인공지능수학

(선형대수학)

개 요

벡터, 행렬

특징
노름, 거리, 차원, 내적, 행렬식

연산
벡터합, 스칼라곱, 행렬합, 행렬곱

특수형태
영행렬, 음행렬, 단위행렬, 역행렬, 대각행렬, 전치행렬 등

선형문제
- 선형결합
- 기본행변환
- 가우스-조르단 소거법

알고리즘
- LU분해
- QR분해
- 최소제곱법
- 그람-슈미트 방법

행렬의 특성값
- 고윳값&고유벡터
- 특잇값
  - 특잇값분해 (SVD)

벡터공간

■ 벡터공간(Vector space)

➲ 벡터를 포함하고 있는 집합이 다음 조건들을 모두 만족하는 경우, 이 집합을 벡터공간이라 한다.

- 벡터합 : $x, y \in X \Rightarrow x + y \in X$
- 스칼라곱 : $\alpha \in \Re,\ x \in X \ \Rightarrow \ \alpha x \in X$

스칼라(Scalar)

■ 생성(Span)

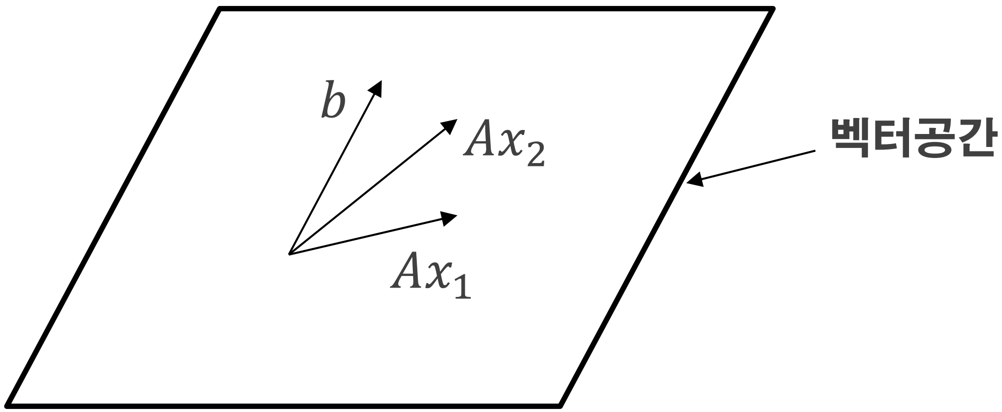
➲ 벡터합과 스칼라곱을 이용하여 주어진 벡터들로 벡터공간을 만드는 것.

선형결합 = 벡터합과 스칼라곱을 이용한 벡터결합

일반적인 선형방정식 문제

다음 방정식의 해는 무엇인가?

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

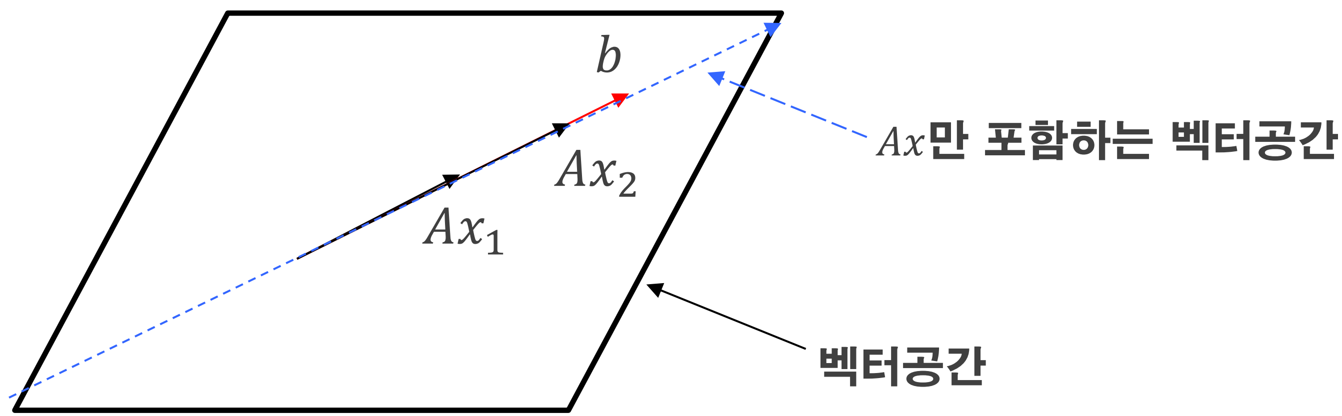


방정식의 해는 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

일반적인 선형방정식 문제

다음 방정식의 해는 무엇인가?

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



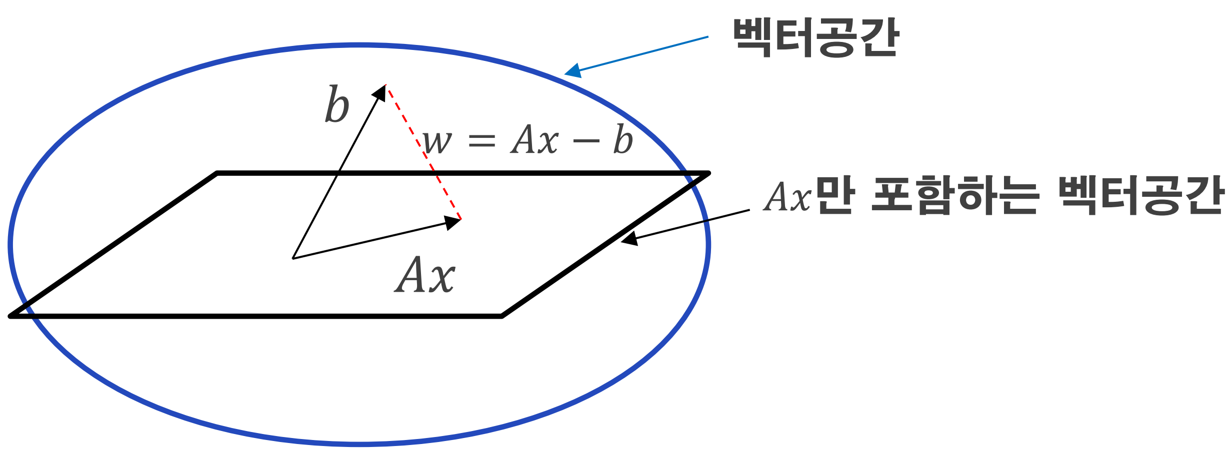
방정식의 해는 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 - 2\alpha \end{pmatrix}$

해가 무수히 많다(부정)

일반적인 선형방정식 문제

다음 방정식의 해는 무엇인가?

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



해가 존재하지 않는다(불능)

일반적인 선형방정식 문제

선형방정식 문제의 분류

해가 존재하는 경우

유일하게 해가 존재함

해가 무수히 존재함

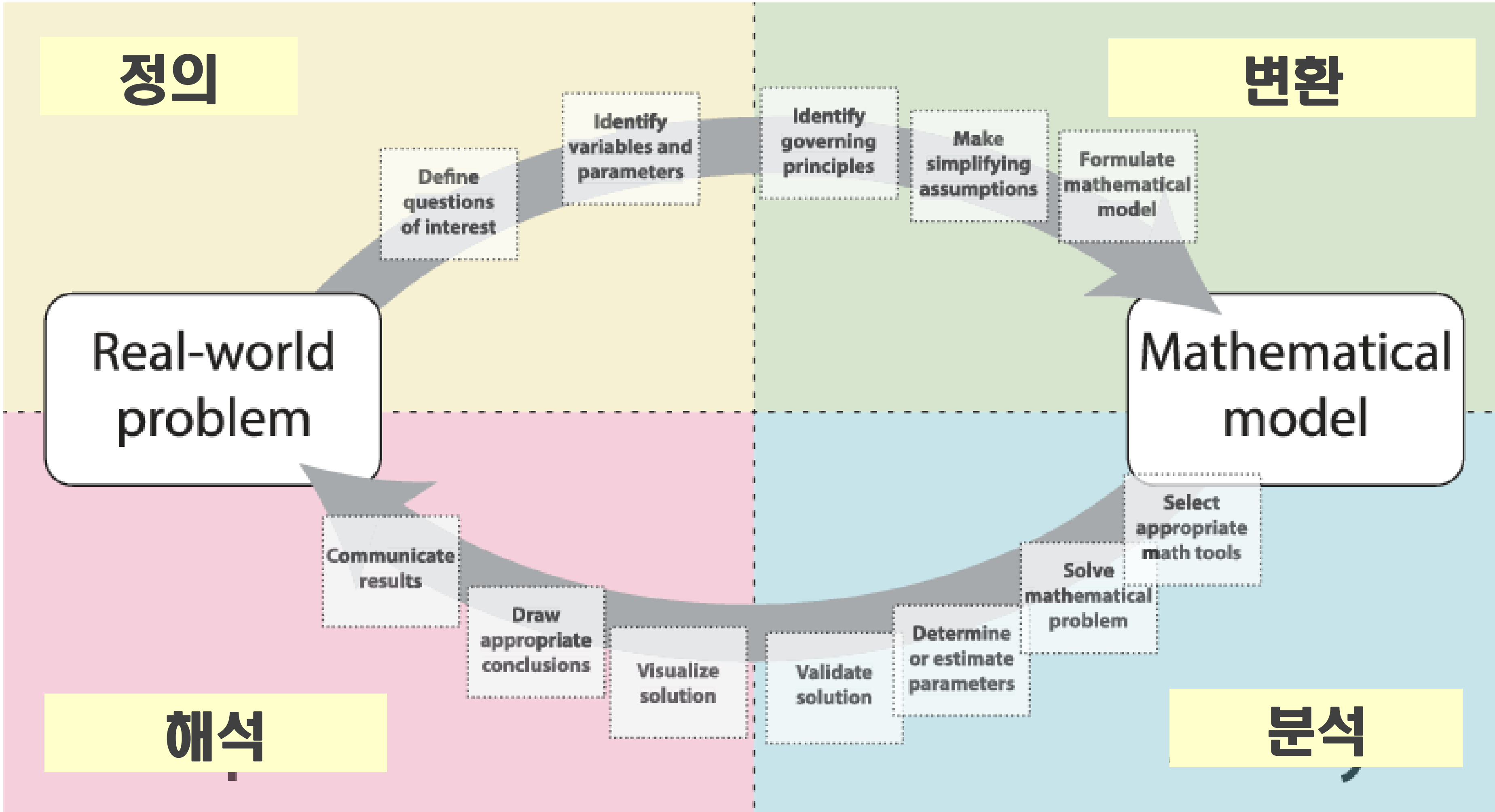
LU분해

해가
존재하지 않는 경우

불능

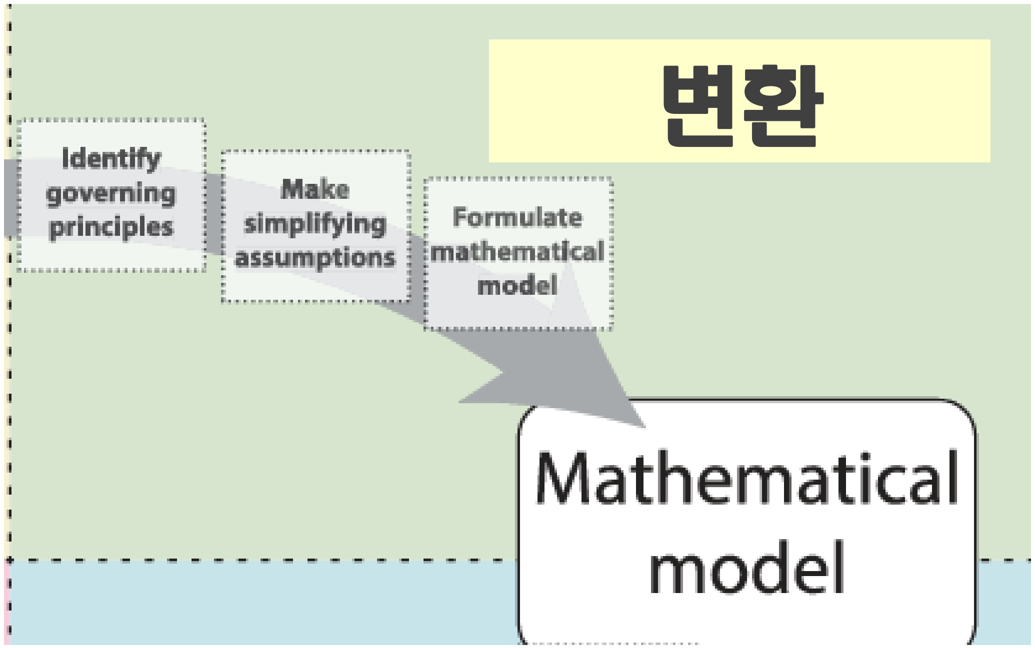
회귀문제!

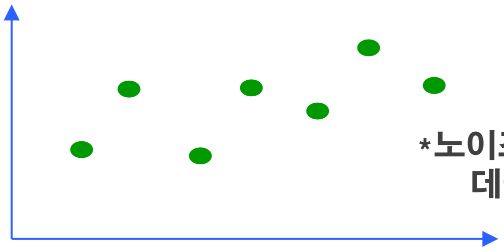
수학적 모델링



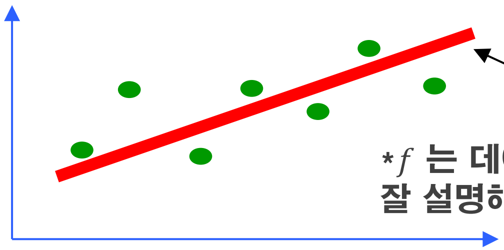
정의
변환
해석
분석
Real-world problem
Mathematical model
Define questions of interest
Identify variables and parameters
Identify governing principles
Make simplifying assumptions
Formulate mathematical model
Select appropriate math tools
Solve mathematical problem
Determine or estimate parameters
Validate solution
Visualize solution
Draw appropriate conclusions
Communicate results

수학적 모델링





Making simplifying assumptions



Formulate mathematical model

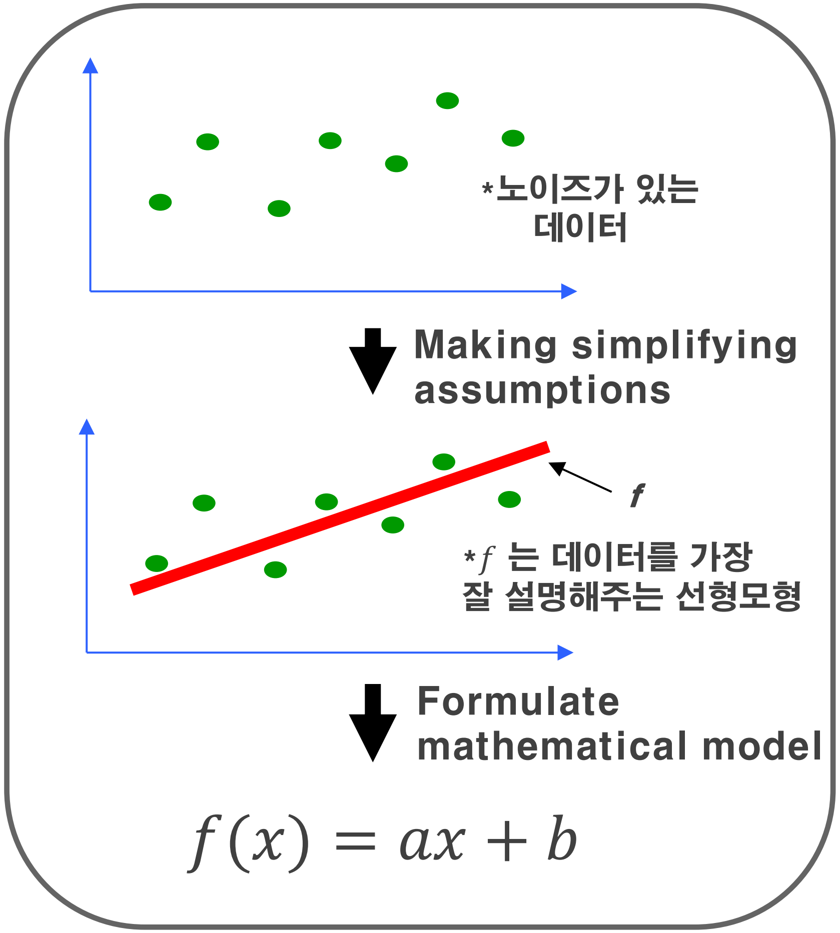
$$f(x) = ax + b$$

회귀(Regression)

회귀(Regression)

- 일반적으로 우리가 수집한 데이터에는 노이즈가 포함되어 있기 때문에 정확한 모형을 구할수 없다. 하지만 이러한 데이터를 가지고 분석을 하고자 한다.

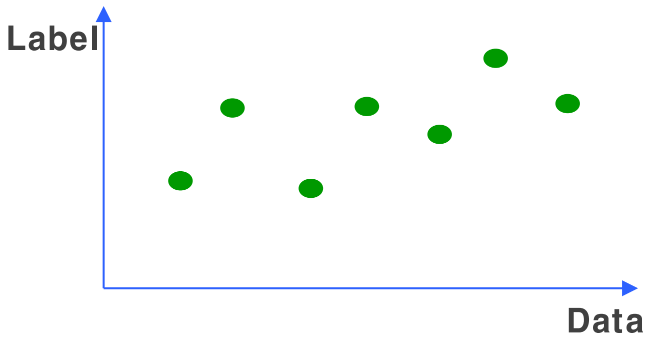
- Regression은 노이즈가 포함된 데이터의 분석을 위해 데이터들의 근사모형을 찾아내는 방법이다.



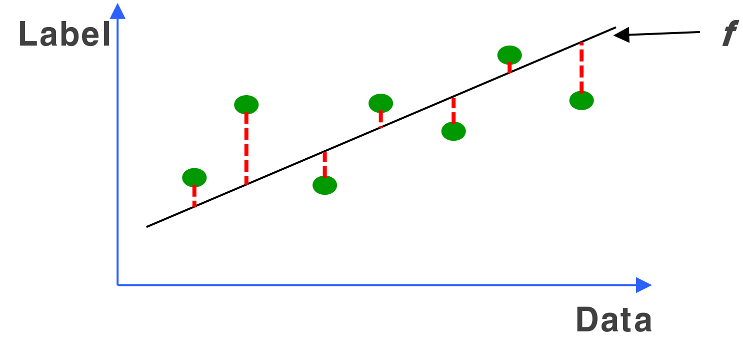
회귀(Regression)

빨간 선만큼의 차이들의 합 = Error

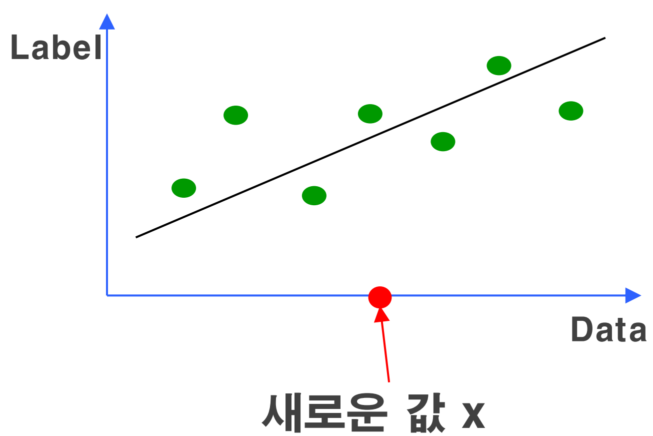
1) 초기화



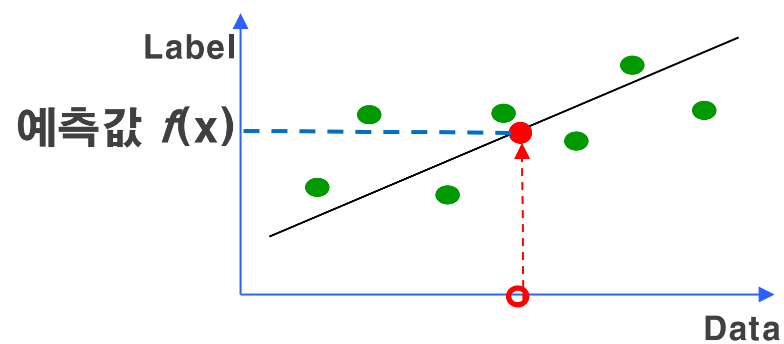
2) *가장 작은* error를 갖는 *f* 찾기



3) 새로운 값 입력



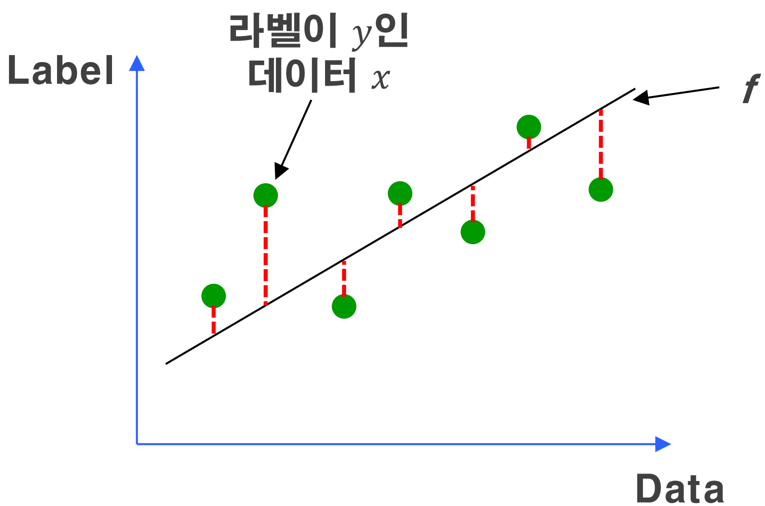
4) 값을 예측하기 위해 *f(x)* 적용



선형회귀(Linear Regression)

Linear Regression

- *가장 작은* error를 갖는 선형함수 f 찾기



최소제곱오차

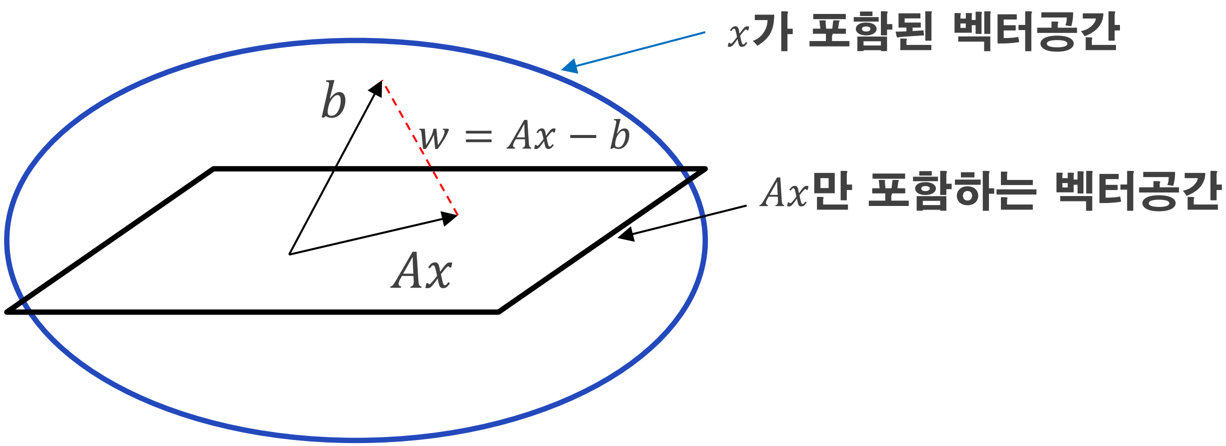
$$f = min\,(\sum_i |y_i - f(x_i)|^2)$$

어떻게해야 f 를 찾을 수 있을까?

해가 없는 선형방정식 문제

다음 방정식을 다시 생각해보자.

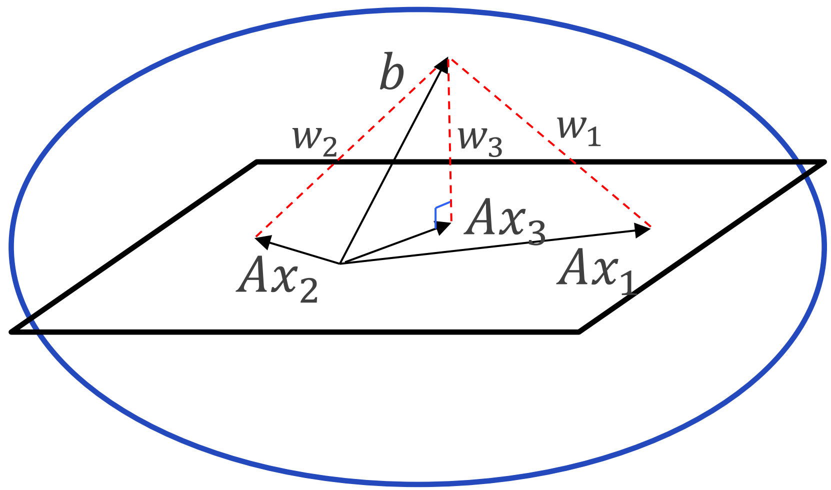
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



1) 해가 없는 선형방정식 $Ax = b$의 오차를 $w = Ax - b$로 둘 수 있다.
2) 오차 w의 크기는 노름 $||w||$로 구할 수 있다.

해가 없는 선형방정식 문제

오차 w가 최소가 되는 x는 무엇인가?



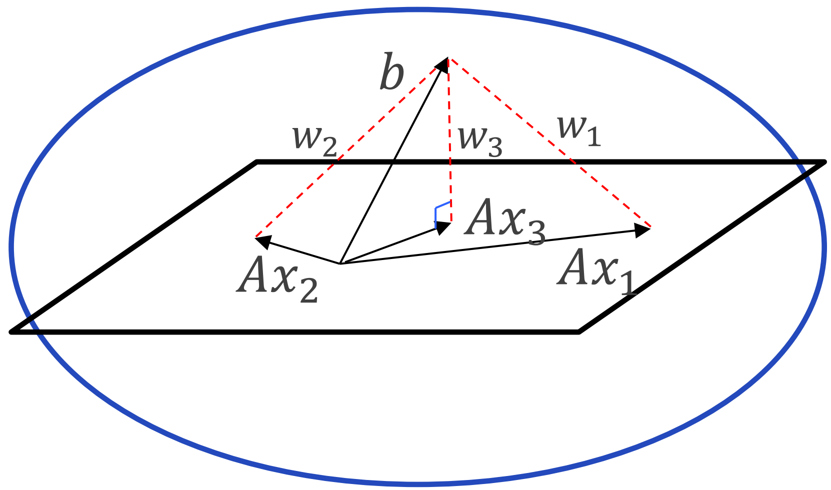
$||Ax-b||$를 **최소화하는** x **를 찾아야한다.**

위의 조건을 만족하는 x를 구하려면 어떻게 해야할까?

힌트 1. $||Ax-b||$는 항상 0보다 크기때문에 극솟값이 존재한다.
힌트 2. 극솟값 또는 극댓값에서는 미분계수가 0이다.

해가 없는 선형방정식 문제

오차 w가 최소가 되는 x는 무엇인가?



$||Ax - b||$를 **최소화하는** x **를 찾아야한다.**

방정식 $\frac{\partial(||Ax-b||)}{\partial x} = 0$를 만족하는 해 x를 구하는 문제

벡터의 미분?

벡터의 미분

■ 벡터 미분

$\dfrac{\partial y}{\partial \mathbf{x}}$	함수 y를 벡터 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$로 미분한 값은 다음과 같다. $$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$
$\dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}$	벡터함수 $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$를 스칼라 x로 미분한 값은 다음과 같다. $$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x} \end{pmatrix}$$

벡터의 미분

■ 벡터 미분

$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$	**벡터함수** $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$**를 벡터** $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$**로 미분한 값.** $$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

벡터의 미분

■ 벡터 미분

두 벡터 x, y의 내적 $x \cdot y$를 x로 미분하면?

$$x \cdot y = x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial x \cdot y}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x \cdot y}{\partial x_1} & \frac{\partial x \cdot y}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial x \cdot y}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{y}_1 & \mathrm{y}_2 & \cdots & \mathrm{y}_\mathrm{n} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{y}^\mathrm{T}$$

벡터의 미분

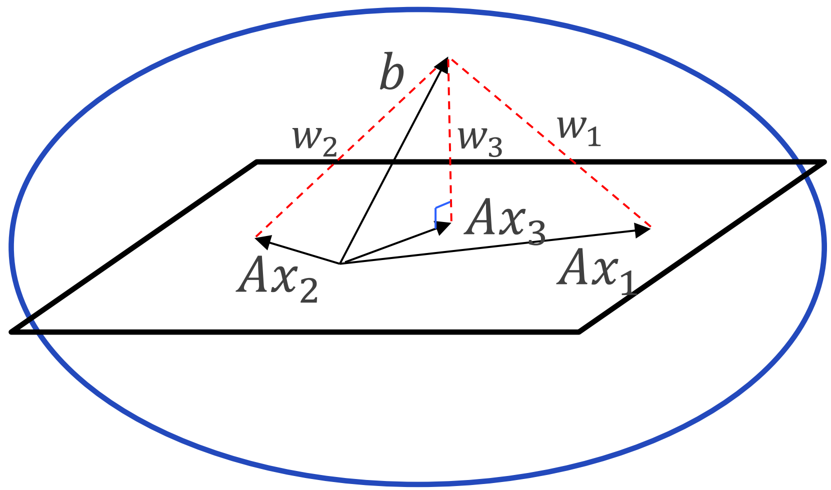
■ 벡터 미분

벡터미분 간단정리

식	x에 대한 미분
$x \cdot y = x^T y$	y^{T}
$\mathrm{y} \cdot \mathrm{x} = y^T x$	y^{T}
Ax	A
$x^T A = (A^T x)^T$	A^{T}
$\lVert x \rVert^2 = x \cdot x$	$2x^{\mathrm{T}}$

해가 없는 선형방정식 문제 : 최소제곱법

오차 w가 최소가 되는 x는 무엇인가?



$||Ax - b||$를 **최소화하는** x **를 찾아야한다.**

방정식 $\frac{\partial(||Ax-b||)}{\partial x} = 0$를 만족하는 해 x를 구하는 문제

해가 없는 선형방정식 문제 : 최소제곱법

방정식 $\frac{\partial(||Ax-b||)}{\partial x} = 0$를 만족하는 해 x

Solve) $(Ax-b)^T(Ax-b) = (x^TA^T - b^T)(Ax-b)$ ※ $||x|| = \sqrt{x^Tx}$

$$= x^TA^TAx - x^TA^Tb - b^TAx + b^Tb$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(x^TA^TAx - x^TA^Tb - b^TAx + b^Tb)}{\partial x} = 2x^TA^TA - 2b^TA = 0$$

$$\Rightarrow 2A^TAx = 2A^Tb$$

$$\Rightarrow x = (A^TA)^{-1}A^Tb$$

의사 역행렬
(Pseudoinverse matrix)

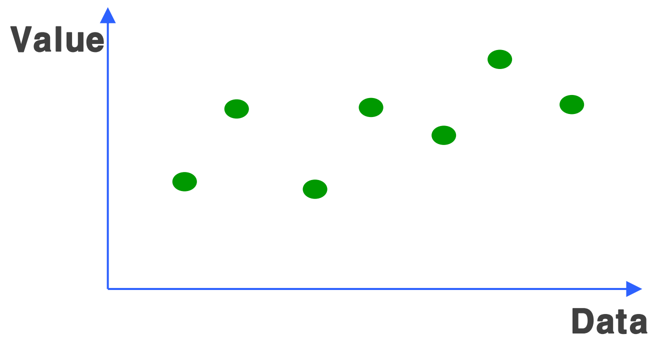
$$x = \boxed{(A^TA)^{-1}A^T}b$$

최소제곱해

선형회귀 : 최소제곱법

최소제곱법

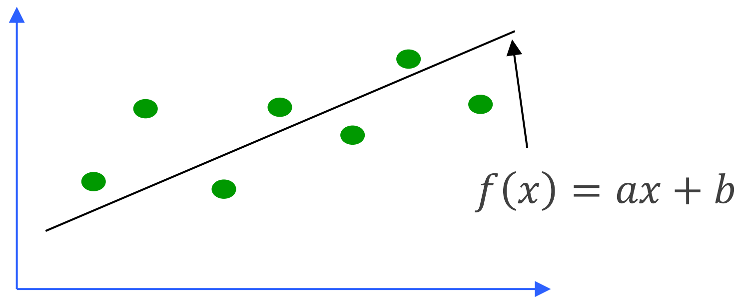
Input



데이터셋 : (d_1, v_1), (d_2, v_2), $\cdots$, (d_n, v_n)

데이터 : $d_1, d_2, \cdots, d_n$
라벨 : $v_1, v_2, \cdots, v_n$

Output

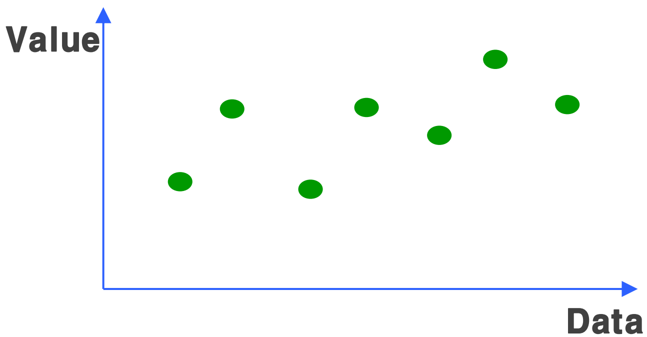


선형모델 f : $\begin{cases} ad_1 + b \approx v_1 \\ ad_2 + b \approx v_2 \\ \vdots \\ ad_n + b \approx v_n \end{cases}$

선형회귀 : 최소제곱법

최소제곱법

Input



데이터셋 : (d_1, v_1), (d_2, v_2), $\cdots$, (d_n, v_n)

데이터 : $d_1, d_2, \cdots, d_n$
라벨 : $v_1, v_2, \cdots, v_n$

Method

1) $A = \begin{pmatrix} d_1 & 1 \\ d_2 & 1 \\ \vdots & \\ d_n & 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

2) 다음을 계산함

$$w = (A^T A)^{-1} A^T v$$

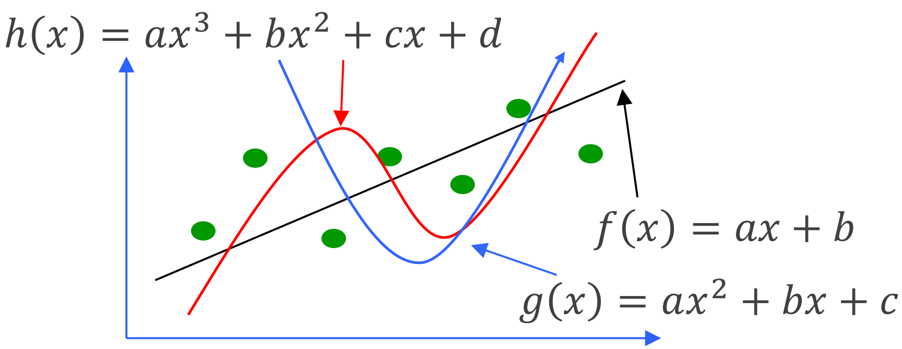
3) $w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$를 이용하여

다음 선형함수 $f(x) = ax + b$ 생성

선형회귀 : 최소제곱법

최소제곱법 : 3차 이상의 선형방정식의 경우

Extension



고차함수 g : $\begin{cases} ad_1^2 + bd_1 + c \approx v_1 \\ ad_2^2 + bd_2 + c \approx v_2 \\ \vdots \\ ad_n^2 + bd_n + c \approx v_n \end{cases}$

h : $\begin{cases} ad_1^3 + bd_1^2 + cd_1 + d \approx v_1 \\ ad_2^3 + bd_2^2 + cd_2 + d \approx v_2 \\ \vdots \\ ad_n^3 + bd_n^2 + cd_n + d \approx v_n \end{cases}$

Method

1) $A = \begin{pmatrix} d_1^2 & d_1 & 1 \\ d_2^2 & d_2 & 1 \\ & \vdots & \\ d_n^2 & d_n & 1 \end{pmatrix} \; v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

2) 다음을 계산함

$w = (A^T A)^{-1} A^T v$,

w^T =(a, b, c)

3) w**를 이용하여**

2차 함수 $g(x) = ax^2 + bx + c$ **생성**

w이 n차 벡터이기때문에
n차 함수를 항상 만들 수 있다.

선형회귀 : 최소제곱법

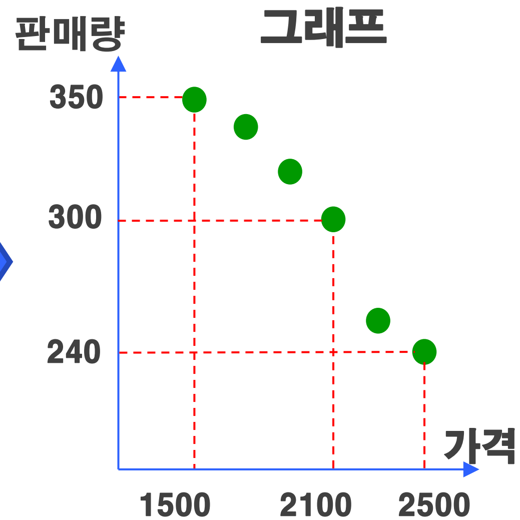
최소제곱법

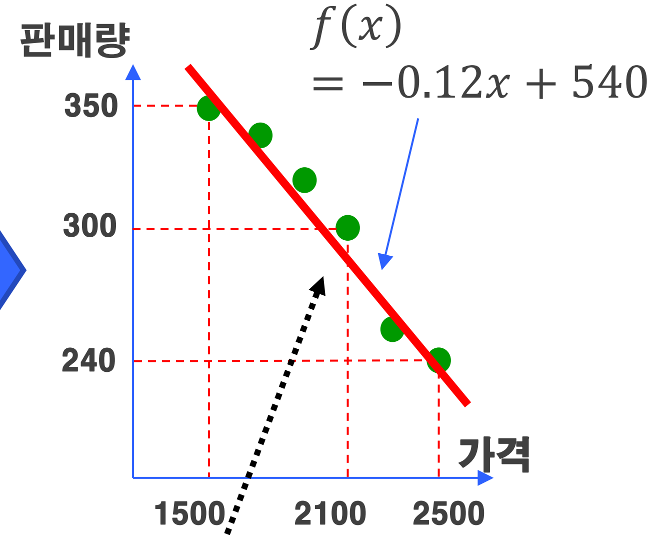
예시.

데이터

가격	판매량
1500	350
1700	340
1900	320
2100	300
2300	250
2500	240

그래프





A와 v 생성

$$w = (A^T A)^{-1} A^T v = \begin{pmatrix} -0.12 \\ 540 \end{pmatrix}$$

행렬 A의 기본 공간 (Fundamental Spaces)

주어진 $m \quad n$ 행렬 A에 대해

행공간 (row space) row(A) = span(A의 행벡터) ; R^n 의 부분공간

열공간 (column space) col(A) = span(A의 열벡터) ; **R^m 의 부분공간**

영공간(null space) null(A) = { $x \in R^n$ | $Ax=0$ } ; **R^n 의 부분공간**

row(A) = col(A^T), row(A^T) = col(A)

따라서 행렬 A의 기본공간은 row(A), col(A), null(A), null(A^T) 4 개

해가 없는 선형방정식

Ax 와 w 가 서로 수직일때, x 는 무엇인가?
(힌트. a 와 b 가 직교(orthogonal) 한다면 , $a \cdot b = 0$)

풀이과정) 어떤 x에 대해, $(Ax) \cdot w = 0$

$$\Rightarrow A^T w = A^T(Ax - b) = \mathbf{0}$$ (*아래의 특징에 의해)

$$\Rightarrow A^T Ax = A^T b$$

$$\Rightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

(*특징 : $(Ax) \cdot w = 0 \Leftrightarrow A^T w = \mathbf{0}$)

** 추가설명 :
w가 A의 직교여공간에 있으면, w는 A^T의 영공간에 있다.

해결되지 않은 선형방정식

Ax 와 w 가 직교 할 때, x 는 무엇인가?

(힌트. a 와 b 가 직교할 때, $a \cdot b = 0$)

풀이과정) 어떤 x 에 대해 , $(Ax) \cdot w = 0$

$\Rightarrow A^T w = A^T(Ax - b) = \mathbf{0}$ (*by the property)

$\Rightarrow A^T Ax = A^T b$

$\Rightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$

(*Property : $(Ax) \cdot w = 0 \Leftrightarrow A^T w = \mathbf{0}$)

** 추가설명 : w가 A의 직교여공간에 있으면, w는 A^T의 영공간에 있다.

해결되지 않은 선형 연립방정식 $Ax = b$

Ax 와 $w = Ax - b$ 가 직교 할 때 , x 는 무엇인가?
(힌트. a 와 b 가 직교 할 때 , $a \cdot b = 0$)

풀이과정) 어떤 x 에 대해 , $(Ax) \cdot w = 0$

$\Rightarrow A^T w = A^T(Ax - b) = \mathbf{0}$ (*by the property)

$\Rightarrow A^T Ax = A^T b$

$\Rightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$

(*특징 : $(Ax) \cdot w = 0 \Leftrightarrow A^T w = \mathbf{0}$)

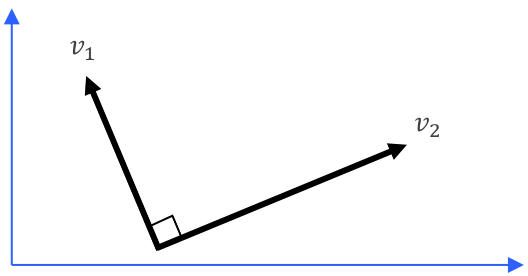
의사 역행렬
(Pseudoinverse matrix)

$x = \boxed{(A^T A)^{-1} A^T} b$

최소제곱법 $Ax = b$

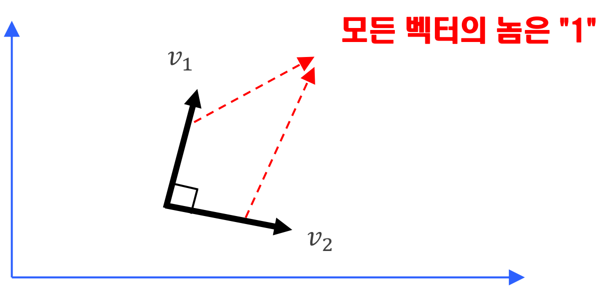
직교성

서로 수직



v_1 와 v_2 가 서로 수직, $v_1 \cdot v_2 = 0$

서로 수직



v_1 와 v_2 가 서로 수직

$$v_1 \cdot v_2 = 0,$$
$$|v_1| = 1,$$
$$|v_2| = 1$$

직교성

직교벡터

$v_1, v_2, \cdots, v_n$ 가 서로 직교한다면,

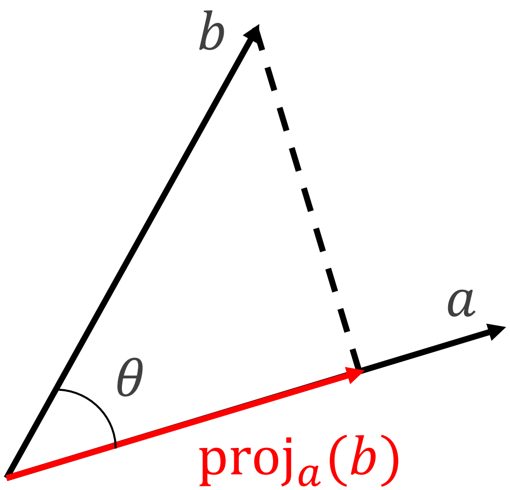
1) 모든 $i\ and\ j$ 에 대해 , $\boldsymbol{v_i \cdot v_j = 0}$
2) 모든 i 에 대해 , $|\boldsymbol{v_i}| = \mathbf{1}$

직교행렬

$v_1, v_2, \cdots, v_n$ 이 서로 직교하는 벡터이고,
$A = [v_1\ v_2 \cdots v_n]$ 이 행렬임,

A : 직교행렬

투영



투영된 $\mathrm{proj}_a(b)$의 norm $= |b|\cos\theta$

※ $|a||b|\cos\theta = a \cdot b$

$\Rightarrow |\mathrm{proj}_a(b)| = |b|\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|}$

따라서,

$$\boldsymbol{proj_a(b)} = (|b|\cos\theta)\frac{a}{|a|} = \frac{a \cdot b}{|a|^2}a$$

그람-슈미트 방법(Gram-Schmidt process)

입력 : 행렬

$$A = [v_1 \; v_2 \cdots v_n]$$

출력 : 직교행렬

$$Q = [\boldsymbol{u}_1 \; \boldsymbol{u}_2 \cdots \boldsymbol{u}_n]$$

직교벡터 찾는 방법

$$\boldsymbol{u}_1 = v_1$$
$$\boldsymbol{u}_2 = v_2 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_2)$$
$$\boldsymbol{u}_3 = v_3 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_3) - \mathrm{proj}_{u_2}(v_3)$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{u}_n = v_n - \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{proj}_{u_i}(v_n)$$

QR분해

QR 분해가 왜 필요한가? (두가지 이유)

1. 선형회귀를 정확하게 계산

2. 다음에 배울 고유값을 구하기 위한 필요한 핵심 분해 기법.

3. 고유값과 고유값을 구하는 방법은 이후에 소개할 것이다.

정 리

벡터, 행렬

특징	연산	특수형태
노름, 거리, 차원, 내적, 행렬식	벡터합, 스칼라곱, 행렬합, 행렬곱	영행렬, 음행렬, 단위행렬, 역행렬, 대각행렬, 전치행렬 등

선형문제

- 선형결합
- 기본행변환
- 가우스-조르단 소거법

알고리즘

- LU분해
- QR분해
- 최소제곱법
- 그람-슈미트 방법

행렬의 특성값

- 고윳값&고유벡터
- 특잇값
  - 특잇값분해 (SVD)

Q & A