1 Exercice I.6

La fonction f est dérivable, sa dérivée est $f'(x) = 3(x-1)^2 \geq 0$, d'où f est strictement croissante sur $I :=]-\infty, 1]$. De plus $f(x) \to -\infty$ lorsque $x \to -\infty$, et $f(1) = 0$.

Ainsi, l'image de I par f est $]-\infty, 0] \subset I$, et la stabilité de I par f. Enfin,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I.$$

On a $g(x) = (x-1)^3 - x$, d'où g est dérivable de dérivée $g'(x) = 3(x-1)^2 - 1 = 3x^2 - 6x + 2 = 3\left(x - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Donc g a pour maximum sur I le réel $g\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} - 1 < 0$, d'où $g < 0$ sur I.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$: (u_n) est strictement décroissante.

On a deux cas de figure : u minorée (et donc converge vers un réel $\ell < u_0 \leq 1$), et u non minorée (et donc $u_n \to -\infty$).

Si u est minorée, elle admet une limite finie $\ell \in I$ qui vérifie alors $f(\ell) = \ell$ i.e. $g(\ell) = 0$, mais $g < 0$ sur I: absurde.
Donc u n'est pas minorée,

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

2 Exercice I.7

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto -(x-2)^2 + 2$.

Étudions le signe de $g : x \longmapsto f(x) - x$ sur $]-\infty, 2]$. On a $g(x) = -(x-2)^2 + 2 - x = -x^2 + 3x - 2 = -(x-1)(x-2)$ pour tout $x \leq 2$, d'où 1 et 2 sont les seuls points fixes de f, et le tableau de signe suivant:

x	$-\infty$		1		2
$g(x)$		$-$		$+$	

De plus $f'(x) = -2(x-2)$ d'où f est strictement croissante sur $]-\infty, 2]$. Donc $1 < x < 2 \Rightarrow 1 = f(1) < f(x) < f(2) = 2$ (donc $I :=]-\infty, 1[$ est stable), et $x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) = 1$ (donc $J :=]1, 2[$ est stable).

On distingue trois cas : $u_0 < 1$, $u_0 = 1$, et $1 < u_0 < 2$.

Dans le deuxième cas u stationne à 1.
Dans le premier, on a $u_n \in I\ \forall n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$ et u est strictement décroissante, non minorée sinon elle converge vers un point fixe qui serait inférieur à 1 ce qui est impossible : donc elle tend vers $-\infty$.
Dans le dernier, on a $u_n \in J\ \forall n \in \mathbb{N}$ donc $g(u_n) > 0$ et u est strictement croissante, majorée par 2 ; ainsi u converge vers un point fixe de f, qui ne peut être 1 par croissance de u :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

Pour finir, un petit aperçu du comportement de (u_n) avec diverses valeurs de u_0 :

```
In [1]: %matplotlib inline
        import matplotlib.pyplot as plt

        def f(x):
            '''Fonction de récurrence f'''
            return -(x-2)**2+2

        def flot(u0,n):
            '''Construit les n premiers termes de la suite
            de premier terme u0 vérifiant u_n+1 = f(u_n)'''
            L = [u0]
            for i in range(n): # construit les n premiers termes
                terme = L[-1]
                term_suiv = f(terme)
                L.append(term_suiv)
            return L
```

```
In [2]: def build_flow(prems,nmaxs,placement):
            """Construction des graphes des suites (u_n)"""
            nb_g = max(placement)+1
            fig,ax = plt.subplots(nb_g,1, figsize=(8,8))
            for i,[p, s, u0] in enumerate(zip(placement,styl,prems)):
                ax[p].plot(flot(u0,nmaxs[p]),s,label=r'$u_0={}$'.format(u0))
                # ajoute les points de la liste L au graphe
            for axi in ax:
                axi.grid()
                axi.legend(loc=0)
                axi.margins(y=0.06) # marge additionnelle sur l'axe des ordonnées
                axi.set_xlabel(r'$n$') # titre axe des abscisses
                axi.set_ylabel(r'$u_n$') # titre axe des ordonnées
```

```
In [3]: prems = [1, 2, 1.003, 2.91, 3.01, 0.996]
        nmaxes = [16, 8]
        placement = [0, 1, 0, 0, 1, 1]
        styl = ['^--', '^--', 'p-.', '--.', 'p-.', '.-.']
        build_flow(prems,nmaxes,placement)
```