Partiendo de una ecuación politrópica entre la presión isotrópica y la densidad de masa en reposo

$$(1)\quad p = K\rho^{\Gamma}$$ donde Γ es el índice adiabático y K es una constante de normalización.

Para un proceso adiabático no existe transferencia de calor $dQ=0$, lo que lleva a que la primera ley de la termodinámica se simplifique a:

$$(2)\quad dU = -p\,dV \qquad (dU = dQ - dW)$$

donde $U = \epsilon V$ es la energía total del fluido en un volumen V. Esta energía incluye la energía en reposo y la interna.

Por otro lado podemos escribir la densidad de masa en reposo como $\rho = \frac{m_0 N}{V}$ donde N es el número de partículas en el mismo volumen V. Tendremos entonces que (2) se reduce a

$$d(\epsilon V) = -p\,dV \xrightarrow{V = mN/\rho} mN\,d\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right) = -mNp\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

tendremos que

$$d\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right) = -p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{p}{\rho^2}\,d\rho \overset{\text{usando (1)}}{=} K\rho^{\Gamma-2}\,d\rho$$

es decir

$$\boxed{d\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right) = K\rho^{\Gamma-2}\,d\rho} \xrightarrow{\text{integrando}} \boxed{\frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{K}{\Gamma-1}\rho^{\Gamma-1} + cte}$$

Ahora como físicamente sabemos que $\lim_{\rho\to 0} \varepsilon/\rho = 1$ tendremos que $cte = 1$ lo que lleva a:

$$(3)\quad \boxed{\varepsilon = \rho + \frac{K}{\Gamma-1}\rho^{\Gamma}} \xrightarrow{\text{usando (1)}} \boxed{\varepsilon = \left(\frac{p}{K}\right)^{1/\Gamma} + \frac{p}{\Gamma-1}}$$

La ecuación (3) y (1)

$$\varepsilon = \rho + \frac{K}{\Gamma - 1}\rho^{\Gamma}$$

puede ser escrita de una forma más acorde a la implementación numérica

$$\varepsilon(n) = m_b n + \frac{\bar{K} m_b n_0}{\Gamma - 1}\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\Gamma}$$

$$P(n) = \bar{K} m_b n_0 \left(\frac{n}{n_0}\right)^{\Gamma}$$

Notar que usamos que

$$\rho = m_b \frac{N}{V} = m_b n$$

con n la densidad de número de bariones $[d^{-3}]$

donde se definió $\bar{K} = K(m_b n_0)^{\Gamma-1} = K\rho_0^{\Gamma-1}$. Notar que la ventaja ahora es que $\bar{K}$ es adimensional. Usualmente se toma ρ_0 como la densidad central.

Unos comentarios sobre el tensor de energía momento para un fluido perfecto

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^{\mu}u^{\nu} + Pg^{\mu\nu}$$

donde ε es la densidad total de energía compuesta por la masa en reposo del "fluido" ρ y la energía interna E, que en esto caso corresponde a la energía térmica del movimiento de las partículas en el fluido. Es decir

$$\boxed{\varepsilon = \rho c^2 + E}$$