算法与复杂性　作业二

516021910528 - SHEN Jiamin

2020 年 3 月 5 日

1. 数列 $1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 40, \ldots$，该数列开始是等差数列，第 5 项以后为等比数列，证明任意一个正整数都可表示为这个数列中的不同数之和。

(a)

引理 1　对任意的 $n \in \mathbb{N}^*, n < 2^k$，$n$ 可以表示为集合 $\{2^i \mid 0 \leq i < k\}$ 中任意个不同数之和。

证明　定义集合 S_k：

1. $\{2^i \mid 0 \leq i < k\} \subset S_k$
2. 若 $a \in \mathbb{N}^*$ 可表示为集合 $\{2^i \mid 0 \leq i < k\}$ 中任意多个不同数之和，则 $a \in S_k$

考察集合 S_k：

1. 当 $k = 1$ 时，$S_1 = \{1\}$
2. 当 $k = 2$ 时，$S_2 = \{1, 2, 3\}$
3. 假设当 $k = n$ 时 $S_n = \{a \in \mathbb{N} \mid 1 \leq a < 2^n\}$
   则当 $k = n + 1$ 时，

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n \cup \{2^n\} \cup \{2^n + a \mid a \in S_n\} \\ &= \{a \in \mathbb{N} \mid 1 \leq a < 2^n\} \cup \{2^n\} \cup \left\{a \in \mathbb{N} \mid 2^n + 1 \leq a < 2^{n+1}\right\} \\ &= \left\{a \in \mathbb{N} \mid 1 \leq a < 2^{n+1}\right\} \end{aligned}$$

归纳可知 $S_k = \left\{a \in \mathbb{N} \mid 1 \leq a < 2^k\right\}$，即引理 1成立。 □

(b) 原数列通项公式可表示为

$$a_i = \begin{cases} i, & 1 \leq i < 5 \\ 5 \cdot 2^{i-5} & i \geq 5 \end{cases}$$

对于任意正整数 $n \in \mathbb{N}^*$，

1. 若 $n \le 5$，易知 $n \in \{a_i\}$，即由数列中的单个数即可表示。
2. 由引理 1和整数加法的线性性可推知，$\forall n \in \mathbb{N}^*, 5|n, n < 5 \cdot 2^k$，$n$ 可以表示为集合 $\{5 \cdot 2^i \mid 0 \le i < k\}$ 中任意个不同数之和。所以若 $5|n$，则 n 可以表示为 $\{a_i \mid i \ge 5\}$ 中任意个不同数之和。

$$\mathbb{N}^* = \{5x + y \mid x \in \mathbb{N}, y \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

其中 $5x$ 可以表示为 $\{a_i \mid i \ge 5\}$ 中任意个不同数之和；又 $n \in \{a_i \mid 1 \le i < 5\}$。归纳可知，任意正整数可以表示为 $\{a_i\}$ 中任意个不同数之和。

证明 该数列通项公式可表示为

$$a_i = \begin{cases} i, & 1 \le i < 5 \\ 5 \cdot 2^{i-5} & i \ge 5 \end{cases}$$

对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$，存在唯一一组 (t, b, q) 满足 $t \in \mathbb{N}, b \in \{0, 1\}, q \in \{1, 2, 3, 4\}$，使得

$$n = 5t + bq$$

t 有唯一的二进制表示，使 $t = \sum_k b_k \cdot 2^k$，其中 $b_k \in \{0, 1\}$

即

$$n = 5 \cdot \sum_k b_k \cdot 2^k + bq = \sum_k b_k \cdot (5 \cdot 2^k) + bq$$

因为 $b_k, b \in \{0, 1\}$，不可能有重复的加数。又由题可知,

$$\left\{5 \cdot 2^k\right\} = \{a_i \mid i \ge 5\}$$
$$\{q\} = \{a_i \mid 1 \le i < 5\}$$

所以任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 可以表示为 $\{a_i\}$ 中任意多不同数之和。 $\square$

2. 广场上站着 99 个间谍，间谍与间谍之间的距离互不相等，每个间谍都盯着离自己最近的那个间谍看，证明总存在一个没被人盯着的间谍。

间谍与监视关系构成一张有向图，图中每个节点的出度为 1。

该图中不可能存在一个边数大于 2 的闭环（即 $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_n \to v_0$）。若存在这样一个闭环，则一定存在闭环上的一条边 (v_i, v_{i+1}) 是环上所有边中最短的，所以 v_i, v_{i+1} 必互相监视，与假设不符。所以该图中不可能存在一个边数大于 2 的闭环。

若无法形成闭环，由于每个节点出度为 1，其每个连通子图只能存在以下情况

- 两节点相互监视，且无其他节点监视这两个节点。
- 链形 $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_n$。由于不可能存在闭环，要使 v_n 出度为 1 必有 $v_n \to v_{n-1}$，此时必然存在 v_0 的入度为 0。
- 星形（即 $v_1 \to v_0, v_2 \to v_0, \ldots$）。由于 v_0 出度为 1，只能与其中一个节点互相监视，周围其他节点的入度均为 0。

当有 99 个间谍时，即使两两一对互相监视，也一定存在 1 个节点无法成对。因此一定存在星形或链形结构，使存在至少一个人没有被盯着。

3. 有 10 个海盗抢得了 100 枚金币，每个海盗都能够很理智地判断自己的得失，他们决定这样分配金币：

   1. 按照强壮与否排序，其中最强壮的人为 10 号，以此类推，最瘦小的人为 1 号。
   2. 先由 10 号提出分配方案，然后由所有人表决，当且仅当**等于或多于半数人**（包括自己）同意时，方案才算被通过，否则他将被扔入大海喂鲨鱼；
   3. 如果 10 号死了，将由 9 号提方案，其余的人表决，当且仅当**超过半数**（包括自己）同意时，方案才算通过，否则 9 号同样将被扔入大海喂鲨鱼；
   4. 往下以此类推……

   海盗们都很精明，他们首先会尽量保住自己的命，其次在保住命的前提下都想分到尽可能多的金币，而且他们也很希望自己的同伴喂鲨鱼。

   (a) 假如你是那个 1 号海盗，你将怎样分配，才能既保住命，又能分到最多的金币？最多能分到多少呢？

   (b) 如果还是 100 枚金币，但海盗的数量是 20，50，100，200，400 又该怎么样呢？

设有 n 个海盗时，n 号海盗提出的方案中，j 号海盗分得的金币数量为 $c_n(j)$。

当仅剩两人（1、2 号）时，无论 2 号提出怎样的方案，1 号都会选择不同意从而把 2 号扔进大海并分得全部金币。所以，当剩余三人时（1、2、3 号），无论 3 号提出怎样的方案，2 号都会同意 3 号的方案以避免出现上述情况。因此，3 号会提出一个

$$c_3(j) = \begin{cases} 100 & ,j=3 \\ 0 & ,j=1,2 \end{cases}$$

的方案，2、3 号海盗会同意这个方案。

在上述方案中，1、2 号海盗都没有得到金币。因此，当由 4 号海盗提出方案时，只要他分给 1 号或 2 号海盗 1 个金币，即可赢得其支持。如

$$c_4(j) = \begin{cases} 99 & ,j=4 \\ 1 & ,j=2 \\ 0 & ,j=1,3 \end{cases}$$

当由 5 号海盗提出方案时，需要 3 人同意方可通过。代价最小的方案为在 c_4 的基础上多分给 1、3 号各一个金币。即

$$c_5(j) = \begin{cases} 98 & ,j=5 \\ 1 & ,j=1,3 \\ 0 & ,j=2,4 \end{cases}$$

当由 6 号海盗提出方案时，需要 3 人同意即可通过。代价最小的方案为 c_5 基础上分给 2、4 号一个金币。如

$$c_6(j)=\begin{cases}98 & ,j=6\\ 1 & ,j=2,4\\ 0 & ,j=1,3,5\end{cases}$$

已知　当有 n 个海盗时，须有 $\lceil\frac{n}{2}\rceil=\begin{cases}\frac{n+1}{2} & ,n\text{为奇数}\\ \frac{n}{2} & ,n\text{为偶数}\end{cases}$ 个海盗支持方可通过方案。

猜想　当 $3<n\leq 200$ 时，n 号海盗提出如下方案可保住自己的命:

$$c_n(j)=\begin{cases}101-\lceil\frac{n}{2}\rceil & ,j=n\\ 1 & ,j<n,j+n\text{为偶数}\\ 0 & ,j<n,j+n\text{为奇数}\end{cases}$$

证明　下面使用数学归纳法证明上述猜想。

1. 前已论述 $n\leq 6$ 时的情况
2. 假设 $n=k$ 时猜想成立
   - 若 k 为奇数，则 k 号海盗可分得 $101-\frac{k+1}{2}$ 个金币。且有 $\frac{k+1}{2}-1$ 个奇数号海盗获得了 1 个金币，$\frac{k-1}{2}$ 个偶数号海盗没有获得金币。
   - 若 k 为偶数，则 k 号海盗可分得 $101-\frac{k}{2}$ 个金币。且有 $\frac{k}{2}-1$ 个偶数号海盗获得了 1 个金币，$\frac{k}{2}$ 个奇数号海盗没有获得金币。

   则当 $n=k+1$ 时

   - 若 k 为奇数，$k+1$ 为偶数。$k+1$ 号海盗须得到另外 $\frac{k-1}{2}$ 个海盗的支持方可通过方案。因此，只需给 $n=k$ 时没有分得金币的 $\frac{k-1}{2}$ 个偶数号海盗分 1 个金币即可赢得他们的支持。即 $k+1$ 为偶数时，

   $$c_{k+1}(j)=\begin{cases}100-\frac{k-1}{2}=101-\lceil\frac{k+1}{2}\rceil & ,j=k+1\\ 1 & ,j<k+1,j\text{为偶数}\\ 0 & ,j<k+1,j\text{为奇数}\end{cases}$$

   - 若 k 为偶数，$k+1$ 为奇数。$k+1$ 号海盗须得到另外 $\frac{k}{2}$ 个海盗的支持方可通过方案。因此，只需给 $n=k$ 时没有分得金币的 $\frac{k}{2}$ 个奇数号海盗分 1 个金币即可赢得他们的支持。即 $k+1$ 为奇数时，

   $$c_{k+1}(j)=\begin{cases}100-\frac{k}{2}=101-\lceil\frac{k+1}{2}\rceil & ,j=k+1\\ 1 & ,j<k+1,j\text{为奇数}\\ 0 & ,j<k+1,j\text{为偶数}\end{cases}$$

综合可知上述猜想成立。 □

由此可知,

- 当 $n=200$ 时，$c_{200}(j)=\begin{cases}1 & ,j<200,j\text{为偶数}\\0 & ,j<200,j\text{为奇数}\end{cases}$
- 当 $n=201$ 时，201 号海盗必须获得除他自己以外的另外 100 名海盗的支持。因此，他须分给 1-200 号海盗中 100 名奇数号海盗各 1 枚金币，而他本人无法分得金币。
- 当 $n=202$ 时，202 号海盗必须获得除他自己以外的另外 100 名海盗的支持。因此，他须分给 1-200 号海盗中 100 名偶数号海盗各 1 枚金币，而他本人无法分得金币。
- 当 $n=203$ 时，203 号海盗必须获得除他自己以外的另外 101 名海盗的支持。但他只有 100 枚金币，无法获得 101 名海盗的支持。所以他的方案不可能通过。
- 当 $n=204$ 时，204 号海盗必须获得除他自己以外的另外 101 名海盗的支持。由上述可知，203 号海盗一定会支持 204 号海盗以保护自己。因此他只需在其他人中选 100 人，分给他们每人 1 个金币即可。
- 当 $n=205$ 时，205 号海盗必须获得除他自己、100 个金币能收买的 100 个海盗以外，另外 2 名海盗的支持。同理，当 $n=206$、$n=207$ 时，方案都无法被通过。
- 当 $n=208$ 时，208 号海盗必须获得除他自己、100 个金币能收买的 100 个海盗以外，另外 3 名海盗的支持。205-207 号海盗为保命也会支持 208 号海盗，因此 208 号海盗的方案会被通过。

猜想 当 $n>200$ 时，当且仅当 $n=200+2^k,k\in\mathbb{N}$ 时，存在可以通过的方案。

证明

1. 由上述论述可知，当 $k=0,1,2,3$，$n=201,202,204,208$ 时，存在可以通过的方案，且本人均无法得到金币。
2. 设 $k\in\mathbb{N}^*$。
   - 若 $n=200+2k$ 时，存在一个可以通过的方案，即 $100+k$ 个海盗支持了方案。则当 $n=201+2k$ 时，需要 $101+k$ 个海盗支持。除他自己和能用金币收买的 100 个海盗（共 101 人）以外，剩余 k 个人均会选择拒绝方案从而将他扔进大海。
   - 若 $n=200+2k$ 时, 不存在一个可以通过的方案, 即表示支持的海盗人数 $\delta<100+k$。则当 $n=201+2k$ 时，表示支持的海盗人数为 $\delta+1\leq 100+k$，不足 $101+k$ 个。方案仍然不会被通过。

   所以当 $n>201$ 且 n 为奇数时，不存在能通过的方案。

3. 假设 $n = 200 + 2^k$ 时，存在可以通过的方案。若 $n = n' > 200 + 2^k$（由上述可知，n' 定为偶数）时，也存在可以通过的方案，且 $200 + 2^k < n < n'$ 时不存在可以通过的方案。则 $200 + 2^k$ 号至 $n' - 1$ 号共 $n' - 1 - (200 + 2^k)$ 名海盗都会支持 n' 号海盗。因此若有 n' 名海盗时存在可以通过的方案，定有

$$\left\lceil \frac{n'}{2} \right\rceil = 100 + 1 + (n' - 1 - (200 + 2^k)) = n' - 2^k - 100$$
$$n' = 2n' - 2^{k+1} - 200$$
$$n' = 200 + 2^{k+1}$$

归纳可得，上述猜想成立。 □

答

(a) 当 $n = 10$ 时，$c_{10}(j) = \begin{cases} 96 & ,j = n \\ 1 & ,j < 10, j\text{为偶数} \\ 0 & ,j < 10, j\text{为奇数} \end{cases}$

(b) 当 $n = 20$ 时，$c_{20}(j) = \begin{cases} 91 & ,j = n \\ 1 & ,j < 20, j\text{为偶数} \\ 0 & ,j < 20, j\text{为奇数} \end{cases}$

当 $n = 50$ 时，$c_{50}(j) = \begin{cases} 76 & ,j = n \\ 1 & ,j < 50, j\text{为偶数} \\ 0 & ,j < 50, j\text{为奇数} \end{cases}$

当 $n = 100$ 时，$c_{100}(j) = \begin{cases} 51 & ,j = n \\ 1 & ,j < 100, j\text{为偶数} \\ 0 & ,j < 100, j\text{为奇数} \end{cases}$

当 $n = 200$ 时，$c_{200}(j) = \begin{cases} 1 & ,j < 200, j\text{为偶数} \\ 0 & ,j < 200, j\text{为奇数} \end{cases}$

当 $n = 400$ 时，不存在自然数 k 使 $200 + 2^k = 400$，因此 400 号海盗一定会被扔进大海。

4. 以下利用数学归纳法证明“所有的马颜色相同”错在哪儿

   1. 只有一匹马时，命题成立
   2. 设有 n 匹马时命题成立。则当有 $n+1$ 匹马 $\{h_1, h_2, \ldots, h_n, h_{n+1}\}$ 时，
      由归纳假设，$\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ 这 n 匹马颜色相同，$\{h_2, \ldots, h_n, h_{n+1}\}$ 这 n 匹马的颜色相同，
      即 h_1 和 h_{n+1} 这两匹马与 $\{h_2, \ldots, h_n\}$ 颜色相同，
      所以 $\{h_1, h_2, \ldots, h_n, h_{n+1}\}$ 这 $n+1$ 匹马的颜色是相同的

> 考察由 $n=1$ 推广至 $n=2$ 时的情况：
>
> 两匹马 $\{h_1, h_2\}$ 中，由归纳假设 $\{h_1\}$ 颜色相同，$\{h_2\}$ 颜色相同。但 $\{h_1\} \cap \{h_2\} = \Phi$，所以不能推出 $\{h_1, h_2\}$ 两匹马颜色相同。因此不能由此归纳“出所有的马颜色相同”。