기초 수학

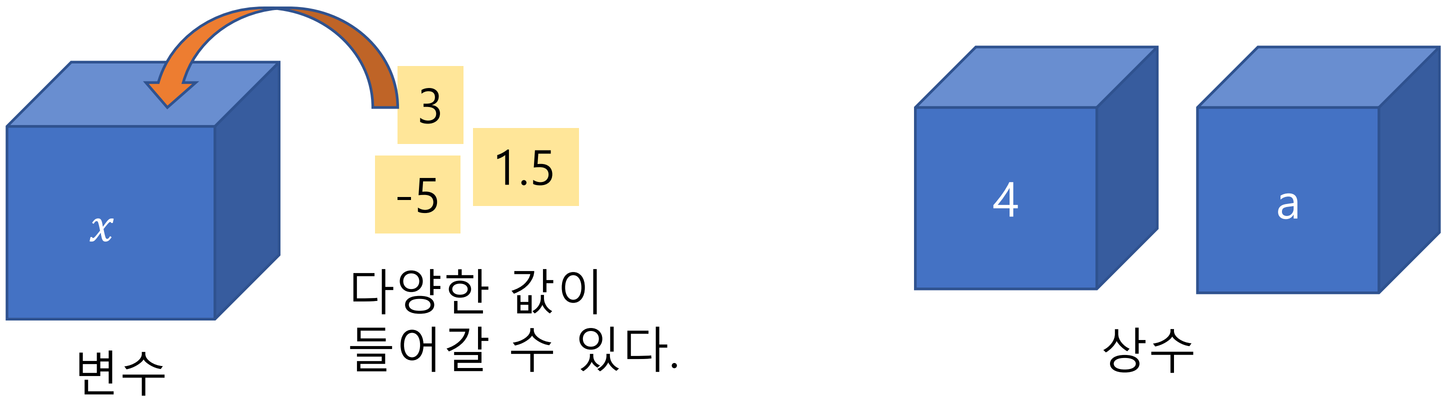
컴퓨터공학부
김영봉

- 1. 함수란
- 2.

함수란?

함수란?

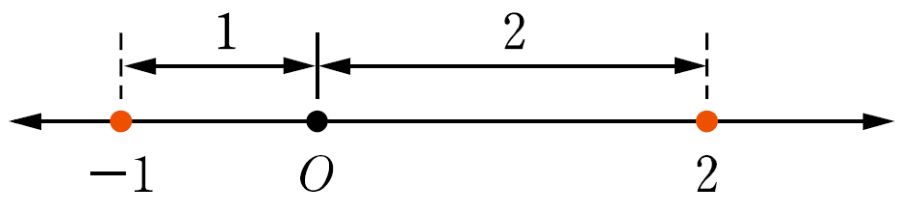
- ‘변수’는 값이 고정되지 않아 다양한 값이 들어갈 수 있다
- ‘상수’는 값이 고정되어 변하지 않는다



- 1차함수: y=ax+b 는 x가 변할때 y가 어떻게 달라지는지를 알아보는 함수
- 원의 반지름에 따른 원의 면적 구하는 함수인 $y = \pi r^2$ 은 반지름 r 은 바뀔 수 있는 변수임

직교좌표계

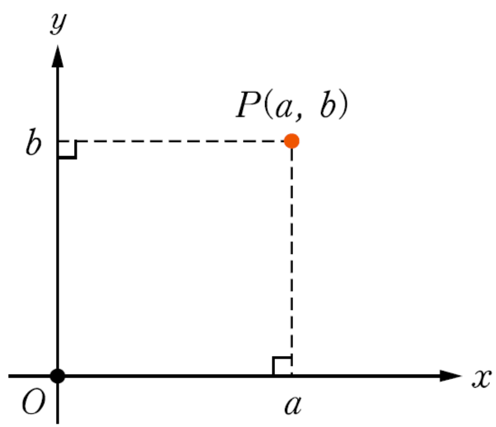
- **좌표**
  수직선 위의 임의의 점 P 를 나타내는 실수



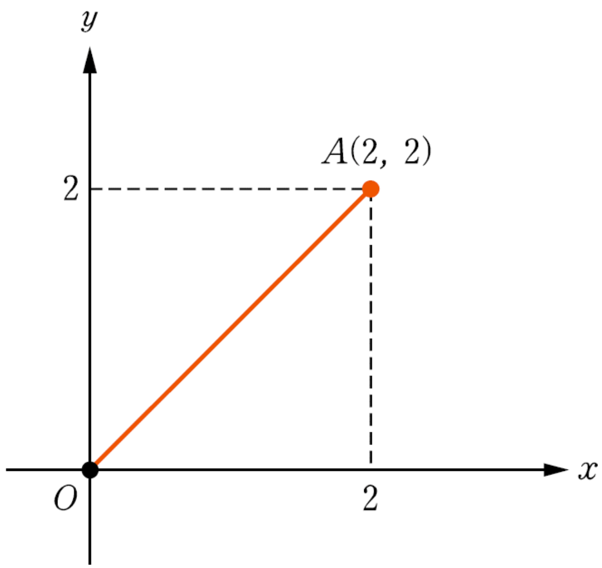
수직선 위의 좌표

직교좌표계

- 두 수직선이 한 점에서 수직으로 교차하는 좌표계



직교좌표계



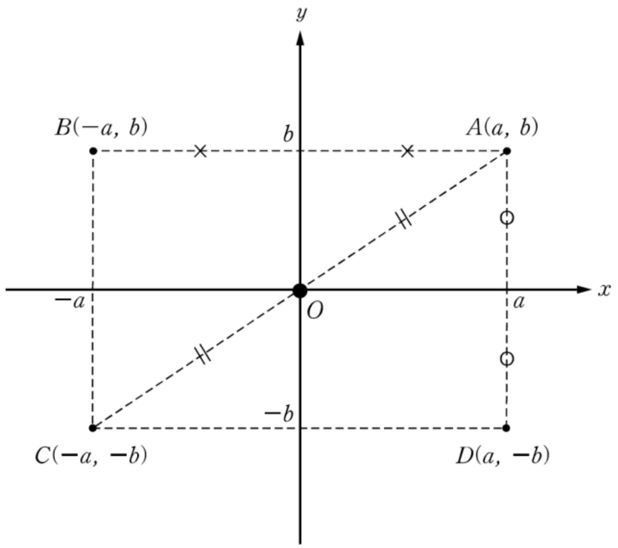
- 거리
  - 원점 O에서 P까지 거리

$$\overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- 예시
  - 선분 OA의 길이는 $\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 이다.

직교 좌표계

- 직교좌표계



  - x축에 대한 대칭: 점(a,0)에서 x축을 중심으로 거리 b 만큼 떨어진 두점 A(a,b)와 D(a,-b)
  - y축에 대한 대칭 : 점(0,b) 에서 y축을 중심으로 거리 a만큼 떨어진 두점 A(a,b) 와 B(-a, b)
  - 원점 O에 대한 대칭 : 두점 A(a,b) 와 C(-a,-b)

함수란?

❖ 함수란?

일변수 함수

집합 A에 속하는 각 원소 x를 집합 B에 속하는 단 하나의 원소 y에 대응시키는 규칙을 **함수** function 라고 합니다. 기호로는 $f: A \to B$로 표기하고, x에 대응하는 y를 $y = f(x)$라고 합니다.

다변수 함수(multivariate function):

집합 A에 속하는 각 원소 x가 n차원의 원소인 함수

정의 2-1 **다변수 함수**

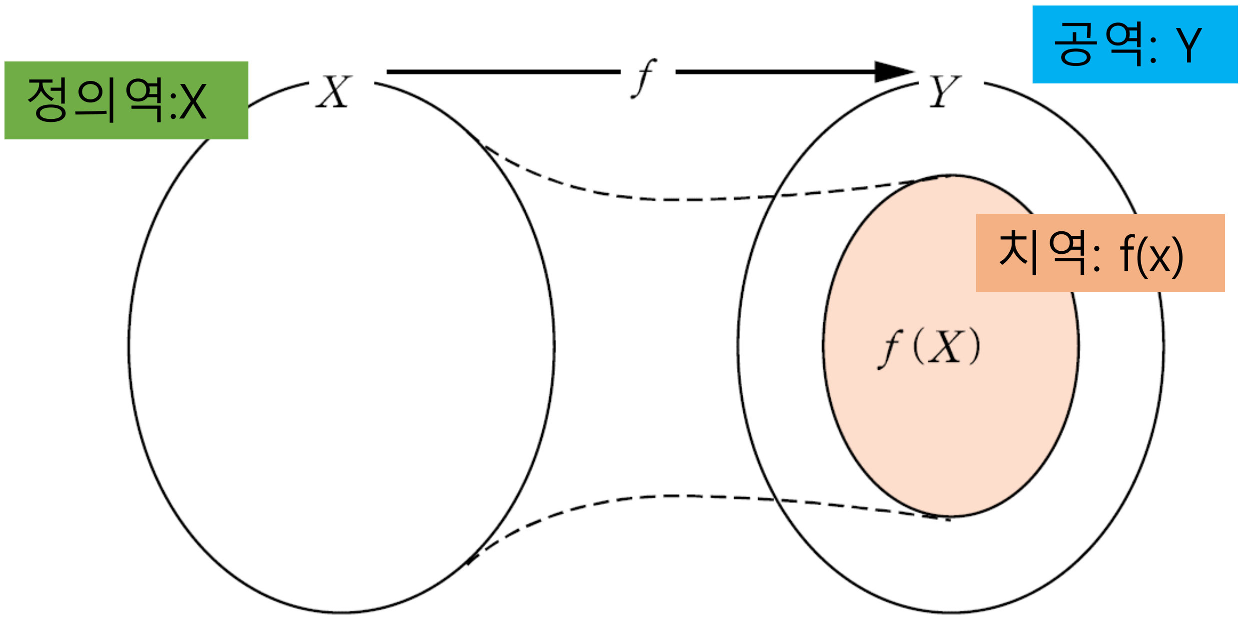
$\mathbb{R}^n$의 부분집합 A에 속하는 각 원소 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$을 $\mathbb{R}$의 부분집합 B에 속하는 단 하나의 원소 z에 대응시키는 규칙을 **다변수 함수**라고 합니다. 기호로는 $f: A \to B$로 표기하고, $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$에 대응하는 z를 $z = f(x_1, \cdots, x_n)$이라고 합니다.

함수란

❖ 함수: 공집합이 아닌 두 집합 X 와 Y에 대하여 집합 X의 각 원소 x 에 집합 Y 안의 오로지 한 원소 y 가 대응하는 규칙 f

x : 독립변수

y : 종속변수 $f : X \to Y$, $y = f(x)$



치역: 집합 X 의 각 $x = (x_1, \cdots, x_n)$에 대하여 함숫값 $f(x_1, \cdots, x_n)$전체의 집합

함수

- **항등함수**

  집합 X에서 X로의 함수 $f: X \rightarrow X, y = f(x) = x$인 함수

- **상수함수**

  어떤 $a \in Y$ 에 대하여 집합 X에서 Y로의 함수 $f: X \rightarrow Y, y = f(x) = a$ 인 함수

- **그래프**

  함수 $y = f(x)$에 대하여 정의역 X의 모든 원소 x와 그에 대응하는 함숫값 $f(x)$ 또는 y의 순서쌍 전체의 집합 G

$$G = (x,y)|y = f(x), x \in dom(f) = (x, f(x))|y = f(x), x \in dom(f)$$

함수의 상등

■ 함수의 상등

두 함수 와 f에 g대하여 다음 두 조건을 만족할 때, f와 g는 상등이라 하고, $f=g$로 나타낸다.

❶ 두 함수 f와 g의 정의역이 같다.

❷ 정의역 안의 모든 x에 대하여 $f(x)=g(x)$다.

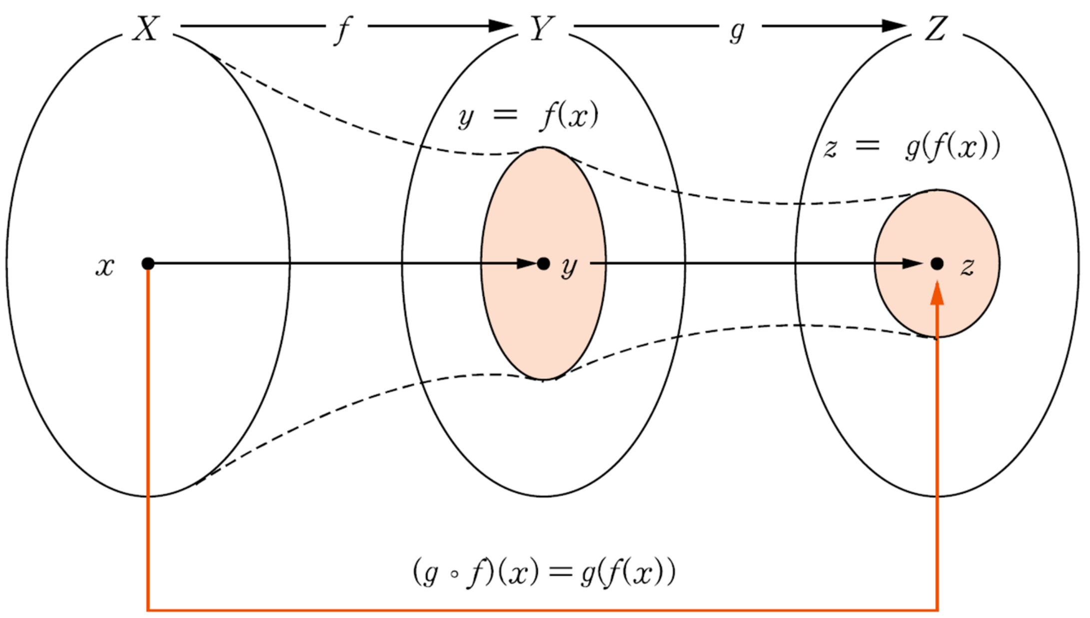
함수의 사칙연산

[표 2-1] 함수의 사칙연산과 정의역

함수의 사칙연산	정의역
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$\mathrm{dom}(f+g)=\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)$
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$\mathrm{dom}(f-g)=\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)$
$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$	$\mathrm{dom}(f\cdot g)=\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(x)\neq 0$)	$\mathrm{dom}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)-\{x\mid g(x)=0\}$
$(kf)(x)=kf(x)$	$\mathrm{dom}(kf)=\mathrm{dom}(f)$

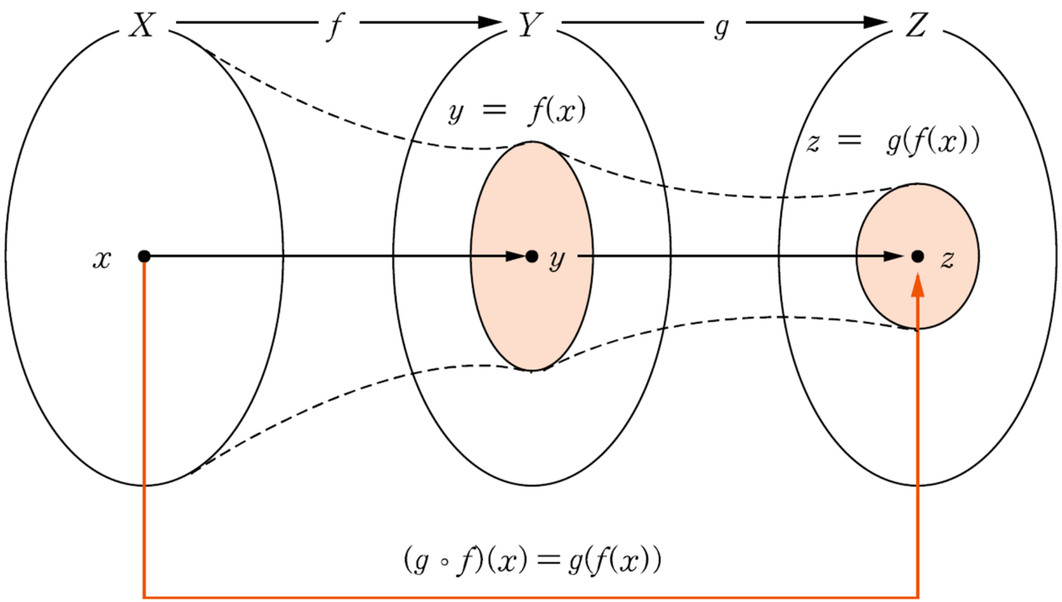
합성함수

두 함수 $f: X \to Y$와 $g: Y \to Z$에 대하여, $x \in X$가 함수 f에 의해 $y \in Y$로 대응하고, 이 원소 $y \in Y$가 함수 g에 의해 $z \in Z$로 대응한다고 하자. 그러면 $x \in X$는 두 함수 f와 g에 의해 $z \in Z$로 대응한다.



[그림 2-6] 합성함수 $g \circ f$

합성함수



$$\mathrm{dom}(g \circ f) = \{x \in X \mid \exists\, z = g(f(x)) \in Z\}$$

$$\mathrm{ran}(g \circ f) = \{z \in Z \mid z = g(f(x)),\ \forall\, x \in \mathrm{dom}(g \circ f)\}$$

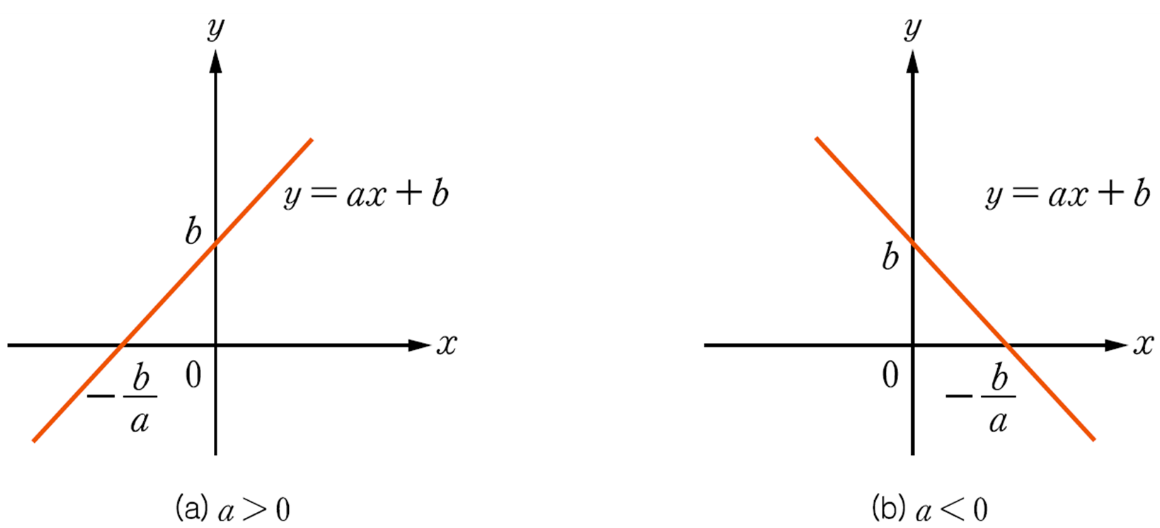
일차함수
및
다변수 함수

일차함수

■ **일차함수**

함수 $y = f(x)$에서 다음과 같이 변수 y가 x에 관한 일차식으로 표현되는 함수

$$\boldsymbol{y = f(x) = ax + b} \quad (\text{단}, a \neq 0,\ a,\ b\text{는 상수})$$



[그림 2-7] 일차함수의 절편

일차함수

- **기울기**

  일차함수 $y=f(x)$에서 일차항의 계수 a

  x의 증가량에 대한 y의 증가량에 대한 비율

- x**절편**

  직선이 x축에서 만나는 점의 x좌표

- y**절편**

  직선이 y축에서 만나는 점의 y좌표

일차함수

■ 직선의 방정식 유형

❶ 기울기가 a 이고 한 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선의 방정식

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

❷ 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

❸ x 절편 a와 y 절편 b를 지나는 직선의 방정식

$$y = -\frac{b}{a}(x - a) \text{ 또는 } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

이차함수

■ 이차함수

함수 $y = f(x)$에서 다음과 같이 y가 x에 관한 이차식으로 나타나는 함수

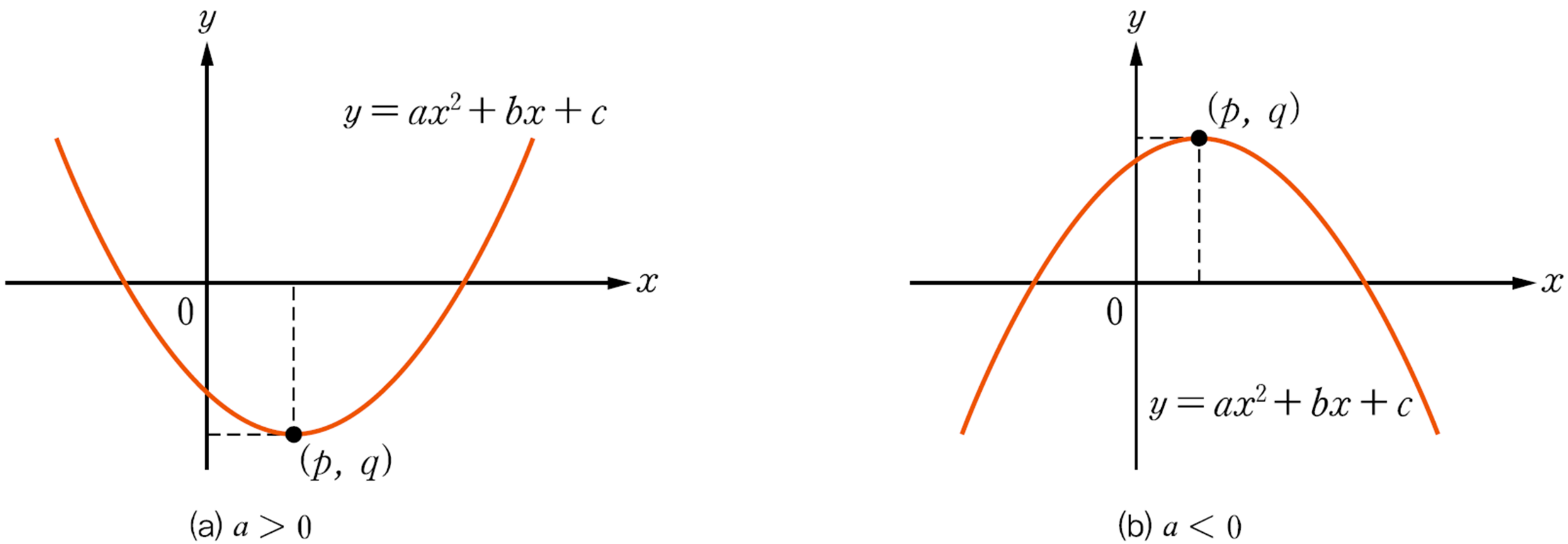
■ 꼭짓점

함수를 완전제곱식으로 변형하여 찾을 수 있다.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x-p)^2 + q$$

$$x = p = -\frac{b}{2a} \text{ 일 때, } f(p) = q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

이차함수



[그림 2-8] 이차함수의 그래프 개형과 꼭짓점

이차함수

■ 포물선의 방정식 유형

❶ 기울기가 $\boldsymbol{a}$ 이고 꼭짓점이 $(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q})$인 포물선의 방정식

$$y = a(x-p)^2 + q$$

❷ 기울기가 $\boldsymbol{a}$ 이고 $\boldsymbol{x}$ 절편이 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2$인 포물선의 방정식 ($x_1 = x_2$인 경우도 포함)

$$y = a(x-x_1)(x-x_2)$$

❸ 세 점 $(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{y}_1)$, $(\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}_2)$, $(\boldsymbol{x}_3,\ \boldsymbol{y}_3)$을 지나는 포물선의 방정식

다소 복잡하지만 $a x_1^2 + b x_1 + c = y_1$, $a x_2^2 + b x_2 + c = y_2$, $a x_3^2 + b x_3 + c = y_3$을 연립하여 상수 a, b, c를 구한다.

다항 함수

- **다항함수** : $y = f(x)$에서 y가 x에 관한 n차 다항식인 함수

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \text{ (단, } a_0 \neq 0,\ a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n \text{은 상수)}$$

그외 여러가지 함수

- 유리함수 : 두 다항함수의 유리식 $y = f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$
- 무리함수 : f(x) 가 무리식인 함수

  (근호의 값은 실수, 분모가 0이 아님)
- 대수적 함수 : 유리함수, 다항함수, 무리함수에 사칙연산적용
- 초월함수
  - 삼각함수, 역삼각함수, 지수함수, 로그함수, 쌍곡선함수, 역쌍곡선함수
- 최대정수함수 : 가우스함수 [x]
- 주기함수 : 주기 P로 반복 $\boldsymbol{f(x) = f(x+p)}$
- 우함수, 기함수 $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$
- 단사함수 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- 전사함수 : 공역과 치역이 일치
- 전단사함수 : 단사 이면서 동시에 전사인 함수
- 역함수

2. 다변수 함수

❖다변수 함수의 그래프

정의 2-2 **다변수 함수의 그래프**

함수 f 가 집합 $A \subset \mathbb{R}^n$ 을 정의역으로 갖는 다변수 함수라고 합시다. 함수 f 의 **그래프**는 다음과 같은 순서쌍의 집합으로 정의합니다.

$$\{(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)) \mid \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in A\}$$

컴퓨터 에서 함수의 개념

함수의 개념

- 함수의 기본 개념

$$x \longrightarrow \boxed{f(x)} \longrightarrow y$$

입력 변환 출력

- 위와 같이 하나의 입력값 x가 정해질 때 하나의 출력값 y가 결정되는 것을 함수라고 함.

- 함수는 프로그래밍이나 인공지능에 반드시 필요한 개념임.
- 프로그래밍에서의 함수는 참/거짓 혹은 문자열 같은 형태의 출력값도 가능한 형태임.

함수 - 제곱근

- 제곱근
  - 제곱을 했을 때 어떤 수가 되는 값을 어떤 수의 제곱근이라 부른다.
  - 제곱근을 표현하는 기호는 $\sqrt{\ }$ 이다.

- 정의
  - 어떤 수 a에 대해 $a = b^2$을 만족하는 b 가 있다면 이러한 b를 a의 제곱근이라고 한다. 실수에서는 양수에 대한 제곱근이 반드시 두개 (하나는 양수, 하나는 음수) 존재한다.

- 공식
  - $a > 0, b > 0, c > 0$ 이라고 할 때 다음 식이 성립한다.

① $\sqrt{a^2} = a$

② $a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$

③ $b\sqrt{a} + c\sqrt{a} = (b + c)\sqrt{a}$

④ $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

⑤ $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

⑥ $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$

함수 – 거듭제곱과 거듭제곱근

- 거듭제곱
  - 제곱은 2제곱, 3제곱과 같이 O제곱으로 부른다.
  - 혹은 2승, 3승 과 같이 O승으로 부르는 수학적 표현
  - a 를 p번 곱한 것을 a 의 p제곱, 혹은 a 의 p승이라함.
  - a^p으로 표기하고, a 를 밑(base) p를 지수(exponent, index)라고 부른다.
  - 지수는 정수일 필요는 없다. 분수, 음수 모두 가능함.
- 거듭제곱근
  - p제곱을 하여 a 가 되는 수 (혹은 p승을 하여 a 가 되는 수)를

    a의 p 제곱근이라 부르고, $\sqrt[p]{a}$와 같이 표기한다.
  - 2제곱근은 평방근이라고도 하며, $\sqrt[2]{a}$에서 2를 생략하고 $\sqrt{a}$ 와 같이 쓸 수 있다.
- 정의
  - 어떤 수 a에 대해 $a = b^p$을 만족하는 b 가 있다면 이러한 b를 a의 p 제곱근이라고 한다.

함수 – 거듭제곱과 거듭제곱근

- 공식
  - a>0 이고, 의 b> $0,$ 라고 가정할 때 다음 식이 성립한다.

① $a^0 = 1$

② $a^p a^q = a^{(p+q)}$

③ $(a^p)^q = a^{pq}$

④ $(ab)^p = a^p b^p$

⑤ $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$

⑥ $\sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab}$

⑦ $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a}$

⑧ $\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$

정리 3-1 실수 지수의 지수법칙

임의의 양의 실수 $a,\ b$와 실수 $p,\ q$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $a^p a^q = a^{p+q}$

(2) $(a^p)^q = a^{pq}$

(3) $(ab)^p = a^p b^p$

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = a^p \cdot b^{-p}$

(5) $a^p \div a^q = a^{p-q}$

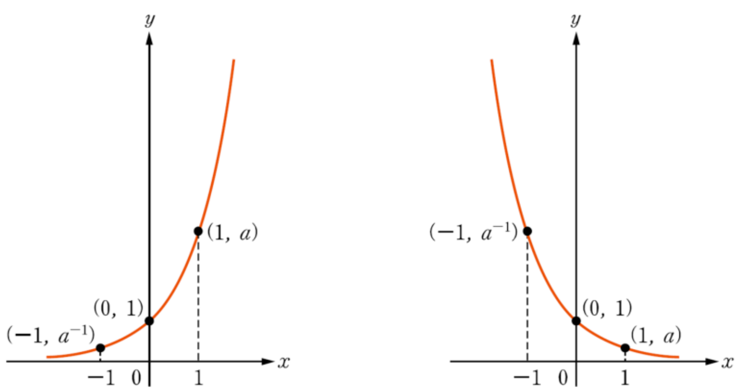
함수 – 지수함수와 로그함수

- 지수함수
  - 정의:

    a>0, a≠1 이라고 가정할 때, 다음과 같이 표현되는 함수를 지수함수라고 한다.

    $$y = a^x$$
  - a>1 일 때는 오른쪽으로 올라가고, 0<a<1일때는 오른쪽으로 내려가는 모양이다.
  - (0,1)과 (1,a) 두점을 반드시 지나는 특징이 있다.

■ 밑이 a인 지수함수의 그래프 개형



(a) $a>1$인 경우　　(b) $0<a<1$인 경우

지수함수 $y=a^x$ 의 특성

	$a>1$인 경우	$0<a<1$인 경우
정의역	실수 전체의 집합	실수 전체의 집합
치역	$\{y \mid y>0\}$	$\{y \mid y>0\}$
y 절편	1	1
증가/감소함수	증가함수	감소함수
x가 커질 때	한없이 커진다.	a^x 은 0 으로 근접한다.
x가 작아질 때	a^x 은 0 으로 근접한다.	한없이 커진다.

• 지수함수

■ 쌍곡선함수의 성질

(1) $\cosh x + \sinh x = e^{x}$ (2) $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

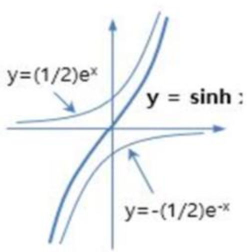
(3) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (4) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

(5) $\coth^2 x - 1 = \operatorname{cosech}^2 x$

■ 쌍곡선함수

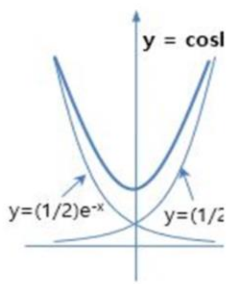
[예제 3-8] (b)~(c)와 같이, 지수함수 $y = e^{x}$, $y = e^{-x}$으로부터 유도

쌍곡선사인함수



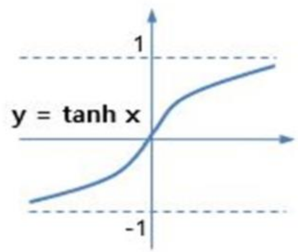
$\sinh(-x) = -\sinh x$

쌍곡선코사인함수



$\cosh(-x) = \cosh x$

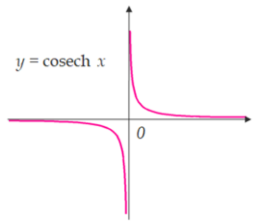
쌍곡선탄젠트함수



$\tanh(-x) = -\tanh x$

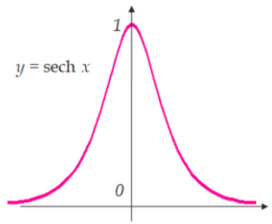
쌍곡선코시컨함수

$$f(x) = \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$



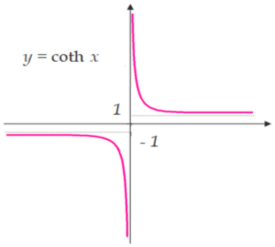
쌍곡선시컨트함수

$$f(x) = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}$$



쌍곡선코탄젠트함수

$$f(x) = \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$



함수 – 지수함수와 로그함수

- 로그함수
  - 정의:
    어떤 x 가 a^y 라고 표현될 때의 지수 y 를 a를 밑으로 하는 x 의 로그(log)라고 하며, 기호 log를 사용하여 $y = \log_a x$로 표기한다.

■ **로그**

$a \neq 1$인 양수 a와 임의의 양수 b에 대하여 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^x$을 만족할 때,

지수 x를 밑 a인 b의 로그 $x = \log_a b$로 나타내고 b를 진수라 한다.

■ **로그의 종류**

· 상용로그 : 밑이 $a = 10$인 로그($x = \log b$)

· 자연로그 : 밑이 무리수 e인 로그($x = \log_e b = \ln b$)

함수 – 지수와 로그

- 자연로그의 밑 (네이피어 상수 e)
- $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281 \ldots$
- $\log_e$ 를 $\ln$ 으로 표기하기도 한다.
- 지수함수 e^x를 $\exp(x)$ 혹은 $\exp x$ 로 표시하기도 한다.

함수 - 로그함수

- 로그법칙

정리 3-2 로그법칙

임의의 양수 $a(a \neq 1)$와 양수 x, y에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

(2) $\log_a \frac{y}{x} = \log_a y - \log_a x$

(3) $\log_a x^m = m \log_a x$

(4) $\log_a a^m = m$

(5) $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$ (단, $c \neq 1$인 양수)

(6) $a^{\log_a x} = x^{\log_a a} = x$

(7) $a^{\log_c x} = x^{\log_c a}$ (단, $c \neq 1$인 양수)

(8) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ (단, $b \neq 1$인 양수)

(9) $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$

$\ln xy = \ln x + \ln y$

$\ln \frac{y}{x} = \ln y - \ln x$

$\ln x^m = m \ln x$

$\ln e^m = m$

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$e^{\ln x} = x$

$a^{\ln x} = x^{\ln a}$

함수 - 로그함수

■ 로그함수

· 증가(감소)함수는 전단사함수이고 역함수가 존재한다.

· $0 < a < 1$이면 $y = a^x$는 감소함수, $a > 1$이면 $y = a^x$는 증가함수.

· 지수함수는 역함수가 존재한다.

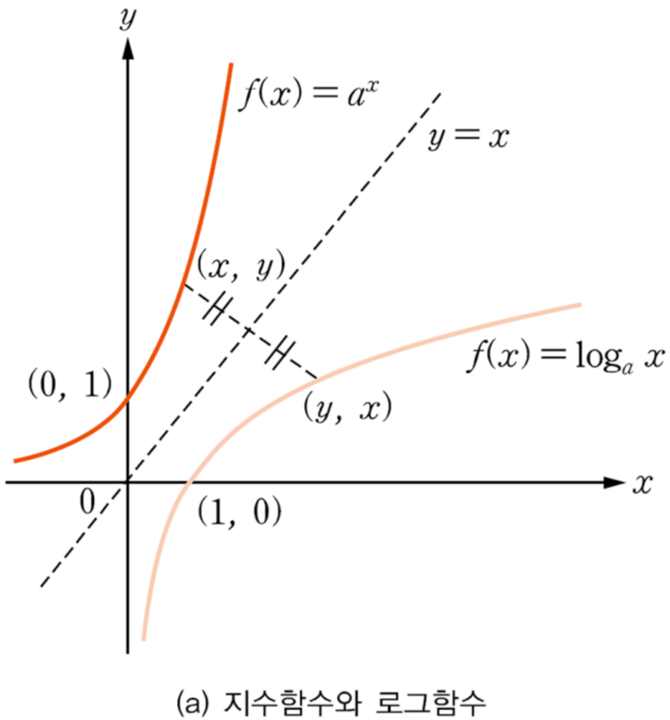
· $a > 0 (a \neq 0)$에 대하여 지수함수 $y = a^x$의 역함수를 밑 a인 로그함수라 한다.

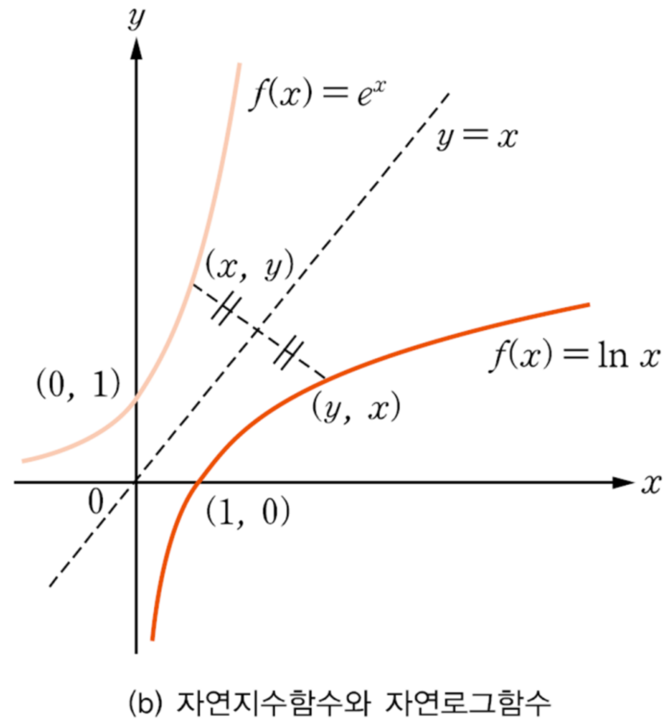
$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y (y = \log_a x)$$

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y (y = \ln x): \text{ 자연로그}$$

함수- 로그함수

- 지수함수와 로그함수의 관계





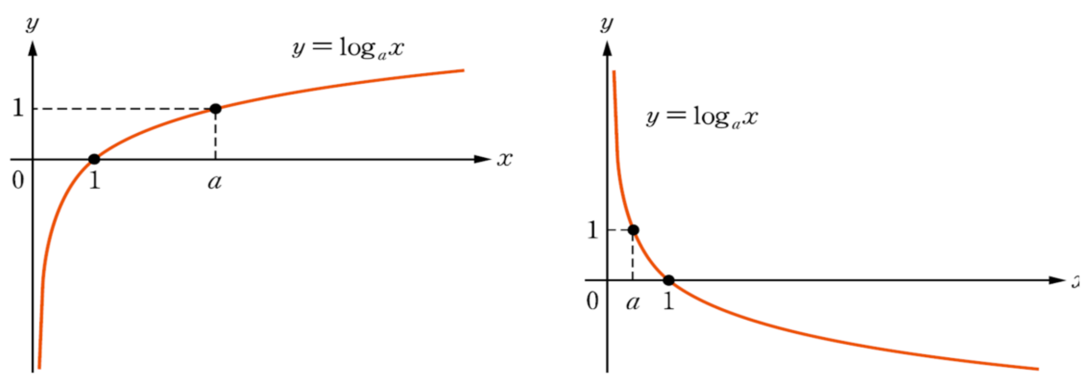
[그림 3-2] 지수함수와 로그함수의 관계

함수 - 로그함수

- 로그함수의 특성

[표 3-2] 로그함수 $y = \log_a x$ 의 특성

	$a > 1$인 경우	$0 < a < 1$인 경우
정의역	$\{x \mid x > 0\}$	$\{x \mid x > 0\}$
치역	실수 전체의 집합	실수 전체의 집합
x 절편	1	1
증가/감소함수	증가함수	감소함수
$x > 1$인 경우 x 가 커질 때	양수이고 한없이 커진다.	음수이고 한없이 작아진다.
$0 < x < 1$인 경우 x 가 0에 가까울 때	음수이고 한없이 작아진다.	양수이고 한없이 커진다.

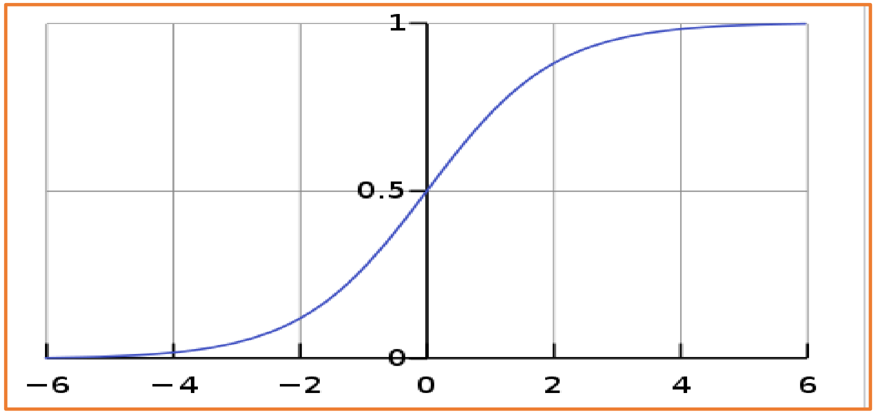


(a) $a > 1$ (b) $0 < a < 1$

[그림 3-3] 로그함수의 그래프

함수 – 시그모이드 함수

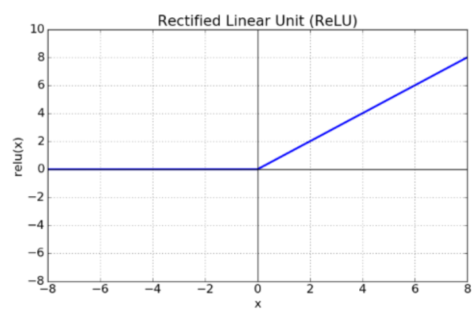
- 시그모이드 함수 (Sigmoid function)
  - 특수함수로 인공지능 분야에서 볼 수 있는 함수
  - $s_a(x) = \frac{1}{1+\exp(-ax)}$
  - a를 게인(gain)이라 부르며, a=1일 때의 시그모이드 함수를 표준 시그모이드 함수라 한다.
  - x가 음의 무한대로 갈수록 시그모이드 함수는 0으로 수렴하고, 양의 무한대로 갈수록 1로 수렴한다. 0일 때는 ½ 이다.
  - a값이 크면 변화의 정도가 커진다.



함수 – 시그모이드 함수

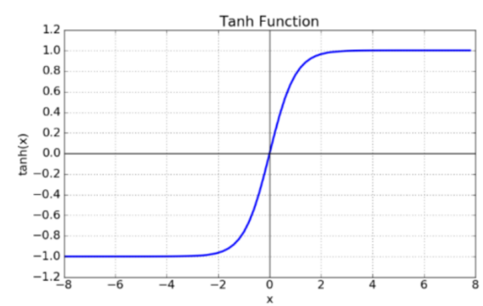
- ✓ 시그모이드 함수는 활성화 함수로 자주 사용됨
- ✓ 활성화 함수란 인공지능 모델의 표현력을 높이기 위해 사용하는 함수로 비선형 분리를 할 수 있다.
- ✓ 신경망과 같은 인공지능 모델에서는 시그모이드 함수와 같은 활성화 함수를 많이 사용한다.
- ✓ 딥러닝 DNN, CNN 에서는 ReLU 라는 시그모이드 함수 사용
- ✓ RNN의 하나인 LSTM 에서는 tanh 함수를 사용

2.3 ReLU 렐루



$$f(x) = max(0, x)$$

2.2 Tanh 하이퍼볼릭탄젠트함수



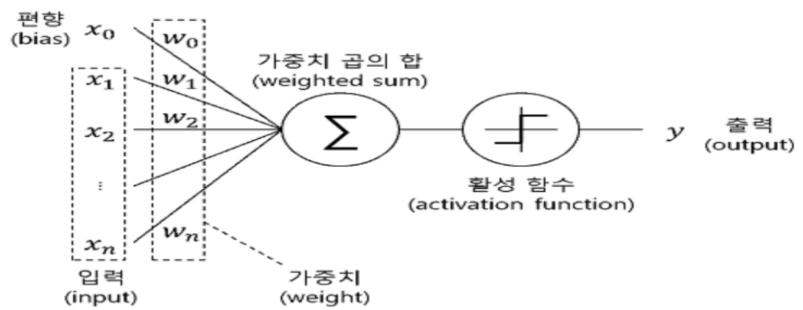
$$\tanh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

함수 - 시그모이드함수

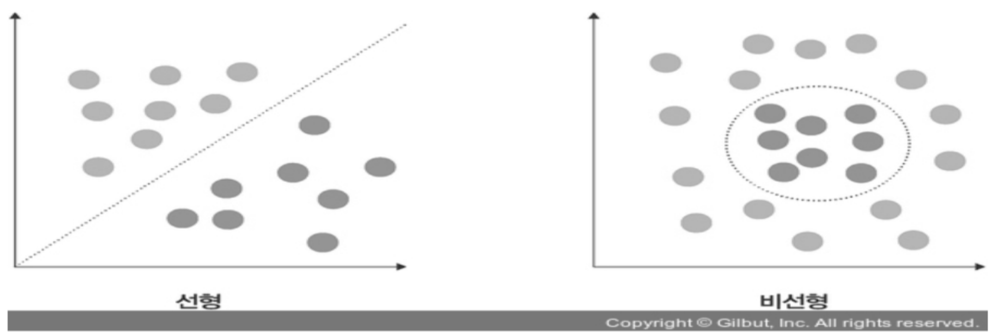
- 엑티베이션 함

1. Activation?

딥러닝 모델을 구성하다 보면 레이어 안에 활성화 함수$Activation$이 구성된다는 것을 알 수 있다.
그렇다면 활성화 함수는 무엇일까? 그리고 왜 사용하는 것일까?



활성화 함수는 은닉층을 통과 해서 나온 가중치 곱의 합에 **'비선형성'**을 추가하기 위해서 사용된다.
'비선형성'을 왜 추가해야할까?
바로 모델 레이어를 깊게 쌓는 것에 의미를 부여하기 위해서이다.
쉽게 말해서 활성화 함수 위치에 선형함수를 사용하게 되면 그냥 단순한 선형분류기의 기능밖에 하지 못한다.

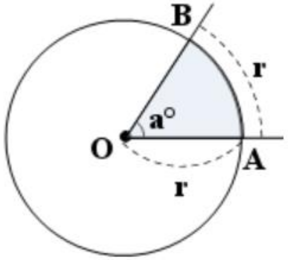


위의 사진을 보면 선형과 비선형의 의미를 이해할 수 있을 것이다.
선형으로 분류하는 문제같은 경우는 신경망 모델이 아니더라고 기존 머신러닝 모델로 해결가능하다.
그러나 실제 세계의 문제에서는 선형 그래프의 모양처럼 문제가 나눠지지 않는다.
즉, 비선형 분류기를 구성해서 문제를 해결해야한다.

따라서, 레이에어 비선형성을 추가하기 위해서 활성화 함수를 이용하는것이다.
그렇다면 이러한 활성화 함수에는 어떠한 것들이 있을까?
아래부터 다양한 활성화 함수를 살펴보고 각 활성화 함수가 갖고 있는 장단점을 분석해 보자.

함수 - 삼각함수

- 삼각함수
  - 각의 크기에 따라 값이 달라지는 함수
  - 각의 크기가 변수인 함수



- 정의
  - 반지름이 r인 원에서 그 반지름과 같은 길이의 호 AB가 있다고 가정할 때, 그 중심각의 크기는 항상 일정하다. 이때의 각을 1 라디안이라 부르고 1 rad 라고 표기한다.
  - 아래 그림에서 a^o 이 1 rad 이다
  - 일반적으로 라디안이라는 단위는 생략해서 말하는 경우가 많다.

도수법	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
호도법	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

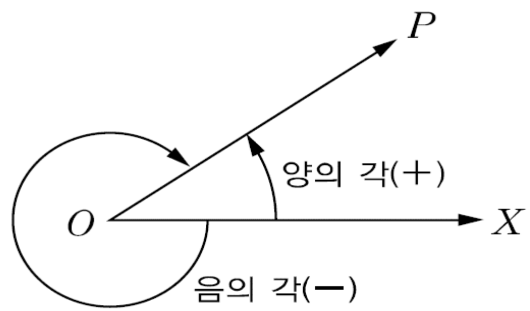
호도법: 라디안을 단위로 하여 각도를 나타내는 방법

π라디안 = 180°

1라디안 = $\frac{180°}{\pi}$, 1° = $\frac{\pi}{180}$ 라디안

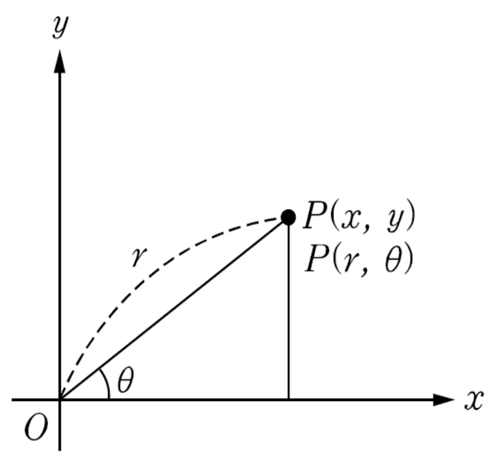
함수 - 삼각함수

- 삼각함수
  - 각의 방향



[그림 4-2] 동경 OP의 회전 방향

  - 각의 다른 표현



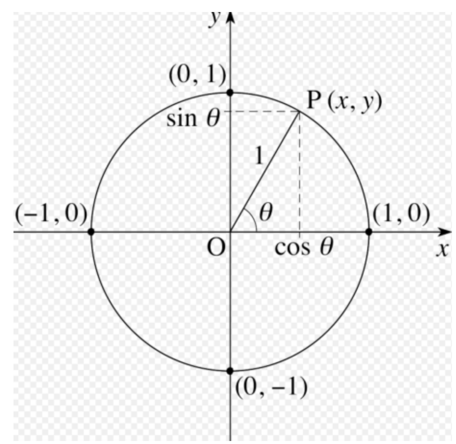
[그림 4-3] 극좌표계$(P(r,\ \theta))$와 직교좌표계

함수 - 삼각함수

- 정의
  - xy 평면상의 원점 O 를 중심으로 반지름이 1인 단위원이 있다고 가정하자. X축의 양의 부분과 선분 PO가 만드는 각을 θ라고 할 때, cos(θ) = x, sin(θ) = y, tan(θ) = y/x 이다.
  - 즉, cos θ 는 P의 x좌표, sin θ 는 P의 y좌표, tan θ 는 선분 PO 의 기울기와 같다.

[표 4-2] 삼각비의 정의

삼각비	정의	삼각비	정의
사인	$\sin\theta = \frac{y}{r},\ r = \sqrt{x^2+y^2}$	코시컨트	$\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin\theta}$ $(y \neq 0)$
코사인	$\cos\theta = \frac{x}{r}$	시컨트	$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos\theta}$ $(x \neq 0)$
탄젠트	$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $(x \neq 0)$	코탄젠트	$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\theta}$ $(y \neq 0)$



함수 - 삼각함수

- 삼각함수 공식

• $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ • $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ • $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ • $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$ • $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ • $\cos(-\theta) = \cos\theta$ • $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ • $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 　◦ $e^{i\pi} + 1 = 0$ 　◦ $(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ • $\deg(\sin\theta) = \deg(\cos\theta) = 0$[8]	n이 정수일 때 다음이 성립한다. • $\sin(n\pi \pm \theta) = \pm(-1)^n \sin\theta$ • $\cos(n\pi \pm \theta) = (-1)^n \cos\theta$ • $\tan(n\pi \pm \theta) = \pm\tan\theta$ • $\sin\left\{\frac{(2n+1)\pi}{2} \pm \theta\right\} = (-1)^n \cos\theta$ • $\cos\left\{\frac{(2n+1)\pi}{2} \pm \theta\right\} = \mp(-1)^n \sin\theta$ • $\tan\left\{\frac{(2n+1)\pi}{2} \pm \theta\right\} = \mp\cot\theta$

함수 - 삼각함수

- 삼각함수 – 덧셈정리

정리 4-6 삼각비의 덧셈정리

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(5) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(6) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

- 배각공식

정리 4-7 삼각비의 배각공식

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

(3) $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

함수 - 삼각함수

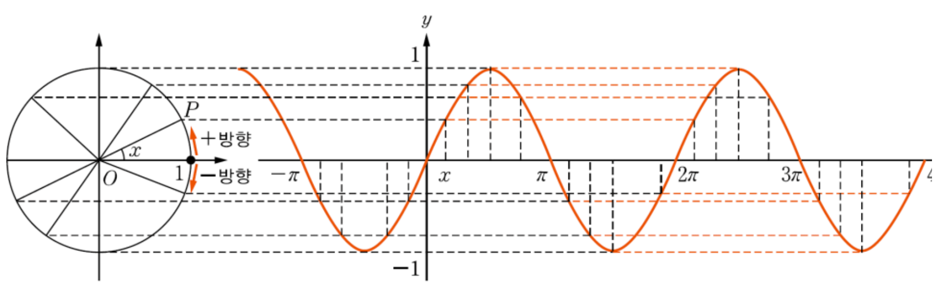
- 삼각함수는 주기적(2π으)로 같은 값이 반복되는 주기 함수

정리 4-2 일반각에 대한 삼각비

(1) $\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$

(2) $\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$

(3) $\tan(\theta + 2n\pi) = \tan\theta$



■ 사인함수의 특성

❶ 정의역은 모든 실수집합이다.

❷ 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이다.

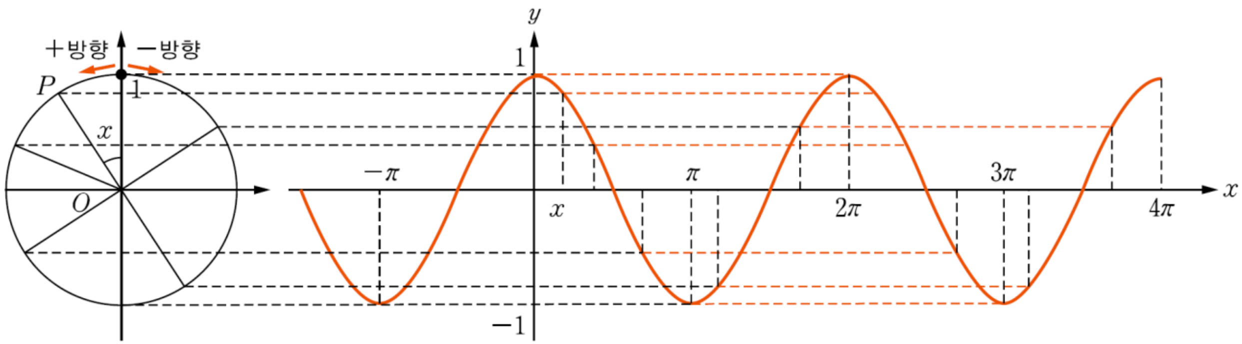
❸ 2π 주기함수이다. ([정리 4-2]에 의해)

❹ 기함수이다. ([정리 4-3]에 의해)

❺ 원점에 대해 대칭이다.

함수 - 삼각함수

- 코사인 함수



[그림 4-17] $y = \cos x$ 의 그래프

■ **코사인함수의 특성**

❶ 정의역은 모든 실수집합이다.

❷ 치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$ 이다.

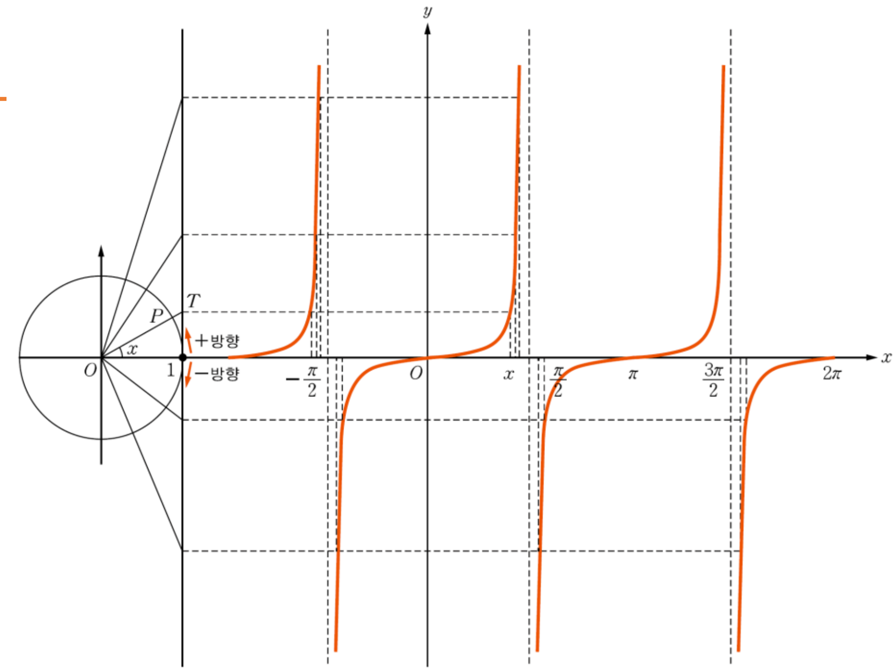
❸ 2π 주기함수이다. ([정리 4-2]에 의해)

❹ 우함수이다. ([정리 4-3]에 의해)

❺ y 축에 대해 대칭이다.

함수 - 삼각함수

- 탄젠트 함수



- 탄젠트 함수의 특

❶ 정의역은 $x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ (n은 정수)인 모든 실수집합이다.

❷ 치역은 모든 실수집합이다.

❸ π 주기함수이다. ([정리 4-4]에 의해)

❹ 기함수이다. ([정리 4-3]에 의해)

❺ 원점에 대해 대칭이다.

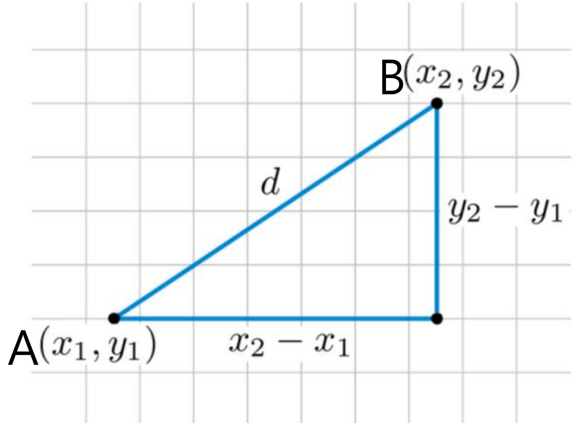
거리 측정방법

① 절대값 : x, y축 직선상에서 숫자와 0 사이의 거리

- 해당하는 수의 절대값은 0 으로 부터 숫자 까지의 떨어진 거리이다.
- 절대값 기호 |숫자| 로 나타낸다.

② 유크리드 거리 (Euclidean distance)

- xy 평면상의 한점(A)과 또다른한점(B) 사이의 거리를 자로 잰 것과 같은 거리를 의미한다.
- 점 A와 점 B를 연결한 직선(AB) 상에서의 선분의 길이
- 유클리드 거리는 $\|A - B\|$로 나타낸다.

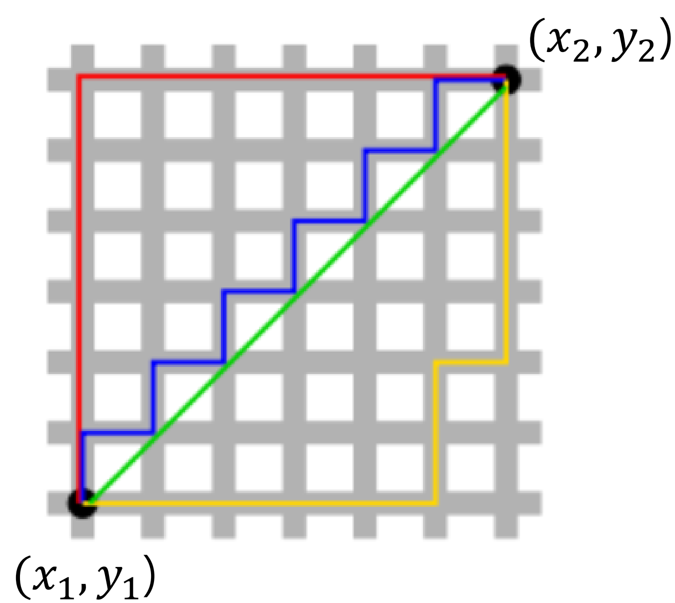


$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

거리 측정방법

③ 맨하탄 거리 (Manhattan distance)

- 가정 :
  - 맨하탄 거리의 도로가 바둑판식으로 정리.
  - 건물을 가로 지르지 않고 도로를 이용하여 움직이는 거리
- 두점 사이의 맨하탄 거리 정의 :
  - 각 x, y값의 차이의 절대값 합
  - $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$



수열

수열

- 수열sequence of numbers
  - 어떤 규칙에 따라 차례로 나열된 수들의 집합

- 항term
  - 수열에 있는 각각의 수

예1) 1, 3, 5, 7, … : 앞의 항에 2를 더해서 얻어지는 수열

예2) 2, 8, 32, 128, … : 앞의 항에 4를 곱해서 얻어지는 수열

문제

[문제 1] 수열 $3, 6, 9, 12, \cdots$ 에서 다음에 나올 두 항을 구하라.

[문제 2] 수열 $9, 5, 1, \cdots$ 에서 다음에 나올 두 항을 구하라.

[문제 3] 수열 $2, 6, 18, 54, \cdots$ 에서 다음에 나올 두 항을 구하라.

수열에서 n 항

- 어떤 수열의 일반항이 $2n+1$일 때 (n은 자연수)

$2(1)+1,\ 2(2)+1,\ 2(3)+1,\ \cdots,\quad$ 즉 $3,\ 5,\ 7,\ \cdots$

→ 1, 3, 5, 7, ...의 n 번째 항 : $2n-1$

5번째 항 : $2(5)-1=9$

20번째 항 : $2(20)-1=39$

- 제 1항을 초항(first term)
- 마지막항을 말항(last term)

등차수열

- 등차수열
  - 수열이 연속적인 항들 사이에 일정한 차이(공차)를 가지는 경우
  - 등차수열의 예

❶ $1, 4, 7, 10, 13, \cdots$ 의 공차[common difference]는 3이다.

❷ $a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots$ 의 공차는 d이다.

등차수열의 *n*번째 항의 일반적인 표현

- 등차수열의 초항(첫 번째 항)이 *a* 이고 공차가 *d* 이면 n번째 항은 다음과같이 정의 된다.

$$n\text{번째 항} : a+(n-1)d$$

37.3.2 등차수열의 *n*번째 항까지 합

- 등차수열의 합 S
  - 모든 항들의 평균에 항의 개수를 곱하여 구함
  - 모든 항들의 평균 $\frac{a+l}{2}$ (a : 첫 번째 항, l : 마지막 항)
  - n번째 항 : $l = a + (n-1)d$
  - n번째 항까지의 합

$$S_n = n\left(\frac{a+l}{2}\right)$$

$$= \frac{n}{2}\{a + [a + (n-1)d]\}$$

즉, $$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

등비수열

- 등비수열
  - 첫 번째 항부터 차례로 일정한 상수를 곱하여 다음 항을 얻게 되는 수열
  - 등비수열의 예

❶ $1, 2, 4, 8, \cdots$ 에서 공비는 2이다.

❷ $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots$ 에서 공비는 r이다.

등비수열의 *n*번째 항의 일반적인 표현

- 등비수열의 첫 번째 항이 '*a*'이고 공비가 '*r*'이면 다음과 같다.

$$n\text{번째 항 : } ar^{n-1}$$

37.4.2 등비수열의 *n*번째 항까지 합

- 등비수열 : $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots,\ ar^{n-1}$

① *n*번째 항까지의 합 $S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$ (37.1)

② 양변에 *r*을 곱함 $rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$ (37.2)

③ ①-② *n*번째 항까지 합(*r*<1) :

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

➡ $$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

따라서 *n*번째 항까지 합(*r*>1) : $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

등비수열의 무한합

- 등비수열의 공비 r 이 1보다 작을 때, n번째 항까지의 합

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

$$n \to \infty \text{일 때}, \quad \frac{ar^n}{1-r} \to 0$$

$$n \to \infty \text{일 때}, \quad S_n \to \frac{a}{1-r}$$

무한합 S_∞

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$ ⇒ $-1 < r < 1$일 때 유효

- 등비수열의 합
  - 수열의 합에서 Σ 기호를 사용
  - $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$ = $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 로 표기한다 .
  - 수열의 합에 대한 공식

    $\sum_{k=1}^{n} c = nc,$ (단, c는 상수)

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

- ∑ 의 성질

∑의 기본 성질 (c는 상수)

- $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$
- $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$
- $\sum_{k=1}^{n} c = cn$

- 수열의 합을 여러 개의 수열의 합으로 나눠서 계산하는 것이 가능함.

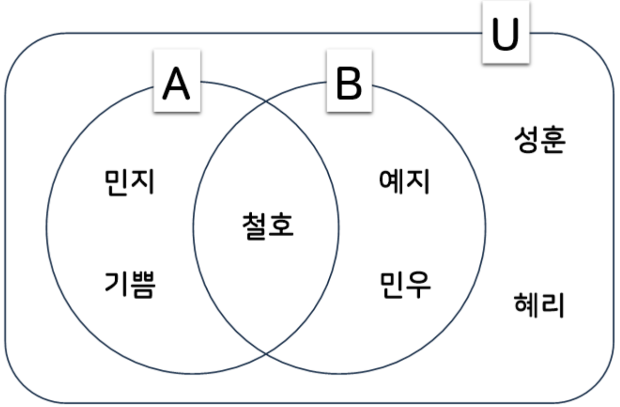
- 어떤 수열이 있고, 이 수열의 곱을 표기할 때
  - 수열 : $a_1, a_2, a_3, \dots\dots\dots.., a_{n-1}, a_n$
  - 수열의 곱 : $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{n-1} \times a_n$
  - 수열의 곱에 대한 표기 : $\prod_{k=1}^{n} a_k$

- 수열의 곱에 대한 특별한 공식은 없다.

집합과 원소

집합과 원소

- 집합
  - 어떤 조건을 만족하는 것들을 중복되지 않도록 하나하나 모아 놓은 것
  - 원소는 집합에 포함되는 하나하나를 일컫는다.
  - 집합은 중괄호 기호 { 와 } 로 각 원소를 감싸는 모양으로 표기한다.
    - {2, 4, 6, 8, 10}
    - {x : x에 대한 조건}
- 집합과 원소의 포함관계
  - 집합: $\subseteq, \subset, \equiv, \neq$
  - 원소: $\in, \notin$
  - $x \in$ A : 원소 x 는 집합 A 에 속한다.



집합 과 원소

합집합	$A \cup B$
교집합	$A \cap B$
여집합	A^c (A의 여집합)
차집합	$A - B$
전체집합	U
부분집합	$A \supset B$, $A \subset B$
진부분집합	$A \subset B$, $A \neq B$ (이 경우에 A를 B의 진부분집합)
서로같은집합	$A = B$

- 집합의 관계
- 상동: 두 집합이 완전히 일치할때 $A=B$
- 부분집합 : $B \subset A$
  - 집합 B 의 모든 원소가 집합 A의 원소임.
  - B는 A의 부분 집합이다.
- 공집합 : 원소가 하나도 없는 집합, $A = \phi$
- 교집합 :
  - 두 집합 A와 B에 모두 속하는 원소들을 모아 놓은 것
  - $A \cap B$
- 합집합 :
  - 두 집합 A, B 중 적어도 어느 한 곳에 속한 원소들을 모아 놓은 것
  - $A \cup B$