2. 수의 체계

논리회로

부경대 컴퓨터·인공지능공학부 최필주

목차

- 10진수
- 2진수
- 16진수
- 진법 변환
- 2진수 정수 연산과 보수
- 2진 부동소수점수의 표현

10진수

- 10진수 표현법
  - 10진수: 기수가 10인 수
    - 기수: 진법을 나타내는 기본수
  - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 10개 수로 표현

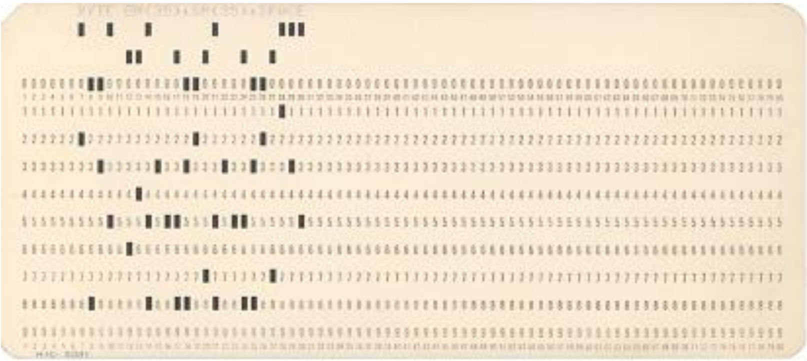
$$\begin{aligned} 9345.35 &= 9\times1000+3\times100+4\times10+5\times1+3\times0.1+5\times0.01 \\ &= 9\times10^{3}+3\times10^{2}+4\times10^{1}+5\times10^{0}+3\times10^{-1}+5\times10^{-2} \end{aligned}$$

  - 바빌로니아인 : 60진법을 사용(기원전 4000~3000년)
  - 고대 로마의 기수법에는 5진법을 사용
  - 10진법의 아라비아 숫자는 인도에서 기원전 2세기에 발명

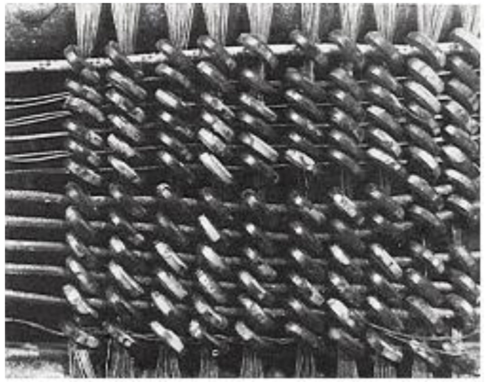
2진수

- 2진수 표현법
  - 기수가 2인 수
  - 0, 1 두 개의 수로 표현

$$
\begin{aligned}
1010.1011_{(2)} &= 1\times 1000_{(2)} + 0\times 100_{(2)} + 1\times 10_{(2)} + 0\times 1_{(2)} \\
&\quad + 1\times 0.1_{(2)} + 0\times 0.01_{(2)} + 1\times 0.001_{(2)} + 1\times 0.0001_{(2)} \\
&= 1\times 2^{3} + 0\times 2^{2} + 1\times 2^{1} + 0\times 2^{0} + 1\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} + 1\times 2^{-4}
\end{aligned}
$$



Punch card



Core memory

16진수

- 16진수 표현법
  - 0~9, A~F까지 16개의 기호로 표현

$$6C7.3A_{(16)} = 6\times100_{(16)} + C\times10_{(16)} + 7\times1_{(16)} + 3\times0.1_{(16)} + A\times0.01_{(16)}$$
$$= 6\times16^2 + C\times16^1 + 7\times16^0 + 3\times16^{-1} + A\times16^{-2}$$

  - 2진수 4자리는 16진수 1자리 :

$$1010111010001\text{0}.0111111_{(2)} = 10\ 1011\ 1010\ 0010.0111\ 111_{(2)}$$
$$= 0010\ 1011\ 1010\ 0010.0111\ 1110_{(2)}$$
$$= 2\ B\ A\ 2.\ 7\ E_{(16)}$$

10 진수	2 진수	16 진수
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

진법 변환

- 10진수-2진수 변환
  - 정수부분과 소수부분으로 나누어 변환
  - 정수부분은 2로 나누고, 소수부분은 2를 곱한다.
  - 10진수 75.6875를 2진수로 변환

2	75		나머지 →	2진수
2	37	··· 1	→	1
2	18	··· 1	→	11
2	9	··· 0	→	011
2	4	··· 1	→	1011
2	2	··· 0	→	01011
2	1	··· 0	→	001011
	0	··· 1	→	1001011
	몫			

2진수	←	정수	소수	
		0.	6875	
		X	2	
0.1	←	1.	3750	곱셈결과 정수를 적는다.
		X	2	
0.10	←	0.	7500	
		X	2	
0.101	←	1.	5000	
		X	2	
0.1011	←	1.	0	소수부분이 0이 될 때까지 계산한다.

$$75.6875_{(10)} = 1001011.1011_{(2)}$$

진법 변환

- 10진수-16진수 변환
  - 정수부분과 소수부분으로 나누어 변환
  - 정수부분은 **16**로 나누고, 소수부분은 **16**를 곱한다.
  - 또는 2진수로 변환 후 4자리씩 묶어 16진수로 변환

$$
\begin{aligned}
75.6875 &= 1001011.1011_{(2)} \\
&= 0100\ \ 1011.1011_{(2)} \\
&= \quad 4 \qquad B. \qquad B_{(16)}
\end{aligned}
$$

10진 → 2진 → 16진

4자리씩 나눔

$$
\begin{aligned}
75.6 &= 1001011.10011001100110011001\ldots_{(2)} \\
&= 0100\ \ 1011.1001\ \ 1001\ \ 1001\ \ 1001\ \ 1001\ldots_{(2)} \\
&= \quad 4 \qquad B. \quad 9 \qquad 9 \qquad 9 \qquad 9 \qquad 9\ldots_{(16)}
\end{aligned}
$$

진법 변환

- 10진수로의 변환
  - 각 자리에 기수의 거듭제곱을 곱하여 변환

$$
\begin{aligned}
101101.101_{(2)} &= 1\times 2^{5} + 0\times 2^{4} + 1\times 2^{3} + 1\times 2^{2} + 0\times 2^{1} + 1\times 2^{0} + 1\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} \\
&= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 + 0.5 + 0 + 0.125 = 45.625_{(10)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A3.D2_{(16)} &= 10\times 16^{1} + 3\times 16^{0} + 13\times 16^{-1} + 2\times 16^{-2} \\
&= 10\times 16 + 3\times 1 + 13\times 0.0625 + 2\times 0.00390625 \\
&= 160 + 3 + 0.8125 + 0.0078125 \\
&= 163.8203125_{(10)}
\end{aligned}
$$

2진수 정수 연산과 보수

- 2진 양의 정수 덧셈
  - 0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=10 (자리올림 발생)

10진수	2진수
carry → 11 49 + 58 107	carry → 0110000 00110001 + 00111010 01101011

2진수 정수 연산과 보수

- 2진 음의 정수 표현과 보수
  - 최상위비트(MSB)를 부호비트로 사용
    - 양수(+) : 0
    - 음수(-) : 1
  - 2진수 음수를 표시하는 방법

	음수를 나타내는 방법	-5의 표현 방법
부호와 절대치(sign-magnitude)	부호비트를 1로	$1101_{(2)}$
1의 보수(1's complement)	0 ↔ 1 변환	$1010_{(2)}$
2의 보수(2's complement)	1의 보수에 +1	$1011_{(2)}$

    - 부호와 절대치, 1의 보수의 단점: 0 표현이 두 개, 자연스런 덧셈/뺄셈 어려움
    - $5_{(10)}=0101_{(2)}$

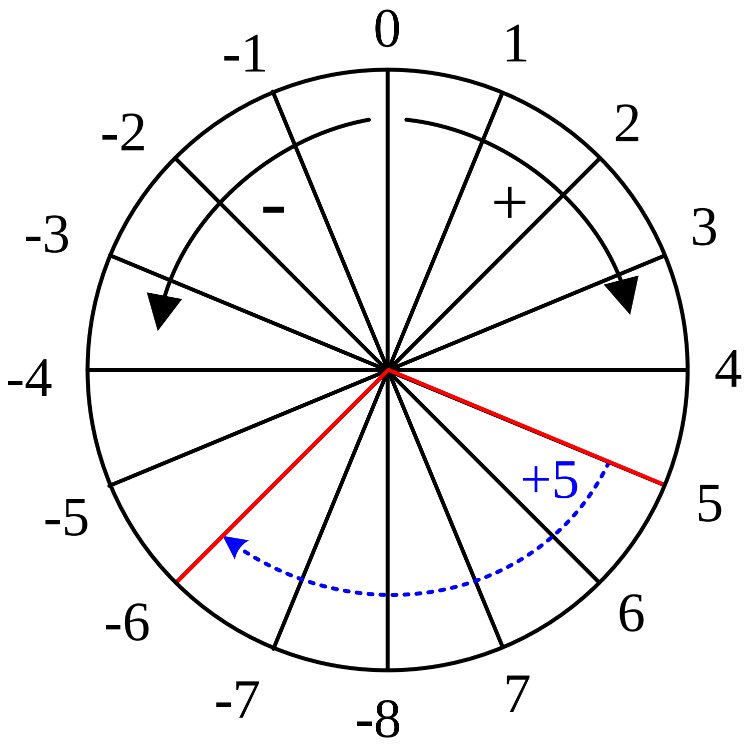
2진수 정수 연산과 보수

- 2진수의 표현 방법 3가지(8 bits)

2진수	부호와 절대치	1의 보수	2의 보수
00000000	+0	+0	+0
00000001	+1	+1	+1
00000010	+2	+2	+2
…	…	…	…
01111110	+126	+126	+126
01111111	+127	+127	+127
10000000	-0	-127	-128
10000001	-1	-126	-127
10000010	-2	-125	-126
10000011	-3	-124	-125
…	…	…	…
11111101	-125	-2	-3
11111110	-126	-1	-2
11111111	-127	-0	-1

2진수 정수 연산과 보수

- 2진 정수의 2의 보수 개념도 (4 bits)



0	0	0	0	0	0
+	0	0	0	1	+1
	0	0	1	0	+2
	0	0	1	1	+3
	0	1	0	0	+4
	0	1	0	1	+5
	0	1	1	0	+6
	0	1	1	1	+7
-	1	0	0	0	-8
	1	0	0	1	-7
	1	0	1	0	-6
	1	0	1	1	-5
	1	1	0	0	-4
	1	1	0	1	-3
	1	1	1	0	-2
	1	1	1	1	-1

2진수 정수 연산과 보수

- 뺄셈
  - 2의 보수를 취하여 덧셈(Carry는 버림)
  - 예: 7928-879 = 7928+(-879) = 7928+(-0879)
    7928+(10^4-0879) = 7928+9121 = 17049

2진수 정수 연산과 보수

- 2의 보수 사용 시 2진 정수의 표현 범위

bit 수	2의 보수를 사용한 2진 정수의 표현 범위
n bit	$-2^{n-1} \sim +2^{n-1}-1$
4 bit	$-2^{4-1} \sim +2^{4-1}-1$ (−8 ~ +7)
8 bit	$-2^{8-1} \sim +2^{8-1}-1$ (−128 ~ +127)
16 bit	$-2^{16-1} \sim +2^{16-1}-1$ (−32,768 ~ +32,767)
32 bit	$-2^{32-1} \sim +2^{32-1}-1$ (−2,147,483,648 ~ +2,147,483,647)
64 bit	$-2^{64-1} \sim +2^{64-1}-1$ (−9,223,372,036,854,775,808 ~ 9,223,372,036,854,775,807)

2진수 정수 연산과 보수

- 2의 보수로 표현된 음수를 10진수로 변환
  - 2의 보수 10101100을 10진수로 변환하는 경우

첫번째 방법	**MSB가 1이므로 음수이다. 실제크기는 -128이다.** $10101100_{(2)} = -1\times 2^7 + 0\times 2^6 + 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 0\times 2^0$ $= -128 + 0 + 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 0 = -128 + 44$ $= -84$
두번째 방법	**2의 보수로 바꾸어 10진수로 바꾼 다음 -부호를 붙인다.** $10101100_{(2)} \Rightarrow$ 2의 보수 $01010100_{(2)}$ $=0\times 2^7 + 1\times 2^6 + 0\times 2^5 + 1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 0\times 2^0$ $=0+64+0+16+0+4+0+0$ $=84$ ⇨ 부호를 붙이면 -84

2진 부동소수점의 표현

- 컴퓨터의 부동소수점수
  - 정규화 후 부호(sign), 지수(exponent), 가수(mantissa)의 세 부분으로 표시
  - 두 가지 정확도

※ 2진수의 정규화

$$
\begin{aligned}
75.6875 &= 1001011.1011_{(2)} \\
&= 1.0010111011_{(2)} \times 2^{6} \\
&= 1.0010111011_{(2)} \times 2^{110_{(2)}}
\end{aligned}
$$

	IEEE 754 표준 부동소수점수의 비트 할당	Bias
single precision	8 bit / 23 bit 31 | 30 29 … 24 23 | 22 21 … 1 0 S | Exponent | Mantissa 75.6875 → 0 | 6+127=10000101$_{(2)}$ | 0010111011… $_{(2)}$ (…은 0으로 채워짐)	127
double precision	11 bit / 52 bit 63 | 62 61 … 53 52 | 51 50 … 1 0 S | Exponent | Mantissa	1023

Summary

- n진수 표현법
  - 0, 1, …, n-1의 n개의 수로 표현

	표현에 사용되는 숫자	예시
2진수	0, 1	$1010.1011_{(2)}$
10진수	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	9345.35
16진수	0, 1, 2, …, 9, A, B, C, D, E, F	$6C7.3A_{(16)}$

    - 2진수 4자리는 16진수 1자리

10 진수	2 진수	16 진수
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Summary

- 진수 변환
  - 10진수 → n진수 변환
    - 정수부분: 몫이 0이 될 때까지 기수(n)로 나눈 나머지를 취함
    - 소수부분: 소수 부분이 0이 될 때까지 기수(n)로 곱한 정수 부분을 취함

		나머지	2진수
2	75		
2	37	… 1	1
2	18	… 1	11
2	9	… 0	011
2	4	… 1	1011
2	2	… 0	01011
2	1	… 0	001011
	0 (몫)	… 1	1001011

2진수	정수	소수
	0.	6875
	X	2
0.1	1.	3750
	X	2
0.10	0.	7500
	X	2
0.101	1.	5000
	X	2
0.1011	1.	0

  - n진수 → 10진수 변환
    - 각 자리에 기수(n)의 거듭제곱을 곱함
    - 예: $101101.101_{(2)} = 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 + 1\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3}$

$$= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 + 0.5 + 0 + 0.125 = 45.625_{(10)}$$

Summary

- 음수의 표현
  - 최상위비트(MSB)를 부호비트로 사용(음수일 경우 1)
  - 3가지 표현 방법

	음수를 나타내는 방법
① 부호와 절대치(sign-magnitude)	부호비트를 1로
② 1의 보수(1's complement)	0 ↔ 1 변환
③ 2의 보수(2's complement)	1의 보수에 +1

				①	②	③
1	0	0	0	-0	-7	-8
1	0	0	1	-1	-6	-7
1	0	1	0	-2	-5	-6
1	0	1	1	-3	-4	-5
1	1	0	0	-4	-3	-4
1	1	0	1	-5	-2	-3
1	1	1	0	-6	-1	-2
1	1	1	1	-7	-0	-1

Summary

- 2진 부동소수점의 표현
  - ① 정규화된 표현으로 변환
  - ② 3부분으로 나누어 표현
    - S: 음수일 경우 1
    - E: 지수 + bias한 값
    - M: 정수 부분을 제외한 소수 부분만 취함

- 예시

$$
\begin{aligned}
75.6875 &= 1001011.1011_{(2)} \\
&= 1.0010111011_{(2)} \times 2^{6} \\
&= 1.0010111011_{(2)} \times 2^{110_{(2)}}
\end{aligned}
$$

	8 bit	23 bit
31	30 29 … 24 23	22 21 … 1 0
S	Exponent	Mantissa
0	$6+127=10000101_{(2)}$	$0010111011\ldots_{(2)}$ (…은 0으로 채워짐)