Exercices de Khôlle – Terminale S

Lycée Julie-Victoire Daubié

Exercice 1 (Bordeaux 1980)

Pour tout réel a, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction numérique f_a par

$$f_a(x) = e^{-x} + ax.$$

Soit $\mathscr{C}_a$ sa représentation graphique dans le plan équipé d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier les variations de f_a. Pour quelles valeurs de a la fonction f_a admet-elle un extremum ? On appelle A l'ensemble de ces valeurs.
2. Pour tout tel réel $a \in A$, on appelle M_a le point de $\mathscr{C}_a$ correspondant à l'extremum. Déterminer ses coordonnées.
3. Montrer que l'ensemble E des points M_a, lorsque a décrit A, est la courbe représentative d'une fonction g. Étudier les variations de g, et dessiner E.

Exercice 2 (Paris 1980)

Soit la famille d'équations

$$z^2 \sin^2\theta - 4z\sin\theta + 4 + \cos^2\theta = 0 \qquad (E_\theta)$$

où $\theta \in \left]0, \pi\right[$.

1. Soit $0 < \theta < \pi$. Résoudre l'équation (E_θ) dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On note z_1 et z_2 les racines.
2. On note M_1 et M_2 dont les nombres complexes z_1 et z_2 sont les affixes dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   Dessiner l'ensemble des points M_1 et M_2 lorsque $\left]0, \pi\right[$.

Exercice 3 (Pondichéry 1996)

Un fabricant de berlingots possède trois machines A, B et C qui fournissent respectivement 10 %, 40 % et 50 % de la production totale de son usine. Une étude a montré que le pourcentage de berlingots défectueux est de 3,5 % pour la machine A, de 1,5 % pour la machine B et de 2,2 % pour la machine C. Après fabrication, les berlingots sont versés dans un bac commun aux trois machines. On choisit au hasard un berlingot dans le bac.

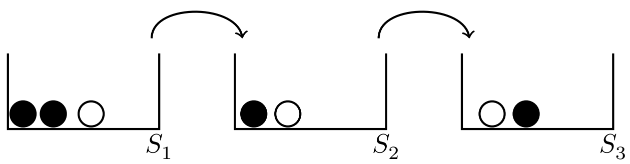
1. Montrer que la probabilité que ce berlingot provienne de la machine C et soit défectueux est 0,011.
2. Calculer la probabilité que ce berlingot soit défectueux.
3. Calculer la probabilité que ce berlingot provienne de la machine C sachant qu'il est défectueux.
4. On prélève successivement dans le bac 10 berlingots en remettant à chaque fois le berlingot tiré dans le bac. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un berlingot défectueux parmi ces 10 prélèvements.

Exercice 4 (Amérique du Nord 1996)

On désigne par n un entier naturel ≥ 2. On se donne n sacs de jetons $S_1, \dots, S_n$. Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc.

On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectuées de la façon suivante :

- **Première étape** on tire au hasard un jeton de S_1,
- **Deuxième étape** on place ce jeton de S_2 et on tire, au hasard, un jeton de S_2,
- **Troisième étape** après avoir placé dans S_3 le jeton sorti de S_2 on tire, au hasard, un jeton de S_3 et ainsi de suite.



Pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$, on note E_k l'événement « le jeton sorti de S_k est blanc » ; on notera classiquement $\overline{E_k}$ son évènement contraire.

1. (a) Déterminer la probabilité de E_1 et les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(E_2|E_1)$ et $\mathbb{P}(E_2|\overline{E_1})$.
   En déduire la probabilité de E_2.

(b) Pour tout entier $1 \leq k \leq n$, on note la probabilité $\mathbb{P}(E_k) = p_k$.
Démontrer le relation de récurrence

$$p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}.$$

2. On définit $(u_k)_{k\geq 1}$ une suite réelle telle que $u_1 = \frac{1}{3}$, telle que

$$u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}.$$

On pose alors $v_k \coloneqq u_k - \frac{1}{2}$.

(a) Montrer que la suite (v_k) est géométrique.

(b) En déduire l'expression de u_k. Étudier la convergence de la suite (u_k).

3. On suppose que $n = 10$. Déterminer pour quelles valeurs de k on a

$$0{,}4999 \leq p \leq 0{,}5.$$

Exercice 5 (Amiens 1990 (1))

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16.$$

1. Calculer $f(2i)$ et $f(-2i)$.

2. D'après un théorème que l'on admettra, il existe un trinôme du second degré à coefficients réels $q(z) = z^2 + az + b$ tel que

$$f(z) = (z^2 + 4)q(z).$$

Trouver a et b.

3. En déduire les solutions de l'équation $f(z) = 0$ sur $\mathbb{C}$.

4. Placer dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C, D qui ont pour affixes les solutions de la question précédente.

5. Montrer que A, B, C, D appartiennent à un même cercle $(\mathscr{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 6 (Amiens 1990 (2))

Pour tout $k > 0$, on considère la fonction f_k définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f_k(x) = k^2x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x.$$

On note $\mathscr{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier les variations de f_k, dresser son tableau. On précisera les limites de f_k.
2. Soit M_k le point $\mathscr{C}_k$ correspondant au minimum de f_k. Déterminer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une équation cartésienne de l'ensemble $\mathscr{A}$ décrit par M_k lorsque k décrit $]0, +\infty[$.
3. Préciser la position relative de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{A}$; les tracer.

Exercice 7 (Amérique du Nord 1986)

Soit, pour tout $z \in \mathbb{C}$ le polynôme

$$P_\lambda(z) = z^2 - 4z + \lambda$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $P_\lambda(z) = 0$ admet une racine z_λ alors $\overline{z_\lambda}$ est aussi solution.
2. Montrer que l'équation $P_\lambda(z) = 0$ admet au moins une solution réelle.
3. Déterminer λ pour que l'équation $P_\lambda(z) = 0$ admette au moins une racine réelle de module égal à 2. Résoudre l'équation pour cette valeur de λ.
4. Déterminer λ pour que $P_\lambda(z) = 0$ admette une racine **complexe** de module égal à 2. Résoudre l'équation pour les valeurs de λ trouvées, préciser le module et l'argument de chaque solution.

Exercice 8 (Amérique du Sud 1986)

Soit P le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Au points $M(x, y)$ on associe, classiquement, son affixe $z = x + iy$.
Soient A et B les points d'affixes respectives $1 + i$ et -3.

À un point M, distinct de A ou B et d'affixe z, on associe le(s) point(s) M', s'ils existent, d'affixes z' telles que

$$\begin{cases} \frac{z'+3}{z+3} & \text{imaginaire pur} \\ \frac{z'-1-i}{z-1-i} & \text{réel.} \end{cases}$$

1. Donner un sens géométrique à $\arg\left(\dfrac{z'+3}{z+3}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z'-1-i}{z-1-i}\right)$.
2. Démontrer géométriquement qu'il existe un cercle $\mathscr{C}$ du plan tel que si $M \in P\ \mathscr{C}$, alors M' existe et est unique. Construire alors M'.

Exercice 9 (Bordeaux 1984)

Soit $\theta \in [0, 2\pi]$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)z + 2^{2\theta} = 0,$$

et donner chaque solution sous forme trigonométrique.

2. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente. Déterminer θ de manière à ce que le triangle OAB soit équilatéral.

Exercice 10 (Montpellier 1984)

On ramène la plan à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \forall x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. On considère la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par

   $$g(x) = x \ln x$$

   et on appelle Γ sa courbe représentative. Étudier g et tracer Γ.
3. Étudier la limite f en $+\infty$. Montrer que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ sont asymptotes l'une de l'autre et préciser leur positions relatives.
   Rappel Dire que les deux courbes sont asymptotes revient à dire que

   $$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

4. Montrer que f est deux fois dérivable, calculer sa dérivée f' et sa dérivée seconde f'' (la dérivée de sa dérivée). Étudier les variations de f' et montrer qu'elle est positive.
5. Achever l'étude de la fonction f. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur la même figure que Γ.

Exercice 11 (Dijon 1982)

n étant un entier naturel fixé, on considère l'équation dans $\mathbb{Z}^2$

$$165x - 132y = n \qquad (E_n)$$

Résoudre cette équation pour :

1. $n = 0$.
2. $n = 33$.
3. $n = 66$.
4. $n = 42$.

Dans chaque cas, on déterminera non seulement le couple de solutions (x, y) mais aussi leur PGCD.