro.umontreal.ca/~kegl/CRMWorkshop/program.html>, 2004-03-10
- [38] Tenne D, Singh T. The higher order unscented filter [A]. *2003 American Control Conf* [C]. Denver, 2003: 2441-2446
- [39] Romanenko R, Castro J A A M. The unscented filter as an alternative to the EKF for nonlinear state estimation: A simulation case study [J]. *Computers and Chemical Engineering*, 2004, 28(3): 347-355
- [40] Van Dyke M C, Schwartz J L, Hall C D. Unscented Kalman filtering for spacecraft attitude state and parameter estimation [DB/OL]. http://www.spaceflight.org/AAAS_meetings/2004_winter/w2004_program.pdf, 2004-03-10
- [41] Yong R, Chen Y Q. Better proposal distributions: Object tracking using unscented particle filter [A]. *Proc of the 2001 IEEE Computer Society Conf on*

- Computer Vision and Pattern Recognition*, 2001 [C].
Kauai, HI, 2001: II-786-II-793
- [42] Wada M, Yoon K S, Hashimoto H. Nonlinear filter road vehicle model development [A]. 2001 *IEEE Intelligent Transportation Systems Conf Proceedings* [C]. Oakland, 2001: 734-739.
- [43] Choi J, Lima A C D C, Haykin S. Unscented Kalman filter-trained recurrent neural equalizer for time-varying channels [A]. *ICC 03 IEEE Int Conf on Communication* 2003 [C]. Anchorage, 2003, 26(1): 3241-3245.
- [44] Stenger B, Mendonca P R S, Cipolla R. Model-based 3D tracking of an articulated hand [A]. *Proc of the 2001 IEEE Computer Society Conf on Computer Vision and Pattern Recognition* [C]. Kauai, 2001, 2: II-310-II-315.
- [45] Gil P, Henriques J, Carvalho P, et al. Adaptive neural model-based predictive control of a solar power plant [A]. *Proc of the 2002 Int Joint Conf on Neural Networks* [C]. Honolulu, 2002: 2098-2103.
- [46] Seyoon Tak, Oh-young Song, Hyeong-Seok Ko. Spacetime sweeping: An interactive dynamic constraint solver [A]. *Proc of the Computer Animation* [C]. Washington: IEEE Computer Society, 2002: 261-270.
- [47] Li P H, Zhang T W, Arthur E C P. Visual contour tracking based on particle filters [J]. *Image and Vision Computing*, 2003, 21(1): 111-123.
- [48] Julier S J. Skewed approach to filtering [A]. *SPIE Conf on Signal and Data Processing of Small Targets* 1998 [C]. Orlando, 1998, 3373: 271-282.
- [49] Huang X Y, Cui H T, Cui P Y. An autonomous optical navigation and guidance for soft landing on asteroids [J]. *Acta Astronautica*, 2004, 54(10): 763-771.
- [50] Li P H, Zhang T W, Ma B. Unscented Kalman filter for visual curve tracking [J]. *Image and Vision Computing*, 2004, 22(2): 157-164.
- [51] Zaveri M A, Desai U B, Merchant S N. Tracking multiple maneuvering point targets using multiple filter bank in infrared image sequence [A]. *ICASSP, IEEE Int Conf on Acoustics, Speech and Signal Proc* [C]. Hong Kong, 2003, 2: 409-412.
- [52] Camps O, Lin H, Mazzaro C, et al. A caratheodory-fejer approach to robust multiframe tracking [A]. *Proc of the IEEE Int Conf on Computer Vision* [C]. Nice, 2003: 1048-1055.
- [53] Lee D J, Alfriend K T. Precise real-time orbit estimation using the Unscented Kalman Filter [J]. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2003, 114(S): 1835-1854.
- [54] Crassidis J L, Markley F L. Unscented filtering for spacecraft attitude estimation [J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2003, 26(4): 536-542.
- [55] LaViolette J, Joseph J. A comparison of unscented and extended Kalman filtering for estimating quaternion motion [A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. Colorado: IEEE Press, 2003: 2435-2440.
- [56] Chen L J, Seereeram S, Mehra R K. Unscented Kalman filter for multiple spacecraft formation flying [A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. Colorado, 2003: 1752-1757.
- [57] Akin B, Orguner U, Ersak A. State estimation of induction motor using unscented Kalman filter [A]. *IEEE Conf on Control Applications* [C]. Istanbul, Turkey, 2003: 915-919.
- [58] Saulson B, Chang K C. Comparison of nonlinear estimation for ballistic missile tracking [A]. *Proc of SPIE - The Int Society for Optical Engineering* [C]. Washington, 2003: 13-24.
- [59] Van der Merwe R, Wan E A. Sigma-point Kalman filters for integrated navigation [DB/OL]. <http://speech.bme.ogi.edu/publications/ps/merwe04a.pdf>, 2004-08-13.
- [60] Lightsey E G, Crassidas J L. Real time attitude independent GPS integer ambiguity resolution [J]. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2003, 115(S): 134-152.
- [61] Azizi F, Houshang N. Sensors integration for mobile robot position determination [A]. *Proc of the IEEE Int Conf on Systems, Man and Cybernetics* [C]. Washington: Hyatt Regency, 2003: 1136-1140.
- [62] Popescu C A, Wong Y S. Nonlinear statistical approach for aeroelastic response prediction [J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2003, 26(4): 565-571.
- [63] Popescu C, Wong Y S. The unscented and extended Kalman filter for systems with polynomial restoring forces [A]. *Collection of Technical Papers - AIAA / AASME / ASCE / AHS / ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conf* [C]. Norfolk, 2003: 100-110.
- [64] Hashimoto M, Ishida Y, Oba F. 3D dead reckoning for modular vehicle based on decentralized data association [J]. *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu, C Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C*, 2003, 69(1): 164-171.
- [65] Sitz A, Schwarz U, Kurths J, et al. Estimation of parameters and unobserved components for nonlinear systems from noisy time series [J]. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 2002, 66(1): 016210/1-9.

(下转第494页)

5 结 论

本文提出的智能群体模型的建立仅依赖于相互可检测到的个体之间的局部信息. 对于任意规模、随机分布的智能群体, 只要群体内个体之间存在任意一条可观测链, 采用本文提出的个体局部控制算法, 便能实现群体的稳定全局集聚行为, 体现出了较强的简单性、适应性、鲁棒性以及可扩展性.

参考文献(References)

- [1] Breder C M. Equations descriptive of fish schools and other animal aggregations[J]. *Ecology*, 1954, 35(3): 361-370.
- [2] Warburton K, Lazarus J. Tendency-distance models of social cohesion in animal groups[J]. *J of Theoretical Biology*, 1991, 150(4): 473-488.
- [3] Jin K, Liang P, Beni G. stability of synchronized distributed control of discrete swarm structures[A]. *Proc of IEEE Int Conf on Robotics and Automation*[C]. San Diego, 1994: 1033-1038.
- [4] Beni G, Liang P. Pattern reconfiguration in swarms convergence of a distributed asynchronous and bounded iterative algorithm[J]. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 1996, 12(3): 485-490.
- [5] Gazi V, Passino K M. Stability analysis of swarms[A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. Anchorage, 2002: 1813-1818.
- [6] Gazi V, Passino K M. Stability analysis of social foraging swarms[J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, 2004, 34(1): 539-557.
- [7] 刘书桂, 杨芳, 陶晋. 计算几何在测试计量技术中的应用——求解最小外接圆[J]. *工程图学学报*, 2000, 21(3): 83-89.
(Liu S G, Yang F, Tao J. Evaluation of minimum circumscribed circle form error by computational geometry approach[J]. *J of Engineering Graphics*, 2002, 21(3): 83-89.)
- [8] 葛根焰, 汤建勋. 最小外接圆法和最大内切圆法圆度评估的快速算法[J]. *计量与测试技术*, 1996, 23(5): 11-12.
(Ge G Y, Tang J X. Quick algorithm of circularity evaluation based on minimal circumcircle and maximal inscribed circle methods[J]. *Metrology & Measurement Technique*, 1996, 23(5): 11-12.)
- [66] Borges G A, Aldon M A. A decoupled approach for simultaneous stochastic mapping and mobile robot localization[A]. *IEEE Int Conf on Intelligent Robots and Systems*[C]. Switzerland, 2002: 558-563.
- [67] Caffery J J, Stuber G L. Nonlinear multiuser parameter estimation and tracking in CDMA systems[J]. *IEEE Trans on Communications*, 2000, 48(12): 2053-2063.
- [68] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. *Proc of the IEEE Aerospace and Electronic Systems*, 2004, 92(3): 401-422.
- [69] Yang F, Ye L, Pan Q, et al. UT method for space alignment problem[A]. *The 23th Chinese Control Conf* [C]. Wuxi, 2004: 281-285.
- [70] 王淑一, 程杨, 杨涤, 等. UKF 方法及其在跟踪问题中的应用[J]. *飞行力学*, 2003, 21(2): 59-62.
(Wang S Y, Chen Y, Yang D, et al. UKF and its application to bearing-only tracking problem[J]. *Chinese J of Flight Dynamics*, 2003, 21(2): 59-62.)
- [71] 蔡洪. Unscented Kalman 滤波用于再入飞行器跟踪[J]. *飞行器测控学报*, 2003, 21(2): 59-62.
(Cai H. Unscented Kalman filtering for reentry vehicle tracking[J]. *Chinese J of Aircraft Measurement and Control*, 2003, 22(3): 12-16.)
- [72] 武延鹏, 尤政, 任大海. 采样 Kalman 滤波器在天文卫星定姿滤波中的应用[J]. *清华大学学报(自然科学版)*, 2003, 43(8): 1013-1016.
(Wu Y P, You Z, Ren D H. Unscented Kalman filter application in astronomical satellite attitude determination[J]. *Chinese J of Tsinghua University (SCI & TEC)*, 2003, 43(8): 1013-1016.)
- [73] 周兆庚, 郝群, 沙定国. U-卡尔曼滤波在状态估计中的应用[J]. *仪器仪表学报*, 2004, 24(增4): 440-442.
(Zhou Y G, Hao Q, Sha D G. Application of unscented Kalman filter on the state estimation[J]. *Chinese J of Instrument and Meter*, 2004, 24(S4): 440-442.)
- [74] 管旭军, 芮国胜. 基于 UKF 的单站无源定位算法[J]. *光电与控制*, 2004, 11(2): 34-36.
(Guan X J, Rui G S. Algorithm for passive locating by single station with application of UKF[J]. *Chinese J of Electronics Optics and Control*, 2004, 11(2): 34-36.)

(上接第489页)