Exercices de Khôlle – Terminale S

Lycée Julie-Victoire Daubié

Exercice 1 (Une suite arithmético-géométrique (M))

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= -2u_n + 3 \end{aligned}$$

1. On pose $v_n := u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de v_n, puis celle de u_n.
2. On définit la suite (S_n) des sommes de (u_n), par

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n.$$

   Déterminer l'expression de S_n.
3. Étudier la convergence de la suite (S_n) (converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?)

Indication Remarquer que (u_n) est la somme d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique, dont on précisera les premiers termes et les raisons respectives.

Exercice 2 (F)

Soit (u_n) une suite réelle, **supposée géométrique**, telle que

$$\begin{aligned} u_0 &= 3 \\ u_3 &= \frac{3}{16\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

1. Déterminer la raison de (u_n).
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n.$$

   Déterminer l'expression de S_n. Étudier la convergence de (S_n) et, si elle existe, déterminer sa limite.

Exercice 3 (M)

Soit (u_n) la suite **complexe** définie par :

$$u_0 = i$$
$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) u_n$$

1. De quel type de suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle ? Quelle est sa raison ?
2. Étudier la convergence de $(|u_n|)$ (converge-t-elle ? Si oui, que vaut sa limite ?)
3. Même questions que la 1. pour la suite $(\arg(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminer son expression et étudier sa convergence.

Exercice 4 (F)

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$
2. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$
3. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$
4. $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
5. $u_n = \dfrac{1}{n+\cos(n)}$
6. $u_n = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
   Indication Quelle est la limite de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ en 0 ?
7. $u_n = n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
   Indication Quelle est la limite de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ en 0 ?

Exercice 5 (Convergence d'une série (D))

Le but de l'exercice est de démontrer la convergence de la suite (S_n) définie pour tout $n \geq 0$ par

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{\ln(1+k)}{3^k} = \frac{\ln(1+0)}{3^0} + \frac{\ln(1+1)}{3^1} + \cdots + \frac{\ln(1+n)}{3^n}.$$

1. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
   Indication Que vaut $S_{n+1} - S_n$?
2. Montrer par récurrence la propriété suivante pour tout entier naturel n:
$$n < 2^n \tag{P_n}$$
3. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$,
$$\ln(1+x) \leq x.$$

On montrera que l'application $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \ln(1+x) - x$$

est positive, via une étude de fonction.

4. En déduire que pour tout $k \geq 0$, $\ln(1+k) < 2^k$, puis que

$$\frac{\ln(1+k)}{3^k} < \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

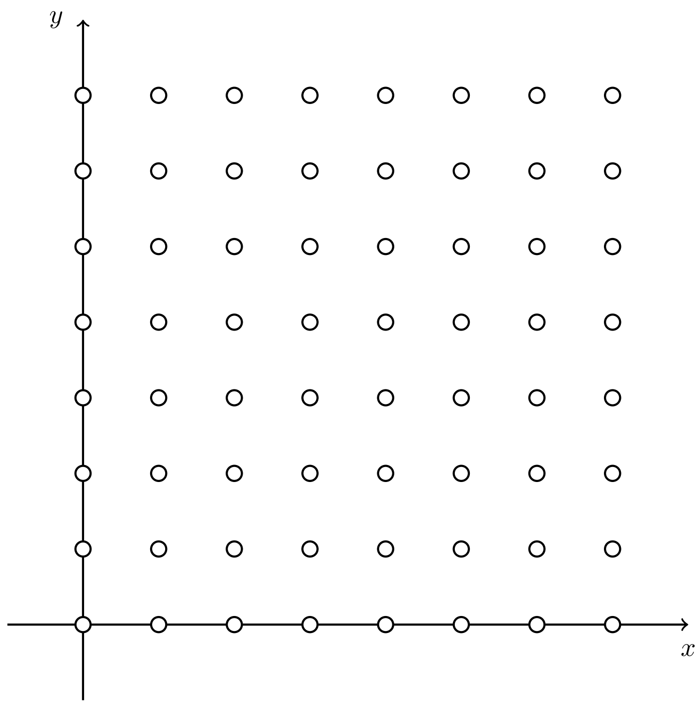
5. En déduire que

$$0 \leq S_n \leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

6. Conclure.

Exercice 6 (Marches aléatoires (M))

On considère une grille $n \times n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ de points du plan (k, ℓ) pour $0 \leq k \leq n-1$ et $0 \leq \ell \leq n-1$.



On étudie les chemins construits en faisant des pas vers la droite ou vers le haut, où chaque direction à une probabilité d'être choisie de $\frac{1}{2}$ à chaque étape. On appelle *marche aléatoire* un tel chemin.

On considère

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de déplacements vers la droite.

1. Déterminer la loi de X.
2. Combien de pas la droite fait-on en moyenne ?

Exercice 7 (F)

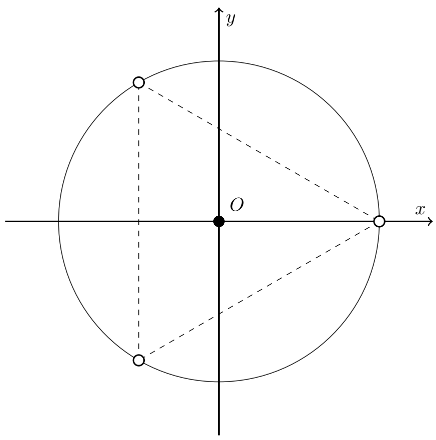
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé (un ensemble muni d'une probabilité). Calculer $\mathbb{P}(B)$:

1. Sachant que $\mathbb{P}(A) = 1/3$ et $\mathbb{P}_A(B) = 2/5$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = 1/4$.
2. Sachant que $\mathbb{P}(A) = 2/3$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/3$ et $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 1/6$.

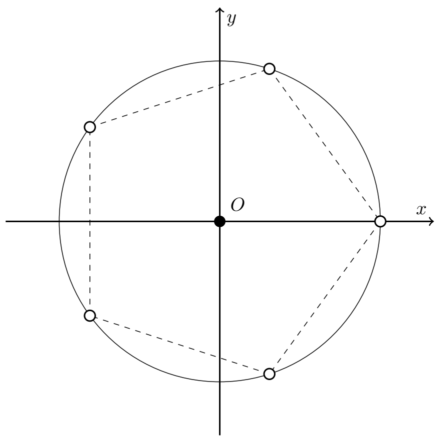
Exercice 8 (M)

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des nombres complexes a tels que $a^n = 1$. On montre que ses éléments sont de la forme

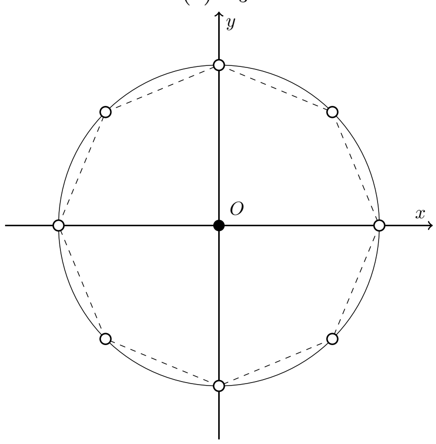
$$\omega^k = e^{2ik\pi/n},\ 0 \leq k \leq n-1,\ \text{où } \omega = e^{2i\pi/n}.$$



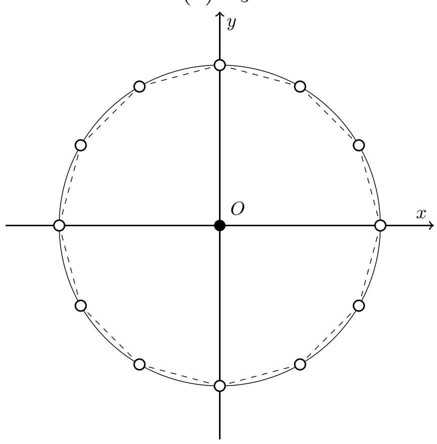
(a) $\mathbb{U}_3$.



(b) $\mathbb{U}_5$.



(c) $\mathbb{U}_8$.



(d) $\mathbb{U}_{12}$.

On munit $\mathbb{U}_n$ de la mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Ainsi, pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$,

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n}.$$

1. On prend au hasard un élément z de $\mathbb{U}_n$. Quelle est l'espérance mathématique de la variable aléatoire Z égale à z ?

2. Calculer l'espérance mathématique du module et de l'argument de Z.

3. On prend deux éléments w et z de $\mathbb{U}_n$ avec une probabilité uniforme ; on note M_w et M_z les points du plan complexe dont ils sont les affixes. Quelle est la valeur moyenne de l'angle $\angle(M_w O M_z)$?

Exercice 9 (F)

Résoudre les équations suivantes dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, calculer le module et l'argument des solutions, et les placer dans le plan complexe ramené à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$:

1. $z^2 + z + 1 = 0$

2. $z^2 + 4z + 6 = 0$

3. $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$

Exercice 10 (D)

Soit $f \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par :

$$f(z) = z^3 + 5z^2 + 7z - 13.$$

On cherche à factoriser f sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$.

1. Vérifier que 1 est racine de f, c'est-à-dire que $f(1) = 0$.

2. D'après un théorème que l'on admettra (cf. cours de L1 de mathématiques), il existe alors un trinôme du second degré à coefficients réels,

   $$q(z) = az^2 + bz + c$$

   tel que

   $$f(z) = (z - 1)q(z).$$

   (a) Déterminer a, b, et c pour que l'égalité précédente soit vraie.

   (b) Factoriser $q(z)$ (donc résoudre $q(z) = 0$). En déduire la forme factorisée de $f(z)$.

Exercice 11 (Bordeaux 1980)

Pour tout réel a, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction numérique f_a par

$$f_a(x) = e^{-x} + ax.$$

Soit $\mathcal{C}_a$ sa représentation graphique dans le plan équipé d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier les variations de f_a. Pour quelles valeurs de a la fonction f_a admet-elle un extremum ? On appelle A l'ensemble de ces valeurs.
2. Pour tout tel réel $a \in A$, on appelle M_a le point de $\mathcal{C}_a$ correspondant à l'extremum. Déterminer ses coordonnées.
3. Montrer que l'ensemble E des points M_a, lorsque a décrit A, est la courbe représentative d'une fonction g. Étudier les variations de g, et dessiner E.

Exercice 12 (Paris 1980)

Soit la famille d'équations

$$z^2 \sin^2\theta - 4z\sin\theta + 4 + \cos^2\theta = 0 \qquad (E_\theta)$$

où $\theta \in]0, \pi[$.

1. Soit $0 < \theta < \pi$. Résoudre l'équation (E_θ) dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On note z_1 et z_2 les racines.
2. On note M_1 et M_2 dont les nombres complexes z_1 et z_2 sont les affixes dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   Dessiner l'ensemble des points M_1 et M_2 lorsque $]0, \pi[$.

Exercice 13 (Pondichéry 1996)

Un fabricant de berlingots possède trois machines A, B et C qui fournissent respectivement 10 %, 40 % et 50 % de la production totale de son usine. Une étude a montré que le pourcentage de berlingots défectueux est de 3,5 % pour la machine A, de 1,5 % pour la machine B et de 2,2 % pour la machine C. Après fabrication, les berlingots sont versés dans un bac commun aux trois machines. On choisit au hasard un berlingot dans le bac.

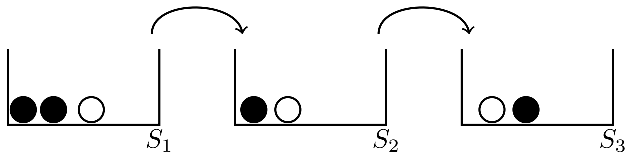
1. Montrer que la probabilité que ce berlingot provienne de la machine C et soit défectueux est 0,011.
2. Calculer la probabilité que ce berlingot soit défectueux.
3. Calculer la probabilité que ce berlingot provienne de la machine C sachant qu'il est défectueux.
4. On prélève successivement dans le bac 10 berlingots en remettant à chaque fois le berlingot tiré dans le bac. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un berlingot défectueux parmi ces 10 prélèvements.

Exercice 14 (Amérique du Nord 1996)

On désigne par n un entier naturel ≥ 2. On se donne n sacs de jetons $S_1, \ldots, S_n$. Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc.

On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectuées de la façon suivante :

- **Première étape** on tire au hasard un jeton de S_1,
- **Deuxième étape** on place ce jeton de S_2 et on tire, au hasard, un jeton de S_2,
- **Troisième étape** après avoir placé dans S_3 le jeton sorti de S_2 on tire, au hasard, un jeton de S_3 et ainsi de suite.



Pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$, on note E_k l'événement « le jeton sorti de S_k est blanc » ; on notera classiquement $\overline{E_k}$ son évènement contraire.

1. (a) Déterminer la probabilité de E_1 et les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(E_2|E_1)$ et $\mathbb{P}(E_2|\overline{E_1})$.
   En déduire la probabilité de E_2.

   (b) Pour tout entier $1 \leq k \leq n$, on note la probabilité $\mathbb{P}(E_k) = p_k$.
   Démontrer le relation de récurrence
   $$p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}.$$

2. On définit $(u_k)_{k\geq 1}$ une suite réelle telle que $u_1 = \frac{1}{3}$, telle que
   $$u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}.$$
   On pose alors $v_k := u_k - \frac{1}{2}$.

   (a) Montrer que la suite (v_k) est géométrique.

   (b) En déduire l'expression de u_k. Étudier la convergence de la suite (u_k).

3. On suppose que $n = 10$. Déterminer pour quelles valeurs de k on a
   $$0{,}4999 \leq p \leq 0{,}5.$$

Exercice 15 (Amiens 1990 (1))

Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16.$$

1. Calculer $f(2i)$ et $f(-2i)$.
2. D'après un théorème que l'on admettra, il existe un trinôme du second degré à coefficients réels $q(z) = z^2 + az + b$ tel que

$$f(z) = (z^2 + 4)q(z).$$

   Trouver a et b.

3. En déduire les solutions de l'équation $f(z) = 0$ sur $\mathbb{C}$.
4. Placer dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C, D qui ont pour affixes les solutions de la question précédente.
5. Montrer que A, B, C, D appartiennent à un même cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 16 (Amiens 1990 (2))

Pour tout $k > 0$, on considère la fonction f_k définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f_k(x) = k^2x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x.$$

On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier les variations de f_k, dresser son tableau. On précisera les limites de f_k.
2. Soit M_k le point $\mathcal{C}_k$ correspondant au minimum de f_k. Déterminer ses coordonnées.
3. Déterminer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une équation cartésienne $y = g(x)$ vérifiée par l'ensemble $\mathcal{A}$ des points M_k, $k > 0$.
4. Préciser la position relative de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{A}$. Tracer $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{A}$.

Exercice 17 (Amérique du Nord 1986)

Soit, pour tout $z \in \mathbb{C}$ le polynôme

$$P_\lambda(z) = z^2 - 4z + \lambda$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $P_\lambda(z) = 0$ admet une racine z_λ alors $\overline{z_\lambda}$ est aussi solution.
2. Montrer que l'équation $P_\lambda(z) = 0$ admet au moins une solution réelle.

3. Déterminer λ pour que l'équation $P_\lambda(z) = 0$ admette au moins une racine réelle de module égal à 2. Résoudre l'équation pour cette valeur de λ.

4. Déterminer λ pour que $P_\lambda(z) = 0$ admette une racine **complexe** de module égal à 2. Résoudre l'équation pour les valeurs de λ trouvées, préciser le module et l'argument de chaque solution.

Exercice 18 (Amérique du Sud 1986)

Soit P le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Au points $M(x, y)$ on associe, classiquement, son affixe $z = x + iy$.
Soient A et B les points d'affixes respectives $1 + i$ et -3.

À un point M, distinct de A ou B et d'affixe z, on associe le(s) point(s) M', s'ils existent, d'affixes z' telles que

$$\begin{cases} \dfrac{z'+3}{z+3} & \text{imaginaire pur} \\ \dfrac{z'-1-i}{z-1-i} & \text{réel.} \end{cases}$$

1. Donner un sens géométrique à $\arg\left(\dfrac{z'+3}{z+3}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z'-1-i}{z-1-i}\right)$.

2. Démontrer géométriquement qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ du plan tel que si $M \in P \backslash \mathcal{C}$, alors M' existe et est unique. Construire alors M'.

Exercice 19 (Bordeaux 1984)

Soit $\theta \in [0, 2\pi]$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (2^{\theta+1} \cos \theta) z + 2^{2\theta} = 0,$$

   et donner chaque solution sous forme trigonométrique.

2. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente. Déterminer θ de manière à ce que le triangle OAB soit équilatéral.

Exercice 20 (Montpellier 1984)

On ramène la plan à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \forall x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2. On considère la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par

$$g(x) = x \ln x$$

et on appelle Γ sa courbe représentative. Étudier g et tracer Γ.

3. Étudier la limite f en $+\infty$. Montrer que les courbes Γ et $\mathcal{C}$ sont asymptotes l'une de l'autre et préciser leur positions relatives.
Rappel Dire que les deux courbes sont asymptotes revient à dire que

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

4. Montrer que f est deux fois dérivable, calculer sa dérivée f' et sa dérivée seconde f'' (la dérivée de sa dérivée). Étudier les variations de f' et montrer qu'elle est positive.

5. Achever l'étude de la fonction f. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ sur la même figure que Γ.

Exercice 21 (Dijon 1982)

n étant un entier naturel fixé, on considère l'équation dans $\mathbb{Z}^2$

$$165x - 132y = n \qquad (E_n)$$

Résoudre cette équation pour :

1. $n = 0$.
2. $n = 33$.
3. $n = 66$.
4. $n = 42$.

Dans chaque cas, on déterminera non seulement le couple de solutions (x, y) mais aussi leur PGCD.

Exercice 22 (Un peu d'optique (D))

Une lame à face parallèles, d'épaisseur e et d'indice de réfraction $n > 1$ est éclairée par un rayon laser de longueur d'onde λ, en incidence normale.

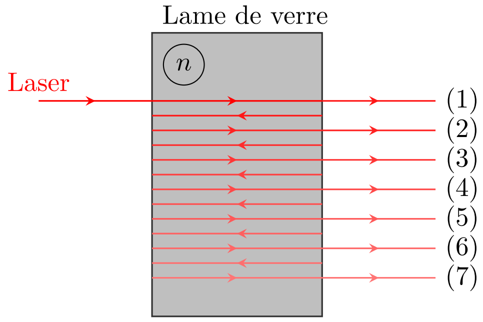
Le laser est une onde électromagnétique, dont l'amplitude et la phase sont représentées par un nombre complexe A_0, où

$$\begin{cases} |A_0| & \text{est l'amplitude de l'onde} \\ \arg(A_0) & \text{est la phase de l'onde} \end{cases}$$

On suppose qu'à chaque fois que le rayon rencontre la surface entre la lame et l'air, il est divisé en deux : un rayon transmis et un rayon réfléchi.

Ainsi, le rayon entrant fait des allers-retours dans la lame, ricochant sur la surface verre/air en laissant passer à chaque fois une partie de la lumière.

L'amplitude de l'onde réfléchie est multipliée par un réel $0 < r < 1$. L'amplitude de l'onde transmise est multipliée par un réel $0 < t < 1$.



1. Quelle est la différence de marche δ entre deux rayons successifs ?

2. En déduire l'expression du déphasage $\varphi = 2\pi\delta/\lambda$ entre deux rayons successifs.
   On admet alors que la relation entre les phases de deux rayons successifs (p) et $(p+1)$ est
   $$\arg(A_{p+1}) = \arg(A_p) + \varphi.$$
   Exprimer $\arg(A_p)$ en fonction de φ et p.

3. Combien de réflexions le rayon $(p+1)$ subit-il par rapport au rayon (p) ? En déduire une relation entre $|A_{p+1}|$ et $|A_p|$.

4. Exprimer $|A_p|$ en fonction de r et p.

5. En déduire l'expression de A_p en fonction de r, φ et p.

6. On définit l'amplitude de l'onde créée par les rayons de (1) à (p),
   $$S_p = \sum_{k=1}^{p} A_k = A_1 + \cdots + A_p.$$
   Déduire des questions précédentes que l'expression de S_p en fonction de φ, r et p est
   $$S_p = A_1 \frac{1 - r^{2p} e^{ip\varphi}}{1 - r^2 e^{i\varphi}}.$$

7. Le rayon (1) est issu du rayon initial d'amplitude A_0 après deux transmissions. Justifier qu'alors $A_1 = t^2 A_0$, et en déduire l'expression de S_p en fonction de φ, r, t et p.
   On admet que $\lim\limits_{p\to+\infty} r^{2p} e^{ip\varphi} = 0$. On a alors que l'amplitude de l'onde totale est
   $$S = \lim_{p\to+\infty} S_p = t^2 A_0 \frac{1}{1 - r^2 e^{i\varphi}}.$$

8. Exprimer $I(\varphi) = |S|^2$, l'intensité lumineuse en sortie de la lame, en fonction de t, r, A_0 et φ.

9. Pour quelles valeurs de φ la fonction I est elle maximale ?

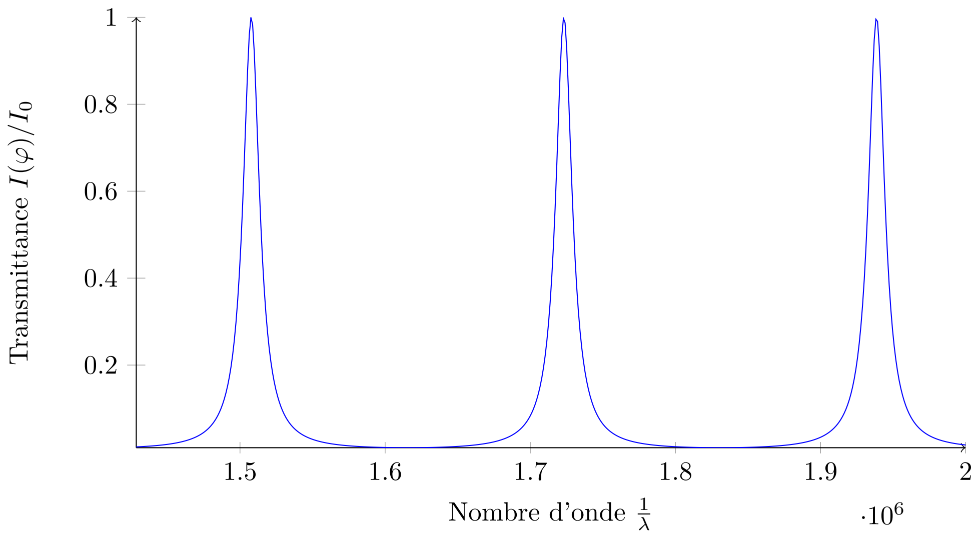


FIG. 2: Graphe de la *transmittance* T, rapport entre l'intensité lumineuse sortante $I(\varphi)$ et l'intensité entrante I_0.