# 2.1 논리와 명제

| 교과목명 | 이산수학 | 분반 | | 담당교수 | 김 외 현 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학부(과) | | 학번 | | 성명 | |

**정의** **명제 논리**
주어와 술어를 구분하지 않고 전체를 하나의 식으로 처리하여 참 또는 거짓을 판별하는 법칙을 다룸.

**정의** **술어 논리**
주어와 술어로 구분하여 참 또는 거짓에 관한 법칙을 다룸.

**정의** **명제**
어떤 사고를 나타내는 문장 중에서 참이나 거짓을 객관적이고 명확하게 구분할 수 있는 문장이나 수학적 식

**참고** **명제 구성**
명제 변수: $p$, $q$, $r$, $s$, $\cdots$
진리값: 명제가 가지는 참 또는 거짓 값
T: 항상 참인 명제
F: 항상 거짓인 명제

**예제**

1. 다음 문장이나 식에서 명제를 찾아보고, 명제인 경우 그것의 진리값을 판별해보자.
⑴ 바나나는 맛있다.
⑵ $3x+5y=7$
⑶ 28은 4의 배수이다.
⑷ 지금 어디로 가는 중입니까?

2. 다음 문장들은 모두 명제이다. 이 명제들의 참, 거짓을 판별해보자.
⑴ $6<4$
⑵ 유채꽃은 노란색이다.
⑶ $3\times7$의 값은 홀수이다.
④ 공기는 $H_2O$로 표현된다.

# 2.2 논리와 연산

| 교과목명 | 이산수학 | 분반 | | 담당교수 | 김 외 현 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학부(과) | | 학번 | | 성명 | |

**정의** 단순 명제
하나의 문장이나 식으로 구성되어있는 명제

**정의** 합성 명제
여러 개의 단순 명제들이 논리 연산자들로 연결되어 만들어진 명제

**정의** 논리 연산자
단순명제들은 연결시켜 주는 역할을 하는 연결자

| 연산자의 이름 | 기호 | 연산자의 의미 |
|---|---|---|
| 부정 | $\sim$ | NOT |
| 논리곱 | $\wedge$ | AND |
| 논리합 | $\vee$ | OR |
| 배타적 논리합 | $\oplus$ | Exclusive OR |
| 조건 | $\rightarrow$ | if … then |
| 쌍방 조건 | $\leftrightarrow$ | if and only if (iff) |

**참고** 합성 명제의 진리값
그 명제를 구성하는 단순 명제의 진리값과 논리 연산자의 특성에 따라 값이 정해짐.
진리표를 사용하여 편리하게 구할 수 있음.

**예제**
3. 다음 합성 명제를 단순 명제로 분리해보자.
(1) 오늘은 날씨가 맑거나 비가 내린다.

(2) 장미꽃은 빨갛고 개나리꽃은 노랗다.

**정의** 부정

| $p$ | $\sim p$ |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

**예제**
4. $p$가 명제일 때 진리표를 이용하여 $\sim(\sim p)$의 진리값이 $p$의 진리값과 같음을 보이자.

**정의** 논리곱

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

**예제**
5. 다음의 합성 명제를 단순 명제들로 분리하여 단순 명제의 진리값을 구하고, 진리표를 이용하여 논리곱으로 이루어진 합성 명제의 진리값을 구해보자.
(1) 서울은 대한민국의 수도이고, 런던은 영국의 수도이다.

(2) $3 > 2$이고, $3 \times 2 = 5$이다.

(3) 사과는 과일이고, 시금치는 채소이다.

**정의** 논리합

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

**예제**

6. 다음의 합성 명제를 단순 명제들로 분리하여 단순 명제의 진리값을 구하고, 진리표를 이용하여 논리합으로 이루어진 합성 명제의 진리값을 구해보자.

(1) 서울은 대한민국의 수도이거나, 런던은 영국의 수도이다.

(2) $3 > 2$ 또는 $3 \times 2 = 5$이다.

(3) 사과는 과일이거나, 시금치는 채소이다.

**정의** 배타적 논리합

| $p$ | $q$ | $p \oplus q$ |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

**정의** 조건(함축)

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

**참고** $p \quad \to \quad q$
(충분조건) (필요조건)

**예제**

7. 다음 명제에 대하여 함축의 진리값을 구해보자.

(1) 바다가 육지라면, 런던은 영국의 수도이다.

(2) $3 + 4 > 5$이면, $3 > 5$이다.

(3) 유채꽃이 빨갛다면, 바다가 육지이다.

**정의** 쌍방 조건

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

**참고** 쌍방 조건 $p \leftrightarrow q$의 표현법

- $p$ if and only if $q$
- $p$는 $q$의 필요충분조건이다.
- $p$이면 $q$이고 $q$이면 $p$이다.
- $p$ iff $q$

**참고** 논리 연산자의 우선순위

| 우선순위 | 논리 연산자 |
|---|---|
| 1 | $\sim$ |
| 2 | $\wedge$ |
| 3 | $\vee$ |
| 4 | $\to$ |
| 5 | $\leftrightarrow$ |

- $p \vee q \to r$는 $(p \vee q) \to r$이지, $p \vee (q \to r)$은 아님.

**참고** 명제변수가 $n$개 $\Rightarrow$ 진리표의 행은 개

예제

8. 합성 명제 $\sim(p\wedge\sim q)$의 진리값을 구해보자.

9. $p$, $q$, $r$이 명제일 때 다음의 합성 명제에 대한 진리표를 만들어보자.
$p\vee(q\wedge r)$

10. 명제 $p$를 '날씨가 춥다' 그리고 명제 $q$를 '비가 온다'라고 할 때 다음 각각의 명제들을 문장으로 표현해보자.
(1) $\sim p$

(2) $p\wedge q$

(3) $p\vee q$

(4) $p\vee\sim q$

11. 다음 합성 명제를 단순 명제들로 구분하고, 진리표를 이용하여 합성 명제의 진리값을 구해보자.
(1) $4+3=7$이고, $4\times 7=9$이다.

(2) 유채꽃이 노랗다면, 수요일 전날은 토요일이다.

정의 역, 이, 대우

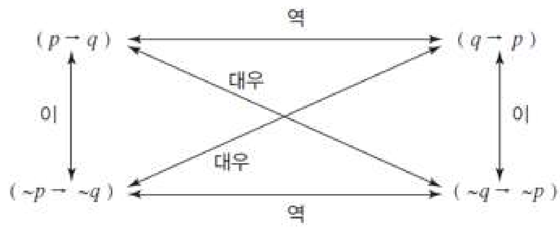
명제 $p\to q$에 대하여

(1) $q\to p$ : $p\to q$의 역

(2) $\sim p\to\sim q$ : $p\to q$의 이

(3) $\sim q\to\sim p$ : $p\to q$의 대우

참고 명제의 역, 이, 대우의 상호관계




참고 역, 이, 대우 간의 관계에 대한 진리표

| | | | | (명제) | (역) | (이) | (대 우) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p\to q$ | $q\to p$ | $\sim p\to\sim q$ | $\sim q\to\sim p$ |
| T | T | F | F | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F | T | T | F |
| F | T | T | F | T | F | F | T |
| F | F | T | T | T | T | T | T |

예제

12. 명제 $p\to q$: '날씨가 맑아지면 소풍을 간다'의 역, 이, 대우를 구해보자.

# 2.3 항진 명제와 모순 명제

| 교과목명 | 이산수학 | 분반 | | 담당교수 | 김 외 현 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학부(과) | | 학번 | | 성명 | |

정의 **항진 명제**

합성 명제에서 그 명제를 구성하는 단순 명제들의 진리값에 관계없이 항상 참(T)의 진리값을 가지는 합성 명제

정의 **모순 명제**

합성 명제에서 그 명제를 구성하는 단순 명제들의 진리값에 관계없이 항상 거짓(F)의 진리값을 가지는 합성 명제

예제

13. $p$가 단순 명제일 때 $p \vee (\sim p)$는 항진 명제이고, $p \wedge (\sim p)$는 모순 명제임을 보이자.

14. $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$가 모순 명제임을 보이자.

# 2.4 논리적 동치 관계

| 교과목명 | 이산수학 | 분반 | | 담당교수 | 김 외 현 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학부(과) | | 학번 | | 성명 | |

**정의** 논리적 동치

$p \equiv q$ (or $p \Leftrightarrow q$)

: 명제 $p, q$에 대하여 $p \leftrightarrow q$가 항진 명제

- 두 합성명제가 모든 경우에 동일한 진리값을 갖는 경우는 동치이다.

**정리** 논리적 동치 관계의 기본 법칙

| 논리적 동치 관계 | 법칙 이름 |
|---|---|
| $p \vee p \Leftrightarrow p$<br>$p \wedge p \Leftrightarrow p$ | 멱등 법칙<br>(idempotent law) |
| $p \vee \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$<br>$p \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow p$<br>$p \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow p$<br>$p \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$ | 항등 법칙<br>(identity law) |
| $\sim \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{F}$<br>$\sim \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{T}$<br>$p \vee (\sim p) \Leftrightarrow \mathrm{T}$<br>$p \wedge (\sim p) \Leftrightarrow \mathrm{F}$ | 부정 법칙<br>(negation law) |
| $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ | 이중 부정 법칙<br>(double negation law) |
| $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$<br>$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$<br>$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$ | 교환 법칙<br>(commutative law) |
| $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$<br>$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ | 결합 법칙<br>(associative law) |
| $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$<br>$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | 분배 법칙<br>(distributive law) |
| $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$<br>$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ | 흡수 법칙<br>(absorption law) |
| $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$<br>$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$ | 드 모르간 법칙<br>(De Morgan's law) |
| $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ | 조건 법칙 |
| $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$ | 대우 법칙 |

**참고** 논리적 동치 관계임을 입증하는 방법

(1) 두 명제에 대한 진리표를 구하고 두 명제의 진리값이 같음을 증명

(2) 하나의 명제로부터 논리적 동치 관계의 기본 법칙을 이용하여 다른 명제로 유도

**예제**

15. 다음의 두 명제가 동치 관계임을 확인해보자.

$p \rightarrow q \ \equiv \ \sim p \vee q$

16. 명제 $\sim(p \vee q)$와 $(\sim p) \wedge (\sim q)$이 논리적 동치임을 확인해보자.

17. 드모르간의 법칙을 이용하여 다음을 간단히 해보자.

(1) $\sim(p \wedge \sim q)$

(2) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

(3) $\sim(\sim p \vee q)$

18. 논리적 동치 관계의 기본 법칙들을 이용하여 $\sim(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p$ 임을 보이자.

19. 쌍방 조건 $p \leftrightarrow q$는 '$p$이면 $q$이고, $q$이면 $p$이다' 이므로, 이것을 $p$, $q$명제와 연산자로 표시하면 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$와 같다. 따라서 $p \leftrightarrow q$의 진리값과 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$의 진리값이 같음을 살펴보자.

# 2.5 추론

| 교과목명 | 이산수학 | 분반 | | 담당교수 | 김 외 현 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학부(과) | | 학번 | | 성명 | |

**정의** 추론

주어진 명제가 참인 것을 바탕으로 새로운 명제가 참이 되는 것을 유도해내는 방법

- 주어진 명제 $p_1, p_2, \cdots, p_n$: 전제
- 새로이 유도된 명제 $q$: 결론
- $p_1, p_2, \cdots, p_n \vdash q$

**정의** 유효 추론

주어진 전제가 참이고 결론도 참인 추론

**정의** 허위 추론

결론이 거짓인 추론

**정리** 여러 가지 추론 법칙

| 추론 법칙 | 법칙 이름 |
|---|---|
| $p$<br>$p \to q$<br>$\therefore q$ | 긍정 법칙<br>(modus ponens) |
| $\sim q$<br>$p \to q$<br>$\therefore \sim p$ | 부정 법칙<br>(modus tollens) |
| $p \to q$<br>$q \to r$<br>$\therefore p \to r$ | 조건 삼단 법칙<br>(hypothetical syllogism) |
| $p \vee q$<br>$\sim p$<br>$\therefore q$ | 선언 삼단 법칙<br>(disjunctive dilemma) |
| $(p \to q) \wedge (r \to s)$<br>$p \vee r$<br>$\therefore (q \vee s)$ | 양도 법칙<br>(constructive dilemma) |
| $(p \to q) \wedge (r \to s)$<br>$\sim q \vee \sim s$<br>$\therefore \sim p \vee \sim r$ | 파괴적 법칙<br>(destructive dilemma) |
| $p$<br>$\therefore p \vee q$ | 선접 법칙<br>(disjunctive addition) |
| $p \wedge q$<br>$\therefore p$ | 분리 법칙<br>(simplication) |
| $p$<br>$q$<br>$\therefore p \wedge q$ | 연접 법칙<br>(conjunction) |

**예제**

20. $p \to q,\ p \vdash q$ 추론식에 나타난 명제들의 예를 설명해보자.

21. 추론 $p \to q,\ q \vdash p$ 이 유효 추론인지 허위 추론인지를 결정해보자.

22. [긍정 법칙] $p, p \to q \vdash q$가 유효 추론임을 진리표를 이용하여 보이자.

23. [삼단 법칙] $p \to q, q \to r \vdash p \to r$ 이 유효 추론임을 진리표를 이용하여 보이자.

# 2.6 술어 논리

| 교과목명 | 이산수학 | 분반 | | 담당교수 | 김 외 현 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학부(과) | | 학번 | | 성명 | |

**정의** **명제 술어**
$p(x)$ : 변수 $x$의 값에 따라 참이 되고
거짓이 될 수 있는 명제

**정의** **술어 논리**
명제 술어 $p(x)$에 대한 논리

**정의** **술어 한정자**
술어를 나타내는 방법 중에서 변수의
범위를 한정시키는 것

**참고** **두 가지 가장 중요한 한정기호**
- 전체 한정기호, "For all" : $\forall$
- 존재 한정기호, "There exists" : $\exists$

**정의** **$p(x)$의 전체 한정자**
$\forall x \; p(x)$
모든 $x$에 대하여 $p(x)$는 참이다.

**정의** **$p(x)$의 존재 한정자**
$\exists x \; p(x)$
어떤 $x$에 대하여 $p(x)$가 참인 $x$가 적어도
한 개 존재한다.

**예제**

24. '$x$는 3보다 크다'는 술어임을 보이자.

25. $x$가 실수라 가정하고, '$x^2+1>0$'을 $p(x)$라고 했을 때 $p(x)$의 진리값이 거짓인 $x$의 값을 구해보자.

26. $x$가 정수라고 할 때, 다음 명제에 대해서 참과 거짓을 판별해보자.

(1) $\forall x \,[\, x < x+1 \,]$

(2) $\forall x \,[\, x = 3 \,]$

(3) $\forall x \,[\, x > x-3 \,]$

27. $x$가 정수이고 $p(x)$가 '$x = x^2$'이라고 할 때 다음 명제의 진리값을 구해보자.

(1) $\forall x \; p(x)$

(2) $\exists x \; p(x)$

28. 술어 한정자를 사용하여 다음과 같이 논리적 표기를 할 때, 그에 대한 명제를 서술해보자.

(1) $\exists x \; p(x, y)$

(2) $\sim (\forall x \; p(x))$

(3) $\exists y \, (\forall x \; p(x, y))$

**정의** $\forall x\ p(x)$의 부정

$\sim(\forall x\ p(x)) \iff \exists x(\sim p(x))$

**정의** $\exists x\ p(x)$의 부정

$\sim(\exists x\ p(x)) \iff \forall x(\sim p(x))$

예제

29. $x$는 '학생은'이고, $p(x)$는 '$x$는 공부한다'일 때 다음 문장의 부정을 서술하고, 그 부정을 논리적 기호로 표시해보자.

(1) 모든 학생은 공부한다.

(2) 공부를 하는 학생이 존재한다.

30. $x$는 '인간은'이고, $p(x)$는 '$x$는 생각한다'이며 $q(x)$는 '$x$는 동물이다'로 각각 나타낼 때 다음 문장들을 논리적 기호로 표현해보자.

(1) 생각하는 인간이 존재한다.

(2) 모든 인간은 생각하는 동물이다.

(3) 생각하지 않는 인간도 있다.