Khôlles, épisode 2

Lycée Julie-Victoire Daubié

Exercice 1 (Question de cours)

Méthode des rectangles (appliquée sur un exemple au choix, sans calcul). Définition de l'intégrale à partir de cette méthode.

Exercice 2 (Question de cours)

Propriétés générales de l'intégrale (linéarité, positivité et croissance, relation de Chasles).

Exercice 3 (Question de cours)

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Donner une primitive de $x \longmapsto x^n$.
2. Donner les primitives des fonctions sin et cos.

Exercice 4

Calculer l'intégrale

$$\int_{\pi/3}^{\pi/4} \tan(x)\,\mathrm{d}x.$$

On rappelle que $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$.

Exercice 5 (Question de cours)

Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 6 (Moyenne d'une fonction)

Questions de cours Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ de longueur strictement positive, et $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Que représente l'intégrale
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad ?$$
2. Énoncer, puis démontrer, l'inégalité de la moyenne.

Théorème de la moyenne Montrer qu'il existe un réel $c \in\,]a, b[$ tel que
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 7 (Inégalité triangulaire)

Soient x et y deux réels. On rappelle que la *valeur absolue* d'un réel a est le réel $\sqrt{a^2}$, noté $|a|$.

1. Montrer que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Soient désormais $x_1, \dots, x_n$ des réels, avec n un entier naturel ≥ 2.

2. Montrer par récurrence l'inégalité :
$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|.$$

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

3. En revenant à la méthode des rectangles, montrer l'inégalité suivante :
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 8

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par
$$f_n(x) := x^n.$$

1. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $f(x)$ que l'on précisera. La fonction f est-elle continue ?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale
$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$
Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 9 (Un résultat contre-intuitif)

Soit, pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) := \frac{1}{n} e^{-x/n}.$$

1. Montrer que pour tout réel positif x, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $f(x)$ que l'on précisera.
2. Montrer que la fonction $x \longmapsto -e^{-x/n}$ est une primitive de f_n.
3. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que le réel

$$I_n := \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R \to +\infty} \int_0^R f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

   est bien défini, et le calculer.
4. Montrer que la suite (I_n) converge vers un réel que l'on précisera.

Exercice 10 (Le théorème d'intégration par parties)

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Soient u et v des fonctions $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire dérivables de dérivées continues).

1. Donner une primitive de $u'v + uv'$ sur $[a, b]$.
2. En déduire la relation suivante :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

On pourra désormais appliquer le théorème dans les exercices.
Une application :

3. Déterminer une primitive de la fonction logarithme népérien ln.

Exercice 11 (Aix-Marseille 1985)

Soit x un réel. Calculer l'intégrale :

$$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Dresser le tableau de variations de G sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 (Antilles 1986)

1. (a) Montrer que, pour tout réel x,

$$\frac{1}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$$

   (b) Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(e^x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. (a) Déterminer une primitive de la fonction

$$x \longmapsto \frac{e^x}{(e^x+1)^3}.$$

   (b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 13 (Fonctions paires, impaires, périodiques)

Soit a un réel non nul. Soit $f\colon [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose qu'elle est paire, donc telle que

$$\forall x \in [-a,a] \quad f(-x) = f(x).$$

   Exprimer

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. De même si f est impaire, soit telle que

$$\forall x \in [-a,a] \quad f(-x) = -f(x).$$

On suppose désormais que f est définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est *périodique*: il existe un réel $T > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x).$$

3. Soit a un réel. Montrer que

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   ne dépend pas de a.

Exercice 14 (Lille 1989)

Le but de l'exercice est d'étudier les intégrales I_n définies pour tout entier naturel non nul n par

$$I_n = \int_0^1 (1 - x^n)\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On pose

$$J_0 = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$J_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Tracer la courbe représentative de la fonction $x \in [0,1] \longmapsto \sqrt{1 - x^2}$. En déduire J_0.
2. (a) Calculer J_1.
   (b) En déduire I_1. Une interprétation géométrique ?
3. (a) Étudier le sens de variation de la suite $(J_n)_{n \geq 1}$.
   (b) En déduire que les suites (J_n), puis (I_n), convergent.
4. (a) Démontrer l'encadrement

$$0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x.$$

   (b) En déduire les limites de (I_n) et (J_n).

Exercice 15

1. Soit x un réel. Démontrer que

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

2. En déduire $\sin^3 x$ en fonction de $\sin x$, et $\sin(3x)$.
3. En déduire l'intégrale

$$\int_0^{\pi/4} \sin^3 x\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 16 (Strasbourg 1987)

On pose $I_0 = \int_0^e x\,\mathrm{d}x$, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, établir, via une intégration par parties,
$$2I_n + nI_{n-1} = e^2.$$
En déduire I_2.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. En déduire, en utilisant la relation de récurrence précédente, l'encadrement
$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

Exercice 17 (Lille 1985)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 3$ par
$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} = \frac{1}{2\ln 2} + \cdots + \frac{1}{n\ln n}.$$

1. Soit f la fonction de la variable réelle définie par $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$. Quel est son ensemble de définition ?
Montrer que f est décroissante sur $]1, +\infty[$.
2. Montrer que, pour tout $k \geq 2$,
$$\frac{1}{k\ln k} \geq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
En déduire que
$$u_n \geq \int_2^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Calculer
$$I_n = \int_2^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$$
en fonction de n, puis sa limite.
En déduire la limite de (u_n).