دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

Lecture 4_0: Linear Algebra

Advanced Robotics

Hamed Ghafarirad

سرفصل

- جبرخطی

- ماتریس همانی (Identity)

$$I \in R^{n\times n} \qquad I_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

ویژگی ★ برای هر ماتریس $A \in R^{m\times n}$:

$$\star \quad A\underbrace{I}_{n\times n} = A = \underbrace{I}_{m\times m}A$$

نکته: معمولاً ابعاد I نوشته نمی‌شود و مطابق با شرایط معادله تعیین می‌گردد

- ماتریس قطری (Diagonal)

$D \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$D_{ij} = \begin{cases} d_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

نحوه نمایش دیگر:

$$D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$$

* ماتریس واحد :

$$I = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1)$$

جبر خطی

- ترانهاده (Transpose)

$$A \in R^{m\times n} \longrightarrow A^T \in R^{n\times m}$$

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

- ویژگیها:

$$1- (A^T)^T = A$$

$$2- (AB)^T = B^T A^T$$

$$3- (A+B)^T = A^T + B^T$$

❑ تقارن (Symmetry)

$A \in R^{n\times n}$ is symmetric if $A = A^T$ متقارن

" " skew symmetric if $A = -A^T$ پادمتقارن

Anti symmetric

ویژگی:

1 - برای هر ماتریس A مربعی

$A + A^T$ متقارن می‌باشد

$A - A^T$ پادمتقارن

2 - هر ماتریس مربعی $A \in R^{n\times n}$ می‌تواند به‌صورت حاصلجمع یک ماتریس متقارن و پادمتقارن نوشته شود

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\substack{\text{متقارن} \\ C_1}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\substack{\text{پادمتقارن} \\ C_2}} = C_1 + C_2$$

Trace ❑

برای ماتریس مربعی $A \in R^{n\times n}$:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$ (مجموع درایه‌های قطر اصلی)

▪ ویژگیها:

1 - $tr(A) = tr(A^T)$

2 - $A, B \in R^{n\times n}$ $\quad tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

3 - $A \in R^{n\times n}$, $p \in R$: $\quad tr(pA) = p\, tr(A)$

4 - For A, B ; AB is square $\longrightarrow$ $tr(AB) = tr(BA)$

5 - For A, B, C ; ABC is square $\longrightarrow$ $tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$

❑ Trace

اثبات ۴ :

فرض $A \in R^{m\times n}$, $B \in R^{n\times m}$ $\Rightarrow$ $AB \in R^{m\times m}$ مربعی , $BA \in R^{n\times n}$ مربعی $\rightarrow$ tr دارد ✓

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ji}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ji}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} B_{ji} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} B_{ji} A_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = tr(BA)$$

جبر خطی

- نرم (Norm)

نرم، معیاری از اندازه (بزرگی) می باشد

نرم ℓ_2 یا نرم اقلیدسی $\|\ \|_2$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \text{یا} \quad \|x\|_2^2 = x^T x$$

بطور کلی نرم یک تابع $f : R^n \to R$ است که ۴ شرط را ارضا می نماید:

1- for all $x \in R^n$; $f(x) \geq 0$ (Non-negativity)

2- $f(x) = 0$ iff $x = 0$ (Definiteness)

3- for all $x \in R^n$, $p \in R$; $f(px) = |p|\, f(x)$ (Homogeneity)

4- for all $x, y \in R^n$; $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ (Triangle Inequality)

جبر خطی

❑ نرم (Norm)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$ نرم ℓ_1

$$\|x\|_\infty = \mathrm{Max}_i\, |x_i|$$ نرم ℓ_∞

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$ نرم ℓ_p $(p \geq 1)$

★ نرم برای ماتریس‌ها نیز بیان می‌گردد

نرم فروبنیوس (Frobenius)

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2} = \sqrt{tr(A^T A)}$$

جبر خطی

❑ مستقل خطی

Linearly Independent

مجموعه بردارهای $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset R^m$ (مستقل خطی) نامیده می‌شوند اگر هیچ برداری را نتوان (از این مجموعه) به صورت ترکیب خطی سایر بردارها بیان نمود.

به طور معکوس، (وابسته خطی) نامیده می‌شود اگر

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i$$

اسکالر

- مثال:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{وابسته خطی}} x_3 = -2x_1 + x_2$$

- رتبه (Rank)

رنک ستونی (Column Rank)

رنک ستونی ماتریس $A\in R^{m\times n}$ سایز بزرگترین زیرمجموعه از ستونهای A است که یک مجموعه مستقل خطی را ایجاد می‌نماید

به بیان ساده‌تر تعداد ستونهای مستقل A

رنک سطری (Raw Rank)

〃 سطرهای 〃 〃 〃 〃

رنک سطری 〃 〃

〃 〃 سطرهای 〃 〃

قضیه: برای هر ماتریس $A\in R^{m\times n}$: رنک ستونی = رنک سطری

جبر خطی

- ❑ رتبه (Rank)

★ رتبه ماتریس A = رتبه ستونی A = رتبه سطری A

★ برای یافتن رتبه ماتریس معمولاً — اگر ماتریس ستونی ← ستونها چک می‌کنیم (رتبه ستونی)

" " سطری ← سطرها " " (رتبه سطری)

" " مربعی ← تنادی می‌کنیم

← Outline

❑ رتبه (Rank)

- ویژگی ها:

1- $A \in R^{m \times n}$; $\operatorname{rank}(A) \leq \min(m, n)$

if $\operatorname{rank}(A) = \min(m, n) \longrightarrow A$ is full rank (رتبه کامل)

2- $A \in R^{m \times n}$; $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$

3- $A \in R^{m \times n}$, $B \in R^{n \times p}$; $\operatorname{rank}(AB) \leq \min(\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B))$

4- $A, B \in R^{m \times n}$; $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$

جبر خطی

معکوس

معکوس ماتریس مربعی $A \in R^{n\times n}$ ، A^{-1} است به طوری که: $A^{-1}A = I = AA^{-1}$

★ ماتریس A معکوس پذیر یا غیرسینگولار است اگر A^{-1} موجود باشد

Invertible Non-Singular

نکته: برای آنکه ماتریس مربعی A دارای معکوس A^{-1} باشد، A باید Full rank باشد

- ویژگی ها:

1- $(A^{-1})^{-1} = A$

2- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3- $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1} \xrightarrow[\text{دلیل}]{\text{به همین}}$ نمایش دیگر: A^{-T}

جبر خطی

❑ معکوس

کاربرد: حل دستگاههای خطی $Ax=b$

$A \in R^{n\times n}$

$x, b \in R^{n}$

if A invertible $\longrightarrow$ $x = A^{-1}b$

$\boxed{?}$ اگر $A \in R^{m\times n}$ ماتریس غیرمربعی باشد، آیا جواب وجود دارد؟

❑ تعامد (Orthogonality)

دو بردار $x, y \in R^n$ متعامد (orthogonal) می باشند اگر $x^T y = 0$

بردار $x \in R^n$ normalized می باشد اگر $\|x\|_2 = 1$

ماتریس مربعی $U \in R^{n \times n}$ orthogonal می باشد اگر تمامی ستونها دو به دو orthogonal باشند

" " orthonormal " " " " " normalized و orthogonal باشند

طبق تعریف: اگر ماتریس $U \in R^{n \times n}$ orthonormal باشد

$$U^T U = I = U U^T$$

به بیان دیگر برای یک ماتریس orthonormal

$$U^{-1} = U^T$$

❑ تعامد (Orthogonality)

نکته: تعاریف فوق برای ماتریس‌های مربعی برقرار می‌باشد

به‌طور مثال:

$$\left.\begin{array}{l} U \in R^{m\times n}, \quad m > n \\ \text{ستون‌هایش orthonormal باشند} \end{array}\right\} \quad U^T U = I \quad \text{و} \quad U U^T \neq I$$

- ویژگی خاص:

یک ماتریس orthonormal، نرم اقلیدسی را تغییر نمی‌دهد

برای هر ماتریس orthonormal $U \in R^{n\times n}$ و $x \in R^n$:

$$\| U x \|_2 = \| x \|_2$$

❑ Span، Range، Null Space

- تعریف Span

span یک مجموعه برداری $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ برابر است با مجموعه همه بردارهایی که می توان بصورت ترکیب خطی x_1 تا x_n بیان نمود

$$\text{span}(\{x_1, \dots, x_n\}) = \left\{ v : v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ , \ \alpha_i \in R \right\}$$

نکته: اگر $\{x_1, \dots, x_n\}$ یک مجموعه n بردار مستقل خطی و $x_i \in R^n$ باشد، آنگاه

$$\text{Span}(\{x_1, \dots, x_n\}) = R^n$$

به بیان دیگر هر بردار $v \in R^n$ می تواند بصورت ترکیب خطی x_1 تا x_n بیان گردد

پایه‌های فضای برداری R^n

مثال: بردارهای پایه

❑ Span، Range، Null Space

- تعریف Range ‏(Column Space)

Range یک ماتریس $A \in R^{m\times n}$ ، span ستونهای A می باشد

$$R(A) = \{ v \in R^m \; ; \; v = Ax \; , \; x \in R^n \}$$

- تعریف Null Space ‏(فضای پوچی)

Null space یک ماتریس $A \in R^{m\times n}$ ، مجموعه همه بردارهایی است که با ضرب در A خروجی صفر میدهد

$$N(A) = \{ x \in R^n \; ; \; Ax = 0 \}$$

❑ دترمینان (Determinant)

- ویژگی ها:

1- $A \in R^{n\times n}$; $|A| = |A^T|$

مربعی

2- $A, B \in R^{n\times n}$ $|AB| = |A||B|$

3- $A \in R^{n\times n}$, $|A| = 0$ iff A is singular (non-invertible)

4- $A \in R^{n\times n}$ & A is non-singular ; $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

5- $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A)$

6- $A \in R^{n\times n}$; $c \in C$; $|cA| = c^n |A|$

7- $A \in R^{n\times n}$ $B \in R^{m\times m}$ $C \in R^{m\times n}$: $\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$

$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$

Quadratic Forms ❑

برای یک ماتریس مربعی $A\in R^{n\times n}$ و بردار $x \in R^n$ ، مقدار اسکالر x^TAx یک فرم Quadratic نامیده می‌شود.

$$x^TAx = \sum_{i=1}^{n} x_i(Ax)_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,x_i x_j$$

نکته:

$$x^TAx \underset{?}{=} (x^TAx)^T = x^TA^Tx \underset{?}{=} x^T\left(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}A^T\right)x$$

نکته: از تساوی آخر مشخص می‌گردد که در فرم Quadratic تنها قسمت متقارن ماتریس A نقش خواهد داشت.

$$A = \underbrace{\tfrac{1}{2}(A+A^T)}_{\text{متقارن}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(A-A^T)}_{\text{پادمتقارن}} = C_1 + C_2 \qquad x^TAx = x^TC_1x$$

نتیجه: بطور قراردادی همواره فرض می‌گردد ماتریس‌های موجود در فرم Quadratic متقارن می‌باشند.

Quadratic Forms ❑

▪ تعاریف

- ماتریس متقارن $A \in S^n$ را مثبت معین Positive Definite گویند اگر برای هر بردار غیرصفر $x \in R^n$ ،

PD

$x^T A x > 0$ $(A > 0)$

- ماتریس 〃 〃 〃 مثبت نیمه معین Positive Semidefinite 〃 〃 〃 〃 〃 $x^T A x \geq 0$

PSD

$(A \geq 0)$

- 〃 〃 〃 〃 منفی معین Negative Definite 〃 〃 〃 $x^T A x < 0$

ND

$(A < 0)$

- 〃 〃 〃 〃 منفی نیمه معین Negative Semidefinite 〃 〃 〃 $x^T A x \leq 0$

NSD

$(A \leq 0)$

- 〃 〃 〃 نامعین Indefinite گویند اگر نه PD و نه ND باشد

اگر و تنها اگر $x_1, x_2 \in R^n$ موجود باشد که $x_1^T A x_1 > 0$ و $x_2^T A x_2 < 0$

← Outline

Quadratic Forms ❑

نکته: اگر ماتریس A، PD باشد ⇐ $-A$، ND خواهد بود

- **ویژگی خاص:**

ماتریسهای PD و ND همواره full rank می‌باشند و بنابراین معکوس پذیر خواهند بود.

- اثبات:

فرض شود $A\in R^{n\times n}$، full rank نباشد، آنگاه یکی از بردارهای مستقل خطی را می‌توان بصورت ترکیب خطی $n-1$ ستون دیگر بیان نمود

$$A=[a_1\ \ a_2\ \cdots\ a_n] \xrightarrow[\text{full rank}]{A \text{ is not}} a_j=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} x_i a_i$$

از طرفی

$$Ax=\sum_{p=1}^{n} x_p a_p=\sum_{\substack{p=1\\ p\neq j}}^{n} x_p a_p+\underline{x_j}\,a_j=0$$

فرض $x_j=-1$

⇐ یک بردار x غیر صفر وجود دارد که $x^TAx=0$ ⇐ A، PD و یا ND نخواهد بود

❑ مقدار ویژه (Eigen Value) بردار ویژه (Eigen Vector)

ماتریس مربعی $A\in R^{n\times n}$ مفروض است.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

$\lambda\in C$ را مقدار ویژه A و $x\in C^n$ را بردار ویژه متناظر گویند اگر

Complex

$$Ax=\lambda x \quad , \quad x\neq 0$$

- مفهوم

ضرب A در بردار x برداری هم راستای x ولی λ برابر تولید می‌نماید

نکته: به ازای هر بردار ویژه $x\in C^n$ و اسکالر $c\in C$:

$$A(cx)=cAx=c\lambda x=\lambda(cx)$$

در نتیجه cx هم یک بردار ویژه A متناظر با λ خواهد بود

لذا فرض می‌کنیم بردارهای ویژه normalized می‌باشند (اندازه 1)

- مقدار ویژه (Eigen Value) بردار ویژه (Eigen Vector)
  - نحوه محاسبه

$$Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda x = 0 \rightarrow (A - \lambda I)x = 0 \qquad x \neq 0$$

این رابطه جواب غیرصفر دارد اگر و تنها اگر $(A - \lambda I)$ دارای فضای پوچی غیرصفر باشد

به عبارت دیگر $(A - \lambda I)$ سینگولار باشد

$$|A - \lambda I| = 0$$

با حل این رابطه، λ_i به تعداد n، به دست خواهد آمد

برای یافتن x_i ها، به ازای هر λ_i دستگاه اولیه حل می‌شود $A x_i = \lambda_i x_i \rightarrow x_i$ ✓

- مقدار ویژه (Eigen Value) بردار ویژه (Eigen Vector)
  - مثال:

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه A ؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + 6 = 0 \rightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0 < \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)x_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -a_1 + 2b_1 = 0 \rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} b_1$$

$$x_1 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$(A - \lambda_2 I)x_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -2a_2 + 2b_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} b_2$$

$$x_2 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

- مقدار ویژه (Eigen Value) بردار ویژه (Eigen Vector)
  - ویژگی ها

1- $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

2- $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \longrightarrow$ اگر ماتریس A سینگولار باشد، حداقل یک مقدار ویژه صفر خواهد داشت

3- $rank(A) =$ تعداد مقادیر ویژه غیرصفر A

۴- اگر λ_i و x_i مقادیر ویژه و بردار ویژه ماتریس غیرسینگولار A باشد آنگاه $\frac{1}{\lambda_i}$ و x_i مقادیر ویژه و بردار ویژه ماتریس A^{-1} خواهد بود

اثبات: $A x_i = \lambda_i x_i \xrightarrow{A^{-1}} x_i = A^{-1} \lambda_i x_i = \lambda_i A^{-1} x_i \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\lambda_i}}_{\text{مقدار ویژه}} x_i = A^{-1} \underbrace{x_i}_{\text{بردار ویژه}}$

- مقدار ویژه (Eigen Value) بردار ویژه (Eigen Vector)
  - ویژگی ها

۵- مقادیر ویژه ماتریس‌های بالا و پایین مثلثی برابر درایه‌های روی قطر اصلی می‌باشد

$$A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda_i = a, b, c$$

۶- برای ماتریس حقیقی A، مقادیر ویژه حقیقی و یا مزدوج مختلط خواهد بود.

۷- ماتریس A و A^T دارای مقادیر ویژه یکسان و در حالت کلی بردار ویژه متفاوت خواهند بود

۸- ماتریس $A + cI$ دارای مقادیر ویژه $\lambda_i + c$ خواهد بود

۹- قضیه: بردارهای ویژه ماتریس A متناظر با n مقدار ویژه متمایز، مستقل خطی می‌باشند

اثبات: در کتاب اصول کنترل مدرن - دکتر خاکی صدیق

- مقدار ویژه (Eigen Value) بردار ویژه (Eigen Vector)
  - نکات:

اگر ماتریس A متقارن باشد $(A \in S^n)$ آنگاه:

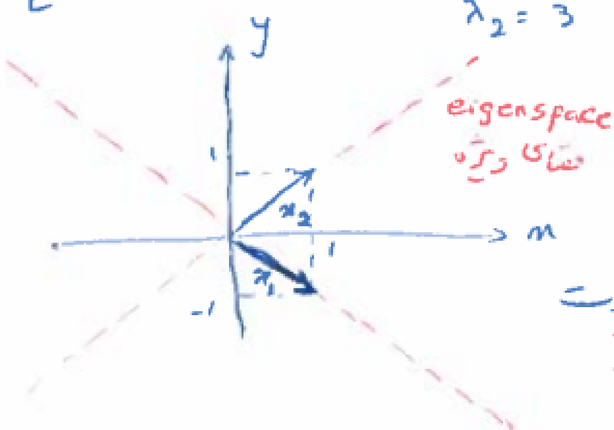
- تمامی مقادیر ویژه A حقیقی می‌باشند $\lambda_i \in R$
- بردارهای ویژه orthonormal خواهند بود $x_i^T x_j = 0$ $\|x_i\| = 1$
- ماتریس مودال X، orthonormal خواهد بود $X^T = X^{-1}$
- ماتریس A، PD خواهد بود اگر تمامی $\lambda_i > 0$
- 〃 〃 PSD 〃 〃 $\lambda_i \geq 0$
- 〃 〃 ND 〃 〃 $\lambda_i < 0$
- 〃 〃 NSD 〃 〃 $\lambda_i \leq 0$

جبر خطی

- مقدار ویژه (Eigen Value) بردار ویژه (Eigen Vector)
  - مفهوم هندسی:

بردارهای ویژه پایه‌های یک فضای برداری مستقل معادل با ماتریس A می‌باشد

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix} \longrightarrow \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}$



- در این دو راستا هر برداری در A ضرب شود تنها بردار در همین راستا و بصورت λ_i برابر خواهد بود

- در راستاهای دیگر ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ در راستا و طول متفاوت خواهد بود

دوران   تغییر طول

* هر برداری را می‌توان بصورت ترکیب خطی از این بردارهای پایه بیان نمود

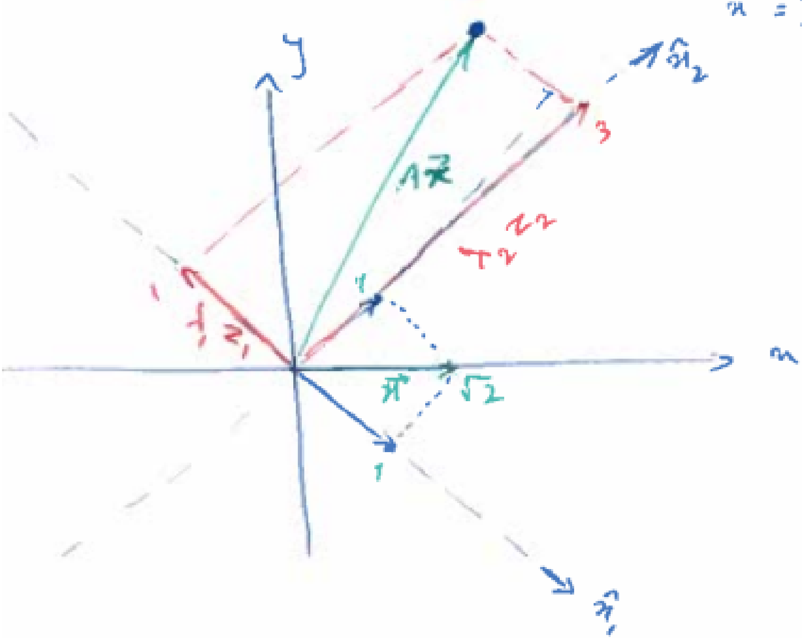
- ترکیب خطی در واقع همان تغییر مختصات است

$X = [\vec{x}_1 \ \ \vec{x}_2] \longrightarrow \vec{x} = X\vec{z} = \vec{x}_1 z_1 + \vec{x}_2 z_2$

❑ مقدار ویژه (Eigen Value) بردار ویژه (Eigen Vector)

- مفهوم هندسی:

- برای هر بردار دلخواه می‌توان سهم هر بردار ویژه را بدست آورد. در این حالت از هم مجزا می‌شوند.
- سپس هر سهم را بصورت مستقل با λ برابر نمود
- نتایج را با هم جمع کرد و به فضای اول بازگرداند $\vec{x} = X\vec{z}$



مثال:

بردار $\vec{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

تصویرسازی: $z_1 = 1$, $z_2 = 1$ $\Leftarrow$ $\vec{x} = 1\vec{x}_1 + 1\vec{x}_2$

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 3\cos\frac{\pi}{4} - 1\cos\frac{\pi}{4} \\ 3\sin\frac{\pi}{4} + 1\sin\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

جبر خطی

- مقدار ویژه (Eigen Value) بردار ویژه (Eigen Vector)
  - کاربرد

$$\begin{cases} A x_1 = \lambda_1 x_1 \\ A x_2 = \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ A x_n = \lambda_n x_n \end{cases}$$

تعریف: ماتریس مودال: Modal Matrix

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$$

ماتریس مقادیر ویژه:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$ قطری

- $AX = X\Lambda \quad \rightarrow \quad \Lambda = X^{-1}AX$
- تبدیل همانندی (Similarity Transformation)

- مقدار ویژه (Eigen Value) بردار ویژه (Eigen Vector)
  - کاربرد
  - **حل دستگاه معادلات دیفرانسیل کوپل**

$\dot{y} = Ay$

فرم فضای حالت

ماتریس A

ماتریس مودال X

ماتریس مقادیر ویژه Δ

تغییر متغیر

$y = XZ$

$X\dot{z} = AXZ \longrightarrow \dot{z} = X^{-1}AXZ \longrightarrow \dot{z} = \Delta Z$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n = \lambda_n z_n \end{cases}$$

معادلات دیفرانسیل جداشده

$\checkmark y \xleftarrow[y = XZ]{} \checkmark z \longleftarrow$

جبر خطی

- مقدار ویژه (Eigen Value) بردار ویژه (Eigen Vector)
  - کاربرد
  - **ارتعاشات سیستم های چند درجه آزادی**
  - ارتعاشات سیستم های چند درجه آزادی، یک **مسئله مقدار ویژه** است.

$$[M]\ddot{\vec{u}} + [K]\vec{u} = 0$$

با فرض حرکت هارمونیک :

$$-[M]\omega^2\vec{X} + [K]\vec{X} = 0 \longleftarrow \vec{x} = \vec{X}e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2\vec{X} + [M]^{-1}[K]\vec{X} = 0 \longrightarrow \underbrace{[M]^{-1}[K]}_{A}\vec{X} = \underbrace{\omega^2}_{\lambda}\vec{X}$$

* مجذور فرکانس های طبیعی، مقادیر ویژه سیستم می باشند

$$|A - \lambda I| = 0 \longrightarrow \left|[M]^{-1}[K] - \omega^2 I\right| = 0 \longrightarrow \left|[K] - [M]\omega^2\right| = 0$$

حصول مقادیر ویژه
(فرکانس های طبیعی)

$$([K] - [M]\omega_i^2)\vec{X}_i = 0 \longrightarrow$$

حصول بردارهای ویژه
(شکل مودها)

جبر خطی

- مقدار ویژه (Eigen Value) بردار ویژه (Eigen Vector)
  - کاربرد
  - **ارتعاشات سیستم های چند درجه آزادی**
  - ارتعاشات سیستم های چند درجه آزادی، یک **مسئله مقدار ویژه** است.

$$|A-\lambda I| = 0 \longrightarrow \left|[M]^{-1}[K] - \omega^2 I\right| = 0 \longrightarrow \left|[K]-[M]\omega^2\right| = 0$$

حصول مقادیر ویژه
(فرکانس های طبیعی)

$$\left([K]-[M]\omega_i^2\right)\vec{X}_i = 0 \longrightarrow$$

حصول بردار های ویژه
(شکل مودها)

ماتریس مودال $[X] = [X_1 \cdots X_n]$

تغییر متغیر $\vec{x} = [X]\vec{z}$

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = 0 \Longrightarrow \ddot{\vec{x}} + [M]^{-1}[K]\vec{x} = 0 \Rightarrow [X]\ddot{\vec{z}} + [M]^{-1}[K][X]\vec{z} = 0$$

$[X]^{-1}$ پیش ضرب

$$\longrightarrow \ddot{\vec{z}} + \underbrace{[X]^{-1}\underbrace{[M]^{-1}[K]}_{A}[X]}_{\begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & 0 \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}}\vec{z} = 0 \longrightarrow z \checkmark \longrightarrow x \checkmark$$

The END

- **References:**

1) …