

# Activité : suites récurrentes d'ordre 1

November 19, 2016

## 1 Introduction

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in [0, 1]$  par  $f(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$ .

On se propose d'étudier le comportement des suites récurrentes de relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

On étudiera d'abord la convergence de ces suites, en fonction de leur premier terme  $u_0$ , puis, en s'appuyant sur l'outil informatique, on regardera leur «comportement asymptotique», c'est-à-dire si elle s'approche d'une suite que l'on peut exprimer simplement.

## 2 Étude générale

Soit  $u_0 \in [0, 1]$ , et  $(u_n)$  la suite définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- Établir le tableau de variation de la fonction  $f$ , en déduire que le segment  $[0, 1]$  est stable par  $f$ . En déduire que  $(u_n)$  est bien définie, et bornée.
- En étudiant le signe de  $g : x \mapsto f(x) - x$ , montrer que  $(u_n)$  est monotone.
- Conclure que  $(u_n)$

## 3 Comportement asymptotique

On s'appuiera ici sur l'utilisation du langage informatique Python pour analyser le comportement de  $u_n$  pour  $n$  grand.

Tout d'abord, on importe dans l'instance Python démarrée les bibliothèques de fonctions qui vont nous permettre, respectivement, de tracer des graphes (`matplotlib` et son module `matplotlib.pyplot`) et mener des calculs mathématiques (`numpy`):

```
In [1]: %matplotlib inline
import matplotlib as mpl
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from ipywidgets import interact, widgets
```

*NB: La dernière ligne sert à présenter les figures tracées juste après les blocks de code sur cette page.*

On peut maintenant définir la fonction  $f$  de la relation de récurrence:

```
In [2]: def f(x):
return 0.5*x*(1-x)
```

Et calculer quelques termes de la suite  $(u_n)$  :

```
In [3]: U = [0.5]
        n = 30

        for i in range(n):
            U.append(f(U[-1]))
```

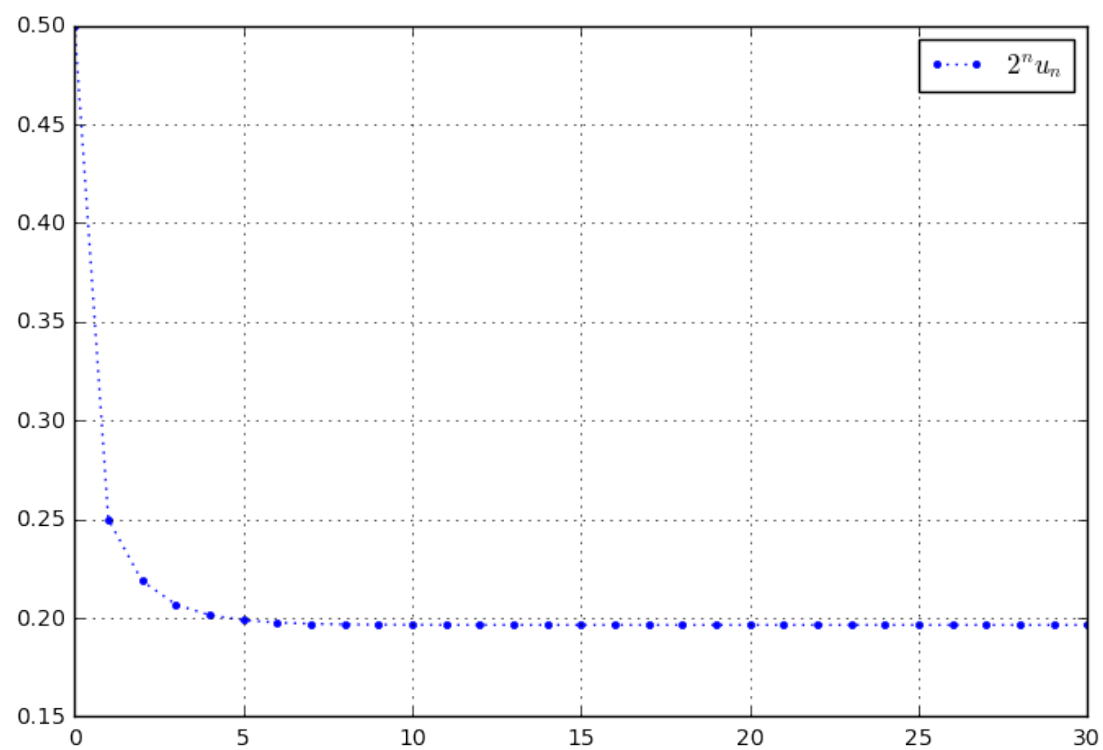
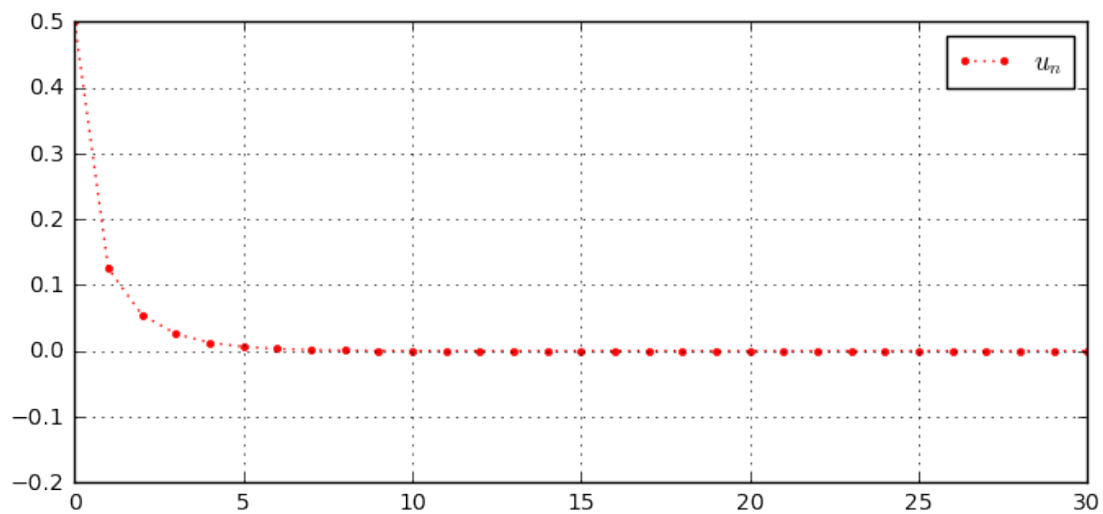
Et enfin construire une figure `fig` constituée de deux graphes `ax0` et `ax1`, respectivement les termes de la suite  $u_n$  et ceux de la suite  $2^n u_n$ :

```
In [4]: fig, (ax0,ax1) = plt.subplots(2,1, figsize=(8,10), dpi = 70,
        gridspec_kw = {'height_ratios':[2, 3]})

        ax0.grid()
        ax0.plot(U, 'r.: ', label = r'$u_n$')
        ax0.legend()
        ax0.set_ylim(bottom=-0.2)

        ax1.grid()
        def build_aux():
            su = [u*2**i for i,u in enumerate(U)]
            return su
        s = build_aux()
        ax1.plot(s, 'b.: ', label= r'$2^{nu_n}$')
        ax1.legend()

Out[4]: <matplotlib.legend.Legend at 0x1aa50805550>
```



Pour avoir une idée de vers quoi tend  $2^n u_n$ , on peut prendre les derniers termes calculés:

```
In [5]: s[-11:-1]
```

```
Out[5]: [0.19645349999004186,
         0.1964534631839566,
         0.19645344478092086,
         0.19645343557940473,
```

```

0.1964534309786471,
0.19645342867826837,
0.19645342752807904,
0.19645342695298437,
0.19645342666543705,
0.1964534265216634]

```

Ainsi, on a que  $2^n u_n \rightarrow C$ , où  $C \approx 0.196$  à  $10^{-3}$  près, d'où

$$u_n \simeq \frac{0.196}{2^n}. \quad (1)$$

## 4 Une autre suite

On s'intéresse ici aux suites vérifiant une relation de récurrence de la forme

$$u_{n+1} = a \sin(u_n)$$

où  $a \in \mathbb{R}$  est fixé.

On propose le programme suivant : les deux variables `a` et `u0` peuvent être ajustées pour étudier le comportement de la suite.

```

In [15]: # Définition de f

def plot_u(a,u0):
    def F(x):
        return a*np.sin(x)

    U = [u0]
    n = 60

    for i in range(n):
        U.append(F(U[-1]))

    fig = plt.figure(figsize=(10,8))
    ax = fig.add_subplot(1,1,1)
    ax.grid()
    ax.set_ylim(bottom=-4,top=4)
    ax.plot(U, 'r.:')
    ax.set_xlim()

    # Éléments interactifs / sliders

    interact(plot_u,
             a = widgets.FloatSlider(value=1,min=-4.,max=4.,step=0.05),
             u0 = widgets.FloatSlider(value=1,min=-1.,max=1.,step=0.05))

Out[15]: <function __main__.plot_u>

```

