기존 예시 문제 풀이

1. **마르코프 부등식**: 어떤 웹사이트의 일일 방문자 수의 기대값이 500명이라고 한다. 마르코프 부등식을 이용하여, 일일 방문자 수가 1000명 이상일 확률의 상한을 구하시오.

   - **풀이**: 마르코프 부등식에 따라 $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$ 이므로, $P(X \geq 1000) \leq \frac{500}{1000} = 0.5$ 이다. 따라서 일일 방문자 수가 1000명 이상일 확률의 상한은 0.5이다.

2. **체비세프 부등식**: 어떤 학생의 시험 점수의 평균이 70점이고 표준편차가 10점이라고 한다. 체비세프 부등식을 이용하여, 이 학생의 시험 점수가 50점과 90점 사이에 있을 확률의 하한을 구하시오.

   - **풀이**: 체비세프 부등식에 따라 $P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$ 이다. 여기서 $\mu = 70, \sigma = 10$ 이다. 50점과 90점 사이를 벗어나는 경우는 $|X - 70| \geq 20$ 이므로, $P(|X - 70| \geq 20) \leq \frac{10^2}{20^2} = \frac{100}{400} = 0.25$ 이다. 따라서 50점과 90점 사이에 있을 확률은 $1 - P(|X - 70| \geq 20) \geq 1 - 0.25 = 0.75$ 이다. 즉, 확률의 하한은 0.75이다.

3. **중심 극한 정리**: 어떤 공장에서 생산되는 제품의 무게는 평균이 100g이고 표준편차가 5g인 정규 분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 제품 25개를 임의로 추출하여 무게를 측정했을 때, 표본 평균이 99g과 101g 사이에 있을 확률을 구하시오.

   - **풀이**: 중심 극한 정리에 따라 표본 평균 $\bar{X}$는 근사적으로 정규 분포 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$을 따른다. 여기서 $\mu = 100$, $\sigma = 5, n = 25$ 이므로, $\bar{X} \sim N(100, \frac{5^2}{25}) = N(100, 1)$ 이다. 따라서 $Z = \frac{\bar{X} - 100}{1}$ 은 표준 정규 분포 $N(0, 1)$을 따른다.
     $P(99 \leq \bar{X} \leq 101) = P(\frac{99 - 100}{1} \leq Z \leq \frac{101 - 100}{1}) = P(-1 \leq Z \leq 1)$ 이다. 표준 정규 분포표에서 $P(-1 \leq Z \leq 1) \approx 0.6827$ 이다. 따라서 표본 평균이 99g과 101g 사이에 있을 확률은 약 68.27%이다.

4. **가중 최소 제곱**: 다음 선형 방정식 $Ax = b$의 근사해를 가중 최소 제곱법으로 구하시오. 여기서 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$이다.

   - **풀이**: 가중 최소 제곱법에 따라 $\hat{x} = (A^T V^{-1} A)^{-1} A^T V^{-1} b$ 이다.
     $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 이므로,
     $A^T V^{-1} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 이다.
     $(A^T V^{-1} A)^{-1} = \frac{2}{3}$ 이다.
     $A^T V^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$ 이다.
     따라서 $\hat{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{3}$ 이다.

추가 예시 문제

5. **모멘트**: 확률 변수 X가 다음과 같은 확률 질량 함수를 가질 때, 1차 모멘트(평균)과 2차 중심 모멘트(분산)을 구하시오.
   $P(X = 0) = 0.2, P(X = 1) = 0.5, P(X = 2) = 0.3$

   - **풀이**:
     - 1차 모멘트 (평균): $E[X] = \sum xP(x) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.3 = 0 + 0.5 + 0.6 = 1.1$
     - 2차 모멘트 (0근방): $E[X^2] = \sum x^2 P(x) = 0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.3 = 0 + 0.5 + 1.2 = 1.7$
     - 2차 중심 모멘트 (분산): $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 1.7 - (1.1)^2 = 1.7 - 1.21 = 0.49$

6. **생성 함수**: X= n일 확률이 pn인 이산확률변수 X에 대해, 확률생성함수 Gz= σ0 ∞$pnzn$를 구하시오. 단, pn= (1/2)^n (n = 1,2,3,...)

- **풀이**:
  - $G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{z}{2})^n$
  - 이는 첫째 항이 $\frac{z}{2}$이고 공비가 $\frac{z}{2}$인 무한등비급수이므로, $|\frac{z}{2}| < 1$ 즉 $|z| < 2$일 때 수렴한다.
  - 따라서, $G(z) = \frac{\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}} = \frac{z}{2-z}$

7. **마르코프 연쇄**: 어떤 도시에서 대중교통을 이용하는 사람들의 비율이 매년 바뀐다고 가정한다. 현재 대중교통 이용률이 60%일 때, 다음 전이 확률 행렬을 사용하여 2년 후의 대중교통 이용률을 예측하시오.

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

(여기서 P_{ij}는 현재 상태 j에서 다음 상태 i로 변할 확률을 나타낸다. 1은 대중교통 이용, 0은 미이용)

- **풀이**:
  - 현재 상태 벡터: $y_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ (대중교통 이용 60%, 미이용 40%)
  - 1년 후 상태 벡터: $y_1 = Py_0 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.54 \\ 0.46 \end{bmatrix}$
  - 2년 후 상태 벡터: $y_2 = Py_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.54 \\ 0.46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.516 \\ 0.484 \end{bmatrix}$
  - 따라서 2년 후 대중교통 이용률은 51.6%로 예측된다.