Mathématiques T$^{\text{ale}}$ S
Cours d'approfondissement

2 novembre 2016

Table des matières

Chapitre I

Suites, épisode 1

Ce cours a pour objet d'approfondir les notions vues au programme de Terminale sur l'étude des suites numériques : monotonie, «bornitude», convergence, et d'en introduire des aspects allant au-delà. On s'intéressera ici à l'étude des suites récurrentes d'ordre un, dans un contexte plus général que ce que vous avez pu rencontrer au détour d'un exercice, et on introduira la notion de série numérique.

1 Suites arithmético-géométriques

On commence par étudier le cas particulier des suites récurrentes vérifiant une relation affine $u_{n+1} = au_n + b$. Vous connaissez les cas $a = 1$ et $b = 0$.

Définition 1.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que u est *arithmético-géométrique* si et seulement s'il existe deux réels a et b, avec $a \neq 1$, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Théorème 1.2 (Expression des suites arithmético-géométriques)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de paramètres a et b. Soit c l'unique réel vérifiant $c = ac+b$. Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (u_0 - c)a^n + c.$$

Exercice I.1 (F)**.** Soit u une suite arithmético-géométrique. Dans chacun des cas suivants, déterminer son expression en fonction de n, étudier sa convergence :

1. $$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = -3u_n + 5 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 2 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \frac{5}{4}u_n + 2 \end{cases}$$

Exercice I.2 (M)**.** Démontrer le théorème 1.2.

2 Suites récurrentes d'ordre un

2.1 Généralités

Définition 2.1 (Suite récurrente d'ordre un)**.** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *récurrente d'ordre un* s'il existe une fonction réelle $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Ce type de problème rentre dans le domaine d'étude des *systèmes dynamiques*, fondamental en mathématiques pures comme appliquées, en physique, en chimie, en biologie.

Exemple 2.1. La suite réelle définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}{u_n}^2 + u_n + 1$ est une suite récurrente d'ordre un ; quelle est la fonction f correspondante ?

Pour des fonctions f assez moches, il n'est pas possible d'obtenir une expression explicite de u_n en fonction de n, même en utilisant des astuces classiques (par exemple composer par des fonctions usuelles bien choisies...). Et pourtant, des fonctions f assez moches interviennent dans la plupart des systèmes dynamiques que l'on peut rencontrer.

L'étude des solutions au problème $u_{n+1} = f(u_n)$ sera donc exclusivement *qualitative*: déjà, vérifier la bonne définition de la suite à tout rang, voir si elle est monotone, si elle est bornée, si elle converge, et ce en fonction des valeurs de son premier terme u_0.

Remarque. Il **faut** vérifier que la suite (u_n) est bien définie, c'est-à-dire que $u_n \in A$ pour tout n. En effet pour $u_0 = 1$ et f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - 1$, la suite de relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ n'est pas définie à partir du rang 2...

Proposition 2.2. *Si A est stable par f (i.e. $f(A) \subset A$), alors u est bien définie.*

Exercice I.3 (M)**.** Démontrer la proposition 2.2.

2.2 Monotonie

En général, les deux méthodes suivantes permettent de traiter la plupart des suites récurrentes d'ordre un :

- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, en étudiant celui de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.
- étudier les variations de f : si f est croissante sur A, on compare u_0 et u_1. Si on a $u_0 \leqslant u_1 = f(u_0)$, une récurrence donne $u_n \leqslant u_{n+1} = f(u_n)$ par croissance de f. Si on a $u_1 \leqslant u_0$ alors par récurrence $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante : on peut étudier séparément les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), qui sont vérifient la relation de récurrence $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$...

Bien sûr, le sens de variation de f ou le signe de g peuvent changer sur A. Dans ce cas, il faut chercher un intervalle $I \subset A$ sur lequel g est de signe constant ou f ne change pas de sens de variation, et qui vérifierait $u_n \in I \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2.3 Convergence

Proposition 2.3. *On suppose que f est continue et que u converge. Soit ℓ sa limite.*

- *Si ℓ est dans A alors par continuité de f on a $f(\ell) = \ell$.*
- *Sinon, ℓ est un bord de A mais n'y appartient pas (comme* 0 *avec* $]0, 1]$*).*

Remarque. Bien évidemment, si $\ell \in \mathbb{R}/A$ mais f admet une limite en ℓ, on prolonge f en ℓ en posant $f(\ell)$ égal à cette limite. La fonction obtenue est continue sur $A \cup \{\ell\}$ et on se ramène au cas précédent.

Exercice I.4 (M)**.** La suite de l'exemple 2.1 est-elle monotone ? Converge-t-elle ?

Exercice I.5 (D)**.** Soit u la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -{u_n}^2 + 2$. Montrer que u est croissante. Étudier sa convergence.

Exercice I.6 (D)**.** On considère la suite (u_n) de premier terme un entier $u_0 \geqslant 2$ et vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{{u_n}^2 + 2}{2u_n}.$$

1. Montrer par récurrence que c'est une suite de nombres rationnels.
2. Montrer que la demi-droite $[\sqrt{2}, +\infty[$ est stable par la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 + 2}{2x}$.
3. Étudier le signe de $g : x \longmapsto f(x) - x$; en déduire que (u_n) est décroissante.
4. Montrer qu'elle converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice I.7 (TD)**.** Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto (x - 1)^3$. On cherche à étudier les suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où $u_0 \leqslant 1$.

1. Montrer que l'intervalle $]-\infty, 1]$ est stable par f.
2. Étudier le signe de $g : x \longmapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$. En conclure que (u_n) est strictement décroissante.
3. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

Chapitre II

Fonctions de la variable réelle, épisode 1

Dans ce cours, nous approfondirons les notions sur les fonctions de la variable réelle : limites, continuité, dérivabilité. On passera en revue des notions sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, avant de voir quelques résultats sur les limites et les fonctions continues.

1 Topologie de $\mathbb{R}$

1.1 Borne supérieure

Définition 1.1 (Borne supérieure)**.** Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On appelle *borne supérieure de* X, et on note $\sup X$, le plus petit majorant de X, s'il existe. La borne supérieure est caractérisée par les deux propriétés suivantes : α est la borne supérieure de X si et seulement si :

1. c'est un majorant de X: pour tout x de X, $x \leqslant \alpha$.
2. pour tout majorant M de X, on a $\sup X \leqslant M$.

Théorème 1.2 (dit de la borne supérieure)**.** *Toute partie* ***non vide*** *de* $\mathbb{R}$ *admettant un majorant admet une borne supérieure.*

Exercice II.1 (F)**.** Déterminer les bornes supérieures des ensembles suivants :

1. $\mathbb{R}$
2. $[0, 1[$
3. $\{n \in \mathbb{Z},\ n \text{ est pair}\}$
4. $]-\infty, 0]$
5. $\varnothing$
6. $\left\{1 - \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Proposition 1.3 (Autre caractérisation de la borne supérieure)**.** *La propriété 2 de la définition 1.1 de la borne supérieure peut être remplacée par l'énoncé suivant :*
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $x > \alpha - \varepsilon$.

Corollaire 1.4. *Soit* $A \subset \mathbb{R}$*, non vide et majoré, et* $\alpha \coloneqq \sup X$*. Alors, il existe une suite* (u_n) *à valeurs dans* X *et croissante telle que* $u_n \longrightarrow \alpha$*.*

Remarque. La réciproque est fausse.

Exercice II.2 (M)**.** Démontrer la proposition 1.3 et son corollaire.

Définition 1.5 (Borne inférieure)**.** On définit de même la *borne inférieure* d'une partie X de $\mathbb{R}$, notée $\inf X$, comme le plus grand de ses minorants, s'il existe. Elle est caractérisée de la même façon : un réel α est la borne inférieure de X si et seulement si :

1. c'est un minorant de X : pour tout $x \in X$, $\alpha \leqslant x$.
2. pour tout minorant m de X, on a $m \leqslant \inf X$.

et la deuxième condition équivaut à : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $x < \alpha + \varepsilon$.

On a de même l'existence d'une suite (u_n) décroissante à valeurs dans X telle que $u_n \longrightarrow \alpha$.

1.2 Parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$

Définition 1.6 (Ouvert)**.** Soit $U \subset \mathbb{R}$. On dit U est *ouvert* si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset U$.

Proposition 1.7.

- *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.*
- *Une intersection* ***finie*** *d'ouverts est un ouvert.*

Exercice II.3 (M)**.** Le démontrer. Trouver un contre-exemple pour une intersection *infinie* d'ouverts.

Exemple 1.1.

1. $\mathbb{R}$
2. $\varnothing$
3. $]0, 1[$
4. $]a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$
5. $\mathbb{R}^*$
6. $]-2, -1[\cup]0, 1[$

Définition 1.8 (Fermé)**.** Soit $F \subset \mathbb{R}$. On dit que F est *fermé* si son complémentaire $\mathbb{R}/F$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.9.

- *Une intersection quelconque de fermés est un fermé.*
- *Une réunion* ***finie*** *de fermés est un fermé.*

Exercice II.4 (M)**.** Le démontrer. Trouver un contre-exemple pour une réunion *infinie* de fermés.

Exemple 1.2.

1. $\mathbb{R}$
2. $\varnothing$
3. $[0, +\infty[$
4. $[0, 1]$
5. $\{0\}$
6. L'ensemble des entiers pairs.

Exercice II.5 (M)**.** Montrer qu'une partie $F \subset \mathbb{R}$ est fermée si et seulement si pour toute suite (u_n) d'éléments de F convergeant vers un réel ℓ, on a $\ell \in F$.

Définition 1.10 (Point adhérent)**.** Soit $X \subset \mathbb{R}$. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est *adhérent à* X s'il existe une suite (u_n) de X telle que $u_n \longrightarrow x$.

Définition 1.11 (Adhérence)**.** On appelle *adhérence* de la partie X de $\mathbb{R}$, et on note $\overline{X}$ l'ensemble de ses points adhérents.

Proposition 1.12. *Soient $X, Y \subset \mathbb{R}$. Alors :*

- $X \subset \overline{X}$
- $X \subset Y \Longrightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$
- $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$
- $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$

Exercice II.6 (M)**.** Démontrer la proposition 1.12.

1.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.13 (Segment)**.** Soient a et b deux réels. On appelle *segment d'extrémités a et b*, et on note $[a, b]$, la partie de $\mathbb{R}$ définie par :

$$[a, b] := \{(1-t)a + tb, \quad t \in [0, 1]\}.$$

Exercice II.7 (F)**.** On suppose que $a \leqslant b$. Montrer que

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Définition 1.14 (Intervalle)**.** On appelle *intervalle* toute partie I de $\mathbb{R}$ telle que pour tous $a, b \in I$, $[a, b] \subset I$. En d'autres termes, si on prend deux points de I, le segment entre les deux est toujours dans I.

Proposition 1.15 (Inventaire des intervalles de $\mathbb{R}$)**.** *Le tableau suivant décrit l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$.*

Borné	*Non borné*
$\varnothing$	$\mathbb{R}$
Intervalle semi-ouvert $]a, b]$ *ou* $[a, b[$	
Segment $[a, b]$	$]-\infty, b]$ *et* $[a, +\infty[$
Intervalle ouvert $]a, b[$	$]a, +\infty[$ *et* $]-\infty, b[$

1.4 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 1.16 (Extractrice)**.** On appelle *extractrice* toute application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Définition 1.17 (Sous-suite)**.** Soit u une suite réelle. On dit que v est une *sous-suite de u* s'il existe une extractrice φ telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.3. La suite $\left(\frac{1}{2n}\right)$ est une sous-suite de $\left(\frac{1}{n}\right)$ d'extractrice $n \mapsto 2n$.

Lemme 1.18 (dit des pics)**.** *De toute suite réelle on peut extraire une sous-suite monotone.*

Exercice II.8 (Démonstration, D)**.** Soit u une suite réelle. On considère

$$A \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \quad \exists k > n \quad u_k \leqslant u_n\}.$$

1. On suppose que A est infini. Construire par récurrence une suite d'entiers $(\varphi(n))$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})$ soit croissante.
2. On suppose au contraire que A est fini. En considérant son complémentaire, construire une suite d'entiers $(\varphi(n))$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})$ soit décroissante.

Théorème 1.19 (dit de Bolzano-Weierstrass)**.** *De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite qui converge.*

Démonstration. Appliquer successivement le lemme des pics et le théorème de la limite monotone. □

2 Limites, continuité

2.1 Définitions

On commence par donner une caractérisation de la convergence d'une fonction en un point, qui sera très commode à utiliser. Dans toute la suite, f est une fonction $A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 2.1. *Soient $a \in \bar{A}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors s'équivalent :*

1. $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$
2. *pour toute suite (x_n) à valeurs dans A telle que $x_n \longrightarrow a$, on a $f(x_n) \longrightarrow \ell$.*

Ainsi, une fonction est continue en un point $a \in A$ si et seulement si pour toute suite (x_n) de A telle que $x_n \longrightarrow a$, on a $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

2.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2.2 (dit des valeurs intermédiaires)**.** *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Exercice II.9 (Démonstration, D)**.** Démontrer le théorème en considérant l'ensemble X des points $x \in [a, b]$ tels que $f(x) \leqslant 0$. On pourra remarquer qu'il est non vide puisque $f(a) < 0$ et majoré par b.

Exercice II.10 (M)**.**

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $a < b \in I$, et $k \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(a) < k < f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = k$.
2. Montrer que $f(I)$ est un intervalle.

Exercice II.11 (M)**.** Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$ (on appelle un tel c un *point fixe* de f).
Indication : Considérer $g : x \longmapsto f(x) - x$.

2.3 Théorème de compacité

Théorème 2.3. *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et admet un minimum et un maximum.*

2.4 Fonctions lipschitziennes

Définition 2.4 (Fonction lipschitzienne)**.** On dit que f est *lipschitzienne* s'il existe $M \geqslant 0$ tel que

$$\forall x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|.$$

Dans ce cas, f est dite M-lipschitzienne.

Proposition 2.5. *Une fonction lipschitzienne est continue.*

Exercice II.12 (M)**.**

1. Montrer la proposition 2.5.
2. Montrer que la réciproque est fausse en considérant la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice II.13 (Théorème du point fixe de Banach, D)**.** Soit I un intervalle réel et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction r-lipschitzienne où $r \in [0, 1[$.

1. Montrer que si f admet un point fixe, il est unique.
2. On suppose que $I = \mathbb{R}$. Montrer que f admet bien un point fixe.

   Indication : Raisonner par l'absurde : si ce n'est pas le cas, la fonction continue $g : x \longmapsto f(x) - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, est de signe constant d'après le TVI.
3. Soit $u_0 \in I$ et (u_n) la suite récurrente de premier terme u_0 et de relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $u_n \longrightarrow a$.

   Indication : Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_{n+1} - a| \leqslant r|u_n - a|$.

Exercice II.14 (D)**.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un point fixe a. On suppose que f est dérivable en a et que $|f'(a)| < 1$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $u_0 \in]a - \delta, a + \delta[\cap I$, la suite u de premier terme u_0 et vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie et converge vers a.
Indication : Utiliser la définition de la dérivée pour montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leqslant k|u_n - a|$ pour un réel k bien choisi.

Chapitre III

Suites, épisode 2

1 Sommes

2 Introduction aux séries numériques

Définition 2.1 (Série)**.** Soit u une suite réelle. On appelle *série de terme général* u_n, et on note $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *sommes partielles de* (u_n) définie par :

$$S_n := u_0 + \cdots + u_n.$$

Le terme S_n est appelé *somme partielle de rang* n.

Définition 2.2 (Convergence d'une série)**.**

- Soit $\sum u_n$ une série. On dit qu'elle est *convergente* lorsque sa suite des sommes partielles converge **vers une limite finie**. Dans ce cas, on appelle *somme de la série* $\sum u_n$ la limite de (S_n), qu'on note :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

- Dans le cas contraire, la série est dite *divergente* ((S_n) n'admet donc soit pas de limite, soit une limite infinie).

Proposition 2.3. *Soit* (u_n) *une suite telle que* $\sum u_n$ *converge. Alors* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice III.1 (M)**.**
1. Soit u une suite arithmétique de raison r non nulle. Est-ce que la série de terme général u_n converge ?
2. Soit q un réel. Étudier la convergence de la série $\sum q^n$. Si elle converge, quelle est sa somme ? Sinon, (S_n) admet-elle une limite ?

Exercice III.2 (M)**.** Soit u une suite à termes positifs. Montrer que $\sum u_n$ converge dès que (S_n) est majorée, et que sinon on a $S_n \to +\infty$.

Ce résultat permet d'ailleurs d'énoncer la propriété suivante :

Proposition 2.4. *Soient* u *et* v *deux suites positives. On suppose que* $u_n \leqslant v_n$*. Alors :*

- *Si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge aussi.*
- *Si* $\sum u_n$ *diverge alors* $\sum v_n$ *diverge aussi.*

Exercice III.3 (Critère de d'Alembert, D)**.** Soit u une suite positive. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^+.$$

1. Montrer que si $0 \leqslant \ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
3. Et si $\ell = 1$?

Indication : Comparer u et une suite géométrique pour utiliser la proposition précédente.

3 Comparaison série-intégrale

Théorème 3.1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. On suppose qu'il existe* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *continue et décroissante telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$*. Alors la série* $\sum u_n$ *converge ssi la fonction*

$$x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

admet une limite finie en $+\infty$*.*

Exercice III.4. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Chapitre IV

Équations différentielles

Nous introduirons dans ce cours quelques notions sur l'étude des équations différentielles. Intervenant dans la modélisation de plusieurs phénomènes (physico-chimiques, économiques...), les équations différentielles sont partout, et constituent un volet important des mathématiques, qu'elles soient appliquées ou du domaine de la recherche.

1 Généralités

1.1 Définitions

Une équation différentielle (ou, en abrégé, ED) est la donnée d'un problème où l'on recherche des fonctions vérifiant un ensemble de conditions portant sur elles et leurs dérivées.

Définition 1.1. On appelle *équation différentielle* (ordinaire) la donnée d'une condition de la forme

$$F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et F est une fonction d'une partie $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$ vers $\mathbb{R}$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *solution de l'équation différentielle* (1) si u est n fois dérivable et si pour tout $x \in I$,

$$(x, u(x), \dots, u^{(n)}(x)) \in U \quad \text{et} \quad F(x, u(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0.$$

(La première condition est nécessaire pour que le membre de gauche de la seconde soit bien défini.)

L'entier naturel n est appelé *ordre* de l'équation différentielle (1).

Remarque. On définit de même la notion de *système d'équations différentielles*: au lieu d'avoir qu'une seule fonction inconnue, on en a p, $(y_1, \dots, y_p)$, et la condition s'écrit sous la forme d'un système de q équations :

$$\begin{cases} f_1(x, y_1, \dots, y_1^{(n)}, \dots, y_p, \dots, y_p^{(n)}) & = 0 \\ & \vdots \\ f_q(x, y_1, \dots, y_1^{(n)}, \dots, y_p, \dots, y_p^{(n)}) & = 0 \end{cases}$$

où les $f_i : U \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n+1}}_{p \text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemple 1.1.

- $y' = y$.
- $y'' + \omega^2 y = 0$, $\omega \in \mathbb{R}^*$, appelée *équation de l'oscillateur harmonique.*
- $\theta'' + \alpha^2 \sin\theta = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, appelée *équation du pendule oscillant.*
- $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, appelée *équation de Bessel*, intervenant dans la description de la déformation d'une membrane vibrante.
- $y' = a(x)y + b(x)y^m$, où $m \in \mathbb{R}^*$ et a et b sont des fonctions continues, appelée *équation de Bernoulli.*
- $RCu' + u = E \sin\omega t$, équation vérifiée par la tension aux bornes du condensateur d'un circuit électrique RC soumis à une tension sinusoïdale $E\sin\omega t$.

Exercice IV.1. À chaque ED de l'exemple 1.1, associer une fonction F telle que dans la définition.

Définition 1.2 (Forme résolue)**.** On dit qu'une équation différentielle est sous *forme résolue* s'il existe une fonction $G : W \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Définition 1.3 (Solution maximale)**.** Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de (1). On dit que u en est une *solution maximale* si elle ne peut pas être prolongée en une solution sur un intervalle J contenant I.

Ainsi, pour trouver l'ensemble des solutions d'une ED, on pourra se cantonner à la recherche de ses solutions maximales.

1.2 Problème de Cauchy

Définition 1.4. Étant donnée une équation différentielle (1), on appelle *problème de Cauchy* la donnée supplémentaire d'un point x_0 de $\mathbb{R}$ et de n valeurs $p_0, \dots, p_{n-1}$.

Une fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution du problème de Cauchy associé si c'est une solution de (1) sur I, $x_0 \in I$ et elle et ses dérivées prennent les valeurs $p_0, \dots, p_{n-1}$ en x_0, soit :

$$y(x_0) = p_0, \ \dots, \ y^{(n-1)}(x_0) = p_{n-1}.$$

1.3 Réduction au premier ordre

Dans l'étude générale des équations différentielles, on peut ramener les équations différentielles d'ordre n à un système d'équations du premier ordre.

En effet, on change les dérivées en de nouvelles inconnues. On note $y_0 = y$, puis on pose $y_i = y'_{i-1}$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$. On a alors le système

$$\begin{cases} y'_0 & = y_1 \\ y'_1 & = y_2 \\ \vdots & \\ y'_{n-2} & = y_{n-1} \\ F(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y'_{n-1}) & = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Exemple 1.2. Considérons l'équation du pendule oscillant $\theta'' + \sin\theta = 0$. Elle est d'ordre 2. On peut la réduire à un système du premier ordre de la manière suivante en posant $\omega = \theta'$. On est donc ramené au système :

$$\begin{cases} \theta' = \omega \\ \omega' = -\sin\theta \end{cases}$$

Exercice IV.2. Convertir l'équation de l'oscillateur harmonique $y'' + \omega^2 y = 0$ et l'équation de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$ en systèmes du premier ordre.

2 Équations linéaires du premier ordre

On s'intéresse donc aux équations de la forme

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{E}$$

où a et b sont continues sur un intervalle réel I.

2.1 Équation homogène

Soit donc

$$y' = a(x)y, \tag{H}$$

l'équation dite *homogène* associée à (E).

Théorème 2.1 (Cas $b = 0$)**.** *L'ensemble des solutions de* (H) *est*

$$\mathcal{S}_H = \{x \in I \longmapsto Ce^{A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}\},$$

où A est une primitive de a sur I.

Démonstration. Pour résoudre cette équation différentielle, on va chercher ce que l'on appelle un *facteur intégrant*, c'est-à-dire une fonction $p > 0$ qui sera telle que

$$y' = a(x)y \iff (py)' = 0$$

de façon à ce que y soit solution de (H) si et seulement si elle vérifie la deuxième relation, qui équivaut après intégration à $p(x)y(x) = C$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$. On en déduit la forme de y.

Procédons par analyse-synthèse : on va supposer que l'on ait une telle fonction p, chercher des conditions dessus qui vont nous permettre d'en définir une pour de vrai.

Analyse Soit p une telle fonction et y une solution de (H). On a $y' = a(x)y$ donc en multipliant par p on a $py' = pay$. Par hypothèse sur p on a $(py)' = 0$ soit $p'y = -py'$. Ainsi on a

$$p'y = -pay.$$

Synthèse Il semble que chercher une fonction $p > 0$ telle que $p' = -ap$ suffirait. Comme $p > 0$ on peut diviser des deux côtés, obtenir

$$\frac{p'}{p} = -a.$$

En intégrant, on trouve $\ln(p(x)) = -A(x)$, où A est une primitive de a sur I. Ainsi, passer à l'exponentielle donne que la fonction

$$p : x \longmapsto e^{-A(x)}$$

convient.

Conclusion La fonction $p(x) = e^{A(x)}$ est un facteur intégrant. Enfin, y est solution de (H) ssi $(py)' = 0$ soit en intégrant

$$p(x)y(x) = C, \ C \in \mathbb{R}$$

soit $y(x) = \dfrac{C}{p(x)} = \dfrac{C}{e^{A(x)}}$, i.e. :

$$y(x) = Ce^{A(x)}.$$ □

2.2 Équation non homogène

On étudie donc le problème général,

$$y' = a(x)y + b(x). \tag{E}$$

Nous allons d'abord montrer qu'après résolution de l'équation homogène (H), il suffit de trouver une solution particulière y_p de (E), définie sur I, pour conclure.

En effet, soit y une solution **maximale** de (E) sur un intervalle $J \subset I$. Ainsi, $y' = ay + b$; rappelons qu'il en est de même pour y_p. Alors, en faisant la différence, on a que la fonction $z \coloneqq y - y_p$ définie sur J vérifie

$$z' = az$$

i.e. est solution de (H) sur J. On peut donc la prolonger en solution sur I tout entier, ce qui permet de prolonger $y = y_p + z$ sur I puisque y_p est définie sur I. Mais y est maximale, donc on avait forcément $J = I$.

Réciproquement, on vérifie facilement que toute fonction de la forme $y = y_p + z$, où $z : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est solution de (H), est solution de (E) sur I (donc *a fortiori* maximale).

Conclusion Les solutions maximales de (E) sont, étant donnée une solution maximale y_p sur I:

$$\mathcal{S} = \{x \in I \longmapsto Ce^{A(x)} + y_p(x), \quad C \in \mathbb{R}\}$$

Le problème maintenant est de trouver une solution particulière. Voici une méthode :

Méthode de variation de la constante On part des solutions de l'équation homogène, en faisant *varier* la constante qui intervient : on cherche une fonction dérivable C telle que $y_p : x \longmapsto C(x)e^{-A(x)}$ soit solution de (E).

Si C est une telle fonction, on a $y_p' = a(x)y_p + b(x)$, d'où

$$C'(x)e^{A(x)} = b(x) \quad \text{i.e.} \quad C'(x) = b(x)e^{-A(x)}.$$

Ainsi, toute primitive C du membre de droite convient.

Remarque. Des fois, la méthode de variation de la constante est inutile, car une solution particulière peut être devinée, en cherchant quelque chose de la même forme que le second membre.

Exercice IV.3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + \lambda y = 0$, où $\lambda > 0$.
2. $y' + xy = 0$.
3. $y' + \frac{1}{x}y = 1$.
4. $y' - y = e^x \cos x$.

3 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse ici aux équations de la forme

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{E}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Le cas plus général où a, b sont des fonctions (continues), ne sera pas étudié ici. Contrairement au cas du premier ordre, il n'existe alors pas de méthode de résolution générale. Les solutions peuvent prendre n'importe quelle forme, voire même peuvent ne pas être explicitées ; leur étude qualitative est l'objet de la théorie de Sturm-Liouville.

3.1 Cas homogène

On étudie d'abord le cas homogène, soit $f(x) = 0$:

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{H}$$

On admettra le théorème suivant, qui se démontre en Maths Spé' ou en deuxième année de licence :

Théorème 3.1. *Les solutions de* (H) *dépendent de la nature des racines de l'équation dite caractéristique:*

$$r^2 + ar + b = 0.$$

On discute selon les valeurs discriminant $\Delta = a^2 - 4b$*:*

- *Si* $\Delta > 0$*, alors l'équation caractéristique admet deux racines* ***réelles*** r_1 *et* r_2*, et les solutions de* (H) *sont de la forme*

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

- *Dans le cas $\Delta < 0$, les deux racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées et s'écrivent $r_1 = \alpha - i\omega$ et $_2 = \alpha + i\omega$ avec $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$. Les solutions de* (H) *s'expriment sous la forme*

$$x \longmapsto e^{\alpha x}(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

ou

$$x \longmapsto Ae^{\alpha x}\cos(\omega x - \varphi), \quad A, \varphi \in \mathbb{R}.$$

- *Si $\Delta = 0$, l'équation admet une **racine double** r, et les solutions de* (H) *sont de la forme*

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto (A + Bx)e^{rx}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

3.2 Équation non homogène

Comme au premier ordre, les solutions générales de l'équation différentielle (E) s'écriront sous la forme $y_p + z$, où z est solution de (H) et y_p est une solution particulière.

Le problème, c'est trouver une solution particulière. Il existe une méthode de variation de la constante, mais elle est bien plus compliquée à mettre en œuvre qu'au premier ordre. On va se contenter de donner quelques méthodes quand on est confronté à des second membres particuliers.

En général, on essaie de chercher une solution qui à la même tête que le second membre.

3.3 Exercices

Exercice IV.4. Résoudre :

1. $y'' + 2y' + y = 0$.
2. $y'' + \omega^2 y = 0$, où $\omega \in \mathbb{R}^*$.
3. $y'' - \omega^2 y = 0$, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$
4. $y'' + 6y' + 25y = -5$.

Exercice IV.5. Soient ω et ν deux réels non nuls. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = \cos(\nu x)$, dans les cas :

1. $\omega = \nu$
2. $\omega \neq \nu$

Exercice IV.6. Même exercice que précédemment, avec l'ED $y'' + \omega^2 y = \sin(\nu x)$.

Exercice IV.7. Résoudre $y'' + 6y' - 16y = e^{\lambda x}$, quand :

1. $\lambda = -8$ ou 2.
2. $\lambda \neq -8$ et 2.

Exercice IV.8. Résoudre le problème de Cauchy $y''+6y'+25y = e^{-3x}\cos(4x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4 Intégration numérique d'équations différentielles

Des fois, on veut avoir l'allure d'une solution exacte d'une équation différentielle, mais on ne sait pas la résoudre, ou la solution est trop complexe pour la tracer.

4.1 Principe

Étant donnée une équation différentielle sous forme résolue

$$y' = f(y, x), \tag{4}$$

(noter l'inversion des arguments par rapport à la notation classique) il est possible de calculer de proche en proche, à l'aide d'un algorithme, des valeurs d'une solution approchée en plusieurs points d'un segment sur lequel une solution existe.

4.2 Implémentation

Le langage Python dispose de librairies – des collections de procédures et de fonctions préprogrammées – nous permettant d'obtenir des solutions approchées d'une équation différentielle.

L'implémentation la plus couramment utilisée pour résoudre numériquement des ED est la fonction `odeint` de la librairie `scipy.integrate`, qui prend en arguments la fonction f, la valeur initiale y_0 et la liste des points `X` où calculer la solution approchée, dont le premier correspond au point x_0 de la valeur initiale. Elle renvoie la liste `Y` des valeurs prises par la solution approchée.

Pour définir les points de calcul, on va utiliser la fonction `linspace` de la librairie `numpy`. Elle prend trois arguments `a`, `b` et `n` et renvoie une subdivision régulière de n points de $[a, b]$.

On peut éventuellement utiliser le module `matplotlib.pyplot` pour tracer un graphe de la solution approchée.

4.3 Exemples

Exemple 4.1. La figure ci-dessous a été produite par le code Python suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integrate

def f(y,x) :
    return -0.5*y + 0.4*np.sin(2*x)

X = np.linspace(0, 20, 2000)
Y = integrate.odeint(F, 0.4, X)
plt.plot(X,Y)
plt.grid()
plt.show()
```

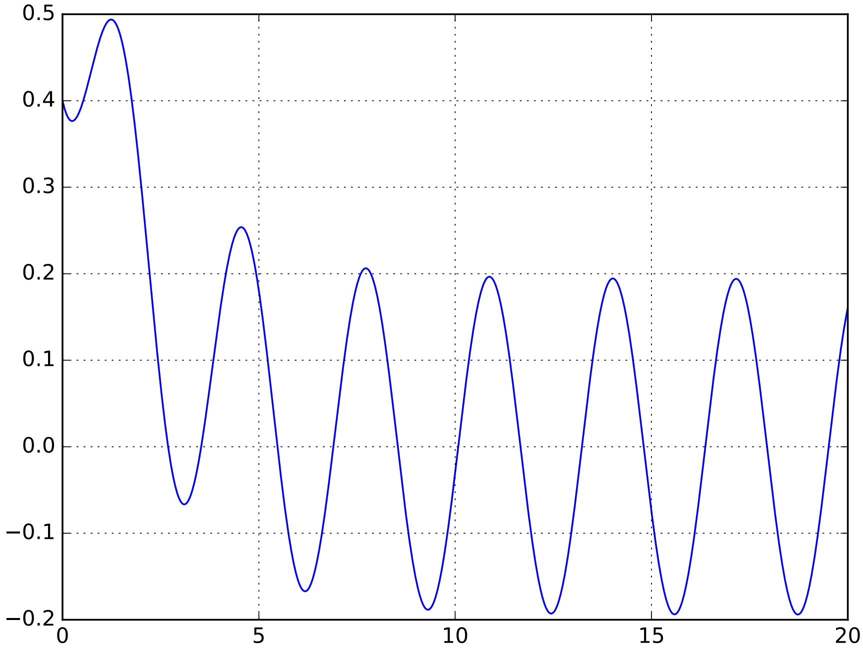

Fig. 1 : Solution de $u' + \frac{1}{2}u = \frac{2}{5}\sin(2x)$, $u(0) = \frac{2}{5}$.

Analysons le code de plus près.

- ```
  import numpy as np
  import matplotlib.pyplot as plt
  import scipy.integrate as integrate
  ```

  importe les librairies dont on aura besoin : `numpy` pour les fonctions mathématiques, le module `matplotlib.pyploy` de la librairie `matplotlib` pour tracer un graphe, et le plus important, le module `scipy.integrate` de la librairie `scipy` qui gère le calcul numérique d'intégrales et surtout d'équations différentielles.

- ```
  def f(y,x) :
      return -0.5*y + 0.4*np.sin(2*x)
  ```

  définit la fonction f intervenant dans (4). On remarquera que les variables sont inversées ; c'est parce que `scipy.integrate.odeint` a besoin qu'on lui donne en premier la fonction, puis la variable.

- ```
  X = np.linspace(0, 20, 2000)
  Y = integrate.odeint(f, 0.4, X)
  ```

  définit la liste `X` des points où calculer la solution approchée, et la liste `Y` des valeurs correspondantes.
  ```

- Enfin,

  ```
  plt.plot(X,Y)
  plt.grid()
  plt.show()
  ```

  crée le graphe, dessine le quadrillage et trace la figure.

Exemple 4.2 (Ordre 2)**.** On reprend l'équation du pendule oscillant

$$\theta'' + \sin\theta = 0.$$

La fonction `odeint` ne sait pas traiter directement les équations d'ordre supérieur ; mais il sait traiter les systèmes d'ordre un ! D'après l'exemple 1.2, on peut se ramener à

$$\begin{cases} \theta' &= \omega \\ \omega' &= -\sin\theta \end{cases}$$

soit

$$y' = f(y, x)$$

avec $y = (\theta, \omega)$ et $f : (u, v) \mapsto (v, -\sin u)$.

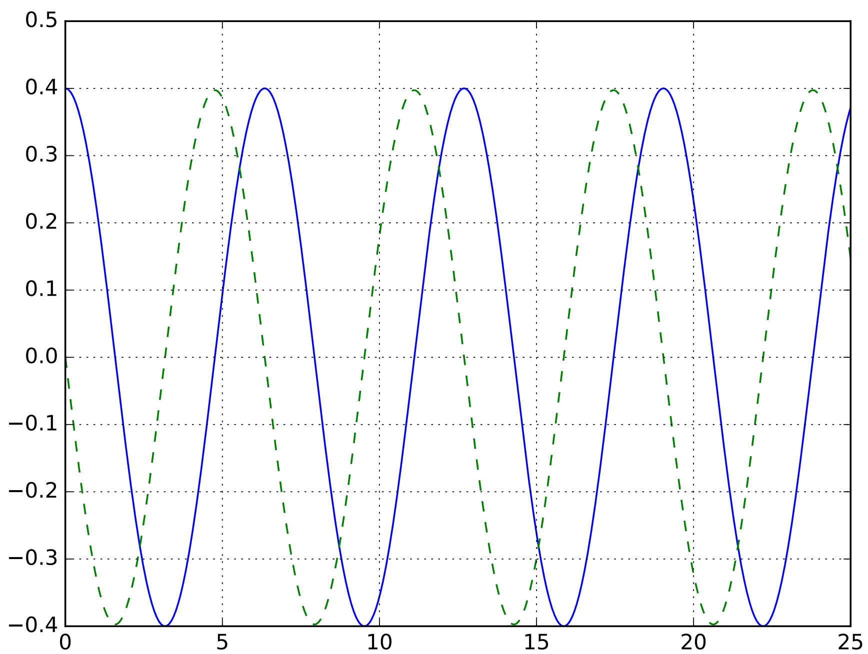

FIG. 2 : Solution de $\theta''+\sin\theta = 0$, $\theta(0) = 0,4$ et $\theta'(0) = 0$. θ est en trait plein, sa dérivée en tirets.

```
def F(y,x) :
    theta = y[0]
    omega = y[1]
    return [omega,-np.sin(theta)]

X = np.linspace(0, 25, 2000)
Y = integrate.odeint(F, [0.4,0], X)
plt.plot(X,Y)
plt.grid()
plt.show()
```