9.1 경우의 수

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 경우의 수
일어날 수 있는 모든 사건의 수

참고 경우의 수를 구하는 방법
(1) 트리를 이용하는 방법
(2) 표를 이용하는 방법

정리 경우의 수에서의 법칙
(1) 합의 법칙
$A \cap B = \varnothing$, $n(A) = m$, $n(B) = n$
$\Rightarrow$ A와 B 중 하나가 발생할 경우의 수
$n(A \cup B) = m + n$

(2) 곱의 법칙
$n(A) = m$, $n(B) = n$
$\Rightarrow$ A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수
$n(A \times B) = m \times n$

예제

1. 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던졌을 때 두 수의 합이 홀수가 나오는 경우의 수를 트리와 표를 이용하여 각각 구해보자.

2. A와 B 사이에 3개의 길이 있고 B와 C 사이에 2개의 길이 있다고 하자. 어떤 사람이 다음과 같이 길을 갈 수 있는 방법의 경우의 수는 몇 가지 인지 알아보자.
(1) A에서 B를 거쳐서 C로 가는 경우

(2) A에서 B를 거쳐서 C로 갔다가, 다시 B를 거쳐 A로 돌아오는 경우

3. 어떤 프로그래밍 언어에서 식별자 이름은 영어 알파벳 소문자 하나로 구성되거나, 영어 알파벳 소문자로 시작해서 두 번째와 세 번째 기호는 숫자 혹은 영어 알파벳 소문자가 될 수 있는 길이가 최대 3인 문자열로 구성된다. 이 언어에서 만들 수 있는 식별자 이름의 가짓수를 구해보자.

9.2 순열

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

참고 순열과 조합의 종류

중복 \ 순서	순서를 고려	순서를 고려하지 않음
중복을 허용	중복순열	중복조합
중복을 허용하지 않음	순열	조합

정의 n계승

$n! = 1\times 2\times \cdots \times (n-1)\times n$

정의 순열

서로 다른 n개 중에서 r개를 선택하여
순서대로 나열하는 방법의 수

$${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$
$$= \frac{n!}{(n-r)!}, \quad r=0,1,\cdots,n$$

정의 중복순열

서로 다른 n개 중에서 r개를 선택하여
중복을 허용하고 순서대로 나열하는 방법의 수

$${}_n\Pi_r = n^r$$

예제

4. 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4로 만들 수 있는 세 자리 정수와 서로 다른 세 개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 정수의 개수를 각각 구해보자.

5. a, b, c, d, e라는 5개의 문자 중에서 서로 다른 3개의 문자를 나타낼 수 있는 경우의 수를 계산해보자.

6. 15개의 역이 있는 철도 회사에서 출발역과 도착역을 적은 기차표를 몇 가지 마련해야 하는지 살펴보자.

7. 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 숫자 3개를 선택하여 세 자릿수를 만든다고 할 때, 다음을 구하라.

(1) 일의 자리가 0인 수의 개수

(2) 일의 자리가 2인 수의 개수

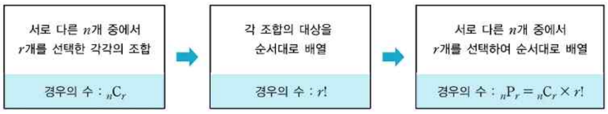
9.3 조합

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 조합

서로 다른 n개 중에서 r개를 선택하여 순서 없이 나열하는 방법의 수

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$



정의 중복조합

서로 다른 n개 중에서 r개를 선택하여 중복을 허용하고 순서없이 나열하는 방법의 수

$${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

정리 이항정리

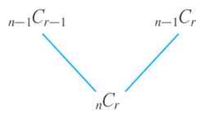
$n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0\, a^n + {}_n\mathrm{C}_1\, a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\, ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\, b$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\, a^{n-r} b^r$$

정리 파스칼 항등식

$${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_r \quad (r = 1, 2, \cdots, n-1)$$



예제

8. 남자 5명과 여자 4명이 있을 때, 이 중에서 남자 3명, 여자 2명을 뽑는 경우의 수는 몇 가지가 있는지 살펴보자.

9. 주머니에 크기가 서로 다른 3개의 빨간 공과 4개의 흰 공이 들어 있을 때, 다음을 구해보자.

(1) 이 주머니에서 3개의 공을 뽑는 경우의 수

(2) 빨간 공 2개와 흰 공 3개를 뽑는 경우의 수

10. $(x-y)^{10}$을 전개했을 때, x^3y^7의 계수를 구해보자.

11. $(2x-y)^5$을 전개했을 때, x^2y^3의 계수를 구해보자.

9.4 이산적 확률과 통계

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 **수학적 확률**

(1) 확률 $P(A)$

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것

(2) 수학적 확률

표본공간 S에 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때,

$$\Rightarrow \quad P(A) = \frac{(\text{사건 } A\text{의 원소의 개수})}{(\text{표본공간 } S\text{의 원소의 개수})}$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)}$$

: 사건 A가 일어날 수학적 확률

참고 **대수법칙**

어떤 사건이 일어날 통계적 확률은 시행을 반복할수록 수학적 확률에 가까워진다.

정의 **통계적 확률**

r_n : 동일한 시행을 n번 반복하여 사건 A가 일어난 횟수

시행 횟수 $n \to \infty$일 때 상대도수 $\dfrac{r_n}{n} \to p$

$\Leftrightarrow$ $P(A) = p$: 사건 A의 통계적 확률

참고 현실적으로 시행 횟수를 n을 한없이 크게 할 수 없으므로 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\dfrac{r_n}{n}$을 통계적 확률로 사용

정리 **확률의 기본 성질**

표본공간 S의 임의의 사건 A에 대하여

(1) $0 \le P(A) \le 1$

(2) $P(S) = 1$

(3) $P(\varnothing) = 0$

(4) $P(A^c) = 1 - P(A)$

예제

12. 동전을 던져서 앞면이 나올 확률이 50%이더라도 동전을 10번 던질 때 앞면이 반드시 5번 나오는 것은 아님을 알아보기 위해 컴퓨터를 이용하여 동전 던지기 모의실험을 실시하였다.

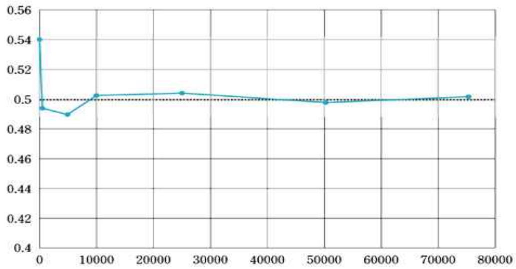
시행 횟수(n)	50	500	5000	10000	25000	50000	75000
앞면의 수(r_n)	27	247	2451	5025	12621	24922	37666
앞면의 상대도수(p_n)	0.54	0.494	0.4902	0.5025	0.5048	0.4984	0.5022

이때 n : 동전을 던진 시행 횟수

r_n : 앞면이 나온 횟수

$p_n = \dfrac{r_n}{n}$: 앞면이 나온 상대도수

그러면 그림과 같이 시행 횟수 n이 커질수록 앞면이 나온 상대도수 p_n은 (   )에 가까워 진다.



정리 **확률의 덧셈정리**

(1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(2) A, B: 서로 배반사건

$\Rightarrow$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

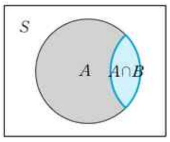
예제

13. 주사위 2개를 동시에 던져서 나온 수의 합이 3 또는 4가 될 확률을 구해보자.

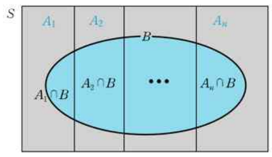
정의 **조건부 확률**

$P(A)>0$인 어떤 사건 A가 주어졌다고 할 때 사건 B가 나타날 확률

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$



참고 A_i: 표본공간 S의 분할



$$P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_1)+\cdots+P(B\cap A_n)$$

정리 **전확률 공식**

$P(A_i)\neq 0$, $i=1,2,\cdots,n$

A_i: 표본공간 S의 분할

$$\Rightarrow\ P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A)P(B|A_i)$$

정리 **베이즈 정리**

$A_1, A_2, \cdots, A_n$: 표본공간 S의 분할

$P(B)>0$인 어떤 사건 B가 발생했을 때 사건 A_i의 조건부 확률

$$\Rightarrow\ P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)}$$

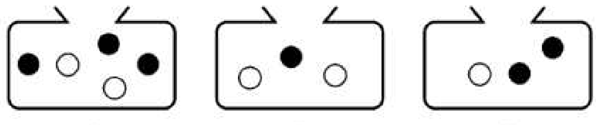
이때 $P(A_i)$: 사전확률

$P(A_i|B)$: 사후확률

예제

14. 어떤 학급의 학생이 남학생일 확률은 $P(A)=0.54$이고, 안경 쓸 확률은 $P(B)=0.81$일 때, 안경 쓴 남학생일 확률은 $P(A\cap B)=0.18$이다. 남학생일 경우에 안경 쓸 확률과 안경 쓴 학생인 경우에 남학생일 확률을 구해보자.

15. 다음 그림과 같은 세 개의 상자 A, B, C에 각각 흰 공과 검은 공이 들어있다. 이때 다음과 같은 방법으로 세 상자 중 어느 하나를 선택하여 임의로 공을 꺼냈을 때, 그 공이 흰색일 확률을 구하라.



(1) 각 상자를 선택할 기회가 동등한 경우

(2) 동전을 세 번 던졌을 때 동일한 면이 나오면 A, 앞면이 두 번 나오면 B, 앞면이 한 번 나오면 C를 선택하는 경우

16. 예제15의 각 보기에 대해 임의로 꺼낸 공이 흰 공이었을 때, 이 공이 주머니 A에 나왔을 확률을 구하라.

(1)

(2)

정의 확률변수

S: 표본공간

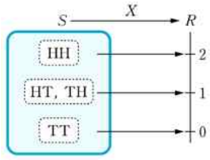
X: $S \to \mathbb{R}$

(S 안의 원소에 실수를 대응시키는 함수)

$\Leftrightarrow$ X: 확률변수

참고 확률변수의 의미

X: 동전을 두 번 던지는 실험에서 앞면이 나온 횟수



정의 상태공간

X: 확률변수

$\Rightarrow$ S_X: X가 취할 수 있는 값들의 집합

정의 이산확률변수

X: 확률변수

$n(S_X)$ = (유한개)

$\Rightarrow$ X: 이산확률변수

정의 확률분포

확률변수 X가 취할 수 있는 개개의 값에 확률을 대응시킨 것

정의 기댓값

X: 이산확률변수

$P(X = x_i) = p_i$: 확률

$\Rightarrow$ $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$: X의 기댓값(평균)

정리 기댓값의 성질

(1) $E(a) = a$

(2) $E(aX) = aE(X)$

(3) $E(aX+b) = aE(X)+b$

정의 분산

확률변수 X의 평균 $\mu = E(X)$에 대해 평균편차의 제곱 $(X-\mu)^2$에 대한 기댓값

$$\Rightarrow \sigma^2 = Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = E(X^2) - E(X)^2$$

정의 표준편차

분산의 양의 제곱근

$\Rightarrow$ $SD(X) = \sqrt{Var(X)} = \sigma$

정리 분산의 성질

(1) $Var(a) = 0$

(2) $Var(aX) = a^2 Var(X)$

(3) $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

예제

17. 확률변수 X의 확률분포가 다음과 같을 때, X의 기댓값과 분산, 표준편차를 각각 구하여라.

X	1	2	3	4	합계
$P(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	1

18. 주사위를 하나 던질 때 나오는 숫자를 확률변수 X라고 할 때 X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 구해보자.

9.5 비둘기 집 원리

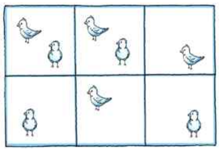
교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정리 **비둘기 집 원리**

비둘기 집: n개

비둘기: $(n+1)$마리 이상

$\Rightarrow$ 두 마리 이상의 비둘기가 들어간 비둘기 집이 적어도 하나 존재



참고 **바구니와 사과를 통한 비둘기 집 원리**

예제

19. 0점에서 100점까지 1점 단위로 채점되는 기말시험에서 적어도 2명의 학생이 같은 점수가 되는 것을 보장하기 위해서는 몇 명의 학생이 있어야 하는지 구해보자.

20. 이산수학 과목에서 A, B, C, D, F의 다섯 가지 학점이 있을 때 적어도 6명이 같은 학점을 받도록 하기 위해서는 최소한 몇 명이 있어야 하는지 구해보자.

21. m개의 정수 $a_1, a_2, \cdots, a_m$이 주어져 있다. 이 중 연속된 항의 합은 m의 배수가 됨을 보이자.

9.6 재귀적 정의

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 재귀적 정의

(첫 번째 요소) = 정의

($n+1$번째 요소)

= (n번째와 그 이하 요소와의 관계로 정의)

참고 재귀적 정의의 예

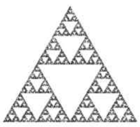
$$n! = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, 1 \\ n * (n-1)! & \text{otherwise} \end{cases}$$

정리 재귀적 관계를 이용하는 문제를 해결

- 주어진 문제를 원래의 문제와 같은 형태의 더 작은 문제들로 분할함
- 가장 작은 문제로 분할된 문제들의 해를 구한 후, 최종적으로 이들을 결합하여 주어진 문제의 해를 구함

참고 재귀적 관계의 예

(1) 프랙탈



(2) 물리학에서의 동역학계와 카오스를 비롯한 지능 시스템 분야

예제

22\. f가 다음과 같이 재귀적으로 정의되었다고 할 때, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 구해보자.

$f(0) = 1$

$f(n+1) = 2f(n) + 1$

23\. 다음과 같은 $F(n) = n!$의 재귀적 정의에 따라 $n!$의 값을 $n = 5$까지 구해보자.

$F(0) = 1$

$F(n+1) = (n+1)F(n)$

9.7 피보나치 수와 하노이 탑

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 피보나치 수

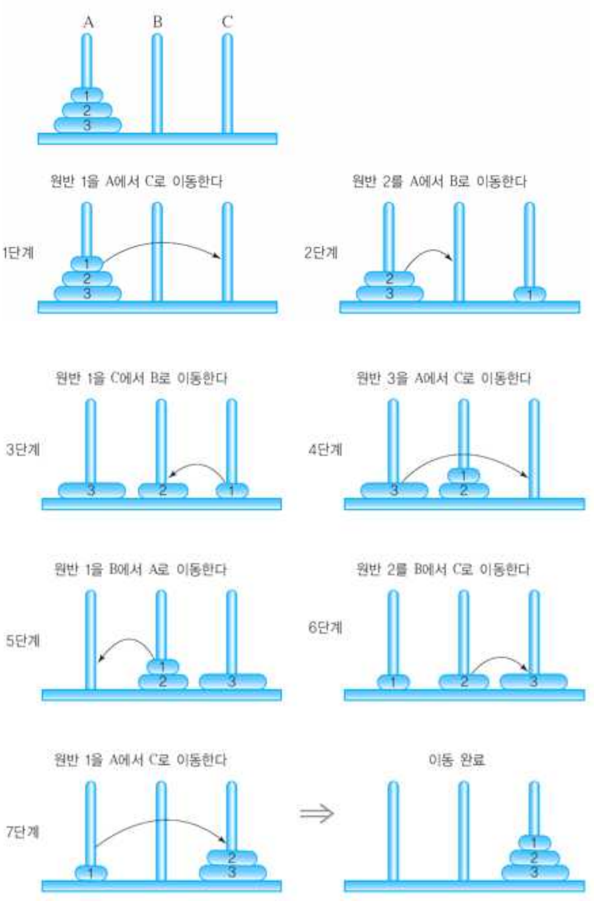
(1) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$

(2) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 2)$

정의 하노이 탑

- 하노이 탑 문제는 각기 다른 크기의 원반들과 판 위에 세워진 세 개의 막대로 구성됨
- 이 원반들은 처음에 바닥에 가장 큰 원반이 있는 크기순으로 놓임
- 하노이 탑 문제의 규칙은 원반들이 한 막대에서 다른 막대로 한 번에 하나씩 이동할 수 있으며 작은 원반 위에 큰 것이 놓일 수 없도록 하는 것임
- 중간의 막대를 임시적으로 이용할 수 있으나 위의 규칙들을 지켜야 함

참고 3개의 원반을 가진 하노이 탑의 이동



예제

24. 피보나치의 토끼 번식 문제를 생각해보자. 한 쌍의 토끼가 있다. 암컷 토끼는 두 달이 지날 때부터 매달 한 쌍의 토끼를 낳는다고 한다. 또 새로 태어난 암컷 토끼도 두 달이 지난 후부터 매달 한 쌍의 토끼를 낳는다고 할 때, 1년이 지난 후 전체 토끼 쌍의 수를 구해보자. 단, 모든 토끼는 계속 살아 있다고 가정한다.

25. 동판 위 다이아몬드 막대에 64개의 황금 원판이 꽂혀있다. 황금 원판을 옮기는 규칙이 하노이 탑 문제와 같을 때, 원판을 모두 다른 막대로 옮기는데 필요한 이동 횟수를 구해보자.