1 Introduction

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$.

On se propose d'étudier le comportement des suites récurrentes de relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

On étudiera d'abord la convergence de ces suites, en fonction de leur premier terme u_0, puis, en s'appuyant sur l'outil informatique, on regardera leur «comportement asymptotique», c'est-à-dire si elle s'approche d'une suite que l'on peut exprimer simplement.

2 Étude générale

Soit $u_0 \in [0,1]$, et (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Établir le tableau de variation de la fonction f, en déduire que le segment $[0,1]$ est stable par f. En déduire que (u_n) est bien définie, et bornée.
- En étudiant le signe de $g : x \longmapsto f(x) - x$, montrer que (u_n) est monotone.
- Conclure que (u_n)

3 Comportement asymptotique

On s'appuiera ici sur l'utilisation du langage informatique Python pour analyser le comportement de u_n pour n grand.

Tout d'abord, on importe dans l'instance Python démarrée les librairies de fonctions qui vont nous permettre, respectivement, de tracer des graphes (`matplotlib` et son module `matplotlib.pyplot`) et mener des calculs mathématiques (`numpy`):

```
In [1]: import matplotlib as mpl
        %matplotlib inline
        %config InlineBackend.figure_format = 'retina'
        import matplotlib.pyplot as plt
        import numpy as np
        from ipywidgets import interact,widgets
```

NB: La dernière ligne sert à présenter les figures tracées juste après les blocks de code sur cette page.

On peut maintenant définir la fonction f de la relation de récurrence:

```
In [2]: def f(x):
            return 0.5*x*(1-x)
```

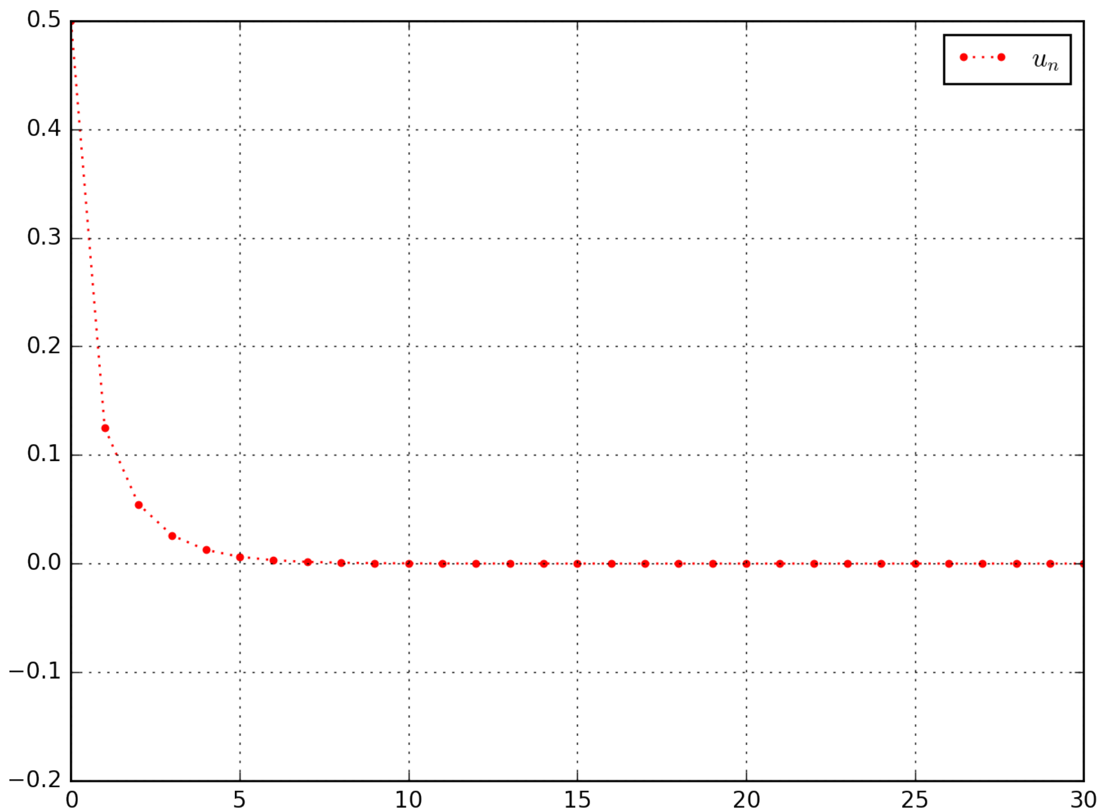
Et calculer quelques termes de la suite (u_n) :

```
In [3]: U = [0.5]
        n = 30

        for i in range(n):
            U.append(f(U[-1]))
```

Et enfin construire une figure `fig` constituée de deux graphes `ax0` et `ax1`, respectivement les termes de la suite u_n et ceux de la suite $2^n u_n$:

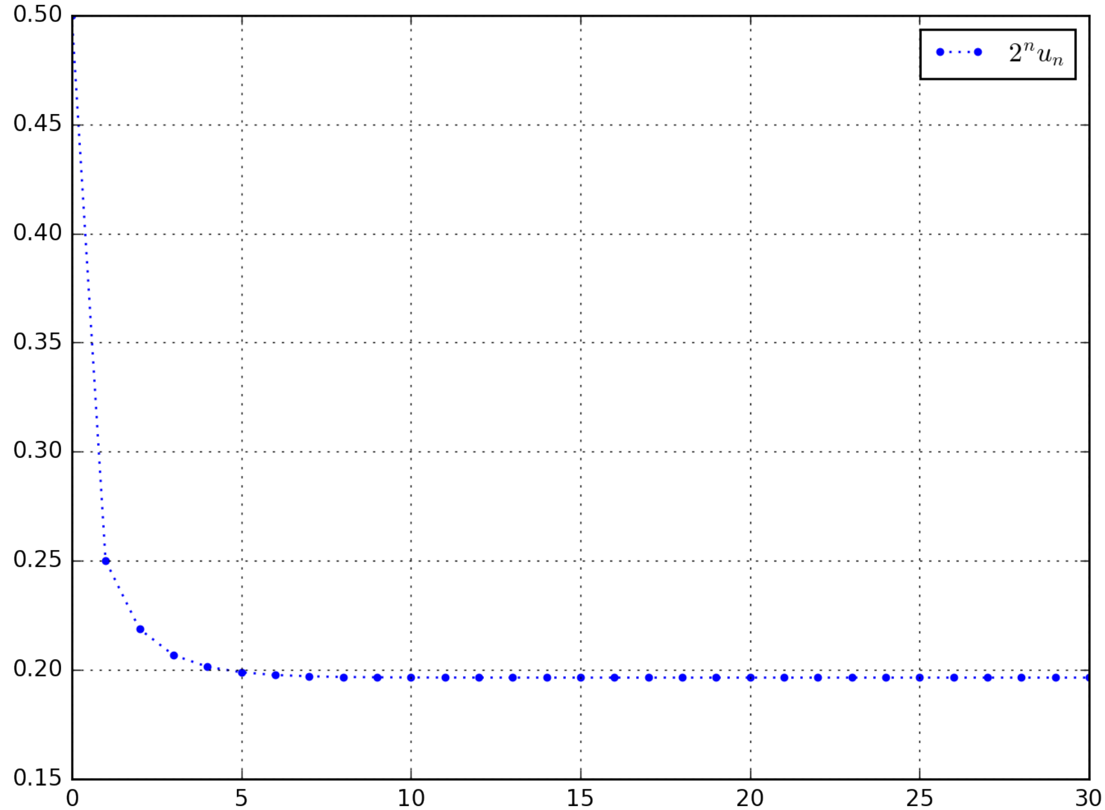
```
In [4]: fig0, ax0 = plt.subplots(1,1, figsize=(8,6))

        ax0.grid()
        ax0.plot(U, 'r.:', label = r'$u_n$')
        ax0.legend()
        ax0.set_ylim(bottom=-0.2)
```

```
Out[4]: (-0.2, 0.5)
```




```
In [5]: fig1, ax1 = plt.subplots(1,1, figsize=(8,6))

        ax1.grid()
        def build_aux():
            su = [u*2**i for i,u in enumerate(U)]
            return su
        s = build_aux()
        ax1.plot(s, 'b.:', label= r'$2^nu_n$')
        ax1.legend()
```

Out[5]: <matplotlib.legend.Legend at 0x29dac0e9dd8>



Pour avoir une idée de vers quoi tend $2^n u_n$, on peut prendre les derniers termes calculés:

```
In [6]: s[-11:-1]
```

```
Out[6]: [0.19645349999004186,
         0.1964534631839566,
         0.19645344478092086,
         0.19645343557940473,
         0.1964534309786471,
         0.19645342867826837,
         0.19645342752807904,
         0.19645342695298437,
         0.19645342666543705,
         0.1964534265216634]
```

Ainsi, on a que $2^n u_n \longrightarrow C$, où $C \approx 0.196$ à 10^{-3} près, d'où

$$u_n \simeq \frac{0.196}{2^n}.$$

4 Une autre suite

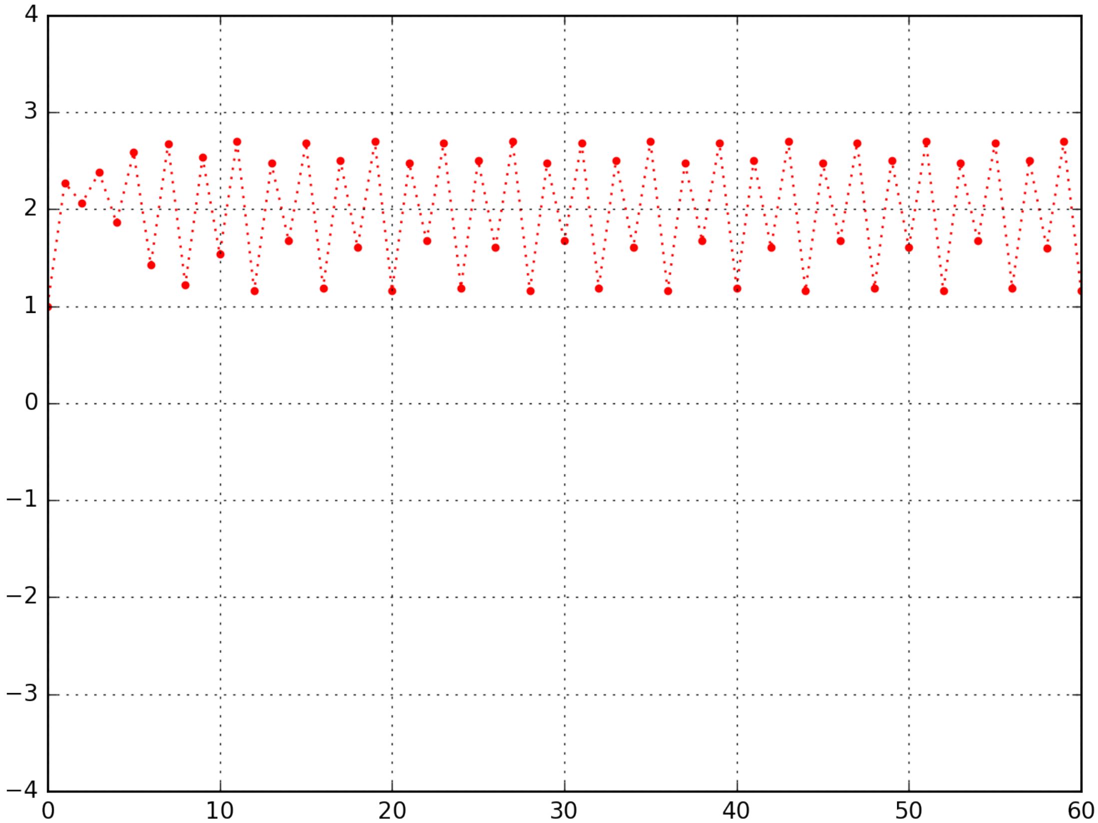
On s'intéresse ici aux suites vérifiant une relation de récurrence de la forme

$$u_{n+1} = a\sin(u_n)$$

où $a \in \mathbb{R}$ est fixé.

On propose le programme suivant : les deux variables `a` et `u0` peuvent être ajustées pour étudier le comportement de la suite.

```
In [9]: ###### Définition de f

        def plot_u(a,u0):
            def F(x):
                return a*np.sin(x)

            U = [u0]
            n = 60

            for i in range(n):
                U.append(F(U[-1]))

            fig = plt.figure(figsize=(8,6))
            ax = fig.add_subplot(1,1,1)
            ax.grid()
            ax.set_ylim(bottom=-4,top=4)
            ax.plot(U, 'r.:')
            ax.set_xlim()

        # Éléments interactifs / sliders

        interact(plot_u,
                a = widgets.FloatSlider(value=1,min=-4.,max=4.,step=0.05),
                u0 = widgets.FloatSlider(value=1,min=-1.,max=1.,step=0.05))
```



4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
0
10
20
30
40
50
60