6.1 함수의 정의

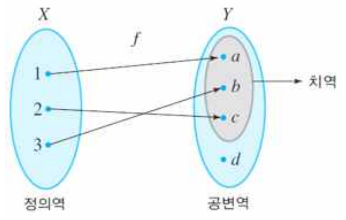
교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 함수 $f : X \to Y$

$\forall x \in X$가 Y에 있는 원소 중 오직 하나씩만 대응되는 관계

X: 정의역, Y: 공역(공변역),

$\mathrm{Ran}(f) = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$: 치역



참고 같은 함수

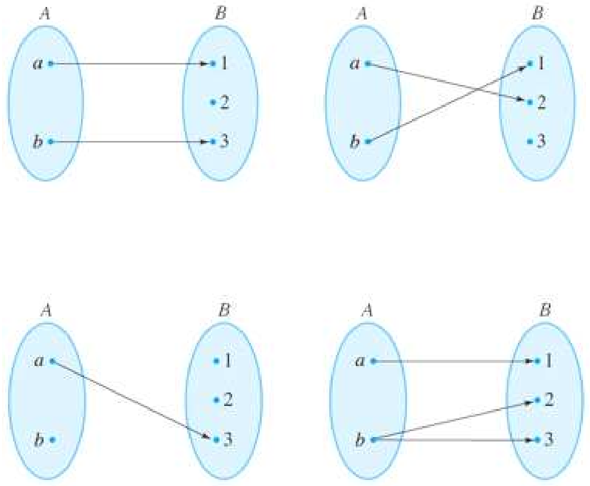
$f = g$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$이고

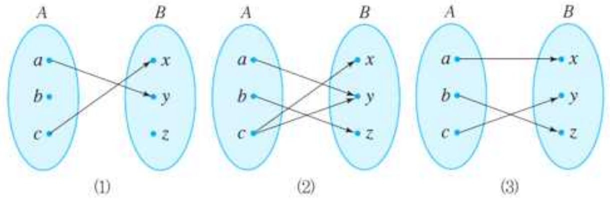
$\forall x \in$ 정의역, $f(x) = g(x)$

예제

1. $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$이라고 할 때, A에서 B로의 함수가 되는 경우와 함수가 될 수 없는 경우를 살펴보자.



2. 다음과 같이 주어진 각 화살표 도표가 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z\}$로의 함수가 되는지를 판별해보자.



3. A를 인터넷 온라인상의 사진 동호회 회원들의 집합이라고 할 때, 다음의 대응이 A에 관한 함수가 되는지를 알아보자.

(1) 각 회원에 그 사람의 나이를 대응시킨다.

(2) 각 회원에 그 사람의 성별을 대응시킨다.

(3) 각 회원에 그 사람의 배우자를 대응시킨다.

4. 다음의 관계가 함수인지의 여부를 밝히고, 만약 함수인 경우 정의역, 공변역, 치역을 각각 구해보자.

(1) $\{(1, a), (1, b), (2, c), (3, b)\}$

(2) $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

(3) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, y - x = 1\}$

(4) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, y - x = 1\}$

5. $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$에 대한 관계가 $\{(x, y) \mid x \in A, y \in B, y = x + 3\}$일 때 이 관계가 함수인지를 판별하고, A의 원소들에 대한 함수값을 구해보자.

6. $A = \{-1, 0, 1\}$에서 $f : A \to A$가 $f(x) = x^2$으로 주어졌을 때 함수가 되는지를 판별하고, 정의역과 치역 그리고 공변역을 구해보자.

6.2 함수 그래프

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 함수 그래프

$f : X \to Y$

$\Rightarrow \; G = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, y = f(x)\}$

: f에 대한 함수 그래프

예제

7. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 일 때 다음과 같은 함수 그래프를 순서쌍의 집합으로 표시하고, 좌표 평면상에 나타내어보자.

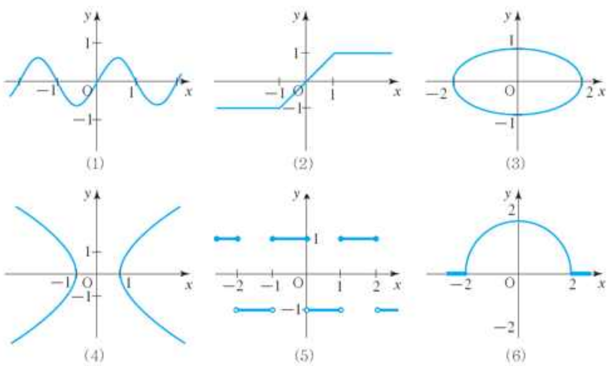
(1) $y = x + 2$

(2) $y = x^2$

(3) $y = |x|$

(4) $y = 2^x$

8. 다음의 그래프들이 실수 $\mathbb{R}$에서 $\mathbb{R}$로의 함수가 되는가를 판별해보자.



6.3 단사함수, 전사함수, 전단사함수

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 **단사함수, 전사함수, 전단사함수**

$f : X \to Y$

(1) 단사함수 (일대일함수)

$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

(2) 전사함수 (위로의 함수)

$f(X) = Y$ 즉, 치역 = 공역

(3) 전단사함수 (일대일대응)

f: 단사함수이고 전사함수

참고 **함수의 특성**

$f : X \to Y$

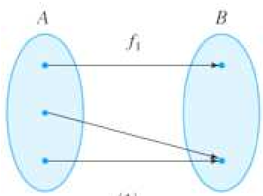
(1) f: 단사함수 $\Rightarrow$ $|X| \leq |Y|$

(2) f: 전사함수 $\Rightarrow$ $|X| \geq |Y|$

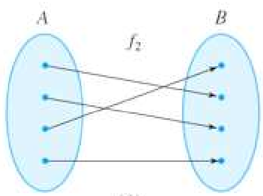
(3) f: 전단사함수 $\Rightarrow$ $|X| = |Y|$

예제

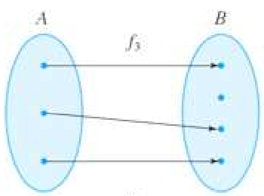
9. 함수 f_1, f_2, f_3가 다음과 같이 주어졌을 때, 이 함수가 단사함수, 전사함수, 전단사함수인지를 판별해보자.



(1)



(2)



(3)

10. 대한민국 국적을 가진 사람과 자신의 주민등록번호와의 관계를 살펴보자.

11. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$일 때, $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4)\}$, $g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3)\}$라고 하면 A에서 B로의 함수 f와 g는 각각 단사함수가 되는지 살펴보자.

12. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$이고, f_1, f_2, f_3가 다음과 같을 때, 각 함수들이 전사함수가 되는지 판별해보자.

(1) $f_1 = \{(1, z), (2, y), (3, x), (4, y)\}$

(2) $f_2 = \{(1, x), (2, x), (3, y), (4, z)\}$

(3) $f_3 = \{(1, x), (2, x), (3, y), (4, y)\}$

13. 다음 함수식들이 실수 $\mathbb{R}$에서 $\mathbb{R}$로의 함수일 때, 이 함수가 단사, 전사, 전단사 함수인지를 판별해 보자.

(1) $f_1(x) = \sin x$

(2) $f_2(x) = x^2$

(3) $f_3(x) = 2^x$

(4) $f_4(x) = x^3 + 2x^2$

14. 다음의 각 경우에 함수 f가 단사함수, 전사함수, 전단사함수인지를 판별해보자.

(1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$

(2) $f : \{1, 2\} \to \{0\}$

(3) $f : \{a, b\} \to \{2, 4, 6\}$, $f(a) = 2$, $f(b) = 6$

(4) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 1$

6.4 여러 가지 함수들

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 f와 g의 합성함수

$f: X \to Y,\ g: Y \to Z$

$\Rightarrow g \circ f: X \to Y,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$

정리 결합법칙

$f: X \to Y,\ g: Y \to Z,\ h: Z \to W$

$\Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

정의 항등함수

$I_X: X \to X$

$\forall x \in X,\ I_X(x) = x$

정의 $f: X \to Y$의 역함수

$\forall x \in X,\ \forall y \in Y,\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

를 만족하는 $f^{-1}: Y \to X$

$\Rightarrow f^{-1} \circ f = I_X,\ f \circ f^{-1} = I_Y$

정리 함수 $f: X \to Y$의 역함수 존재

$\Leftrightarrow f$: 전단사함수

정의 상수함수

$f: X \to Y$

$\forall x \in X,\ \exists c \in Y,\ f(x) = c$

정의 특성함수

$A \subseteq U,\ f_A: U \to \{0, 1\}$

$$\Rightarrow f_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

정의 올림함수와 내림함수

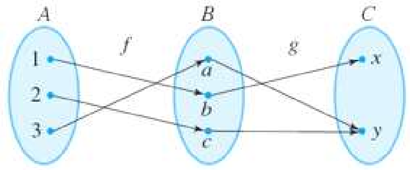
$x \subseteq \mathbb{R}$

(1) $\lceil x \rceil$ = ($x \le k$인 k값 중 가장 작은 정수)
  : 올림함수

(2) $\lfloor x \rfloor$ = ($x \ge k$인 k값 중 가장 큰 정수)
  : 내림함수

예제

15. $f: A \to B,\ g: B \to C$가 다음 그림과 같을 때, 두 함수 f와 g의 합성함수 $g \circ f$를 구해보자.

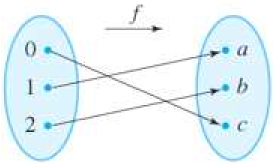


16. $A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{a, b, c, d, e\},\ C = \{7, 8, 9\}$ 이고, $f: A \to B,\ g: B \to C$ 일 때 합성함수 $h: A \to C$를 구해보자.

17. 두 함수 f와 g가 각각 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 3$ 이고, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 1$일 때, 합성함수 $f \circ g$와 $g \circ f$를 구해보자.

18. 집합 $A=\{-1, 0, 1\}$이고 함수 $f: A \to A$, $f(x)=x^3$일 때 함수 f는 항등함수임을 보이자.

19. $f: \{0, 1, 2\} \to \{a, b, c\}$가 다음과 같은 그래프로 정의될 경우 이에 대응되는 역함수를 구해보자.



20. 집합 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b, c\}$이고 A에서 B로의 함수 $f=\{(1, a), (2, c), (3, b)\}$일 때 $\left(f^{-1}\right)^{-1}$, $f^{-1} \circ f$를 구해보자.

21. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 이고 $f(x)=2$로 정의될 때, f가 상수 함수임을 보이자.

22. 집합 $U=\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$이고 $A=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 \le x \le \frac{1}{2}\right\}$일 때, 특성함수 f_A를 그래프로 나타내어보자.

23. 집합 $U=\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 2\}$이고 $A=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}\right\}$일 때, 특성함수 f_A를 그래프로 나타내어보자.

24. 다음을 구해보자.

(1) $\lceil 3.5 \rceil$

(2) $\lfloor 3.5 \rfloor$

(3) $\lfloor 2 \rfloor$

(4) $\lceil -0.5 \rceil$