

1 Exercice I.6

La fonction f est dérivable, sa dérivée est $f'(x) = 3(x-1)^2 \geq 0$, d'où f est strictement croissante sur $I :=]-\infty, 1]$. De plus $f(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$, et $f(1) = 0$.

Ainsi, l'image de I par f est $] -\infty, 0] \subset I$, et la stabilité de I par f . Enfin,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I.$$

On a $g(x) = (x-1)^3 - x$, d'où g est dérivable de dérivée $g'(x) = 3(x-1)^2 - 1 = 3x^2 - 6x + 2 = 3\left(x-1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Donc g a pour maximum sur I le réel $g\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} - 1 < 0$, d'où $g < 0$ sur I .

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$: (u_n) est strictement décroissante.

On a deux cas de figure : u minorée (et donc converge vers un réel $\ell < u_0 \leq 1$), et u non minorée (et donc $u_n \rightarrow -\infty$).

Si u est minorée, elle admet une limite finie $\ell \in I$ qui vérifie alors $f(\ell) = \ell$ i.e. $g(\ell) = 0$, mais $g < 0$ sur I : absurde.

Donc u n'est pas minorée,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty.$$

2 Exercice I.7

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -(x-2)^2 + 2$.

Étudions le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $] -\infty, 2]$. On a $g(x) = -(x-2)^2 + 2 - x = -x^2 + 3x - 2 = -(x-1)(x-2)$ pour tout $x \leq 2$, d'où 1 et 2 sont les seuls points fixes de f , et le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	1	2
$g(x)$		-	+

De plus $f'(x) = -2(x-2)$ d'où f est strictement croissante sur $] -\infty, 2]$. Donc $1 < x < 2 \Rightarrow 1 = f(1) < f(x) < f(2) = 2$ (donc $I :=]-\infty, 1[$ est stable), et $x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) = 1$ (donc $J :=]1, 2[$ est stable).

On distingue trois cas : $u_0 < 1$, $u_0 = 1$, et $1 < u_0 < 2$.

Dans le deuxième cas u stationne à 1.

Dans le premier, on a $u_n \in I \forall n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$ et u est strictement décroissante, non minorée sinon elle converge vers un point fixe qui serait inférieur à 1 ce qui est impossible : donc elle tend vers $-\infty$.

Dans le dernier, on a $u_n \in J \forall n \in \mathbb{N}$ donc $g(u_n) > 0$ et u est strictement croissante, majorée par 2 ; ainsi u converge vers un point fixe de f , qui ne peut être 1 par croissance de $u : u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

Pour finir, un petit aperçu du comportement de (u_n) avec diverses valeurs de u_0 :

```
In [1] : %matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

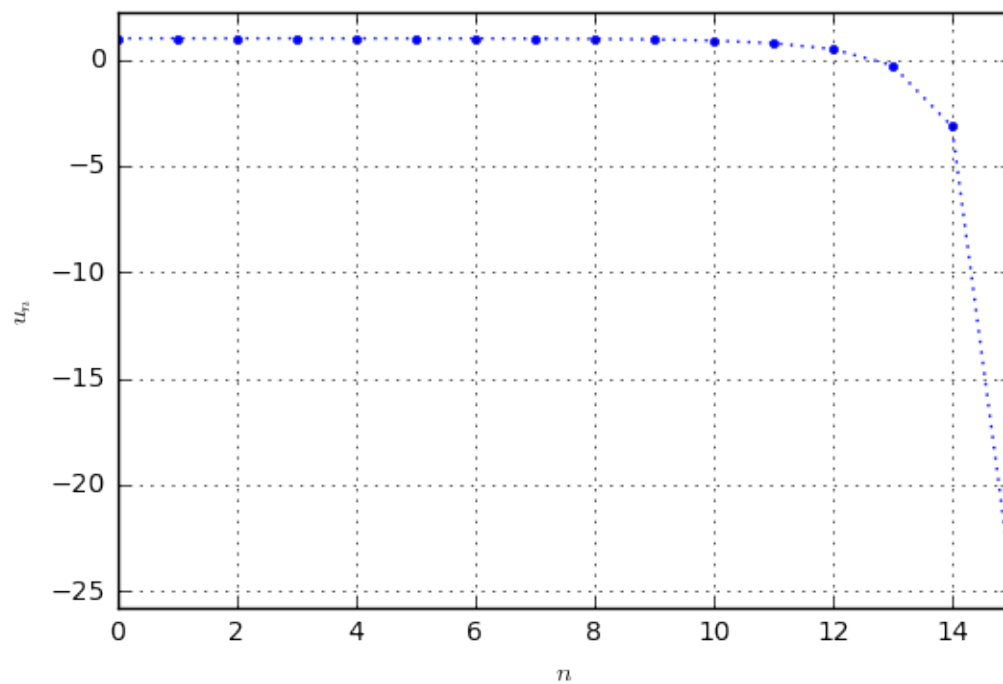
def f(x):
    '''Fonction de récurrence f'''
    return -(x-2)**2+2
```

```

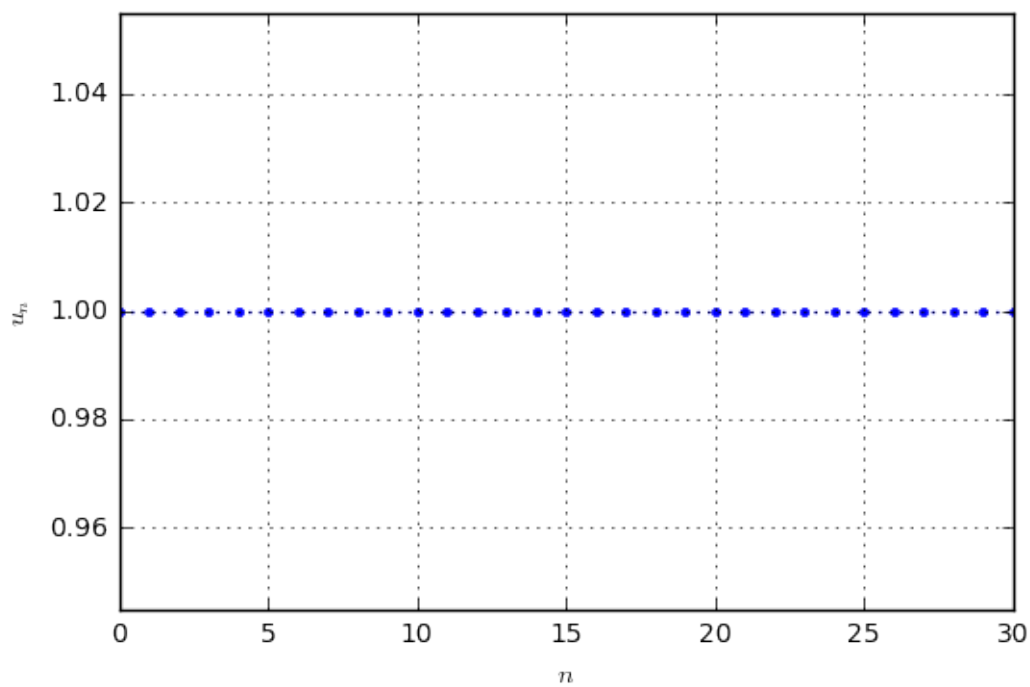
def Phi(u0,n):
    '''Construit un graphe des n premiers termes de la suite,
    avec condition initiale u0'''
    fig,ax = plt.subplots(1,1) # définit une instance de graphe
    L = [u0]
    for i in range(n): # construit les n premiers termes
        terme = L[-1]
        term_suiv = f(terme)
        L.append(term_suiv)
    ax.grid()
    ax.margins(y=0.05) # marge additionnelle sur l'axe des ordonnées
    ax.set_xlabel(r'$n$') # titre axe des abscisses
    ax.set_ylabel(r'$u_n$') # titre axe des ordonnées
    ax.plot(L,':.') # ajoute les points de la liste L au graphe

```

In [2] : Phi(0.9999,15)



In [3] : Phi(1,30)



In [4] : $\text{Phi}(1.0001, 30)$

