11.1 부울식

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 부울식

$A=\{0,1\}$와

$+$(OR), $\cdot$(AND), $^{-}$(complement)로

표현된 식

정의 부울연산자

집합 $\{0,1\}$에 대한 연산

(1) 부울합 $+$: $1+1=1$

$1+0=1$

$0+1=1$

$0+0=0$

(2) 부울곱 $\cdot$: $1\cdot 1=1$

$1\cdot 0=0$

$0\cdot 1=0$

$0\cdot 0=0$

(3) 보수 $^{-}$: $\overline{0}=1$, $\overline{1}=0$

참고 연산 우선순위

$^{-}$ $>$ $\cdot$ $>$ $+$

참고 부울 연산과 논리 연산의 대응관계

부울	논리
$-$	$\neg$
$\cdot$	$\wedge$
$+$	$\vee$
0	F
1	T

예제

1. 다음 부울식의 결과값을 구해보자.

(1) $0+\overline{1}$

(2) $0\cdot 0+\overline{1}\cdot 0$

(3) $(1+\overline{0})\cdot 1$

(4) $\overline{(1\cdot 0+0\cdot 1)}+\overline{0}\cdot\overline{0}$

정리 부울식의 법칙

p, q, r을 부울 변수라 한다.

1. $p\cdot p=p$ $p+p=p$	멱등 법칙(idempotent law)
2. $p+0=p$ $p\cdot 1=p$	항등 법칙(identity law)
3. $p+q=q+p$ $p\cdot q=q\cdot p$	교환 법칙(commutative law)
4. $p+(q+r)=(p+q)+r$ $p\cdot(q\cdot r)=(p\cdot q)\cdot r$	결합 법칙(associative law)
5. $p+(q\cdot r)=(p+q)\cdot(p+r)$ $p\cdot(q+r)=(p\cdot q)+(p\cdot r)$	분배 법칙(distributive law)
6. $p+(p\cdot q)=p$ $p\cdot(p+q)=p$	흡수 법칙(absorption law)
7. $p+p'=1$ $p\cdot p'=0$	역 법칙(inverse law)
8. $(p')'=p$	보 법칙(complement law)
9. $p+1=1$ $p\cdot 0=0$	우등 법칙(dominance law)
10. $(p+q)'=p'\cdot q'$ $(p\cdot q)'=p'+q'$	드 모르간의 법칙(De Morgan's law)

예제

2. p, q, r이 부울 변수일 때 부울식

$\overline{(p+\overline{q})}\,\overline{r}=\overline{p}\,q\,\overline{r}$이 성립함을 살펴보자.

3. 다음 부울식을 표의 법칙들을 이용하여 간단히 해보자.

(1) $x+xy$

(2) $wy+xy+wz+xz$

4. 다음 부울식이 성립함을 진리표를 이용하여 살펴보자.
   $x + yz = (x + y)(x + z)$

5. 흡수 법칙 $x(x+y)= x$가 성립함을 표에서 보인 항등 관계를 이용하여 증명해보자.

11.2 부울식의 표현

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 부울 함수

$A = \{0, 1\}$

$A^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in A,\ 1 \le i \le n\}$

: 0과 1로 구성된 n-tuple들의 집합

x_i: 부울 변수 (x_i의 값은 0과 1만 가능)

$\Rightarrow f : A^n \to A$

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$: n차 부울 함수

정의 동치

$f, g : A^n \to A$

$a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$

$\Rightarrow f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = g(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

$\Leftrightarrow$ f와 g는 동치

정의 최소항

부울 변수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$의 최소항

$= y_1 y_2 \cdots y_n$

여기서 $y_i = \begin{cases} x_i &, x_i = 1 \\ x_i{}' &, x_i = 0 \end{cases}$

참고 최소항의 개수

(부울 변수)$= n$개 $\Rightarrow$ (최소항)$= 2^n$개

참고 부울 함수의 표현

- (부울 함수)
  = (1의 값을 가지는 최소항들의 부울 합)
  : 곱의 합(논리합) 표준형

-

x	y	$f(x, y)$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

$\Rightarrow f(x, y) =$

예제

6. $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$일 때 부울 함수 $f(x, y, z)$의 값을 1이 되고, 다른 경우에는 0의 값을 가진다고 하자. 이때 그 부울 함수에 대한 진리표를 구하고, $f(x, y, z) = 1$인 최소항을 부울 변수의 곱으로 나타내어보자.

7. 부울 변수에 대한 진리표가 다음과 같을 때 부울 함수 $f(x, y, z)$를 구해보자.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

8. 다음 부울 함수를 부울 변수의 곱의 합 표준형으로 나타내어보자.

(1) $f(x, y) = \overline{x} + y$

(2) $f(x, y, z) = (x + y)\overline{z}$

11.3 부울 함수의 간소화

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

참고 부울 함수의 간소화

부울 함수를 최소화함으로써 보다 적은 수의 게이트로 원하는 회로를 구현해 효율성을 높일 수 있음

참고 간소화 방법

(1) 부울식의 기본 법칙

(2) 카노우맵

정의 카노우맵 (K-map)

(1) 2변수 카노우맵 표현 방법

$x \backslash y$	1	0
1		
0		

$x \backslash y$	y	$\overline{y}$
x	xy	$x\overline{y}$
$\overline{x}$	$\overline{x}y$	$\overline{x}\,\overline{y}$

또는

$x \backslash y$	0	1
0		
1		

$x \backslash y$	$\overline{y}$	y
$\overline{x}$	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}y$
x	$x\overline{y}$	xy

예제

x	y	$f(x,y)$
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$x \backslash y$	1	0
1		
0		

예제

9. 다음에 대한 카노우맵을 구하여라.

(1) $x\overline{y}+xy$

(2) $\overline{x}\,\overline{y}+\overline{x}y$

(3) $xy+\overline{x}y$

(4) $\overline{x}\,\overline{y}+x\overline{y}$

(5) $x\overline{y}+\overline{x}y$

(6) $x\overline{y}+\overline{x}y+\overline{x}\,\overline{y}$

참고 카노우맵을 이용한 간소화 방법

① $1, 2, 4, 8, 16$ 개로 그룹을 지어 묶음
② 바로 이웃해 있는 항들끼리 묶음
③ 반드시 직사각형이나 정사각형의 형태로 묶어야만 함

예제

x	y	$f(x,y)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

$x \backslash y$	1	0
1	1	1
0	1	1

$f(x,y)=\overline{x}\,\overline{y}+\overline{x}y+x\overline{y}+xy$

예제

10. 예제8에서 보인 곱의 합 표준형들을 최소화하라.

(1) $x\overline{y}+xy$

(2) $\overline{x}\,\overline{y}+\overline{x}y$

(3) $xy+\overline{x}y$

(4) $\overline{x}\,\overline{y}+x\overline{y}$

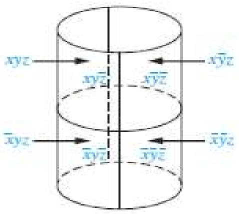
(5) $x\overline{y}+\overline{x}y$

(6) $x\overline{y}+\overline{x}y+\overline{x}\,\overline{y}$

(2) 3변수 카노우맵 표현방법

$x \backslash yz$	11	10	00	01
1				
0				

$x \backslash yz$	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	xyz	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$



예제 3변수 카노우맵을 이용한 간소화

(1)

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

$x \backslash yz$	11	10	00	01
1				
0				

$f(x,y,z) =$

(2)

x	y	z	$F(x,y)$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

$x \backslash yz$	11	10	00	01
1				
0				

$f(x,y,z) =$

(3)

$x \backslash yz$	11	10	00	01
1	1	1		
0	1	1		

$f(x,y,z) =$

(4)

$x \backslash yz$	11	10	00	01
1			1	1
0			1	1

$f(x,y,z) =$

(5)

$x \backslash yz$	11	10	00	01
1		1	1	
0		1	1	

$f(x, y, z) =$

(6)

$x \backslash yz$	11	10	00	01
1	1			1
0	1			1

$f(x, y, z) =$

(7)

$x \backslash yz$	11	10	00	01
1	1			1
0				

$f(x, y, z) =$

(8)

$x \backslash yz$	11	10	00	01
1				
0	1			1

$f(x, y, z) =$

(9)

$x \backslash yz$	11	10	00	01
1			1	1
0	1	1		

$f(x, y, z) =$

(10)

$x \backslash yz$	11	10	00	01
1	1	1	1	1
0	1			1

$f(x, y, z) =$

(11)

$x \backslash yz$	11	10	00	01
1		1	1	1
0			1	

$f(x, y, z) =$

(12)

$x \backslash yz$	11	10	00	01
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1

$f(x, y, z) =$

예제

11. 다음 곱의 합 표준형을 카노우맵을 이용하여 최소화하라.

(1) $xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$

$x \backslash yz$	11	10	00	01
1				
0				

(2) $x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

x \ yz	11	10	00	01
1				
0				

(3) $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

x \ yz	11	10	00	01
1				
0				

(4) $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

x \ yz	11	10	00	01
1				
0				

(3) 4변수 카노우맵 표현방법

wx \ yz	11	10	00	01
11				
10				
00				
01				

wx \ yz	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx	$wxyz$	$wxy\bar{z}$	$wx\bar{y}\bar{z}$	$wx\bar{y}z$
$w\bar{x}$	$w\bar{x}yz$	$w\bar{x}y\bar{z}$	$w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$w\bar{x}\bar{y}z$
$\bar{w}\bar{x}$	$\bar{w}\bar{x}yz$	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$
$\bar{w}x$	$\bar{w}xyz$	$\bar{w}xy\bar{z}$	$\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{w}x\bar{y}z$

예제 4변수 카노우맵을 이용한 간소화

(1)

wx \ yz	11	10	00	01
11	1	1		
10	1	1		
00	1	1		
01	1	1		

$f(w, x, y, z) =$

(2)

wx \ yz	11	10	00	01
11			1	1
10			1	1
00			1	1
01			1	1

$f(w, x, y, z) =$

(3)

$wx \backslash yz$	11	10	00	01
11	1	1	1	1
10				
00				
01	1	1	1	1

$f(w, x, y, z) =$

(4)

$wx \backslash yz$	11	10	00	01
11	1			1
10	1			1
00	1			1
01	1			1

$f(w, x, y, z) =$

(5)

$wx \backslash yz$	11	10	00	01
11				
10		1	1	
00		1	1	
01				

$f(w, x, y, z) =$

(6)

$wx \backslash yz$	11	10	00	01
11	1			
10	1		1	1
00	1		1	1
01	1			

$f(w, x, y, z) =$

(7)

$wx \backslash yz$	11	10	00	01
11				
10			1	1
00				
01				

$f(w, x, y, z) =$

(8)

$wx \backslash yz$	11	10	00	01
11				
10	1			1
00				
01				

$f(w, x, y, z) =$

(9)

$wx \backslash yz$	11	10	00	01
11		1		
10				
00				
01		1		

$f(w, x, y, z) =$

(10)

$wx \backslash yz$	11	10	00	01
11				
10	1			1
00	1			1
01				

$f(w, x, y, z) =$

(7)

$wx \backslash yz$	11	10	00	01
11	1			1
10		1	1	
00		1	1	
01	1			1

$f(w, x, y, z) =$

(8)

$wx \backslash yz$	11	10	00	01
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1
00	1	1		
01	1	1		

$f(w, x, y, z) =$

(9)

$wx \backslash yz$	11	10	00	01
11	1	1	1	
10		1	1	
00		1	1	
01			1	1

$f(w, x, y, z) =$

(10)

$wx \backslash yz$	11	10	00	01
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1

$f(w, x, y, z) =$

예제

12. 카노우맵을 사용하여 다음 부울 함수를 간소화해 보자.

$$f(x, y, z, w) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}z\overline{w} + \overline{x}y\overline{z}w + \overline{x}yzw + xy\overline{z}w + xyzw + x\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + x\overline{y}z\overline{w}$$

11.4 논리 회로 설계

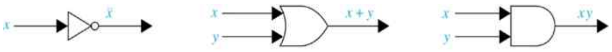
교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

정의 논리 회로 (논리 게이트)

부울 대수의 기본 연산인 부울 합, 부울 곱, 보수 등의 연산을 실행하기 위한 회로

참고

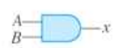
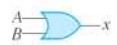
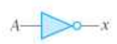
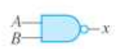
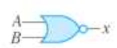
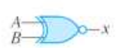
(1) 게이트의 종류



(a) Inverter (b) OR gate (c) AND gate

(2) n 개의 입력을 갖는 게이트

참고 여러 가지 논리 게이트들의 기호와 진리표

게이트	기호	수식	진리표
AND		$x = A \cdot B$	A B x 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1
OR		$x = A + B$	A B x 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1
NOT(inverter)		$x = A'$	A x 0 1 1 0
NAND		$x = (A \cdot B)'$	A B x 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0
NOR		$x = (A + B)'$	A B x 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0
exclusive-OR(XOR)		$x = (A \oplus B)$ 또는 $x = A'B + AB'$	A B x 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0
exclusive-NOR		$x = (A \oplus B)'$ 또는 $x = AB + A'B'$	A B x 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1

참고 게이트의 조합

조합 회로는 인버터, OR 게이트, AND 게이트의 조합으로 구성

예제 $xy + \overline{x}y$

하나의 게이트로부터 나온 출력이 또 다른 게이트들의 입력이 될 수도 있음

예제

13. 다음 부울식을 논리 회로로 표현해보자.

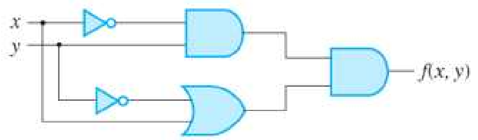
(1) yz

(2) $xyz + \overline{x}yz$

14. 다음 부울 함수를 간소화하고 간소화된 함수의 논리 회로를 그려보자.

$f(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}yz + xyz + xy\overline{z}$

15. 다음 논리 회로에 해당하는 부울 함수를 구해보자.



11.5 논리 회로의 응용

교과목명	이산수학	분반		담당교수	김 외 현
학부(과)		학번		성명	

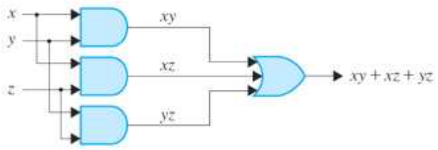
정의 논리 회로의 응용

(1) 전자레인지

- 우리가 가정에서 사용하는 전자레인지에 이용되는 논리 회로를 생각해 봄
- 전자레인지는 우리가 사용하지 않을 때에는 문이 닫혀 있고(AND), 타이머가 준비되어 있으며(AND), 시작 버튼을 누르면(AND) 전자레인지가 작동됨

(2) 전자투표기

- 3명으로 구성된 어떤 위원회에서 의사결정을 할 때 ‘찬성’ 또는‘반대’ 중의 하나로 투표를 하는데 2명 이상이‘찬성’을 할 경우 안건이 통과된다고 가정함
- 안건이 통과되는지의 여부를 즉석에서 결정할 수 있는 소규모 전자투표기의 논리 회로는 아래 그림으로 표현됨

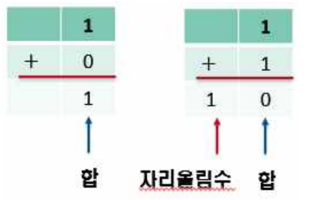


(3) 반가산기

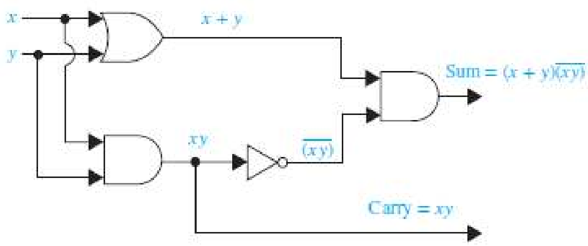
: 각각 1비트인 입력 x, y를 받아서 $x+y$를 수행한 후, 덧셈 결과(sum) 비트 s와 올림수(carry) 비트 c를 출력하는 회로

참고 반가산기의 입출력

Input		Output	
x	y	s	c
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0



(1) $s = x\overline{y} + \overline{x}y = (x+y)\overline{(xy)}$, $c = xy$



(2) $s = x\overline{y} + \overline{x}y = x \oplus y$, $c = xy$