Chapter0. Introduction

2019年2月22日　　16:28

NOTE TAKING AREA

Textbook and references

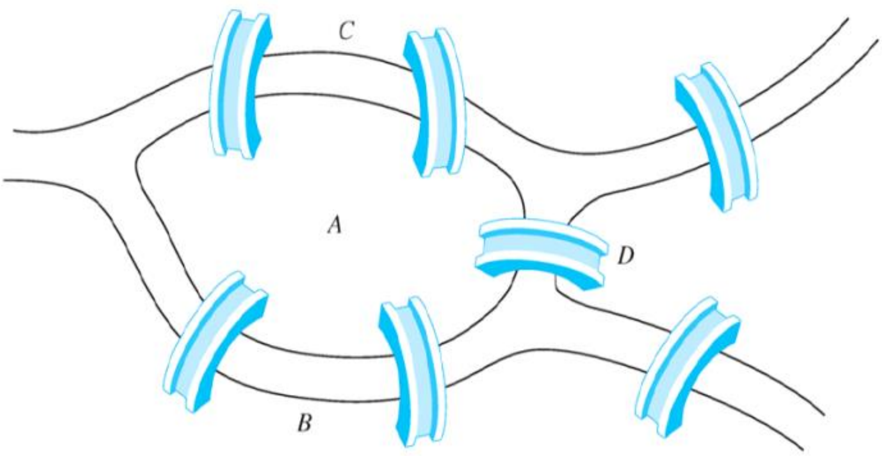
- 《离散数学及其应用》：课本。
- 《具体数学》：计算机需要用的数学知识。
- 《算法导论》：CLRS BOOK，祝好。

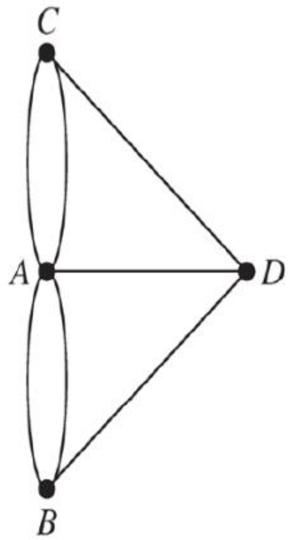
Grades

- Quiz in class 10% - attendance required.
- Homework assignments 20% - submit at sakai.
- Midterm exam 30% - April 12th, 16:20-18:20.
- Final exam 40%.

Some problems

- Color graphing:
  - Four-color theorem: no more than four colors are required to color the regions of the map so that no two adjacent regions have the same color.
  - Applications of graph coloring: scheduling final exam, channel assignments.
- Seven-bridge problem: pass all bridges once without walk repetition.





- Fibonacci number: $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ for n >= 2.
  - The closed form of Fibonacci numbers:

Consider $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$, with $x \neq 0$. There are two different roots

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Then F_n can be the form of $a\phi^n + b\psi^n$. By $F_0 = 0$ and $F_1 = 1$, we have $a + b = 0$ and $\phi a + \psi b = 1$, leading to $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $b = -a$. Therefore,

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

Basic concepts of discrete mathematics

- Logic: the basis of all mathematical reasoning.
  - Syntax of statements, the meaning of statements, and the rules of logic inference.
- Proposition: a **declarative** statement that is **either true of false**.
  - Usually, a proposition is **condition-based**.
  - More complex propositions can be built from elementary statement using **logical connectives**.
    - Logical connectives: negation, conjunction, disjunction, exclusive or, implication, biconditional.
      - Negation of p: it is **not** the case that p, denoted $\neg p$.
      - Conjunction of p and q: is **true** while p and q are **both true**, denoted $p \wedge q$.
      - Disjunction of p and q: is **true** while **either** p or q is **true**, denoted $p \vee q$.
      - Exclusive or: is **true** when **exactly one** of p and q is true, denoted $p \oplus q$.
      - Conditional statement or implication: if p then q, is **false** when **p is true and q is false**, otherwise **true**, denoted $p \rightarrow q$.
        - In which p is called **hypothesis**, and q is called **conclusion**.
        - The **converse** of $p \rightarrow q$ is $q \rightarrow p$.
        - The **contrapositive** of $p \rightarrow q$ is $\neg q \rightarrow \neg p$.
        - The **inverse** of $p \rightarrow q$ is $\neg p \rightarrow \neg q$.
      - Biconditional of p and q: **p if and only if q**, is true while p and q have same truth values, denoted $p \Leftrightarrow q$.
        - The statement **iff** means if and only if.
- Truth table: displays the **relationships between truth values** (T or F) of different propositions.

Computer representation of true and false

- A bit is sufficient to represent two possible values: 1 true and 0 false.
- **Boolean variable**: takes on values 0 and 1.
- **Bit string**: a sequence of zero or more bits.
  - **Length** of string: the number of bits in the string.
- **Bitwise operations**: replace T and F with 1 and 0.

CUE COLUMN

Example of proof

- For an integer n, if 3n+2 is odd, then n is odd.

- Direct proof:

  w.l.o.g. suppose that $3n+2=2k+1$ for some integer k. Then

  $$n=\frac{2k-1}{3}=2\cdot\frac{k+1}{3}-1.$$

  It suffices to prove that $\frac{k+1}{3}$ is an integer. Note that $3n+3$ is even, and so is $n+1$. It then follows that

  $$\frac{k+1}{3}=\frac{\frac{3n+1}{2}+1}{3}=\frac{n+1}{2}$$

  is an integer.
- Proof by contrapositive:

  It is *equivalent* to prove that "If n is even , then $3n+2$ is even." – Why?

  w.l.o.g. suppose that $n=2k$ for some integer k, then

  $$3n+2=6k+2,$$

  which is even.
  - 不失一般性：without loss of generality.
- Or another contradiction, assume there exists an integer n such that 3n+2 is odd and n is even. Since n is even, so is 3n, and that 2 is odd, which is a contradiction.

Logic connectives example

- Proposition p: 2 is a prime (T), q: 6 is a prime (F). Determine the truth value:

$\neg p$	F
$p \wedge q$	F
$p \wedge \neg q$	T
$p \vee q$	T
$p \oplus q$	T
$p \to q$	F
$q \to p$	T

SUMMARIES

1. Course information about books and grades.
2. Some typical problems.
3. Basic concepts of discrete mathematics, logical connectives.
4. Computer representation of true and false.

Chapter1-1. 命题逻辑

2019年3月10日 12:39

NOTE TAKING AREA

命题的基本定义

- 命题：是一个或真或假的陈述句。
  - *真命题的真值为真，用T表示；假命题的真值为假，用F表示。*
  - *涉及命题的逻辑领域被称为**命题演算**或**命题逻辑**。*

复合命题与真值表

- *真值表用以表示命题的真值，表中元素为命题变元，真值表想同的命题**等价**。*

CUE COLUMN

复合命题真值表的例子

例 11 构造复合命题 $(p\vee\neg q)\rightarrow(p\wedge q)$ 的真值表。

解 因为真值表涉及 2 个命题变元 p 和 q，因而此表有 4 行，对应 4 种真值组合 TT、TF、FT 和 FF。前两列分别表示 p 和 q 的真值。第三列为 $\neg q$ 的真值，以此决定在第 4 列中 $p\vee\neg q$ 的真值。$p\wedge q$ 的真值在第 5 列。最后，$(p\vee\neg q)\rightarrow(p\wedge q)$ 的真值在最后一列。真值表的结果如表 1-7 所示。■

表 1-7 复合命题 $(p\vee\neg q)\rightarrow(p\wedge q)$ 的真值表

p	q	$\neg q$	$p\vee\neg q$	$p\wedge q$	$(p\vee\neg q)\rightarrow(p\wedge q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

SUMMARIES

1. 命题的基本定义。
2. 复合命题与真值表。

Chapter1-2. 命题等价

2019年3月10日 12:45

NOTE TAKING AREA

引言与逻辑等价

- 永真式/重言式（Tautology）：无论其中出现的命题真值是什么，复合命题的真值永远为真。
    - 真值永远为假的复合命题称为**矛盾**，而既不是永真式又不是矛盾的命题称为**可能式**。
- 在所有可能的情况下都有相同真值的两个复合命题称为**逻辑等价。**
    - 如果$p \leftrightarrow q$是永真式，命题p和q称为是逻辑等价的。记号$p \equiv q$表示p和q逻辑等价。
        - *符号≡不是逻辑连接词，因为$p \equiv q$不是复合命题，而语句$p \leftrightarrow q$是永真式。符号⇔有时用来代替≡表示等价。*
- 德摩根律：$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$, $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

CUE COLUMN

永真式和矛盾的例子

例 1 我们可以只用一个命题构造永真式和矛盾。$p \vee \neg p$ 和 $p \wedge \neg p$ 的真值表如表 1-10 所示。因为 $p \vee \neg p$ 总是真，所以它是永真式。因为 $p \wedge \neg p$ 总是假，所以它是矛盾。■

表 1-10 永真式和矛盾的例子

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

证明逻辑等价

例 2 证明$\neg(p \vee q)$和$\neg p \wedge \neg q$逻辑等价。

解 表 1-12 给出了这些复合命题的真值。由于对 p 和 q 所有可能的真值组合，命题$\neg(p \vee q)$和$\neg p \wedge \neg q$的真值都一样，所以$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$是永真式，这两个命题逻辑等价。

表 1-12 $\neg(p \vee q)$和$\neg p \wedge \neg q$的真值表

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

■

常见逻辑等价的形式

表 1-15　逻辑等价

等价关系	名称
$p\wedge \mathbf{T}\equiv p$ $p\vee \mathbf{F}\equiv p$	恒等律
$p\vee \mathbf{T}\equiv \mathbf{T}$ $p\wedge \mathbf{F}\equiv \mathbf{F}$	支配律
$p\vee p\equiv p$ $p\wedge p\equiv p$	幂等律
$\neg(\neg p)\equiv p$	双非律
$p\vee q\equiv q\vee p$ $p\wedge q\equiv q\wedge p$	交换律
$(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$ $(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$	结合律
$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$	分配律
$\neg(p\wedge q)\equiv\neg p\vee\neg q$ $\neg(p\vee q)\equiv\neg p\wedge\neg q$	德摩根定律
$p\vee(p\wedge q)\equiv p$ $p\wedge(p\vee q)\equiv p$	吸收律
$p\vee\neg p\equiv \mathbf{T}$ $p\wedge\neg p\equiv \mathbf{F}$	否定律

表 1-16　涉及条件语句的逻辑等价

$p\to q\equiv\neg p\vee q$
$p\to q\equiv\neg q\to\neg p$
$p\vee q\equiv\neg p\to q$
$p\wedge q\equiv\neg(p\to\neg q)$
$\neg(p\to q)\equiv p\wedge\neg q$
$(p\to q)\wedge(p\to r)\equiv p\to(q\wedge r)$
$(p\to r)\wedge(q\to r)\equiv(p\vee q)\to r$
$(p\to q)\vee(p\to r)\equiv p\to(q\vee r)$
$(p\to r)\vee(q\to r)\equiv(p\wedge q)\to r$

表 1-17　涉及双条件的逻辑等价

$p\leftrightarrow q\equiv(p\to q)\wedge(q\to p)$
$p\leftrightarrow q\equiv\neg p\leftrightarrow\neg q$
$p\leftrightarrow q\equiv(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$
$\neg(p\leftrightarrow q)\equiv p\leftrightarrow\neg q$

SUMMARIES

1. 逻辑等价与德摩根律。

Chapter1-3. 谓词和量词

2019年3月10日 12:56

NOTE TAKING AREA

谓词逻辑

- 含变量的语句在变量值未知的时候，这些语句既不为真也不为假。
  - 语句包含**主语**和**谓词**，对于变量x，**命题函数**P(x)表示P在x处的值，给x赋值之后语句P(x)就成为命题。
- 形为$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$的语句是命题函数P在n元组的值，P也称为**n元谓词。**
- 描述有效输入的语句叫做**前置条件**，输出应该满足的条件称为**后置条件**。

量词

- 量化：从命题函数产生命题。
  - 谓词演算：处理谓词和量词的逻辑领域。
- 全称量词：对于某一性质在变量的某一特定域内的所有值均为真，这一特定域称为变量的**论域**（全体域），语句用全称量化表示。

命　题	何时为真	何时为假
$\forall x P(x)$	对每一个 x，$P(x)$都为真	有一个 x，使 $P(x)$为假
$\exists x P(x)$	有一个 x，使 $P(x)$为真	对每一个 x，$P(x)$都为假

  - 通常，隐含假设量词的论域为非空，如果论域为空，那么∀xP(x)对任何命题函数P(x)都为真。
- 存在量词：有一个具有某种性质的元素，这类语句用存在量化表示，命题成真的充分必要条件是论域中至少有一个值满足P(x)为真。
  - 若论域为空，则存在量化均为假。

其他量词

- 唯一量词：用符号∃!表示，指存在唯一x使P(x)为真。
- 约束论域量词：缩略符号用来约束量词的论域，量词后具有变量必须满足的条件。
- 量词的优先级：量词比所有的命题演算的逻辑运算符具有更高的优先级。
- 绑定变量：量词作用的变量称为**绑定**，没有被量词绑定或设定为特定值的变量称为**自由。**

量词逻辑等价与否定量化表达式

- *当且仅当无论什么谓词代入语句，无论用哪个论域作用于变量，语句都具有相同的真值，称为**逻辑等价**。符号S ≡ T表示语句S和T逻辑等价。*
- 否定量化表达式：等价关系¬∀xP(x) ≡ ∃x¬P(x)成立。
  - 被称为量词的德摩根定律。

否　定	等价语句	何时为真	何时为假
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	对每个 x，$P(x)$为假	有 x，使 $P(x)$为真
$\neg\forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	有 x 使 $P(x)$为假	对每个 x，$P(x)$为真

CUE COLUMN

命题函数的真值

例 3 令 $Q(x, y)$ 表示语句“$x=y+3$”，命题 $Q(1, 2)$ 和 $Q(3, 0)$ 的真值是什么？

解 要得到 $Q(1, 2)$，在 $Q(x, y)$ 中令 $x=1$，$y=2$。因此，$Q(1, 2)$ 为语句“$1=2+3$”，为假。语句 $Q(3, 0)$ 为语句“$3=0+3$”，为真。■

前置条件与后置条件

例 7 考虑下面的交换变量 x 和 y 值的程序。

```
temp := x
x := y
y := temp
```

找出能做为前置条件和后置条件的谓词，以证明此程序的正确性。然后解释如何用它们验证对所有有效的输入，程序的运行都能达到目的。

解 对于前置条件，我们需要表达在运行程序之前 x 和 y 被赋值。因此，对于这个前置条件可以用谓词 $P(x, y)$ 表示，其中 $P(x, y)$ 指语句“$x=a$，$y=b$”，a 和 b 是在运行程序之前 x 和 y 的值。因为我们想证明对于所有输入变量，程序交换了 x 和 y 的值，对后置条件可以用 $Q(x, y)$ 表示，其中 $Q(x, y)$ 表示语句“$x=b$，$y=a$”。

为证明程序总是按照预期运行，假设前置条件 $P(x, y)$ 成立。也就是说，假设命题“$x=a$，$y=b$”为真，这意味着 $x=a$，$y=b$。程序的第一步，$temp:=x$，将 x 的值赋给 $temp$，所以下一步是 $x=a$，$temp=a$，$y=b$。程序第二步，$x:=y$，因此 $x=b$，$temp=a$，$y=b$。最后，第三步，我们知道 $x=b$，$temp=a$，以及 $y=a$。结果，程序运行后，后置条件 $Q(x, y)$ 成立，也就是说，语句“$x=b$，$y=a$”为真。■

量词逻辑等价

例 19 表明 $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ 和 $\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$ 逻辑等价（论域始终相同）。这个逻辑等价式表明可以在一个合取上分配全称量词。此外，也可以在一个析取上分配存在量词。然而，不能在析取上分配全称量词，也不能在合取上分配存在量词。（见练习 50 和 51）

解 为表示这两个语句逻辑等价，必须表示出，不论 P 和 Q 是什么谓词，也不论运用哪个个体论域，它们总有相同真值。假设有特定的谓词 P 和 Q，论域为常用的。可以做两件事来表示出 $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ 和 $\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$ 逻辑等价。首先，表示出如果 $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ 为真，那么 $\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$ 为真。第二步，表示出如果 $\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$ 为真，那么 $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ 为真。

因此，假设 $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ 为真。这意味着如果 a 在论域中，那么 $P(a)\wedge Q(a)$ 为真。所以，$P(a)$ 为真，且 $Q(a)$ 为真。因为对论域中每个对象 $P(a)$ 为真，且 $Q(a)$ 为真都成立，可以下结论，$\forall xP(x)$ 和 $\forall xQ(x)$ 都为真。这意味着 $\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$ 为真。

下一步，假设 $\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$ 为真。那么 $\forall xP(x)$ 为真，且 $\forall xQ(x)$ 为真。因此，如果 a 在论域中，那么 $P(a)$ 为真，且 $Q(a)$ 为真（因为 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 对论域中所有元素都为真，所以这里用同样的值 a 不矛盾）。接着，对于所有的 a，$P(a)\wedge Q(a)$ 为真。所以 $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ 为真。现在可以下结论

$$\forall x(P(x)\wedge Q(x))\equiv\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$$ ■

SUMMARIES

1. 谓词逻辑。
2. 量词和绑定变量。
3. 两次逻辑等价和否定量化表达式。

Chapter1-4. 嵌套量词

2019年3月10日 13:20

NOTE TAKING AREA

循环量化与量词顺序

- 嵌套量词：出现在其他量词作用域内的量词。
  - 循环量化考虑：判断$\forall x \forall y\ P(x,y)$是否为真，先对所有x的值循环，再对每个x对所有y值循环，若都为真则命题为真。
- 量词的顺序：若所有量词均为全称量词或均为存在量词时，量词顺序调整后命题依然相同。

语句	何时为真	何时为假
$\forall x \forall y\ P(x, y)$ $\forall y \forall x P(x, y)$	对每一对 x、y，$P(x, y)$均为真	有一对 x、y 使 $P(x, y)$为假
$\forall x \exists y\ P(x, y)$	对每个 x，都有 y 使 $P(x, y)$为真	有 x，使 $P(x, y)$对每个 y 总是假
$\exists x \forall y\ P(x, y)$	有一个 x，使 $P(x, y)$对所有 y 均为真	对每个 x 都有 y 使 $P(x, y)$为假
$\exists x \exists y\ P(x, y)$ $\exists y \exists x P(x, y)$	有一对 x、y 使 $P(x, y)$为真	对每一对 x、y，$P(x, y)$均为假

否定嵌套量词

- 带嵌套量词的语句可通过连续地应用否定带单个量词的语句的规则成为否定的。

例 14 表达语句 $\forall x \exists y(xy=1)$的否定，使得量词前面没有否定词。

Extra Examples

解 通过连续地应用否定量化语句的规则(见 1.3 节表 1-17)，可以将 $\neg \forall x \exists y(xy=1)$ 中的否定词移入所有量词里面。我们发现，$\neg \forall x \exists y(xy=1)$等价于 $\exists x \neg \exists y(xy=1)$，而后者又等价于 $\exists x \forall y \neg(xy=1)$。由于 $\neg(xy=1)$可以简化为 $xy \neq 1$，所以，我们的否定语句可以表达为 $\exists x \forall y(xy \neq 1)$。■

CUE COLUMN

SUMMARIES

1. 循环量化与量词顺序。
2. 否定嵌套量词。

Chapter1-5. 推理规则

2019年2月22日　　10:04

NOTE TAKING AREA

- 论证：一连串的命题最终得出结论。
  - **有效性**：计划得出结论或论证的最终命题，过程依据命题或论证前提的真实性。
  - **谬误**：无效推论，不正确推理。
- 命题逻辑的有效论证：
  - *命题逻辑中的一个论证是一连串的命题。除了论证中最后一个命题外都叫前提，最后那个命题叫结论。当它的所有前提为真意味着结论为真时，一个论证是有效的。*
    - 论证形式：涉及命题变元的一连串复合命题。
- 命题逻辑的推理规则：比较简单的有效论证形式。
  - 假言推理（分离规则）：(p∧(p→q))→q.

$$\begin{array}{ll} & p \\ & \underline{p \to q} \\ \therefore & q \end{array}$$

  - 更多的推理规则见线索区。
- 用推理规则建立论证：有许多前提时需要使用多个推理规则。
- 消解：一种供计算机程序使用的**推理规则**。

$$((p \lor q) \land (\neg p \lor r)) \to (q \lor r)$$

  - *使用消解来构造命题逻辑中的证明，假设和结论必须被表示为**子句**。*
    - 子句：变量的析取或这些变量的否定。
- 谬误：不正确的论证，基于偶然事件而非永真式。
  - 肯定结论谬误：命题[(p→q)∧q]→p不是永真式。
- 带量词命题的推理规则：
  - 全称例示：从前提∀xP(x) → P(c)，其中c是论域中的具体成员。
  - 全称生成：对论域里所有元素c来说P(c)都为真的前提下，∀xP(x)为真。
  - 存在例示：已知∃xP(x)为真，得出在论域里存在一个使得P(c)为真的元素c。
  - 存在生成：已知使P(c)为真的一个具体c时，得出∃xP(x)为真。

推理规则	名　称
$\begin{array}{ll} & \underline{\forall x P(x)} \\ \therefore & P(c) \end{array}$	全称例示
$\begin{array}{ll} & \underline{P(c)\text{，任意 } c} \\ \therefore & \forall x P(x) \end{array}$	全称生成
$\begin{array}{ll} & \underline{\exists x P(x)} \\ \therefore & P(c)\text{，对某个元素 } c \end{array}$	存在例示
$\begin{array}{ll} & \underline{P(c)\text{，对某个元素 } c} \\ \therefore & \exists x P(x) \end{array}$	存在生成

- 命题推理和量化语句推理规则的结合：全称例示和假言推理的结合称为**全称假言推理**。

$$\begin{array}{ll} & \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ & \underline{P(a)\text{，其中 } a \text{ 是论域中一个特定的元素}} \\ \therefore & Q(a) \end{array}$$

CUE COLUMN

推理规则

推理规则	永真式	名称
p $\underline{p\to q}$ $\therefore q$	$[p\wedge(p\to q)]\to q$	假言推理
$\neg q$ $\underline{p\to q}$ $\therefore \neg p$	$[\neg q\wedge(p\to q)]\to\neg p$	取拒式
$p\to q$ $\underline{q\to r}$ $\therefore p\to r$	$[(p\to q)\wedge(q\to r)]\to(p\to r)$	假言三段论
$p\vee q$ $\underline{\neg p}$ $\therefore q$	$[(p\vee q)\wedge\neg p]\to q$	析取三段论
$\underline{p}$ $\therefore p\vee q$	$p\to(p\vee q)$	附加
$\underline{p\wedge q}$ $\therefore p$	$(p\wedge q)\to p$	化简
p $\underline{q}$ $\therefore p\wedge q$	$[(p)\wedge(q)]\to(p\wedge q)$	合取
$p\vee q$ $\underline{\neg p\vee r}$ $\therefore q\vee r$	$[(p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)]\to(q\vee r)$	消解

SUMMARIES

1. 论证与有效论证。
2. 推理规则与建立论证。
3. 消解与谬误。
4. 带量词命题的推理规则。
5. 命题推理和量化语句推理。

Chapter1-6. 证明导论

2019年3月8日 14:01

NOTE TAKING AREA

导论与专业术语

- *非形式化证明：许多推理规则用于每一步，许多步骤被省略，没有明确列出其中的假设公理和用到的推理规则。*
- 定理：一个能够表明是真的语句。
  - 定理可以包含一个或多个前提的条件语句及一个结论全称量化。
  - 命题：不太重要的定理。
- 公理（假设）：假设为真的语句，用不要求定义的原始语句陈述。
- 引理：其他结果证明中很有帮助的不大重要的定理。
  - 推论：从定理直接建立被证明的定理。
  - 猜想：被提出为真的命题，通常是在一些依据的基础上启发式论证，**可能是错误的**。

定理陈述和证明定理

- *许多定理断言一个性质对论域（比如整数或实数）中的所有元素都成立，准确陈述中需要包含全称量词，但数学的标准约定中省略全称量词。*

  "如果 $x>y$，其中 x 和 y 是正实数，那么 $x^2>y^2$。"

  "对所有正实数 x 和 y，如果 $x>y$，那么 $x^2>y^2$。"
  - 当证明这类定理时，使用**全称例示**规则而不明确指出。
- 证明定理的方法：
  - 直接证明：构造条件语句$p \rightarrow q$，在证明中假定p为真，用公理、定义和定理及推理规则证明出q也肯定为真。
  - 反证法（间接证明的一种）：条件语句$p \rightarrow q$等价于它的倒置$\neg q \rightarrow \neg p$。
  - 空证明和平凡证明：
    - 空证明：当p为假时，条件语句$p \rightarrow q$为真，经常用于证明定理的特殊情况。
    - 平凡证明：当结论q为真，可以证明条件语句$p \rightarrow q$，经常用于证明定理的特殊情况或数学归纳法。
  - 归谬证明：证明$\neg p \rightarrow q$为真，其中q为假（矛盾式），则p为真。证明对于一些命题r，$\neg p \rightarrow (r \land \neg r)$为真时，能证明p为真。
  - 等价性证明：证明双条件定理$p \leftrightarrow q$，通过证明$p \rightarrow q$和$q \rightarrow p$都为真得出，其有效性建立于：$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)]$.
- 证明的小策略：对于证明$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$的语句，首先考虑**直接证明**，再考虑**反证**。

证明中的错误

- 偷用论题谬误：证明的一个或多个步骤基于待证明命题的正确性，也成为**循环论证**。

CUE COLUMN

一个定理和直接证明的例子

- 定义一：整数n是整数，如果存在一个整数k使得$n = 2k$；整数n是奇数，如果存在一个

整数k使得$n = 2k + 1$，其中一个整数为偶数或为奇数。

例 1 给出定理"若 n 是奇数，则 n^2 是奇数"的直接证明。

- 定理描述为$\forall n(P(n) \to Q(n))$，其中$P(n)$是"n是奇数"，$Q(n)$是"n^2是奇数"，证明$P(n)$意味着$Q(n)$。对于$n = 2k + 1$，平方可得$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$，得到结论n^2是奇数。

反证法的例子

例 3 给出定理"若 $3n+2$ 是奇数，则 n 是奇数"的证明。

Extra Examples

解 首先，试图用直接证明。为构建直接证明，首先假设 $3n+2$ 是奇整数。这意味着对某个整数 k，$3n+2=2k+1$。我们能由此证明 n 是奇数吗？看到 $3n+1=2k$，但不能用任何直接的方式得出 n 是奇数的结论。由于直接证明的想法失败，下面尝试反证法。

反证法的第一步是假设条件语句"若 $3n+2$ 是奇数，则 n 是奇数"的结论是假的；也就是说，假设 n 是偶数。于是由偶数定义，对某个整数 k 有 $n=2k$。把 n 用 $2k$ 代入，得到 $3n+2=3(2k)+2=6k+2=2(3k+1)$，这告诉我们 $3n+2$ 是偶数(因为它是 2 的倍数)，因此不是奇数。这是定理前提的否定。因为对这个条件语句结论的否定蕴含着前提为假，所以原来的条件语句为真。反证法成功，证明了定理"若 $3n+2$ 是奇数，则 n 是奇数"。 ■

空证明的例子

例 5 证明命题 $P(0)$为真，其中 $P(n)$是"若 $n>1$，则 $n^2>n$"，论域是所有整数。

解 注意命题 $P(0)$是条件语句"若 $0>1$，则 $0^2>0$"。因为前提 $0>1$ 为假，所以 $P(0)$自动地为真。

- 注意：条件语句的结论$0^2 > 0$为假这个事实，与条件语句的真值无关，因为前提为假的条件语句保证为真。

平凡证明的例子

例 6 设 $P(n)$是"若 a 和 b 是满足 $a \geqslant b$ 的正整数，则 $a^n \geqslant b^n$"，其中论域是所有整数。证明命题 $P(0)$为真。

解 命题 $P(0)$是"若 $a \geqslant b$，则 $a^0 \geqslant b^0$"。因为 $a^0=b^0=1$，条件语句"若 $a \geqslant b$，则 $a^0 \geqslant b^0$"的结论为真。从而条件语句 $P(0)$为真。这是平凡证明法的一个例子。注意在这个证明里不需要前提，它是语句"$a \geqslant b$"。 ■

一个定理和证明策略

- 定义二：若存在整数p和$q(q \neq 0)$使得$r = p/q$，实数r是有理数。不是有理数的实数称为无理数。

例 7 证明两个有理数的和是有理数。(注意，如果这里包括隐含量词，这个定理我们想证明："对于任意的实数 r 和 s，如果 r 和 s 是有理数，则 $r+s$ 是有理数。)

Extra Examples

解 首先尝试直接证明。假设 r 和 s 是有理数。由有理数的定义，可知存在整数 p 和 q $(q \neq 0)$使得 $r=p/q$，存在整数 t 和 u $(u \neq 0)$使得 $s=t/u$。我们能用这个信息证明 $r+s$ 是有理数吗？很显然，下一步是相加 $r=p/q$ 和 $s=t/u$，得到

$$r+s=\frac{p}{q}+\frac{t}{u}=\frac{pu+qt}{qu}$$

因为 $q \neq 0$ 且 $u \neq 0$，所以 $qu \neq 0$。因此，$r+s$ 已经被表示为两个整数 $pu+qt$ 和 qu 的比，其中 $qu \neq 0$。这表示 $r+s$ 是有理数。我们已经完成了两个有理数的和是有理数的证明，直接证明成功了。 ■

归谬法的证明和反证与归谬的转化

- 归谬法证明的例子：

例 10 通过给出归谬证明来证明：$\sqrt{2}$是无理数。

解 设 p 是命题"$\sqrt{2}$是无理数"。假定$\neg p$ 为真。从归谬证明开始，假定$\neg p$ 为真。注意$\neg p$ 表示"并非$\sqrt{2}$是无理数"，这就是说$\sqrt{2}$是有理数。我们将要证明$\neg p$ 为真的假设导致矛盾。

如果$\sqrt{2}$是有理数，则存在整数 a 和 b 满足$\sqrt{2}=a/b$，其中 a 和 b 没有公因子(所以分数 a/b 是既约的)(这里用到了事实：每个有理数都能写成既约分数)。因为$\sqrt{2}=a/b$，所以当这个等式的两端都平方时，就得出 $2=a^2/b^2$。因此，$2b^2=a^2$。

根据偶数的定义，则 a^2 是偶数。下边应用事实(练习 16)：若 a^2 是偶数，则 a 也一定是偶数。另外，因为 a 是偶数，由偶数的定义，所以对某个整数 c，有 $a=2c$。因此 $2b^2=4c^2$。

等式两边除以 2 得：$b^2=2c^2$。

由偶数定义，这意味着 b^2 是偶数。再应用事实：如果一个整数的平方是偶数，那么这个数自身也一定是偶数。因此，我们得出 b 也必然是偶数。

现在，已经证明假设$\neg p$ 导致等式$\sqrt{2}=a/b$，其中 a 和 b 没有公因子，但 a 和 b 都是偶数，也就是说 2 整除 a 和 b。注意到命题$\sqrt{2}=a/b$，其中 a 和 b 没有公因子，实际上意味着 2 不能整除 a 和 b。由于对$\neg p$ 的假设导致 2 整除 a 和 b 与 2 不能整除 a 和 b 矛盾，$\neg p$ 一定是假的。也就是说，命题 p："$\sqrt{2}$是无理数"是真的。我们完成了证明$\sqrt{2}$是无理数。 ■

- 反证法转换为归谬法：

例 11 给出定理"若 $3n+2$ 是奇数，则 n 是奇数"的归谬证明。

解 假定 p 表示"$3n+2$ 是奇数"，q 表示"n 是奇数"。为构造归谬证明，假设 p 和$\neg q$ 都为真。也就是假设 $3n+2$ 是奇数而 n 不是奇数。因为 n 不是奇数，所以 n 是偶数。按照在例 3 解答里步骤(归谬证明)，可以证明若 n 为偶数则 $3n+2$ 是偶数。首先因为 n 偶数，存在整数 k 使得 $n=2k$。这意味着 $3n+2=3(2k)+2=6k+2=2(3k+1)$。由于 $3n+2$ 是 $2t$，这里 $t=3k+1$，$3n+2$ 是偶数。注意到$\neg p$ 表示"$3n+2$ 是偶数"，因为一个整数是偶数当且仅当它不是奇数。由于设 p 和$\neg p$ 都为真，得出一个矛盾式。这完成了一个归谬证明，证明了如果 $3n+2$ 是奇数，则 n 是奇数。证毕。 ■

等价性证明的例子

例 12 证明定理"整数 n 是奇数当且仅当 n^2 是奇数"。

Extra Examples

解 这个定理是形如"p 当且仅当 q"，其中 p 是"n 是奇数"而 q 是"n^2 是奇数"。(通常不明确地处理为全称量化。)为了证明这个定理，需要证明 $p\to q$ 和 $q\to p$ 都为真。

已经证明了(在例 1 里)$p\to q$ 为真且 $q\to p$ 为真(在例 8 里)。

因为已经证明了 $p\to q$ 和 $q\to p$ 都为真，所以就已经证明了这个定理为真。 ■

SUMMARIES

1. 证明导论与专业术语。
2. 定理陈述和证明定理的方法。
3. 证明中的错误。

Chapter1-7. 证明的方法和策略

2019年3月22日　8:57

NOTE TAKING AREA

穷举证明和分情形证明

- 分情形证明的基本原理：
  永真式 $[(p_1 \lor p_2 \lor \cdots \lor p_n) \to q] \leftrightarrow [(p_1 \to q) \land (p_2 \to q) \land \cdots \land (p_n \to q)]$
  - 分情形证明要覆盖定理中出现的所有可能情况。
- 穷举证明：有些定理能够通过有关的小数量例子测试来证明
- 不失一般性（WLOG）：如果没有另外的证据要求证明其他指定的情形，可通过证明定理的其中一种情况，其他的一系列情况通过简单的变化来论证。
- 穷举证明和分情形证明的常见错误：例子未涉及全部情况。

存在性证明

- 存在性证明：对形如$\exists x P(x)$的证明。
  - 构造性的存在性证明：找出一个使得P(a)为真的元素a。
  - 非构造性证明：使用归谬证明，证明该存在量词化的否定式蕴含着矛盾。

唯一性证明

- *一些定理断言具有特定性质的元素唯一存在。*
  - 证明有某个元素具有这个性质，且没有其它元素有此性质。
  - 存在性：证明存在某个元素x具有期望的性质。
  - 唯一性：证明若y≠x，则y不具有期望的性质。
    - 也可以证明如果x和y都具有期望的性质，则x=y。
- 注意，证明存在某个唯一元素x等同于证明语句：
  $\exists x(P(x) \land \forall y(y \neq x \to \neg P(y)))$

证明策略

- 前推和后推：
  - 前推：直接证明从假设开始，利用假设、公理和已知定理，用导向结论的一系列步骤来构造证明。
  - 间接证明从假设的否定开始，用一系列步骤得出前提的否定。
- 改造现有证明：现有的证明时常适合于证明一个新结果。

证明策略：填充

- 棋盘：一个由水平和垂直线分成同样大小方块组成的矩阵。
  - 标准棋盘：8行8列的棋盘。
  - 镶板：任意矩形大小的棋盘。
- 骨牌：一块长方形，由两个方格组成。
- 填充：当棋盘的所有方格由不重叠的骨牌覆盖，而没有骨牌悬垂在镶板上。
- 骨牌填充标准棋盘的证明：

例 18 我们能用骨牌填充标准棋盘吗？

解 我们找到许多用骨牌填充标准棋盘的方法。例如，可以水平放 32 块骨牌填充它，如图 1-4 所示。这样填充的存在性完成了一个构造性的存在证明。当然，做这个填充还有大量其他的方法。可以在板上垂直放 32 块骨牌，或者水平地和垂直地填充它。但对于一个构造性存在证明需要找到仅仅一个这样的填充就可以。■

- 骨牌填充标准棋盘变式的证明:

例 19 我们能填充从标准棋盘中去掉四个角的方格之一得到的镶板吗？

解 为了回答这个问题，注意一个标准棋盘有 64 个方格，去掉一个方块这样由 63 个方格产生一个镶板。现在假设能够填充一个从一个标准棋盘中去掉一个角的方格的镶板。因为每一个骨牌盖住两个方格，又没有两个骨牌重叠，没有骨牌悬垂在板上，所以板上一定有偶数个方格。因此，可以用归谬证明法证明去掉一个方格的标准棋盘不能用骨牌填充，因为这样一个板有奇数个方格。■

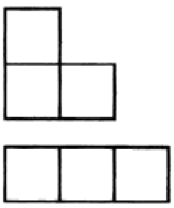
- 骨牌填充去除偶数个方格的标准棋盘:

例 20 去掉标准棋盘中左上角和右下角方格得到的镶板，如图 1-5，能填充这个镶板吗？

  - 无法像例19一样构造简单的证明，使用涂色法，将棋盘每隔一格填充红色或黑色，每个骨牌覆盖一个红色和一个黑色，对于本例的证明如下:

    证 假如能用骨牌对去掉两个对角的标准棋盘填充。注意到去掉两个对角的标准棋盘包含 $64-2=62$ 个方块。它可以用 $62/2=31$ 个骨牌填充。在这个填充中，每个骨牌盖住一个白的和一个黑的方格。因此，这个填充盖住 31 个白的和 31 个黑的方格。然而，当去掉两个对角方格时，或者保留 32 块白的、30 块黑的，或者保留 30 块白的、32 块黑的。这驳斥了能用骨牌覆盖去掉两个对角的标准棋盘的假设，完成证明。■

- 多方块：沿着方块的边来连接构建的具有相同数目全等正方形的块。
  - 直三格板：三个水平连接的正方形。
  - 右三格板：类似于字母L的形状。



- 考虑能否用直三格板填充标准棋盘:

例 21 你能用直三格板填充标准棋盘吗？

解 标准棋盘含有 64 个方格，每一个三格板覆盖三个方格。因此，如果三格板填充了一个镶板，镶板的方格数量一定是 3 的倍数。因为 64 不是 3 的倍数，所以三格板不能覆盖 8×8 棋盘。■

- 更复杂的直三格板问题:

例 22 我们能用直三格板填充去掉四个角的任一个角的标准棋盘吗？一个 8×8 棋盘去掉一个角后包含 64－1＝63 个方格。用直三格板填充任一个去掉一个角的棋盘其四种情况的任一种情况都要用 63/3＝21 个直三格板。然而当我们试验时，不能找到一个直三格板填充任一个去掉一个角的四种情况的任一种情况。由穷举证明显示这个没有希望。我们能改造例 20 的证明来证明这样的填充不存在吗？

解 我们将给棋盘的方格涂上颜色，企图改造在例 20 给出的归谬证明法证明：应用骨牌填充去掉对角的标准棋盘是不可能的。因为用直三格板而不是骨牌，我们用三种颜色区分方格而不是两种颜色，如图 1-7 所示。注意到在这个着色中有 21 个灰色方格，21 个黑色方格，22 个白色方格。其次，做一个重要的观察，一个直三格板覆盖棋盘的三个方格，它覆盖一个灰色的、一个黑色的和一个白色的方格。然后注意到三个颜色的每一个都出现在一个角的方格中。于是，在一般没有去掉的时候，可以假设轮换颜色，使去掉的方格是灰色的。因此假设留下的板包含 20 个灰色方格，21 个黑色方格，22 个白色方格。

如果能用直三格板填充这块镶板，那么将用 63/3＝21 个直三格板。这些直三格板覆盖 21 个灰色方格，21 个黑色方格，21 个白色方格。这与这个镶板包含 20 个灰色方格，21 个黑色方格，22 个白色方格矛盾。因此不能用直三格板填充这个镶板。■

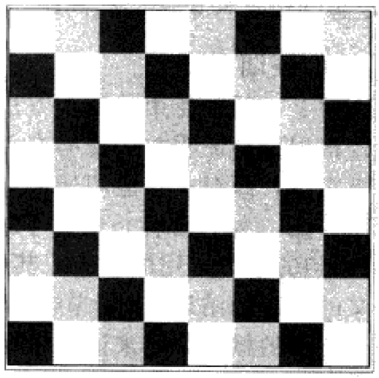


图 1-7 用三种颜色对删除对角的标准棋盘方格着色

未解决问题的作用

- 费马大定理（证明为真）：方程$x^2 + y^2 = z^2$具有无穷多个整数解，这些解称为毕达哥拉斯三元组，对应于具有整数边长的直角三角形的边长。

定理 1 **费尔马大定理** 只要 n 是满足 $n>2$ 的整数，方程

$$x^n + y^n = z^n$$

就没有满足 $xyz \neq 0$ 的整数解 x、y 和 z。

CUE COLUMN

穷举证明的例子

例 2 证明：在 100 以内，连续的正整数是全幂数的只有 8 和 9(全幂数是指它能写成 n^a，其中 a 是大于 1 的整数)。

解 可以通过证明在 $n<100$ 时，只有一对连续的正整数 n，$n+1$ 它们都是全幂数来证明这个事实，即 $n=8$ 时。我们能够证明此事实，通过检验在 100 以内的正整数 n，首先检查 n 是否是全幂数。如果是，检查 $n+1$ 是否也是全幂数。做这件事最快的方法是简单地看 100 以内所有的全幂数，检查是否它下一个大的整数也是全幂数。100 以内正整数的平方有 1、4、9、16、25、36、49、64、81 和 100。100 以内正整数的立方有 1、8、27 和 64。100 以内正整数的 4 次幂有 1、16 和 81。100 以内正整数的 5 次幂有 1 和 32，100 以内正整数的 6 次幂有 1 和 64。除了 1 以外，100 以内没有正整数的 6 次幂大于 6 次。观察不超过 100 的一系列全幂数，发现只有 $n=8$ 时，n 是全幂数，而 $n+1$ 也是全幂数。即 $2^3=8$，$3^2=9$，是 100 以内唯一两个连续全幂数。证毕。■

分情形证明的例子

例 4 用分情形证明法证明 $|xy|=|x||y|$，其中 x 和 y 是实数。（$|a|$ 是 a 的绝对值，当 $a\geqslant 0$ 时，$|a|=a$；当 $a\leqslant 0$ 时，$|a|=-a$。）

解 在这个定理的证明中，用事实：当 $a\geqslant 0$ 时，$|a|=a$；当 $a\leqslant 0$ 时，$|a|=-a$，消除绝对值。由于 $|x|$ 和 $|y|$ 两个在公式中，将需要分成四种情况：（ⅰ）x 和 y 都非负；（ⅱ）x 非负，y 是负的；（ⅲ）x 是负的，y 非负；（ⅳ）x 是负的，y 是负的。

（注意：我们通过每一种情况的恰当的符号选择去掉绝对值符号。）

情况（ⅰ） 我们看到 $p_1\to q$，因为当 $x\geqslant 0$ 且 $y\geqslant 0$ 时 $xy\geqslant 0$，因此 $|xy|=xy=|x||y|$。

情况（ⅱ） 要证明 $p_2\to q$，注意若 $x\geqslant 0$ 且 $y<0$，则 $xy\leqslant 0$，因此 $|xy|=-xy=x(-y)=|x||y|$。（因为 $y<0$，我们有 $|y|=-y$。）

情况（ⅲ） 要证明 $p_3\to q$，可遵循前一种情形的推理过程，只需将 x 和 y 的角色互换。

情况（ⅳ） 要证明 $p_4\to q$，注意当 $x<0$ 且 $y<0$ 时，$xy>0$。因此 $|xy|=xy=(-x)(-y)=|x||y|$。

因为已经完成了所有的四项，这些情况包含了所有的可能情况。能够得出结论当 x 和 y 是实数时，$|xy|=|x||y|$。 ■

不失一般性的例子

例 7 证明：$(x+y)^r<x^r+y^r$。这里 x、y 是正实数，r 是 $0<r<1$ 的实数。

解 不失一般性，假设 $x+y=1$。[注意：假设对于 $x+y=1$ 已经证明了定理。设 $x+y=t$，那么 $x/t+y/t=1$，这意味着 $(x/t+y/t)^r<(x/t)^r+(y/t)^r$。最后式子两边乘以 t^r，证得 $(x+y)^r<x^r+y^r$。]

假设 $x+y=1$，因为 x、y 都为正，所以 $0<x<1$，$0<y<1$。因为 $0<r<1$，因此，$0<1-r<1$，故 $x^{1-r}<1$，$y^{1-r}<1$。这意味着 $x<x^r$，$y<y^r$。因此，$x^r+y^r>x+y=1$。从而 $(x+y)^r=1^r<x^r+y^r$。这样对于 $x+y=1$ 证明了定理。

因为不失一般性，我们假设 $x+y=1$，得到 $(x+y)^r<x^r+y^r$ 这里 x、y 是正实数，r 是 $0<r<1$ 的实数。 ■

错误的穷举和分情形证明

例 8 语句“每个正整数都是 18 个四次方整数之和”是否为真？

解 要判断 n 是否可写为 18 个四次方整数的和，我们先从最小的正整数开始考察。因为整数的四次方分别是 0，1，16，81，…，如果能从这些数中选择 18 个项后相加得 n，则命题得证。可以证明，从 1 到 78 的所有正整数都可以写成 18 个四次方整数的和（细节留给读者证明）。然而，如果认为这就检查够了，那就会得出错误的结论，因为 79 并不是 18 个四次方整数的和（读者请自行验证）。所以，题设语句不为真。 ■

- 该例中没有测试全部的数据。

非构造性的存在性证明

例 11 **非构造性的存在性证明** 证明存在无理数 x 和 y 使得 x^y 是有理数。

解 由 1.6 节例 10 可知 $\sqrt{2}$ 是无理数，考虑数 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$。如果它是有理数，那就存在两个无理数 x 和 y 且 x^y 是有理数，即 $x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$。另一方面，如果 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是无理数，那么可以令 $x=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 且 $y=\sqrt{2}$，因此 $x^y=(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})}=\sqrt{2}^2=2$。

这是一个非构造性存在性证明的例子，即我们并没有找出无理数 x 和 y 使得 x^y 是有理数。而我们证明了或者 $x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$，或者 $x=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$，$y=\sqrt{2}$，可能满足性质，但并不知道这两对哪一个满足。 ■

唯一性证明的例子

例 13 证明：如果 a、b 是实数，并且 $a\neq 0$，那么有一个唯一的 r，使得 $ar+b=0$。

解 首先，注意到实数 $r=-b/a$ 是 $ar+b=0$ 的一个解，因为 $a(-b/a)+b=-b+b=0$。因此，对于 $ar+b=0$ 实数 r 是存在的。这是证明的存在性部分。

其次，假设 s 是 $as+b=0$ 成立的实数。因此 $ar+b=as+b$，这里 $r=-b/a$。从两边减去 b，得到 $ar=as$。最后式子两边同除以 a，这里 a 是非零的，得到 $r=s$。这意味着如果 $r\neq s$，则 $as+b\neq 0$。这建立了证明的唯一性部分。 ■

未解决问题的例子

例 23 3x+1 猜想 设 $f(x)$是把偶数 x 转换成 $x/2$、把奇数 x 转换成 $3x+1$ 的变换。有个著名的猜想(有时称为 $3x+1$ 猜想)说：对所有正整数 x 来说，当反复地应用变换 T 时，最终会得到整数 1。例如，从$x=13$ 开始，发现 $T(13)=3\cdot 13+1=40$，$T(40)=40/2=20$，$T(20)=20/2=10$，$T(10)=10/2=5$，$T(5)=3\cdot 5+1=16$，$T(16)=8$，$T(8)=4$，$T(4)=2$，$T(2)=1$。对于直到 $5.6\cdot 10^{13}$ 的所有整数都验证了 $3x+1$ 猜想。

$3x+1$ 猜想具有有趣的历史，从 20 世纪 50 年代以来就吸引了数学家们的注意力。这个猜想被多次提出，具有许多其他名称，包括：Collatz 问题、Hasse 算法、Ulam 问题、Syracuse 问题以及 Kakutani 问题等。许多数学家抛开原有工作来花时间解决这个猜想。这引起一则笑话，说这个问题是旨在减缓美国数学研究的阴谋的一部分。参见 Jeffrey Lagaris 的文章[La85]来了解对这个问题有意思的讨论以及试图解决这个问题的数学家们所发现的结果。 ■

SUMMARIES

1. 穷举证明和分情形证明及其错误的方式。
2. 存在性证明的构造性和非构造性。
3. 唯一性证明的存在性和唯一性。
4. 证明策略：前推和后推。
5. 证明策略的实例：填充问题。
6. 未解决问题及其作用。

Chapter2-1. 集合

2019年3月23日 10:14

NOTE TAKING AREA

集合引言和基本定义

- **定义1** 集合是一组无序的对象。
  - 这称为朴素集合理论的原始描述，罗素提出了该直观定义的悖论，以公理的基本假设为起点建立集合理论可以避免悖论。
- **定义2** 集合中的对象也称为该集合的元素、或成员。集合包含它的元素。
- **定义3** 两个集合相等当且仅当它们有共同的元素，即$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$，记为A=B。
- **定义4** 集合A是集合B的子集当且仅当A的每个元素也是B的元素，即$\forall x(x \in A \to x \in B)$，记为$A \subseteq B$。
- **定理1** 对于任意集合S，$\emptyset \subseteq S$且$S \subseteq S$。

  证 这里证明(i)，(ii)留作习题。

  令 S 为一个集合。为了证明$\varnothing \subseteq S$，必须证明 $\forall x(x \in \varnothing \to x \in S)$为真。因为空集没有元素，所以 $x \in \varnothing$ 总是假。因此 $x \in \varnothing \to x \in S$ 总是真，因为其假设为假，并且具有假的假设的条件语句为真。即 $\forall x(x \in \varnothing \to x \in S)$为真。这完成了(i)的证明。这是空证明的示例。 □
  - 真子集：集合A是集合B的子集，但A≠B，记为$A \subset B$，若A是B的真子集，那么A必然是B的子集，且有$\forall x(x \in A \to x \in B) \land \exists x(x \in B \land x \notin A)$。
- **定义5** 令S为集合。若S中恰有n个不同的元素，其中n是非负整数，就说S是**有限集合**，而n是S的**基数**，记为|S|。
- **定义6** 如果一个集合不是有限的，就说它是无限的。

幂集合

- **定义7** 已知集合S，S的幂集合是集合S所有子集的集合，记为P(S)。
- 幂集合的一个例子：

  例 13 集合{0，1，2}的幂集合是什么？

  解 幂集合 $P(\{0,1,2\})$是{0，1，2}所有子集的集合。因此

  $$P(\{0,1,2\}) = \{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$$

  注意，空集和{0，1，2}自身都是这个子集集合的成员。

笛卡儿积

- **定义8** 有序n元组$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$是以a_1为第一个元素，a_2为第二个元素……a_n为第n个元素的有序组。
  - 只有在两个有序n元组每一对对应的元素都相等时，他们才相等。
  - 二元组特称为**有序偶。**
- **定义9** 令A和B为集合。A和B的笛卡儿积用A×B表示，是所有有序偶(a,b)的集合，其中a∈A而b∈B，有：

  $$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \land b \in B\}$$
  - 笛卡儿积A×B的子集R称为从集合A到集合B的关系，R的元素是有序偶，其中第一个元素属于A，第二个元素属于B。
- **定义10** 集合A_1，A_2，…，A_n的笛卡儿积用$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$表示，这是有序n元组($a_1$，$a_2$，…，$a_n$)的集合，其中：

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

集合符号的量词与量词的真值集合

- 集合的全称量化与存在量化:

  例 19 语句 $\forall x \in \mathbf{R}(x^2 \geqslant 0)$ 和 $\exists x \in \mathbf{Z}(x^2 = 1)$ 的含义是什么?

  解 语句 $\forall x \in \mathbf{R}(x^2 \geqslant 0)$ 声称对任意实数 x，$x^2 \geqslant 0$。这个语句可以表达为“任意实数的平方是非负的”。这是真语句。

  语句 $\exists x \in \mathbf{Z}(x^2 = 1)$ 声称存在一个整数 x 使得 $x^2 = 1$。这个语句可以表达为“有某个整数，其平方是 1”。这个语句也是真语句，因为 $x = 1$ 就是这样一个整数(-1 也是)。■

- 量词的真值集合：给定谓词P和论域D，P的真值集合为D中元素x使P(x)为真的元素组成的集合，记为:

  $\{x \in D \mid P(x)\}$

  - 在域U上∀xP(x)为真当且仅当P的真值集合是集合U。
  - 域U上∃xP(x)为真当且仅当P的真值集合非空。

CUE COLUMN

笛卡儿积的例子

例 16 $A=\{1, 2\}$ 和 $B=\{a, b, c\}$ 的笛卡儿积是什么?

解 笛卡儿积 $A \times B$ 是

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

笛卡儿积不满足交换律

例 17 证明笛卡儿积 $B \times A$ 和 $A \times B$ 不相等，其中 A 和 B 为例 16 中的集合。

解 笛卡儿积 $B \times A$ 是

$$B \times A = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$

这不等于例 16 中得到的 $A \times B$。

多个集合的笛卡儿积

例 18 笛卡儿积 $A \times B \times C$ 是什么，其中 $A=\{0, 1\}$，$B=\{1, 2\}$，$C=\{0, 1, 2\}$?

解 这一笛卡儿积由所有有序三元组(a, b, c)组成，其中 $a \in A$，$b \in B$，$c \in C$。因此，

$$A \times B \times C = \{(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(0,2,0),(0,2,1),(0,2,2),\\(1,1,0),(1,1,1),(1,1,2),(1,2,0),(1,2,1),(1,2,2)\}$$

SUMMARIES

1. 集合引言与基本定义。
2. 幂集合。
3. 笛卡儿积。
4. 集合符号的量词与真值集合。4

Chapter2-2. 集合运算

2019年3月24日 9:22

NOTE TAKING AREA

集合运算的基本概念

- **定义1** 令A和B为集合，A和B的并集用A ∪ B表示，这是A或B中或同时在A和B中的元素组成的集合。
  - 元素x属于A和B的并集当且仅当x属于A或x属于B：

    $$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$
- **定义2** 令A和B为集合，A和B的交集用A ∩ B表示，这是既在A中又在B中的元素的集合。

  元素 x 属于集合 A 和 B 的交集当且仅当 x 属于 A 而且 x 属于 B。这说明

  $$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$
- **定义3** 如果两个集合的交集为空集，就说他们不相交。
  - 推广到多个集合的并集，得到包含排斥原理（容斥原理）。
- **定义4** A和B的差集用A-B表示，包含只属于A不属于B的所有元素的集合，A和B的差集也称为B对于A的补集。

  元素 x 属于 A 和 B 的差集当且仅当 $x \in A$ 且 $x \notin B$，这说明

  $$A - B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$
- **定义5** 令U为全集，集合A的补集记为$\overline{A}$，也记为U-A。

  元素 x 属于 $\overline{A}$ 当且仅当 $x \notin A$。这说明

  $$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

集合恒等式

等式	名称
$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$	恒等律
$A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	支配律
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	幂等律
$\overline{(\overline{A})} = A$	补集律
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	交换律
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	结合律
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	分配律
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	德摩根定律
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	吸收律
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$	补律

扩展的并集和交集

- 一组集合的并集是至少存在于集合中一个成员集合的元素的集合：

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

- 一组集合的交集是存在于全部集合成员中元素的集合：

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

- 扩展并集和交集的记号：

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall_{i \in I}(x \in A_i)\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists_{i \in I}(x \in A_i)\}$$

CUE COLUMN

并集的例子

例 1 集合{1，3，5}和集合{1，2，3}的并集是集合{1，2，3，5}，即

$$\{1,3,5\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3,5\}$$ ■

例 2 学校主修计算机科学的学生集合与主修数学的学生集合的并集，是或主修数学或主修计算机科学或同时主修这两门课的学生的集合。■

交集的例子

例 3 集合{1，3，5}和{1，2，3}的交集是{1，3}，即{1，3，5}∩{1，2，3}={1，3}。■

例 4 学校所有主修计算机科学的学生集合与所有主修数学的学生集合，是所有既主修计算机科学又主修数学的学生的集合。■

证明德摩根第二定律

例 10 证明$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

Extra Examples

解 为了证明$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$，我们需要证明$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$和$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$。

首先，证明$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$。假定$x \in \overline{A \cap B}$，根据补的定义，$x \notin A \cap B$，由交的定义，$\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$为真，（由逻辑）用德摩根定律可得$\neg(x \in A)$或$\neg(x \in B)$。因此，根据否定的定义，有$x \notin A$或$x \notin B$。再由补的定义，$x \in \overline{A}$或$x \in \overline{B}$；再由并，$x \in \overline{A} \cup \overline{B}$，因此，得证$A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$。

然后，证明$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$。现假设$x \in \overline{A} \cup \overline{B}$；由并的定义，$x \in \overline{A}$或$x \in \overline{B}$；用补的定义，$x \in A$或$x \notin B$；所以，$\neg(x \in A) \vee (x \in B)$为真。（由逻辑）用德摩根定律可得，$\neg(x \in A) \wedge (x \in B)$为真。由交的定义，$\neg(x \in A \cap B)$成立；由补的定义，由$x \in \overline{A \cap B}$，这表明$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$。由于已证明这两个集合中，一个是另一个的子集，所以，这两个集合相等，即得证恒等。■

扩展集合的例子

例 17 对于$i=1,2,3,\cdots$，集合$A_i=\{1,2,3,\cdots,i\}$。那么，

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{1,2,3,\cdots,i\} = \{1,2,3,\cdots\} = \mathbf{Z}^+$$

和

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{1,2,3,\cdots,i\} = \{1\}$$

可以看到，这些集合的并集是正整数集，每一个正整数至少属于一个集合，因为整数n属于$A_n=\{1,2,\cdots,n\}$，并集中的每一个元素都是正整数。注意到属于所有的集合的元素只有1，即这些集合的交集。也就是说，$A_1=\{1\}$，而且$1 \in A_i (i=1,2,\cdots)$。■

SUMMARIES

1. 集合运算的基本概念。
2. 集合恒等式。
3. 扩展的并集和交集。

Chapter2-3. 函数

2019年3月26日 8:15

NOTE TAKING AREA

函数的定义与引言

- 函数f是从非空集合A和B中元素的指派，A中每个元素恰好指派B中的一个元素，如果f将A中元素a指派给唯一的B中元素b，记为f(a)=b，如果f恰好是从A到B的函数，就写成 $f: A \rightarrow B$。
  - 函数也称为**映射**或者**变换**。
- 令f为从A到B的函数，则A是f的**定义域**，B是f的**伴域**，若f(a)=b，则b是a的像，a是b的原像，A中元素的所有像元素的集合称为f的**值域**。
- 若f_1和f_2是从A到R的函数，那么f_1+f_2和f_1f_2也是从A到R的函数，其定义为：

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$$
$$(f_1f_2)(x)=f_1(x)f_2(x)$$

- 令f为从集合A到集合B的函数，S为A的一个子集，S的像是由S中元素的像组成的B的子集，记为f(S)：

$$f(S)=\{t\mid\exists s\in S(t=f(s))\}$$

一对一函数和映上函数

- 一对一函数：当且仅当对于f的定义域中的所有a和b，f(a)=f(b)蕴含着a=b，一对一函数称为单射的。
  - 证明一对一函数：当且仅当a≠b就有f(a)≠f(b)。
- 递增函数f：对定义域中的x和y，只要x < y就有f(x)≤f(y)，反则递减。
  - 严格递增：对于x和y，若x < y则f(x) < f(y)。
- 满射（映上）函数f：当且仅当对于每个b∈B，有元素a∈A使得f(a)=b。

注意 如果 $\forall y\exists x(f(x)=y)$，函数 f 就是映上的，其中 x 的论域是函数的定义域，y 的论域是函数的伴域。

- 对于一对一的映上函数f，则称它是一一对应或者双射的。

反函数和函数组合

- f为集合A和集合B的一一对应函数，f的反函数为指派给B中元素b的是A中使得f(a)=b的唯一元素a，记为f^{-1}。
  - 若函数f不是一一对应的，则无法定义反函数。
  - 一一对应关系称为可逆的，非一一对应关系称为不可逆的。
- g为集合A到集合B的函数，f是集合B到集合C的函数，函数f和g的组合用$f\circ g$表示，定义为：

$$(f\circ g)(a)=f(g(a))$$

- 反函数与组合函数的关系：

$$(f^{-1}\circ f)(a)=f^{-1}(f(a))=f^{-1}(b)=a$$
$$(f\circ f^{-1})(b)=f(f^{-1}(b))=f(a)=b$$

函数的图像

- f为集合A到集合B的函数，f的图像是序偶集合$\{(a,b)\mid a\in A 且 f(a)=b\}$。
- 下取整函数是指派给x的小于等于x的最大整数，记为$\lfloor x\rfloor$，同理上取整函数记为$\lceil x\rceil$。

下取整函数也常称为**最大整数函数**，这时往往用$[x]$表示。

CUE COLUMN

函数和定义域、伴域、值域

例 1 引用本节开头的例子，给学生打分来描述什么是函数的定义域、伴域、值域。

解 令 G 为函数，表示在离散数学课上一个学生的得分，例如 $G(\text{Adams})=A$。则 G 的定义域是集合{Adams，Chou，Goodfriend，Rodriguez，Stevens}，伴域是集合$\{A, B, C, D, F\}$。G 的值域是$\{A, B, C, F\}$，因为没有学生得 D。 ■

例 2 令 R 为包含有序对(Abdul，22)，(Brenda，24)，(Carla，21)，(Desire，22)，(Eddie，24)和(Felicia，22)的一个关系，每一对表示一个学生的得分及其年龄。那么，该关系 R 确定的函数是什么?

解 这个关系定义了函数 f，有 $f(\text{Abdul})=22$，$f(\text{Brenda})=24$，$f(\text{Carla})=21$，$f(\text{Desire})=22$，$f(\text{Eddie})=24$，$f(\text{Felicia})=22$。在这里，定义域是{Abdul，Brenda，Carla，Desire，Eddie，Felicia}。为了定义函数 f，需要指定一个伴域，我们可以把正整数作为伴域以确保包含每一个学生可能的年龄(注意，可以选择小一点的伴域，但是这会改变函数)，最终值域是集合$\{21, 22, 24\}$。 ■

- 程序语言定义的函数

例 5 函数的定义域和伴域往往以程序语言描述。例如 Java 语句

```
int floor(float real)){…}
```

和 Pascal 语句

```
function floor(x:real):integer
```

都说的是，floor 函数的定义域是实数集合，而它的伴域是整数集合。 ■

组合函数的例子

例 6 令 f_1 和 f_2 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数，且 $f_1(x)=x^2$ 而 $f_2(x)=x-x^2$。函数 f_1+f_2 和 f_1f_2 是什么?

解 从函数的和与积的定义知

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)=x^2+(x-x^2)=x$$
$$(f_1f_2)(x)=x^2(x-x^2)=x^3-x^4$$ ■

若 f 是从集合 A 到集合 B 的函数，则可以定义 A 的子集的像。

一对一函数

Assessment

例 8 判断从$\{a, b, c, d\}$到$\{1, 2, 3, 4, 5\}$的函数 f 是否为一对一的，f 的定义是 $f(a)=4$，$f(b)=5$，$f(c)=1$ 而 $f(d)=3$。

Extra Examples

解 f 是一对一的，因为 f 在它定义域的四个元素上取不同的值。图 2-10 说明了这一点。 ■

例 9 判断从整数集合到整数集合的函数 $f(x)=x^2$ 是否为一对一的。

解 函数 $f(x)=x^2$ 不是一对一的，因为，例如 $f(1)=f(-1)=1$，但 $1\neq-1$。

注意，若定义域限制为 $\mathbf{Z}^+$，函数 $f(x)=x^2$ 就是一对一的。(技术上说，当限定一个函数的定义域的时候，我们得到了一个新的函数，被限制的元素的值域与原来是相同的，而被限制的定义域以外的原来定义域的元素就不被限制的函数定义了。) ■

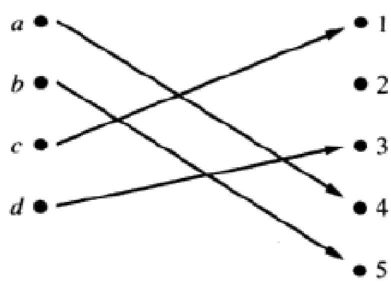


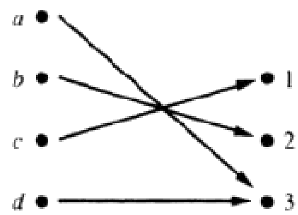
图 2-10 一个一对一函数

映上函数和非映上函数

例 11 令 f 为从 $\{a, b, c, d\}$ 到 $\{1, 2, 3\}$ 的函数，其定义为 $f(a)=3$，$f(b)=2$，$f(c)=1$ 及 $f(d)=3$。f 是映上函数吗？

Extra Examples

解 由于伴域中所有 3 个元素均为定义域中元素的像，f 是映上的。图 2-11 说明了这一点。注意，若伴域是 $\{1, 2, 3, 4\}$，f 就不是映上的。■



例 12 从整数集到整数集的函数 $f(x)=x^2$ 是映上的吗？

解 f 不是映上的，因此，比如说没有 x 使 $x^2=-1$。■

例 13 从整数集到整数集的函数 $f(x)=x+1$ 是映上的吗？

解 这个函数是映上的，因为对每个整数 y，都有一个整数 x 使 $f(x)=y$。为看出这一点，只要注意 $f(x)=y$ 的充分必要条件是 $x+1=y$，而这只要令 $x=y-1$ 就成立。■

反函数和可逆函数

例 16 令 f 为从 $\{a, b, c\}$ 到 $\{1, 2, 3\}$ 的函数，使 $f(a)=2$，$f(b)=3$ 及 $f(c)=1$。f 可逆吗？如果可逆，其反函数是什么？

解 f 是可逆的，因为它是一个一对一的对应关系。其反函数 f^{-1} 颠倒 f 给出的对应关系，所以 $f^{-1}(1)=c$，$f^{-1}(2)=a$ 而 $f^{-1}(3)=b$。■

例 17 令 f: $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$，使得 $f(x)=x+1$。f 可逆吗？如果可逆，其反函数是什么？

解 f 可逆，因为前面已证明它是一一对应关系。要颠倒对应关系，设 y 是 x 的像，即 $y=x+1$。从而 $x=y-1$。即 $y-1$ 是 $\mathbf{Z}$ 的唯一元素，在 f 之下与 y 对应，于是 $f^{-1}(y)=y-1$。■

例 18 令 f 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数，使 $f(x)=x^2$。f 可逆吗？

解 由于 $f(-2)=f(2)=4$，f 不是一对一的，要想定义反函数，就得为 4 指派两个元素。因此 f 是不可逆的。■

组合函数的例子

例 20 令 g 为从 $\{a, b, c\}$ 到它自己的函数，使 $g(a)=b$，$g(b)=c$，而 $g(c)=a$。令 f 为从 $\{a, b, c\}$ 到 $\{1, 2, 3\}$ 的函数，使 $f(a)=3$，$f(b)=2$，而 $f(c)=1$。f 和 g 的组合是什么？g 和 f 的组合是什么？

解 $f\circ g$ 的定义是 $(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(b)=2$，$(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(c)=1$，而 $(f\circ g)(c)=f(g(c))=f(a)=3$。

注意 $g\circ f$ 是没有定义的，因为 f 的值域不是 g 的定义域的一部分。■

例 21 令 f 和 g 为从整数集到整数集的函数，其定义为 $f(x)=2x+3$ 和 $g(x)=3x+2$。f 和 g 的组合是什么？g 和 f 的组合是什么？

解 $f\circ g$ 和 $g\circ f$ 均有定义，即

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = 2(3x+2)+3 = 6x+7$$

及

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = 3(2x+3)+2 = 6x+11$$ ■

注意 尽管例 21 中对函数 f 和 g 而言 $f\circ g$ 和 $g\circ f$ 均有定义，$f\circ g$ 和 $g\circ f$ 并不相等。换言之，对函数组合而言交换律不成立。

上取整函数和下取整函数的性质

表 2-3 上取整函数和下取整函数的有用性质(n 为整数)

(1a) $\lfloor x \rfloor = n$ 当且仅当 $n \leqslant x < n+1$ (1b) $\lceil x \rceil = n$ 当且仅当 $n-1 < x \leqslant n$ (1c) $\lfloor x \rfloor = n$ 当且仅当 $x-1 < n \leqslant x$ (1d) $\lceil x \rceil = n$ 当且仅当 $x \leqslant n < x+1$
(2) $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil < x+1$
(3a) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ (3b) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
(4a) $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ (4b) $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$

上取整函数和下取整函数的证明

例 27 证明：若 x 是一个实数，则 $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2} \right\rfloor$。

Extra Examples **解** 要证明这个语句，令 $x=n+\varepsilon$，其中 n 是正整数且 $0 \leqslant \varepsilon < 1$。依据 ε 是否小于 $\frac{1}{2}$，有两种情况要考虑。(选择这两种情况的原因见下面的证明。)

首先考虑 $0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}$ 的情况。此时，$2x=2n+2\varepsilon$ 且 $\lfloor 2x \rfloor = 2n$，因为 $0 \leqslant 2\varepsilon < 1$。类似地，$x+\frac{1}{2}=n+\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$，使得 $\left\lfloor x+\frac{1}{2} \right\rfloor = n$，因为 $0 < \frac{1}{2}+\varepsilon < 1$。因此

$$\lfloor 2x \rfloor = 2n \text{ 且 } \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2} \right\rfloor = n+n=2n$$

接下来，考虑 $\frac{1}{2} \leqslant \varepsilon < 1$ 的情况。此时，$2x=2n+2\varepsilon=(2n+1)+(2\varepsilon-1)$。由于 $0 \leqslant 2\varepsilon-1<1$，可得 $\lfloor 2x \rfloor = 2n+1$。因为 $\left\lfloor x+\frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor n+\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) \right\rfloor = \left\lfloor n+1+\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right) \right\rfloor$ 且 $0 \leqslant \varepsilon-\frac{1}{2}<1$，可得 $\left\lfloor x+\frac{1}{2} \right\rfloor = n+1$。因此，$\lfloor 2x \rfloor = 2n+1$ 且 $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2} \right\rfloor = n+(n+1)=2n+1$。证毕。 ■

SUMMARIES

1. 函数的定义与引言。
2. 一对一函数和映上函数。
3. 反函数和函数组合。
4. 函数的图像。

Chapter2-4. 序列与求和

2019年3月29日 16:25

NOTE TAKING AREA

序列的基本定义

- 序列：从整数集合的子集到集合S的函数，用记号a_n表示整数n的像。
    - 其中，**几何序列**的定义如下：

      $a, ar, ar^2, \cdots, ar^n, \cdots$
    - 其中，**等差序列**的定义如下：

      $a, a+d, a+2d, \cdots, a+nd, \cdots$

特殊的整数序列

- *找出构造序列项的公式或一般规则，确定目标序列。考虑相同值、前项与后项之差为常数、前项与后项之商为常数、后项是前项的组合、循环。*

数列的求和

- 求和记号用以表示数列的下标值至上标之和：

  $\sum_{j=m}^{n} a_j$, $\sum_{j=m}^{n} a_j$ 或 $\sum_{m\le j\le n} a_j$
- 几何序列的求和公式：

  $$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \begin{cases} \dfrac{ar^{n+1}-a}{r-1} & 若\ r \neq 1 \\ (n+1)a & 若\ r = 1 \end{cases}$$
    - 其中$r\neq0$.
- 求和公式的其他应用：

和	闭　形　式	和	闭　形　式
$\sum_{k=0}^{n} ar^k (r \neq 0)$	$\dfrac{ar^{n+1}-a}{r-1}, r \neq 1$	$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\dfrac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \vert x \vert < 1$	$\dfrac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \vert x \vert < 1$	$\dfrac{1}{(1-x)^2}$

无限集合的基数

- 有限集的基数为集合中的元素个数，推广至无限集则是：
- 两个集合具有相同的基数，当且仅当存在从A到B的一一对应。
    - **有限集**与**自然数集**基数相同的集合都称为可数的，否则为不可数的。

      如果一个无穷集合 S 是可数的，我们用符号 $\aleph_0$ 来表示集合 S 的基数（$\aleph$是希伯来语，希伯来字母表的第一个字母）。记 $|S| = \aleph_0$，且说 S 有基数"希伯来零"。

CUE COLUMN

特殊的整数序列的例子

例 5 求具有下列前 5 项的序列公式：

(a)1，1/2，1/4，1/8，1/16 (b)1，3，5，7，9 (c)1，−1，1，−1，1

Extra Examples

解 (a)可以看出分母都是 2 的幂。满足 $a_n=1/2^n$ 的序列是候选解序列。这个候选序列是几何序列，满足 $a=1$ 和 $r=1/2$

例 5 求具有下列前 5 项的序列公式：

(a)1，1/2，1/4，1/8，1/16 (b)1，3，5，7，9 (c)1，−1，1，−1，1

Extra Examples

解 (a)可以看出分母都是 2 的幂。满足 $a_n=1/2^n$ 的序列是候选解序列。这个候选序列是几何序列，满足 $a=1$ 和 $r=1/2$。

(b)注意每一项都是对前一项加 2 而得到的。满足 $a_n=2n+1$ 的序列是候选解序列。这个候选序列是等差序列，满足 $a=1$ 和 $d=2$。

(c)各项轮流取值 1 和 −1。满足 $a_n=(-1)^n$ 的序列是候选解序列。这个候选序列是几何序列，满足$a=1$和 $r=-1$。■

证明正奇数集合是可数集合

例 18 证明：正奇数集合是可数集合。

解 要证明正奇数集合是可数的，就说明这个集合与正整数集合之间的一一对应。考虑从 $\mathbf{Z}^+$ 到正奇数集合的函数

$$f(n)=2n-1$$

证明 f 既是单的又是满的，即证明 f 是一一对应的。为了看出 f 是单的，假定 $f(n)=f(m)$。于是 $2n-1=2m-1$，所以 $n=m$。为了看出 f 是满的，假定 t 是正奇数。于是 t 比偶数 $2k$ 少 1，其中 k 是自然数。因此$t=2k-1=f(k)$。图 2-18 显示这个一一对应。■

证明实数集合是不可数集合

例 21 证明：实数集合是不可数集合。

Extra Examples

解 要证明实数集合是不可数的，就假定实数集合是可数的并得出矛盾。于是，所有落在 0 和 1 之间的实数所成的子集合也是可数的(因为可数集合的所有子集合都是可数的，参见本节末练习 36)。在此假设下，在 0 和 1 之间的实数按照某种顺序列出，比如说 r_1，r_2，r_3，…设这些实数的十进制表示为

$$\begin{aligned}
r_1 &= 0.d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}\cdots \\
r_2 &= 0.d_{21}d_{22}d_{23}d_{24}\cdots \\
r_3 &= 0.d_{31}d_{32}d_{33}d_{34}\cdots \\
r_4 &= 0.d_{41}d_{42}d_{43}d_{44}\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

其中 $d_{ij}\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$。(例如，如果 $r_1=0.237\,941\,02\cdots$，就有 $d_{11}=2$，$d_{12}=3$，$d_{13}=7$，等等。)于是，构造新的实数具有十进制展开式 $r=0.d_1d_2d_3d_4\cdots$，其中用下列规则确定十进制数字：

$$d_i=\begin{cases}4 & 若\ d_{ii}\neq 4\\ 5 & 若\ d_{ii}=4\end{cases}$$

(例如，假定 $r_1=0.237\,941\,02\cdots$，$r_2=0.445\,901\,38\cdots$，$r_3=0.091\,187\,64\cdots$，$r_4=0.805\,539\,00\cdots$，等等，于是 $r=0.d_1d_2d_3d_4\cdots=0.4544\cdots$，其中因为 $d_{11}\neq4$，$d_1=4$；因为 $d_{22}=4$，$d_2=5$；因为 $d_{33}\neq4$，$d_3=4$；因为 $d_{44}\neq4$，$d_4=4$；等等。)

每个实数都有唯一的十进制展开式(展开式结尾全部由数字 9 组成的可能性除外)。于是，实数 r 不等于 r_1，r_2，…中的任何一个，因为对每个 i 来说，r 的十进制展开式与 r_i 的十进制展开式在小数点右边第 i 位是不同的。

由于存在着不在列表中而在 0 和 1 之间的实数 r，所以可以列出在 0 和 1 之间所有实数的假设就必定为假。因此，不能列出在 0 和 1 之间的所有实数，在 0 和 1 之间的实数集合是不可数的。任何含有不可数子集合的集合都是不可数的(参见本节末练习 37)。因此实数集合是不可数的。■

SUMMARIES

1. 序列的基本定义。
2. 特殊的整数序列。
3. 数列的求和。
4. 无限集合的基数。