

# 数学课程大总结

Summary of Mathematic Course

© LC No 0132

NC 非商业使用

Log Creative

# 数学课程大总结

终版 2017 年 8 月 24 日

编者：Log Creative

讲师：（按文档的先后顺序）

丁益祥	许老师	陈老师	曹瑞彬
陈永高	苏 淳	陈传理	宋立功
叶中豪	花老师	陈 计	卞老师
林老师	等		



(LC)No 0132

版权所有，保留所有权利。

Log Creative (LC) 2016-2017, All Rights Reserved.

未经作者同意，任何人不得以任何形式或方式复制、转录、翻译本作品的任何部分。

No parts of this work can be copied, transmitted or translated into any form or by any means without the permission from the author.

违者必究。

Unauthorized duplication is a violation of applicable laws.

表 统计信息

部分	编辑时间	字数	字符数
“平台”上的火花,2016.2	733 分钟	4670	5957
2016 暑期课程总结,2016.8	3061 分钟	10149	17445
2017 新增总结,2017.8	6437 分钟	22949	45068
本作总计	10231 分钟	38739	70256



Log Creative (LC) 2016-2017, All Rights Reserved.

谨以此作

纪念曾经一同奋斗的

张耀华(2001-2021) 同学



## 写在前面

今日，本作终告完成。

对以前的课程进行整理，是数学竞赛复习中重要的一环。这样，就能串起所有的知识，保持清晰的知识体系。当然，这个过程是漫长而复杂的。

结合着已经看过的书籍，我对课程中的许多部分作了注解，这样能够让课程与书籍形成一个有机的整体。并加深自己对书籍中一些知识的印象。

之所以使用电脑打稿，是因为尽管编辑时间会大大加长，但是可以给我更多的思考空间，让我尽可能地联想到更多的东西。在每个公式、每个图像的编辑过程中，我养成了严谨、认真的习惯。

10000 分钟的坚守，我还体会到了许多东西。

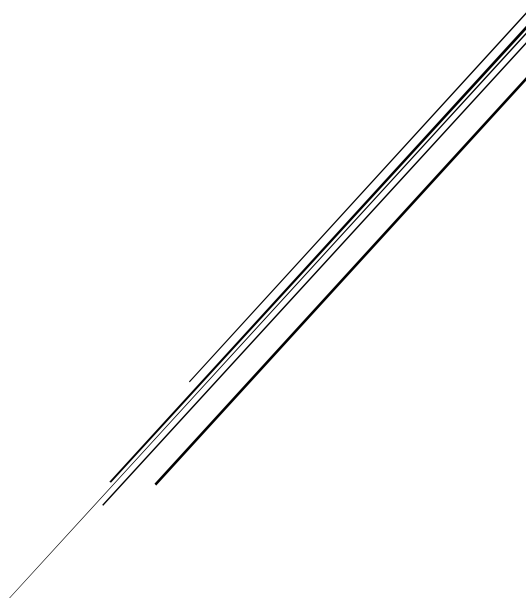
我体会到了著书者的辛苦，体会到了他们的字斟句酌，体会到了他们对数学的热爱，体会到了他们对读者的负责。体会到了他们思维的清晰，体会到了他们苦中作乐的心情。

有一个同学说过，尽管数学竞赛中的很多内容在大学中并不一定会用上，但是这个过程所养成的自学能力是在许多地方得不到的。尽管现在有许多的高级计算机，能够通过穷举表明许多东西，但是最终的证明还是要靠人来完成的，这里面需要的是智慧，需要的是创新。需要的是对科学探索的勇气与力量，需要的是耐心的计算与等待。

灵机一动或许不靠谱，但是确是数学竞赛中考察的内容之一，也是现代数学研究所需要的。这需要的不仅仅是知识，还有经验与方法。

数学的精妙，没有耐心的打磨，是看不到的。我所做的只是加强真理之间的联系，把它们结合在一起，闪耀出更大的光芒！

Log Creative  
2017 年 8 月 24 日



# 目录

写在前面 .....	4
目录 .....	5
数学课程大总结 .....	9
数学讲座 (I) .....	9
1. 函数 .....	9
2. 几何 .....	11
3. 数列 .....	11
数学讲座 (II) .....	11
数学讲座 (III) .....	11
“平台”上的火花 .....	19
1. “平台”思想 .....	19
2. 图象——“具象化”的工具 .....	19
3. 三角函数和向量——“自然化”工具 .....	21
4. 数列——“规律化”工具 .....	23
5. “平台”思想的应用 .....	24
6. 探索更多的“平台”和“工具” .....	25
7. 结论 .....	26
综合选讲 .....	27
【知识】 .....	27



【思想】 .....	29
1.探索法——难题的敲门砖 .....	29
2.反证法——山重水复前的出路 .....	31
3.消元——写在大旗上的目标 .....	33
4.构造——换一个角度解决问题 .....	36
5.分析法——提供思路的信号灯 .....	38
6.数学归纳法——蝴蝶效应承认真理 .....	40
7.数形结合——数字背后的图形 .....	42
8.转换——看清题目的本质 .....	45
9.算两次——横着竖着都是二 .....	45
10.多管齐下——来一场思想的风暴吧 .....	47
11.放松一下——题目有时也是那么简单 .....	48
12.总结——思想的火花 点亮黑暗的夜晚 .....	48
<b>数论 .....</b>	<b>50</b>
1.二项展开 .....	50
2.费马小定理 .....	50
3.阶 .....	51
4.构造 .....	52
5.枚举法 .....	53
6.拉格朗日定理 .....	54
<b>数学归纳法 .....</b>	<b>56</b>
1.引入数学归纳法 .....	56



2.数学归纳法的变式.....	59
3.从特殊性看问题、在命题上下功夫.....	62
<b>递归数列.....</b>	<b>65</b>
1.二阶线性递归数列.....	65
2.复数特征根.....	67
3.高阶线性递归数列.....	68
4.分式递归数列.....	69
<b>几何二试.....</b>	<b>70</b>
1.基本图形.....	70
2.综合分析法.....	73
3.间接证法.....	74
4.三角方法.....	77
5.角与弧.....	78
6.蝴蝶定理.....	80
7.帕斯卡定理.....	83
8.内切两圆.....	83
9.调和点列.....	84
<b>等角线专题.....</b>	<b>85</b>
1.等角线.....	85
2.等角点.....	86
3.等角共轭点.....	87
4.垂足三角形.....	89



**代数 ..... 92**

0.通用声明 .....	92
1.对称式 .....	92
2.创新换元 .....	94
3.增项 .....	94
4.函数方程 .....	96
5.数列 .....	98

**不等式 ..... 99**

1.齐次化 .....	99
2.柯西不等式 .....	100
*.米尔黑德定理 .....	101
**.柯西不等式延拓 .....	102
3.算术-几何平均不等式 .....	103
4.舒尔不等式 .....	105
5.幂平均单调性原理 .....	107
6.几何不等式 .....	107
7.闵可夫斯基不等式 .....	109
8.切比雪夫不等式 .....	111
9.抽屉原则 .....	111
10.恒等式 .....	113
11. $n$ 元式子 .....	114





# 数学课程大总结

Log Creative (LC) No.0132

## 数学讲座 (I)

(2016.1) 丁益祥 (2016.5)

### 1. 函数

- 关于函数  $f(x) = \log_a x - a^x$  的零点个数。

结论: (a)  $a > 1$

$$\begin{cases} 0 \text{ 个}, & 1 < a < \sqrt{2}, \\ 1 \text{ 个}, & a = \sqrt{2}, \\ 2 \text{ 个}, & a > \sqrt{2}. \end{cases}$$

(b)  $0 < a < 1$

1 个或 3 个。

- 关于  $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C + \sin B \sin C$  的求值问题。

考察余弦定理:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

使用正弦定理变形:

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A$$

当  $\cos A = -\frac{1}{2}$  时, 即  $A = \frac{2\pi}{3}$  时, 即是  $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C + \sin B \sin C$ 。

所以可以通过构造顶角为  $120^\circ$  的三角形解决问题。

- 关于  $a^n + \frac{1}{a^n}$  用  $a + \frac{1}{a}$  表示。(讲课时提到了  $a^2 + \frac{1}{a^2}$  的表示)

事实上, 对任何正整数  $n$ , 都可以用  $a + \frac{1}{a}$  来表示  $a^n + \frac{1}{a^n}$ :

$$a^n + \frac{1}{a^n} = P_n \left( a + \frac{1}{a} \right)$$

在这里, 多项式  $P_n$  与所谓的切比雪夫多项式  $C_n$  有关。确切地说, 有  $C_n(x) = \frac{1}{2} P_n(2x)$ , 而切比雪夫多项式的定义是

$$\cos nx = C_n(\cosh x)$$

注意, 此处的  $\cosh x$  表示双曲余弦函数,  $\cosh x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ 。

(《模拟试题精选》编委会, 2017, p. 60)

简单的例子:

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left( a + \frac{1}{a} \right)^2 - 2$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

$$a^5 + \frac{1}{a^5} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^5 - 5\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) + 10\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

实际应用时,可直接展开 $\left(a + \frac{1}{a}\right)^n$ 把里面的 $a^k + \frac{1}{a^k}$  ( $k < n$ )用已知的形式表示。

□ **函数方程, 求 $f(x)$ 。**

1.待定、换元、配方、消参数。

2.赋值、解方程。

3.叠加(乘)、观察法、柯西方程。

特别地,赋值针对三种题型:二元函数、抽象函数、不会做的题。

□ **值域的求解。**

1.观察法

2.二次函数法

3.分离常数法

4.判别式法

5.换元法

6.图像法

7.单调性

8.反函数

9.求导数

□ **关于函数 $f(x) = \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$ 。  $f(x) + f(1-x) = 1$**

丁益祥的部分

□ **取值范围**

只要求取值范围,(大部分)就是不等关系。

具有参数时,不妨设值,画出轮廓后再进行变化。

□ **求值问题**

一般是方程问题。

□ **函数-方程-不等式**

式的运算是基础,数可视为式的特例,方程是关键,函数是核心。(朱华伟、程汉波, 2016, p. 192)

□ **函数思想**

认知特性是:

(1) 整体性,把思考对象始终看作一个有机联系的整体,或一个完整的过程来认识。

(2) 变动性,动态而静止地看问题。

(3) 关联性,用互相联系、互相制约、互相转化而非孤立的观点看问题。

显然,函数思想是客观辩证法在人脑中的反映,是辩证思维在数学中的具体体现。(朱华伟、程汉波, 2016, p. 193)

□ **高斯函数的解题策略**

把目标区间拆分成长度小于1的一个个小区间求解。

□ **重要的习惯**

概念的清晰性、数学形式化(Mathematical symbolization)、数学语言的交流(Communication of mathematical language)、符号语言与文字语言的变换;

坚持通性通法,淡化特殊技巧、分类讨论、复杂的分解;

体会定义题的含义、代数式的配凑技巧。

## 2. 几何

### □ 辅助线

1. 选中点                  2. 作垂线                  3. 选线平行

### □ 口诀

中点 中线 中位线 平行线 延长线

垂线 角分线 翻转全等连

边边若相等 旋转做试验

## 3. 数列

### □ 一个体现对称美的数列裂项放缩

求证：

$$\sum \frac{1}{\sqrt{m^3}} < 3$$

分析与证：对称美，运算简！

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{\sqrt{m^3}} &< \sum \frac{1}{\sqrt{m(m^2-1)}} = \sum \frac{1}{\sqrt{(m-1)m(m+1)}} \\ &= \sum \frac{1}{\sqrt{m}} \left( \frac{1}{\sqrt{m-1}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{m+1} - \sqrt{m-1}} \\ &= \sum \frac{1}{\sqrt{m}} \left( \frac{1}{\sqrt{m-1}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}} \right) \cdot \frac{\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1}}{2} \\ &< \sum \frac{1}{\sqrt{m}} \left( \frac{1}{\sqrt{m-1}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}} \right) \cdot \sqrt{\frac{2m}{2}} \\ &= \sum \left( \frac{1}{\sqrt{m-1}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}} \right) = 1 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 3 \end{aligned}$$

## 数学讲座（II）

许老师 (2016.1)

### □ 好题标准

给好学生以展示空间，给差学生以留出活路。

### □ 好的习惯

结束考试前 5 分钟，检查区间的开闭。

### □ 函数的研究

1. 定义域

2. 值域

3. 单调性

4. 奇偶性

5. 周期性

6. 对称轴

7. 零点

## 数学讲座（III）

陈老师 (2016.1) 林老师 (2017.8)



# □ 研究函数：用研究的心态学习

课改标准要求之一即是：“创造性地使用自己所学的知识”。

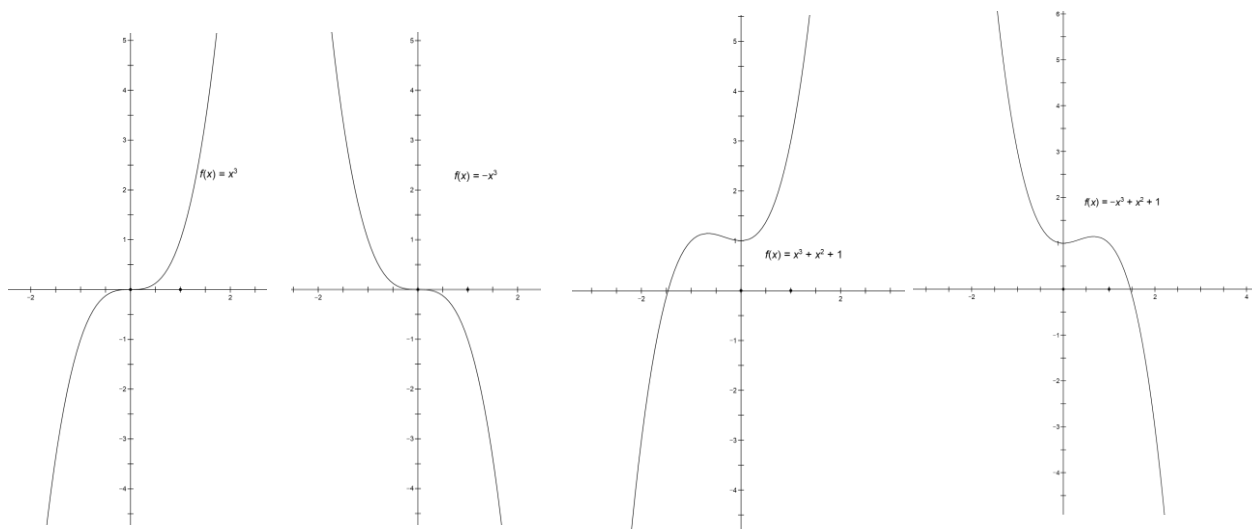
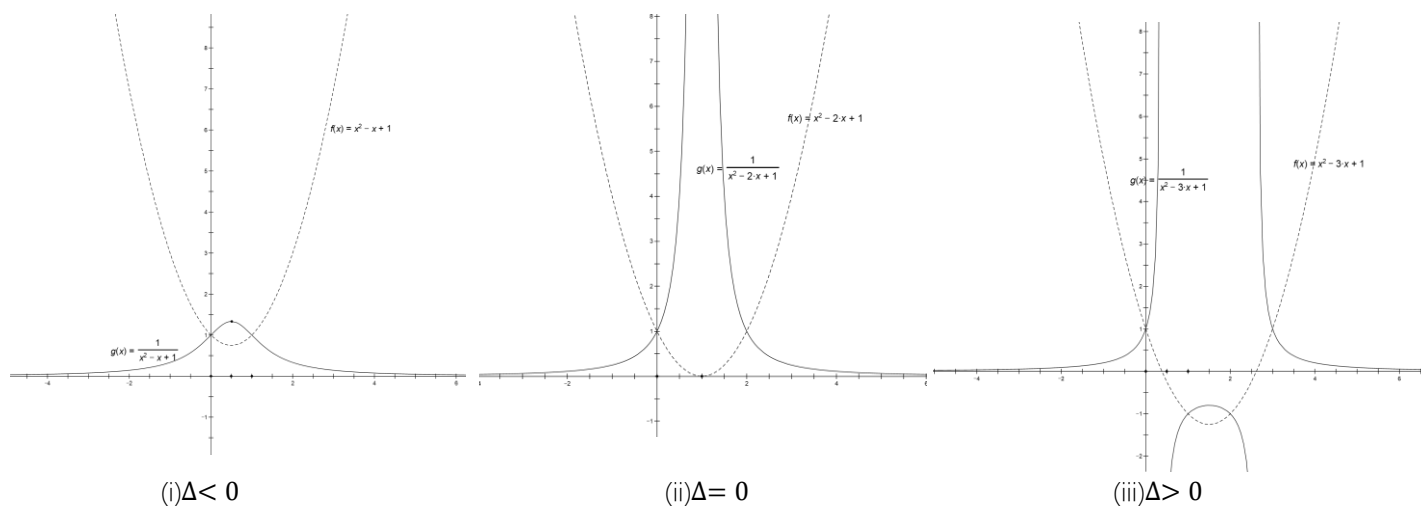


图 2 三次函数图像类型



(i)  $\Delta < 0$

(ii)  $\Delta = 0$

(iii)  $\Delta > 0$

图 3 函数  $f(x)$  (虚线) 与  $\frac{1}{f(x)}$  (实线),  $f(x) = ax^2 + bx + c$

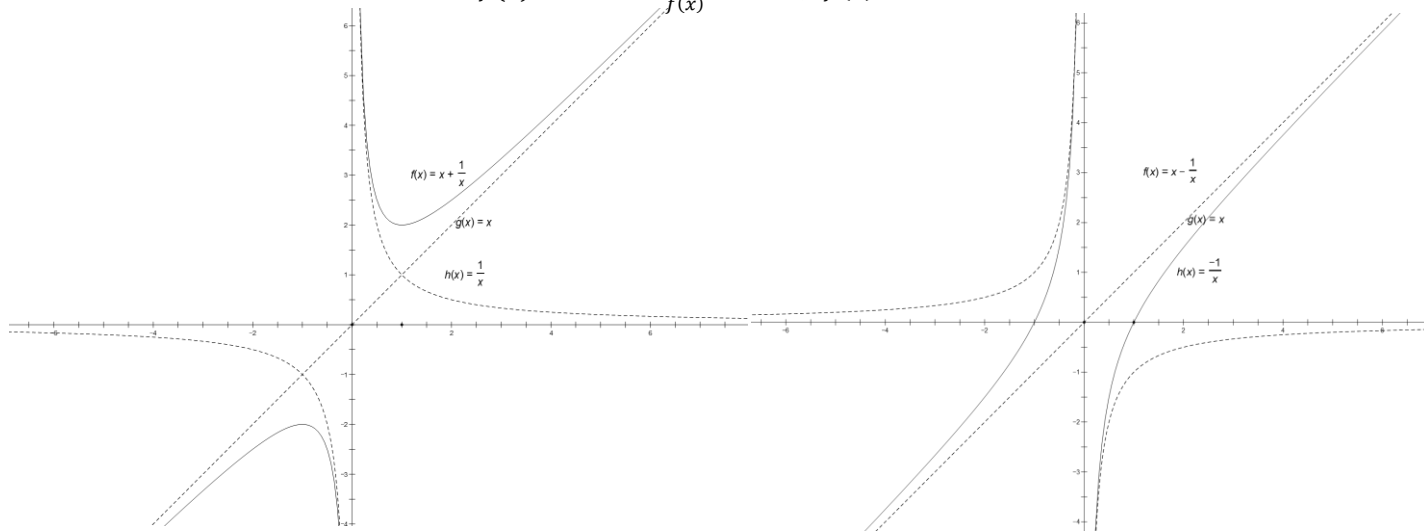


图 1 对勾函数  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  (左) 与函数  $f(x) = x - \frac{1}{x}$  (右)

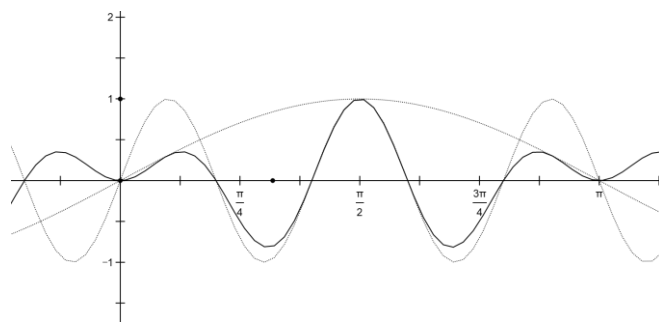


图 4 函数  $f(x) = \sin x * \sin 5x$  (清华自招)

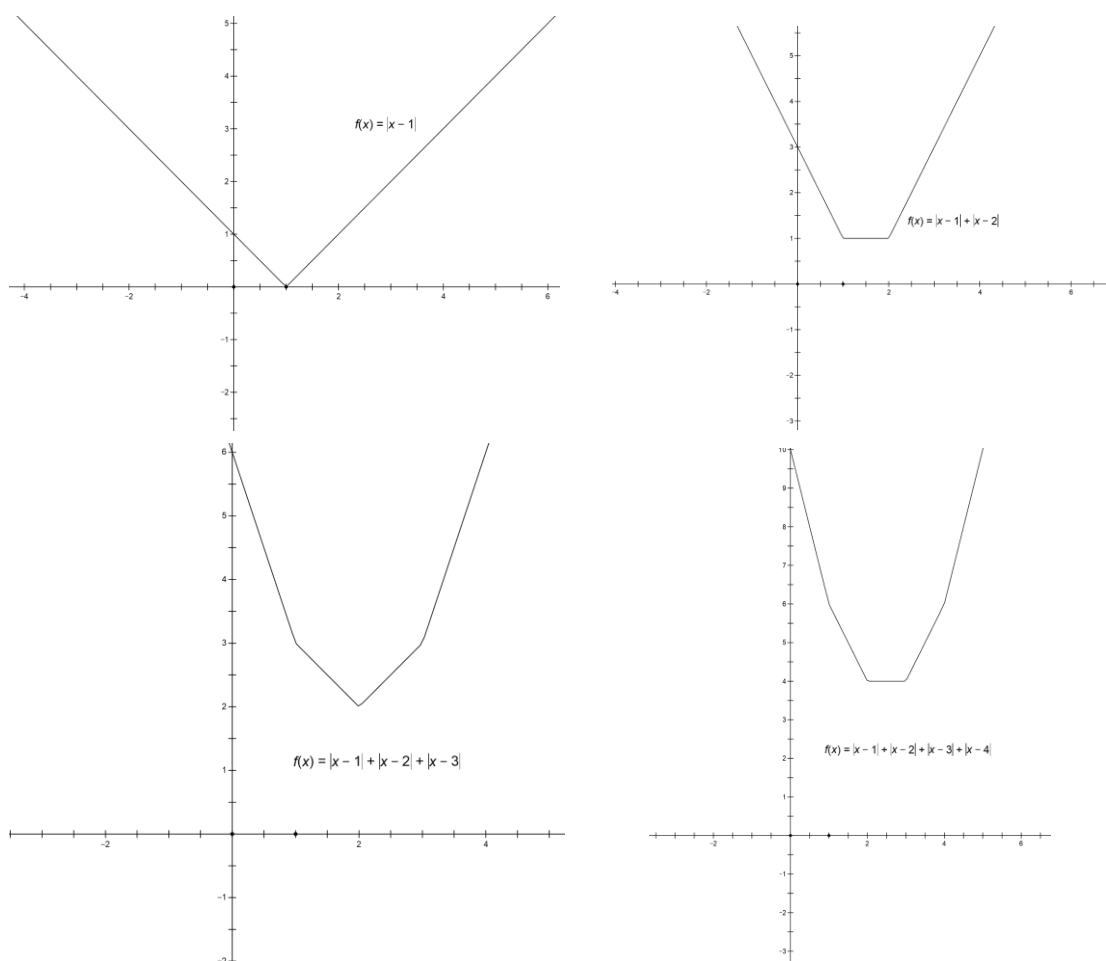
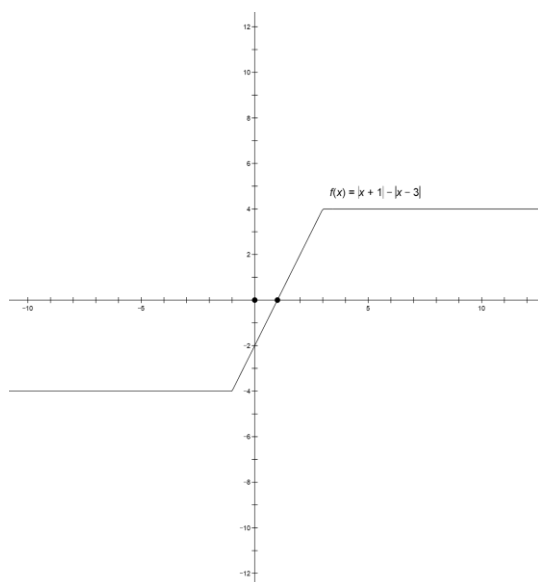


图 5 绝对值函数  $f(x) = \sum |x - a_i|$

特征：1. 开口向上  
2. 两端斜率为  $\pm n$   
3. 最小值

$$f_{\min}(x) = f(a_i \text{ 的中位数}) = \begin{cases} f\left(\frac{a_{n+1}}{2}\right), & n \text{ 为奇数} \\ f\left(\frac{a_n}{2}\right), f\left(\frac{a_{n+1}}{2}\right), & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$


 图 6  $f(x) = |x+1| - |x-3|$  图像

### □ 柯西方程

$f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的严格单调函数, 且对任意的  $x, y \in \mathbf{R}$ , 有

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \rightarrow f(x) = kx$$

$$f(xy) = f(x) * f(y)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)} \rightarrow f(x) = x^\alpha \text{ 或 } f(x) = a^x$$

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \rightarrow f(x) = \log_a x$$

$$f(x+T) = f(x) \rightarrow \text{有周期}$$

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x) * f(y)} \rightarrow f(x) = \tan x$$

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y) - 1}{f(x) + f(y)} \rightarrow f(x) = \cot x$$

证明:  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ——柯西方法 (基础类型)

**0:** 令  $x = y = 0$ , 得  $f(0) = 0$ 。

**奇:** 令  $y = -x$ , 得  $f(x) + f(-x) = 0$ ,  $f(-x) = -f(x)$ , 故  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的奇函数。

**N:** 容易证明  $\forall n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}$ , 有  $f(nx) = nf(x)$ 。

**Q:** 对于非负有理数  $x$ , 可设  $x = \frac{m}{n}$  ( $m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}_+$ ), 则  $nf(x) = f(nx) =$

$f(m) = f(m \times 1) = mf(1)$ , 即  $f(x) = f(1)x$ , 记  $f(1) = k$ , 则  $f(x) = kx$ 。当  $x$  为负有理数时,  $-x$  为正有理数, 故有  $f(x) = -f(-x) = -k(-x) = kx$ 。这就是说, 当  $x$  为有理数时, 均有  $f(x) = kx$ 。

**R:** 对于无理数  $x$ , 我们取  $x$  的不足近似有理数列  $\{r_n\}$  与过剩近似有理数列  $\{s_n\}$ , 它们都收敛 (converge) 到  $x$ , 且  $r_n \leq x \leq s_n$ , 由于  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上严格单调, 故  $k \neq 0$ , 不妨设  $k > 0$ , 则不等式  $kr_n = f(r_n) \leq f(x) \leq f(s_n) = ks_n$  成立, 令  $n \rightarrow \infty$ , 亦有  $f(x) = kx$ 。

综上所述,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 总有  $f(x) = kx (k \neq 0)$ , 即  $f(x)$  为正比例函数。

(朱华伟、程汉波, 2016, p. 45)

值得一提的是, 后面的类型均可由此导出。在此略。

#### □ 万能公式

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

可以用下面的图示快速记忆:

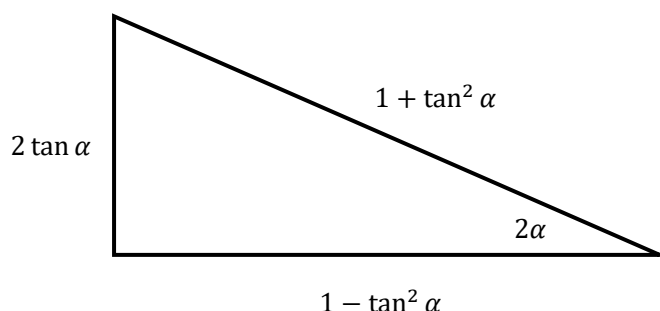


图 7 万能公式的记忆

(例) 求所有满足

$$\tan A + \tan B + \tan C \leq [\tan A] + [\tan B] + [\tan C]$$

的三角形内角  $A, B, C$ 。其中  $[x]$  为 Gauss 函数 (又称取整函数, 表示不超过  $x$  的最大整数)。

解: 根据 Gauss 函数的定义:

$$\begin{cases} \tan A \geq [\tan A] \\ \tan B \geq [\tan B] \\ \tan C \geq [\tan C] \end{cases} \Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq [\tan A] + [\tan B] + [\tan C]$$

故

$$\tan A + \tan B + \tan C = [\tan A] + [\tan B] + [\tan C]$$

所以

$$\tan A, \tan B, \tan C \in \mathbb{Z}$$

由于  $A, B, C$  是三角形内角, 故

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A * \tan B * \tan C$$

(\*)

不妨设

$$\tan A \leq \tan B \leq \tan C$$

(i) 若  $\tan A < 0$ , 则  $\tan B, \tan C > 0$ 。(三角形中只能有一个钝角)

对(\*)式变形得

$$\tan B + \tan C = \tan A * (\tan B * \tan C - 1)$$

$$\Rightarrow \tan B * \tan C - 1 < 0 \Rightarrow \tan B * \tan C < 1 \Rightarrow \min\{\tan B, \tan C\} < 1$$

这与  $\tan B, \tan C \geq 1$  是矛盾的。

(ii) 若  $\tan A > 0$ , 则  $\tan B, \tan C > 0$ 。

$$\Rightarrow 0 < A \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan A = 1 \in (0, \sqrt{3}]$$

$$\text{则 } 1 + \tan B + \tan C = \tan B * \tan C$$

$$(\text{法一}) \text{ 变形为 } \tan B * \tan C - \tan B - \tan C = 1$$

$$\Rightarrow \tan B (\tan C - 1) - (\tan C - 1) = 2 \Rightarrow (\tan B - 1)(\tan C - 1) = 1 \times 2$$

$$\text{故 } \tan B = 2, \tan C = 3.$$

$$(\text{法二}) \text{ 变形为}$$

$$\tan B = \frac{\tan C + 1}{\tan C - 1} = 1 + \frac{2}{\tan C - 1} \in \mathbb{N}$$

$$\text{故 } \tan C - 1 = 1 \text{ or } 2, \tan C = 2 \text{ or } 3$$

$$\text{但 } \tan C = 2 \text{ 时, } \tan B = 3, \text{ 这与 } \tan B \leq \tan C \text{ 矛盾。}$$

$$\text{综上所述, } \tan A = 1, \tan B = 2, \tan C = 3.$$

这一题是一道好题，它使用了数论的知识与方法，并注意到了三角正切的恒等式。后面的讨论耐人寻味，是数论讨论中的范例。

其中关于  $\tan A$  的正负讨论是值得学习的。

### □ 三角换元的想法

三角恒等式：

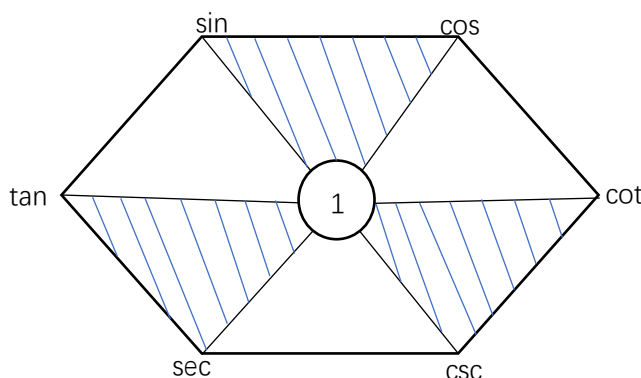


图 8 三角函数

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha$$

$$\sin \alpha \times \csc \alpha = 1$$

类型：

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$\cot \alpha = \cos \alpha \times \csc \alpha$$

$$\cos \alpha \times \sec \alpha = 1$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

等

$$\tan \alpha \times \cot \alpha = 1$$

### I. 换元

$$\textcircled{1} \sqrt{1-x^2}, x = \cos \alpha, 0 \leq \alpha \leq \pi, \rightarrow |\sin \alpha| = \sin \alpha$$

$$\textcircled{2} \sqrt{4-x^2}, x = 2 \cos \alpha, 0 \leq \alpha \leq \pi, \rightarrow |2 \sin \alpha| = 2 \sin \alpha$$

$$\textcircled{3} \sqrt{1+x^2}, x = \tan \alpha, -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \rightarrow |\sec \alpha| = \sec \alpha$$

$$\textcircled{4} \sqrt{4+x^2}, x = 2 \tan \alpha, -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \rightarrow |2 \sec \alpha| = 2 \sec \alpha$$

$$\textcircled{5} \sqrt{x^2-1}, x = \sec \alpha, -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \rightarrow |\tan \alpha| = \tan \alpha$$



$$\textcircled{6} \sqrt{x^2 - 4}, x = 2 \sec \alpha, -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \rightarrow |2 \tan \alpha| = 2 \tan \alpha$$

$$\textcircled{7} \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1}, \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \tan \alpha, \rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} |\sec \alpha|$$

## II. 恒等变换

$$x + y + z = xyz \rightarrow \sum \tan A = \prod \tan A \text{ or } \sum \cot \frac{A}{2} = \prod \cot \frac{A}{2}$$

$$xy + yz + zx = 1 \rightarrow \sum \cot A \cot B = 1 \text{ or } \sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1 \rightarrow \sum \cos^2 A + 2 \prod \cos A = 1$$

以下是三角形中其他的一些恒等式:

$$\begin{aligned} \sum \sin A &= 4 \prod \cos \frac{A}{2} & \sum \cos A &= 1 + 4 \prod \sin \frac{A}{2} \\ \sum \sin^2 A &= 2 + 2 \prod \cos A & \sum \cos^2 A &= 1 - 2 \prod \cos A \\ \sum \sin^2 \frac{A}{2} &= 1 - 2 \prod \sin \frac{A}{2} & \sum \cos^2 \frac{A}{2} &= 2 + 2 \prod \sin \frac{A}{2} \end{aligned}$$

## □ 向量的极化公式

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} [(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2]$$

**(例)** (向量、复数一家亲!) 对于复数  $\alpha, \beta$ , 定义  $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{4} (|\alpha + \beta|^2 - |\alpha - \beta|^2)$ , 定义  $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + i \langle \alpha, i\beta \rangle$ 。

(1) 求证:  $\langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle$  为实数;

(2) 试将  $\langle \alpha, \beta \rangle$  的模用  $\alpha, \beta$  表示。

(《模拟试题精选》编委会, 2017, p. 109)

(1) 证明:

$$\langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle = 2\langle \alpha, \beta \rangle + \frac{i}{4} (|\alpha + i\beta|^2 - |\alpha - i\beta|^2 + |\beta + i\alpha|^2 - |\beta - i\alpha|^2)$$

由于  $|\alpha + i\beta| = |i(-\alpha i + \beta)| = |\beta - \alpha i|$ , 同理,  $|\alpha - i\beta| = |\beta + i\alpha|$ 。或通过下面的图示表示:

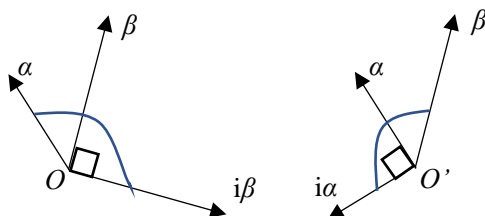


图 9  $|\alpha + i\beta| = |\beta - \alpha i|$

所以,  $\langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle = 2\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{R}$ 。

(2) 解: 对于求模的题目, 平方才能继续!

$$\begin{aligned}
|\langle \alpha, \beta \rangle|^2 &= \left( \frac{1}{4} (|\alpha + \beta|^2 - |\alpha - \beta|^2) \right)^2 + \left( \frac{1}{4} (|\alpha + i\beta|^2 - |\alpha - i\beta|^2) \right)^2 \\
&= \left( \frac{1}{4} (|\alpha + \beta|^2 - |\alpha - \beta|^2) \right)^2 + \left( \frac{1}{4} (|\alpha + i\beta|^2 - |\beta - \alpha i|^2) \right)^2 \\
&= \frac{1}{16} \left[ \left( (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) - (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left( (\alpha + i\beta)(\bar{\alpha} + i\bar{\beta}) - (\beta - \alpha i)(\bar{\beta} - \bar{\alpha} i) \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{16} \left[ \left( 2(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) \right)^2 + \left( 2i(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) \right)^2 \right] = \frac{1}{16} \cdot 16\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} = |\alpha|^2|\beta|^2
\end{aligned}$$

所以

$$|\langle \alpha, \beta \rangle| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

注意:  $\alpha^2 \neq \bar{\alpha}^2, |\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha}$ .

# “平台”上的火花<sup>1</sup>

## 1. “平台”思想

当学习《数学 必修3》的《算法初步》一节中，我们学习了“算法初步”思想。书中通过几个例题，表明一些程序的算法具有一般性，这时，我们就可以把这样的算法做成一个“程序包”，又称为一个“平台”，在需要时，把程序包拿出来使用即可（Anon., 无日期），这就是**平台(platform)**思想。

后面又说到，“平台”的思想在算法设计中是一个最基本的思想，也是数学中思考问题的一个重要思想。

或许当时感悟不深。但是，仔细思考一下，“平台”思想就在我们身边。比如，小学的“鸡兔同笼”问题，初中的“解三角形”问题，高中的“数列”问题，以及在做一张的 PPT<sup>2</sup>时，使用模板将会非常省力，而且美观。例子举不完。这意味着，几乎所有的问题都是由一个个小“平台”解决的。

但是或许还是无法感悟到“最重要”这一点。在数学题目中，有些时候，一道难题很长时间没有解出来。但是经过讲解，就会恍然大悟，“哦，还能这样解，这不是学过的吗？”

到目前为止，我们学过很多这样的大平台，而在这上面有着一些“工具”，你知道吗？

## 2. 图象<sup>3</sup>——“具象化”的工具

从开始研究函数开始，我们就知道要描述一个函数，可以使用列表法、解析式（表达式）法和图象法。从此，研究一个函数，**图象(graph)**成为了其重要的一部分。

在后来解决一些问题时，也就用到了“图象”这个工具。比如，在解决二次函数在某区间内是否有解（零点）的问题时，很大一部分就是通过做出二次函数图象，来直观地观察满足的条件（比如两端点值与 0 的关系、对称轴等），而不是去凭空记忆怎样解决，而且这样也记不住嘛。

通过上面这个例子，能够更好地理解“具象化”的含义。所谓具象化，就是把抽象的东西，表现得很具体。简单地说，就是把看不见的、不容易理解的，变得看得见、容易理解（米汤屹岬 iR, 2014）。我认为，图象就有这个功能。

实际上，“图象”就是一个平台。但是对于一些复杂的问题或是较难的问题，你是否真的有意识、或者是有敏锐观察，看到这里应使用这个平台吗？

**【例 1】**（2014 浙江高考）设函数  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2(x) = 2(x - x^2)$ ,  $f_3(x) = \frac{1}{3} |\sin 2\pi x|$ ,  $a_i = \frac{i}{99}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 99$ ), 记  $I_k = |f_k(a_1) - f_k(a_0)| + |f_k(a_2) - f_k(a_1)| + \dots + |f_k(a_{99}) - f_k(a_{98})|$ ,  $k = 1, 2, 3$ , 则 ( )

A.  $I_1 < I_2 < I_3$       B.  $I_2 < I_1 < I_3$       C.  $I_1 < I_3 < I_2$       D.  $I_3 < I_2 < I_1$

看到这一题之后，是否感觉无从下手？有些同学就无奈地使用直接计算的方式，如当  $k = 1$  时，

<sup>1</sup> Log Creative, (LC)No.0072, 2016 年 2 月 21 日 第 7 版

<sup>2</sup> PPT, 全称 PowerPoint, 即幻灯片。

<sup>3</sup> 图象中的“象”字，根据“图象(graph)是图形，图像(picture)是画面”，以及教科书上的字，故本论文中使用“象”来特指理科中的图象。

$$\left| f_1\left(\frac{i}{99}\right) - f_2\left(\frac{i-1}{99}\right) \right| = \left| \left(\frac{i}{99}\right)^2 - \left(\frac{i-1}{99}\right)^2 \right| = \frac{1}{99} \times \frac{2i-1}{99}$$

$$I_1 = \frac{1}{99} \left( \frac{1}{99} + \frac{3}{99} + \cdots + \frac{2 \times 99 - 1}{99} \right) = 1$$

是可以算出来的。

但是有这个必要吗？如果此时脑子里突然有一个映射：绝对值→距离→图象，用图象具象化表示，是不是更好呢？尝试一下，如图 1，作出  $y = x^2$  的图象，取  $a_0, a_1, a_2$ ，发现左端  $y$  轴上  $I_1 = |f_1(a_1) - f_1(a_0)| + |f_1(a_2) - f_1(a_1)| + \cdots + |f_1(a_{99}) - f_1(a_{98})| = 1$ ！

看到成果后，就继续探索，如图 2，作出  $y = f_2(x)$  的图象。

类似地， $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{49}, a_{50}$  怎么办？我们通过图象很直观地就看出  $a_{49}, a_{50}$  是关于对称轴对称的点，所以  $f_2(a_{49}) = f_2(a_{50})$

$< \frac{1}{2}$ ，所以易得  $I_2 < 1$ 。

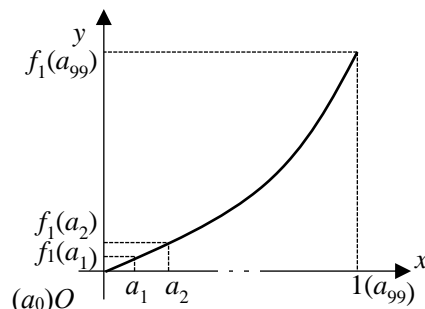


图 10  $f_1$  的图象

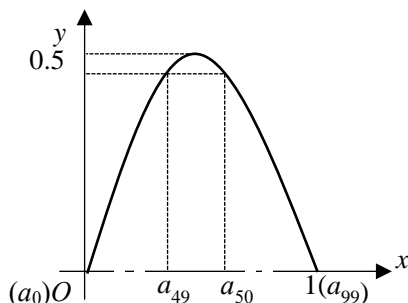


图 2  $f_2$  的图象

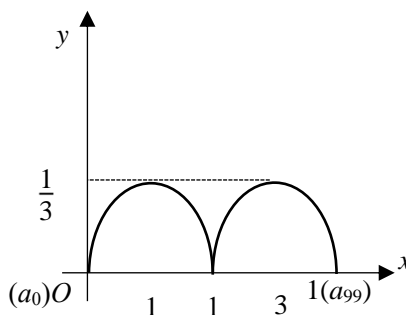


图 3  $f_3$  的图象

如图 3，作出  $y = f_3(x)$  的图象。类似地，可得  $I_3 < \frac{4}{3}$ 。但是这样依然无法比较大小。但是再仔细看看图象，很容易得到  $I_3 > 1$ 。因为转折处的损耗不可能大于等于  $\frac{1}{3}$ 。

综上， $I_2 < I_1 < I_3$ ，故选 B。

这一题还包含着许多其他的“平台”思想，如微积分的思想，这意味着“平台”之间有时是有一定联系的。

但是我们依然能够清楚地看到，这些思想在图象的“平台”上摩擦出了明亮的火花，最终创造出了数学灵感。

图象的确是一个具象化工具，这个工具就在那，就看你会不会使用它。

**【例 2】**（2015 清华自主招生）设  $f(x) = \sin x \sin 5x$ ，若  $f(x) = a$  在  $[0, \pi)$  上有唯一解，则  $a =$  \_\_\_\_\_。

有点犯难了，这个  $f_1(x) = \sin x$  的图象我会， $f_2(x) = \sin 5x$  的图象我也会，为什么一相乘就不会了呢？

既然已经想到了在区间内有解→图象交点，为什么不继续作出图象呢？

如图 4，在同一坐标系内画出  $y = f_1(x)$  和  $y = f_2(x)$  的图象。但是在作图过程中，你是否意识到“五点作图法”了？

没错， $f(x) = \sin x \sin 5x$  就可以采用这个方式作出来。选择  $f_2(x)$  的“五点”，通过乘积的方式描出这些点，并把这些点大致用曲线连接起来，图象就出来了。

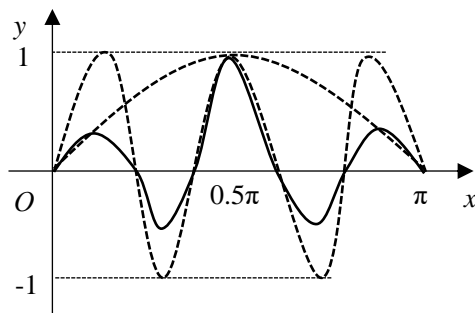


图 11  $y=f_1(x)$ 、 $y=f_2(x)$ 、 $y=f(x)$ 的图象（示意）

显然  $a=1$  就是我们想要的结果。

这些已经研究过的图象确实为研究新函数图象提供了很大的便利。人们总喜欢直观的感觉，而二维的图象比一维的代数直观地多。

### 3. 三角函数和向量——“自然化”工具

说到三角函数，就知道曾经用了大量的时间和精力去研究三角函数，研究了函数的性质、诱导公式、辅助角公式。更有甚者，了解了万能公式，以及其他的特殊规律。但是却只是止步于平面几何的基础运算和代数的基本技巧。一旦有所隐藏，就不敢下手了。

**【例 3】** 已知  $a+b+c=1$ ，求证： $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq\sqrt{3}$ 。

说 1 是个有趣的东西：1 可以拆分为两个因式（和为 1）的乘积，拯救了这个题目于水深火热之中；1 又可以变为  $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ ，通过三角函数这个工具去解决。可以说“1”是个“无中生有”的工具。

那么再看这个题目。如果使用不等式去解决，技巧性就比较高了。但是  $1\rightarrow$ 三角换元，为什么不试试啊？

那么就又会遇到瓶颈：两个元我好换，这里三个元……

令  $a=\cos^2\alpha$ ， $b+c=\sin^2\alpha$ ， $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 。整体代换是不错，下面怎么办？

为了出现  $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ ，再代换一次， $b=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta$ ， $c=\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta$ ， $\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 。

这就妙极了！

$$\begin{aligned}\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} &= \cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \leq \cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{2}\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}\sin(\alpha + \theta) \\ &\leq \sqrt{3}\end{aligned}$$

$\left(\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  证毕。

在这一过程中，是不是在遇到瓶颈的时候，失去了对这个平台的“信任”，导致最终不再使用工具，徒手劳动？实际上，这就是信念不够坚定导致的。而“平台”思想在一定角度上就是解题的大纲，灵感的指路标，避免使用“摸索”的方式匍匐前进。所以，在遇到这个“平台”映射的时候，就应该勇敢地用工具去探索。

类似地，我们又认识了“向量”这个工具。它也可以很自然地解决一些初中平面几何

问题。就比如下面这一题。

**【例 4】** 如图 5，在  $\triangle ABC$  中， $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$ ， $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ ， $AD$  与  $BC$  交于点  $M$ ， $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ ， $x - y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

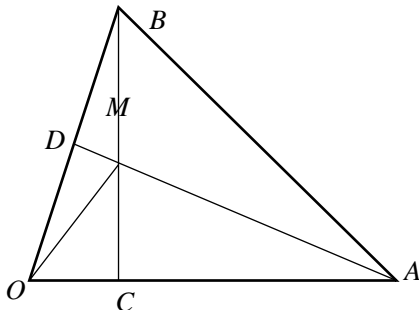


图 12 例 4 的题图

**解法一**（所谓初中方法）：根据梅涅劳斯定理<sup>4</sup>可得，

$$\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{AC}} \times \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MB}} \times \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DO}} = 1$$

代入数据，解得

$$\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{3}{4} = \lambda$$

根据定比分点<sup>5</sup>可得，

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OC} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB} = \frac{4}{7}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$$

即

$$x - y = -\frac{2}{7}$$

**解法二**（三点共线方法）：取  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ 。则  $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\mathbf{b}$ 。

因为  $A, M, D$  和  $B, M, C$  分别三点共线。根据三点共线的推论，所以

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OD} = \alpha\mathbf{a} + \frac{1}{2}(1-\alpha)\mathbf{b} \\ \overrightarrow{OM} = \beta\overrightarrow{OB} + (1-\beta)\overrightarrow{OC} = \beta\mathbf{b} + \frac{1}{4}(1-\beta)\mathbf{a} \end{cases}$$

即

<sup>4</sup> **梅涅劳斯 (Menelaus) 定理**（简称梅氏定理）：任何一条直线截三角形的各边，都使得三条不相邻线段之积等于另外三条线段之积。或者是：当直线交  $\triangle ABC$  三边所在直线  $BC, AC, AB$  于点  $D, E, F$  时，

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

（百度百科，2016）

<sup>5</sup> **定比分点 (Definite proportion)**： $l$  上两点  $P, O$ ，它们的坐标分别为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，在直线  $l$  上一个不同于  $P, O$  的任一点  $M$  使  $\frac{PM}{MO}$  等于已知常数  $\lambda$ 。即  $\frac{PM}{MO} = \lambda$ ，我们就把  $M$  叫做有向线段  $PO$  的定比分点。若设  $M$  的坐标为  $(x, y)$ ，则  $M(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1})$ 。（百度百科，2016）

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{4}(1 - \beta) \\ \beta = \frac{1}{2}(1 - \alpha) \end{cases}$$

解出  $\alpha, \beta$ , 易得相同的结果。

实际上, 不论是解法一还是解法二, 他们都是建立于已知“平台”或者说是“定理”的基础上的, 做题的困难性不分上下。而且他们都对应着大“平台”, 一个是平面几何, 一个是向量, 你可以使用大“平台”中的任意内容, 但是能否做对取决于你对“平台”的熟悉程度以及使用“工具”的熟练程度。

## 4. 数列——“规律化”工具

还记得小学时候的“按规律填空”吗? 没错, 从那时起, 就认识了“数列”。

在高中的时候, 深入地对等差数列和等比数列进行研究。

只是有时候就忘记这个“工具”了。

**【例 5】** 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $[0, 1]$ , 且同时满足: ①  $f(1) = 3$ , ②  $f(x) \geq 2$  恒成立, ③ 若  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1$ , 则有  $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2) - 2$ 。

试比较  $f\left(\frac{1}{2^n}\right)$  与  $\frac{1}{2^n} + 2$  的大小 ( $n \in \mathbf{N}$ )。

合理地对题干中的关系赋值, 成为第一关键。

令  $x_1 = x_2 = \frac{1}{2^{n+1}}, n \in \mathbf{N}$ 。可得,  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1$ , 所以

$$f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2) - 2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2^n}\right) \geq 2f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) - 2 \quad ①$$

那么, 下面应如何找到与  $\frac{1}{2^n} + 2$  的关系呢?

$n \in \mathbf{N} \rightarrow$  数列  $\rightarrow a_n \geq 2a_{n+1} - 2 \rightarrow$  构造类等比数列!

$$① \Rightarrow f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) - 2 \leq \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{1}{2^n}\right) - 2 \right] \Rightarrow$$

$$\frac{f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) - 2}{f\left(\frac{1}{2^n}\right) - 2} \leq \frac{1}{2}$$

累乘法对于等比数列可起到类似于消除一元的作用。所以

$$\frac{f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) - 2}{f\left(\frac{1}{2^n}\right) - 2} \times \frac{f\left(\frac{1}{2^n}\right) - 2}{f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) - 2} \times \cdots \times \frac{f\left(\frac{1}{2^1}\right) - 2}{f\left(\frac{1}{2^0}\right) - 2} \leq \frac{1}{2}$$

即

$$\frac{f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) - 2}{f(1) - 2} \leq \frac{1}{2}$$

即

$$f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq \frac{1}{2^{n+1}} + 2$$

即



$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n} + 2$$

很清楚地看到，这里的函数就变成了数列，这种“数列化”的思想，或者是运用数列这个“规律化”工具，对于这样的题目往往是非常有用的。

再次地，体现了这种“跨平台”的思想。这意味着越是有创新的题目，越是有着整合多个平台的意味，有些时候需要深入探索一番。

## 5. “平台”思想的应用

通过上面的过程，我们认识了这几个老工具的新特性：“具象化”工具、“自然化”工具、“规律化”工具。但是，重新审视这个过程，或许会有更深的感悟。

### ● 基本型“平台”思想的应用

平常遇到同类型的题，可以使用已经熟悉的“平台”进行套用。这类似于“复制—粘贴”过程。在这样的情况下，“平台”意识很强烈。

### ● “平台”思想的应用过程

反观这些过程，我们是如何想到思路的？



图 13 利用“平台”思想的连环映射

这意味着，要想激发数学灵感的火花，“反应”这个过程很关键。而需要触发这个反应，就必须在脑子里提前储存一些映射。而这些映射所要储存的信息，就是“特征→反应”。

我认为，在储存这些信息的过程中，就在培养着“平台”意识。一旦有所储存，就能对所识别到的特征进行判断与反应。

实际上，要想识别到特征，就应在审题过程中保持有着“平台”意识。这是比较关键的。

综上所述，这个过程就是这样的：

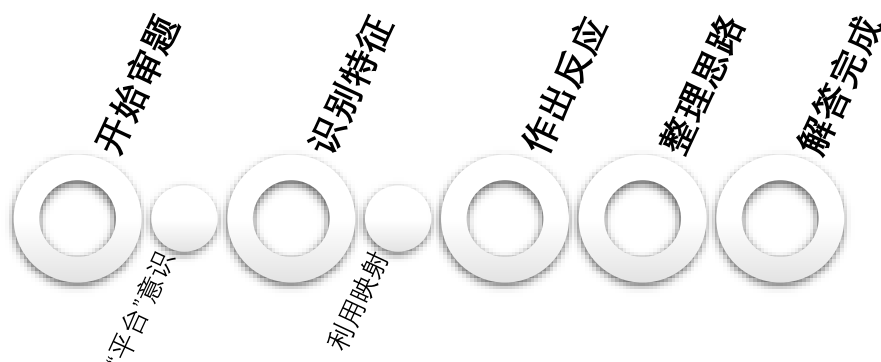


图 14 利用“平台”思想解题的完整过程

### ● “平台”与“工具”

这里所说的“工具”与“平台”的关系是什么？



正如前面所述,“平台”包含着“工具”。解决问题时,可使用数学感觉,推理解出答案。但在使用“平台”思想解决问题时,需要用上面的“工具”来转换,使其与已经存储的“抽象化”解答过程相匹配,即抽出其骨髓,然后使用映射,再复原,从这个“抽象化”过程再“具体化”至具体的题目上,从而成功运用这个“平台”解决这个问题。

因此“工具”也是一种转化的“平台”。



图 15 工具的作用

这一过程可以参考【例 5】。

### ● 创新型“平台”思想的应用

了解了以上的问题,就来看看面对难题的解决方法。

(1) 复杂的题目。复杂的题目解决方法是多“平台”的组合,这对应着“复杂 = 简单 + 简单 + … + 简单”。所以,在解决时,要仔细解剖,识别特征,作出反应。

(2) “跨平台”的题目。对于“跨平台”的题目,就必须强化识别“平台”之间相似点。通过另一个平台的解决方法,来解决这个问题。实际上,这样的题目,“平台”是具有包含关系的。这意味着,跨平台的过程中,是从“大平台”跨向“小平台”,或者是从“小平台”跨向“大平台”。正如【例 5】中,数列实际上是一种特殊的函数。你或许还遇到过其他的,如使用函数中的方法来解决三角函数中的问题(换三角函数为一个元)。

### ● 以大见小(适用于“跨平台”题目)

在科学研究中,科学家常将未知现象同已知现象进行比较,找出其共同点,进一步推测未知现象的特征和规律。(蔡晔, 2015.4)这就是类比推理的原理。而在这里也是如此。我们常将未知题目同已知平台进行比较,从而解答出这个题目。

## 6. 探索更多的“平台”和“工具”

更多的“平台”和“工具”等待着去摸索与总结。我们所学到的“平台”和定理,都是前人所总结出来的。牛顿曾说过:“如果我比别人看得更远,那是因为我站在巨人的肩膀上。”那么就让我们在夜幕降临时,在巨人的肩膀上擦出火花!

## 7. 结论

- “平台”思想对数学灵感的激发具有促进作用。
- 而为了使用“平台”思想，就必须在审题时具有“平台”意识。
- 而为了识别特征，就要提前存储一些映射和“工具”。
- 使用数学感觉或“工具”转换，启用映射，来进行下一步的反应过程。
- 在面对创新型题目时，就可以灵活使用“平台”思想解决问题。包括“平台”的组合与“跨平台”（“平台”的类比）。
- 因此，需要摸索与总结更多的“平台”与工具。

# 综合选讲<sup>6</sup>

曹瑞彬 (2016.7, 2017.7)

## 【 知识 】

### △平面几何

#### 1. 托勒密定理 *Ptolemy Theorem*

圆的内接凸四边形两对对边乘积的和等于两条对角线的乘积。

### △代数

#### 2. Euler 公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

特别地,  $e^{i\pi} = -1$

3.  $z$  是复数,  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

#### 4. 泰勒展开式 *Taylor Expansion*

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right), \quad -\infty < x < \infty$$

### △数论

#### 5. Euler 函数

Euler 函数  $\varphi(n)$  表示不超过  $n$  且与  $n$  互质的自然数的个数。

#### 6. Euler 定理

令正整数  $n$  的标准分解为

$$n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_m^{t_m}$$

则

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^m \left( 1 - \frac{1}{p_i} \right)$$

**证明** 令集合  $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , 令集合  $M_i = \{x | x \in M, \& p_i | x\}$ 。  
此时集合  $M_i$  为整除  $p_i$  的数  $x$  的集合。

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= |\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \cdots \cap \overline{M_m}| \\ &= |M| - \sum_i |M_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |M_i \cap M_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |M_i \cap M_j \cap M_k| \\ &\quad + \cdots + (-1)^m |M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \cdots \cap M_m| \\ &= n - \sum_{i=1}^m \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{n}{p_i p_j} - \cdots + \frac{(-1)^m n}{\prod_{i=1}^m p_i} = n \prod_{i=1}^m \left( 1 - \frac{1}{p_i} \right) \end{aligned}$$

(容斥原理)

<sup>6</sup> Log Creative, (LC)No.0107, 2016 年 8 月 11 日 最终版



7. 如果  $a, a+1, a+2, \dots, a+n-1$  是  $n$  个连续整数, 则

$$n! \mid \prod_{i=0}^{n-1} (a+i)$$

8.  $(a, b) = (a, ka+b)$

### 9. Euler 定理

设  $a, m \in \mathbb{N}^*, (a, m) = 1$ , 则  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ 。

**定义** 对于  $\text{mod } m$ , 其余数  $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  是  $m$  的一个**完全系**。其中与  $m$  互素的余数  $\{x_1, x_2, \dots, x_{\varphi(m)}\}$  为其**简系**。

**证明** 取模  $m$  的一个简系:  $x_1, x_2, \dots, x_{\varphi(m)}$ 。取  $a \text{ et. } (a, m)=1$ 。

得  $ax_1, ax_2, \dots, ax_{\varphi(m)}$  也是模  $m$  的一个简系。

则  $ax_1 \cdot ax_2 \cdot \dots \cdot ax_{\varphi(m)} \equiv x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{\varphi(m)} \pmod{m}$

则  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ 。

### 10. Fermat 小定理

如果  $p$  为素数,  $(a, p) = 1$ , 则  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 。

**引理 1** 如果  $ac \equiv bc \pmod{p}$ , 且  $(c, p) = 1$ , 则  $a \equiv b \pmod{p}$ 。

**引理 2** 如果  $(a, p) = 1, p$  为质数, 则  $a, 2a, \dots, ap$  被  $p$  除的余数均不同。(采用反证法证明)

**证明**  $1 \equiv 1 \pmod{p}, 2 \equiv 2 \pmod{p}, \dots, p-1 \equiv p-1 \pmod{p}$ , 取  $a \text{ et. } (a, p) = 1$ , 由引理 2 可得,

$a, 2a, \dots, a(p-1)$  被  $p$  除的余数均不同, 为  $\{1, 2, \dots, p-1\}$ 。

所以 式子两边相乘, 得

$$1 \times 2 \times \dots \times (p-1) \equiv a \cdot 2a \cdot \dots \cdot (p-1)a \pmod{p}$$

得  $a^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv (p-1)! \pmod{p}$ 。

由于  $((p-1)!, p) = 1$ , 所以  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 。

### 11. Wilson 定理

设  $p$  为素数, 则  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ 。

**证明** (i) 当  $p=2$  时,  $1! \equiv -1 \pmod{2}$ , 显然成立。

(ii) 当  $p>2$  时, (此时  $p$  显然为奇数)

令  $f(x) = (x-1)(x-2) \cdot \dots \cdot (x-(p-1)) - (x^{p-1} - 1)$ 。

$f(x)$  的最高次数是  $p-2$ 。

另一方面,  $(p, i) = 1 (i = 1, 2, \dots, p-1)$ ,

所以 根据 Fermat 小定理,  $i^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

即  $i^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ 。

所以  $f(i) = 0$ 。

所以 对  $\forall x \in \mathbb{Z}, f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ 。

所以  $f(0) \equiv 0 \pmod{p}$ 。

即  $(-1)^{p-1}(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

而  $p-1$  必为偶数, 所以  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ 。

## 【思想】

## 1. 探索法——难题的敲门砖

1. 定义函数  $f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ , 如下:

$$f(1) = 1, f(3) = 3 \text{ 且对 } \forall n \in \mathbb{N}_+, \text{ 有}$$

$$f(2n) = f(n), \quad f(4n) = 2f(2n+1) - f(n), \quad f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$$

问有多少个  $n \in \mathbb{N}_+ (n \leq 2016)$ , 使  $f(n) = n$ ?

这一题, 我们在《高中数学竞赛教程 (中国科技大学出版社)》的《第 6 讲 记数法》也见到了本题, 只是原条件为  $n \leq 1988$ . 但是解析一上来就不知道怎么想的。

现在跟随曹瑞彬老师的脚步, 解决本题。

使用探索法的根本, 对于与年份有关的数目, 或者大到离谱的数目, 都应从小数开始探索规律。

表格 1

$n$	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	6	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	10
$f(n)$	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>5</u>	3	<u>7</u>	<u>1</u>	<u>9</u>	5

在探索前 10 个数时, 发现似乎奇数都是符合要求的, 这时可能会很高兴。但是, 教授说了一句话, 如果继续探索呢?

表格 2

$n$	11	12	13	14	<u>15</u>	<u>16</u>	<u>17</u>	18	19	...
$f(n)$	13	3	11	7	<u>15</u>	<u>1</u>	<u>17</u>	9	25	...

令人失望。只有 15 和 17 是符合要求的。如果仔细看一下, 是不是还会有所发现呢?

我当时发现, 所有 2 的整数幂左右都是符合要求的数。这时老师来了一句, “如果探索其二进制数呢?”

表格 3

$n$	<u>1</u>	<u>10</u>	<u>11</u>	<u>100</u>	<u>101</u>	110	<u>111</u>	<u>1000</u>	<u>1001</u>	1010
$f(n)$	<u>1</u>	<u>01</u>	<u>11</u>	<u>001</u>	<u>101</u>	011	<u>111</u>	<u>0001</u>	<u>1001</u>	0101

奇妙的事情发生了, 我们发现经过  $f$  变换后, 其二进制码被倒过来了!

现在我们只需要证明:

$$\text{若 } n = (a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)_2, \quad \text{则 } f(n) = (a_0 a_1 \cdots a_{k-1} a_k)_2$$

老师在最后说到, “有人可能会问我, 你是怎么想到的?”, 他笑着说到, “老师是看解析得到的。”我想, 那个关键的点——2 的整数次幂可能也是激发灵感的一点吧, 毕竟, 只要有强大一些的进制映射, 就有很大的可能从此找到关键点。

“盼星星, 盼月亮, 朝思暮想的讲义终于来了!”

2. 对于给定的  $m, n \in \mathbb{N}_+, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$  是  $m$  个给定的整数, 且  $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_m$ , 求证:

$$\exists T, |T| \leq 1 + \frac{(a_m - a_n)}{2n + 1} \quad \& \exists t \in T, s \in [-n, n]$$



Et. 对  $\forall a_i (i = 1, 2, \dots, n), a_i = t + s$ .

探索法, 有时候也是通过特殊的情况 (举例), 来理解题意, 明确目的。

现在不妨假设  $m = 5, n = 3, a_1 = -5, a_2 = -2, a_3 = 0, a_4 = 5, a_5 = 8$ 。

$$|T| \leq 1 + \frac{8 - (-5)}{2 \times 3 + 1} = 1 + \frac{13}{7} \Rightarrow |T| \leq 2$$

故令  $T = \{b_1, b_2\}, t \in T$  得  $S \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

故  $b_1 = -2, b_2 = 5$  为正确的选择。

此时由  $b_1$  得到的范围是  $[-5, 1]$ ,  $b_2$  得到的范围是  $[2, 8]$ 。这也就表明, 为使  $T$  能够最大可能性存在 (使  $T$  元素个数最小, 得到的数不重复) 得到的范围应为

$$[\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}]$$

内的连续整数。

为了证明, 需要更一般的情况。

一般地 由  $|T|$  的定义方法, 我们构造

$$a_m - a_1 = k(2n + 1) + r, \quad 0 \leq r < 2n + 1 \text{ \& } r \in \mathbb{N}_+$$

$$|T| = 1 + k$$

设  $T = \{b_1, b_2, \dots, b_{k+1}\}, t \in T, s \in [-n, n], a_i = t + s$ ,

应使  $b_1 - n = a_1 \Rightarrow b_1 = a_1 + n$   $b_{k+1} + n = a_m \Rightarrow b_{k+1} = a_m - n$

取  $b_1 = a_1 + n$  得到  $a_1, a_1 + 1, \dots, a_1 + n, \dots, a_1 + 2n$ 。

为了使得到的范围不重复, 应取  $b_2 = a_1 + n + 2n + 1$ , 得到  $a_1 + 2n + 1, a_1 + 2n + 1, \dots, a_1 + 4n + 1$ , 我们终于得到:

$$b_i = a_1 + n + (i - 1)(2n + 1)$$

现在可以开始证明了。

证明

设  $a_m - a_1 = k(2n + 1) + r, 0 \leq r < 2n + 1 \text{ \& } r \in \mathbb{N}_+$

设  $T = \{a_1 + n + i(2n + 1), i = 0, 1, 2, \dots, k\}$ 。此时

$$|T| = 1 + k \leq 1 + \frac{(a_m - a_1)}{2n + 1}$$

则  $s + t$  表示从  $a_1$  至  $a_1 + n + k(2n + 1)$  的连续整数。

现在只要证明  $a_1 + n + k(2n + 1) \geq a_m$ ,

注意到,  $a_m = a_1 + k(2n + 1) + r < a_1 + k(2n + 1) + 2n + 1$ , 得证。

“退一步, 海阔天空。”

3. 设  $f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, n \in \mathbb{N}_+$ . 求证: (1) 当  $n$  为偶数时, 方程  $f_n(x) = 0$  没有实数根; (2) 当  $n$  为奇数时,  $f_n(x) = 0$  有唯一实数根。

不是一眼看出的题, 就要用探索法。是一眼能看出的题, 不是难题。可见探索法的重要性。

原题目如此之说, 我们需要想到其成立情况。

当  $n$  为偶数时, 方程  $f_n(x) = 0$  没有实数根, 只要证明此时  $f_n(x) > 0$  或  $f_n(x) < 0$ 。

当  $n$  为奇数时,  $f_n(x) = 0$  有唯一实数根, 只要证明此时  $f_n(x)$  单调函数。

$$f_1(x) = 1 + x \quad f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} > 0$$

$$f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \quad f_3'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} = f_2(x) > 0$$

$f_3(x)$  是单调增函数。



是成立的！在此探索中，我们有了新发现： $f'_{n+1}(x) = f_n(x)$ 。这可是一大关键！

故下面的思路就很清晰了，用**数学归纳法**证明：

$$f'_{2k-1}(x) > 0 \quad f_{2k}(x) > 0$$

复杂的题目实际上是由许多的简单点构成的，找到突破口，过关斩将，就能完成解答。

总言之，探索法就是发现题目特征的方法，寻找突破口的方法。从基础的地方开始研究，是有出路的。

## 2. 反证法——山重水复前的出路

4.  $f(x), g(x)$  定义域为  $[0, 1]$ 。求证：

$$\exists x_1, x_2 \in [0, 1], \text{ et. } |x_1 x_2 - f(x_1) - g(x_2)| \geq \frac{1}{4}$$

当题目所给的条件过于模糊，根本无从下手的时候，反证法往往是最好的选择。

**证明** 若不然，则  $\forall x_1, x_2 \in [0, 1], \text{ et. } |x_1 x_2 - f(x_1) - g(x_2)| < \frac{1}{4}$ 。

即  $\forall x_1, x_2 \in [0, 1], \text{ et. } |x_1 x_2 - f(x_1) - g(x_2)| < \frac{1}{4}$ 。

**反证法有一个好伙伴——赋值法**，这个方法可以充分利用题目所给条件，增加条件，从而由**特殊值**导出的**矛盾**得证。

使用赋值法时，对于取值问题，还有一个很重要的技巧：**尝试取端点处值**。在此题中，由于  $f(x), g(x)$  是不同的函数，所以需要注意在对  $x_1, x_2$  取值时，进行一定的替换。

而端点值是 0 或 1，为导出矛盾，应使另一端为端点值之一。故我们尝试着去构造 4 个式子，使得其右端相加得 1。

$$(i) \quad \text{当 } x_1 = x_2 = 0 \text{ 时,} \quad |f(0) + g(0)| < \frac{1}{4};$$

$$(ii) \quad \text{当 } x_1 = 1, x_2 = 0 \text{ 时,} \quad |f(1) + g(0)| < \frac{1}{4};$$

$$(iii) \quad \text{当 } x_1 = 0, x_2 = 1 \text{ 时,} \quad |f(0) + g(1)| < \frac{1}{4};$$

$$(iv) \quad \text{当 } x_1 = x_2 = 1 \text{ 时,} \quad |1 - f(1) - g(1)| < \frac{1}{4};$$

使用反证法的结果，就是得到与题设或公理、定理矛盾或自相矛盾的结论，从而否定最初的假设：**若不然**。从而证明原命题是正确的。这里，由于它们是未知的函数，不能与公理、定理相矛盾，故只能考虑得到**常数  $A \neq$  常数  $A$**  的结论。此时，就需要消去  $f(x), g(x)$  这两个系列的元（未知数），这里即指  $f(0), f(1), g(0), g(1)$  这四个未知数。

以上的思考已经可以用于尝试了！

$$\begin{aligned} 1 &= |1 - f(1) - g(1) + f(1) + g(0) + f(0) + g(1) - f(0) - g(0)| \\ &\leq |1 - f(1) - g(1)| + |f(0) + g(1)| + |f(1) + g(0)| \\ &\quad + |f(0) + g(0)| < \frac{1}{4} \times 4 = 1 \end{aligned}$$

(三角不等式:  $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ )

可以看到, 通过增项, 我们得到了一个奇妙的式子, 而也正是这个式子连接已经由赋值得到的条件。最终得到了“ $1 < 1$ ”胡扯的结果。

$1 < 1$ , 显然是错误的。 故得证。

5.  $F(x) = |\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x + Ax + B|$  在  $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$  上的最大值  $M$  与参数  $A, B$  有关, 问:  $A, B$  取什么值时,  $M$  为最小? 并证明你的结论。

**证明** 首先, 化简这个式子

$$\begin{aligned} F(x) &= |\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x + Ax + B| \\ &= \left| \sqrt{2} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) + Ax + B \right| \end{aligned}$$

最特殊的情况, 当  $A = B = 0$  时,  $M = \sqrt{2}$ 。

我们猜想,  $M \geq \sqrt{2}$ 。为什么这么想呢? 因为这太特殊了! 它不需要对  $x$  讨论, 另一方面, 使  $B$  为正数或负数都会使绝对值的最大值变大。

在证明这样的不等式时, 发现直接证简直无从下手。这时就可以证明其补集是不可能的。

若不然, 则  $\exists A, B$ , *et.*  $M < \sqrt{2}$ 。

在赋值的时候, 有时需要取的是具有代表性的点, 而非端点值, 这时就要仔细观察题目的特征是什么。在本题, 由于是取绝对值的最大值, 故取

$$\begin{cases} \left| F\left(\frac{\pi}{8}\right) \right| < \sqrt{2}; \\ \left| F\left(\frac{5\pi}{8}\right) \right| < \sqrt{2}; \\ \left| F\left(\frac{9\pi}{8}\right) \right| < \sqrt{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left| \sqrt{2} + \frac{\pi}{8}A + B \right| < \sqrt{2}; \\ \left| -\sqrt{2} + \frac{5\pi}{8}A + B \right| < \sqrt{2}; \\ \left| \sqrt{2} + \frac{9\pi}{8}A + B \right| < \sqrt{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} < \frac{\pi}{8}A + B < 0 & (1); \\ 0 < \frac{5\pi}{8}A + B < 2\sqrt{2} & (2); \\ -2\sqrt{2} < \frac{9\pi}{8}A + B < 0 & (3). \end{cases}$$

此时, 我们需要找到矛盾。我们尝试把结构相似的式子叠加。

$$(1) + (3) \text{ 得, } -4\sqrt{2} < \frac{10\pi}{8}A + 2B < 0 \quad \text{即} \quad -2\sqrt{2} < \frac{5\pi}{8}A + 2B < 0 \quad (4)$$

(2)与(4)矛盾!

所以  $M \geq \sqrt{2}$ 。

这种方法巧在运用特征:  $\frac{5\pi}{8}$  是  $\frac{\pi}{8}$  与  $\frac{9\pi}{8}$  的中点, 叠加后必然得到与(2)式结构相同的式子。从而自相矛盾。

6. 试证:  $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$  不是整数。

对于这样的数论问题, 不论是证明不是有理数, 还是证明不是整数, 都要坚持用反证法论证。因为现在直接证就是在踏进一片未知的领域。





**证明** 若不然,  $A$  是整数。

遵循探索法的思想, 现在我们由简单情况入手:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{15}, \text{这时要想着 } A \text{ 是整数, 所以整数乘以整数仍为整}$$

数, 所以应该构造一个整数与之相乘得到分数。怎么办呢?

约分是实现这样步骤的关键。需要约分奇数和偶数, 但是可以发现: 任何一个偶数都可以写成 2 的整数幂乘以一个奇数的形式。(实际上这对于任何整数均成立) 即

$$X = 2^\alpha \cdot \beta, \beta = 2k + 1, X, \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

就此例而言, 我们构造一个  $M = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15$ 。为什么这么构造呢? 因为在所有的偶数中间, 8 是最特殊的, 因为它分解后得到 2 的最高次幂——3。如此构造后, 相乘后必然会出现分数, 从而得到此时的  $A$  不是整数。

仿照以上过程, 可以开始证明了。

$$\text{令 } 2^k \leq n < 2^{k+1}, k \in \mathbb{N}.$$

则 对于  $m \leq n$  的  $m$  一定可以写成

$$m = 2^{t_i} \cdot t_k, t_k = 2l + 1, t_i, l \in \mathbb{Z}$$

$$\text{而 } m \leq n \Rightarrow 2^{t_i} \cdot t_k \leq n < 2^{k+1} \Rightarrow 2^{t_i} < 2^{k+1} \Rightarrow t_i \leq k (\because t_i \in \mathbb{Z})$$

此时, 当且仅当  $2^k = m$ , 得  $t_i = k$ 。

$$\text{令 } M = 2^{k-1} \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k', t_1, t_2, \dots, t_k' \text{ 为从 } 3 \text{ 开始至分解得到的最大 } t_k \text{ 的顺次奇数。}$$

最大  $t_k$  的顺次奇数。

$$\text{则 } AM = M'(\in \mathbb{Z}) + \frac{t_1 \cdot t_2 \cdots t_k'}{2}, \text{ 整数与整数的乘积必为整数, 而右边却为分数, 矛盾!}$$

故  $A$  为非整数。

故  $A$  为非整数。

### 3. 消元——写在大旗上的目标

7. 求所有的正实数对  $(a, b)$ , 使得函数  $f(x) = ax^2 + b$  满足: 对  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , 有

$$f(xy) + f(x+y) \geq f(x)f(y)$$

**解** 对原式进行转化, 得

$$a(xy)^2 + b + a(x+y)^2 + b \geq (ax^2 + b)(ay^2 + b)$$

这就尴尬了。有两个未知量, 继续下去只能像没头苍蝇。但是, 仔细想一下, 如果消去一个元, 不就只剩一个元了吗?

仔细看一下, 由于  $x, y$  是任意的, 所以在特殊情况下题设不等依然成立。那么, 为消元应该采用什么办法呢?

这时候, 赋值法又起到了重要作用, 它是可以固定变量的。我们由赋值法可以得到必要条件。这样做是为了得到方向。

$$(i) \quad \text{令 } y = 0, \text{ 得}$$

$$b + (ax^2 + b) \geq (ax^2 + b)b$$

对  $\forall x \in \mathbb{R}$  是成立的。

$$\text{化简, 得 } (1-b)ax^2 + b(2-b) \geq 0$$

$$\text{由于 } a > 0, \text{ 故 } 1-b > 0$$

$$\text{得 } 0 < b \leq 1$$



这时，我们得到了  $b$  的范围。但是为了得到  $a$  的范围，我们就需要再固定一次变量。

有所不同的是，由于  $x$  和  $y$  是可以轮换的，所以令  $x=0$  是没有意义的。所以，我们这样做：

(ii) 令  $y = -x$ ，得

$$(ax^4 + b) + b \geq (ax^2 + b)^2$$

对  $\forall x \in R$  有

$$g(x) = (a - a^2)x^4 - 2abx^2 + (2b - b^2) \geq 0$$

注意到了，此时  $a - a^2 \neq 0$ ，若不然，由  $a > 0$  知， $a = 1$ 。

此时， $g(x) = -2bx^2 + (2b - b^2) \quad (b > 0)$

故  $g(x)$  可取负值，矛盾！

这里，再次用到了反证法，得  $a - a^2 \neq 0$ 。进一步地，由于开口方向不能向下，则

$$0 < a < 1$$

我们要意识到，由于  $a$  和  $b$  的关系并不是孤立的，所以他们之间应该还有一种互相约束的关系才对。

为了找到这样的关系，我们就可以充分利用二次函数的性质，对  $g(x)$  进行配方讨论。

$$(iii) \quad g(x) = (a - a^2) \left( x^2 - \frac{ab}{a - a^2} \right)^2 - \frac{a^2 b^2}{a - a^2} + (2b - b^2)$$

对  $\forall x \in R$  有

$$g(x) = (a - a^2) \left( x^2 - \frac{ab}{a - a^2} \right)^2 + \frac{b}{1 - a} (2 - 2a - b) \geq 0$$

$$\text{则} \quad 2 - 2a - b \geq 0$$

至此，我们找到了必要条件：

$$\begin{cases} 0 < a < 1; \\ 0 \leq b \leq 1; \\ 2a + b \leq 2. \end{cases}$$

整理一下思路：

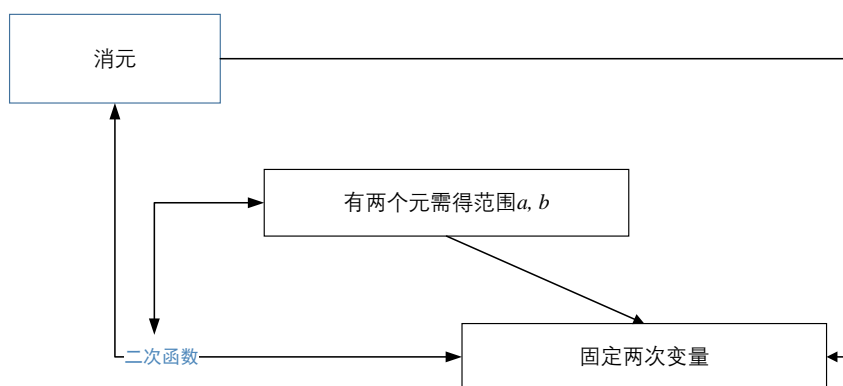


图 16

下面证明：在上述条件下，总能成立。（即证明必要条件亦为充分条件，即充分必要条件）

$$\text{令 } h(x, y) = (a - a^2)x^2y^2 + a(1 - b)(x^2 + y^2) + 2axy + (2b - b^2) \geq 0$$

对  $\forall x, y \in R$  成立。

此时，遇到了麻烦。由于我们需要证明必要条件的三点也是充分条件，就意味着出现那三个因式。现在化简这个式子，是无法正好得到那几个式子的组合的。故我们需要对这个函数进行放缩。

发现后面有一个 $2axy$ ，就思考前面的 $x^2 + y^2$ 能否直接放缩为消去这个因式，毕竟越简单越好嘛！

但是直接把 $x^2 + y^2$ 放缩为 $2xy$ （基本不等式），这还是无法消去的。

“事实上， $x^2 + y^2 \geq -2xy$ 也是成立的！”曹老师说到。

这就成为了关键。

$$\begin{aligned} \because 0 < a < 1, 0 < b \leq 1, x^2 + y^2 &\geq -2xy \\ \therefore h(x, y) &\geq (a - a^2)x^2y^2 + a(1 - b)(-2xy) + 2axy + 2b - b^2 \\ &= (a - a^2)x^2y^2 + 2abxy + 2b - b^2 \\ &= (a - a^2)\left(xy + \frac{b}{1 - a}\right)^2 + 2b - b^2 - \frac{a^3b}{1 - a} \\ &= (a - a^2)\left(xy + \frac{b}{1 - a}\right)^2 + \frac{b(2 - 2a - b)}{1 - a} \end{aligned}$$

神奇的事情就此发生。

由已经确定的必要条件可知， $h(x, y) \geq 0$ 是能够成立的！

综上所述，正实数对 $(a, b)$ 应满足的条件为

$$\begin{cases} 0 < a < 1; \\ 0 \leq b \leq 1; \\ 2a + b \leq 2. \end{cases}$$

此题解决的关键确为消元。

8.  $x, y, z \geq 0$ ，则 $\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值是\_\_\_\_\_。

**解** 看到这题就想了，后面这个式子的最大值是一个值，也就是一个数，也就意味着结果不含有任何一个字母的。那么，我们要做的就是消元。

又想了，分数是有特殊性质的——它能够约分。这将是消元的关键。那么，如何通过约分的方式消元呢？？？

沉思许久。没有结果。

“待定系数法。”曹老师说到。这确实亮了！也就意味着，可以对分母构造，使其成为能够缩的基本不等式形式。

这里，终于得到了比较清晰的思路：通过待定系数法，对分母放缩，使其能够与分子相互约分，只剩下一个值。这类似于整体代换呢~

再次观察：分子 $xy, 2yz$ 都有 $y$ ，那么我们就对 $y$ 待定系数。

再次思考：基本不等式对于少项是有技巧的：通过拆项得到恒等变形，再放缩。

再次明确：分母要放缩成与分子相同的结构。

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + \alpha y^2 + (1 - \alpha)y^2 + z^2 \geq 2\sqrt{\alpha}xy + 2\sqrt{1 - \alpha}yz$$

则

$$\frac{2\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{1 - \alpha}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5}$$

现在可以从头写一遍了：

$$\frac{xy + 2yz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{xy + 2yz}{x^2 + \frac{1}{5}y^2 + \frac{4}{5}y^2 + z^2} \leq \frac{xy + 2yz}{\frac{2}{\sqrt{5}}xy + \frac{4}{\sqrt{5}}yz} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

得解： $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 。

## 4. 构造——换一个角度解决问题

9. 设  $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n \in [1, 2]$ . 且

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$$

求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{17}{10} \sum_{i=1}^n a_i^2$$

并问：等号成立的充要条件。

**证明** 还是那个原则：探索法为上，或者说是退一步。

当  $n = 2$  时， $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$

$$\frac{a_1^3}{b_1} + \frac{a_2^3}{b_2} \leq \frac{17}{10} (a_1^2 + a_2^2) \Rightarrow a_1^2 \frac{a_1}{b_1} + a_2^2 \frac{a_2}{b_2} \leq \frac{17}{10} a_1^2 + \frac{17}{10} a_2^2$$

对称是美的。那么就要使分数线两边是对称的。这就是上一步的道理。

下面就想了， $a_i^2$  就别动了。那么就 **想方设法得到改变  $\frac{a_i}{b_i}$  的方法**。以上是对证明

**结果的分析。（分析法）**

这时就想了，能否再**构造**一个对称的式子？

它就藏在原来不对称的式子中。

$$\frac{\frac{a_1^3}{b_1}}{a_1 b_1} = \frac{a_1^2}{b_1^2}$$

太奇妙了！

对上式开方得

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{\frac{a_1^3}{b_1}}}{\sqrt{a_1 b_1}} = \frac{a_1}{b_1} (\text{引子}) \leq 2 \quad (\#)$$

下面，是再次考验**构造**的时候了。

合理的构造，将**同时**奇妙地使用两个不等号。去分母，构造：

$$\left( \frac{1}{2} \sqrt{a_1 b_1} - \sqrt{\frac{a_1^3}{b_1}} \right) \left( 2 \sqrt{a_1 b_1} - \sqrt{\frac{a_1^3}{b_1}} \right) \leq 0 \quad (*)$$

化简，得

$$a_1 b_1 + \frac{a_1^3}{b_1} \leq \frac{5}{2} a_1^2$$

那么...

$$\frac{a_1^3}{b_1} \leq \frac{5}{2} a_1^2 - a_1 b_1$$

好吧，仿照以上过程，写出  $i$  时情况：

$$\frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{5}{2} a_i^2 - a_i b_i$$

现在已经胜利在望了。那么现在的目的就是 $a_i b_i$ 转化为 $a_i^2 + b_i^2$ 。

那么，用基本不等式不就行了， $a_i^2 + b_i^2 \geq 2a_i b_i$ ，那么 $-a_i b_i \geq \frac{1}{2}(a_i^2 + b_i^2)$ .....

一脸懵逼。不等号方向反了！可恶！

难道要放弃了吗？不，再思考一下：构造（\*）号式子后，化简，根号就被平方掉了。那么，能不能“故伎重演”呢？

深思之后，依然选择以 $\frac{a_i}{b_i}$ 的范围为中心。

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_i}{b_i} \leq 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}b_i - a_i\right)(2b_i - a_i) \leq 0 \Rightarrow a_i b_i \geq \frac{2}{5}(a_i^2 + b_i^2) !!!$$

成功了！

$$\frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{5}{2}a_i^2 - a_i b_i \leq \frac{5}{2}a_i^2 - \frac{2}{5}(a_i^2 + b_i^2)$$

使  $i$  遍历 1 至  $n$ ，叠加这  $n$  个式子，得

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{21}{10} \sum_{i=1}^n a_i^2 - \frac{2}{5} \sum_{i=1}^n b_i^2$$

因为

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$$

所以

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{17}{10} \sum_{i=1}^n a_i^2$$

得证!!!

此时解决最后一个问题：等号成立条件。结合(\*)式子，由(#)号式子得，只要不等号一端等号成立，结论等号即成立。（下面的不等式是与此相同的。）意味着：

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{1}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ 或 } \frac{a_i}{b_i} = 2 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

为等号成立的充要条件。

就这样，我们在曹老师的带领下，在 15min 内完成了此题。现在回想，回味无穷...

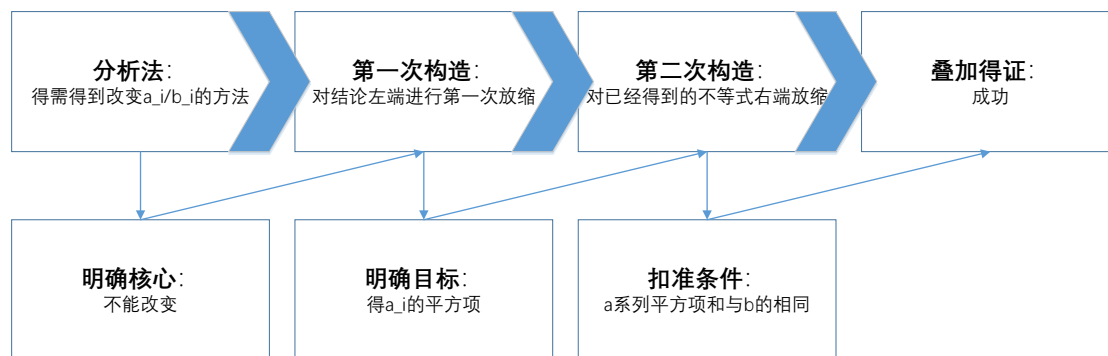


图 17

在以上的题目中，我们也见到了构造法的身影。确实，灵光一现的构造可以成为解题一大关键。

而需要注意的是，构造是建立在已知条件的基础之上的。要构造一个为条件量身定做的东西，最终与分析法结果对接。

## 5. 分析法——提供思路的信号灯

10. 如图 3,  $M, N$  分别为锐角  $\triangle ABC$  ( $\angle A < \angle B$ ) 的外接圆  $\Gamma$  上弧  $BC$ 、 $AC$  的中点。过点  $C$  作  $PC \parallel MN$  交圆  $\Gamma$  于点  $P$ ,  $I$  为  $\triangle ABC$  的内心, 连接  $PI$  并延长交圆  $\Gamma$  于  $T$ 。
- (1) 求证:  $MP \cdot MT = NP \cdot NT$ ;
  - (2) 在弧  $AB$  (不含点  $C$ ) 上任取一点  $Q$  ( $Q \neq A, T, B$ ), 记  $\triangle AQC$ ,  $\triangle QCB$  的内心分别为  $I_1, I_2$ , 求证:  $Q, I_1, I_2, T$  四点共圆。

复杂的图形，阻挡不了前进的决心。

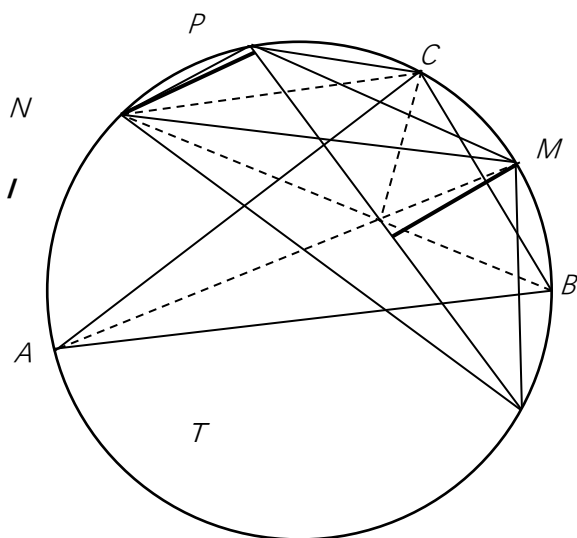


图 18

**证明** (1) 做平面几何题时，最常用的做法就是分析法。

那么，为了证明  $MP \cdot MT = NP \cdot NT$ , 我们可以证明  $\frac{1}{2} MP \cdot MT \sin \angle PMT = \frac{1}{2} NP \cdot$

$NT \sin \angle PNT$ , 因为  $\angle PMT + \angle PNT = 180^\circ$ ,  $\sin \angle PMT = \sin \angle PNT$ 。也就是证明  $S_{\triangle PMT} = S_{\triangle PNT}$ 。由于同底  $PT$ , 所以只要证明两三角形的高（粗线）相等即可。由图可知，只要证明:  $PT$  平分  $MN$ 。

证明平分的常用方法之一，就是在平行四边形中证明。这时，我们又看到了一个平行四边形  $PNIM$ 。那么就意味着，只要证明  $IM = NP$  且  $PM = NI$  即可（或者证明  $IM \parallel NP$  且  $PM \parallel NI$  亦可）。

为了证明这一点，我们需要下面的引理。

**引理（内心定理）** 如图 4,  $\triangle ABC$  的外接圆为  $X$ ,  $\triangle ABC$  的内心为  $I'$ , 连接  $AI', BI', CI'$ , 并延长  $AI'$  交圆  $X$  于  $D$ 。连接  $BD, CD$ 。

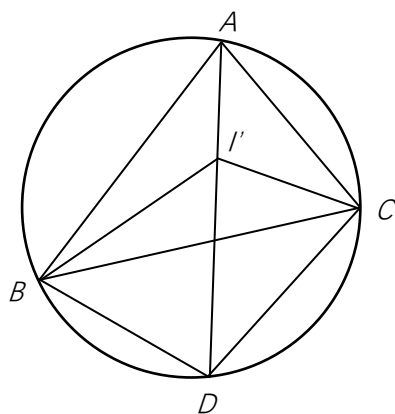


图 19

则  $BD=I'D=DC$ 。

继续证明未完成的部分。

$\because PC \parallel MN$  (已知), 且  $P, C, M, N$  四点共圆。

$\therefore$  四边形  $PCMN$  为等腰梯形。

$\therefore NP=MC, PM=NC$ 。

又  $\because I$  是  $\triangle ABC$  的内心。

$\therefore IM=MC=NP$  (内心定理, 图画失误了)

(\*)

同理,  $IN=NP=MP$ 。

$\therefore$  四边形  $PNIM$  为平行四边形。得证。

从(\*)得到的教训是: **平面几何题, 作图一定要精确**。由于是电脑作图, 不太方便, 难以做到完全精确, 再次抱歉。

(2) 分析法为上。先做图。

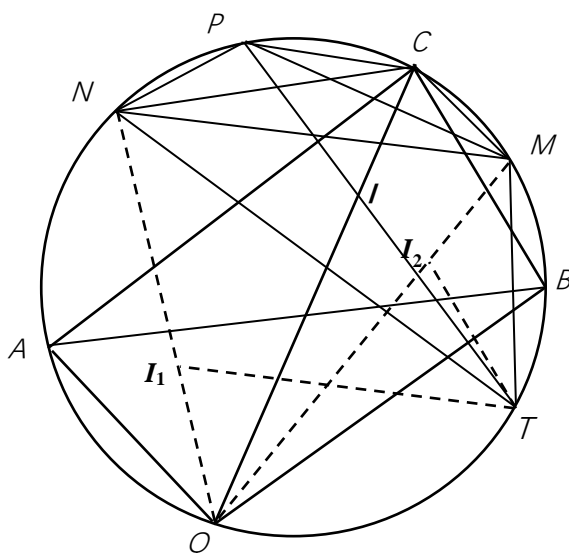


图 20

证明四点共圆的一个方法: 证明  $Q, T$  关于  $I_1, I_2$  的视角相同, 即  $\angle I_1 Q I_2 = \angle I_1 T I_2$ 。

由于  $M, N$  分别弧  $BC, AC$  的中点,

所以 由内心的定义得,  $N, I_1, Q$  共线,  $M, I_2, Q$  共线。

则  $\angle I_1 Q I_2 = \angle N Q M = \angle N T M$  (圆周角相等)  $= \angle N T I_2 + \angle I_2 T M$  (拆分)。

而  $\angle I_1 T I_2 = \angle I_1 T N + \angle N T I_2$  (还是拆分)。

为证其相等, 则证  $\angle I_2 T M = \angle I_1 T N$ 。

通过图形发现, 有两个三角形好像相似。

那么则证:  $\triangle I_1 N T \sim \triangle I_2 M T$

由于  $\angle I_1 N T = \angle I_2 M T$  (圆周角相等)

则证  $\frac{I_1 N}{N T} = \frac{I_2 M}{M T} \Leftrightarrow I_1 N \cdot M T = I_2 M \cdot N T$

由内心定理得  $I_1 N = N C$  由等腰梯形的对角线相等得  $N C = P M$

则  $I_1 N = P M$ 。

同理  $I_2 M = N P$ 。

胜利在望! 为什么?

因为  $I_1 N \cdot M T = I_2 M \cdot N T \Leftrightarrow P M \cdot M T = N P \cdot N T$  ((1) 已证!!!) 得证。

注意运用上一问的条件, 有时候要向上一问的方向靠拢, 最终得证!

“平面几何考的不是知识, 而是技巧。”曹老师说道。

确实是“巧几何, 笨代数”呢~

## 6. 数学归纳法——蝴蝶效应承认真理

(继续 3. 的证明) 与探究法配合食用更佳。

现在需要证明:

$$f'_{2k-1}(x) > 0 \quad f_{2k}(x) > 0$$

已经证明起始值的情况成立。这一步对于数学归纳法而言不可省略, 它是基础。

那么 如果

$$f'_{2k-1}(x) > 0 \quad f_{2k}(x) > 0$$

是成立的。

那么 只要证明

$$f'_{2k+1}(x) > 0 \quad f_{2k+2}(x) > 0$$

也是成立的。

这也是第二数学归纳法的类型 (或者说类似, 因为类型不同, 但又有所联系)。证明两种情况同时成立, 一旦同类型的都后推一项依然成立, 则命题成立。

那么先证明  $f_{2k+1}(x)$  是递增的。

$$f'_{2k+1}(x) = f_{2k}(x) > 0, \text{ 正确。}$$

现在要求  $f_{2k+2}(x)$  的最小值, 那么我们就需要证明①  $f_{2k+2}(x)$  也是单调递增的, ② 某处值为 0。由于  $f'_{2k+2}(x) = f_{2k+1}(x)$ , 这意味着我们必须找到  $f_{2k+1}(x)$  的零点  $x_{2k+1}$ , 并证明它是小于 0 的。

$$f_{2k+1}(0) = 1 > 0$$

由零值定理, 我们必须找到一个函数值小于 0 的点确定零点。

由于这个值要取得好算, 故要取  $-(2k+1)$ , 等于阶乘项中的最大值的绝对值。

$$f_{2k+1}(-(2k+1))$$

$$= 1 - (2k+1) + \frac{(2k+1)^2}{2} - \frac{(2k+1)^3}{6} + \cdots + \frac{(2k)^{2k}}{(2k)!} - \frac{(2k+1)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

现在, 为了得到此值与 0 的关系, 我们需找到通项与 0 的关系。





通项:

$$\frac{(2k+1)^{2n}}{(2n)!} - \frac{(2k+1)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{(2k+1)^{2n}(2n-2k)}{(2n+1)!} \leq 0 \quad (n \leq k)$$

则  $f_{2k+1}(-(2k+1)) < 0$

故  $f_{2k+1}(x)$  在  $(-(2k+1), 0)$  上有唯一根。此根定为  $x_{2k+1}$ 。

则  $f'_{2k+2}(x) = f_{2k+1}(x)(x \in (-\infty, x_{2k+1})) < 0$ ,  $f'_{2k+2}(x)(x \in (x_{2k+1}, +\infty)) < 0$ 。

则  $f_{2k+2}(x)_{\min} = f_{2k+2}(x_{2k+1}) = f_{2k+1}(x_{2k+1}) + \frac{(x_{2k+1})^{2k+2}}{(2k+2)!} = 0 + \frac{(x_{2k+1})^{2k+2}}{(2k+2)!} > 0$

证毕。

以上证明难在零点的证明。说实在的，有时候就是靠灵光一现，或靠多次尝试。

但是，为了解释这个取值，还有一种思想能说明问题，就是**化归思想**。所谓化归，就是想方设法把复杂的问题简单化。我想，这也可以理解为一种原则：**懒人原则**。越简单越怎么做，这就像一些创新，就是怎么方便怎么做。

11.  $x \in R, x > 0, n \in N_+$ , 求证:

$$[nx] \geq \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \cdots + \frac{[nx]}{n}$$

求证等式中含有高斯函数的加减问题，那么就像证明绝对值不等式时有三角不等式，高斯函数在此方面也有一个定理。

**定理**

$$[\alpha] + [\beta] \leq [\alpha + \beta]$$

此时就想了，对于不等式，我们常用的方法是放缩。但此时，有着高斯函数阻隔，用放缩是不行的。

但是，别忘了，对于关于正整数一类命题的证明，我们还有一种方法——**数学归纳法**。

在学习第二数学归纳法的时候，书上说道：

- (1) 先证  $n=1, 2$  时命题成立；假设  $n=k, k+1$  时命题成立，再证明  $n=k+2$  时命题也成立（有时称之为跨度为 2 的数学归纳法）。
- (2) 当  $n=1$  时，命题成立；假设对一切小于  $n$  的正整数命题成立，能够推出（证明） $n$  时命题也成立。

尽管书上说到“偶尔也要用到第二数学归纳法。”“第（1）种情况较常见。”但并不意味着第（2）种情况不能成立。

你说这里，若用第一数学归纳法，或用第二数学归纳法（1），要不然不能得证，要不然会麻烦死。为什么不试试**第二数学归纳法（2）**呢？

**证明** 令  $A_n = \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \cdots + \frac{[nx]}{n}$  且  $A_n = A_{n-1} + \frac{[nx]}{n}$ （承认递推关系）。

$$\begin{aligned} \text{则} \quad nA_n &= nA_{n-1} + [nx], \\ (n-1)A_{n-1} &= (n-1)A_{n-2} + [(n-1)x], \\ &\dots \\ 2A_2 &= 2A_1 + [2x]. \end{aligned}$$

将以上  $n-1$  个式子相加，得

$$nA_n = A_{n-1} + A_{n-2} + \cdots + A_1 + A_1 + [2x] + \cdots [(n-1)x] + [nx]$$

假设  $A_k \leq [kx]$  对  $k = 1, 2, \dots, n-1$  都成立，那么

$$\begin{aligned} nA_n &\leq [(n-1)x] + [(n-2)x] + \cdots + [x] + [x] + [2x] + \cdots + [(n-1)x] + [nx] \\ &= ([ (n-1)x ] + [x]) + ([ (n-2)x ] + [2x]) + \cdots + ([x] + [(n-1)x]) \\ &\quad + [nx] \end{aligned}$$

由定理得

$$\leq [nx] + [nx] + \cdots [nx] = n[nx]$$

则  $A_n \leq [nx]$ ，成立！

命题得证！

这一题是对第二数学归纳法第 (2) 方式的典型例子。可见，这尽管是 IMO 的题目，知识并不新，考的是你是否会用。

## 7. 数形结合——数字背后的图形

12. 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  对应的边分别为  $a, b, c$ 。  $a + b + c = 16$ ，求：

$$b^2 \cos^2 \frac{C}{2} + c^2 \cos^2 \frac{B}{2} + 2b \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2}$$

此题用代数法是可以完成的。但是在用代数法做的时候，首先就把  $\cos^2 \frac{C}{2}$  拆成了

$(1 + \cos C)$ ，这时候就要思考了，这让后面的  $\cos \frac{C}{2}$  情何以堪？那么又需要将  $\sin \frac{A}{2}$  拆成

$\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ ，得到平方项，接着就要换成边。

此时，你必须要意识到**第零余弦定理（又称射影定理）**： $b \cos C + c \cos B = a$ 和其三种形式，否则就会陷入化成边炒鸡麻烦的化简，甚至就此放弃。

但是，代数法确实是可以完成的。特别是当你没什么头绪的时候。

不妨换个思路。命题者本意或许并不是这样的。你要猜猜他的心思。

**解** 这时，就跟着题干的节奏，画出了一个  $\triangle ABC$ ...

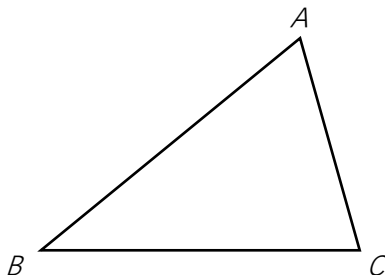


图 21

接着面对这个式子，你就尝试着组合一些东西：

$$\left(b \cos \frac{C}{2}\right)^2 + \left(c \cos \frac{B}{2}\right)^2 + 2\left(b \cos \frac{C}{2}\right)\left(c \cos \frac{B}{2}\right) \sin \frac{A}{2}$$

沉思了一会儿，然后灵光一现，顺手写下：

$$\left(b \cos \frac{C}{2}\right)^2 + \left(c \cos \frac{B}{2}\right)^2 - 2\left(b \cos \frac{C}{2}\right)\left(c \cos \frac{B}{2}\right) \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right)$$

这不是余弦定理嘛！

接着就对那个三角形构造了：

延长  $BC$  至  $E$ ，使  $AC = CE = b$ ，连接  $AE$ ，你发现这时就构造出了  $\frac{C}{2}$ 。而

$b \cos \frac{C}{2}$  就是  $AC$  在  $AE$  上的投影  $AM$ 。那左边的  $D$ ， $N$  也用同样的处理手段。

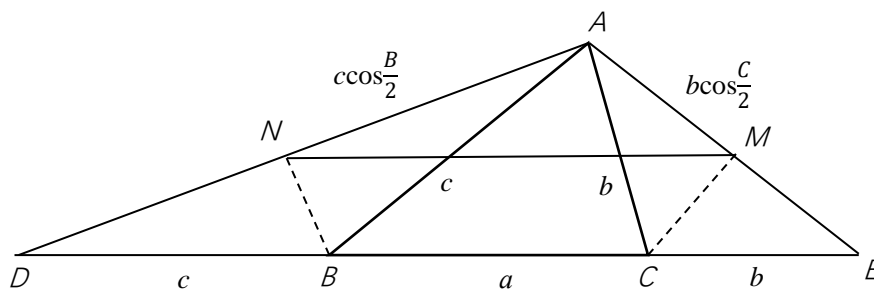


图 22

连接  $MN$  后，奇妙的事情就发生了。 $\angle MAN = \frac{B}{2} + A + \frac{C}{2} = \frac{A+B+C}{2} + \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} +$

$\frac{A}{2}!!!$

构造成功！

$$\text{原式} = MN^2 = \left[\frac{1}{2}(a+b+c)\right]^2 = \frac{1}{4}(a+b+c)^2 = 64. \quad (\text{中位线定理})$$

那么对于这样的题目，就要找到一些特征，**理解命题者的意图**，才能找到通道。顺着题目做下去也是可以的！毕竟题目中处处暗示，别错过了。

13.  $p, q \in (0, 1)$ ,  $p + q > 1$ ,  $p^2 + q^2 \leq 1$ 。求

$$f(x) = (1-x)\sqrt{p^2 - x^2} + x\sqrt{q^2 - (1-x)^2}$$

在  $[1-q, q]$  上的最大值。

有了上一题的体验后，是否对这一题有了些许想法？见到根号，是不是直接平方？是不是想想构造、距离这一类的……

停，你说到距离！

这个想法将是敲门砖。

**解** 画  $AB=1$ 。作  $BC=\sqrt{q^2 - (1-x)^2}$ ，作  $AD=\sqrt{p^2 - x^2}$ 。( $BC \perp AB$ ,  $AD \perp AB$ )

取  $E$  使得  $AE=x$ ,  $BE=1-x$ 。连接  $DE$ ,  $CE$ ,  $CD$ 。

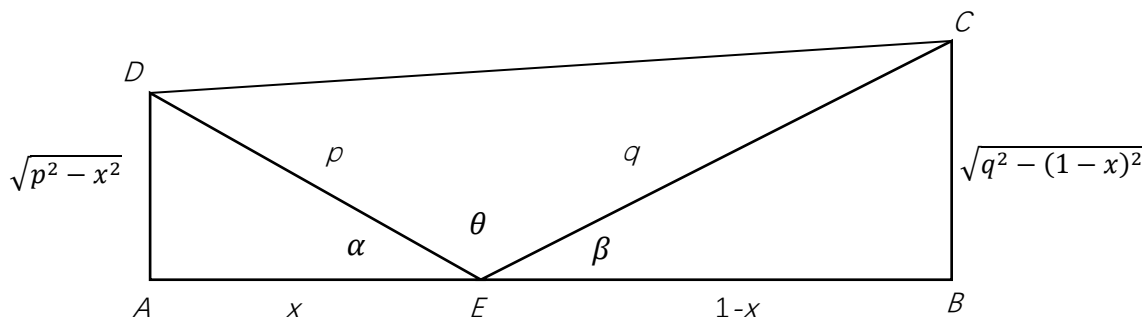


图 23

设  $\angle AED = \alpha$ ,  $\angle BEC = \beta$ ,  $\angle CED = \theta$ 。设出角度将更容易地解决问题。

由图形得：

$$x = p \cos \alpha \quad 1-x = q \cos \beta \quad \sqrt{p^2 - x^2} = p \sin \alpha \quad \sqrt{q^2 - (1-x)^2} = q \sin \beta$$

则原式变为

$$f = q \cos \beta p \sin \alpha + p \cos \alpha q \sin \beta = pq \sin(\alpha + \beta) = pq \sin \theta$$

这是  $f$  的实质。

而

$$\cos \theta = \frac{p^2 + q^2 - CD^2}{2pq} \leq \frac{p^2 + q^2 - 1}{2pq} \leq 0$$

上面是因为

$$CD \geq 1, p^2 + q^2 \leq 1 \text{ (已知)}。$$

所以

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &\geq \frac{(p^2 + q^2 - 1)^2}{4p^2 q^2} \\ \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \geq \sqrt{1 - \frac{(p^2 + q^2 - 1)^2}{4p^2 q^2}} \end{aligned}$$

当且仅当  $CD=1$  时，即  $BC=AD$  时，即  $x = \frac{p^2+1-q^2}{2} \in [1-q, p]$  时， $f$  取得最

大值  $\sqrt{p^2 q^2 - \frac{1}{4}(p^2 + q^2 - 1)^2}$ 。(由图可知， $p+q > 1$  是成立的，要不然，你由等号成立条件解出  $p, q$  的关系，亦是成立的。)

此题当然用代数换元也可做，就是要注意，像这个几何图形一样，把四个部分全部换成不同的元，并声明新元之间的关系，再做。但数形结合是不是显得更有意思呢？

数形本一家。

正如著名数学家拉格朗日所言：“代数与几何在它们各自的道路上前进的时候，它们的进展是缓慢的，应用也很有限，但当这两门学科结合起来之后，它们各自向对方吸取新鲜的活力，从此，便以很快的速度向着完美的境地飞跑。”（朱华伟、程汉波, 2016）

而“巧几何，笨代数”也。

这句话可以细细斟酌一下。这里的“巧”指的是几何问题的方法“巧妙”，“笨”指的是代数问题的方法就是计算，不能怕麻烦。通过比较，将发现：为了做出一道题， $T(\text{Thinking}, \text{思考}) + D(\text{Do}, \text{做}) = k(\text{定值})$ 。只有提前思考、准备充分、为后面的计算铺好道路，做的才会更巧妙，更有效。这是我自己总结的呢~

## 8. 转换——看清题目的本质

14.  $x, y \in R$ ,  $x - 4\sqrt{y} = 2\sqrt{x-y}$ , 则  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

这个式子，就现在的状态来看，简直无从下手。因为它的实质隐藏的太深了。  
那么就把**实质**抓出来！

$$\text{令 } a = \sqrt{y} \geq 0, b = \sqrt{x-y} \geq 0.$$

则  $x = a^2 + b^2$ , 一定不要忘了新元之间的关系和与所求的关系。

则原式立即转化为

$$a^2 + b^2 - 4a = 2b \Rightarrow (a-2)^2 + (b-1)^2 = 5$$

数形结合就得范围，但是要小心哦~

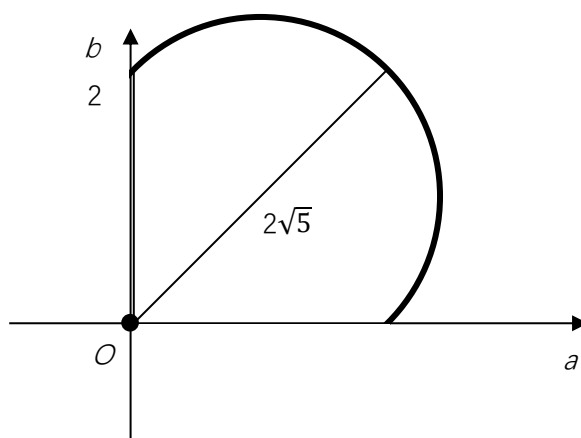


图 24

则  $x \in \{0\} \cup [4, 20]$ 。

0!!! 忘了没？这题后面不是难，而是拿不到分。

再回到开始，我们发现**换元（转换）**让我们看到了本题的实质。借用另一个老师的话说，“**换元，是因为命题者用错了符号，你要用正确的符号表示出来。**”

转换的思想实际上上面已经用到不少了，例如数形结合就是把数字转化成了图形。转换就是对无从下手问题的杀手锏，把它转换成已知问题，从而有所解决。

## 9. 算两次——横着竖着都是二

15.  $P_n(k)$  是  $\{1, 2, \dots, n\}$  的保持  $k$  个元素不动的排列总数。

求证：

$$\sum_{k=1}^n k P_n(k) = n!$$

证明

由题设知

$$P_n(k) = C_n^k P_{n-k}(0)$$



意思就是  $k$  个元素不动的排列总数就等于  $n$  个元素选出  $k$  个元素的组合数乘以剩余  $n-k$  个元素都动的排列数。

得到的这个等式可用作条件，用组合恒等式继续证明，最终得证。

注意，这里就用到了**算两次**思想。关键只用在这么一点上是多么不爽，若全局都用算两次思想呢？

这是有点像**贡献法**的方法。

我们用 **1** 表示固定，0 表示不固定。

表 4

元素		1	2	...	$n-1$	$n$
方法 ≧   不动元素数	(0)	0	0	0	0	0
	1	<b>1</b>	0	0	0	0
		0	<b>1</b>	0	0	0
		.....				
		0	0	0	<b>1</b>	0
		0	0	0	0	<b>1</b>
	2	<b>1</b>	<b>1</b>	0	0	0
		.....				
		<b>1</b>	0	0	<b>1</b>	0
		<b>1</b>	0	0	0	<b>1</b>
		0	<b>1</b>	3-1 余为 0	0	0
		.....				
	.....	.....	.....	.....	.....	.....
	$n$	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

我们以**纵列**为本计数：由于固定任意一个元素，其余的元素随意动有  $(n-1)!$  种方法，故共有  $n \times (n-1)! = n!$  个 **1**。或者说**元素固定总次数是  $n!$** 。

现在，我们以**横行**为本计数： $k=1$  时，有  $P_n(1)$  个 **1**； $k=2$  时，有  $2 \times P_n(2)$  个 **1**；.....； $k=n$  时，有  $n \times P_n(n)$  个 **1**。则**元素固定总次数是**

$$\sum_{k=1}^n kP_n(k)$$

**公理（笑）** 一堆可数的东西，不论你怎样数，只要数的正确，数完后的个数总是相同的。

⇒ 这个表格中加粗的 **1** 的个数是一定的，所以不论纵着数，还是横着数，其个数总是相同的。得到结论而证毕：

$$\sum_{k=1}^n kP_n(k) = n!$$

模型的设计 + 算两次思想的应用 = 此题的攻略。

- (1) 它是  $n$  位数。
- (2) 它的每位数都不是 0。
- (3) 它能被其各位数字之和整除。

**证明**      **警告：**题是短小而精悍的。

(i) 现在先用最直接的思路思考, 什么样的数简单而使其成立呢?

什么东西能和各位数字之和联系起来呢？3 的倍数！所以根据小学知识 111 是成立的。那么：

[illegible]

那么，它们有什么特征呢？

-位数是 3 的整数次幂。

似乎： $3^n | R_{3^n} = \overline{111 \cdots 11}$  ( $3^n$ 个1)。(换元(转换) + 构造)

这是一个惊人的结论！那么，我们用数学归纳法证明一下吧。

引理  $3^n | R_{3^n} = \overline{111 \cdots 11} \quad (3^n \uparrow 1)$

**证明** 当  $n = 1$  时, 容易证得, 成立。

假设当  $n = k$  时成立, 即  $3^k | R_{3^k} = \frac{1}{9}(10^{3^k} - 1)$ 。

则

$$\begin{aligned} R_{3^{k+1}} &= \frac{1}{9}(10^{3^{k+1}} - 1) = \frac{1}{9}[(10^{3^k})^3 - 1] = \frac{1}{9}(10^{3^k} - 1)(10^{2 \times 3^k} + 10^{3^k} + 1) \\ &= R_{3^k}(10^{2 \times 3^k} + 10^{3^k} + 1) \end{aligned}$$

(化归)

因为  $3 \mid (10^{2 \times 3^k} + 10^{3^k} + 1) = \overline{100 \cdots 0100 \cdots 01}$  (小学知识)

$$\text{且} \quad 3^k | R_{3^k} = \frac{1}{9} (10^{3^k} - 1)$$

则  $3^{k+1} | R_{2k+1}$  成立。

命题成立。(数学归纳法)

(ii) 翻越一座山，现在要翻另一座山了。

事实上 当  $R_{3^n} = \overline{999 \dots 99}$  ( $3^n$ 个9) 引理也是成立的。

**铺垫** 若有某个自然数  $k \geq \frac{n}{2}$ , 设  $j = n - k$ 。

则用任意的  $j(1 \leq j \leq k)$  位数  $\overline{a_1 a_2 \cdots a_j}$  乘以  $\overline{99 \cdots 9}$  ( $k$  个 9) 得

$$\overline{a_1 a_2 \cdots a_j} \times \overline{99 \cdots 9} = \overline{a_1 a_2 \cdots a_j} \times (10^k - 1) = \overline{a_1 a_2 \cdots a_j 00 \cdots 0 (k \text{ 个})} - \overline{a_1 a_2 \cdots a_j}$$

$$= \overline{a_1 a_2 \cdots a_{j-1} (a_j - 1) 99 \cdots 9 (k - j \text{ 个}) (9 - a_1) \cdots (9 - a_{j-1}) (10 - a_j)}$$

(高中的减法)

这是一个  $j + k - j + j = j + k = n$  位数。(强而有力的构造)

这个构造将是一个很大的铺垫。

当  $n = 3^l, l \in N$  时, 证明是存在的。

当  $3^l < n \leq 2 \cdot 3^l, l \in N$  时:

设  $k = 3^l, j = n - 3^l$ , 任意的  $\overline{a_1 a_2 \cdots a_j}$  如  $11 \cdots 12$ , 根据铺垫得:

$$\overline{11 \cdots 12 (j \text{ 位})} \times \overline{99 \cdots 9 (k \text{ 位})} = \overline{11 \cdots 1 (j \text{ 个}) 99 \cdots 9 (k - j \text{ 个}) 88 \cdots 8 (j \text{ 个})}$$

各位数字和为  $9k = 9 \cdot 3^l$ , 而看前面的因数, 由于  $k \mid \overline{99 \cdots 9 (k \text{ 位})} \Rightarrow$

$3^l \mid \overline{11 \cdots 1 (3^l \text{ 位})}$  在 (i) 的基础上容易证得是成立的。所以此  $n$  位数符合要求而存在。

当  $2 \cdot 3^l < n \leq 3^{l+1}, l \in N$  时, 同理可证, 是存在的。

综上所述, 命题得证!!!!!!

## 11. 放松一下——题目有时也是那么简单

17.  $a, b \in R, f(x) = ax + b \text{ et. } \forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq 1$ 。

则  $ab$  的最大值是\_\_\_\_\_。

为了能够有所思考, 下面对思想做一次宏观的总结。答案在下一页。

## 12. 总结——思想的火花 点亮黑暗的夜晚

以上, 我们系统地对数学竞赛题目的重要思想, 按着例题, 进行了详细而透彻的总结, 并体验了数学思想对于解题的帮助作用之大。

但是, 我们在体验各个思想的作用时, 也不能忽略它们互帮互助的作用。在一些复杂的题目面前, 有些思想就要同时使用才有效果。

说数学思想是什么。它是一个抽象的东西, 但是暗示着解题的方向, 提高数感, 挖掘题目背后的秘密。我们需要一些思想, 把这些短小精悍的题目扩大化, 而我们亦需要一些思想, 把这些探索得到的宝藏炼成一颗璀璨夺目的宝石, 得到题目所要的结果。

思想, 就是一个模板, 就是一个平台, 一个宏大的平台。思想是帮助你想到解法的途径, 是你脑海中对题目解答抽象化的精华。数学思想在做题前帮助想到途径, 在做题中固定前进的方向, 在做题后升华对整个题目的理解。

理解一个个题目的做题思想, 就像点亮一把把炙热的火把, 将在未来的解题中照亮黑暗的夜晚!



说好的答案在这里。

由题目得 $|f(1)| = |a + b| \leq 1$

则由基本不等式得 $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{1}{4}$

当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时，等号成立。

平面区域呢？函数关系呢？

有张有弛，方能解决“难题”。

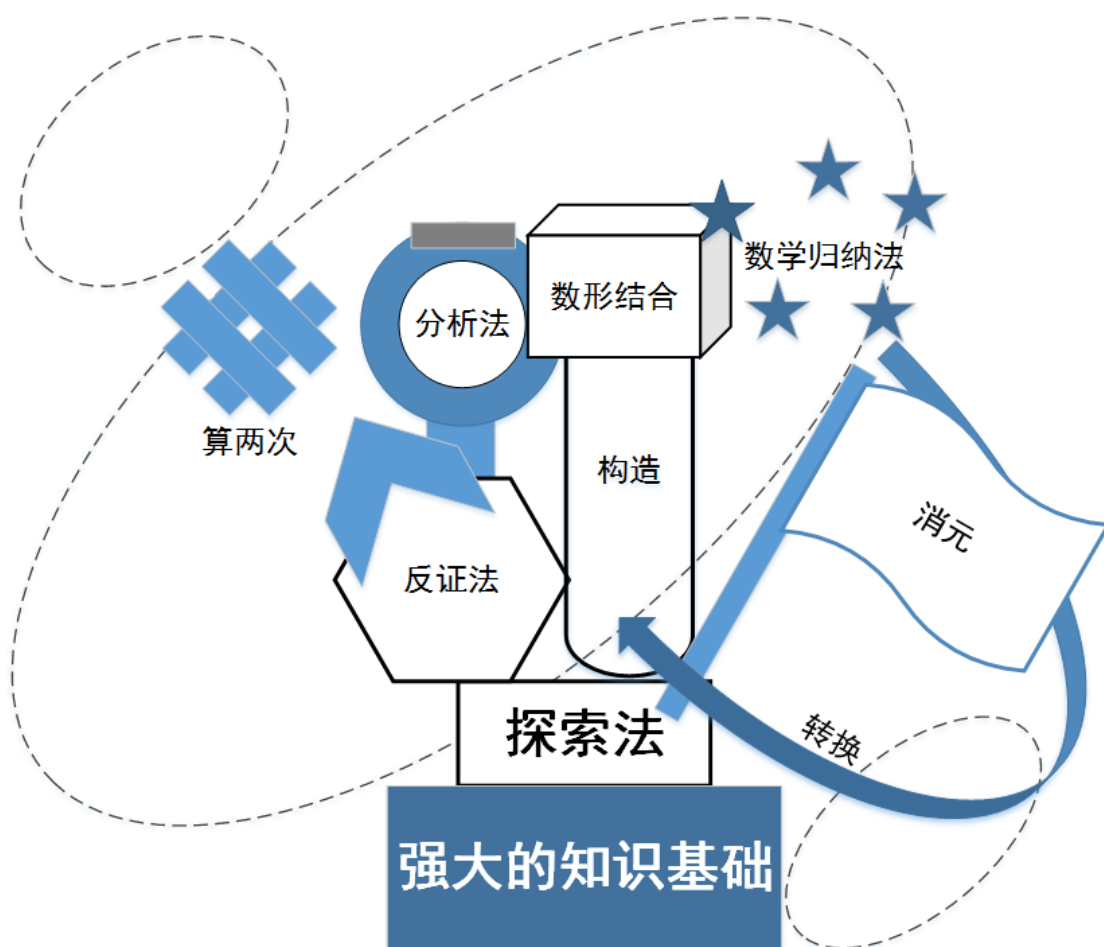


图 25

# 数论

陈永高 (2017.2) 卞老师 (2017.8)

数论里的问题大部分需要构造。关于用构造法解题的议论见下文。

## 1. 二项展开

对于给定的  $a, T$ ,  $(Tk + a)^m = T \binom{K}{\text{因式}} + a^m$ 。

**【例 1】** 求证:  $\exists$  无穷多个  $x \in \mathbb{Z}$ , 使得  $x^5 + (x + 1)^4$  为合数。

**证明** (法一, 二项构造法) **引理** 对于给定的  $a, T$ ,  $(Tk + a)^m = T \binom{K}{\text{因式}} + a^m$ 。

则令  $x = Tk + a$ ,  $x^5 + (x + 1)^4 = (Tk + a)^5 + (Tk + a + 1)^4 = T \binom{W}{\text{因式}} + a^5 + (a + 1)^4$ 。

//在草稿纸上进行

令  $a = 1$ ,  $a^5 + (a + 1)^4 = 17$ , 则  $T = 17$  时, 原式为合数

当  $T = a^5 + (a + 1)^4$  时, 式为合数, 且有无穷多个。  $\square$

(法二, 齐次构造法) **引理**  $x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$

取  $x + 1 = m^5$ , 则  $x^5 + (x + 1)^4 = x^5 + (m^4)^5$ , 由上式知, 这是合数。  $\square$

**【例 2】** 设  $a, b \in \mathbb{N}_+$ ,  $b > 2$ , 求证:  $(2^b - 1) \nmid (2^a + 1)$ 。

**证明** 令  $a = bk + r$ ,  $0 \leq r < b$ ,  $k, r \in \mathbb{Z}$ . 则

$$\begin{aligned} 2^a + 1 &= 2^{bk+r} + 1 = (2^b - 1 + 1)^k 2^r + 1 = \left[ (2^b - 1) \binom{T}{\text{因式}} + 1 \right] 2^r + 1 \\ &= (2^b - 1) \binom{T}{\text{因式}} 2^r + 2^r + 1 \end{aligned}$$

一方面, 为了使  $(2^b - 1) \mid (2^a + 1)$ , 则  $(2^b - 1) \mid (2^r + 1)$ , 则  $2^b - 1 \leq 2^r + 1$ 。

另一方面, 由于  $r < b$ , 由于整数的离散性,  $r \leq b - 1$ , 则

$2^r + 1 \leq 2^{b-1} + 1 < 2^b - 1 (b > 2)$ 。这是矛盾的。

所以,  $(2^b - 1) \nmid (2^a + 1)$ 。

## 2. 费马小定理

**Fermat 小定理**

如果  $p$  为素数,  $(a, p) = 1$ , 则  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 。

**【例 3】** 求证: 存在无穷多个  $n \in \mathbb{N}$ , 使得  $10^n + 3$  是合数。

(系列一) 拆项以合并,  $10^n + 3 = 10^n - 10 + 13 = 10(10^{n-1} - 1) + 13$ , 根据 Fermat 小定理可得

$$13 \mid a^{12} - 1, 13 \nmid a$$

则取  $10^{n-1} = a^{12}$ , 即  $n - 1 = 12k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , 故  $n = 13, 25, \dots$  无穷多个。

(系列二) “醉翁之意不在酒, 在乎山水之间也。”由上文可知,



$$13|10^{13} - 10 \Rightarrow 13|10^{13} + 3$$

现在寻找第 2 个, 由上式的启发

$$10^n + 3 = 10^n - 10^{13} + 10^{13} + 3$$

我们取  $n = 13^2$ , 得

$$13|10^{13^2} + 3 = 10^{13}(10^{13} - 1) + 10^{13} + 3$$

那么,  $n = 13^k$

$$13|10^{13^k} + 3 = (10^{13^k} - 10^{13^{k-1}}) + (10^{13^{k-1}} - 10^{13^{k-2}}) + \cdots + (10^{13} + 3)$$

拆 0 这个项有重大意义。

□

### 3. 阶

设  $m \in \mathbb{N}, m > 1, a \in \mathbb{Z}, (a, m) = 1$ , 称满足  $m|a^r - 1$  ( $a^r \equiv 1 \pmod{m}$ ) 的最小正整数  $r$  为  $a$  模  $m$  的阶。

□ 阶一定存在。且  $r < m$ 。(阶的存在性)

**证明** 设  $a^k = mq_k + r_k, 0 \leq r_k < m$ 。考虑  $r_0, r_1, \dots, r_{m-1}$  共  $m$  个数, 由于它们均是 1 至  $m-1$  中的正整数, 由抽屉原理知, 必有两数相同, 设其为  $r_i = r_j, i > j$ 。

$$a^j(a^{i-j} - 1) = a_i - a_j = m(q_i - q_j)$$

由  $(a, m) = 1$  得  $m|(a^{i-j} - 1)$ , 而  $1 \leq i - j \leq m - 1 < m$ , 所以阶一定存在, 为  $i - j$ , 且小于  $m$ 。

□

□ 存在  $n$  使得  $m|a^n - 1 \Leftrightarrow r|n$ 。(阶的整除性)

**证明** 先证充分性。  $n = rk, k \in \mathbb{Z}, a^n - 1 = a^{rk} - 1 = (a^r - 1)(\dots)$ , 由于  $m|a^r - 1$ , 故  $m|a^n - 1$ 。

再证必要性。令  $n = rq + s, q, s \in \mathbb{Z}, 0 \leq s < r$ 。而

$$a^n - 1 = a^{rq+s} - 1 = (a^{rq} - 1)a^s + a^s - 1$$

由充分性已得,  $m|a^{rq} - 1$ , 而  $m|a^n - 1$ , 故  $m|a^s - 1$ , 由阶的定义知,  $s=0$ 。□

【例 4】设  $m > 1$ , 求证:  $m \nmid (2^m - 1)$ 。

本题可用多种方法解决, 可长可短。但核心是反证法。

**证明** (法一, 最小数原理) 假设存在  $m > 1$ , 使  $m|(2^m - 1)$ 。

使用隐形归纳(最小数原理)。设  $m_0$  为这样的  $m$  中最小的一个, 则  $m_0|(2^{m_0} - 1)$ 。

设 2 模  $m_0$  的阶为  $r$ , 则  $m_0|(2^r - 1)$ 。则  $r|m_0$ 。

则  $r|(2^r - 1)$ , 而  $r > 1$ 。

一方面, 由  $m_0$  为这样的  $m$  中最小的一个,  $r \geq m_0$ 。

另一方面, 由阶的性质知,  $r < m_0$ 。

这是矛盾的。故  $m > 1, m \nmid (2^m - 1)$ 。

□

(法二, Fermat) 假设存在  $m > 1$ , 使  $m|(2^m - 1)$ 。

设  $m$  的最小素因子为  $p, p|m$ , 则  $p|(2^m - 1)$ 。

由 Fermat 小定理知,  $p|(2^{p-1} - 1)$ 。

设 2 模  $p$  的阶为  $r. r|m, r|p-1$ , 而  $(m, p-1) = 1$ 。



事实上,  $r=1$ 。若不然,  $r>1$ , 设  $q$  为  $r$  的一个素因子, 则  $q|m$ , 由于  $m$  的最小素因子为  $p$ , 故  $q \geq p$ 。

另一方面, 由  $r|p-1$  知  $r \leq p-1 \Rightarrow q \leq p-1$ 。这是矛盾的。

故  $r=1$ 。

但由阶的定义知,  $p|(2^r-1)$ , 即  $p|1$ , 这是不可能的。故  $m \nmid (2^m-1)$ 。  $\square$

(法三, 引理) 引理 设  $m, n \in \mathbb{N}_+$ ,  $(2^m-1, 2^n-1) = 2^{(m,n)}-1$ 。

引理之证 令  $d = (m, n)$ ,  $m = dk, k \in \mathbb{N}_+$ 。则  $2^m-1 = 2^{dk}-1 = (2^d-1)(\dots)$

故  $(2^d-1)|2^m-1$ 。同理,  $(2^d-1)|2^n-1$ 。

故  $2^d-1 \leq (2^m-1, 2^n-1)$ 。

令  $M = (2^m-1, 2^n-1)$ , 欲证

$$M \leq 2^{(m,n)}-1$$

则证  $M|(2^m-1), M|(2^n-1)$ 。

由定义知,  $M$  为奇数, 即  $(2, M) = 1$ , 设  $2$  模  $M$  的阶为  $r$ , 则由阶的性质知,  $r|m, r|n$ , 则  $r \leq (m, n)$ 。由阶的定义知,

$$M|(2^r-1) \Rightarrow M \leq 2^{(m,n)}-1$$

则  $M = (2^m-1, 2^n-1) = 2^{(m,n)}-1$ 。

假设存在  $m > 1$ , 使  $m|(2^m-1)$ 。

设  $m$  的最小素因子为  $p$ ,  $p|m$ , 则  $p|(2^m-1)$ 。

则由引理得,  $(2^m-1, 2^{p-1}-1) = 2^{(m,p-1)}-1$

由 Fermat 小定理知,  $p|(2^{p-1}-1)$ 。

则  $p \leq (2^{p-1}-1, 2^m-1) = 2^{(m,p-1)}-1$

由于  $(m, p-1) = 1$ , 则  $p \leq 1$ , 这是不可能的。  $\square$

最后一种方法看似长, 但若熟知引理, 是前面方法中容易的一个。

## 4. 构造

对于存在性命题, 数论中大部分的处理方法都是构造法。这需要一定的分析与数感。

下面就是一个例子。

**【例 5】** 求证: 对任何的整数  $n \geq 2$ , 总存在  $n$  个互不相同的正整数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 使得

$(a_i - a_j)^2 | a_i a_j$ , 对  $\forall 1 \leq i < j \leq n$  成立。

涉及到与正整数  $n$  有关的命题, 大部分均可用数学归纳法。这一题是可以的。

**证明** 对  $n$  使用数学归纳法。

(1) 起步 (奠基) 当  $n=2$  时, 取  $a_1 = 2, a_2 = 3$ 。

(2) 过渡 假设对  $n$  成立, 则存在  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足要求。

(3) 退一步 先找  $n$  个不同于  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足要求的数。

如何构造呢? 可以考虑每个数都加一个数  $T$ 。

考虑  $T + a_1, T + a_2, \dots, T + a_n$ , 则要使得  $(T + a_i - T - a_j)^2 | (T + a_i)(T + a_j)$  成

立, 即  $(a_i - a_j)^2 | (T + a_i)(T + a_j) = T(T + a_i + a_j) + a_i a_j$ , 已经知道,  $(a_i - a_j)^2 | a_i a_j$ 。

那么  $T$  应是一个全局的量, 因为要对  $\forall 1 \leq i < j \leq n$  成立。

如果  $T = \prod a_i$  呢? 则  $(T + a_i)(T + a_j) = T(T + a_i + a_j) + a_i a_j = a_i a_j (\dots)$  这样就构造成功了!

构造并不能一次就能成功, 但若构造的整体方向正确 (在这里是全局量), 是很有构造出来的。

**(4) 最后一步** 第  $n+1$  个数? 它应该也是一个全局量。

如果就是  $T$  呢?

$$(T + a_i - T)^2 | (T + a_i)T \Rightarrow a_i^2 | (T + a_i)T$$

这显然是成立的。

故对于  $n+1$ , 系列:  $T + a_1, T + a_2, \dots, T + a_n, T, T = \prod a_i$  是满足要求的。

**(5) 下结论** 由数学归纳法原理知, 对任何的整数  $n \geq 2$ , 命题皆成立。

□

## 5. 枚举法

枚举法又称分类讨论, 穷举法等。初等数论中许多问题需要通过分类讨论解决, 尤其是不定方程。

**【例 6】** 试定出不定方程  $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$  的所有整数解  $(x, y)$ 。

**解** 首先因式分解式没有错的。

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (y + 1)(y - 1)。$$

并结合原式,  $y^2 > 1$  得,  $x \geq 0, y^2 \in \mathbb{N}_+$ 。

$$x = 0, y = \pm 2; x = 1, y^2 = 11(X); x = 2, y^2 = 37(X); x = 3, y^2 = 137(X);$$

下设  $x \geq 4$ , 将因式分解后的式子改写为:

$$2^{x-2}(1 + 2^{x+1}) = \frac{y+1}{2} \frac{y-1}{2}$$

由于  $\left(\frac{y+1}{2}, \frac{y-1}{2}\right) = 1$  ( $\because \frac{y-1}{2} + 1 = \frac{y+1}{2}$ ), 这样就构成了分别整除的结构。

则  $2^{x-2} \mid \frac{y+1}{2}$  或  $2^{x-2} \mid \frac{y-1}{2}$ 。

情形 1  $\frac{y+1}{2} = k \cdot 2^{x-2}$ , 则由方程得  $\frac{y-1}{2} \cdot k = 2^{x+1} + 1$ , 则  $k$  为奇数。

当  $k = 1$  时,  $\frac{y+1}{2} = 2^{x-2} < 2^{x+1} + 1 = \frac{y-1}{2}$ , 这是矛盾的。

当  $k = 3$  时,  $\frac{y+1}{2} = 2^{x-2} \cdot 3, \frac{y-1}{2} \cdot 3 = 2^{x+1} + 1$ , 解得  $(x, y) = (4, 23), (4, -23)$ 。

当  $k \geq 5$  时,

$$\begin{cases} \frac{y+1}{2} = 2^{x-2}k \geq \frac{5}{4} \cdot 2^x \geq \frac{5}{4} \cdot 2^4 = 20 \\ \frac{y-1}{2} = \frac{2^{x+1}+1}{k} \leq \frac{2^{x+1}+1}{5} = \frac{2}{5} \cdot 2^x + \frac{1}{5} \leq \frac{2}{5} \cdot 2^4 + \frac{1}{5} = 6.6 \end{cases}$$

这是矛盾的。

情形 2  $2^{x-2} \mid \frac{y-1}{2}$ , 则由方程得  $\frac{y+1}{2} \cdot l = 2^{x+1} + 1, \frac{y-1}{2} = l \cdot 2^{x-2}$ , 则  $l$  为奇数。

当  $l = 1$  时,  $\frac{y+1}{2} = 2^{x+1} + 1; \frac{y-1}{2} = 2^{x-2} \Rightarrow \frac{y+1}{2} = 2^{x-2} + 1 \Rightarrow 2^{x+1} + 1 =$

$2^{x-2} + 1$ , 无解。

当  $l = 3$  时,  $\frac{y+1}{2} \cdot 3 = 2^{x+1} + 1, \frac{y-1}{2} = 3 \cdot 2^{x-2}$ , 无解。

当  $l \geq 5$  时,

$$\begin{cases} \frac{y+1}{2} = \frac{2^{x+1}+1}{l} \leq \frac{2^{x+1}+1}{5} \leq \frac{33}{5} \\ \frac{y-1}{2} = l \cdot 2^{x-2} \geq 5 \times 4 = 20 \end{cases}$$

这是矛盾的。

综上所述,  $(x, y) = (0, 2), (0, -2), (4, 23), (4, -23)$ .

## 6. 拉格朗日定理

设  $p$  是质数,  $n$  是非负整数, 多项式  $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$  是一个模  $p$  为  $n$  次的整系数多项式 (即  $p \nmid a_n$ ), 则同余方程  $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$  至多有  $n$  个解 (在模  $p$  有意义的情况下)。

**证明** 对其等价命题使用数学归纳法。

设  $p$  是质数,  $n$  是非负整数, 对于多项式  $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ , 同余方程  $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$  有  $n+1$  个解 (在模  $p$  有意义的情况下), 则  $p \mid a_n$ 。

**引理: 余数定理** 多项式  $f(x)$  除以  $x-a$  的余数等于  $f(a)$ 。

**引理之证** 设商为  $q(x)$ , 余数为  $r$ , 在等式  $f(x) = q(x)(x-a) + r$  中将  $x = a$  代入得  $f(a) = r$ 。即  $f(x) = q(x)(x-a) + f(a)$ 。

(李尚志, 2014, p. 252)

(i) 当  $n = 1$  时,  $f(x) = ax + b \equiv 0 \pmod{p}$  有 2 个根  $x_1, x_2$ 。则

$$p \mid ax_1 + b \quad p \mid ax_2 + b$$

则

$$p \mid a(x_1 - x_2)$$

显然由于  $p$  是质数,

$$(p, x_1 - x_2) = 1$$

则

$$p \mid a, p \mid b$$

(ii) 假设对于  $n = k-1$  时,  $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$  有  $k$  个根, 有  $p \mid f(x)$ 。

那么  $n = k$  时,  $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$  有  $k+1$  个根  $x_0, x_1, \dots, x_k$ 。

若  $f(x_0) \equiv 0 \pmod{p}$ , 则由引理知,

$$f(x) = (x - x_0)g(x) + f(x_0) = (x - x_0)g(x) + mp, m \in \mathbb{Z}.$$

有

$$\deg f(x) = k \Rightarrow \deg g(x) = k-1$$

$f(x) = (x - x_0)g(x) + mp \equiv (x - x_0)g(x) \equiv 0 \pmod{p}$  有  $k+1$  个根, 那么  $g(x) \equiv 0 \pmod{p}$  有  $k$  个根。由归纳假设知,

$$p \mid g(x)$$

则

$$p \mid f(x)$$

由数学归纳法原理知, 拉格朗日定理成立。 □

**【例 7】**  $p$  是素数。

求证:

(1)  $p \geq 3$



$$p \left| \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right) (p-1)! \right.$$

(2)  $p \geq 4$

$$p^2 \left| \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right) (p-1)! \right.$$

**证明：**(1) 由于

$$p \left| \frac{1}{i} + \frac{1}{p-i} = \frac{p}{i(p-i)} \right.$$

而  $p$  是奇数，则  $p-1$  是偶数。则必能两两配对。由此证毕。

(2) 构造函数  $f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-(p-1)) = x^{p-1} + g(x) + (p-1)!$

其中  $\deg g(x) = p-2$ 。  $f(x) = 0$  的根为  $1, 2, \dots, p-1$ 。

注意到  $f(x)$  的一次项就是  $\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right) (p-1)!\right] x$ ，则  $g(x)$  的一次项也是  $\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right) (p-1)!\right] x$ 。

根据 Fermat 定理与 Wilson 定理，可得

$$x^{p-1} + (p-1)! \equiv 1 + (-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

则  $f(x) = x^{p-1} + g(x) + (p-1)! \equiv g(x) \equiv 0 \pmod{p}$  的根有  $p-1$  个。由拉格朗日定理可得，

$$p \mid g(x)$$

注意到  $(p-1)! = f(p) = p^{p-1} + g(p) + (p-1)! \Rightarrow p^{p-1} + g(p) = 0$

$$p^{p-1} + a_{p-2}p^{p-2} + a_{p-3}p^{p-3} + \cdots + a_2p^2 + a_1p = 0$$

其中  $a_{p-2}, a_{p-3}, \dots, a_1$  都是  $p$  的倍数。注意到

$$a_1 = \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right) (p-1)!\right]$$

$$g(p) = a_{p-2}p^{p-2} + a_{p-3}p^{p-3} + \cdots + a_2p^2 + a_1p = -p^{p-1}$$

$$\equiv 0 \pmod{p^3}, \text{ 且 } a_{p-2}p^{p-2} + a_{p-3}p^{p-3} + \cdots + a_2p^2 \equiv 0 \pmod{p^3}$$

$$\Rightarrow p^2 \mid a_1$$

由此证毕。 □

# 数学归纳法<sup>7</sup>

数学沙龙(II) Log Creative (2017.4)

## 1. 引入数学归纳法

### 本讲目标

- 了解第一数学归纳法。
- 感受直接证法与数学归纳法的区别。
- 通过本讲，相信数学归纳法是正确的。

数学上的许多命题都与正整数  $n$  有关，这样的命题实际上就是一整列命题。要证明这样的命题成立，当然可以有多种不同的方法。

**直接证法** 置  $n$  的任何具体值不顾，仅仅把它看成是一个任意的正整数。

也就是说，假定它只具备任何正整数都具备的共同性质，并在这样的基础上进行推导、运算。

**适用范围** 若我们在推导过程中没有遇到什么难以克服的困难，那么我们就有可能用这种方法（直接证法）来完成命题的证明了。

**【例 1】** 求证：对  $n \in \mathbb{N}_+$ ，如下等式均能成立：

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$$

(法一，直接证法) 这是一道很经典的习题了，它的套路就是观察右端有  $2 \sin \frac{1}{2}x$

作为分母，就想到去分母，这样就出现了三角函数之间的乘积。再继续做下去，就看到了这样做更为巧妙的地方。

**证明** 
$$LHS = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}x} \left( \sin \frac{1}{2}x + 2 \cos x \sin \frac{1}{2}x + \cdots + 2 \cos nx \sin \frac{1}{2}x \right)$$

利用和差化积公式

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

可得

$$2 \cos x \sin \frac{1}{2}x = \sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{1}{2}x$$

$$2 \cos 2x \sin \frac{1}{2}x = \sin \frac{5}{2}x - \sin \frac{3}{2}x$$

...

$$\text{则 } LHS = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}x} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x = RHS$$

□

在以上的推导过程中，并没有考虑  $n$  为奇数或偶数，就完成了证明。这里的直接证法即我们所说：“将  $n$  置于任意境地”的含义。然而这样的证法有时却难以想到，特别是构造了一个裂项求和的结构。那么我们所学过的数学归纳法就可以很自然地解答。

<sup>7</sup> 全文部分摘自《漫话数学归纳法》(苏淳, 2014)、《从特殊性看问题》(苏淳, 2014)，添加了一些个人观点。



(法二, 数学归纳法)

(1) 当  $n=1$  时, 我们有

$$\begin{aligned} LHS &= \frac{1}{2} + \cos x \\ RHS &= \frac{\sin \frac{3}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x} = \frac{3 \sin \frac{1}{2}x - 4 \sin^3 \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x} = \frac{3}{2} - 2 \sin^2 \frac{1}{2}x \\ &= \frac{3}{2} - (1 - \cos x) = \frac{1}{2} + \cos x \end{aligned}$$

LHS = RHS 对  $n=1$  是成立的。

(2) 假设对于  $n=k$ , 等式成立, 即

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^k \cos ix = \frac{\sin \left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$$

要证明对于  $n=k+1$ , 等式也能成立。我们有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^k \cos ix + \cos(k+1)x \\ &= \frac{\sin \left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x} + \cos(k+1)x \\ &= \frac{\sin \left(k + \frac{1}{2}\right)x + 2 \cos(k+1)x \sin \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x} \\ &= \frac{\sin \left(k + \frac{1}{2}\right)x + \sin \left(k + \frac{3}{2}\right)x - \sin \left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x} \\ &= \frac{\sin \left(k + \frac{3}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x} = \frac{\sin \left[(k+1) + \frac{1}{2}\right]x}{2 \sin \frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

注意结果的保留形式。所以对于  $n=k+1$ , 等式也能成立。于是我们就相信了, 对于一切正整数  $n \geq n_0$ , 命题  $P(n)$  均能成立。从而对一切正整数  $n$ , 等式都能成立。  $\square$

$P(n)$  为了证明其能成立

**【起步】**

先对最小的  $n_0$ , 验证  $P(n_0)$  成立。

(三倍角公式)

**【归纳假设】**

然后假定对  $n=k$ ,  $P(k)$  成立。

**【归纳过渡 (向前跨步)】**

并在此基础上, 推出  $P(k+1)$  成立。

自然地通分

自然地和差化积

而且在归纳过渡时, 我们已经把原来的  $n+1$  项, 变成只有 2 项, 这样针对性更强了。

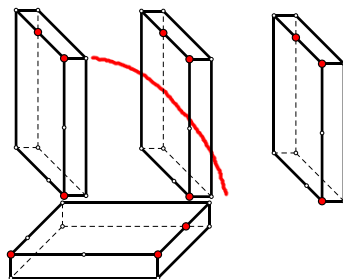


图 26 多米诺骨牌效应

可以告诉大家, 这种相信是可靠的, 数学归纳法来源于连锁效应 (又称多米诺骨牌效应)。

只要能够保证每两块相邻骨牌间的间距均小于骨牌长度，在推倒第一块时，其余的都能相继倒下。

将其运用到数学上，就成了如下的归纳公理：

**归纳公理** 设  $S \subseteq \mathbb{N}_+$ ，满足：

(1)  $1 \in S$ ; (2) 若  $n \in S$ ，则  $n + 1 \in S$ 。那么  $S = \mathbb{N}_+$ 。

这是由皮亚诺提出的关于正整数的五条公理中的一条，为数学归纳法之基础。

**第一数学归纳法的证明 (i)** 记  $S = \{n | n \in \mathbb{N}_+, \&P(n) \text{ 成立} \}$ ，则当  $1 \in S$ ，且若  $n \in S$ ，则  $n + 1 \in S$ ，那么由归纳公理知， $S = \mathbb{N}_+$ 。□  
(冯志刚, 2012)

或许你注意到了，我们这里只是证明了起点为  $n = 1$  时的情况，但当起点不是  $n = 1$  时呢？

用这条归纳公理来证明第一数学归纳法是不够的。

我们说，它真正的理论依据就是如下的最小数原理：

**最小数原理** 任何以正整数为元素的非空集合中都存在这最小的元素。

这一原理很容易证明：

设  $S$  是任一以正整数为元素的非空集合。

如果  $S$  是有限集合，那么  $S$  中当然存在最小的元素。

如果  $S$  是无限集合，我们任取  $S$  中一个元素  $m$ ，并把  $S$  中所有不大于  $m$  的元素所构成的子集记为  $S_1$ 。则  $S_1$  是以正整数为元素的非空有界集合，当然其中只有有限个整数，所以其中存在最小的元素  $m_0$ 。由于  $m_0 \leq m$ ，而  $S/S_1$  中的元素都大于  $m$ ，所以  $m_0$  是  $S$  中的最小元素。□

现在我们就可以来证明数学归纳法原理了。

用反证法。假设数学归纳法不成立，即已经验证命题  $P(n_0)$  成立，并且已经证明：对于  $k - 1 \geq n_0$ ，只要命题  $P(k - 1)$  成立，就有命题  $P(k)$  成立，但仍然不能保证对所有的正整数  $n \geq n_0$ ，命题  $P(n)$  都成立。那么

$$A = \{n \in \mathbb{N}_+ | n \geq n_0, P(n) \text{ 不成立} \} \neq \emptyset$$

且  $n_0 \notin A$ 。既然  $A$  是以正整数为元素的非空集合，其中必有最小元素（最小数原理），我们将改最小元素记做  $k$ ，即

$$k = \min\{n | n \in A\}$$

由于  $n_0 \notin A$ ，所以  $k \geq n_0 + 1$ ，故  $k - 1 \geq n_0$ 。

由于  $k - 1 < k$ ，故  $k - 1 \notin A$ ，所以命题  $P(k - 1)$  成立，而且已经证明了，只要命题  $P(k - 1)$  成立，就有命题  $P(k)$  成立，于是  $k \notin A$ ，这与  $k$  是集合  $A$  中的最小元素的事实相矛盾。这一矛盾表明**数学归纳法原理**成立！□

数学在这个方面自圆其说了。所以并不需要再立公理证明，前述的归纳公理仅是为了便于理解而立的罢了。

**隐形归纳** 有时，人们也直接利用最小数原理解题。此时的解法虽然不是按照归纳法的步骤写出，但其基本思想仍与归纳法相同，故称为隐性归纳。

隐形归纳的一种表现形式是所谓的倾斜式归纳和反向归纳：

如果第  $n > 1$  号命题的成立可以化归一个或数个编号较小的命题的正确性，并且第一个命题成立，则整个系列中的命题都成立。

倾斜式归纳通常以反证法的形式出现，即考察使得命题不成立的最小编号  $n$ ，并证

明可以找到一个更小的编号  $m < n$ ，使得编号为  $m$  的命题不成立，由此得出矛盾。

## 2. 数学归纳法的变式

### 本讲目标

- 了解第二数学归纳法。
- 了解起点前移，跨度上的改造。

#### 第二数学归纳法形式 (I)

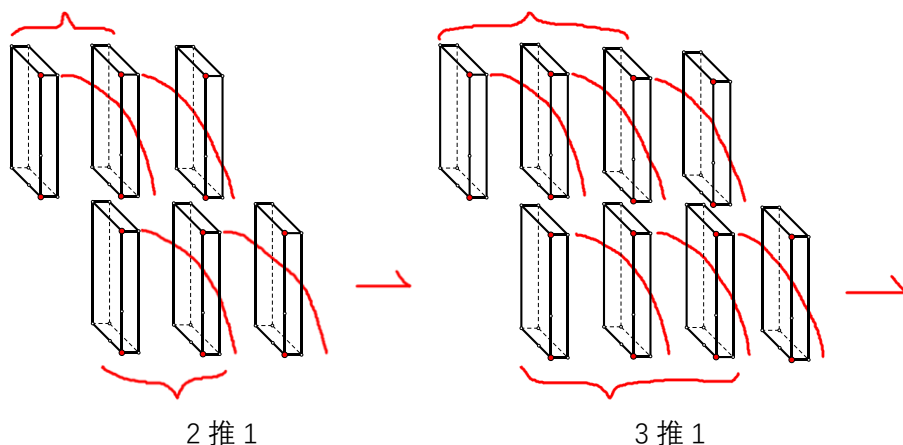


图 27 第二数学归纳法(I)

那么推广至  $n$  推 1 也是成立的，将得到形式(II)。

#### 第二数学归纳法形式 (II)

起步验证后，假设对  $1 \leq n \leq k$ ，命题均成立，若能推出  $P(k+1)$  成立，则根据数学归纳法原理知，原命题成立。

**【例 2】** 说 Fibonacci 数列（斐波那契数列，简称 F-数列）是数学大海中一颗璀璨夺目的明珠绝非过誉，这个数列简洁优美，带给我们无尽的遐想。下面就是 F-数列：

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

即由递归方程

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, & n \geq 1 \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

定义的数列  $\{F_n: n \geq 1\}$ 。

它有一个通项公式：

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^n - x_2^n), x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

（具体求法见下一章，1.2 阶线性递归数列）

但是我们却知道， $F_n$  的每一项都是正整数，不禁狐疑满腹，我们就来证一证吧！

问题：求证由这个通项公式定义的每一项都是正整数。

**证明** 我们用**第二数学归纳法 (I)** 证明。

当  $n = 1, 2$  时， $F_1 = 1, F_2 = 1$ 。

假设当  $n = k, k - 1$  时， $F_k, F_{k-1}$  都是正整数。

那么当  $n = k + 1$  时，

$$\begin{aligned}
F_{k+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{k+1} - x_2^{k+1}) = (\text{怎么用递归关系呢}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{k+1} + x_1^k x_2 - x_1 x_2^k - x_2^{k+1} - x_1^k x_2 + x_1 x_2^k) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}[(x_1^k - x_2^k)(x_1 + x_2) - x_1 x_2(x_1^{k-1} - x_2^{k-1})] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^k - x_2^k)(x_1 + x_2) - \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{k-1} - x_2^{k-1})x_1 x_2 \\
&= F_k(x_1 + x_2) - F_{k-1}x_1 x_2
\end{aligned}$$

而  $x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = -1$ ,  $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ , 由  $F_k, F_{k-1}$  皆为正整数, 则  $F_{k+1}$  为正整数。□

此处出现的一个好的式子, 我想称之为类 Fibonacci 公式。

### 类 Fibonacci 公式

$$\begin{aligned}
a^{k+1} - b^{k+1} &= a^{k+1} + a^k b - ab^k - b^{k+1} - a^k b + ab^k \\
&= (a^k - b^k)(a + b) - ab(a^{k-1} - b^{k-1})
\end{aligned}$$

### 类 Fibonacci 公式姊妹公式

$$a^{k+1} + b^{k+1} = (a^k + b^k)(a + b) - ab(a^{k-1} + b^{k-1})$$

我们所证的这个命题, 将成为写成高斯形式的基础。

将通项公式改造为

$$F_n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

注意到  $0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$ , 则

$$F_n = \begin{cases} \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\rfloor, n = 2k-1 \\ \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\rfloor + 1, n = 2k \end{cases}, k \in \mathbb{N}_+$$

在【例 1】中, 法二的数学归纳法对于起步的验证应用了三倍角公式, 但实际的直接证法中却没有用到这个公式, 那么是不是对这一步的验证可以更简洁呢?

可以的!

我们尝试将起点迁移至  $n = 0$ 。但这样一来, 尽管右式的含义是明确的: 只需将  $n = 0$  代入其中, 便知  $RHS = \frac{1}{2}$ 。

但左式究竟应当等于什么呢? 按我们的愿望, 就应当等于  $\frac{1}{2}$ 。不费吹灰之力证明立毕。

但有人对此不理解, 认为当  $n = 0$  时, 左式应等于  $\frac{3}{2}$ , 原因:  $\frac{1}{2} + \cos 0x = \frac{3}{2}$ 。但这种

意见是不正确的。

这是因为在原来的等式中， $n$ 是作为正整数出现的，并没有打算将 $n$ 取作0，所以当 $n = 0$ 时，该等式究竟该作何种理解，是需要作补充定义的。

这时就要考虑命题之间的固有关系。在数列中这种固有关系称为递推关系。

$$S_n = \frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos nx$$

$$S_{n+1} = S_n + \cos(n+1)x$$

$$S_1 = S_0 + \cos x, S_0 = S_1 - \cos x = \frac{1}{2}$$

当然，上述过程不必在试卷上写出，只要心中有数即可。

关于跨度上的跳跃。这类技巧一般表现为变一步一跨为大跨度跳跃，其中亦伴随着起点方面的变化。一般来说，采用几步一跨，就应当设几个起点。

**【例3】** 设 $n$ 为不小于6的正整数。求证：可将一个正方形分成 $n$ 个较小的正方形。

证明

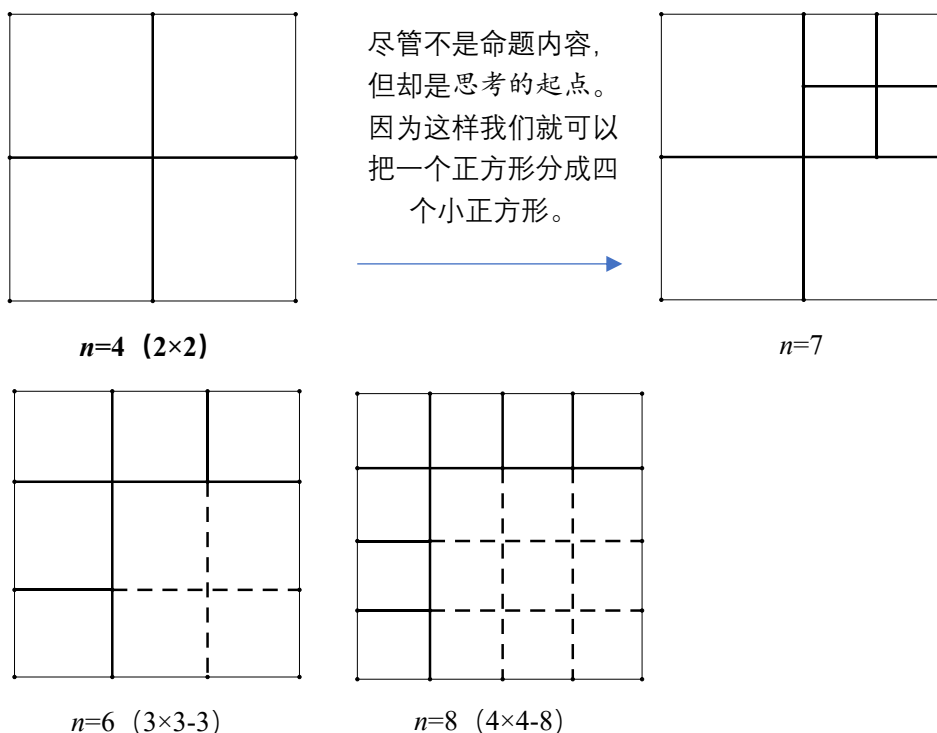


图 29 例 3 证明

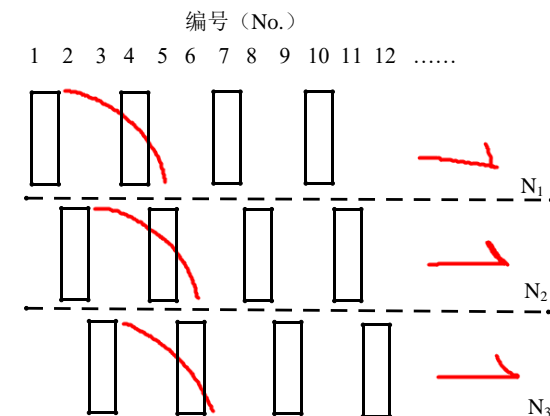


图 28 跨度原理（每个集合内使用第一数学归纳法）

由于跨度为 3，而三个起点已经设好，这个问题已告证毕。

### 3. 从特殊性看问题、在命题上下功夫

#### 本讲目标

- 了解从特殊性看问题的思想在数学归纳法中的应用。
- 了解引理与转化命题。
- 要批判地认识数学归纳法。

#### 一、从特殊性看问题——从头看起

分享一句华罗庚说过的名言：

“学好数学的诀窍就是一个字：退。大胆地退，足够地退，一直退到最简单而不失重要性的地步。”

这段话可谓道破天机，为我们指点出了学好数学最宝贵、最重要的窍门。

在数学归纳法中，最原始而不失重要性的地方，便是开头的几步。这是从特殊性看问题的一种体现。

**【例 4】** 从  $2^n \times 2^n$  的方格表中任意去掉一个小方格。求证：对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ ，且不论去掉的是哪一个小方格，剩下的部分都可以用形如图所示的角状形拼成。

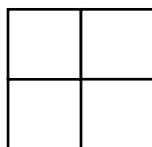


图 30 角状形

**分析与证明** (1) 当  $n=1$  时，命题显然。(但这对于下面的归纳假设没有什么帮助。)

我们不妨多看两步。当  $n=2$  时，既然我们考察的目标是为了替归纳过渡寻找规律，我们来将其分成 4 个  $2 \times 2$  的。

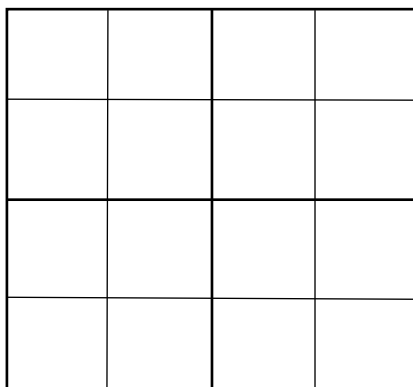


图 31  $4 \times 4$

那么，任意去掉的那个方格必落在这四个象限中的一个中！ $(\lceil \frac{1}{4} \rceil = 1)$

那么其余的象限应如何处理呢？

经过一番探索，我们得到了最终的解决方案：

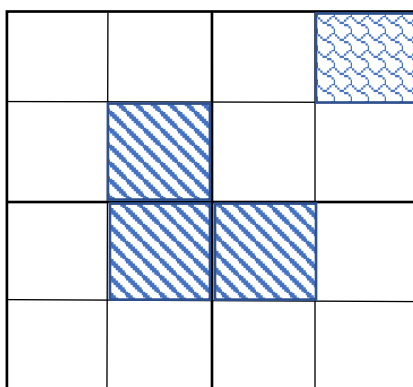


图 32 解决方案

就是在中间加个角状形！其余的部分也就都是角状形了！  
那么，过渡就随之完成了！

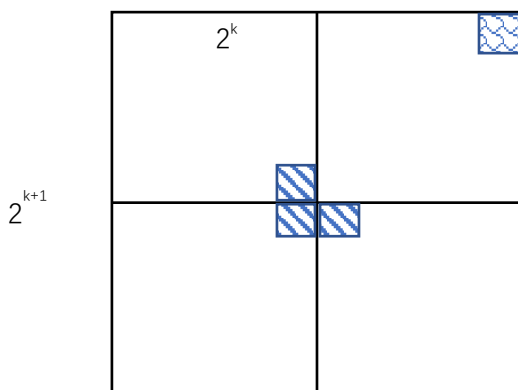


图 33 过渡

由于每个象限根据归纳假设，都是正确的，那么整个也就正确了！

事实上，在很多问题中，如果真正把这些最开头的几步看透了、弄清楚了、想仔细了，则如何恰当地使用归纳假设就知道了，解决整个问题的办法也就有了。

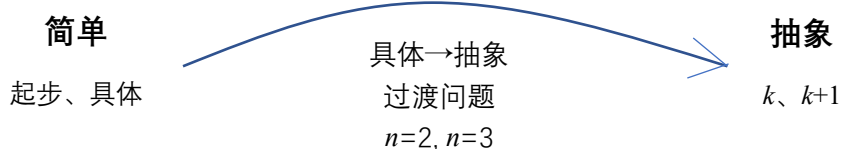


图 34 从特殊性看问题

善于从简单情形去认识复杂事物，善于将抽象理论放到具体而简单的背景之下考察，是数学上的一种极其可贵的品格，应尽早养成这种品格，久而久之，你便会获益匪浅。

## 二、在命题上下功夫

### 1. 辅助命题——引理（此处略）

### 2. 转化命题

【例 5】证明：在 Fibonacci 数列中，有

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$$

**证明** (法一, 循环归纳) 当  $n=1$  时,  $F_1^2 + F_2^2 = F_3$  成立。

假设当  $n=k$  时, 有

$$F_{2k+1} = F_{k+1}^2 + F_k^2$$

当  $n=k+1$  时,  $F_{k+2}^2 + F_{k+1}^2 = (F_{k+1} + F_k)^2 + F_{k+1}^2 = F_{k+1}^2 + 2F_k F_{k+1} + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_{k+1}^2 + 2F_k F_{k+1} + F_{2k+1}$

为了证  $F_{k+2}^2 + F_{k+1}^2 = F_{2k+3}$ , 则证  $F_{k+1}^2 + 2F_k F_{k+1} = F_{2k+3} - F_{2k+1} = F_{2k+2}$ 。

再用数学归纳法。

(1) 当  $n=1$  时, 验证成立。

(2) 假设  $n=k$  时, 命题成立, 即

$$F_{k+1}^2 + 2F_k F_{k+1} = F_{2k+2}$$

则当  $n=k+1$  时,  $F_{k+2}^2 + 2F_{k+1} F_{k+2} = F_{k+2}^2 + 2(F_{k+1} + F_k)F_{k+1} = 2F_{k+1} F_k + 2F_{k+1}^2 + F_{k+2}^2 = F_{2k+2} + F_{k+1}^2 + F_{k+2}^2$

欲证  $F_{k+2}^2 + F_{k+1}^2 + F_{k+2}^2 = F_{2k+3}$ , 即证  $F_{k+1}^2 + F_{k+2}^2 = F_{2k+3}$

又回到了最初的起点!

为摆脱此困境, 还是让我们同时考虑两串命题吧!

记:  $P(n): F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}; Q(n): 2F_{n+1}F_n + F_{n+1}^2 = F_{2n+2}$

已知  $P(1), Q(1)$  成立。

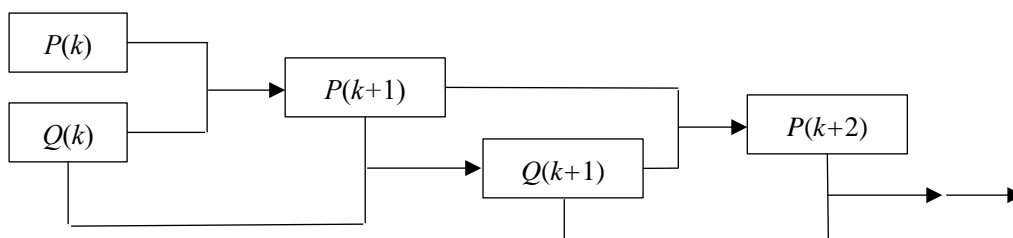


图 35 连环套现象

由图知, 两个命题均成立!

像这种两串命题相互依存的现象, 并非绝无仅有的。一旦遇到这种连环套, 那么破套的最好办法就是两串命题一起考虑! (重证略)

避免这种连环套还有一种方法, 就是加强命题。

(法二, 加强命题) **引理: 卡西尼 (Cassini) 恒等式** 在 Fibonacci 数列中,

$$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$$

初等证明如下: 对  $n$  用数学归纳法。

当  $n=1, 2$  时,  $F_{m+1} = F_m + F_{m-1} = F_m F_{1+1} + F_{m-1} F_1; F_{m+2} = F_{m+1} + F_m = 2F_m + F_{m-1} = F_m F_{2+1} + F_{m-1} F_2$ , 成立。

当  $n=k, k+1$  时, 假设成立。  $F_{m+k} = F_m F_{k+1} + F_{m-1} F_k; F_{m+k+1} = F_m F_{k+2} + F_{m-1} F_{k+1}$

两式相加, 即得

$$F_{m+k+2} = F_m F_{k+3} + F_{m-1} F_{k+2}$$

引理得证。

在 Cassini 恒等式中, 取  $m = n + 1$  立得。

□

有趣的是, 由这个引理, 还可轻易地导出:  $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ 。

(肖果能, 2015, pp. 37-39)



## 递归数列<sup>8</sup>

陈传理(2017.2) 数学沙龙(I) Log Creative (2017.4) 花老师 (2017.8)

先求出该数列满足的递推关系, 然后根据这个递推关系和初始条件求出这数列的表达式。

### 1. 二阶线性递归数列

递归关系为

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}, n = 2, 3, \dots$$

此处  $c_2 \neq 0$ . (也就意味着可以  $c_1 = 0$ , 即跨项递归, 但  $c_2 = 0$  时, 就变为一阶递归, 也就是等比数列。)

称二次方程  $x^2 = c_1 x + c_2$  为特征方程。此方程有两个根  $x_1, x_2$ 。

**求证** (i)  $x_1 \neq x_2$  时,  $a_n = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n$ ; (ii)  $x_1 = x_2$  时,  $a_n = (\beta_1 + \beta_2 n) x_{1,2}^n$ 。  
其中  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  皆为待定系数。(某年联赛题)

**证明** (法一, 巧妙的证法)

(i) 由根与系数的关系<sup>9</sup>知,

$$x_1 + x_2 = c_1, x_1 x_2 = -c_2$$

经换元, 使递归关系变为

$$a_n = (x_1 + x_2) a_{n-1} - x_1 x_2 a_{n-2}$$

把方程一变二, 得

$$a_n - x_1 a_{n-1} = x_2 a_{n-1} - x_1 x_2 a_{n-2} = x_2 (a_{n-1} - x_1 a_{n-2})$$

$$a_n - x_2 a_{n-1} = x_1 a_{n-1} - x_1 x_2 a_{n-2} = x_1 (a_{n-1} - x_2 a_{n-2})$$

注意到此时可以构造新数列<sup>10</sup>了。令  $p_n = a_n - x_1 a_{n-1}$ ,  $q_n = a_n - x_2 a_{n-1}$ , 则上面的式子变为

$$p_n = x_2 p_{n-1}$$

$$q_n = x_1 q_{n-1}$$

这就化归<sup>11</sup>成了一阶递归数列的情形。由此即得

$$p_{n+1} = x_2^n p_1, q_{n+1} = x_1^n q_1$$

仅展开左侧, 得

$$a_{n+1} - x_1 a_n = x_2^n p_1, a_{n+1} - x_2 a_n = x_1^n q_1$$

消  $a_{n+1}$ , 得

$$a_n = \frac{x_1^n q_1 - x_2^n p_1}{x_1 - x_2}$$

记  $\alpha_1 = \frac{q_1}{x_1 - x_2}, \alpha_2 = \frac{-p_1}{x_1 - x_2}$ , 至此  $a_n = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n$  (设而不求:  $p_1, q_1$ )

<sup>8</sup> 全文部分摘自《递归数列》(史济怀, 2014, pp. 219-230), 添加了一些个人观点。

<sup>9</sup> **根与系数的关系定理** (又称韦达定理):  $n$  次方程  $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$  的  $n$  个复数根分别为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则有分解式  $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = a_0 (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ , 将此式右边展开并比较对应项系数得  $\sigma_1 = x_1 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}, \dots, \sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}, \dots, \sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$ . (李尚志, 2014)

<sup>10</sup> **消元**:  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2} \xrightarrow{\text{特征方程, 新数列}} a_n, a_{n-1} \xrightarrow{\text{方程组 (二方程)}} a_n$ 。

<sup>11</sup> **化归**: 是指把要解决的问题, 通过某种转化过程, 归结到一类已经解决或者能比较容易解决的问题中去, 最终获得原问题解答的一种解题策略。(1) 复杂  $\rightarrow$  简单; (2) 陌生  $\rightarrow$  熟悉; (3) 一般  $\rightarrow$  特殊 (从特殊性看问题); (4) 原命题  $\rightarrow$  更强命题 (加强命题)。

(ii) 此时,  $p_n = q_n$ , 由  $p_{n+1} = x_2^n p_1$  得

$$a_n - x_1 a_{n-1} = x_1^{n-1} p_1$$

由  $a_{n-1} - x_1 a_{n-2} = x_1^{n-2} p_1$  知, (对齐)

$$x_1 a_{n-1} - x_1^2 a_{n-2} = x_1^{n-1} p_1$$

...

$$x_1^{n-1} a_1 - x_1^n a_0 = x_1^{n-1} p_1$$

叠加上述  $n$  个式子, 即得

$$a_n = x_1^n a_0 + n x_1^{n-1} p_1 = a_0 x_1^n + n x_1^n \frac{p_1}{x_1}$$

记  $\beta_1 = a_0, \beta_2 = \frac{p_1}{x_1}$ , 即得  $a_n = (\beta_1 + \beta_2 n) x_1^n$ 。 □

(法二, 数学归纳法) 此处略。

或许这个推理过程不会再考, 但是其中涉及的数列重要思想是值得学习的。

化归; 消元; 数学归纳法。

**【例 1】** 已知数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_0 = 3, a_1 = 9, a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} - 4n + 2 (n \geq 2)$ , 试求出所有的非负整数  $n$ , 使得  $a_n$  能被 9 整除。

本题的目标明确:

求出  $a_n$  的通项公式。

**解** (法一, 消代数式) 用凑的技巧。

令  $a_n = b_n + n^2, b_0 = 3, b_1 = 8, b_n = 4b_{n-1} - 3b_{n-2} - 6$ 。(消  $n$ )

再令  $b_n = c_n + 3n$ , 则  $c_0 = 3, c_1 = 5, c_n = 4c_{n-1} - 3c_{n-2} (n \geq 2)$ 。(消常数)

其特征方程是  $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, 3$ , 故  $c_n = u \cdot 3^n + v$ 。由前两项的信息得,  $c_n = 3^n + 2$ 。由此得,  $a_n = 3^n + n^2 + 3n + 2$ 。

当  $n \geq 2$  时,  $9|a_n \Rightarrow 9|n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$

综上,  $n = 1, 9k + 7, 9k + 8 (k = 0, 1, \dots)$

技巧性较强的问题通常有一些运气。下面介绍一个通常的方法。

(法二, 消数列项) 易得  $a_2 = 21$ , 可令  $b_n = a_n - a_{n-1} (n \geq 1), b_1 = 6, b_2 = 12$

$$b_n = 3b_{n-1} - 4n + 2$$

待定系数, 构造等比数列:  $b_n - \alpha n - \beta = 3[b_{n-1} - \alpha(n-1) - \beta], \alpha = \beta = 2$ , 得

$$b_n - 2n - 2 = 3[b_{n-1} - 2(n-1) - 2]$$

同理得  $a_n = 3^n + n^2 + 3n + 2$ 。以下同上。

二阶线性递归数列的题目可以结合数学归纳法操作, 而不必求出通项公式。

**【例 2】** 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2, a_2 = 7, a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2} (n \geq 3)$ , 求证: 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+, a_{2n-1}$  可表示为两个正整数的平方和。

**分析与证** 先用探索法开路,  $a_3 = 25, a_4 = 89, a_5 = 317, a_6 = 1129, a_7 = 4021, \dots$  而  $a_1 = 1^2 + 1^2$ , 注意到  $a_3 = 3^2 + 4^2, a_5 = 11^2 + 14^2, a_7 = 39^2 + 50^2$

规律比较隐蔽。

但是应注意方向, 若只注意  $n$ , 发现是杂乱无章的。

这种方向感或许与经验有关, 知识的迁移与应用是重要的。

在数学归纳法一章 3. 从特殊性看问题 在命题上下功夫中, 我们知道在 Fibonacci 数列

中,

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$$

这里两个平方根为数列中的项, 那么这里是不是也是这个方向呢?

看来单单是项的平方, 难以凑成; 若是线性组合呢?

通过摸索, 我们得到

$$a_3 = (a_2 - 2a_1)^2 + (2a_1)^2 \quad a_5 = (a_3 - 2a_2)^2 + (2a_2)^2$$

据此猜测, 对每个  $n \in \mathbb{N}_+$ , 有

$$a_{2n-1} = (a_n - 2a_{n-1})^2 + (2a_{n-1})^2$$

为证上式, 实际上还需证关于  $a_{2n}$  的式子。(因为递归关系中含有这一项)

一方面,

$$a_{2n+1} = (a_{n+1} - 2a_n)^2 + (2a_n)^2 = a_{n+1}^2 + 8a_n^2 - 4a_n a_{n+1}$$

另一方面,

$$a_{2n+1} = 3a_{2n} + 2a_{2n-1} = 3a_{2n} + 2(a_n^2 + 8a_{n-1}^2 - 4a_n a_{n-1})$$

且  $a_{n+1} = 3a_n + 2a_{n-1}$ , 用来消去  $a_{n+1}$ 。

则下式应成立,

$$3a_{2n} = 3a_n^2 + 12a_n a_{n-1} - 12a_{n-1}^2$$

此即

$$a_{2n} = a_n^2 + 4a_n a_{n-1} - 4a_{n-1}^2$$

这是两个互相依赖的命题, 可以一起归纳。但不是在 Fibonacci 中出现的“怪圈”。

(1) 当  $n=2,3$  时, 验证无误。

(2) 当  $n=k$  时, 假设成立, 那么当  $n=k+1$  时,

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 3a_{2n} + 2a_{2n-1} = 3a_n^2 + 12a_n a_{n-1} - 12a_{n-1}^2 + 2a_n^2 + 16a_{n-1}^2 - 8a_n a_{n-1} \\ &= 5a_n^2 + 4a_n a_{n-1} + 4a_{n-1}^2 \xrightarrow{2a_{n-1}=a_{n+1}-3a_n} a_{n+1}^2 + 8a_n^2 - 4a_n a_{n+1} \\ &= (a_{n+1} - 2a_n)^2 + (2a_n)^2 \\ a_{2n+2} &= 3a_{2n+1} + 2a_{2n} = a_{n+1}^2 + 8a_n^2 - 4a_n a_{n+1} + 2a_n^2 + 8a_n a_{n-1} - 8a_{n-1}^2 \\ &\xrightarrow{2a_{n-1}=a_{n+1}-3a_n} a_{n+1}^2 + 4a_{n+1} a_n - 4a_n^2 \end{aligned}$$

由数学归纳法原理知, 原命题成立。 □

## 2. 复数特征根

若特征方程的根为复数根, 根据复数根成对原理, 设两根为

$$x_1 = a + bi, x_2 = a - bi$$

写成三角形式,

$$x_1 = r(\cos \theta + i \sin \theta), x_2 = r(\cos \theta - i \sin \theta), r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos \theta = \frac{a}{r}, \sin \theta = \frac{b}{r}$$

这时根据二阶线性递归数列原理与棣莫弗定理, 可得

$$a_n = \alpha_1 r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) + \alpha_2 r^n (\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

且

$$a_n = \overline{\alpha_1} r^n (\cos n\theta - i \sin n\theta) + \overline{\alpha_2} r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

两式相加, 得



$$2a_n = r^n[(\alpha_1 + \overline{\alpha_2})(\cos n\theta + i \sin n\theta) + (\alpha_2 + \overline{\alpha_1})(\cos n\theta - i \sin n\theta)]$$

记  $\alpha_1 + \overline{\alpha_2} = \beta_1 + \beta_2 i$  (虚部<sub>1</sub> - 虚部<sub>2</sub>) , 则  $\alpha_2 + \overline{\alpha_1} = \beta_1 - \beta_2 i$  ( - (虚部<sub>1</sub> - 虚部<sub>2</sub>) ) 。

(即  $\alpha_1 + \overline{\alpha_2} = \overline{\alpha_2 + \overline{\alpha_1}}$ ) 则

$$\begin{aligned} 2a_n &= r^n[(\beta_1 + \beta_2 i)(\cos n\theta + i \sin n\theta) + (\beta_1 - \beta_2 i)(\cos n\theta - i \sin n\theta)] \\ &= 2r^n(\beta_1 \cos n\theta - i\beta_2 \sin n\theta) \end{aligned}$$

即

$$a_n = r^n(\beta_1 \cos n\theta - i\beta_2 \sin n\theta)$$

由于是待定系数, 故

$$a_n = r^n(\gamma_1 \cos n\theta + i\gamma_2 \sin n\theta)$$

### 复数根成对出现原理

设  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a + bi$  是实系数方程  $f(x) = 0$  的根, 即

$$f(a + bi) = 0$$

则  $a + bi$  也是实系数方程  $f(x) = 0$  的根。

**证明** 用  $f(a + bx)$  除以  $x^2 + 1$  得商式  $q(x)$  和余式  $c + dx$ 。而  $f(a + bx)$  与  $x^2 + 1$  的系数都是实数, 故

$q(x)$  与  $c + dx$  的系数亦为实数。

在等式

$$f(a + bx) = q(x)(x^2 + 1) + c + dx$$

中, 将  $x=i$  代入得

$$f(a + bi) = c + di = 0$$

$c, d \in \mathbb{R}$ , 故  $c = d = 0$ 。则  $f(a + bx) = q(x)(x^2 + 1)$ 。

故  $f(a - bi) = q(-i)((-i)^2 + 1) = 0$ 。 □

这个证明抓住了“变量”的统一性关系 ( $i$  和  $-i$  平方后皆为  $-1$ )。

(李尚志, 2014, p. 251)

## 3. 高阶线性递归数列

对于一般的  $k$  阶递推关系:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}, c_k \neq 0$$

它的特征方程定义为

$$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots + c_k$$

(i) 若特征方程有  $k$  个不同的实根  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , 那么

$$a_n = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \cdots + \alpha_k x_k^n$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  皆为待定系数。

(ii) 若有  $r$  ( $r < k$ ) 个不同的根  $x_1, \dots, x_r$ , 它们的重数分别为  $m_1, \dots, m_r$ , 这里  $m_1 + \cdots + m_r = k$ , 则

$$a_n = P_1(n)x_1^n + P_2(n)x_2^n + \cdots + P_r(n)x_r^n$$

这里  $P_1(n), P_2(n), \dots, P_r(n)$  分别为  $n$  的多项式, 次数不超过  $m_1 - 1, \dots, m_r - 1$ , 由初始值  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  确定。



## 4. 分式递归数列

对于  $a_{n+1} = \frac{\alpha a_n + \beta}{a_n + \gamma}$  ( $\alpha, \beta, \gamma$  是常数) 类型的分式递归数列, 应使用不动点法, 先求出分式线性函数  $\frac{\alpha x + \beta}{x + \gamma}$  的不动点, 即由  $x = \frac{\alpha x + \beta}{x + \gamma}$  得出的不动点  $x_1, x_2$ 。

若  $x_1 \neq x_2$ , 则可得  $\left\{\frac{a_n - x_1}{a_n - x_2}\right\}$  是一个等比数列; 若  $x_1 = x_2$ , 则  $\left\{\frac{1}{a_n - x_{1,2}}\right\}$  是一个等差数列。  
(范端喜, 2013, p. 83)

**证明**

若  $x_1 \neq x_2$ ,

$$\begin{aligned} x = \frac{\alpha x + \beta}{x + \gamma} &\Rightarrow x^2 + (\gamma - \alpha)x - \beta = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \alpha - \gamma \\ x_1 x_2 = -\beta \end{cases} \\ \frac{a_{n+1} - x_1}{a_{n+1} - x_2} &= \frac{\frac{\alpha a_n + \beta}{a_n + \gamma} - x_1}{\frac{\alpha a_n + \beta}{a_n + \gamma} - x_2} = \frac{\alpha a_n + \beta - a_n x_1 - \gamma x_1}{\alpha a_n + \beta - a_n x_2 - \gamma x_2} \\ &= \frac{(\alpha - x_1)a_n - x_1 x_2 - (\alpha - x_1 - x_2)x_1}{(\alpha - x_2)a_n - x_1 x_2 - (\alpha - x_1 - x_2)x_2} = \frac{(\alpha - x_1)a_n + x_1(x_1 - \alpha)}{(\alpha - x_2)a_n + x_2(x_2 - \alpha)} \\ &= \frac{x_1 - \alpha}{x_2 - \alpha} \cdot \frac{a_n - x_1}{a_n - x_2} \end{aligned}$$

若  $x_1 = x_2$ ,

$$\begin{aligned} \Delta = (\gamma - \alpha)^2 + 4\beta &= 0 \Rightarrow \beta = -\frac{(\gamma - \alpha)^2}{4} \\ x_1 = x_2 &= \frac{\alpha - \gamma}{2} \\ a_{n+1} &= \frac{\alpha a_n - \frac{(\gamma - \alpha)^2}{4}}{a_n + \gamma} \\ \frac{1}{a_{n+1} - x_{1,2}} - \frac{1}{a_n - x_{1,2}} &= \frac{1}{\frac{\alpha a_n - \frac{(\gamma - \alpha)^2}{4}}{a_n + \gamma} - \frac{\alpha - \gamma}{2}} - \frac{1}{a_n - \frac{\alpha - \gamma}{2}} \\ &= \frac{4(a_n + \gamma)}{2a_n(\alpha + \gamma) - \alpha^2 + \gamma^2} - \frac{2}{2a_n - (\alpha - \gamma)} \\ &= \frac{2[4a_n^2 + 4a_n(\gamma - \alpha) - (\gamma - \alpha)^2]}{(\alpha + \gamma)[4a_n^2 + 4a_n(\gamma - \alpha) - (\gamma - \alpha)^2]} = \frac{2}{\alpha + \gamma} \end{aligned}$$

这是常数。在应用时, 不一定要使用这个公式, 这只是给一个方向, 待定系数就能解出来了。

# 几何二试

宋立功 (2017.7) 林老师 (2017.8)

对于大多数的平面几何题，最巧妙的解法大概是几何证法与三角证法了。在考场上，大概也是节省时间的。正是由于这些原因，宋教授在讲课过程中一直使用这样的方法。

## 1. 基本图形

相对于解析几何证法，纯几何证法或纯三角证法需要基本图形作为支撑，下面即是讲课中涉及的几例。

### 1.1 角平分线定理

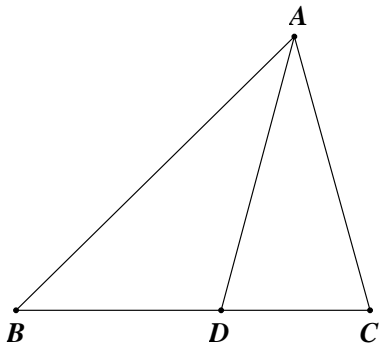


图 36 角平分线定理:  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

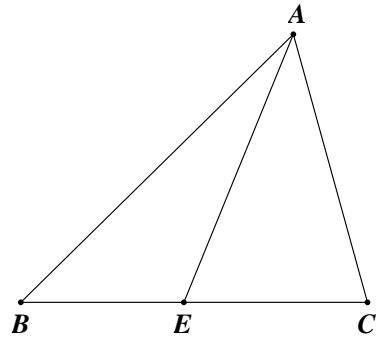


图 37 分角定理:  $\frac{BD}{DC} = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{AB \sin \angle BAD}{AC \sin \angle CAD}$

### 1.2 鸡爪定理

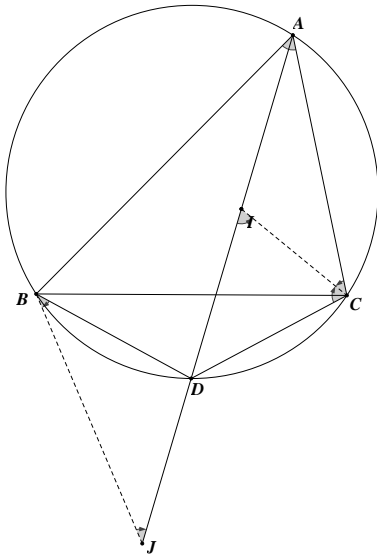


图 38 鸡爪定理:  $ID = DC = DB = DJ$

证明 a. 鸡掌(I 为内心, D 为交点)

$$\begin{aligned} \angle DIC &= \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle C}{2} = \angle BCD + \angle BIC = \angle ICD \\ &\Rightarrow ID = DC = BD. \end{aligned}$$

b. 鸡脚(J 为旁心, 此处关于 A)

$$\begin{aligned} \angle JBD &= \frac{\pi - \angle B}{2} - \angle CBD = \frac{\pi - \angle B - \angle A}{2} \\ \angle DJB &= \pi - \frac{\pi - \angle B}{2} - \left( \angle B + \frac{\angle A}{2} \right) = \frac{\pi - \angle B - \angle A}{2} \\ &\Rightarrow DB = DJ. \end{aligned}$$

□

### 1.3 双切线弦上比值

(T25)

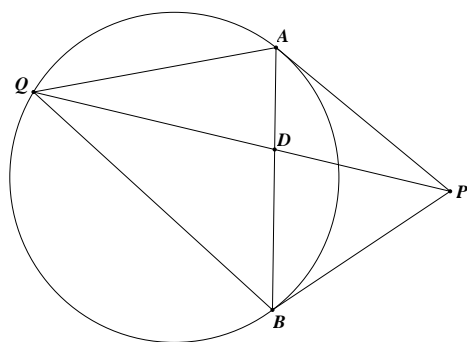


图 39 双切线弦上比值:  $\frac{BD}{AD} = \frac{BQ^2}{AQ^2}$

证明

$$\begin{aligned} \frac{BD}{AD} &= \frac{S_{\triangle BPQ}}{S_{\triangle APQ}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BP \cdot BQ \cdot \sin \angle QBP}{\frac{1}{2} \cdot AP \cdot AQ \cdot \sin \angle QAP} \\ &= \frac{BQ \cdot \sin \angle QAB}{AQ \cdot \sin \angle QBA} = \frac{BQ^2}{AQ^2} \end{aligned}$$

倒数第 2 步的依据:  $AP=BP$ , 切线长定理;  
 $\sin \angle QBP = \sin(\pi - \angle QBP) = \sin \angle QAB$ , 另一边  
 同理; 弦切角与圆周角的关系。

倒数第 1 步的依据: 正弦定理。 □

### 1.4 双切线上的托勒密

(T47)

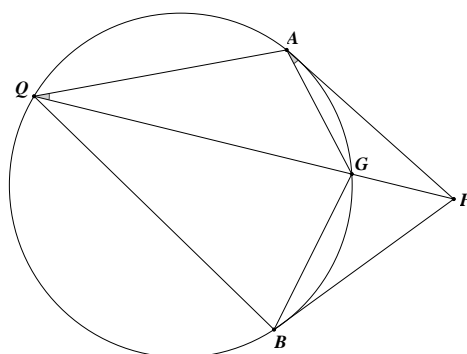


图 40 双切线上的托勒密:  $AG \cdot QB = AQ \cdot BG$   
 (调和四边形  $AQBG$ )

证明

$$\begin{aligned} \angle PAG = \angle AQP &\Rightarrow \triangle AGP \sim \triangle QAP \Rightarrow \frac{AG}{AQ} = \frac{GP}{AP} \\ &= \frac{PA}{PQ} (PA^2 = PG \cdot PQ) \end{aligned}$$

同理可得

$$\frac{BG}{BQ} = \frac{GP}{BP} = \frac{GP}{AP}$$

至此得

$$\frac{AG}{AQ} = \frac{BG}{BQ} = \frac{PA}{PQ} = \frac{PB}{PQ}$$

(圆内接四边形对边之积相等的情况) □

### 1.5 弧中点偶遇相似

(T44)

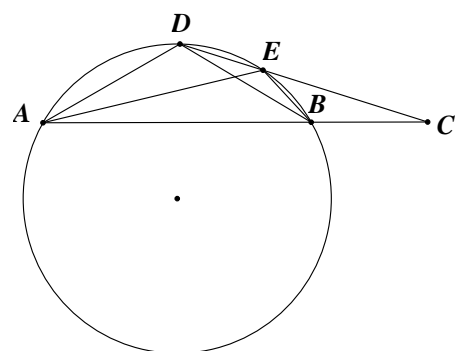


图 41 弧中点偶遇相似:  $\triangle AEC \sim \triangle DEB$

证明

$$\angle EDB = \angle EAB$$

$$\angle BEC = \angle DAB = \angle DBA = \angle DEA$$

$$\Rightarrow \angle DEB = \pi - \angle BEC = \pi - \angle DEA = \angle AEC$$

以上两个条件导出:

$$\triangle AEC \sim \triangle DEB$$

$$DB \cdot BC = AB \cdot BE$$

□

### 1.6 边线、切线、延长线

(T38, 2014)

$BD, CD$  分别为切线, 且  $BD = CD$ 。

特别地, 当  $\angle A = 60^\circ$  时,  $\triangle BCD$  为正三角形。

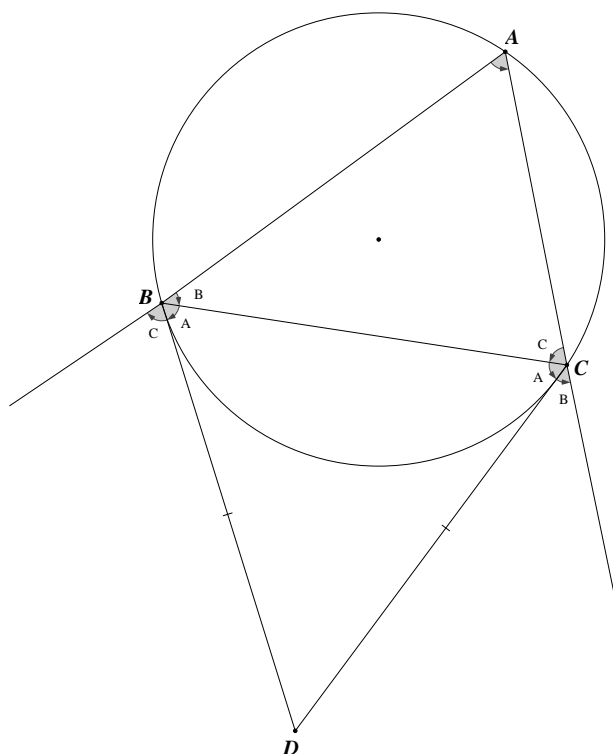


图 42 边线，切线，延长线

### 1.7 垂三角形（光路三角形）射影点

(T48)

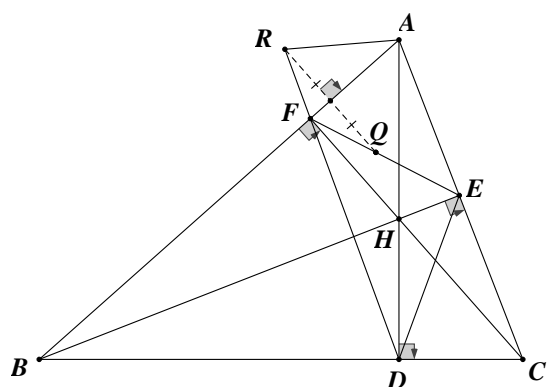


图 43 垂三角形射影点：R, F, D 三点共线。

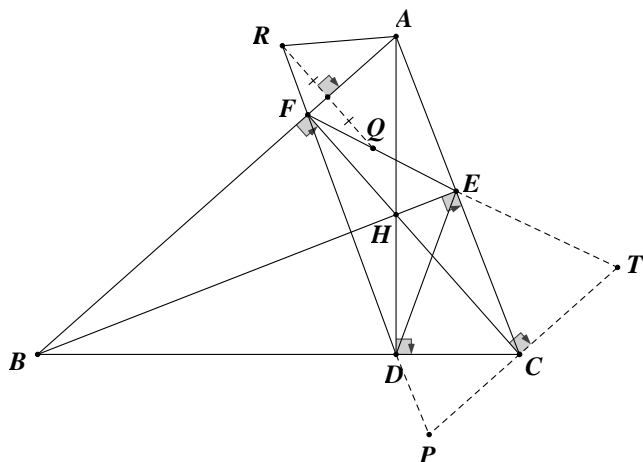


图 44 垂三角形射影点(modified)

证明

$$\begin{array}{ccc}
 \angle RFA & ? & \angle BFD \\
 \parallel & & \parallel \\
 \angle QFA \text{ (射影)} & & \parallel \\
 \parallel & & \parallel \\
 90^\circ - \angle EFC & & 90^\circ - \angle CFD
 \end{array}$$

为了让这个关系成环，下面过 C 作 CF 的垂线，延长 FD 交垂线于 P 点，延长 FE 交垂线于 T 点。

由于 AD, BE, CF 共点于垂心 H，故根据 Ceva 定理，有

$$\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} = 1$$

由于 PT 与 AB 平行，故

$$\frac{CE}{EA} = \frac{CT}{AF}, \frac{BD}{DC} = \frac{FB}{CP}$$

将此代入，即得

$$\frac{CT}{CP} = 1$$

即  $\triangle FPT$  等腰， $\angle EFC = \angle CFD$ 。

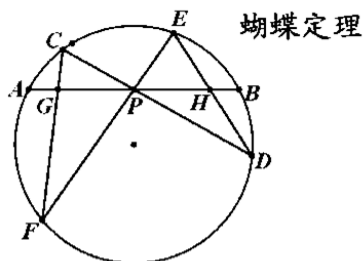
则根据关系链

$$\angle RFA = \angle BFD. \quad \square$$



## 1.8 蝴蝶定理 (Butterfly Theorem)

(T4)



$$\begin{aligned}\frac{AG}{GP} &= \frac{AF \cdot \sin \angle AFC}{FP \cdot \sin \angle CFE} = \frac{AF \cdot AC}{FP \cdot CE}, \\ \frac{BH}{HP} &= \frac{BD \cdot \sin \angle BDE}{PD \cdot \sin \angle EDP} = \frac{BD \cdot EB}{PD \cdot CE}, \\ \frac{AC}{BD} &= \frac{AP}{PD}, \quad \frac{AF}{EB} = \frac{FP}{BP} \\ \frac{AG}{GP} &= \frac{BH}{HP}, \Rightarrow \frac{AG + GP}{GP} = \frac{BH + HP}{HP}\end{aligned}$$

图 45 蝴蝶定理

## 2. 综合分析法

在证明过程中，思路的流畅要考合适的方法作为保障。宋教授所推荐的，是“综合分析法”。

一方面，从难度分布上看，中间一般是最难的。像打隧道一样，若从两头一起挖，把目标集中于中间，将有助于问题的解决。

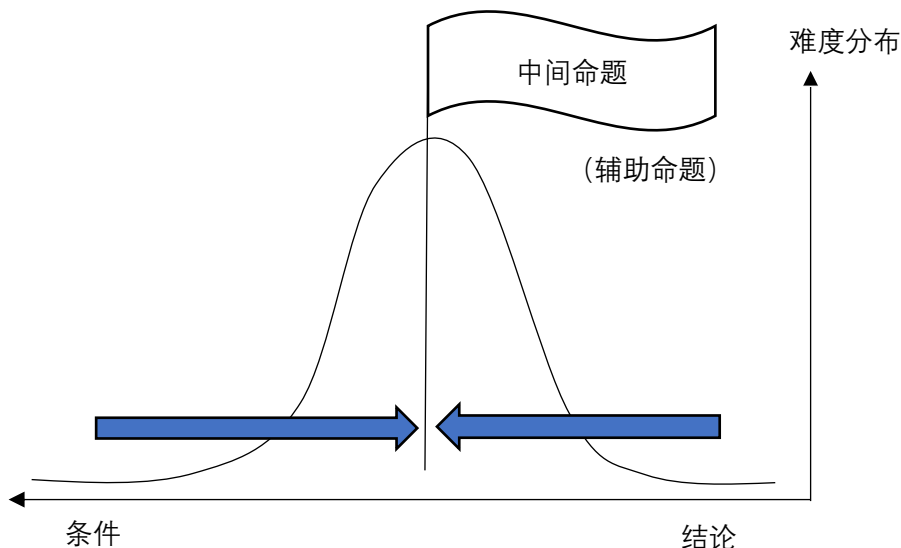


图 46 综合分析法示意

另一方面，条件所能得到的充分条件是很多，但结论所需要的必要条件却可能只是其中的一小部分。使用“综合分析法”将大大减少路径的选择。

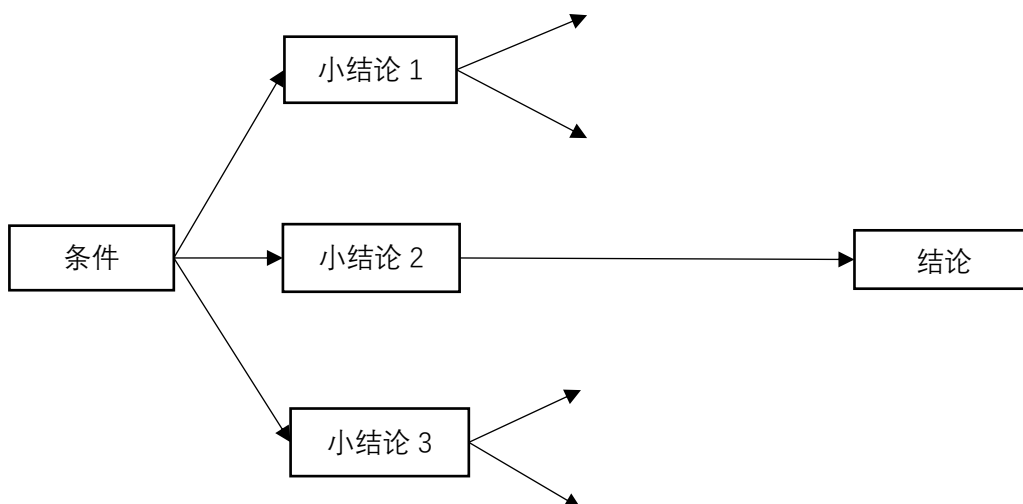


图 47 路径的选择（摘自《帮你学几何》）

用分析法，因为结论成立的理由有限，所以每一步的目的清楚，容易找到证明的路子，就是写起来麻烦一些。用综合法，虽然写起来清晰简明，前因后果，一目了然，可是思路分支多。究竟那条路能通到结论，常常不是一下子就能看得出来的。看起来，先用分析法探求证题的思路，再用综合法叙述出来，可以扬长避短。（臧龙光, 2014, p. 43）

鉴于这样的原因，下述说明中尽量采用此法，以展示思维过程。

### 3. 间接证法

（反证法与同一法）

宋教授在讲课过程中着重介绍了间接证法。其威力不容小觑。

#### 3.1 反证法：破坏的对称性——重新利用

一般来说，不能直接从条件推出结论的题，用反证法。另外，不好从条件推出结论的题，还有结论的反面比结论本身更具体、更明确、更简单的题，也可以用反证法。（臧龙光, 2014, p. 115）

但是宋教授在证明一道题的过程中，却用出了反证法的新花样。先是破坏了对称性，这可能会导致另一半无法正常地发挥作用，但用完反证法后，却能将破坏对称性的假设在与另一半的结合中产生矛盾。

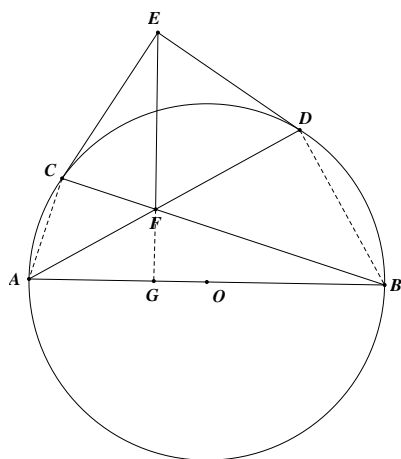


图 48 题九

(T9)  $AB$  是圆  $O$  的直径， $EC$ 、 $ED$  分别是圆  $O$  的切线，切点为  $C, D$ ，连接  $BC$  和  $AD$  交于  $F$ ，求证： $EF \perp AB$ 。

$$\begin{array}{ccc}
 EF \perp AB & \Leftrightarrow \angle GFB & ? \quad 90^\circ - \angle FBA \\
 & \parallel & \parallel \\
 & \angle EFC \text{ (对顶角)} & \angle CAB \\
 & & \parallel \\
 & & \text{(弦切角=圆周角)} \angle BCE
 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow ED = EC \quad ? \quad EF$$

但这一步在纯几何证法中难以下手。（ $F$  为交点；可用解析几何直接证，但还是麻烦）  
但注意到

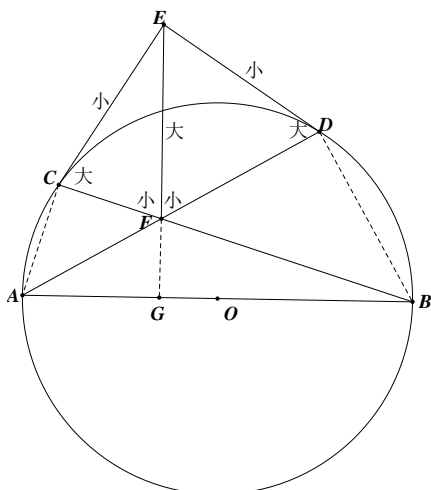


图 49 题九(Modified)

$$\angle CFD = \angle AFB = \angle AFG + \angle GFB$$

$$= 90^\circ - \angle DAB + 90^\circ - \angle CBA$$

$$= \angle CAB + \angle DBA$$

$$= \angle ECF + \angle EDF$$

用反证法。若  $\angle EFC < \angle BCE$ , 则  $EC = ED$  也要小,  $EF$  会大,  $\angle EFD < \angle EDG$ , (大边对大角) 两个不等式相加得到

$$\angle CFD = \angle EFC + \angle EFD < \angle ECF + \angle EDF$$

这是矛盾的。若  $\angle EFC > \angle BCE$  同理得到矛盾。故  $\angle EFC = \angle BCE$ 。□

这样的证法是前所未见的。

### 3.2 同一法：麻烦条件简单做——证明条件

对符合同一法则的命题，要是直接证明有困难，就可以改正它的逆命题。证明了逆命题是对的，根据同一法则，它的原命题也就被证明是对的。这种证明方法，叫做同一法。(臧龙光, 2014, p. 120)

对于一些条件非常棘手的问题，像“交点”(在解析几何中被认为是两个方程联立的结果)之类，经同一法转化后可改证点共线、比例相等的问题。

**(某晚做的题, T'65)** 设  $\odot O_1$  与  $\odot O_2$  交于  $P, Q$  两点,  $AB$  为公切线,  $A, B$  是切点.  $AP$  又交  $\odot O_2$  于  $C$ ,  $M$  为  $BC$  中点. 求证:  $\angle MQP = \angle CPB$ . (单尊, 2015, p. 27)

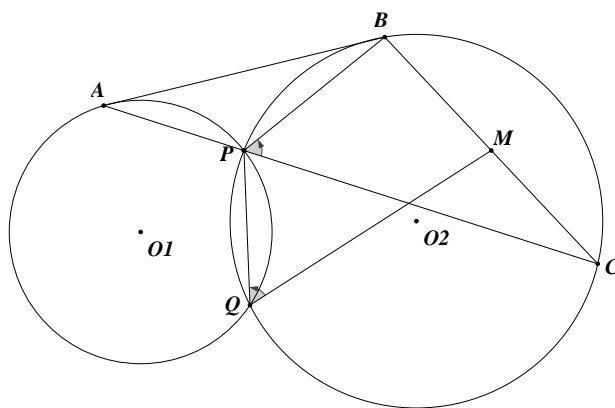


图 50 题' 六十五图

分析与证

这一题让我尝到了不用同一法的苦果。

经过 40 分钟思考，终于作出了下面的辅助线。



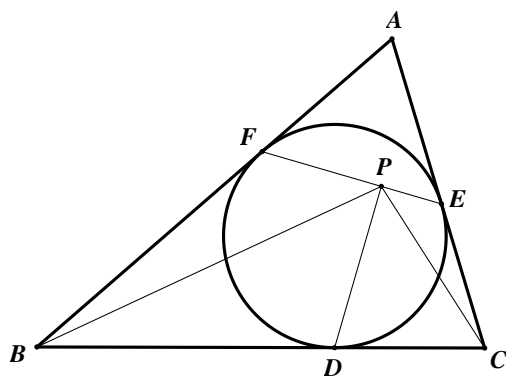


图 52 题十三图

(T13)  $\triangle ABC$  的内切圆分别与  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  相切于  $D$ 、 $E$ 、 $F$ ， $DP \perp EF$  于  $P$ ，证明： $PD$  平分  $\angle BPC$ 。

分析

$PD$  平分  $\angle BPC$

$$\Leftrightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{BD}{DC} = \frac{BF}{CE}$$

$$\Leftrightarrow \triangle BFP \sim \triangle CEP$$

$$\Leftrightarrow \frac{FP}{PE} = \frac{BF}{EC}$$

( $\angle BFP = \angle CEP$ ，弦切角=圆周角)

注意，此处不能再找角了，因为你要证的就是角，应该从边考虑。(非角而边)

证明 (法一，同一法) 在  $EF$  上找一点  $P'$ ，使

$$\frac{FP'}{P'E} = \frac{BF}{EC}$$

$$\Rightarrow \triangle BFP' \sim \triangle CEP' \Rightarrow \angle BP'F = \angle CP'E, \frac{BP'}{P'C} = \frac{BF}{CE} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \angle BP'D = \angle CP'D \Rightarrow DP' \perp EF$$

即  $P=P'$ 。

□

## 4. 三角方法

值得一提的是，三角法也是很重要的方法。

三角，是简单几何构图中计算起来最快的方法，也是覆盖面最广的方法，所以联赛几何经常可以用三角做，三角法的技术含量其实不算很高，大概就是把角写出来（这里可能要用角元梅、赛），然后用正弦、余弦定理表示边，最后算出对应的性质。需要注意的是：和差化积、积化和差等三角变形公式必须非常熟悉，并且在处理具体问题的时候，一般来说乘比加的形式更漂亮，因为更容易消掉一些东西——所以在表示变得时候尽可能少用余弦定理，余弦定理一般是最后代入算。三角法有时要配合同一法。有时候一个角看似不好求，实际上就是已有角的线性表示，代入之后一下就做出来了。所以在三角法陷入僵局的时候可以考虑代入特殊角。(何天成, 2017, p. 17)

续上一题。

(法二，三角法)

$$PE = DE \cdot \cos \angle DEP = 2EC \cdot \sin \frac{\angle C}{2} \cos \frac{\pi - \angle B}{2} = 2EC \cdot \sin \frac{\angle C}{2} \sin \frac{\angle B}{2}$$

$$FP = FD \cdot \cos \angle DFP = 2BF \cdot \sin \frac{\angle C}{2} \sin \frac{\angle B}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{FP}{PE} = \frac{BF}{EC}$$

□

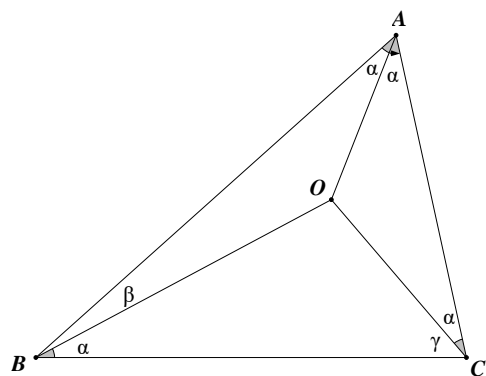


图 53 题六图

(T6) 已知  $O$  为  $\triangle ABC$  内一点, 且满足  $\angle BAO = \angle CAO = \angle CBO = \angle ACO$ , 求证:  $\triangle ABC$  的三边构成等比数列。

证明: (三角法) 由角元 Ceva 定理得

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = 1$$

$$\text{即} \quad \sin^2 \alpha = \sin \beta \cdot \sin \gamma \quad (*)$$

$$\text{注意到} \quad 4\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$\text{即} \quad 2\alpha + \beta + \alpha + \gamma + \alpha = \pi$$

对(\*)式变形, 得

$$\begin{aligned} 1 - \cos 2\alpha &= \cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma) = \\ &= \cos[(\alpha + \beta) - (\alpha + \gamma)] \\ &\quad + \cos(4\alpha) \\ &= \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \gamma) \\ &\quad + \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \gamma) + \cos 4\alpha \end{aligned}$$

$$\text{LHS} = 1 + \cos[(\beta + \alpha) + (\gamma + \alpha)] = 1 + \cos(\beta + \alpha) \cos(\gamma + \alpha) - \sin(\beta + \alpha) \sin(\gamma + \alpha)$$

$$\text{注意到} 1 - \cos 4\alpha = 2 \sin^2 2\alpha, \text{ 得} \sin^2 2\alpha = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \gamma) \Rightarrow a^2 = bc \quad \square$$

## 5. 角与弧

有一题很有意思, 它可以用多种方法完成, 既可以纯导角, 又可以用弧的运算。

(T36, IMO) 设  $P$  是  $\triangle ABC$  内部的一点, 直线  $AP$ 、 $BP$ 、 $CP$  与外接圆交于  $M$ 、 $K$ 、 $L$ , 圆在  $A$  点的切线交  $BC$  的延长线于  $S$ , 若  $SA=SP$ , 证明:  $ML=MK$ 。

证明:  $ML=MK \Leftrightarrow \angle MAL = \angle MAK$

$$SP^2 = SA^2 = CS \cdot BS, \angle PSC = \angle PSB \Rightarrow \triangle PCS \sim \triangle BPS \Rightarrow \angle SPC = \angle PBS$$

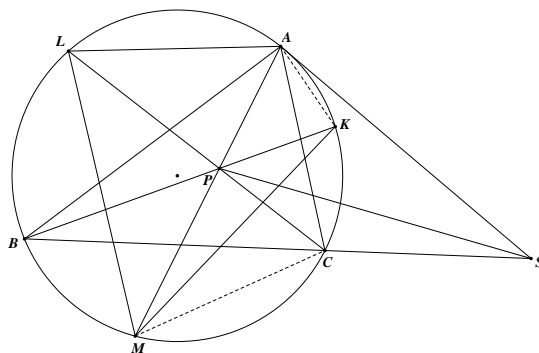


图 54 题三十六图

(法一, 导角)

$$\begin{array}{ccc} \angle MAL & ? & \angle MAK \\ \parallel & & \parallel \\ \angle MCL & & \angle MAS - \angle KAS \\ \parallel & & \parallel \\ \angle BCM + \angle PCB & & \angle APS \text{ (AP=SP)} - \angle KBA \\ \parallel & & \parallel \\ \angle BKM + \angle PCB & & \angle APK + \angle KPS - \angle KBA \\ \parallel & & \parallel \\ \angle BAM + \angle PCB & ? & \angle BAM + \angle KPS \end{array}$$

而  $\angle KPS = \angle PBS + \angle PSB = \angle SPC$  (已证)  $+ \angle PSB = \angle PCB$ .  $\angle MAL = \angle MAK$ .  $\square$

这个证法比较自然，我就是这样做的。但是中间的导角次数达 12 次，我是画了十张图才搞定的。画这么多张图的原因，是因为单墀说过这样的话：

很多线画在同一个图上，形象就不清楚、不鲜明了，所以图应有分有合。解几何题时，应多画几个草图。

这种草图不一定准确。但这种“形象”已经有助于我们思考了。平面几何正是这样一门科学，它利用未必准确的图形推出准确的结果。

这未必准确的图形不是完全错误的图形。它像漫画、速写或者中国的写意图。虽然不是照片，却也能反映事物的本质，“得其精髓”。培养学生画这种草图的能力也是很重要的。

(单墀, 2015, p. 99)

(法二，弧的运算与构造平行线)

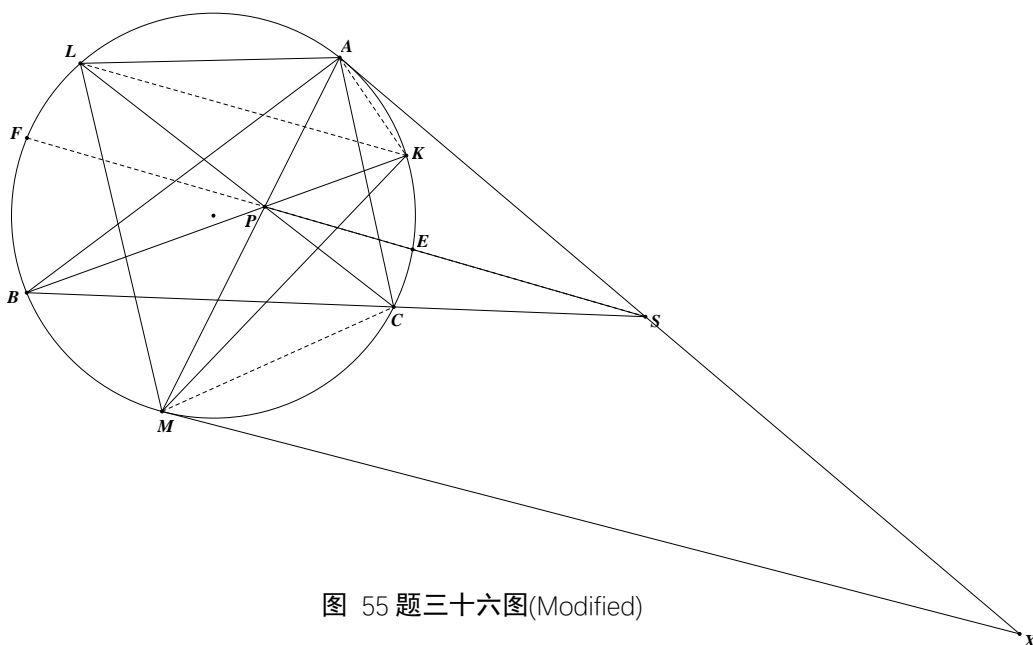


图 55 题三十六图(Modified)

延长  $SP$ ，交外接圆于  $E, F$ 。过  $M$  作圆的切线交  $AS$  的延长线于  $X$ 。

由于  $\angle SPC = \angle PBS$ ，则  $\frac{1}{2}\widehat{EC} + \frac{1}{2}\widehat{FL} \stackrel{m}{\Leftrightarrow} \angle SPC = \angle LPF = \angle PBS \stackrel{m}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\widehat{EC} + \frac{1}{2}\widehat{EK}$ ，故  $\widehat{FL} = \widehat{EK}$ ，故  $LK \parallel FE$ 。

$MX = XA, SP = SA \Rightarrow XM \parallel PS$ ，即  $XM \parallel FE$ 。

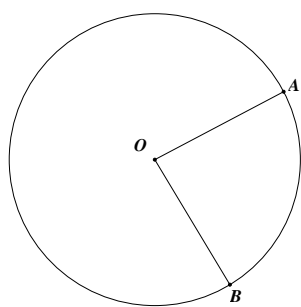
故  $XM \parallel LK$ 。

而  $\frac{1}{2}\widehat{AE} + \frac{1}{2}\widehat{EM} \stackrel{m}{\Leftrightarrow} \angle ALM = \angle PAS = \angle APS = \angle FPM \stackrel{m}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\widehat{AE} + \frac{1}{2}\widehat{FM}$

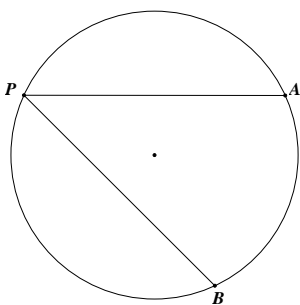
故  $\widehat{FM} = \widehat{EM}$ ， $M$  是弧  $\widehat{FME}$  中点，由于平行，也是弧  $\widehat{LMK}$  中点，故  $ML = MK$ .  $\square$

这个证法涉及到弧的运算与平行线的构造，实际上，不构造平行线也能通过弧的运算导出结果（法一可以证实这一点），在此略。

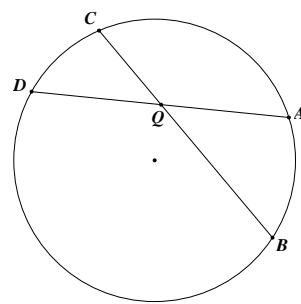
关于弧的运算有下面重要的结果：



(i) 圆心角  $\angle AOB \overset{m}{\Leftrightarrow} \widehat{AB}$



(ii) 圆周角  $\angle APB \overset{m}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2} \widehat{AB}$



(iii) 弦夹角

$$\angle CQD \overset{m}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2} \widehat{AB} + \frac{1}{2} \widehat{CD}$$

图 56 弧的运算

## 6. 蝴蝶定理

(解析方法)

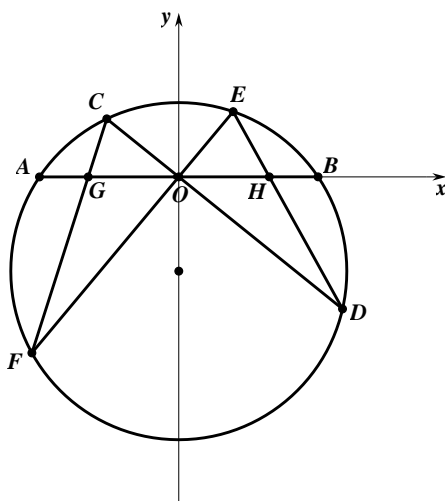


图 57 解析法

如图建立平面直角坐标系。

令直线 CD 的方程为:  $y = k_1x$ ; 直线 EF 的方程为:  $y = k_2x$ ; 圆的方程为:  $x^2 + (y + a)^2 = R^2$ 。那么下式就表示过四点的曲线系:

$$x^2 + (y + a)^2 - R^2 - \lambda(y - k_1x)(y - k_2x) = 0$$

一定存在  $\lambda = \lambda_1$  使得上式表示直线 CF、DE 的方程。

令  $y = 0$

$$\text{则 } x^2 + a^2 - R^2 - \lambda_1 k_1 k_2 x^2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

即  $OG = OH$ 。

□

这种证法的好处在于, 这个曲线不一定是圆了, 可以扩展至任何二次曲线。甚至是直线系。



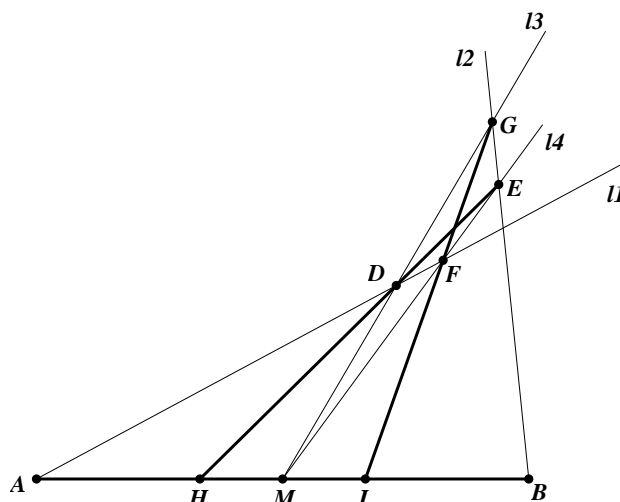


图 58 直线系中的蝴蝶定理

$M$  是  $AB$  中点, 则  $HM=MI$ 。

而蝴蝶定理还有一个更为普遍的形式:

设  $AB$  为一圆任一条弦,  $O$  为  $AB$  上任一点, 过  $O$  任作两条弦  $CD$ 、 $EF$ , 连接  $CF$ 、 $ED$  分别交  $AB$  于  $G$ 、 $H$ , 则

$$\frac{1}{OG} - \frac{1}{OH} = \frac{1}{OA} - \frac{1}{OB}.$$

为证明此, 把左边化成

$$\frac{OH - OG}{|OH \cdot OG|} = \frac{x_1 - x_2}{|x_1 x_2|}$$

把原来证明中所设的圆方程更一般化。联立得解。(证明略)

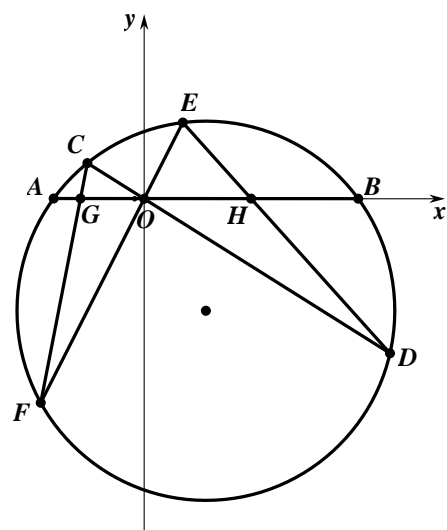


图 59 普遍形式

(T13) 凸四边形  $ABCD$  的外接圆圆心为  $O$ , 已知  $AC \neq BD$ , 且  $AC$  与  $BD$  交于  $E$ , 若  $P$  为  $ABCD$  内部的一点, 且  $\angle PAB + \angle PCB = \angle PBC + \angle PDC = 90^\circ$ . 求证:  $O$ 、 $P$ 、 $E$  三点共线。

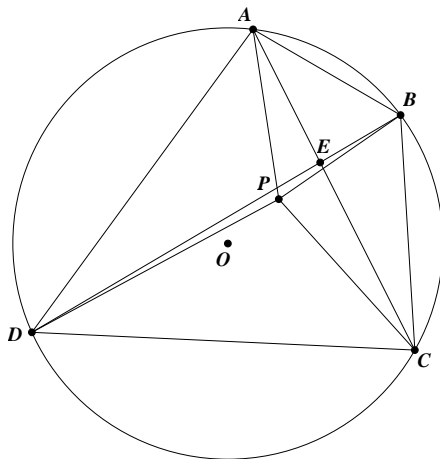


图 60 题 13 图

**证明：辅助线大法** 直线  $AP, BP, CP, DP$  交圆  $O$  于  $A', B', C', D'$ 。直线  $OE$  交圆  $O$  于  $X, Y$ 。  
 作出这些辅助线的作用，就是充分利用圆的性质——导角功能。  
 由于  $\angle PAB + \angle PCB = \angle A'CB + \angle BA'C' = 90^\circ$ ，则  $\angle A'BC' = 90^\circ$ 。则  $A', C'$  是对径点，过点  $O$ 。同理  $B', D'$  是对径点。

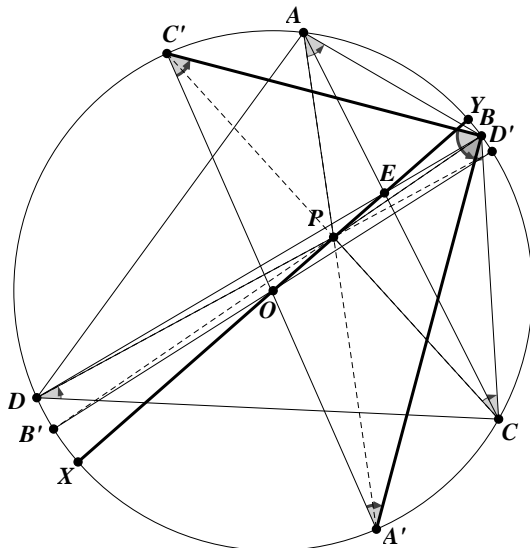


图 61 题 13 图 (Modified)

怎么证共线呢？

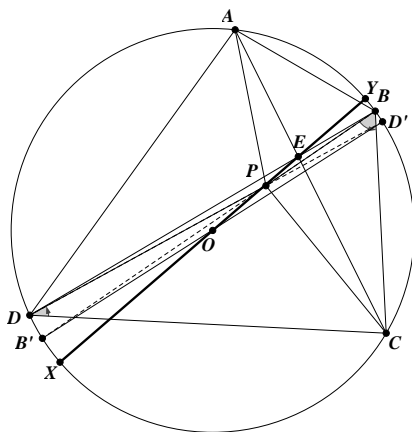
同一法！

设  $XY$  交  $AC$  于  $E'$ 。下证  $E' = E$ 。

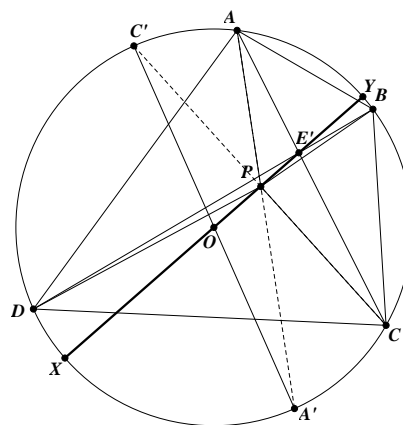
证明方法就是用到上面的蝴蝶定理普遍形式。

对于  $B, B', D, D'$  所构成的蝴蝶， $B'D'$  与  $XY$  交于  $O$ ， $BD$  与  $XY$  交于  $E$ ，有

$$\frac{1}{PX} - \frac{1}{PY} = \frac{1}{PO} - \frac{1}{PE}$$



第一只蝴蝶



第二只蝴蝶

图 62 图形分解

对于  $A, A', C, C'$  所构成的蝴蝶， $AC$  与  $XY$  交于  $E'$ ， $A'C'$  与  $XY$  交于  $O$ ，有

$$\frac{1}{PX} - \frac{1}{PY} = \frac{1}{PO} - \frac{1}{PE'}$$

则  $PE = PE'$ ，是同侧的，则  $E' = E$ 。即  $O, P, E$  三点共线。□

## 7. 帕斯卡定理

$PA$  和  $PB$  为圆的切线，两条割线与圆分别交于  $C, D; E, F$ ，则  $AB, DF, CE$  共点于  $G$ 。

**证明** 等价于证明  $BM, CN, DL$  共点于  $G$ 。

对  $\triangle BCD$  用 Ceva 定理，

$$\frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \stackrel{?}{=} 1$$

方向：往外转化，往里走由于没有确定是否共点，是走不通的。

对于线段比例式，面积法也是好帮手。

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{S_{\triangle CAM}}{S_{\triangle DAM}} \cdot \frac{S_{\triangle DNE}}{S_{\triangle BNE}} \cdot \frac{S_{\triangle BFL}}{S_{\triangle CFL}} \\ &= \frac{AC \sin \angle CAB}{AD \sin \angle DAB} \cdot \frac{DE \sin \angle DEC}{BE \sin \angle CEB} \cdot \frac{BF \sin \angle DFB}{CF \sin \angle CFD} \\ &= \frac{AC}{AD} \cdot \frac{DE}{BE} \cdot \frac{BF}{CF} \end{aligned}$$

见本章 1.4 双切线上的托勒密 内容，可得

$$\frac{AC}{AD} = \frac{PA}{PD} \cdot \frac{BF}{BE} = \frac{PF}{PB}$$

$$\text{LHS} = \frac{PA}{PD} \cdot \frac{PF}{PB} \cdot \frac{DE}{CF} = \frac{PF}{PD} \cdot \frac{DE}{CF} = 1 \iff \frac{PF}{CF} = \frac{PD}{DE} \iff \triangle PCF \sim \triangle PED$$

这是成立的。

这个证明中有一个副产物，关于圆内接六边形对角线共点判别法：

$$\frac{AC}{AD} \cdot \frac{DE}{BE} \cdot \frac{BF}{CF} = \frac{AC}{CF} \cdot \frac{FB}{BE} \cdot \frac{ED}{DA} = 1$$

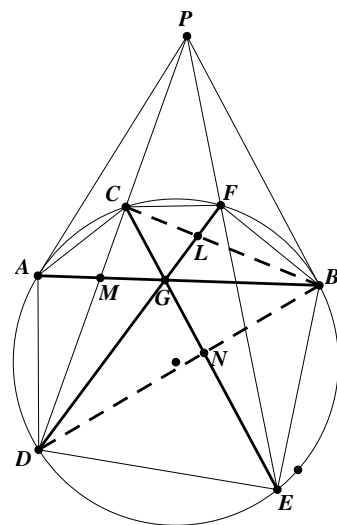


图 63 帕斯卡定理

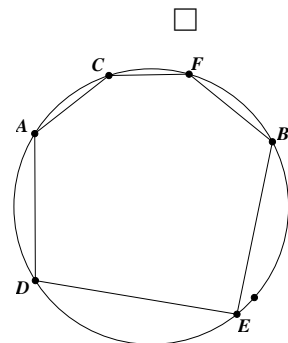
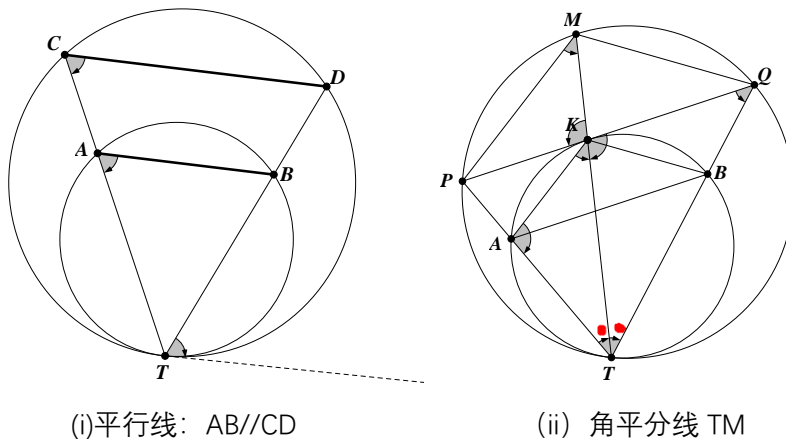


图 64 圆内接六边形

## 8. 内切两圆

两圆内切后，添加线段，会有奇妙的性质。



(i) 平行线： $AB \parallel CD$

(ii) 角平分线  $TM$

图 65 两圆内切

## 9. 调和点列

如图是一个完全四边形及延长线, 直线  $AC$  与  $BD, EF$  的交点  $P, N$ 。则出现调和点列  $A, P, C, N$ ;  $E, N, F, M$ ;  $B, P, D, M$ 。

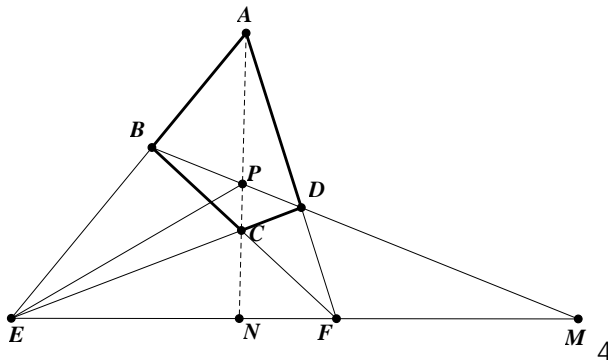


图 66 完全四边形及延长线

**证明** 对  $\triangle AEF$  用 Ceva 定理, 有

$$\frac{AB}{BE} \cdot \frac{EN}{NF} \cdot \frac{FD}{DA} = 1$$

$BDM$  截  $\triangle AEF$ , 用 Menelaus 定理, 有

$$\frac{AB}{BE} \cdot \frac{EM}{MF} \cdot \frac{FD}{DA} = 1$$

比较两式, 可得

$$\frac{EN}{NF} = \frac{EM}{MF}$$

根据调和点列的定义,  $E, N, F, M$  为调和点列。

调和点列中的每一点与一点所连的直线形成的线束成为调和线束, 一条直线截线束的交点也成为调和点列。则  $BE, BN, BF, BM$  交  $AN$  的点  $A, N, C, P$  为调和点列,  $AE, AN, AF, AM$  交  $BM$  于  $B, P, D, M$  也是调和点列。

**性质** 对线段  $AB$  的内分点  $C$  和外分点  $D$  以及直线  $AB$  外一点  $P$ , 给出四个论断:

- (1)  $PC$  是  $\angle APB$  的外分线; (2)  $PD$  是  $\angle APB$  的外角平分线; (3)  $C, D$  调和分割线段  $AB$ ;
- (4)  $PC \perp PD$ 。

以上四个论断中, 任意选取两个作题设、另外两个作结论组成的六个命题均为真命题。

(范端喜、邓博文, 2012, p. 80)

□

# 等角线专题

叶中豪 (2017.7)

等角线在许多几何题中出现过。这一次，叶中豪就给我们准备了这么一个专题。

## 1. 等角线

在  $\angle AOB$  中，射线  $OX$  和  $OY$  使得  $\angle AOX = \angle BOY$ ，则称  $OX$  和  $OY$  是关于  $\angle AOB$  的等角线。其中角平分线为整个图形的对称轴。

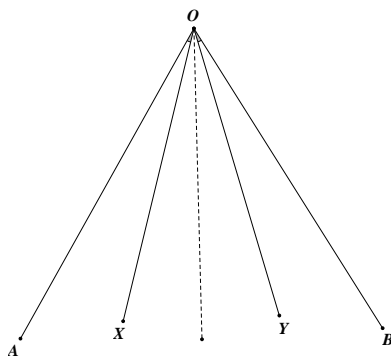


图 67 等角线

关于等角线的第一个定理就是史坦纳 (Steiner) 定理。

**Steiner 定理**

$D, E$  在  $BC$  上，满足  $\angle BAD = \angle CAE$ . 则

$$(1) \frac{BD \cdot BE}{DC \cdot EC} = \frac{AB^2}{AC^2}; (2) \frac{BD \cdot DC}{BE \cdot EC} = \frac{AD^2}{AE^2}.$$

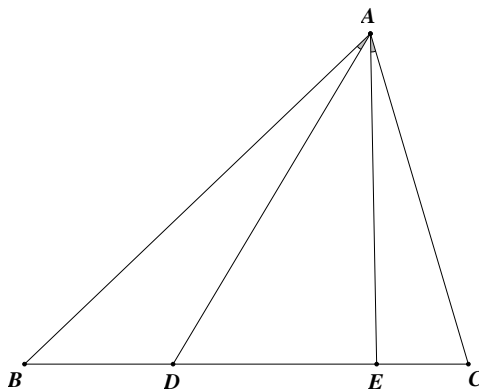


图 68 Steiner 定理

由于等角线的定义，有了两个相等的角，常常就可以用面积法解决。

用面积证题的基本思想：用不同的方法计算同一块面积（算多次），从而得到一个等式——这样的等式我们把它叫做“面积方程”；在对这个“面积方程”进行整理或变换，以获得我们所要的结果。（张景中、彭翥成, 2016, p. 6）

那么就可以列出面积方程了：

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AEC}} = \frac{AB \cdot AD}{AE \cdot AC} = \frac{BD}{EC}$$

两点说明：第一个等号把相同角的正弦及  $\frac{1}{2}$  约掉了；第二个等号是因为为等高的三角形

面积为底边之比。

注意到第 (2) 小题并没有影响本质, 只是把  $\triangle ADE$  看成原三角形, 则  $AB, AC$  为其顶角的等角线。

故同理, 还有一对等顶角三角形:

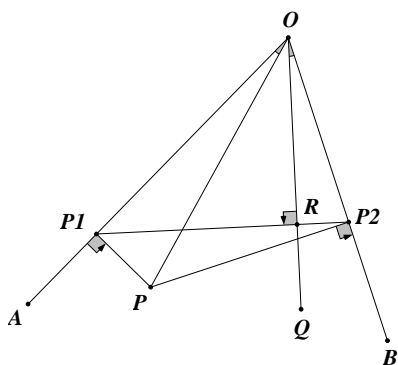
$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{AB \cdot AE}{AC \cdot AD} = \frac{BE}{DC}$$

两个式子相乘得 (1), 相除得 (2)。

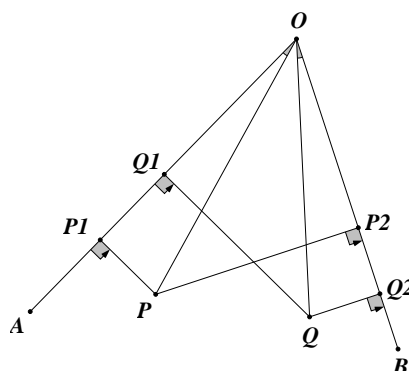
□

## 2. 等角点

我们把分别在—对等角线上的两点称为—对“等角点” (叶中豪的定义)。X, Y 点即为—对等角点。等角点有很重要的研究价值, 有如下的 6 条重要性质。

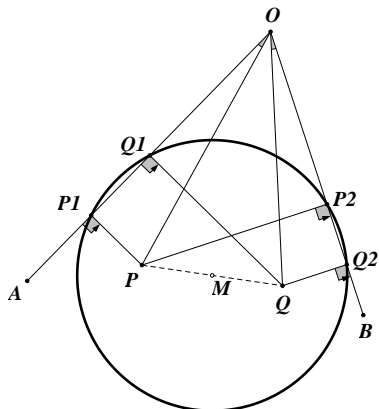


**性质 1:** 一条等角线上的点  $P$  与原角的两边垂线的垂足连线  $P_1P_2 \Leftrightarrow$  连线  $P_1P_2$  与另一条等角线  $OQ$  垂直



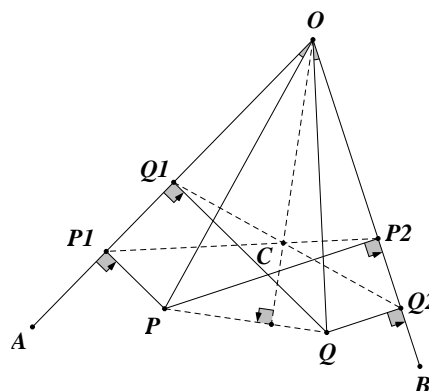
**性质 2:** 一对等角线上的两点  $P, Q$  向两边的垂足连线  $\Leftrightarrow \overrightarrow{PP_1} \cdot \overrightarrow{QQ_1} = \overrightarrow{PP_2} \cdot \overrightarrow{QQ_2}$

**性质 3:**  $OP_1 \cdot OQ_1 = OP_2 \cdot OQ_2$  (四边形相似)



**性质 4:**  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  四点共圆, 圆心为  $PQ$  中点  $M$ 。

**性质 5:** 一对等角线上的两点  $P, Q$  关于直线  $OA, OB$  光路和相等。



**性质 6:**  $OC \perp PQ$ 。

图 69 等角点的性质

其中性质 6 为 CMO 讲题 (叶中豪出的)。

证明：（法一）注意到

$$\text{四边形 } OP_1PP_2 \sim \text{四边形 } OQ_2QQ_1$$

则对角线交点  $M, N$  为相似形的对应点，这直接导致了

$$\frac{OM}{MP} = \frac{ON}{NQ} \Rightarrow MN \parallel PQ$$

根据性质 1 可得：

$$MP_2 \perp ON, NQ_1 \perp OM$$

故点  $C$  为  $\triangle OMN$  的垂心， $OC \perp MN$ ，则  $OC \perp PQ$ 。 □

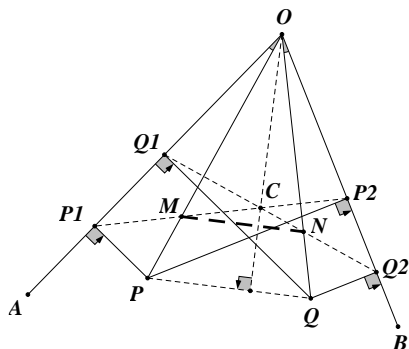


图 71 性质 6 法一图

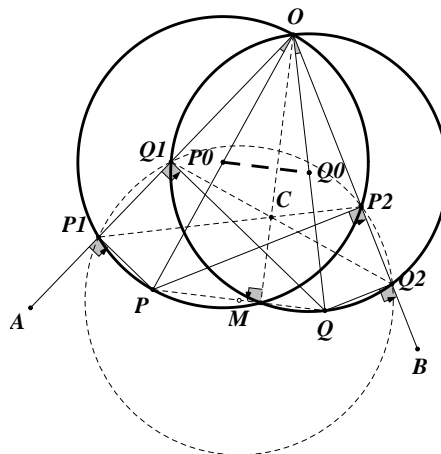


图 70 性质 6 法二图

（法二） $P_0, Q_0$  分别为  $OP, OQ$  的中点，同时也分别为  $\odot P_1PP_2, \odot Q_1QQ_2$  的圆心， $P_0Q_0$  成为连心线。且  $P_0Q_0 \perp PQ$ 。

$$\begin{aligned} OC \perp PQ &\Leftrightarrow OC \perp P_0Q_0 &\Leftrightarrow OC \text{ 为 } \odot P_1PP_2, \odot Q_1QQ_2 \text{ 的根轴} \\ &\Leftrightarrow P_1C \cdot CP_2 = Q_1C \cdot CQ_2 \text{ (圆幂相等)} &\Leftrightarrow P_1, P_2, Q_1, Q_2 \text{ 四点共圆 (性质 4)} \quad \square \end{aligned}$$

叶中豪在讲解此题是要我们能够“简化问题 抓住要害”，这一习惯可以通过上文中单增所述的“画草图”能力的培养而形成。

### 3. 等角共轭点

一个角的一对等角线或许不够神奇，那么三角形三角的三对呢？

有下面的这样一个定理：

**等角共轭定理** 若  $\triangle ABC$  中每个顶角内各作一条射线恰好共点，则它们关于各角的等角线也一定共点。

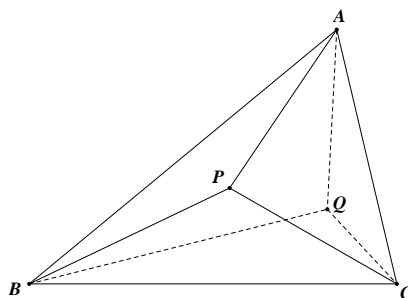


图 72 等角共轭定理

下面给出这一定理的最简证明。

**证明：**

由于  $AP, BP, CP$  共点于  $P$ ，则根据角元 Ceva 定理，有：

$$\frac{\sin \angle BAP}{\sin \angle PAC} \cdot \frac{\sin \angle ACP}{\sin \angle PCB} \cdot \frac{\sin \angle CBP}{\sin \angle PBA} = 1$$

由于等角共轭，则

$$\begin{cases} \angle BAP = \angle CAQ \\ \angle PAC = \angle BAQ \\ \angle ACP = \angle BCQ \\ \angle PCB = \angle ACQ \\ \angle CBP = \angle ABQ \\ \angle PBA = \angle CBQ \end{cases}$$

做替换得：

$$\frac{\sin \angle CAQ}{\sin \angle BAQ} \cdot \frac{\sin \angle BCQ}{\sin \angle ACQ} \cdot \frac{\sin \angle ABQ}{\sin \angle CBQ} = 1$$

即  $AQ, BQ, CQ$  共点于  $Q$ 。 □

当然，本定理也有其它证法，如 Steiner 定理；利用“等角点”性质证法；纯几何证法。在此不再赘述。

此处的  $P, Q$  互称为**等角共轭点**。通过等角共轭点可建立一一对应关系，三角形中的常见等角共轭点如下表所示。

表格 4 三角形中等角共轭点

点	等角共轭点
外心 $O$	垂心 $H$
内心 $I$ (旁心 $I_A, I_B, I_C$ )	自对应
重心 $G$	类似重心 $G'$
费马点 $F$	等力点 $F'$
边上的点	顶点
外接圆上点	无穷远点 (非欧几何, 射影几何)

关于三角形内两点  $P, Q$  还有一个重要的不等式：Klamkim 不等式。

**Klamkim 不等式**

$$\sum \frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC} \geq 1$$

等号成立条件：当且仅当  $P, Q$  互为**等角共轭点**时。

这个命题就算得上是几何不等式了。值得一提的是，几何不等式有时可用面积法巧妙地证出来。

应用面积关系证明不等式，大体上有两类方法：

(1) 面积模型法：把所要证的不等式两端用两块面积表示，然后用割补法或面积包含关系证明一块比另一块大。

(2) 等式转化法：先利用面积关系导出一些等式，从这些等式出发，或者放大、缩小某一端，或者和某些已知的不等式配合，可以到处所要的不等式。

(张景中、彭翥成, 2016, p. 69)



看到这个不等式右边是 1，有没有什么冲动呢？——把分母化成相同的。那么对于这一题我们可以证明局部不等式——把  $\triangle ABC$  割开，使得不等式左边的每一项都能够大于等于某一个项，使得他们加起来等于 1。

这个想法是能够成功的。

过  $P$  点向三角形各边作垂线，垂足分别为  $D, E, F$ ，连接  $QD, QE, QF$ ，那么这就是割开三角形的刀痕了！

$$\begin{aligned} S_{AEQF} &\leq \frac{1}{2} \cdot EF \cdot AQ \quad (\because \sin \theta \leq 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot AP \cdot \sin A \cdot AQ \quad (\text{正弦定理}) \end{aligned}$$

第一个不等式牵扯到简单四边形（四边互不相交）的面积公式：简单四边形的面积，等于其对角线之积乘以对角线夹角的正弦之半。（张景中、彭翥成，2016, p. 13)

最后一个等式是因为  $A, F, P, E$  共圆。

于是乎，

$$\frac{S_{AEQF}}{S_{\triangle ABC}} \leq \frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC}$$

构造成功了！

$$1 = \sum \frac{S_{AEQF}}{S_{\triangle ABC}} \leq \sum \frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC}$$

□

值得一提的是，等号成立是等角共轭点还没完，当且仅当  $P, Q$  为老封点（X 点，叶中豪的定义：垂三角的类似重心在原三角形中为老封点）时，三项皆为  $\frac{1}{3}$ ，非常神奇！

## 4. 垂足三角形

在上文 Klamkim 不等式的证明中， $\triangle DEF$  就是一个关于  $\triangle ABC$  的垂足三角形（pedal triangle）。特别地，当  $P$  在  $\triangle ABC$  的外接圆上时， $\triangle DEF$  将成为退化三角形，成为西姆松线。

关于垂足三角形，有两个重要的公式和一个重要的定理。

密克公式

$$\begin{cases} \angle BPC = \angle A + \angle D \\ \angle CPA = \angle B + \angle E \\ \angle APB = \angle C + \angle F \end{cases}$$

Carnot 公式

$$\begin{cases} EF = AP \sin A = \frac{AP \cdot BC}{2R} \\ FD = BP \sin B = \frac{BP \cdot CA}{2R} \\ DE = CP \sin C = \frac{CP \cdot BA}{2R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow EF:FD:DE = (AP \cdot BC):(BP \cdot CA):(CP \cdot BA)$$

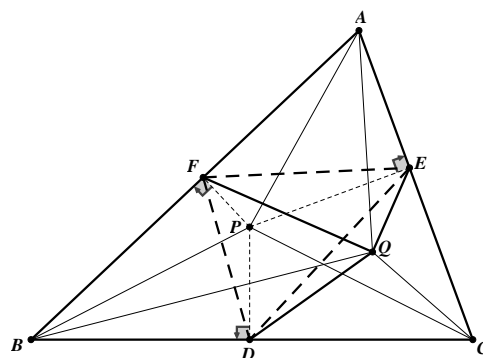


图 73 Klamkim 不等式

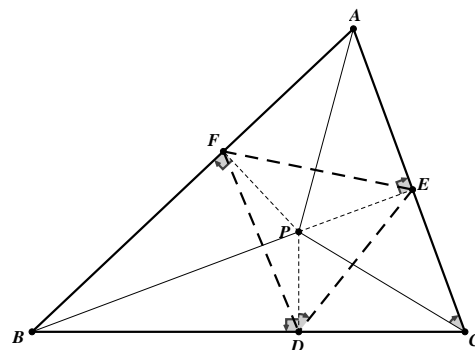


图 74 垂足三角形

### Carnot 定理

$BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2 = 0 \Leftrightarrow \triangle DEF$  为垂足三角形。

这个证明可用下面的等差幂线解释。

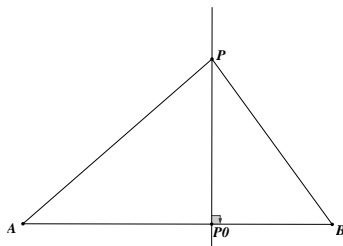


图 75 等差幂线

$$PA^2 - PB^2 = P_0A^2 - P_0B^2 = k$$

$k$  为定值。

由此易证。

(T12) 若  $P$  是  $\triangle ABC$  内一点,  $PD \perp BC$ ,  $PE \perp CA$ ,  $PF \perp AB$ , 记  $\odot DEF$  各与  $BC, CA, AB$  交于另一点  $D', E', F'$ 。求证: 过  $D', E', F'$  分别与  $BC, CA, AB$  的垂线也一定共点。(匈牙利)

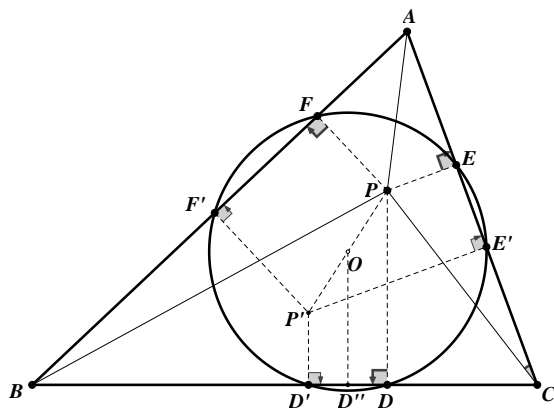


图 76 题十二图

叶中豪介绍了单墩的证法。

**证明:** (法一) 由 Carnot 定理, 得 (1) 式:

$$BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2 = 0$$

为证结论, 需证 (2) 式:

$$BD'^2 - D'C^2 + CE'^2 - E'A^2 + AF'^2 - F'B^2 = 0$$

(1) + (2), 并配上

$$-2BD \cdot BD' + 2DC \cdot D'C - 2CE \cdot CE' + 2EA \cdot E'A - 2AF \cdot AF' + 2FB \cdot F'B = 0$$

(圆幂定理)

只需证:

$$(BD - BD')^2 - (DC - D'C)^2 + (CE - CE')^2 - (EA - E'A)^2 + (AF - AF')^2 - (FB - F'B)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow DD'^2 - DD'^2 + EE'^2 - EE'^2 + FF'^2 - FF'^2 = 0$$

这是显然的。 □

这就是巧妙地运用了 Carnot 定理的结果。但这一证法美中不足的是, 不能推广。

下面是标准答案:

(法二) 作与  $P$  点关于  $O$  点的对称点  $P'$ 。

由垂径定理知  $DD'$  的中点  $D''$  与圆心的连线是与  $DD'$  垂直的。故

$PD' \perp BC$ , 同理可证其他,  $P'$ 点已被构造。  $\square$

后一种用**构造法解题**是值得学习的。并且这个命题对于  $n$  边形都是成立的。

处理存在性问题通常有两种类型的论证。一种被称为“非构造性证明”(法一)(主要是反证法, 这里是直接证法)。例如, 六只苹果放入四个抽屉, 我们知道, 至少放了两个苹果的抽屉一定存在(如不存在就会导出矛盾!, 抽屉原理), 但无法断定究竟是哪个抽屉。此所谓“只在此山中, 云深不知处”。

另一种论证称为“构造性证明”(法二), 就是实际地都找出具有“性质”的“事物”以得出证明。构造性证明通常都有相当高的技巧, 要求解题者具有一定程度的知识、经验和技能。(余红兵, 2014, p. 187)

此例中  $P'$ 点就是那个构造出来的点。

# 代数

花老师 (2017.8)

花老师主要讲了含有技巧的不等式证法。

## 0.通用声明

0.1 在没有特殊声明的情况下，所有题目中的字母表示的皆为正数。

0.2 本文中

$$\sum = \sum_{cyc} \quad \prod = \prod_{cyc}$$

即和号表示轮换和，省略指标意味着是所有的轮换。

0.3  $cyc$ =轮换， $sym$ =完全对称。

0.4 题号中的括号表示内部编号。(对于下一章)

0.5 对其中任一字母做更改时，默认为同时对其他字母做同样更改。

0.6 LHS=Left Hand Side, RHS=Right Hand Side, 分别表示原式左，原式右。

## 1.对称式

题目 1.解不等式：

$$x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 > 0$$

解：(法一，杜浩宇解) 能看出因式分解的可直接做。

$$\text{LHS} = (x^2 - 3x + 1)(x^2 - 4x + 1) > 0$$

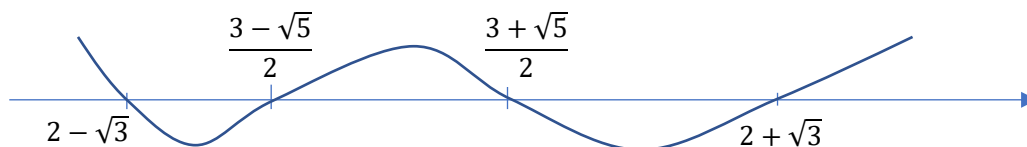


图 77 穿针引线

结果是  $(-\infty, 2 - \sqrt{3}) \cup (\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty)$ 。

(法二) 关于对称式有一个好的技巧，如下：

同除以  $x^2$ ，得

$$x^2 - 7x + 14 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 > 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 > 0$$

解得

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) \in (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$$

由此可解得同样的结果。

**题目 2.**解不等式：

$$\log_2(x^{12} + 3x^{10} + 5x^8 + 3x^6 + 1) > 1 + \log_2(x^4 + 1)$$

**解：**原不等式等价于

$$x^{12} + 3x^{10} + 5x^8 + 3x^6 + 1 < 2(x^4 + 1)$$

用换元策略降次,  $t = x^2$

$$t^6 + 3t^5 + 5t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 1 < 0$$

(法一, 直接因式分解) 待定系数如下:

$$(t^2 + at + b)(t^4 + ct^3 + dt^2 + et + f) < 0$$

解得原不等式等价于

$$(t^2 + t - 1)(t^4 + 2t^3 + 4t^2 + t + 1) < 0$$

(丁益祥介绍的因式分解除法竖式) 这种方法适用于容易知道一个根的情形, 这里不推荐。但若知道了  $(t^2 + t - 1)$  因式, 则可以这样做:

$$\begin{array}{r}
 t^4 + 2t^3 + 4t^2 + t + 1 \\
 \hline
 t^2+t-1 \ ) \ t^6 + 3t^5 + 5t^4 + 3t^3 - 2t^2 + 0 - 1 \\
 \underline{t^6 + t^5 - t^4} \\
 2t^5 + 6t^4 + 3t^3 \\
 \underline{2t^5 + 2t^4 - 2t^3} \\
 4t^4 + 5t^3 - 2t^2 \\
 \underline{4t^4 + 4t^3 - 4t^2} \\
 t^3 + 2t^2 + 0 \\
 \underline{t^3 + t^2 - t} \\
 t^2 + t - 1 \\
 \underline{t^2 + t - 1} \\
 0
 \end{array}$$

图 78 因式分解竖式

(法二, 构造函数)

$$t^6 + 3t^5 + 5t^4 + 3t^3 < 2t^2 + 1$$

$$t^3(t^3 + 3t^2 + 5t + 3) < 2t^2 + 1$$

$$t^3(t^3 + 3t^2 + 3t + 1 + 2t + 2) < 2t^2 + 1$$

$$(t + 1)^3 + 2(t + 1) < \frac{1}{t^3} + \frac{2}{t}$$

拆项使得左右两边各成函数, 令  $\varphi(x) = x^3 + 2x$ , 是单调递增的。

$$\varphi(t + 1) < \varphi\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$t + 1 < \frac{1}{t}$$

得到了相同的式子。

最终解得:

$$x \in \left( -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right)$$

这看似对称的式子背后果然有对称的关系！

## 2. 创新换元

题目 3. 设  $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}^+$ , 且  $abcde = 1$ , 求证:

$$\sum \frac{a+abc}{1+ab+abcd} \geq \frac{10}{3}$$

证明: (法一, 普通的换元) 拿到这样的题, 为了用掉条件, 要么齐次化 (见下文), 要么就换元。可以换成如下形式:

$$a = \frac{x_1}{x_2}, b = \frac{x_2}{x_3}, c = \frac{x_3}{x_4}, d = \frac{x_4}{x_5}, e = \frac{x_5}{x_1}$$

这样一来,

$$\text{LHS} = \sum \frac{\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_4}}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_5}} \xrightarrow{y_i = \frac{1}{x_i}} \sum \frac{y_2 + y_4}{y_1 + y_3 + y_5}$$

(法二, 创新的换元) 但是上面这个做法实际上换了两次元, 但真正需要的或许只有一次。

换成如下形式:

$$a = \frac{x_2}{x_1}, b = \frac{x_3}{x_2}, c = \frac{x_4}{x_3}, d = \frac{x_5}{x_4}, e = \frac{x_1}{x_5}$$

仅仅取一个倒数, 马上就不一样了! 发现分母能够相同了!

$$\text{LHS} = \sum \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3 + x_5}$$

直接到了最后。这一过程用和式或许看不出麻烦程度, 但这是 5 项啊, 一旦展开, 还真的很麻烦。

这个技巧有时候“生死攸关”, 见下一章最后部分。

接着证下去:

$$\begin{aligned} \sum \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3 + x_5} &= \sum \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{x_1 + x_3 + x_5} - 5 = \left( \sum x \right) \left( \sum \frac{1}{x_1 + x_3 + x_5} \right) - 5 \\ &\geq \left( \sum x \right) \frac{(1+1+1+1+1)^2}{3(\sum x)} - 5 = \frac{25}{3} - 5 = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

□

## 3. 增项

题目 4. 设  $x_i \in \mathbf{R}_+, i = 1, 2, \dots, n$ , 求证:

$$\left( \frac{x_1}{x_2} \right)^n + \left( \frac{x_2}{x_3} \right)^n + \dots + \left( \frac{x_n}{x_1} \right)^n \geq \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_1}{x_n}$$

分析 看到左边每一项都是  $n$  次的, 就想把右边的每一项也写成  $n$  次的。  
因为我们可以把重要不等式推广为

$$\sum a_i^n \geq n \prod a_i$$



(这可以由下一章中的 5. 幂平均单调性原理直接推出。)

我们确实可以这么写：

$$\text{RHS} = \sum \frac{x_2}{x_3} \cdot \frac{x_3}{x_4} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{x_1} \leq \sum \frac{\sum_{i=2}^n \left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^{n-1}}{n-1}$$

但这是做不下去的。

**证明** 但如果增加一项，不就是  $n$  次了吗？

$$\text{RHS} = \sum \frac{x_2}{x_3} \cdot \frac{x_3}{x_4} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{x_1} \cdot 1 \leq \sum \frac{\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n + \left(\frac{x_3}{x_4}\right)^n + \dots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^n + 1}{n}$$

这个式子中将重复原不等式左边的每一项  $(n-1)$  次，但  $\frac{1}{n}$  会重复  $n$  次。故

$$\text{RHS} \leq \frac{n-1}{n} \text{LHS} + 1$$

注意到

$$\text{LHS} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n + \dots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^n \geq n \sqrt[n]{1} = n \Leftrightarrow 1 \leq \frac{\text{LHS}}{n}$$

代入上式，得

$$\text{RHS} \leq \frac{n-1}{n} \text{LHS} + \frac{\text{LHS}}{n} = \text{LHS}$$

□

1 就是一个灵活的增项工具。

**题目 5.**  $abc = 1$ ，求证：对任意整数  $k \geq 2$ ，都有

$$\frac{a^k}{a+b} + \frac{b^k}{b+c} + \frac{c^k}{c+a} \geq \frac{3}{2}$$

**证明** 对于  $k=2$ ，我们易证：

$$\left(\sum \frac{a^2}{a+b}\right) \left(\sum (a+b)\right) \geq \left(\sum a\right)^2 \geq \frac{3}{2} \sum (a+b) \Leftrightarrow \sum a \geq 3$$

这由 AM-GM 不等式是易证的。

但对于一般的情况呢？

我们要想办法把  $k$  次幂摘掉。

$$\sum \left( \frac{a^k}{a+b} + \frac{a+b}{4} \right)$$

这样用 AM-GM 不等式能把分母摘掉了；

$$\sum \left( \frac{a^k}{a+b} + \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \times (k-2) \right)$$

这样就有  $k$  项了，用 AM-GM 不等式后，

$$\sum \left( \frac{a^k}{a+b} + \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \times (k-2) \right) \geq \sum k \sqrt[k]{\frac{a^k}{4 \cdot 2^{k-2}}} = \sum \frac{ka}{2}$$

这样一来，

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \sum \left( \frac{a^k}{a+b} \right) \geq \sum \left( \frac{ka}{2} - \frac{a+b}{4} - \frac{1}{2} \times (k-2) \right) = \frac{k \sum a}{2} - \frac{\sum a}{2} - \frac{3(k-2)}{2} \\ &= \frac{(k-1)(\sum a - 3)}{2} + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

这就是增项的威力！对于中间的构造是需要时间摸索的。

## 4. 函数方程

花老师也讲了一些函数方程题。

**题目 6.** 设  $f(x)$  定义在  $(0, +\infty)$  上且满足①对于  $x > 0$ , 有  $f(x) \cdot f\left[f(x) + \frac{1}{x}\right] = 1$ , ②  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 则  $f(1) =$ \_\_\_\_\_。

对于函数方程题, 有一种做法就是换元。

令  $a = f(1)$ , 则原关系中令  $x = 1$  得

$$f(1) \cdot f\left[f(1) + 1\right] = 1 \Leftrightarrow af(a+1) = 1 \Leftrightarrow f(a+1) = \frac{1}{a}$$

现在我们得到了  $f(a+1)$ , 我们再令原关系中  $x = a+1$  得

$$\begin{aligned} f(a+1) \cdot f\left[f(a+1) + \frac{1}{a+1}\right] &= 1 \xrightarrow{f(a+1)=\frac{1}{a}} \frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow f\left(\frac{2a+1}{a(a+1)}\right) = a = f(1) \end{aligned}$$

现在两边都是函数了！根据单调关系：

$$\frac{2a+1}{a(a+1)} = 1$$

解得

$$f(1) = a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

这里有个容易错的点：若  $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , 则

$$f(a+1) = f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} = f(1)$$

这与单调性是矛盾的。故

$$f(1) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

**题目 7(IMO Short Lists).**  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , 对  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $|f(x)| \leq 1$ ,

$$f\left(x + \frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right)$$

求证： $f(x)$  是周期函数。

**证明** 要注意到  $\frac{13}{42} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ , 并进行整理得到下面比较漂亮的关系：

$$f\left(x + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) - f\left(x + \frac{1}{6}\right) = f\left(x + \frac{1}{7}\right) - f(x)$$





有没有令新函数的冲动？

令  $g(x) = f\left(x + \frac{1}{7}\right) - f(x)$ ，则上式成为：

$$g\left(x + \frac{1}{6}\right) = g(x)$$

那么  $g(x)$  是周期函数（总算靠上边了），它的一个周期是  $\frac{1}{6}$ 。

根据周期的定义，1 也是它的一个周期。这里很关键，因为只盯着  $\frac{1}{6}$  这样的周期是不会有下一步的动作的，1 算是  $\frac{1}{6}$  和  $\frac{1}{7}$  的一个公倍数了，这是有启发意义的一步。

$$g(x+1) = g(x) \Leftrightarrow f\left(x + \frac{1}{7} + 1\right) - f\left(x + \frac{1}{7}\right) = f(x+1) - f(x)$$

这里把  $\frac{1}{6}$  这个元消掉了！

“故伎重演”。令  $h(x) = f(x+1) - f(x)$ ，则

$$h\left(x + \frac{1}{7}\right) = h(x)$$

1 也是它的一个周期。故

$$h(x+1) = h(x) \Leftrightarrow f(x+2) - f(x+1) = f(x+1) - f(x)$$

这个形式好漂亮啊！怎么往下做呢？

继续赋值！可得

$$\begin{aligned} f(x+n+1) - f(x+n) &= \cdots = f(x+3) - f(x+2) = f(x+2) - f(x+1) \\ &= f(x+1) - f(x) \end{aligned}$$

这里有一个背景：

设  $f$  为任一函数，定义差分算子  $\Delta$  为

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

称它为  $f$  的一阶差分或  $f$  的一阶差分在  $x$  处的值。（史济怀, 2014, p. 287）

我们原来的式子就成为

$$\Delta f(x+n) = \cdots = \Delta f(x+2) = \Delta f(x+1) = \Delta f(x)$$

则

$$n \cdot \Delta f(x) = f(x+n+1) - f(x) \in [-2, 2] \quad (|f(x)| \leq 1)$$

这是要出事的！当  $n \rightarrow \infty$  时，都要成立，故  $\Delta f(x) = 0$ ，即  $f(x)$  是周期函数，它的一个周期是 1。□

这一题的过程是想当漂亮的。但是每一步都是颇有难度的。

函数方程，是一个中国考察得比较少方向，但是在 IMO 预选题代数里往往占据“半壁江山”。个人觉得函数方程是代数里很难提高的部分，不同题目的处理方法也不太有共通性。虽说本质上就是不断代入，但也有一些技巧，比如寻找函数方程的单调、单射满射等性质；考察函数的值域，或者取函数的等于目标函数的点的集合，刻画集合的性质以证明是全集；适当给出变元间的关系使得等号两边部分项相等而消去；把较复杂的复合函数代入，结合之前的结论变形消元等等。（何天成, 2017, p. 16）

## 5. 数列

花老师讲了一些裂项的数列计算。

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

$$n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)}{3}$$

类似的,

$$n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$$

推而广之,

$$n(n+1)(n+2) \cdots (n+k)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+k+1) - (n-1)n(n+1) \cdots (n+k)}{k+2}$$

$$\Rightarrow (k+2)A_{n+k}^{k+1} = A_{n+k+1}^{k+2} - A_{n+k}^{k+2}$$

$$n \cdot n! = (n+1)! - n!$$

$$\frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$$

有一个数列求和是值得注意的。

**题目 8.** 设  $n$  是不小于 2 的正整数, 求证:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

这是分组求和上场了。

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

变成了连续项的求和! 由 Cauchy 不等式知

$$\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)^2 \leq (1 \times n) \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right) < n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

最后一个不等号用到了裂项求和, 两边开平方后证毕。□

**事实 1.** 该数列的极限为  $\ln 2 \approx 0.69$ 。

**事实 2.** 中间导出的结果是 Catalan 恒等式。而关于级数

$$S = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{2p}{3} \rfloor} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

$p > 3$  是素数,  $p$  整除  $S$  的分子。这曾作为 IMO 题。

$$S = \sum_{\frac{p}{3} < k < \frac{2p}{3}} \frac{1}{k} = \sum_{\frac{p}{3} < k < \frac{p}{2}} \frac{1}{k} + \sum_{\frac{p}{2} < k < \frac{2p}{3}} \frac{1}{k} = \sum_{\frac{p}{3} < k < \frac{p}{2}} \frac{1}{k} + \sum_{\frac{p}{3} < k < \frac{p}{2}} \frac{1}{p-k} = p \sum_{\frac{p}{3} < k < \frac{p}{2}} \frac{1}{k(p-k)}$$

$p \nmid k(p-k)$ , 故上式分子中因数  $p$  不会约去, 即  $p$  整除  $S$  的分子。(柯召、孙琦, 2011, pp. 46-47)

# 不等式

陈 计 (2017.5, 2017.7) 林老师 (2017.8)

在不等式的解题之中，借用陈计的话说，“每一步都生死攸关”。因为在写下不等号的时候，就有可能放过头了。这样一来，接着做下去就没分了。

对于陈计这样一个研究不等式的人来说，他的经验就是“暴解才是王道”。

当然，“暴解有法，取之有道”。

## 1. 齐次化

Problem 1 (4594) .求证：

$$\left(\sum a - abc\right)^2 \leq \prod (1 + a^2)$$

分析：关于等价形式的讨论 将  $a$  换成  $\frac{a}{t}$ ，可得

$$\left(t^2 \sum a - abc\right)^2 \leq \prod (t^2 + a^2)$$

此式中令  $t=1$ ，将变回原式。说此两式等价是因为反例的存在是同时的。

转化为后一式时，齐次化就完成了。但本题可不必齐次化。

要点：关于不等式

$$\sum x^2 \geq \sum yz$$

(可用均值不等式，三式累加得到：

$$\frac{y^2 + z^2}{2} \geq yz$$

)

但是稍加变形，将  $x$  转为  $\frac{1}{a}$ ，得到

$$\sum b^2 c^2 \geq abc \sum a$$

整合一下：

$$\left(\sum bc\right)^2 \geq 3abc \sum a$$

这还不是最隐蔽的，再把  $bc$  换成  $x$ ，变成：

$$\left(\sum x\right)^2 \geq 3 \sum yz$$

这样一来，一个不等式变成了三个不等式，但它们却是同根源的！

证明：演示陈计眼中的暴解

$$\text{LHS} = \left(\sum a\right)^2 - 2abc \left(\sum a\right) + a^2 b^2 c^2 = \sum a^2 + 2 \sum bc - 2abc \left(\sum a\right) + a^2 b^2 c^2$$

$$\text{RHS} = 1 + \sum a^2 + \sum b^2 c^2 + a^2 b^2 c^2$$

$$\text{RHS} - \text{LHS} = \left(\sum bc\right)^2 - 2 \sum bc + 1 = \left(\sum bc - 1\right)^2 \geq 0$$

□

熟练地运用和号暴解，是一大关键。

**Problem 2 (6302)** .求：

$$\sum a^2 = 1 \Rightarrow \sum a(a+b)(a+b+c) \leq M, \quad M \geq ?$$

**解：使用齐次化策略**

原式等价于

$$\sum a(a+b)(a+b+c) \leq M \left(\sum a^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

齐次化的好处在于，不仅把原不等式变成无条件不等式，（在某些情况下，齐次化的式子也可以变为条件不等式，条件为完全对称式。）而且在随后的暴解中，将更好的消去一些项目。

在这一题，就不得不思考如何对最值讨论。

**分析：竞赛层次的最值猜测**

sym.  $yz + zx + xy$

cyc.  $y^2z + z^2x + x^2y$

表格 5 关于  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的不等式

sym.	cyc.
$x_1, x_2 = \dots = x_n = 1$	1. $x_1 = x_2 = x_3$
求导，猜测。可不妨设顺序。	2. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3$ , 求导。可设最大者。

在此，令  $a = b = c = 1, M = 2\sqrt{3}$ 。

**要点：一个重要的恒等式**

$$\sum a^2 - \sum bc = \frac{1}{2} [\sum (a-b)^2]$$

证明略。

## 2. 柯西不等式

分离器 (Cauchy)

**Cauchy 不等式：** (1800 年)

$$\left(\sum x_i\right) \left(\sum y_i\right) \geq \left(\sum \sqrt{x_i y_i}\right)^2$$

等号成立条件：当且仅当

$$\frac{x_i}{y_i} = \lambda$$

( $i=1, 2, \dots, n$ ) ,  $\lambda$  为常数。

常规的使用在此就不介绍了，下面介绍几个特殊情况。

**Problem 3.** 求证：

$$\sum \frac{x^2}{y^2 + z^2 + yz} \geq 1$$

尝试使用 Cauchy 不等式，失败了。

**分析：失败的原因**



表格 6 Cauchy 不等式的放缩度

等号取得时(赋值)	$x$	$y$	$z$
值	0	1	1
加数(参照)	$\frac{x^2}{y^2 + z^2 + yz}$	$\frac{y^2}{z^2 + x^2 + zx}$	$\frac{z^2}{x^2 + y^2 + xy}$
值	0	1	1
除数(系列 1)	$y^2 + z^2 + yz$	$z^2 + x^2 + zx$	$x^2 + y^2 + xy$
值	3	1	1
除数×分子(系列 2)	$x^2(y^2 + z^2 + yz)$	$y^2(z^2 + x^2 + zx)$	$z^2(x^2 + y^2 + xy)$
值	0	1	1

可见当乘系列 1 的因子时，是与参照逆着走的，这在 Cauchy 不等式中是及其危险的。应乘系列 2 的因子。

$$\sum \frac{x^2}{y^2 + z^2 + yz} \geq \frac{(\sum x^2)^2}{\sum x^2(y^2 + z^2 + yz)} = 1 + \frac{\sum x^4 - \sum x^2 yz}{2 \sum y^2 z^2 + \sum x^2 yz} \geq 1$$

其中最后一步用了 Muirhead 定理，见下文。

**Problem 4 (9207)** .求证：

$$\sum ab = 3 \Rightarrow \sum \frac{1}{(a+b)^2 + 4} \leq \frac{3}{8}$$

**证明：反向 Cauchy 技术**

$$\sum \frac{1}{(a+b)^2 + 4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \sum \frac{(b+c)^2}{(b+c)^2 + 4} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{[\sum(b+c)]^2}{\sum[(b+c)^2 + 4]} = \frac{3}{4} - \frac{(\sum a)^2}{2 \sum a^2 + 6 \sum bc} \leq \frac{3}{8}$$

最后一步可转化为证： $\sum a^2 \geq \sum bc$ 。□

陈计说过与单墫同样的话：“一个好的学生应当自觉地减少那些不必要的过程，删去那些‘花枪’，‘一招破敌’。”(单墫, 2009, p. 9)陈计所有的解答都有这样的特点，但背后都有着浓郁的思想。

对于一元情况，反向柯西技术只适用于等号取在  $x=1$  的情况。

一个重要的局部不等式：

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} \geq 1 - \frac{x^2}{2x} = 1 - \frac{1}{2}x$$

对  $x$  可换元。

## \*. 米尔黑德定理

(Muirhead Theorem)

$$\frac{1}{3} \sum x^4 \geq \frac{1}{6} \sum x^3(y+z) \geq \frac{1}{3} \sum x^2 y^2 \geq \frac{1}{3} \sum x^2 yz$$

越平均越小。幂次分布： $4=4+0+0=3+1+0=2+2+0=2+1+1$ 。系数的分母表示项数，此处的系数使和式变为平均值。

此定理不能直接使用，在考试时需证明。此定理是证明四次以上不等式的利器，而对于三次不等式，可用 Schur 不等式，见下文。

**略证：**

$$\sum x^4 \geq \sum x^2 y^2$$

(由上文中的不等式



$$\sum x^2 \geq \sum yz$$

换元即得。)

$$\sum x^2 y^2 \geq \sum x^2 yz$$

(两遍乘 2, 改写为

$$\sum x^2 (y^2 + z^2) \geq 2 \sum x^2 yz$$

$$\text{RHS} - \text{LHS} = \sum x^2 (y^2 + z^2 - 2yz) = \sum x^2 (y - z)^2 \geq 0$$

)

$$\sum x^3 (y + z) \geq 2 \sum x^2 y^2$$

(改写为

$$\sum yz (y^2 + z^2) \geq 2 \sum y^2 z^2$$

显然)

$$2 \sum x^4 \geq \sum x^3 (y + z)$$

(

$$\sum (y^4 + z^4) \geq \sum yz (y^2 + z^2)$$

$$\text{LHS} - \text{RHS} = \sum (y - z)^2 (y^2 + yz + z^2) \geq 0$$

)

□

## \*\*.柯西不等式延拓

使用赫尔德 (Hölder) 不等式后可得:

$$\sum x_i y_i \leq \left( \sum x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q > 0.$$

$$\sum x_i y_i z_i \leq \left( \sum x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum y_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left( \sum z_i^r \right)^{\frac{1}{r}}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, p, q, r > 0.$$

当  $p = q = r = 3$  时, 可得

$$\left( \sum x_i y_i z_i \right)^3 \leq \left( \sum x_i^3 \right) \left( \sum y_i^3 \right) \left( \sum z_i^3 \right)$$

所谓“大柯西不等式”。

更一般地,

$$\left( \sum a_{1i} a_{2i} \dots a_{ni} \right)^n \leq \left( \sum a_{1i}^n \right) \left( \sum a_{2i}^n \right) \dots \left( \sum a_{ni}^n \right)$$

不能直接使用, 需要简证。例如:

$$\begin{aligned}\prod (b^2 + bc + c^2) &= \frac{(b^2 + bc + c^2)(bc + ca + ab)(c^2 + ca + a^2)(b^2 + ab + a^2)}{(bc + ca + ab)} \\ &\geq \frac{(bc + \sqrt{c^3a} + \sqrt{ab^3})^2 (bc + \sqrt{a^3c} + \sqrt{a^3b})^2}{bc + ca + ab} \geq \frac{(bc + ca + ab)^4}{bc + ca + ab} \\ &= (bc + ca + ab)^3\end{aligned}$$

### 3. 算术-几何平均不等式

乘与加的故事 (AM-GM)

二元形式:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

$n$  元形式:

$$\frac{\sum x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod x_i}$$

加权形式:

$$\frac{\sum \lambda_i x_i}{\sum \lambda_i} \geq \left( \prod x_i^{\lambda_i} \right)^{\frac{1}{\sum \lambda_i}}$$

平均不等式家族:

$$\frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\prod x_i} \leq \frac{\sum x_i}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

均可加权。

**Problem 5 (6926)** .求证:

$$x, y \in (0,1) \Rightarrow x^y + y^x > 1$$

**证明:** 使用加权的 HM-GM 不等式:

$$x^y \cdot 1^{1-y} > \frac{y+1-y}{\frac{y}{x} + \frac{1-y}{1}} = \frac{x}{y+x-xy}$$

同理,

$$y^x \cdot 1^{1-x} > \frac{y}{y+x-xy}$$

故

$$x^y + y^x > \frac{x}{y+x-xy} + \frac{y}{y+x-xy} = 1$$

□

**Problem 6.**

$$\sum a = 4 \Rightarrow \sum a^2 bc \leq 4(n=4)$$

**证明:** 对称位置可以不妨假设大小关系

不妨设  $ab + cd \leq bc + da$ , 则

$$\begin{aligned}64 \sum a^2 bc &= 64[ac(ab + cd) + bd(bc + da)] \leq 64(ac + bd)(bc + da) \\ &\leq 16(ac + bd + bc + da)^2 = 16[(a+b)(c+d)]^2 \leq (a+b+c+d)^4 = 64\end{aligned}$$



□

但在安徽初赛没有用好这一点，来回顾一下这个题目。

**Problem 7 (安徽初赛, 2017)**  $x, y \in [0, 1]$ , 求

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{1+xy}{1+x^2}} + \sqrt{\frac{1-xy}{1+y^2}}$$

的取值范围。

**证明:** 当  $x \geq y$  时,  $\frac{1+xy}{1+x^2}$  和  $\frac{1-xy}{1+y^2} \in [0, 1]$ , 故

$$2 \geq f(x, y) \geq \frac{1+xy}{1+x^2} + \frac{1-xy}{1+y^2} \geq \frac{1+xy}{1+x^2} + \frac{1-xy}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \geq 1$$

当  $x \leq y$  时,

$$f(x, y) \geq \sqrt{\frac{1+xy}{1+x^2}} \geq 1$$

由于对勾函数  $x + \frac{1}{x}$  在  $[0, 1]$  上是单调递减的, 故  $x + \frac{1}{x} \geq y + \frac{1}{y}$ .

$$\begin{aligned} 1 \leq f(x, y) &= \sqrt{\frac{\frac{1}{x} + y}{\frac{1}{x} + x}} + \sqrt{\frac{\frac{1}{y} - x}{\frac{1}{y} + y}} = \sqrt{1 + \frac{y-x}{\frac{1}{x} + x}} + \sqrt{1 - \frac{x+y}{\frac{1}{y} + y}} \\ &\leq \sqrt{1 + \frac{y-x}{\frac{1}{y} + y}} + \sqrt{1 - \frac{y-x}{\frac{1}{y} + y}} \xrightarrow{t = \frac{y-x}{\frac{1}{y} + y} \in [0, 1]} \sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} \leq 2 \end{aligned}$$

$f(1, 1) = 1, f(0, 0) = 2, f(x, y) \in [1, 2]$ .

□

关于这个解答的几点说明:

1. 在第一种情形中,  $\sqrt{x} \geq x$  只在  $[0, 1]$  内成立, 见下图。

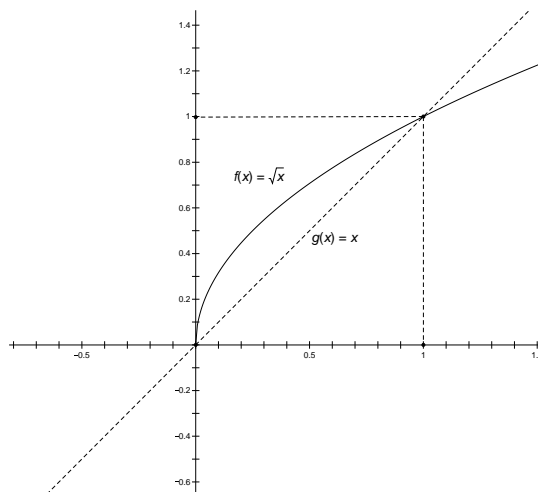


图 79  $f(x) = \sqrt{x}$  与  $g(x) = x$  图像

2.  $\sqrt{1 - \frac{x+y}{\frac{1}{y} + y}} \leq \sqrt{1 - \frac{y-x}{\frac{1}{y} + y}}$ , 这等价于证明  $-x - y \leq -y + x \Leftrightarrow x + y \geq 0$ , 这是显然的。

3.  $\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}$  的图像如下图。可通过平方等价证明:

$$\sqrt{1-t^2} \leq 1$$



这是显然的。

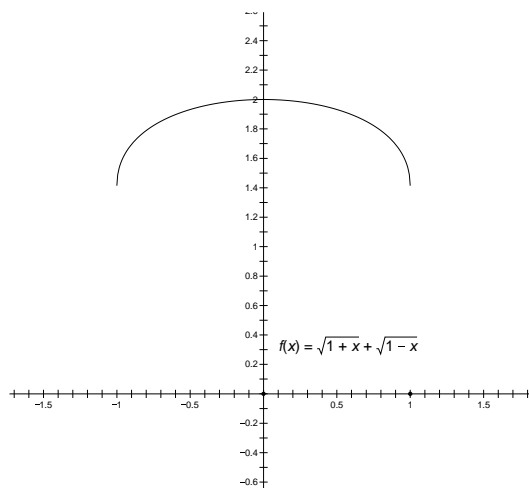


图 80  $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$  图像

4. 这种解答的难度颇高，在整个过程中没有用到任何一个著名不等式，而一些部分的等价证明显然，但观察出来却一点也不显然。重视了对函数关系的考察。水平颇高，推测为很老的题目。

## 4. 舒尔不等式

大小连手 中间对干 (Schur)

由米尔黑德定理知：

$$\frac{1}{3} \sum x^3 \geq \frac{1}{6} \sum x^2(y+z) \geq xyz$$

对于不等式：

$$\lambda \left( \frac{1}{3} \sum x^3 \right) + (1-\lambda)xyz \geq xyz$$

$$\lambda \geq \frac{1}{2}$$

当  $\lambda = \frac{1}{2}$  时，

$$\sum x^3 + 3xyz \geq \sum x^2(y+z)$$

$$\sum x^3 - \sum x^2(y+z) + 3xyz \geq 0$$

$$\sum x(x-y)(x-z) \geq 0$$

这都是 Schur 不等式。

简证：通过对最后一个形式的证明 不妨设  $x = \min\{x, y, z\}$ ，各项均正。 □

推广：

$$\sum x^r(x-y)(x-z) \geq 0$$

对  $r \geq 1$  均是成立的。

特别地， $r = 2$  时，

$$\sum x^4 - \sum x^3(y+z) + \sum x^2yz = \sum x^2(x-y)(x-z) = \sum (y-z)^2(y+z-x) \geq 0$$

$r=3$ 时,

$$\sum x^2(x-y)(x-z) = \sum x(x^2-y^2)(x^2-z^2) \geq 0$$

**Problem 8 (1991, 全国联赛, 2005)** .对于正数 $a, b, c, x, y, z > 0$ , 满足

$$\begin{cases} cy + bz = a \\ az + cx = b \\ bx + ay = c \end{cases}$$

求证:

$$f(x, y, z) = \sum \frac{x^2}{1+x} \geq \frac{1}{2}$$

**证明:** 从方程组解得

$$\begin{cases} x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0 \\ y = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} > 0 \\ z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} > 0 \end{cases}$$

(法一, 暴解) 换元

$$\begin{cases} u = b^2 + c^2 - a^2 \\ v = c^2 + a^2 - b^2 \\ w = a^2 + b^2 - c^2 \end{cases}$$

此时,

$$x = \frac{u}{\sqrt{(w+u)(u+v)}}$$

那么,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \sum \frac{x^2}{1+x} = \sum \frac{u^2}{(w+u)(u+v) + u\sqrt{(w+u)(u+v)}} \\ &\geq \sum \frac{2u^2}{2(w+u)(u+v) + u(w+v+2u)} \\ &\xrightarrow{u=\frac{1}{p}, v=\frac{1}{q}, w=\frac{1}{r}} \sum \frac{2qr}{2p^2 + 3p(q+r) + 4qr} \end{aligned}$$

经暴解得, 需证

$$14 \sum p^3 - 9 \sum p^2(q+r) + 12pqr \geq 0$$

用 Schur 不等式后是显然的。 □

我们看到, 这个不等式不是恰好的。所以巧解 (多次放缩) 的存在性是有的。

(法二, 巧解, 花老师, 2017.8)

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \sum \frac{x^2}{1+x} = \sum \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2 + 2bc(b^2 + c^2 - a^2)} \\ &\geq \sum \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2 + (b^2 + c^2)(b^2 + c^2 - a^2)} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{4 \sum b^2c^2 + 2 \sum a^4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

第一个不等号是 AM-GM 不等式；第二个不等号是 Cauchy 不等式，分母略去了若干负项。

此乃出自江西某暴力命题人（陶平生）之手，难度之大，让某一个省一个人都没做出来。后一种巧解是需要一定勇气的，因为放缩了两次。

但更有暴力之人，看，陈计的另一证法：

（法三，更暴解）

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \sum \frac{x^2}{1+x} = \sum \frac{x^2}{1-x^2} (1-x) = \sum \frac{x^2}{1-x^2} \left( 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \\ &\geq \sum \frac{x^2}{1-x^2} \left[ 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

陈计令人惊讶地构造出了一个恒等式！他自己也说这个在考场上不一定能想到。

## 5. 幂平均单调性原理

$$M_p(x) = \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}, x_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$$

关于  $p$  是单调递增的。这就是幂平均单调性原理。

平均值不等式只是它的特例：

$$\begin{aligned} M_{-1} &\leq M_0(G) \leq M_1 \leq M_2 \\ \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} &\leq \sqrt[n]{\prod x_i} \leq \frac{\sum x_i}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \end{aligned}$$

1957 年，人们在  $M_0(G) \leq M_1$  中间插入了一项，称为对数平均。当  $n = 2$  时，

$$\sqrt{xy} < \frac{x-y}{\ln x - \ln y} = L < \frac{x+y}{2}$$

证明很容易，只需将其变为单变量问题即可。此处略。

1974 年，人们确定了对数平均的最优范围：

$$M_0(G) < L < M_{\frac{1}{3}}$$

广义的对数平均  $L_p = \left[ \frac{x^p - y^p}{p(x-y)} \right]^{\frac{1}{p-1}}$

表格 7 对数平均示例

$L_i$	$L_2$	$L_1$	$L_0$	$L_{-1}$
值	$\frac{x+y}{2}$	$\frac{1}{e} \left( \frac{x^x}{y^y} \right)^{\frac{1}{x-y}}$	$\frac{x-y}{\ln x - \ln y}$	$\sqrt{xy}$

## 6. 几何不等式

在上文中提到的 Klamkim 不等式，就是几何不等式。下面再看两个几何不等式。

三角形中的等周定理 i（下界）



令 $\Delta$ 为三角形的面积，我们有

$$\dots \geq M_2(a) \geq M_1(a) \geq \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} \Delta$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立。

但这个不等式并不紧致，直到 1935 年波利亚(Polya)给出了最佳不等式：

$$M_0(a)(G) \geq \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} \Delta$$

证明时应进行内切圆换元。并注意到海伦(Heron)公式

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz}$$

证明此处略。

**三角形中的等周定理 ii (上界)**

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$$

**证明：使用正弦定理**

$$\Leftrightarrow \sum \sin^2 A \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \sum \cos 2A \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 3 + 2 \sum \cos 2A \geq 0$$

需要证的这个不等式有一个背景：

**嵌入不等式：**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2 \sum yz \cos 2A \geq 0, \quad x, y, z \in \mathbf{R}$$

**证明：使用拉格朗日(Langarge)配方法**

$$\Leftrightarrow (x + z \cos 2B + y \cos 2C)^2 + (z \sin 2B - y \sin 2C)^2 \geq 0$$

显然成立。

嵌入不等式中令 $x = y = z = 1$ ，即是原式。

□

**厄尔多斯-莫德尔(Erdős-Mordell,1935)不等式**

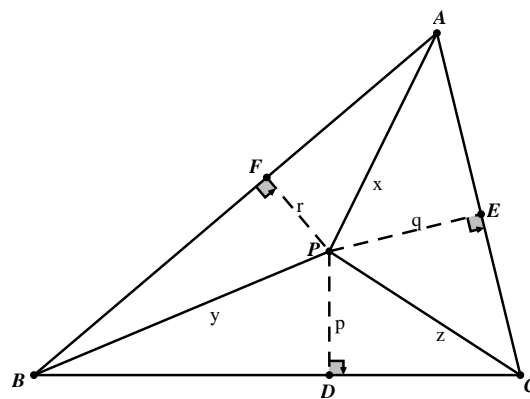


图 81 厄尔多斯-莫德尔不等式

$$x + y + z \geq 2(p + q + r)$$

$P$  为三角形内部任意一点。当且仅当 $\triangle ABC$  是正三角形，且  $P$  为中心时等号成立。

(法一，普通的证明)

因为 $\angle DPE = 180^\circ - \angle ACB = A + B$ ，所以

$$DE = \sqrt{p^2 + q^2 - 2pq \cos(A + B)}$$

$$= \sqrt{p^2 \sin^2 B + p^2 \cos^2 B + q^2 \sin^2 A + q^2 \cos^2 A - 2pq(\cos A \cos B - \sin A \sin B)}$$

$$= \sqrt{(p \sin B + q \sin A)^2 + (p \cos B - q \cos A)^2} \geq p \sin B + q \sin A$$

由我们前述 4.垂足三角形的内容知,

$$DE = CP \sin C$$

至此, 可得

$$z = PC = \frac{DE}{\sin C} \geq \frac{p \sin B + q \sin A}{\sin C}$$

故

$$\sum x \geq \sum p \left( \frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B} \right) \geq \sum p$$

1

(严镇军, 2014, p. 119)。

下面是陈计的证明：（这个证明从未谋面）

作等角变换。在等角线上找  $P'$  使  $AP'=AP=x$ 。

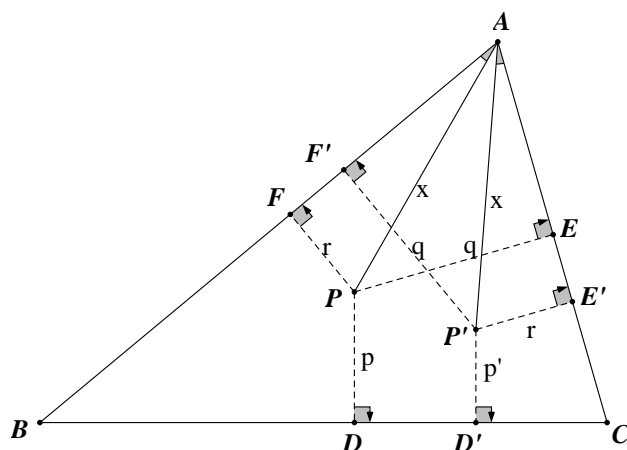


图 82 陈计之证

这种变换的神奇之处在于： $q, r$  皆未变！

$$(x + p')a \geq 2 \triangleq p'a + rb + qc$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{rb + qc}{a}$$

$$\Rightarrow \sum x \geq \sum p \left( \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \right) \geq 2 \sum p$$

巧妙的构造证完了此题。(本证明严禁公开)

1

## 7. 闵可夫斯基不等式

## 专门调配乘积的事情 (Minkowski)

## Minkwoski 不等式

$$M_p(x+y) \begin{pmatrix} p \geq 1 \\ p = 1 \\ p \leq 1 \end{pmatrix} M_p(x) + M_p(y)$$

即

$$\left( \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \begin{pmatrix} p \geq 1 \\ p = 1 \\ p \leq 1 \end{pmatrix} \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

当  $p \rightarrow 0$  时,

$$\sqrt[n]{\prod (x_i + y_i)} \geq \sqrt[n]{\prod x_i} + \sqrt[n]{\prod y_i}$$

证明

$$\frac{RHS}{LHS} = \sqrt[n]{\prod \frac{x_i}{x_i + y_i}} + \sqrt[n]{\prod \frac{y_i}{x_i + y_i}} \leq \frac{1}{n} \sum \frac{x_i}{x_i + y_i} + \frac{1}{n} \sum \frac{y_i}{x_i + y_i} = 1$$

□

当  $p = -1$  时,

$$\frac{1}{\sum \frac{1}{x_i + y_i}} \geq \frac{1}{\sum \frac{1}{x_i}} + \frac{1}{\sum \frac{1}{y_i}}$$

或 (4339)

$$\sum \frac{x_i y_i}{x_i + y_i} \leq \frac{\sum x_i \sum y_i}{\sum x_i + \sum y_i}$$

证明 注意到

$$\sum \frac{1}{x_i + y_i} = \sum \frac{x_i}{(x_i + y_i)^2} + \sum \frac{y_i}{(x_i + y_i)^2}$$

而根据 Cauchy 不等式:

$$\left( \sum \frac{1}{x_i} \right) \left( \sum \frac{x_i}{(x_i + y_i)^2} \right) \geq \left( \sum \frac{1}{x_i + y_i} \right)^2$$

故

$$\frac{1}{\sum \frac{1}{x_i + y_i}} \geq \frac{\left( \sum \frac{1}{x_i + y_i} \right)^2}{\sum \frac{1}{x_i}} + \frac{\left( \sum \frac{1}{x_i + y_i} \right)^2}{\sum \frac{1}{y_i}}$$

分子除过去即是要证的式子。

□

他还有另一个不等式:

$$\sqrt{\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)^2} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$$

这个不等式可用数形结合很好地证明:

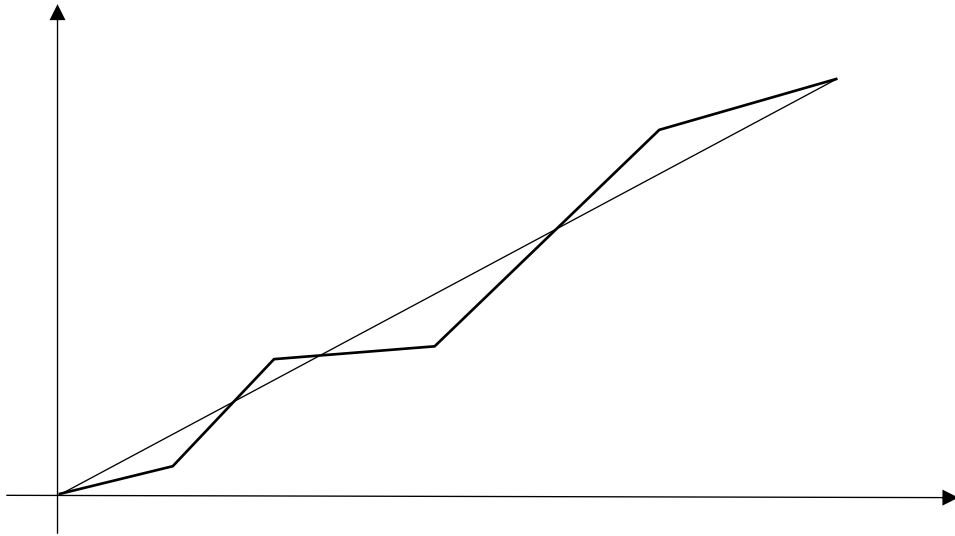


图 83 数形结合证明

(朱华伟、程汉波, 2016, p. 301)

## 8. 切比雪夫不等式

打补丁的分离器 (Chebyshev)

系列 $\{x_i\}$ 和系列 $\{y_i\}$ 若顺序

$$n \sum x_i y_i \geq \left( \sum x_i \right) \left( \sum y_i \right)$$

若逆序

$$n \sum x_i y_i \leq \left( \sum x_i \right) \left( \sum y_i \right)$$

这就是 Tchebychef 不等式。

**Problem 9 (0834)** .求证:

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

**证明:** 两边同取对数 (此处取常用对数, 只要底数大于 1)

$$\Leftrightarrow \sum a \ln a \geq \frac{1}{3} \left( \sum a \right) \left( \sum \ln a \right)$$

$\ln a$ 关于  $a$  是单调递增的。由 Tchebychef 不等式知其成立。

□

与 Tchebychef 不等式相关的还有排序不等式。此处略。

## 9. 抽屉原则

证明不等式还可以用抽屉原理。

**Problem 10 (2970)** .求证:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ac)$$

**证明: 用抽屉原则** 由于等号是在  $a = b = c = 1$  时成立的, 不妨设

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1) \geq 0$$

(由抽屉原则知, 三数中必有两数在 1 的同一侧)

$$\begin{aligned} LHS &= (a^2b^2 + 2a^2 + 2b^2 + 4)(c^2 + 2) \geq 3(a^2 + b^2 + 1)(1 + 1 + c^2) \geq 3(a + b + c)^2 \\ &\geq 9(ab + bc + ac) \end{aligned}$$

倒数第二个不等式用了 Cauchy 不等式; 最后一个用到了上文中的

$$\sum x^2 \geq \sum yz$$

□

上面说到的题目在这里。

**Problem 11 (5416)** . $abc=1$ , 求证:

$$\sum \frac{1}{a(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

**证明:** (走不到头的法一, 齐次化) 陈计第一遍讲的时候用了齐次化, 变成了 3 元 12 次不等式。然后希望用 Cauchy 不等式降次。

$$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{a(a+b)} \geq \frac{3}{2} \frac{1}{(abc)^{\frac{2}{3}}} \xrightarrow{a=x^3} \sum \frac{y^2z^2}{x(x^3+y^3)} \geq \frac{3}{2}$$

$$\left[ \sum \frac{y^2z^2}{x(x^3+y^3)} \right] \left[ \sum x(x^3+y^3) \right] \geq (\sum yz)^2 \geq \frac{3}{2} \sum x(x^3+y^3)$$

但这是错误的。

对于这样的情况, 若想继续走下去, 就要插入一个值  $\lambda$ , 希望下面的不等式能够成功。

$$\left[ \sum \frac{y^2z^2}{x(x^3+y^3)} \right] \left[ \sum \lambda^2 x(x^3+y^3) \right] \geq (\sum \lambda yz)^2 \geq \frac{3}{2} \sum \lambda^2 x(x^3+y^3)$$

$\lambda = x$  or  $y$  or  $z$  or ...但前三个都失败了。

看来对于这样的题, 用 齐次化-Cauchy 降次 走到黑可能只能撞墙了。

(危险的法二, 普通的换元) 换元如下:

$$a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{\frac{x}{y}(\frac{x}{y} + \frac{y}{z})} = \sum \frac{y^2z}{zx^2 + y^2x} \geq \frac{3}{2}$$

这是 3 元 9 次齐次式, 有可能到 3 元 6 次。

$$\left( \sum \frac{y^2z}{zx^2 + y^2x} \right) \left( \sum \lambda^2 y^2 z (zx^2 + y^2x) \right) \geq (\sum \lambda yz)^2 \geq \frac{3}{2} \sum \lambda^2 y^2 z (zx^2 + y^2x)$$

由于陈计说了 3 元 6 次暴解是 IMO 水平, 所以在联赛水平以内有些难了。并且此处还有一个不确定的  $\lambda$ 。令人绝望。

(令人惊讶的法三, 创新的换元) 稍微换一下

$$a = \frac{x}{y}, b = \frac{z}{x}, c = \frac{y}{z}$$

仅仅换了  $b, c$  的位置,

$$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{\frac{x}{y}(\frac{x}{y} + \frac{z}{x})} = \sum \frac{y^2}{x^2 + yz} \geq \frac{3}{2}$$





就能用 AM-GM 了!

$$\Leftrightarrow \sum \frac{y^2}{x^2 + yz} \geq \sum \frac{y^2}{x^2 + \frac{y^2 + z^2}{2}} = \sum \frac{2y^2}{2x^2 + y^2 + z^2}$$

并且换元后成了常见题 (Cauchy 不等式的练习题)!

$$\begin{aligned} \sum \frac{2y^2}{2x^2 + y^2 + z^2} &\stackrel{u=x^2, v=y^2, w=z^2}{=} \sum \frac{2v}{2u + v + w} \geq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \left( \sum \frac{v}{2u + v + w} \right) \left( \sum v(2u + v + w) \right) &\geq \left( \sum v \right)^2 \stackrel{?}{\geq} \frac{3}{4} \left( \sum v(2u + v + w) \right) \\ &\Leftrightarrow \sum u^2 \geq \sum vw \end{aligned}$$

这是显然的。  $\square$

看来在陈计眼中一些令人惊讶的东西, 在高中老师那里看起来都是套路吧, 或许多加练习就有可能掌握。

## 10. 恒等式

### I. 三元三次

$$\begin{aligned} \prod (a+b) &= \sum a^2(b+c) + 2abc \\ (\sum a)(\sum ab) &= \sum a^2(b+c) + 3abc = \prod (a+b) + abc \\ (\sum a)^3 &= \sum a^3 + 3 \sum a^2(b+c) + 6abc \\ \sum a^3 - 3abc &= \frac{1}{2} (\sum a) [\sum (b-c)^2] \\ \sum a^3 - \sum a^2b &= \frac{1}{3} \sum (2a+b)(a-b)^2 \\ \sum ab^2 - \sum a^2b &= \frac{1}{3} \sum (a-b)^3 = \prod (a-b) \end{aligned}$$

3 次 Schur:

$$\sum a(a-b)(a-c) = \sum a^3 - \sum ab(a+b) + 3abc = \frac{1}{2} \sum (a+b-c)(a-b)^2 \geq 0$$

### II. 三元四次

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= a^4 + b^4 + 4a^3b + 4ab^3 + 6a^2b^2 \\ (a+b+c)^4 &= \sum a^4 + 6 \sum a^2b^2 + 4 \sum a^3(b+c) + 12 \sum a^2bc \\ \sum ab(b+a)(b-a) &= \sum ab(b^2 - a^2) = \sum ab^3 - \sum a^3b = (\sum a) \prod (a-b) \\ (\sum a^2)^2 - 2 \sum a^4 &= (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+b-a) \end{aligned}$$



## 11.n 元式子

约定:  $a_{n+1} = a_1$

1.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^2 \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \\ 4 \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} &\leq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \\ \Leftrightarrow \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \geq \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} + 2 \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ j-i \geq 2}} a_i a_j \\ &\geq 4 \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \end{aligned}$$

最后一个不等式, 是在不妨设  $a_i (1 \leq i \leq n)$  是按照从小到大排列的, 就能够看出来了。

2.

$$n \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 \geq 0$$

简证

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 &= (n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \\ n \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 &= (n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \end{aligned}$$

注意,

$$\sum_{\substack{sym \\ i \neq j, 1 \leq i, j \leq n}} a_i a_j = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

### 3. 阿贝尔恒等式

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + \cdots + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})(b_{n-1} - b_n) \\ &\quad + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)b_n \end{aligned}$$

用和式写成:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = S_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} S_i (b_i - b_{i+1})$$

其中,  $S_i$  表示数列  $a_i$  的前  $i$  项和。

关于此式有一个面积证明法, 便于记忆:

当  $n = 3$  时,

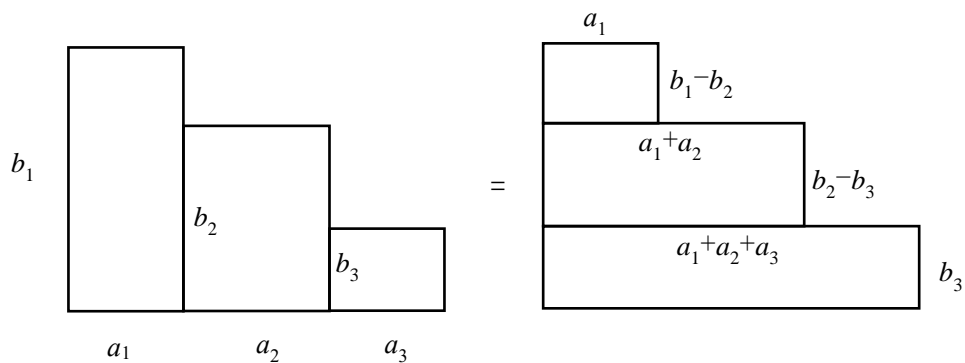


图 84 用面积法证明阿贝尔恒等式

(张景中、彭翥成, 2016, p. 222)

值得一提的是，在积分中，有一个阿贝尔变换：

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x) dx$$

它是由导数乘积式积分而来的：

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

## 引用作品

1. 《模拟试题精选》编委会, 2017. 全国高中数学联赛模拟试题精选. 第1版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.
2. Anon., 无日期 数学 必修3. 北京: 北京师范大学出版社.
3. 百度百科, 2016. 百度百科-定比分点. [联机] Available at: <http://baike.baidu.com/link?url=61qvJOt3DzjBfPS-YVFRJOY8OabDE-4FAQugwv3mPmlucbLecOvN8-oLN7FXcfQK>[访问日期: 2016].
4. 百度百科, 2016. 百度百科-梅涅劳斯定理. [联机] Available at: [http://baike.baidu.com/link?url=UVhQBOWVDHv\\_2VzHL89MhMUBmmPFZj6FIEIGMO6OGSMHUb1DkDoLmHFGQXyCga\\_S3h6GEo76zqXeuJfCyV4cK](http://baike.baidu.com/link?url=UVhQBOWVDHv_2VzHL89MhMUBmmPFZj6FIEIGMO6OGSMHUb1DkDoLmHFGQXyCga_S3h6GEo76zqXeuJfCyV4cK)[访问日期: 2016].
5. 蔡晔, 2015.4. 高考·奥赛对接辅导. 第8版 编辑 北京: 机械工业出版社.
6. 单墀, 2009. 解析几何的技巧. 第3版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.
7. 单墀, 2015. 平面几何100题. 第1版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.
8. 范端喜、邓博文, 2012. 平面几何. 第1版 编辑 上海: 华东师范大学出版社.
9. 范端喜, 2013. 自主招生数学考典. 第1版 编辑 北京: 北京大学出版社.
10. 冯志刚, 2012. 数列与数学归纳法. 第2版 编辑 上海: 华东师范大学出版社.
11. 何天成, 2017. 数学竞赛学习方法漫谈. [联机] Available at: [www.nsmath.cn](http://www.nsmath.cn)
12. 柯召、孙琦, 2011. 初等数论100例. 第2版 编辑 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社.
13. 李尚志, 2014. 多项式的基本运算. 出处: 严镇军, 编辑 高中数学竞赛教程. 安徽: 中国科学技术大学出版社, pp. 246-254.
14. 李尚志, 2014. 一元  $n$  次方程的根. 出处: 严镇军, 编辑 高中数学竞赛教程. 安徽: 中国科学技术大学出版社, pp. 275-284.
15. 米汤屹 iR, 2014. “具象化”的意思?. [联机] Available at: <http://www.zybang.com/question/334d2ca81649bba7f3a0882fdb5eea43.html> [访问日期: 2016].
16. 史济怀, 2014. 递归数列. 出处: 严镇军, 编辑 高中数学竞赛教程. 安徽: 中国科学技术大学出版社, pp. 219-230.
17. 史济怀, 2014. 组合变换的互逆公式及其应用. 出处: 严镇军, 编辑 高中数学竞赛教程. 安徽: 中国科学技术大学出版社, pp. 285-293.
18. 苏淳, 2014. 从特殊性看问题. 第4版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.
19. 苏淳, 2014. 漫话数学归纳法. 第4版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.
20. 肖果能, 2015. Fibonacci 数列. 第1版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.
21. 严镇军, 2014. 几何不等式(I). 出处: 严镇军, 编辑 高中数学竞赛教程. 安徽: 中国科学技术大学出版社, pp. 115-121.
22. 余红兵, 2014. 构造法解题(II). 出处: 严镇军, 编辑 高中数学竞赛教程. 安徽: 中国科学技术大学出版社, pp. 187-192.
23. 臧龙光, 2014. 帮你学几何. 第2版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.
24. 张景中、彭翥成, 2016. 面积关系帮你解题. 第3版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.
25. 朱华伟、程汉波, 2016. 函数与函数思想. 第1版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.

