3.1 집합의 표현

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 집합
수학적 성질을 가지는 객체들의 모임

- 원소: 집합에 속한 개체
- $a \in S$: a는 집합 S의 원소
- $a \notin S$: a는 집합 S의 원소가 아님

참고 **집합을 표현하는 방법**
(1) 원소나열법
: 집합의 원소들을 하나씩 나열하는 방법
$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
(2) 조건 제시법
: 집합의 원소들이 가지고 있는 특정한 성질을 기술하여 나타내는 방법
$S = \{x \mid p(x)\}$

정의 카디날리티(Cardinality)
$|S|$: 집합 S의 서로 다른 원소들의 개수

정의 **유한집합, 무한집합**
(1) 유한집합 $\Leftrightarrow$ $|S|$: 유한개
(2) 무한집합: 유한집합이 아닌 집합

정리 $\exists$ 일대일 대응 $f : S_1 \to S_2$
$\Rightarrow$ $|S_1| = |S_2|$

정리 S_1, S_2: 유한집합, $S_1 \subset S_2$
$\Rightarrow$ $|S_1| \neq |S_2|$

정의 **가산적 집합(가산적으로 무한한 집합)**
정수 집합과 일대일 대응 관계에 있는 집합

예제

1. 다음과 같이 조건 제시법으로 나타내어진 집합을 원소나열법으로 표현해보자.
(1) $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 = 9\}$
(2) $\{y \mid y \in \mathbb{Z}, 3 < y < 7\}$
(3) $\{n \mid n \in \mathbb{Z}, 3 < |n| < 7\}$

2. 다음 집합을 조건 제시법으로 표현해보자.
(1) 0에서 1 사이에 있는 실수의 집합

(2) 20보다 작은 홀수의 집합

(3) $x^2 = x$를 만족시키는 정수의 집합

3. 다음 집합들이 유한집합인지 무한집합인지를 구별해보자.
(1) 대한민국에 사는 모든 공대 학생들의 집합

(2) 5의 배수인 자연수의 집합

4. 다음 집합에 대하여 각 집합의 원소 개수는 몇 개인가? 무한집합인 경우에는 ∞로 표시해보자.
(1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 2 < x < 5\}$

(2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, -1 \leq x \leq 1\}$

(3) $C = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n\text{은 짝수}\}$

5. 집합 $\{0, 1, 2\}$와 $\{a, b, c\}$는 같은 카디날리티를 가지고 있는지를 살펴보자.

6. 자연수의 집합이 가산적으로 무한함을 보이자.

정의 공집합

(1) 전체집합 U

: 집합론에 관심을 두는 모든 원소의 집합

(2) 공집합 $\varnothing$ 또는 $\{\ \}$

: 어떠한 원소도 가지지 않는 집합

참고 국제 기호

(1) $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$: 자연수 집합

(2) $\mathbb{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$: 정수 집합

(3) $\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\, p,\ q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0\right\}$: 유리수 집합

(4) $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$: 실수 집합

(5) $\mathbb{C}$: 복소수 집합

(6) $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$

: 1부터 n까지 자연수 집합

정의 부분집합

(1) $A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$

(2) 집합 A가 집합 B의 부분집합이 아니면

$A\not\subseteq B$

(3) 진부분집합 $A\subset B$

: $A\subseteq B$이고 $A\neq B$

$A\subset B \Leftrightarrow$

$\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge \exists x(x\in B\rightarrow x\notin A)$

정의 여집합

$A^c=\overline{A}=\{x\mid x\in U,\ x\notin A\}$

정리 집합관계

(1) $\varnothing\subseteq A\subseteq U$

(2) $A\subseteq A$

(3) $A\subseteq B\ \wedge\ B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$

(4) $A\subseteq B\ \wedge\ B\subseteq A \Leftrightarrow A=B$

(5) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$, $\varnothing\in\{\varnothing\}$

예제

7. $\{x\mid x^2-5=0,\ x\text{는 정수}\}$인 경우의 집합을 구해보자.

8. 집합 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, S_n 들을 유한집합과 무한집합으로 구분해보자.

9. 다음에 주어진 집합들의 의미를 살펴보자.

(1) $S=\{x\mid x^2=-2,\ x\in\mathbb{Z}\}$

(2) $T=\{x\mid x\in\mathbb{N},\ x\text{는 짝수 또는 } x\text{는 홀수}\}$

10. 집합 $S=\{1,2,3\}$의 부분집합과 진부분집합을 구해보자.

11. 앞에서 설명한 수학적 집합들의 포함 관계를 나타내어보자.

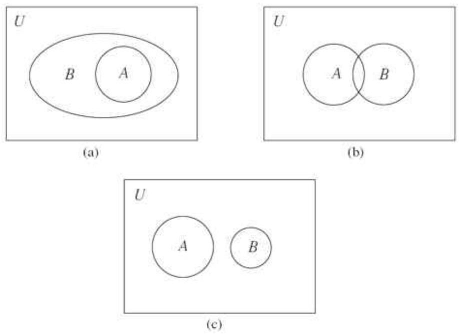
12. $U=\{1,2,3,4,5\}$가 전체집합으로 주어지고 그의 부분집합 A,B,C가 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,5\}$, $C=\{1,2,3,4,5\}$로 주어졌을 때 $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$를 구해보자.

3.2 집합의 연산

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 벤 다이어그램

주어진 집합들 사이의 관계와 집합연산에 대하여 이해하기 쉽도록 표현



정의 합집합

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

정의 교집합

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

정의 A, B : 서로소

$\Leftrightarrow$ $A \cap B = \varnothing$

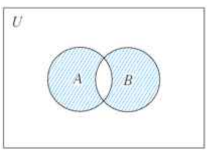
정의 차집합

$A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$

정의 대칭 차집합

$A \oplus B = \{x \mid x \in A \cup B \ \wedge \ x \notin A \cap B\}$

$\qquad = \{x \mid x \in ((A \cup B) - (A \cap B))\}$



정의 A와 B의 곱집합(카티시안 곱)

$\Leftrightarrow$ $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

참고 $S_i \, (i = 1, 2, \cdots, n)$의 카티시안 곱

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$$

$$= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in S_i\}$$

예제

13. 집합 $A = (1, 4]$와 $B = [3, 5)$에 대하여 교집합과 합집합을 각각 구해보자.

14. $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$일 때 $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$를 구해보자.

15. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$이고 $B = \{1, 3, 5\}$라고 하면 $A - B$와 $B - A$를 각각 구해보자.

16. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$이고 $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$일 때 $A \oplus B$를 구해보자.

17. $A = \{1, 2, 3\}$이고 $B = \{a, b, c\}$라 할 때 $A \times B$를 구해보자.

18. $S = \{1, 2, 3, 4\}$이고 $T = \{2, 4\}$일 때 다음 물음에 답해보자.

(1) $S \times T$에서 순서쌍의 개수는 몇 개인가?

(2) $\{(x, y) \mid (x, y) \in S \times T, x < y\}$의 원소를 나열하여라.

정리 집합연산의 카디날리티

(1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

(2) $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$

(3) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B|$
$\qquad - |A \cap C| - |B \cap B| + |A \cap B \cap C|$

(4) $|A - B| = |A \cap \overline{B}| = |A| - |A \cap B|$

(5) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

정리 집합의 대수법칙

관계	법칙의 이름
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	멱등 법칙 (idempotent law)
$A \cup \phi = A,\ A \cap \phi = \phi$ $A \cup U = U,\ A \cap U = A$	항등 법칙 (identity law)
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	교환 법칙 (commutative law)
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$	결합 법칙 (associative law)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	분배 법칙 (distributive law)
$(A \cap B) \cup A = A$ $(A \cup B) \cap A = A$	흡수 법칙 (absorption law)
$\overline{\overline{A}} = A$	보 법칙 (complement law)
$A \cup \overline{A} = U,\ A \cap \overline{A} = \phi$ $\overline{U} = \phi,\ \overline{\phi} = U$	역 법칙 (inverse law)
$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$	드 모르간의 법칙 (De Morgan's law)
$A - B = A \cap \overline{B}$ $A - A = \phi$ $A - \phi = A$	기타 법칙

정의 쌍대

집합에 관한 명제에서 그 명제 안에 있는 교집합과 합집합을 전체집합에 대한 여집합으로 바꾸어서 만든 새로운 명제

참고 드 모르간의 법칙 중 $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$를 증명해보자.

예제

19. 어느 공대에서 이산수학과 C언어 프로그래밍 중 적어도 한 과목을 수강하는 학생이 80명이다. 만약 이산수학을 수강하는 학생이 55명이고, C언어 프로그래밍을 수강하는 학생이 48명이라면, 이 경우 이산수학만 수강하는 학생 수는 몇 명인지를 알아보자.

20. 집합의 대수법칙을 이용하여 다음 식이 성립함을 보이자.

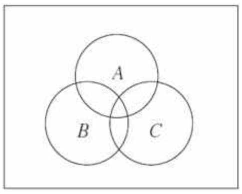
(1) $A \cap (A \cup B) = A$

(2) $(A \cup B) \cap (A \cup \varnothing) = A$

21. 드 모르간의 법칙 중 $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$를 벤 다이어그램을 사용하여 식이 성립함을 보이자.

22. 다음과 같은 집합관계가 성립함을 벤 다이어그램을 차례로 그려서 보이자.
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

23. 집합 A, B, C에 대한 벤 다이어그램이 아래 그림과 같을 때 다음의 연산을 각각의 벤 다이어그램으로 나타내어보자.



(1) $A\cap B\cap C$

(2) $A\cup B\cup C$

(3) $A-(B\cup C)$

(4) $\overline{A}\cap(B\cup C)$

3.3 집합류와 멱집합

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 집합족

집합을 원소로 갖는 집합

정의 멱집합

집합 S의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합

$P(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$

$|P(A)| = 2^{|S|}$

참고 집합류의 합집합과 교집합

(1) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

(2) $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

예제

24. $S = \{a, b, c\}$라고 할 때 S의 멱집합을 구해보자.

25. 집합 $A = \{a, b, \{a\}\}$라고 할 때 집합 A의 멱집합 $P(A)$를 구해보자.

26. 집합 $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_3 = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $A_4 = \{1, 2, 4, 6, 8\}$이라고 할 때 $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$와 $\bigcap_{i=1}^{4} A_i$를 구해보자.

3.4 집합의 분할

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 분할

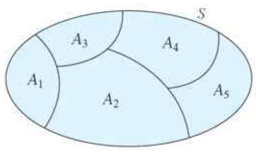
$S(\neq \varnothing)$: 집합

$\pi = \{A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots, A_k\}$: 분할

$\Leftrightarrow$ (1) $A_i \subseteq S \ (i = 1, 2, \cdots, k)$

(2) $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$

(3) $A_i \cap A_j = \varnothing \ (i \neq j)$



여기서 A_i: 블록

예제

27. 자연수의 집합 $\mathbb{N}$을 짝수와 홀수의 블록으로 분할하여라.

28. $A = \{1, 2, \cdots, 8\}$이고 $A_1 = \{1, 3\}$, $A_2 = \{2, 6, 4\}$, $A_3 = \{4\}$, $A_4 = \{5, 8\}$일 때 $\pi = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$가 A의 분할임을 보이자.

3.5 수의 표현과 진법의 변환

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 수의 표현과 진법

(1) 10진법

: 0~9까지의 수를 사용하며
10을 한 자리의 기본단위로 하는 진법

(2) 2진법

: 0과 1의 조합으로 숫자를 표시하는 진법

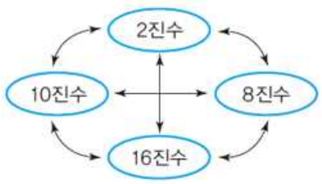
(3) 8진법

: 0~7까지의 수로 표시하는 진법

(4) 16진법

: 0~9까지 10개의 숫자와 A~F까지 6개의
영문자를 사용하여 수를 표시하는 진법

참고 진법 변환의 관계



참고 10진수, 2진수, 8진수, 16진수와의 관계

10진수	2진수	8진수	16진수
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14

예제

29. 8진수 $(156)_8$을 10진수로 바꾸어보자.

30. 2진수 $(11011)_2$과 16진수 $(3B)_{16}$을 각각 10진수로 바꾸어보자.

31. 10진수 27을 2진수로 변환해보자.

32. 10진수 1234를 8진수와 16진수로 각각 변환해보자.

33. 10진수 0.3125와 0.6875를 각각 2진수로 변환해보자.

34. 컴퓨터에서 많이 사용하는 수는 2진수, 8진수, 16진수이다. 2진수 $(00100101.101100)_2$을 10진수를 거치지 않고 직접 8진수, 16진수로 각각 변환해보자.

35. 2진수 $(101101)_2$을 16진수로 변환하고 $(FB2)_{16}$을 2진수로 변환해보자.

3.6 2진수의 덧셈과 뺄셈

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 2진수의 덧셈

두 수의 합이 2가 되면 한 자리가 올라간다.

8진수에서는 두 수의 합이 8이 되면
한 자리가 올라간다.

정의 보수

(1) (r-1)의 보수
: (r-1)의 값에서 수의 각 자리 숫자를 뺀다.

(2) r의 보수
: (r-1)의 보수를 구하여 가장 낮은 자리에 1을 더한다.

보기 $(123)_{10} \Rightarrow$ 9의 보수:
10의 보수:
$(1010)_2 \Rightarrow$ 1의 보수:
2의 보수:

참고 보수를 이용한 뺄셈

컴퓨터에서는 뺄셈이 없고 덧셈만 가능.
뺄셈의 경우에는 보수를 이용하여 덧셈으로 변환하여 결과를 얻는다.

예제

36. 10진수 $6+5$와 $2+3$을 이진법을 통해 더해보자.

37. 다음 이진수에서 1의 보수를 각각 구해보자.

(1) $(1101)_2$

(2) $(1001001)_2$

38. $(1101)_2-(0101)_2$과 $(1101)_2-(1110)_2$을 1의 보수에 의한 뺄셈 처리 과정으로 각각 구해보자.

39. $(1011)_2-(0110)_2$과 $(0110)_2-(1011)_2$을 1의 보수에 의한 뺄셈 처리 과정으로 각각 구해보자.

40. 다음을 구해보자.

(1) $(51)_{16}+(BE)_{16}$

(2) $(10111)_2-(11001)_2$