# 5.1 관계와 이항 관계

| 교과목명 | 이산수학 | 분반 | | 담당교수 | 김 외 현 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학부(과) | | 학번 | | 성명 | |

**정의** 관계

객체들 간의 연관성을 표현하는 구조로서, 수학이나 공학 분야뿐만 아니라 여러 다른 분야에서도 기본적이고 중요한 개념임

**참고** 관계의 예

- 집합 $A$와 집합 $B$가 있을 때 $A$가 $B$의 부분 집합인 경우, 관계가 있음
- 두 개의 디지털 논리 회로가 같은 입출력 도표를 가졌을 때 두 회로는 관계가 있음
- 컴퓨터 프로그램에서 두 변수가 같은 이름과 프로그램 실행 시 같은 저장 장소를 사용하면 관계가 있다고 함

**정의** 이항관계(binary relation)

$A, B$: 집합

$R$: $A$로부터 $B$로의 이항관계

$\Rightarrow\ R \subseteq A \times B$

- $aRb \Leftrightarrow (a, b) \in R$: $a$와 $b$가 관계가 있는 경우
- $a \not R b \Leftrightarrow (a, b) \not\in R$: $a$와 $b$가 관계가 없는 경우

**정의** $n$항관계

두 개 이상인 원소에 대한 관계

**정의** 관계 $R$의 정의역과 치역

(1) $\text{Dom}(R) = \{a \mid (a, b) \in R\} \subseteq A$

: $R$의 정의역

(2) $\text{Ran}(R) = \{b \mid (a, b) \in R\} \subseteq B$

: $R$의 치역

**참고** $xRy \neq yRx$

**정의** 역관계

$R$: $A$에서 $B$로의 관계

$\Rightarrow\ R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$

: $B$에서 $A$로의 관계

즉, $aRb \Rightarrow bR^{-1}a$

**예제**

1. 두 집합 $A, B$에서 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$이라고 하자. 집합 $A$에 있는 원소 $x$와 집합 $B$에 있는 원소 $y$에 대하여, $x$가 $y$보다 작을 때 서로 관계가 있다고 가정하고 관계의 집합을 구해보자.

2. $A = \{1, 2, 3\}$이고 $A$에 대한 관계 $R = \{(1, 1), (1, 3), (3, 2)\}$일 때 $R$은 $A \times A$의 부분 집합이기 때문에 $A$에 관한 관계이다. 이때의 관계를 기호로 나타내고, 관계의 정의역과 치역을 구해보자.

3. 집합 $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$에 대한 이항관계 $R$을 다음과 같이 정의해보자.

$(a, b) \in A \times B$, $(a, b) \in R \Leftrightarrow a-b$는 짝수

(1) $A \times B$의 순서쌍들과 $R$의 순서쌍들을 모두 구해보자.

(2) $1R3$, $2R3$, $2R2$들이 성립하는가?

(3) $\mathrm{Dom}(R)$과 $\mathrm{Ran}(R)$을 구해보자.

4. $A=\{a, b\}$, $B=\{1, 2, 3\}$인 경우 $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$를 각각 구해보자.

5. 집합 $A=\{1, 2, 3\}$에 대한 이항관계 $R$이 $A$의 원소 $a$, $b$에 대하여 $a \geq b$일 때 순서쌍 $(a, b)$로 구성된다. 이때 이항관계 $R$의 원소들을 구해보자.

6. $A=\{1, 2\}$, $B=\{x, y, z\}$, $C=\{3, 4\}$에 대하여 $A \times B \times C$를 구해보자.

7. 두 집합 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 4\}$일 때 관계 $R$이 다음과 같다고 하자.

$R=\{(1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

이때 관계 $R$의 역관계 $R^{-1}$를 구해보자.

# 5.2 관계의 표현

| 교과목명 | 이산수학 | 분반 | | 담당교수 | 김 외 현 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학부(과) | | 학번 | | 성명 | |

**정의** 집합 사이의 관계를 표현하는 방법

(1) 서술식 방법
'집합 $A=\{1,2,3\}$에서 원소 $a,b$가 $a \geq b$인 관계 $R$'과 같이 직접 표현하는 방법

(2) 나열식 방법
서술식에 따라 관계를 순서쌍들의 집합으로 표현하는 방법

(3) 화살표 도표, 좌표 도표, 방향 그래프, 관계 행렬

**정의** 화살표 도표
$a \in A$, $b \in B$에 대하여 $(a, b) \in R$
$\Rightarrow$ $A$에 있는 원소 $a$에서 $B$에 있는 원소 $b$로 화살표를 그려서 관계를 표현

**정의** 좌표 도표
$A$의 원소: $x$축 위의 점,
$B$의 원소: $y$축 위의 점으로 표시
$(a, b) \in R$
$\Rightarrow$ $a$를 가리키는 $x$좌표축과 $b$를 가리키는 $y$좌표축이 만나는 곳에 점으로 표시

**정의** 방향 그래프
$R$: 하나의 집합 $A$에 대한 관계
$a, b \in A$에 대하여 $(a, b) \in R$
$\Rightarrow$ $A$의 각 원소를 그래프의 정점으로 표시하고 $a$에서 $b$로 화살표가 있는 연결선으로 표현

**정의** 관계 행렬
부울행렬을 이용하여
행렬의 행: $A$의 원소
열: $B$의 원소를 표시
$\Rightarrow$ $(a, b) \in R$이면 행렬의 성분$=1$
$(a, b) \notin R$이면 행렬의 성분$=0$으로 표현

**정의** 부울행렬
행렬의 성분이 0이거나 1인 행렬

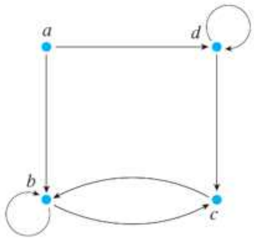
**예제**

8. 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, 집합 $B=\{a, b, c\}$라 하고 그들 사이의 관계 $R$이 다음과 같을 경우, 관계 $R$을 화살표 도표를 이용하여 나타내어보자.
$R=\{(1, a), (1, c), (2, b), (3, a), (3, c), (4, b)\}$

9. $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 3, 4\}$이고 집합 $A$에서 집합 $B$로의 관계 $R$이 다음과 같을 때, 관계 $R$을 좌표 도표를 이용하여 표시해보자.
$R=\{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (4, 2), (4, 4), (5, 2), (5, 3)\}$

10. 다음과 같은 관계 $R$이 주어졌을 때, 관계를 방향 그래프로 그려보자.
$R=\{(a, b), (b, a), (a, d), (d, c), (c, c), (c, a)\}$

11. 관계 $R$에 대한 방향 그래프가 다음과 같을 때 관계 $R$의 순서쌍을 구해보자.




> **참고 관계 행렬의 일반적인 표현**
>
> $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$,
>
> $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$
>
> $R$: $A$와 $B$사이의 관계
>
> $\Rightarrow (M_{ij})_{m\times n}$: $R$의 관계 행렬
>
> $$M_{ij}=\begin{cases}1, & (a_i, b_j)\in R \\ 0, & (a_i, b_j)\notin R\end{cases}$$
>
> $(i=1, 2, \cdots, m,\ j=1, 2, \cdots, n)$

예제

12. 집합 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 4, 6\}$에 대한 관계 $R$의 순서쌍들의 집합이 다음과 같을 때, 관계 $R$을 관계 행렬로 표현해보자.

$R=\{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 4), (3, 6)\}$

13. $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{x, y, z\}$일 때, 다음과 같이 $A$에서 $B$로 가는 관계가 있다.

$R=\{(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)\}$

(1) 관계 $R$을 화살표 도표, 좌표 도표, 관계 행렬로 각각 표현해보자.

① 화살표 도표

② 좌표 도표

③ 관계 행렬

(2) $R$의 정의역과 치역을 구해보자.

# 5.3 합성 관계

| 교과목명 | 이산수학 | 분반 | | 담당교수 | 김 외 현 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학부(과) | | 학번 | | 성명 | |

**정의** 합성관계

$A, B, C$: 집합

$R$: $A$에서 $B$로의 관계

$S$: $B$에서 $C$로의 관계

$\Rightarrow$ $S \circ R = \{(a, c) \mid (a, c) \in A \times C, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$

: $A$에서 $C$로의 관계

**정리** 합성관계의 부울곱 표현

$M_R$: $R$의 관계 행렬

$M_S$: $S$의 관계 행렬

$\Rightarrow$ $S \circ R = M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$ ($\odot$: 부울곱)

**정의** 부울곱

$A = (a_{ij})_{m \times p}$, $B = (b_{ij})_{p \times n}$

$\Rightarrow$ $A \odot B = (c_{ij})_{m \times n}$

$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj})$

여기서, $a_{ik} \vee b_{kj} = \begin{cases} 1, & a_{ik} = 0 \text{ or } b_{kj} = 0 \\ 0, & a_{ik} = b_{kj} = 0 \end{cases}$

$a_{ik} \wedge b_{kj} = \begin{cases} 1, & a_{ik} = b_{kj} = 1 \\ 0, & a_{ik} = 0 \text{ or } b_{kj} = 0 \end{cases}$

**정의** 항등관계

$I_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$: $A$에서 $A$로의 관계

**정리** 항등관계를 이용한 합성관계

$R$: $A$에서 $B$로의 관계

$\Rightarrow$ $R \circ I_A = I_B \circ R = R$

**예제**

14. 집합 $A, B, C$가 각각 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{x, y, z\}$이고 집합 $A$에서 집합 $B$로의 관계 $R$, 집합 $B$에서 집합 $C$로의 관계를 $S$라 한다. $R$과 $S$가 다음과 같을 때 합성관계 $S \circ R$를 화살표 도표를 사용하여 나타내어보자.

$R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, a), (4, b), (4, c)\}$

$S = \{(a, x), (b, y), (c, x), (c, z)\}$

15. 예제14에서의 합성관계를 관계 행렬로 나타내어 보자.

16. 다음과 같이 3개의 집합과 두 개의 관계가 주어졌을 경우, 합성관계를 화살표 도표를 통해 나타내어보자.

$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{a, b, c, d\}$, $C=\{x, y, z\}$

$R=\{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$

$S=\{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$

17. $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3\}$이고, 집합 $A$에서 집합 $B$로의 관계가 다음과 같이 $R$로 나타내어질 경우 다음 관계를 각각 구해보자.

$R=\{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 2)\}$

(1) $R \circ I_A$

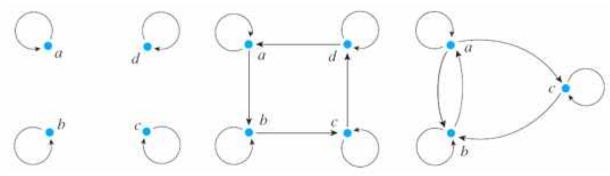
(2) $I_B$

# 5.4 관계의 성질

| 교과목명 | 이산수학 | 분반 | | 담당교수 | 김 외 현 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학부(과) | | 학번 | | 성명 | |

**정의** 반사 관계

$\forall a \in A,\ aRa$ 즉, $(a, a) \in R$

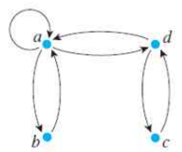



**정의** 비반사 관계

$\forall a \in A,\ a \not R a$ 즉, $(a, a) \notin R$

**정의** 대칭 관계

$a, b \in A,\ aRb \Rightarrow bRa$




$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

**정의** 비대칭 관계

$a, b \in A,\ aRb \Rightarrow b \not R a$

**정의** 반대칭 관계

$a, b \in A,\ aRb$이고 $bRa \Rightarrow a = b$

**정의** 추이 관계

$a, b, c \in A,\ aRb$이고 $bRc \Rightarrow aRc$

**정의** 추이 클로우저

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

(1) $(a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in R^+$

(2) $(a, b) \in R^+$ 이고 $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R^+$

(3) 앞의 (1), (2)의 경우를 제외하고는 어떤 것도 $R^+$에 속하지 않는다.

**정의** 반사 및 추이 클로우저

$R^* = R^+ \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$

**예제**

18. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$에 대한 관계들이 다음과 같을 때 반사 관계인 것을 찾아보자.

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$

$R_2 = \{(2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

$R_3 = \{(3, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 1), (2, 3), (1, 1), (2, 2), (1, 3)\}$

$R_4 = \varnothing$

19. $R = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, a \le b\}$일 때 $R$이 반사 관계인지를 판단해보자.

20. $x, y$가 자연수의 집합 $\mathbb{N}$의 원소일 때 다음의 관계들이 대칭 관계인지 아닌지를 구별해보자.

(1) $R_1 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x + y = 20\}$

(2) $R_2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x \le y\}$

21. 다음의 관계들이 반대칭 관계인지 아닌지를 구별해보자.

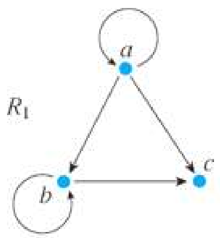
(1) $R_1 = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 4)\}$

(2) $R_2 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 1)\}$

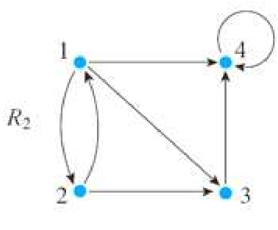
22. 정수들의 집합에서 크기를 나타내는 관계 $<$에서 추이 관계가 성립함을 보이자.

23. 다음의 방향 그래프로 표현된 관계들이 추이 관계인지를 판별해보자.

(1)



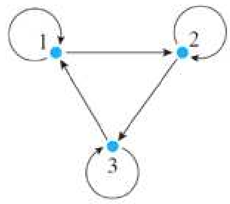

(2)




24. $A = \{1, 2, 3, 4\}$라하고 $A$상에 어떤 관계가 다음 관계 행렬과 같이 주어졌다면 그 관계가 반사 관계, 대칭 관계, 반대칭 관계, 추이 관계가 성립하는지를 살펴보자.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

25. 어떤 집합 상에 관계가 주어졌을 때, 그 관계에 따른 방향 그래프가 다음과 같다. 이때 반사 관계, 대칭 관계, 반대칭 관계 및 추이 관계가 성립하는지를 판별해보자.




26. $R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$을 집합 $\{1, 2, 3\}$상에서의 관계라고 할 때 $R^+$와 $R^*$를 구해보자.

# 5.5 동치 관계와 분할

| 교과목명 | 이산수학 | 분반 | | 담당교수 | 김 외 현 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학부(과) | | 학번 | | 성명 | |

**정의** 동치 관계

$R$: 집합 $A$에 관한 관계

$R$: 동치관계

$\Leftrightarrow$ $R$: 반사관계, 대칭관계, 추이관계 성립

**정의** 동치류

$R$: 집합 $A$에 관한 동치관계, $a \in A$

$\Rightarrow$ $[a] = \{x \mid (a, x) \in R\}$

: $a$의 동치류(동치 클래스)

$\dfrac{A}{R} = \{ [a] \mid a \in A\}$: $A$의 몫집합

**정의** 분할

$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$

$\Leftrightarrow$ (1) $A_i \neq \varnothing \ (1 \leq i \leq n)$

(2) $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

(3) $A_i \cap A_j = \varnothing \ (i \neq j)$

**정의** mod 합동

$x \equiv y \pmod{m}$

$\Leftrightarrow$ $x$와 $y$를 $m$으로 각각 나누었을 때 나머지가 같은 경우

**예제**

27. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$이고 $A$에 대한 관계가 다음과 같을 때, $R$이 동치 관계임을 보이자.

$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$

28. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$이고 $A$의 부분집합이 $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3, 5\}$, $A_3 = \{4\}$일 때 이들이 집합 $A$의 분할이 되는지를 밝혀보자.

29. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합이 다음과 같을 때 집합 $S$를 분할하는지를 판단해보자.

(1) $\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{6\}\}$

(2) $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 6\}, \{5\}\}$

30. 정수 $i$와 $j$에 대한 mod 합동이 동치 관계임을 보이자.

31. 양의 정수 $m$에 대해 mod 합동인 관계, 즉 $a \equiv b \pmod{m}$인 경우를 살펴보자. 만약 $m$이 3일 경우에 동치 관계가 되는지를 밝히고, 동치류를 만들어보자.

# 5.6 부분 순서 관계

| 교과목명 | 이산수학 | 분반 | | 담당교수 | 김 외 현 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학부(과) | | 학번 | | 성명 | |

정의 **부분 순서 관계**

(1) $R$: 집합 $A$에 관한 관계,
$R$: 부분 순서 관계
$\Leftrightarrow$ $R$: 반사관계, 반대칭관계, 추이관계 성립

(2) $R$: $A$에 대한 부분 순서 관계
$\Rightarrow$ $(A, R)$: 부분 순서 집합

- 부분이라는 용어를 쓰는 이유는 집합 $A$의 원소의 모든 쌍이 관계를 가지는 것은 아니기 때문
- 부분 순서 집합을 나타낼 때 $(A, \precsim)$라는 기호를 사용
- $R$: 집합 $A$에 대한 부분 순서 관계이면, $x, y \in A$에 대하여 $(x, y) \in R$을 $x \precsim y$ 표기
- $x \precsim y$: '$x$가 $y$를 선행한다'라고 읽음

정의 **비교 가능**

(1) $(A, \precsim)$: 부분 순서 집합, $x, y \in A$,
$x \precsim y$ or $y \precsim x$ $\Rightarrow$ $x$와 $y$는 비교 가능

(2) $\forall x, y \in A$, $x$와 $y$가 비교 가능
$\Rightarrow$ $A$: 선형 순서 집합
$\precsim$: 선형 순서 관계

정의 **선형 순서**

$R$: 선형 순서
$\Leftrightarrow$ (1) $R$: 부분 순서
(2) if $a, b \in A$
$\Rightarrow$ $aRb$, $bRa$ or $a = b$ 중 하나가 성립

참고 **하세 도표**

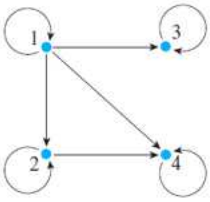
- 독일의 수학자 Helmut Hasse가 부분 순서 집합 $(A, \precsim)$를 그래프로 나타낼 때 사용
- 방향 그래프의 일종으로 화살표는 표시하지 않고 모든 연결선을 트리와 같이 모두 아래 방향을 향하도록 그림
- 모든 순환은 표시하지 않고, $x, y, z \in A$에서 $x \precsim y$이고 $y \precsim z$를 만족하는 $y$가 존재하지 않을 경우에만 $x$에서 $z$로 연결을 그려줌

예제

32. 자연수의 집합 $\mathbb{N}$에 대한 관계 $\leq$이 부분 순서 관계임을 보이자.

33. 집합 $S$의 부분 집합 간의 포함 관계 $\subseteq$이 부분 순서 관계임을 보이자.

34. 다음과 같이 주어진 방향 그래프가 부분 순서 관계임을 보이고, 그 그래프를 하세 도표로 나타내어보자.




35. 집합 $A=\{1, 2, 3\}$의 부분 집합들에 대한 포함 관계를 하세 도표로 작성해보자.

36. 두 집합 $A=\{a, b\}$, $B=\{1, 2\}$일 때, 집합 $A$에서 집합 $B$로의 관계는 몇 개가 있는지를 밝히고, 그 관계를 모두 나타내어보자.