智能控制

主讲：朱芳来

第1章 绪论

1.1 控制科学发展的新阶段——智能控制

❖ 控制理论的发展可以认为经历了三个阶段：

1. 第一阶段为20世纪40~60年代，称为“经典控制理论”时期。主要特点：考虑单输入和单输出问题（而且主要研究线性定常系统，对非线性系统，分析是采用的相平面法也针对二阶的非线性系统），主要采用传递函数、频率特性、根轨迹为基础的频率分析方法。该时期的主要代表人物有伯德（H. W. Bode）和伊文思（W. R. Evans 提出根轨迹法）。
2. 第二阶段为20世纪60~70年代，称为“现代控制理论”时期。特点是：控制对象可以是多输入多输出问题，系统

可以是线性的，定常的，也可以是非线性的，时变的。通过引入状态的概念，系统主要用状态空间法来描述。该时期的主要人物有：庞特里亚金（于1961年提出极大值原理）、贝尔曼（Bellman，1957年提出动态规划）及卡尔曼（R. E. Kalman，提出状态的概念，Kalman滤波器等）。

Rudolf E. Kálmán

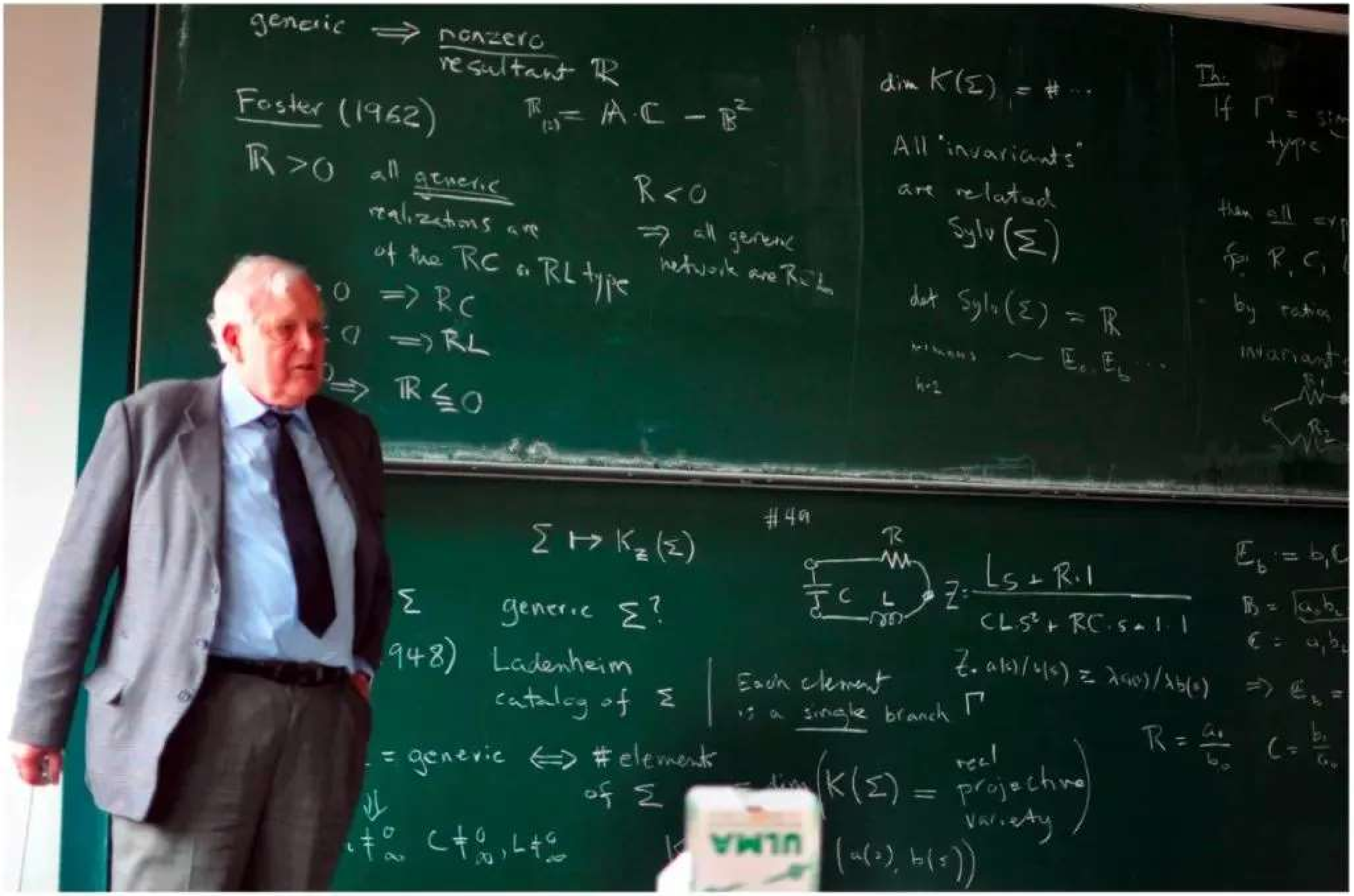
匈裔美籍鲁道夫•卡尔曼(Rudolf E. Kálmán): 卡尔曼滤波器提出者，美国科学奖章、工程院Draper奖、京都奖获得者；美国科学院、工程院、艺术与科学院院士；美国数学学会会士。于2016年7月2日上午在美国佛罗里达家中安详离世，享年86岁。

鲁道夫·卡尔曼在1930年5月19日出生于匈牙利首都布达佩斯的一个犹太人家庭，他的匈牙利名字是Kálmán Rudolf Emil。卡尔曼对基础科学和工程技术甚至今天大数据分析的贡献是毋庸赘言的

卡尔曼获奥巴马总统授予美国国家科学奖章(2009)

Rudolf E. Kalman (1974)

卡尔曼出席第一届IFAC，莫斯科(1960)，第二排左边第二位



最近几年，卡尔曼与剑桥大学Malcolm Smith教授及其弟子香港大学陈志强(MichaelZ. Q. Chen)博士一直有密切的联络交流，对无源网络综合的理论与计算问题提出过不少指导性意见。我(香港城市大学陈关荣教授)参与了一篇相关研究合作论文，末尾我们还特别感谢了卡尔曼的无私帮助。不过那是后话。

上海交通大学张钟俊教授和卡尔曼(佛罗里达，1980年)[韩正之提供]

卡尔曼滤波诞生后不久就传到了中国。1937年12月在MIT获博士学位后旋即回国的张钟俊院士（1915-1995）是最早关注卡尔曼滤波技术的中国学者之一。1964年，张钟俊先生就开创性地把卡尔曼滤波技术应用到了远航仪进行接收信号处理。1980年，张钟俊到佛罗里达访问了卡尔曼，翌年把卡尔曼请到了北京和上海访问。

在北京，卡尔曼访问了中科院系统科学研究所和北京大学数学系。据黄琳院士回忆，他当时很欣喜地协助时任数学系主任后任校长的丁石孙先生接待卡尔曼并参与安排他的学术座谈会。有趣的是，卡尔曼在发言时一开口就说：“现在人们都知道有牛顿力学，我相信将来大家都会知道有卡尔曼滤波。”

更有趣的是，卡尔曼在北京的另一场报告讲完后，一位听众提问：“有人说卡尔曼滤波与维纳滤波本质上是一样的。你对这种讲法怎么看？”卡尔曼沉思了片刻，反问道：“你知道为什么苏联首先发射了载人宇宙飞船，但却是美国人首先登上月球呢？”他环顾四周见没人回答，就说：“是因为当时苏联人不懂卡尔曼滤波。”在上海，韩正之教授(张钟俊院士的博士后)记得卡尔曼在上海交通大学和上海科学会堂分别讲了控制理论的发展和系统建模问题。同样颇有意思的是，并没有数学学位的卡尔曼要求在所有会议广告和通知上注明他是一个数学家。

卡尔曼30岁时一举成名，正所谓“三十而立”，但到退休前后才被选为美国国家工程院院士(1991)、美国艺术与科学院院士(1993)、美国国家科学院院士(1994)。他还是匈牙利、法国和俄罗斯科学院外籍院士，并被授予多个荣誉博士学位和荣誉教授称号。2016年7月2日凌晨，卡尔曼在佛罗里达的家中安然辞世，享年86岁。

3. 第三阶段为20世纪70年代末至今，控制理论向着“大系统理论”和“智能控制”的方向发展。“大系统理论”是控制理论在广度上的开拓，“智能控制”是控制理论在深度上的挖掘。“智能控制”是模拟人类智能活动方面的控制与信息规律，研制具有某些仿人智能的工程控制与信息处理。智能控制的特点是它是一种非基于模型的控制。

卡尔曼最重要的发明是卡尔曼滤波算法，该算法成就了过去**50**年间的许多基本技术，如把阿波罗号宇航员送上月球的航天计算机系统、把人类送去探索深海和星球的机器人载体，以及几乎所有需要从噪声数据去估算实际状态的项目。有人甚至把包括环绕地球的卫星系统、卫星地面站及各类计算机系统在内的整个**GPS**系统合称为一个巨大无比的卡尔曼滤波器。

总结：控制理论可以如下划分

控制理论
- 传统控制理论
  - 经典控制
  - 现代控制理论（大系统理论） (基于模型的控制)
- 智能控制 (非基于模型的控制)

❖ 智能控制理论产生的背景——传统控制所面临的困难

以经典控制理论和现代控制理论为代表的传统控制方法曾经在一段时期成为解决现实生活中控制问题的有力工具，并在如今的生活中仍然扮演着重要角色。但随着科技的发展，传统控制面临着如下几个方面的困难：

1. 传统控制系统的设计与分析是建立在精确的系统数学模型基础上的，而实际系统由于存在复杂性、非线性性、时变性、不确定性和不完全性等，一般无法获得精确的数学模型。
2. 研究这些系统时，一般要提出一些比较苛刻的假设，而这项假设在应用中往往与实际不相符合。
3. 为了提高性能，传统控制系统可能变得很复杂，从而增加了设备的投入和维修的费用，减低系统的可靠性。

1.2 智能控制的基本概念与研究内容

对智能控制，没有严格的定义，可以做一些相应的理解。

定义1.1（自动控制）自动控制是能按规定程序对机器或装置进行自动操作而不需要人的干预的过程。

定义1.2（智能控制）维纳总结了控制论的三要素：信息、反馈和控制。因而，可以将具有智能信息处理、智能反馈和智能控制决策的控制方式，成为智能控制，把这种以智能控制为核心的控制论成为智能控制论。

智能控制主要包括如下内容：

- 知识工程与专家系统
- 迭代学习控制（基于模型的智能控制）
- 模糊控制
- 基于人工神经网络的控制
- 进化计算与遗传算法

第2章 模糊集合与模糊推理

2.1 模糊集合及其性质

模糊控制是建立在模糊集合模糊逻辑的基础上的，本节主要介绍模糊集合的基本概念、运算法则等。

经典集合：19世纪末德国数学家George Contor创立的集合论（经典集合）已经成为现代数学的基础，每个数学分支都可以看做研究某类对象的集合。对集合这样最基本的概念，不能加以定义，只能给出一种描述：

（经典）集合：一般是指具有某种属性的、确定的、彼此间可以区别的事务全体。例如：所有大于0小于10的整数，就是一个（经典）集合。

- 经典集合的描述方法：

方法1（描述法）：通过描述集合中元素的性质来描述一个集合。

如：$A=\{x \mid x$为正整数，$x<5\}$；又如：B＝｛同济大学电信学院全体教职工和学生全体｝

方法**2**（列举 法）：通过一一列举集合中的所有元素来描述一个集合。

如： B＝｛1, 2, 3, 4, 5｝；

C=｛A, B, C, ……, Z｝

- 论域

在讨论经典集合时，往往忽略“论域”这样一个前提。

论域：就是考虑问题所需的所有对象全体，经典集合其实际是论域的子集。对经典集合而言，论域中的一个元素是否属于某个集合，不具有模糊性，即论域中的一个元素，要么属于该集合，要么不属于。

例2.1.1: 考虑如下的论域

U={所有正整数全体}

A＝｛x | x为正整数，x<5｝

则对论域U中的任何一个元素，是否属于集合A，具有明确的答案。

因而对经典集合，有这样的总结：有一个论域U，所考虑的集合A是在该论域下的集合，它是该论域的子集（包含论域本身）。论域中的如何一个元素是否属于集合A，有明确的答案。

对于一个经典集合 $A \subseteq U$，$\forall x \in U$ 可以定义集合A的特征函数 $\chi_A(x)$ 如下：

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x \in A \\ 0 & x \notin A\end{cases}, \quad \forall x \in U$$

集合的特征函数完全刻画了一个集合，即论域中的一个元素是否属于某个集合，可由特征函数在该元素上的取值来确定。如果取值为1，则属于该集合，如果取值为0，则不属于。特征函数 $\chi_A(x)$ 其实际可以看成论域U到集合｛0, 1｝映射，因而，经典集合可以如下定义：

定义2.1.1（经典集合）：设给定论域U，U到｛0, 1｝的任一映射 χ_A

$$\chi_A : U \to \{0, 1\}$$

$$u \to \chi_A(u) \quad \forall u \in U$$

定义了一个在论域U下的经典集合。

例2.1.2: 设U＝｛1，2，3，4，5，6，7，8，9，10｝，则U到｛0，1｝的映射：

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x = 2k \\ 0 & x = 2k-1 \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, 4, 5$$

定义了一个经典集合A＝｛2，4，6，8｝。

❖ 模糊集合的定义

定义2.1.2(模糊集合)： 设给定论域U，U到闭区间[0, 1]的任一映射 μ_A

$$\mu_A : U \to [0, 1]$$

$$u \to \mu_A(u) \quad \forall u \in U$$

确定U的一个模糊子集A，μ_A称为模糊子集的隶属函数，$\mu_A(u)$称为u对于A的隶属度。隶属度也可用表示 $A(u)$，模糊子集也称为模糊集合。

Chapter 1 Introduction

Lotfi Aliasker Zadeh (February 4, 1921 -- June 6, 2017)

Chapter 1 Introduction

- 从定义可以看出，模糊集合完全由其隶属函数确定。也就是说，定义一个模糊集合，等价于定义它的隶属函数。模糊集合回答了论域中的元素属于模糊集合的程度。
- 经典集合可以用来描述清晰概念，而模糊集合可以用来描述模糊概念。

　　例**2.1.3:** 在论域U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}中，讨论“几个”这一模糊概念，可以通过定义如下的模糊集合来描述：

$$\mu_A(1)=0,\ \mu_A(2)=0,\ \mu_A(3)=0.2,\ \mu_A(4)=0.7,$$
$$\mu_A(5)=1,\ \mu_A(6)=1,\ \mu_A(7)=0.7, \mu_A(8)=0.3,$$
$$\mu_A(9)=0,\ \ \mu_A(10)=0,$$

❖ 模糊集合的表述方法

1. **Zadeh**表示法：当论域U为有限集 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$时，模糊集合可表示为

$$A = \frac{A(u_1)}{u_1} + \frac{A(u_2)}{u_2} + \cdots + \frac{A(u_n)}{u_n}$$

对连续型论域U，模糊集合可以表示为

$$A = \int_U \frac{\mu_A(x)}{x}$$

2. 序偶表示法：将论域中的元素u_i与其隶属度A(u_i)构成的序偶来表示模糊集合A，则

$$A = \{(u_1, A(u_1)), (u_2, A(u_2)), \cdots, (u_n, A(u_n))\}$$

此方法隶属度为0的项可以不写。

3. 向量表示法：

$$A = (A(u_1), A(u_2), \cdots, A(u_n))$$

在向量表示法中，隶属度为0的项不能省。

例2.1.4: 对例1.3中定义的模糊集合，可以有如下几种表示：

Zadeh表示法：

$$A = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.7}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0.7}{7} + \frac{0.3}{8} + \frac{0}{9} + \frac{0}{10}$$

序偶表示法：

A={(3, 0.3), (4, 0.7), (5, 1), (6, 1), (7, 0.7), (8. 0.3)}

向量表示法：

A=(0, 0, 0.3, 0.7, 1, 1, 0.7, 0.3, 0, 0)

- 例2.1.5: 设计论域X为“年龄”，在X=[0, 200]上定义两个模糊集合“年青”和“年老”，分别用Y和O表示，Zadeh给出了这两个模糊集合的隶属函数：

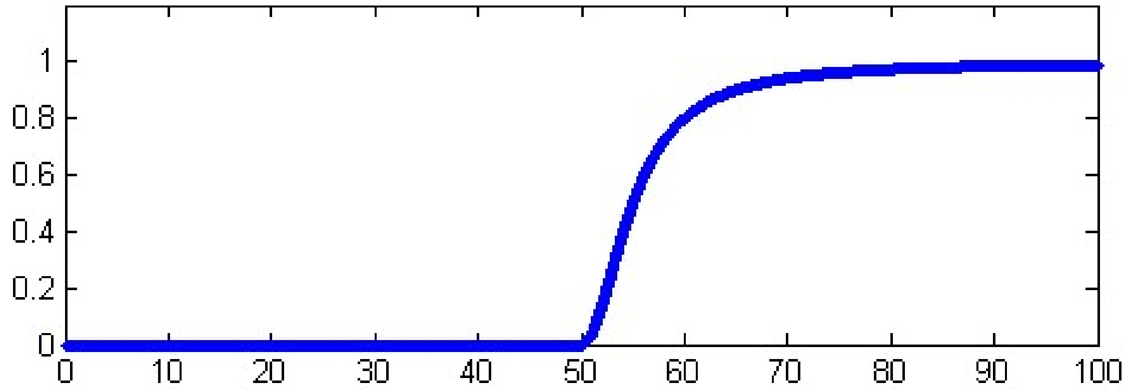
$$\mu_o(u)=\begin{cases}0 & 0\le u\le 50\\ [1+(\frac{u-50}{5})^{-2}]^{-1} & 50<u\le 200\end{cases}$$

$$\mu_Y(u)=\begin{cases}1 & 0\le u\le 25\\ [1+(\frac{u-25}{5})^{2}]^{-1} & 25<u\le 200\end{cases}$$

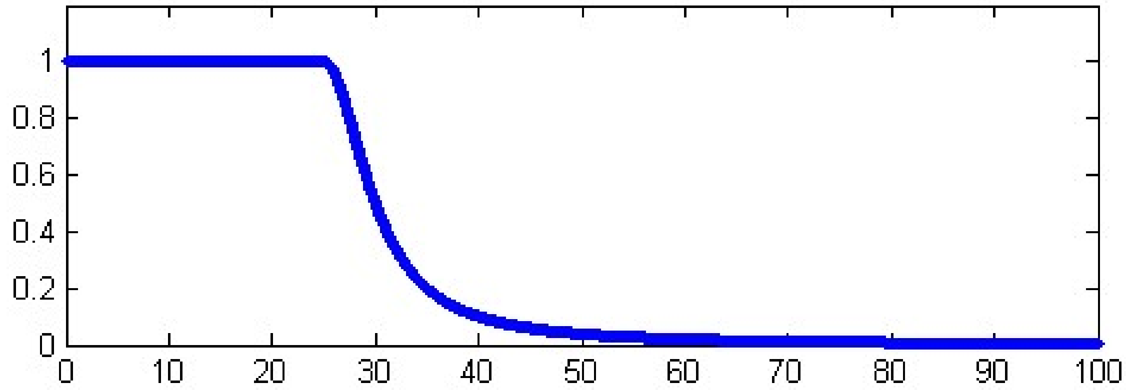
采用Zadeh表示法，“年老”和“年青”两个模糊集合可以分别表示为

$$O=\int_{0\le u\le 50}\frac{0}{u}+\int_{50<u\le 200}\frac{[1+(\frac{u-50}{5})^{-2}]^{-1}}{u}=\int_{50<u\le 200}\frac{[1+(\frac{u-50}{5})^{-2}]^{-1}}{u}$$

$$Y=\int_{0\le u\le 25}\frac{1}{u}+\int_{25<u\le 200}\frac{[1+(\frac{u-25}{5})^{2}]^{-1}}{u}$$



‘年老’隶属度函数曲线



‘年青’隶属度函数曲线

2.2 模糊集合的基本运算

与经典集合一样，模糊集合也具有“交”，“并”，“补”等运算。两个模糊集合的运算，其实际就是逐点对隶属函数进行运算。

定义**2.2.1:** 设A和B为论域X下两个模糊集合，可按如下方式定义模糊集合的一些运算：

- 模糊集合的相等：如果 $\forall x \in X$，均有 $\mu_A(x)=\mu_B(x)$，则称模糊集合A与B相等，记作A=B。
- 模糊集合的包含：如果 $\forall x \in X$，均有 $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$，则称A包含于B（B包含A），或称A是B的子集，记为 $A \subseteq B$。
- 模糊空集：如果 $\forall x \in X$，均有 $\mu_A(x)=0$，则称A为模糊空集，记为 $A=\phi$。

- 模糊集合的并：如果 $\forall x \in X$，在模糊集合A和B的基础上定义模糊集合C如下

$$\mu_C(x)=\mu_A(x) \vee \mu_B(x)=\max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

则称模糊集合C为模糊集合A和B的并，记为C=A∪B。

- 模糊集合的交：如果 $\forall x \in X$，在模糊集合A和B的基础上定义模糊集合C如下

$$\mu_C(x)=\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)=\min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

则称模糊集合C为模糊集合A和B的交，记为C=A∩B。

- 模糊集合的补：如果 $\forall x \in X$，均有 $\mu_B(x)=1-\mu_A(x)$，则称B为A的补集，记为 $B=\overline{A}=A^c$。

例2.2.1: 设 $A=\frac{0.9}{u_1}+\frac{0.2}{u_2}+\frac{0.8}{u_3}+\frac{0.5}{u_4}$， $B=\frac{0.3}{u_1}+\frac{0.1}{u_2}+\frac{0.4}{u_3}+\frac{0.6}{u_4}$，求A∪B和A∩B

解：

$$A\cup B=\frac{0.9\vee 0.3}{u_1}+\frac{0.2\vee 0.1}{u_2}+\frac{0.8\vee 0.4}{u_3}+\frac{0.5\vee 0.6}{u_4}$$

$$=\frac{0.9}{u_1}+\frac{0.2}{u_2}+\frac{0.8}{u_3}+\frac{0.5}{u_4}$$

$$A\cap B=\frac{0.9\wedge 0.3}{u_1}+\frac{0.2\wedge 0.1}{u_2}+\frac{0.8\wedge 0.4}{u_3}+\frac{0.5\wedge 0.6}{u_4}$$

$$=\frac{0.3}{u_1}+\frac{0.1}{u_2}+\frac{0.4}{u_3}+\frac{0.5}{u_4}$$

定义2.2.2: 定义模糊集合如下的一些代数运算

- 代数积：称 $A\cdot B$ 为模糊集合A和B的代数积，其隶属函数为

$$\mu_{A\cdot B}=\mu_A\cdot\mu_B$$

- 代数和：称A＋B为模糊集合A和B的代数和，其隶属函数定义为

$$\mu_{A+B}=\begin{cases}\mu_A+\mu_B & \mu_A+\mu_B\le 1\\ 1 & \mu_A+\mu_B>1\end{cases}$$

- 环和：称 $A\oplus B$ 为模糊集合A和B的环和，其隶属函数定义为

$$\mu_{A\oplus B}=\mu_A+\mu_B-\mu_A\cdot\mu_B$$

例2.2.2: 对例2.2.1，计算模糊集合A和B的代数积，代数和和环和。

解:

$$A\cdot B=\frac{0.9\times 0.3}{u_1}+\frac{0.2\times 0.1}{u_2}+\frac{0.8\times 0.4}{u_3}+\frac{0.5\times 0.6}{u_4}$$

$$=\frac{0.27}{u_1}+\frac{0.02}{u_2}+\frac{0.32}{u_3}+\frac{0.3}{u_4}$$

$$A+B=\frac{1}{u_1}+\frac{0.3}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}$$

$$A\oplus B=\frac{0.9+0.3-0.9\times 0.3}{u_1}+\frac{0.2+0.1-0.2\times 0.1}{u_2}+\frac{0.8+0.4-0.8\times 0.4}{u_3}$$

$$+\frac{0.5+0.6-0.5\times 0.6}{u_4}$$

模糊集合运算的基本性质

- 幂等性：$A\cup A=A$, $A\cap A=A$;
- 交换律：$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;
- 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;
- 吸收律：$(A\cap B)\cup A=A$; $(A\cup B)\cap A=A$;
- 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(B\cap C)$; $(A\cup B)\cap C=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;
- 两极律：$A\cup U=U$, $A\cup\phi=A$, $A\cap U=A$, $A\cap\phi=\phi$
- 复原律：$(A^C)^C=A$;
- 对偶律：$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$, $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$;

- 如果A和B是经典集合，则成立互补律，即

$$A \bigcup \overline{A} = U \qquad A \bigcap \overline{A} = \phi$$

中U为论域，但如果A和B是模糊集合，则互补律不成立，即

$$\mu_A(u) \vee \mu_B(u) \neq 1 \qquad \mu_A(u) \Lambda \mu_{\overline{A}}(u) \neq 0$$

- 模糊集合不满足互补性，其原因是模糊集合没有明确的边界。正是因为这一点，模糊集合比经典集合更能可观地反映实际情况。

几种典型的隶属度函数及其Matlab表示

(1) 高斯型隶属度函数

$$f(x,\sigma,c)=e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}$$

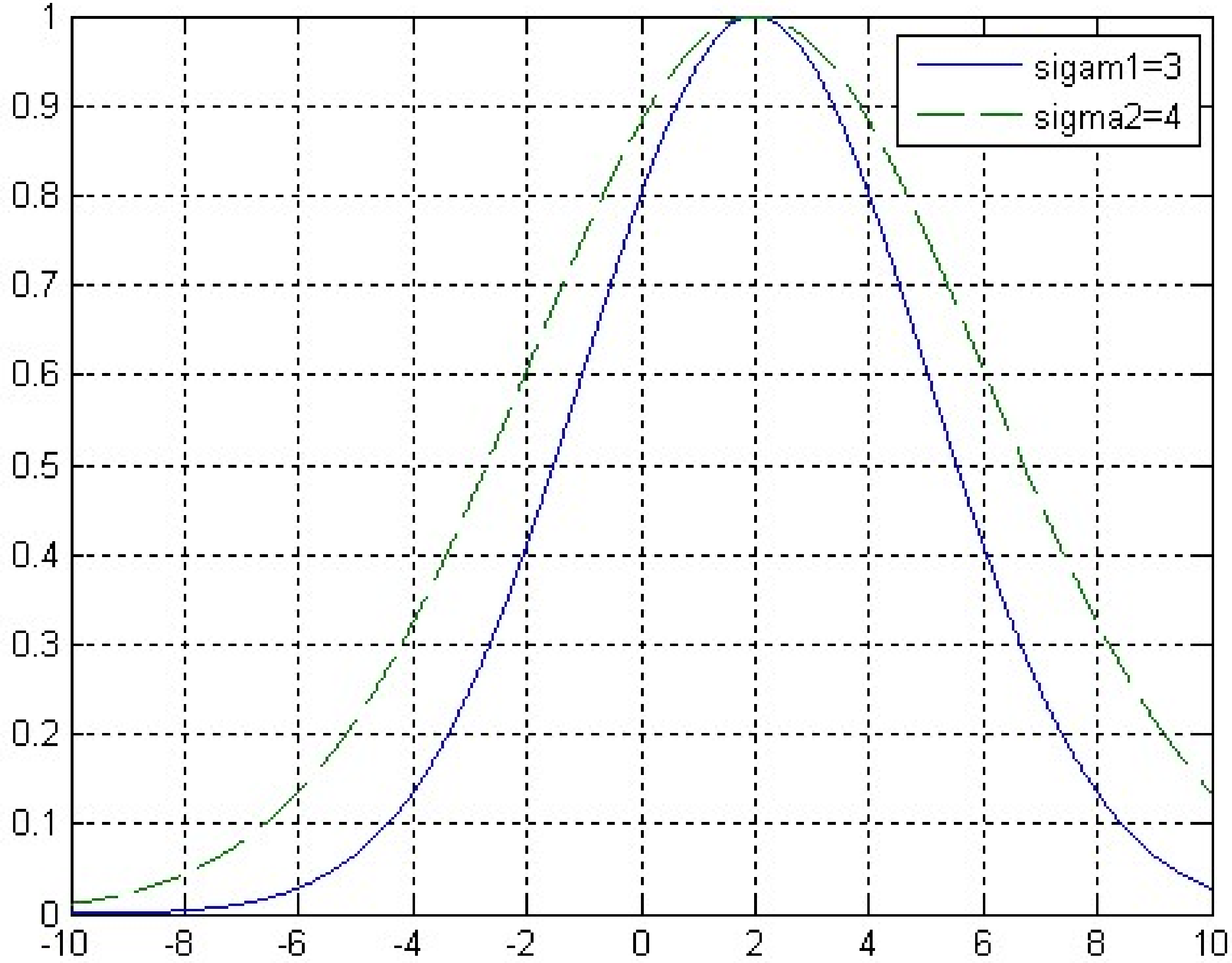
其中，参数 σ 通常为正数，参数c用于确定曲线的中心，Matlab表示为gaussmf(x,[σ, c]).

画出两个高斯曲线的Matlab语句：

——————————————

```
x=-10:0.01:10;
sigma1=3;sigma2=4; c=2;
y1=gaussmf(x,[sigma1,c]);
y2=gaussmf(x,[sigma2,c]);
figure;
plot(x,y1,'-',x,y2,'--');
grid;
legend('sigam1',sigma2');
axis([-10 10 0 1.1]);
```

———————————————

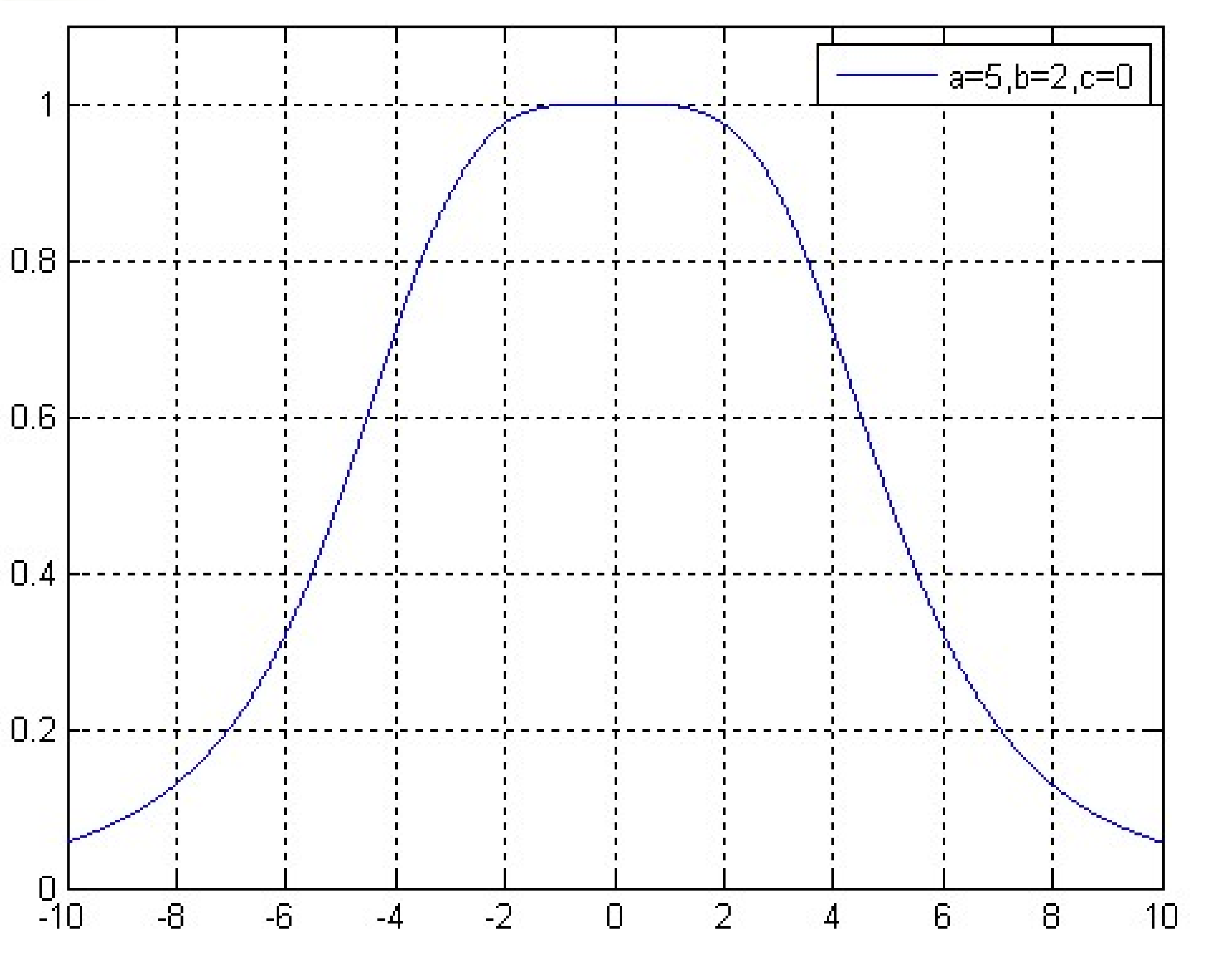


高斯图：其中 $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 4, c = 2$

(2) 广义钟形隶属函数

$$f(x,a,b,c)=\frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

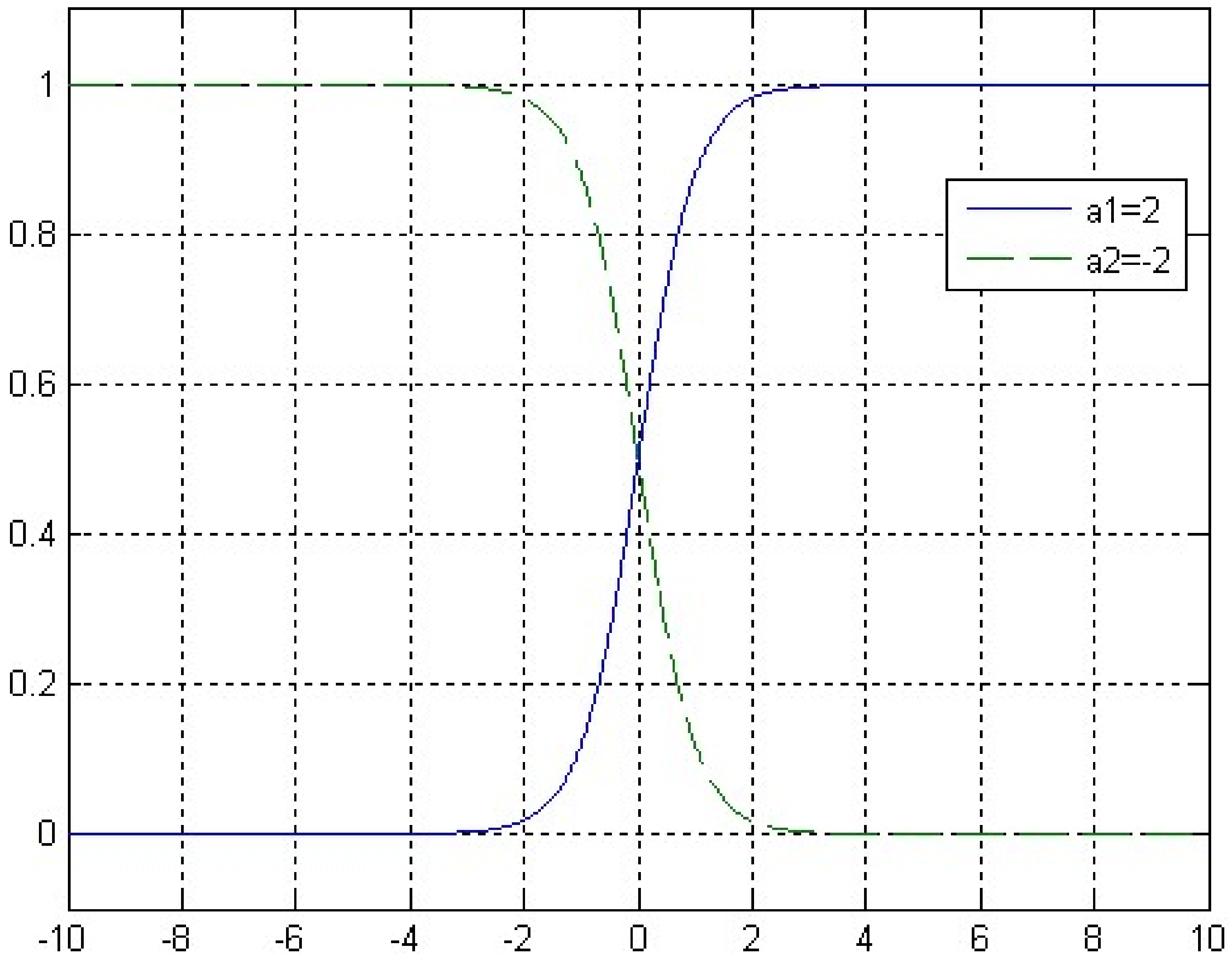
其中,参数a和b通常是正数，参数c用于确定曲线的中心。Matlab表示为gbellmf(x,[a,b,c])


a=5,b=2,c=0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

(3) S型隶属函数

$$f(x,a,c)=\frac{1}{1+e^{-a(x-c)}}$$

其中，参数a的正负决定了S型隶属函数可开口朝左或朝右，有来表示“正大”或者“负大”的概念。Matlbe表示是sigmf(x,[a,c]);

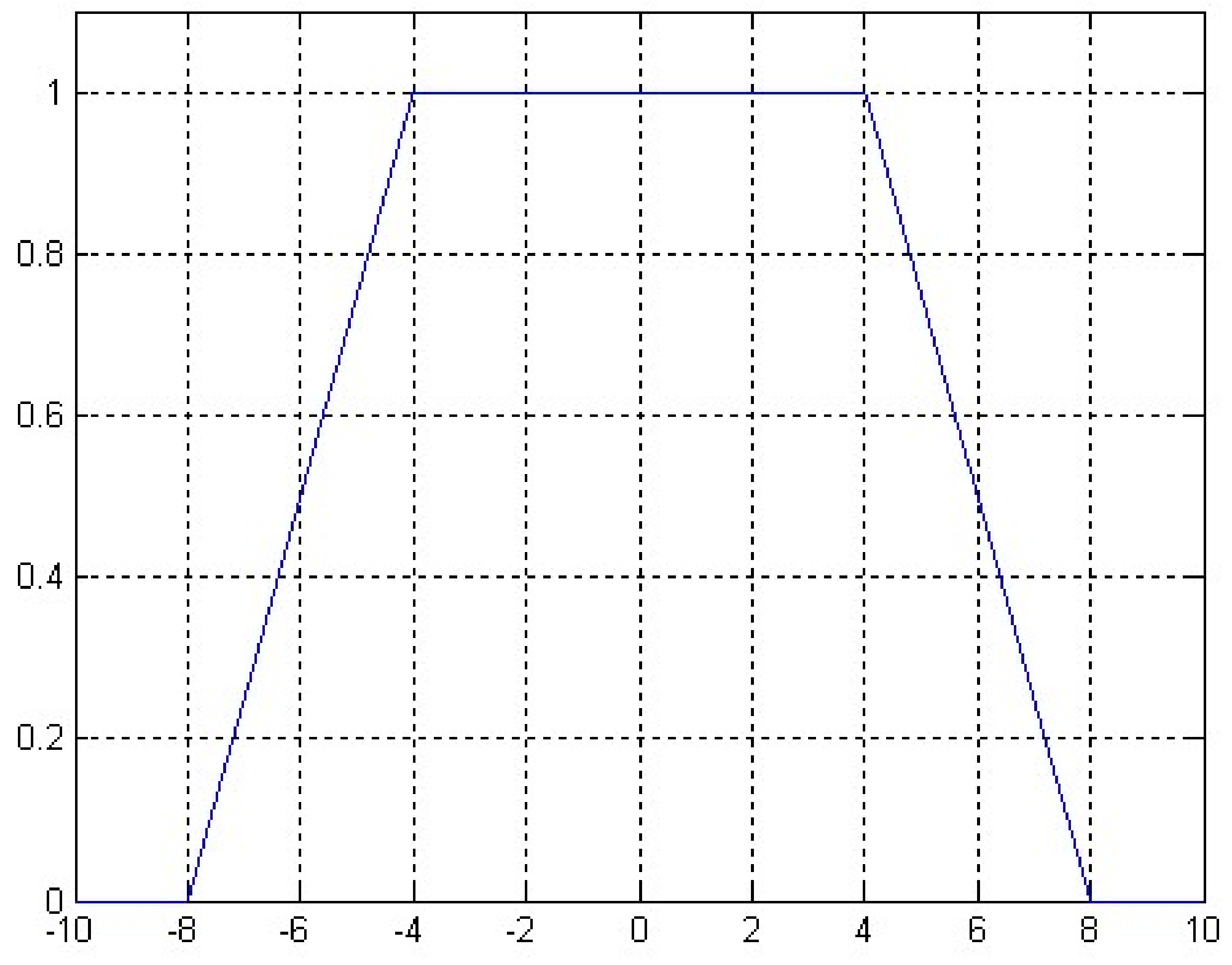

a1=2
a2=-2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

(4) 梯形隶属函数

梯形隶属函数有4个参数a,b,c和d确定

$$f(x,a,b,c,d)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & b\le x\le c\\ \dfrac{d-x}{d-c} & c\le x\le d\\ 0 & x\ge d\end{cases}$$

其中，参数a和d确定梯形的“脚”，而参数b和c确定梯形的“肩膀”。Mablab表示为tramf(x,[a,b,c,d]).



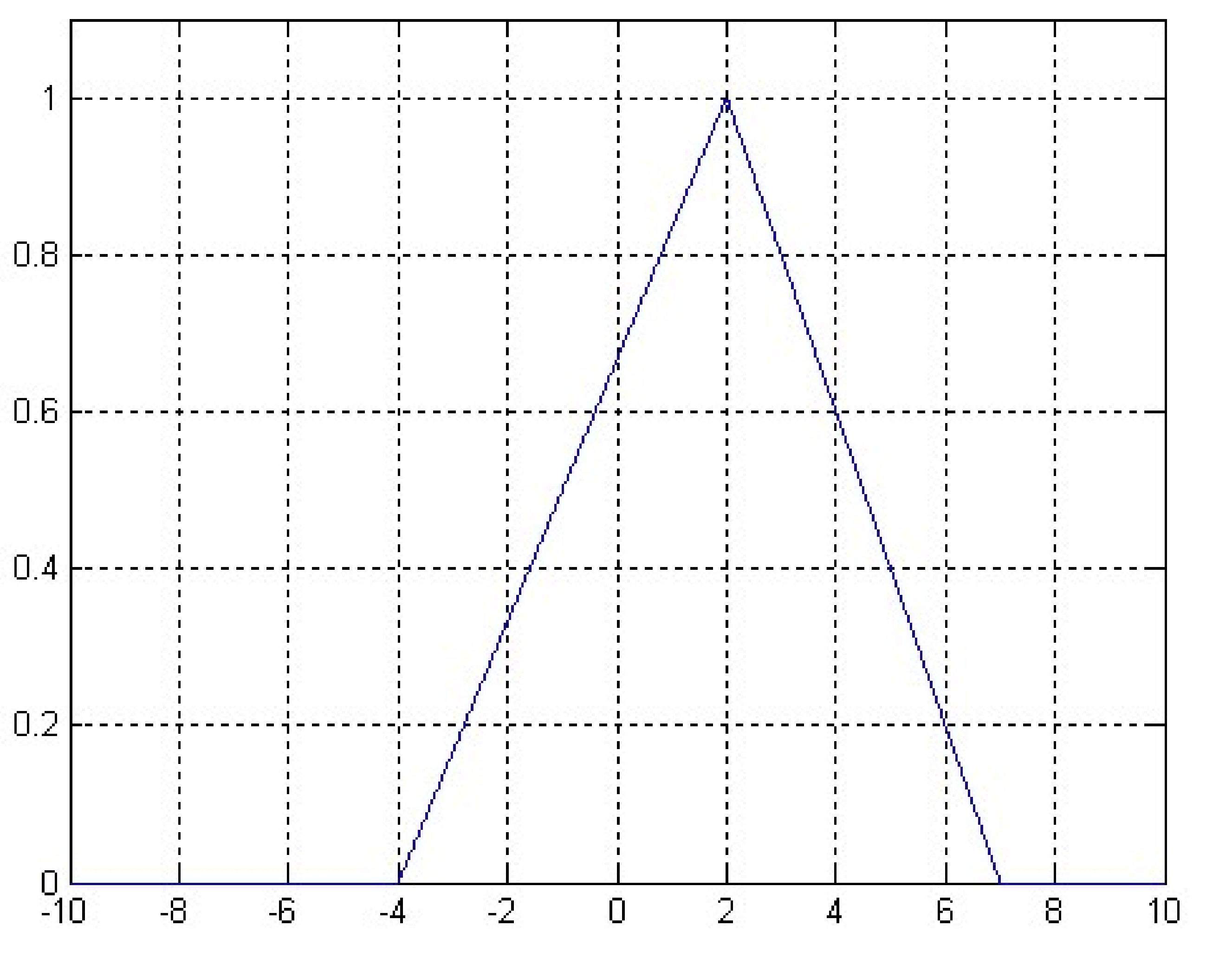
a=-8,b=-4,c=4,d=8

(5) 三角形隶属函数

三角形隶属函数有三个参数a, b和c确定：

$$f(x,a,b,c)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ \dfrac{c-x}{c-b} & b\le x\le c\\ 0 & x\ge c\end{cases}$$

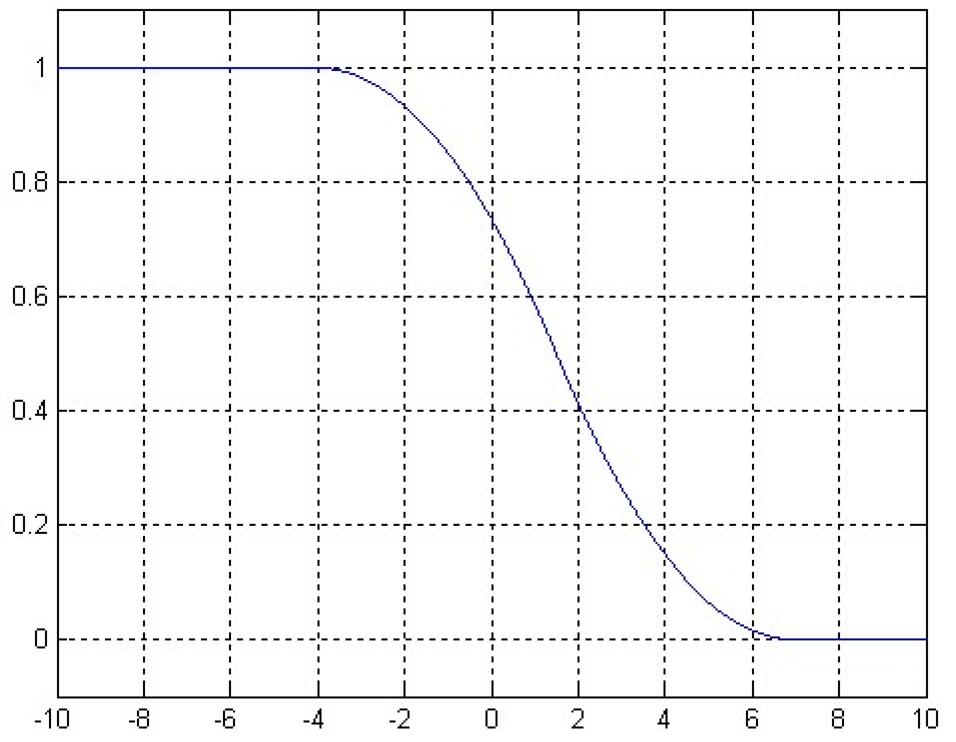
其中，参数a, c确定三角形的“脚”，而参数b确定三角形的“峰”。Matlab表示为trimf(x,[a,b,c]).



a=-4, b=2, c=7

(6) Z形隶属函数

这是基于样条函数的曲线，由两个参数a和b确定其曲线的形状。Matlab表示为zmf(x,[a,b]).



a=-4,b=7

- 实验1：基于MATLAB编程，以图形的方式输出以上常见的隶属度函数，并通过图形分析出各参数的含义。

2.3模糊关系与模糊推理

2.3.1 模糊关系的定义及表示方法

定义**2.3.1(**经典集合的直积**)**：设X和Y是两个经典集合，有他们各自元素x∈X和y ∈Y构成的序偶(x,y)全体所组成的集合，即

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X \wedge y \in Y\}$$

称为X与Y的直积，也称为笛卡积或叉积。

- 序偶的顺序不能改变，即一般来说(x,y) ≠(y,x)。

定义2.3.2(普通关系)：设X和Y是两个经典集合（或两个论域），在X×Y为论域下的任何一个经典集合R（即X×Y任何一个子集），称为X到Y的一个（普通）二元关系。如果X=Y，则称R为X上的（普通）二元关系。

如果对x∈X和y ∈Y（或者对(x,y) ∈X×Y），有(x,y) ∈R，则称元素x与y具有关系R，记为xRy；否则称x与y不具有关系R，记为 $x\overline{R}y$。

定义2.3.3(普通等价关系)：若X上的一个关系R同时具有自反性、对称性和传递性，则称关系R为X上的等价关系，其中

① 自反性：$\forall x \in X$，都有xRy，则称关系R具有自反性；

② 对称性：$\forall x_1, x_2 \in X$，如果x_1Rx_2，则必有x_2Rx_1，则称R具有对称性；

③ 传递性：$\forall x_1, z, x_2 \in X$，如果有$x_1Rz$且$zRx_2$，则必有$x_1Rx_2$，则称R具有传递性。

例2.3.1: 定义集合male和female两个集合

male={Steven, Bob, David}

female ={Helen, Louise, Anna}

则这两个集合的直积为

male×female={(Steven, Helen), (Steven, Louise), (Steven, Anna), (Bob, Helen), (Bob, Louise), (Bob, Anna), (David, Helen), (David, Louise), (David, Anna)}

定义直积male×female的一个子集，即集合male到female的一个(普通)关系Husband_and_Wife：

Husband_and_Wife

={(Steven, Louise)，(Bob, Helen)，(David, Anna)}

表示夫妻关系。还可以定义

Brother_and_Sister={(Bob, Louise)}

表示兄妹关系。

定义2.3.3（模糊关系）：设U和V是两个经典集合，在U×V为论域下定义的任何一个模糊集合R，称为U到V的模糊关系。当时U=V，称R为U上的一个模糊关系。

一个模糊关系，其特性由下面的隶属函数来描述：

$$\mu_R : U \times V \to [0,1]$$

隶属函数 μ_R 在序偶(u,v)的函数值 $\mu_R(u,v)$ 刻画了元素u和元素v两者之间具有关系R的程度。

当$U=\{u_1,u_2,\ldots u_n\}$和$V=\{v_1,v_2,\ldots v_m\}$均为有限集合时，模糊关系R可以由如下的矩阵唯一刻画

$$R = \begin{pmatrix} \mu_R(u_1,v_1) & \mu_R(u_1,v_2) & \cdots & \mu_R(u_1,v_m) \\ \mu_R(u_2,v_1) & \mu_R(u_2,v_2) & \cdots & \mu_R(u_2,v_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_R(u_n,v_1) & \mu_R(u_n,v_2) & \cdots & \mu_R(u_n,v_m) \end{pmatrix}$$

- 以上矩阵称为模糊矩阵，即U和V是有限集合时，两者之间的一个模糊关系等价于一个模糊矩阵。
- 广义上来看，任何一个其元素处于0与1之间的矩阵，均可将其当成一个模糊矩阵。

定义**2.3.4(**模糊等价关系**)**：如果U上的一个模糊关系R具有自反性、对称性和传递性，则称该模糊关系R是等价模糊关系，其中

1. 自反性：$\forall x \in U$，有 $\mu_R(x,x)=1$，则称模糊关系R具有自反性（即模糊矩阵中的对角线元素为1）；

2. 对称性：如果 $\forall x, y \in U$，有 $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$，则称称模糊关系R具有对称性（即模糊矩阵是对称矩阵）；

3. 传递性：如果 $\forall x, y, z \in U$ ，$\mu_R(x,y)=\lambda_1, \mu_R(y,z)=\lambda_2$，

$\mu_R(x,z)=\lambda$，则有 $\lambda \ge \min(\lambda_1,\lambda_2)$ 成立。

例2.3.2: 设集合X表示一种水果的颜色

X={green, yellow, red}

而该水果成熟级别用集合Y表示

Y={unripe, semi-ripe, ripe}

用集合Z表示水果的三种味道

Z={sour, sweet-sour, sweet}

则

$R_1(x,y)$	unripe	semi-ripe	ripe
green	1	0.5	0
yellow	0.3	1	0.3
red	0	0.7	1

$R_2(x,z)$	sour	sweet-sour	sweet
unripe	1	0.5	0
semi-ripe	0.7	1	0.3
ripe	0	0.7	1

定义了两个模糊关系R1和R2，它们分别表示水果的颜色和水果成熟程度和水果味道模糊关系。

2.3.2 模糊关系的合成

- 在日常生活中，两个关系的组合，可以构成一个新的关系。
- 例如，如果张三是李四的妹妹（两者为兄妹关系），李四是王五的丈夫（夫妻关系），则张三与王五是姑嫂关系，可以写作：姑嫂＝兄妹∘夫妻。
- 模糊关系和普通关系一样，两个模糊关系可以复合成一种新的模糊关系。

定义2.3.4: 设有三个论域U，V和W，在设Q是U到V的一个模糊关系，R是V到W的一个模糊关系，两个模糊关系Q和R的合成记为Q∘R，它是一个U到W的模糊关系，它的隶属函数定义为

$$\mu_{Q\circ R}(u,w)=\bigvee_{v\in V}(\mu_Q(u,v)\wedge\mu_R(v,w))$$

当U，V和W均为有限集合时，模糊关系的合成可以由模糊矩阵表示。假设模糊关系Q和R的模糊矩阵是：$Q=(q_{ij})_{n\times m}$ 和$R=(r_{jk})_{m\times l}$，定义

$$s_{ik}=\bigvee_{j=1}^{m}(q_{ij}\wedge r_{jk})$$

则模糊矩阵

$$S=(s_{jk})_{n\times l}$$

就是模糊矩阵Q与R的合成，即$S=Q\circ R$。

例2.3.3: 对例2.3.2中定义的两个模糊关系R_1和R_2，按照模糊关系的合成运算，有

R(x,z)	sour	sweet-sour	sweet
geen	1	0.5	0.3
yellow	0.7	1	0.4
red	0.2	0.7	1

模糊关系R表示该水果颜色与水果味道的模糊关系。

例2.3.4: 设R和S是两个模糊矩阵（模糊关系）

$$R = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0 & 1.0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

按照模糊关系的max-mix合成原则，得到如下的模糊合成关系

$$T = R \circ S = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0 & 1.0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (0.7\Lambda 0.6)\mathrm{V}(0.5\Lambda 0)\mathrm{V}(0\Lambda 0) & (0.7\Lambda 0.8)\mathrm{V}(0.5\Lambda 1.0)\mathrm{V}(0\Lambda 0.9) \\ (1.0\Lambda 0.6)\mathrm{V}(0\Lambda 0)\mathrm{V}(0\Lambda 0) & (1.0\Lambda 0.8)\mathrm{V}(0\Lambda 0.1)\mathrm{V}(0\Lambda 0.9) \\ (0\Lambda 0.6)\mathrm{V}(0\Lambda 0)\mathrm{V}(0\Lambda 0) & (0\Lambda 0.8)\mathrm{V}(1.0\Lambda 1.0)\mathrm{V}(0\Lambda 0.9) \\ (0\Lambda 0.6)\mathrm{V}(0.4\Lambda 0)\mathrm{V}(0.3\Lambda 0) & (0\Lambda 0.8)\mathrm{V}(0.4\Lambda 1.0)\mathrm{V}(0\Lambda 0.9) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & 0.8 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

- 实验2：编程实现模糊矩阵的合成，程序要求能判断输入的两个模糊矩阵是否可以合成。

2.3.3 语言变量

- 语言是人们进行思维和信息交流的主要工具。语言可以分为两种：自然语言和形式语言。
- 人们日常生活中所使用的语言属于自然语言，计算机使用的语言是形式语言，两者的主要区别是自然语言具有模糊性，而形式语言具有严格的语法规则和语义，不具有任何的模糊性。

  那么什么是语言变量呢？我们先来考察一下一般数学上的变量所应具有的特性。
- 数学上的变量，首先它必须有一个变量名，如x，y等；

- 其次，必须明确该变量可以取何种类型的值，如指明可以取实数，复数等；
- 再者，还要根据具体情况，指明该变量在它可以取的类型值中，具体的取值范围，即变量的定义域。

定义**2.3.5(**语言变量的初步定义**):** 如果一个变量取值的类型是语言中的词，则该变量就是语言变量。所有可以取值的词中（即该变量的定义域）如果包含有模糊词汇（如“大”，“中”，“小”等），则该变量称为模糊语言变量。

我们知道，模糊词汇表示了一种模糊概念，模糊词汇通常由模糊集合表示。如果将模糊集合看成一种数据类型，给出如下的定义。

定义2.3.6： 由一系列定义好的模糊集合所组成的经典集合可以看成一个数据类型，称为模糊集合数据类型，每一个定义好的模糊集合就是该数据类的一个“数”或“常数”。

有了定义2.3.6，定义2.3.5可以等价表示为

定义2.3.5’: 如果一个变量取值的类型是模糊集合数据类型，则该变量称为模糊语言变量。

- 如上的定义其实还没有完全刻画出语言变量所具有的所有特性。还是让我们继续深入理解数学上变量的特性。

- 数学上的变量严格来说，除了给出变量名，确定出该变量可以取何种类型的值及其定义域外，还要对可以取值的数据类型进行解释，即要表述清楚这些数据是什么，具有什么特性等。

由此看来，严格意义上来讲，要定义一个变量（无论是数学上的变量还是模糊语言变量），必须描述如下几点：

1. 给出变量名；
2. 规定变量类型；
3. 给出变量的取值范围，即变量的定义域；
4. 描述该变量可以取值的数据类型中的各个数的特性，和相互间的联系等。（模糊语言变量的定义不能省）

Zadeh为语言变量给出了如下完整的定义。

❖ 定义**2.3.7:** 一个语言变量可以用一个五元体(x,T(x),U,G,M) 来表示，其中x为变量名，T(x)为x的语言集，即语言变量所有可以取值的词汇所组成的集合；每一个语言取值是一个定义在论域U上的模糊集合；G为语言取值的语法规则；M是语义规则，用于产生模糊集合的隶属度函数。

例**2.3.5:** 以控制论的误差为语言变量，论域为U=[-6, +6]。“误差”这个语言变量的原子单词有“大”，“中”，“小”和“零”，对这些原子单词施加适当的语气算子，就可以规定T(x)如下

T(x)=T(误差)=｛负很大，负大，负较大，负中，负小，零，正小，正中，正较大，正大，正很大｝

模糊控制、神经控制和智能控制P66

- 从以上可以看出，模糊语言变量的每一个取值其实际是一个模糊集合。
- 我们知道，变量的取值是常量，从这样意义上来说，模糊集合这是可以看成一个“常量”，因而有时称模糊集合为“模糊值”也就是自然的了。
- 模糊算子：模糊语言变量取值是模糊语言（即模糊集合，或模糊值），通常可以在模糊语言前面加上“极”、“非”、“相对”、“比较”、“略”、“稍微”、等修饰词，这种用于加强或减弱语气的词可以视为一种模糊算子或称语气算子。
- 设模糊集合A(模糊值)的隶属度仍用A表示，则

$$H_\lambda A = A^\lambda$$

其中，H_4代表“极”或者“非常非常”，H_2代表“很”或者“非常”，$H_{1/2}$代表“较”或者“相当”，$H_{1/4}$代表“稍”或者“略微”等。

例**2.3.6:** 在论域U=[0, 100]内给出了年龄语言变量取值“老”的模糊集合的隶属度函数

$$\mu_{老}(x)=\begin{cases}0 & x<50 \\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}} & 50\le x\le 100\end{cases}$$

现以60岁为例，通过隶属函数分别计算60属于“极老”，“很老”，“较老”和“稍老”的隶属度。

解:

$$\mu_{极老}(60)=[\mu_{老}(60)]^4=0.8^4=0.41$$

$$\mu_{很老}(60)=[\mu_{老}(60)]^2=0.8^2=0.64$$

$$\mu_{较老}(60)=[\mu_{老}(60)]^{0.75}=0.8^{0.75}=0.845$$

$$\mu_{稍老}(60)=[\mu_{老}(60)]^{0.25}=0.8^{0.25}=0.946$$

2.3.4 模糊推理

- 在形式逻辑中，我们经常使用三段式的演绎推理，即有大前提、小提前和结论构成的推理。
- 如果三段式演绎推理的过程中，出现了模糊概念，则称为模糊推理。

设x表示论域U下的一个语言变量，A表示论域U下的模糊集；y是论V下的一个语言变量，B是论域V下的一个模糊集，则三段式的演绎模糊推理可以描述如下：

前向推理：

大前提：　　如果x是A，则y是B

小前提：　　如果x是A’

———————————————————

结论：　　　则y是B’?

例如：设x表示“温差”，y表示“电压”，

大前提：　　如果x是“正大”，则y是“降低”

小前提：　　如果x是“正较大”

————————————————————

结论：　　则y是“?”

用语言描述，就是，如果温差为正且大，则将电压降低，现在温差为正且较大，电压将如何调整？

上面的模糊推理模型也可以这样写

大前提：　如果x取值A，则y取值B

小前提：　如果x取值A’

————————————————————————

结论：　则y取值B’?

以上称为前向模糊推理，还用一种称为反向模糊推理模型。

反向推理：

大前提：如果x是A，则y是B

小前提：如果y是B’

————————————————————————

结论：　x是A’

模糊语句: 利用连接词将模糊词连接起来就组成了模糊语句，模糊语句可以分为模糊直言语句和模糊推理语句两类。

1. 模糊直言语句：设x上论域X下的一个语言变量，A是该论域下的一个模糊集，则说“x是A”就是模糊直言语句。
2. 模糊条件语句：设 x 和 y 分别是论 X 和 Y 下的两个语言变量， A 和 B 分别是论域 X 和 Y 下的两格模糊集合，简答的模糊条件语句可以表示为“if x=A then y=B”或者 “if A then B”。

例如：设 x 表示语言变量“年龄”，A表示模糊概念“很高”，则“x是A”或者更简单地表示为“x=A”就是模糊直言，用自然语句表示就是：“年龄很高”。

又如：设 x 表示语言变量“车龄”， y 表示语言变量“车技”，A表示模糊概念“长”，B表示模糊概念“高”，则“if x=A then y=B”就是一个模糊条件语句，用自然语言说出就是：“如果车龄长，则车技高”。

- 模糊推理语句还有很多较复杂的形式，如：“if A then B or C”，“if A and B then C”,“if A or B then C”“if A then B or C”等等。
- 由此看来，三段式的演绎模糊推理中，大前提是用模糊条件语句表示，小前提是用模糊直言语句表示。
- 较为复杂的模糊推理，大前提可以包含有多条模糊条件语句，小前提可以是多条直言语句。

定义2.3.7: 设A和B分别表示论域X和Y上的两格模糊集合，则“if A then B”表示了一个模糊蕴涵，记为$A \rightarrow B$，它等价于X到Y的一个模糊关系，记为$R_{A \rightarrow B}$。任何一条模糊推理均可以看成一个模糊蕴涵，均等价于一个模糊关系。

模糊推理规则：

前向：$B' = A' \circ R_{A \rightarrow B}$

反向：$A' = R_{A \rightarrow B} \circ B'$

针对"if A then B"的模糊推理的模糊关系生成

1. Zadeh法

$$R_{A\to B} = (A\times B)\bigcup(\overline{A}\times E)$$

其中E表示A的论域的全称矩阵，其全部元素均为1，而模糊集合A和B用向量法表示；而A×B 定义为

$$A\times B = A^T \circ B$$

2. Mandani 推理法

$$R_{A\to B} = A\times B$$

或者

$$R_{A\to B}(x,y) = A(x)\wedge B(x)$$

3. Lukasiewicz蕴涵

$$R_{A\to B}(x,y) = 1\wedge[1 - A(x) + B(x)]$$

4. 有限和蕴涵

$$R_{A\to B}(x,y)=1\wedge[A(x)+B(x)]$$

例2.3.7: 设在论域X=Y={1,2,3,4,5}下，定义模糊词汇（模糊集，模糊值）“大”、“小”和“较小”如下：

大=0.5/4+1/5；小=1/1+0.5/2；较小=1/1+0.4/2+0.2/3

若x小则y大，已知x较小，问y任何？

解：用向量法表示模糊集合“大”、“小”和“较小”分别为

大=(0 0 0 0.5 1)，小=(1 0.5 0 0 0)，较小=(1 0.4 0.2 0 0)

首先，按照Zadeh法求模糊关系$R_{A\to B}$（以表示如果“小，则大”的模糊推理）：

$$R_{小\to大}=\begin{pmatrix}1\\0.5\\0\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&0&0&0.5&1\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0\\0.5\\1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0.5&1\\0.5&0.5&0.5&0.5&0.5\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

其次，根据前向模糊推理原则，得到当x取值“较小”时，y取值为

$$B'=较小\circ R_{小\to大}=(1\quad 0.4\quad 0.2\quad 0\quad 0)\circ R_{小\to大}$$

$$=(0.4\quad 0.4\quad 0.4\quad 0.5\quad 1)$$

（将B’与“大”比较，可以得到当x较小时，y较大的结论。）

例2.3.8: 考虑上面的例子，若y较小，问x任何？

解：这是一个反向推理，根据规则

$$A' = R_{小\to大} \circ 较小 = R_{小\to大} \circ (1 \quad 0.4 \quad 0.2 \quad 0 \quad 0)$$
$$= (0.4 \quad 0.4 \quad 0.4 \quad 0.5 \quad 1)$$

与“大”比较，可以得到当y较小时，x较大的结论。

例2.3.9: 设

$A=1/a_1+0.8/a_2+0.2/a_3$; $B=0.2/b_1+0.4/b_2+0.6/b_3$

分别为论域$U=\{a_1,a_2,a_3\}$和$V=\{b_1,b_2,b_3\}$上的两个模糊集合，假设有规则“if A the B”，使用Mamdani推理方法求输入是$A'=1/a_1+0.3/a_2+0.6/a_3$的输出。

解：按Mamdani法，有

$$R_{A\to B}=A\times B=A^T\circ B=\begin{pmatrix}1\\0.8\\0.2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0.2 & 0.4 & 0.6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.4 & 0.6\\0.2 & 0.4 & 0.6\\0.2 & 0.2 & 0.2\end{pmatrix}$$

于是当输入是时，输出为

$$B'=A'\circ R_{A\to B}=\begin{pmatrix}1 & 0.3 & 0.6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0.2 & 0.4 & 0.6\\0.2 & 0.4 & 0.6\\0.2 & 0.2 & 0.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$$

既有

$$B'=\frac{0.2}{b_1}+\frac{0.4}{b_2}+\frac{0.6}{b_3}$$

例2.3.9的程序实现：

```
a=[1 0.8 0.2]; b=[0.2 0.4 0.6]; c=[1 0.3 0.6];
A=a'*ones(size(b)); B=ones(size(a'))*b;
Rc=min(A,B)
d=AcomposeB(c,Rc);
```

- 实验3：编程实现Zadeh法和Mandani 推理法模糊逻辑蕴含。输入是两个模糊向量，输出是两方法的模糊矩阵。

❖ 其他形式的模糊条件推理

"if A then B else C"其模糊蕴涵为

$$R = (A \times B) \cup (\overline{A} \times C)$$

例**2.3.10:** 电热烘干炉依靠人工连续调节外加电压。操作人员的经验是："如果炉温低，则外加电压高，否则外加电压不很高"。试确定"如果炉温很低"，外加电压将如何调节？

解：设语言变量"炉温"的论域为X，"外加电压"的论域为Y，并设X=Y={1, 2, 3, 4, 5}。各模糊集为

A="底" =1/1+0.8/2+0.6/3+0.4/4+0.2/5

B="高" =0.2/1+0.4/2+0.6/3+0.8/4+1/5

C="不很高" =0.96/1+0.84/2+0.64/3+0.36/4+0/5

A1="很低" =1/1+0.64/2+0.36/3+0.16/4+0.04/5

用x表示语言变量"炉温"，y表示语言变量"外加电压"，则大前提是："if x=A then y=B else y=C"，简写为"if A then B else C"，对应的模糊蕴涵为

$$R=(A\times B)\cup(\overline{A}\times C)$$

$$=\left[\begin{pmatrix}1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2\end{pmatrix}^{T}\circ\begin{pmatrix}0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1\end{pmatrix}\right]\cup$$

$$\left[\begin{pmatrix}0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8\end{pmatrix}^{T}\circ\begin{pmatrix}0.96 & 0.84 & 0.64 & 0.36 & 0\end{pmatrix}\right]$$

$$
=\begin{pmatrix}
0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \\
0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 0.8 \\
0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\
0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.4 & 0.4 \\
0.8 & 0.8 & 0.64 & 0.36 & 0.2
\end{pmatrix}
$$

小前提是：“if x=A_1”，问y为何值（模糊集合）？由模糊推理合成规则得到

$$
B_1 = A_1 \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 0.64 & 0.36 & 0.16 & 0.04 \end{pmatrix} \circ R
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0.36 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}
$$

将B（高）B_1比较，B_1应该为“近似于高”。

2.4 基于规则的模糊推

模糊控制中的规则通常来自于专家系统，先考虑如下的两个输入一个输出的模糊系统：

输入：x是A' and y是B'

R_1: 如果x是A_1 and y是B_1则z是C_1

also R_2: 如果x是A_2 and y是B_2则z是C_2

……

also R_n：如果x是A_n and y是B_n则z是C_n

输出：z是C'

$A' \xrightarrow{x}$

$B' \xrightarrow{y}$

R_1: 如果x是A_1 and y是B_1则z是C_1

also R_2: 如果x是A_2 and y是B_2则z是C_2

……

also R_n： 如果x是A_n and y是B_n则z是C_n

$\xrightarrow{z} C'?$

二输入单输出模糊控制系统

模糊控制规则“如果x是A_i and y是B_i，则z是C_i”的蕴涵关系R_i定义为

$$R_i=(A_i \text{ and } B_i) \to C_i$$

于是，n条模糊控制规则总的模糊蕴涵关系为

$$R=\bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

最后求得推理结论为

$$C'=(A' \; and \;\; B') \circ R$$

例2.4.2: 已知一个双输入单输出的模糊系统，其输入量为x和y，输出量为z，其输入输出关系可以由如下的两条模糊规则描述：

R_1: 如果x是A_1 and y是B_1，则z是C_1

R_2: 如果x是A_2 and y是B_2，则z是C_2

现已知输入为x是A’ and y是B’，试求输出量z。这里x、y和z均为模糊语言变量，且已知

$$A_1 = \frac{1.0}{a_1} + \frac{0.5}{a_2} + \frac{0}{a_3} \qquad B_1 = \frac{1.0}{b_1} + \frac{0.6}{b_2} + \frac{0.2}{b_3} \qquad C_1 = \frac{1.0}{c_1} + \frac{0.4}{c_2} + \frac{0}{c_3}$$

$$A_2 = \frac{0}{a_1} + \frac{0.5}{a_2} + \frac{1}{a_3} \qquad B_2 = \frac{0.2}{b_1} + \frac{0.6}{b_2} + \frac{1.0}{b_3} \qquad C_2 = \frac{0}{c_1} + \frac{0.4}{c_2} + \frac{1.0}{c_3}$$

$$A' = \frac{0.5}{a_1} + \frac{1.0}{a_2} + \frac{0.5}{a_3} \qquad B' = \frac{0.6}{b_1} + \frac{1.0}{b_2} + \frac{0.6}{b_3}$$

解: (1)求每条规则的蕴涵关系R_i=(A_i and B_i)→C_i (i=1,2)。(A_i and B_i)采用求交运算，即

$$A_1\ and\ B_1 = A_1 \times B_1 = A_1^T \wedge B_1 = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 1.0 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.0 & 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

将它写成模糊向量的形式:

$$A_1 \times B_1 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.6 & 0.2 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

按模糊运算的最小运算原则，可得到第一条规则的蕴涵关系

$$(A_1 \text{ and } B_1) \to C_1 = (A_1 \times B_1)^T \Lambda C_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.6 \\ 0.2 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 1.0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同理可得

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 1.0 \end{pmatrix}$$

(2) 求总的蕴涵关系

$$R = R_1 \cup R_2 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 1.0 \end{pmatrix}$$

(3)计算输入量的模糊集合

$$A' \text{ and } B' = A' \times B' = A'^T \Lambda B' = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 0.6 & 1.0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 1.0 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0.6 \end{pmatrix}$$

将其写成向量的形式

$$A' \times B' = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.6 & 1.0 & 0.6 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

(4) 计算输出量的模糊集合

$$C' = (A' \times B') \circ R = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

即最后得到输出变量z的输出为 $C' = \frac{0.5}{c_1} + \frac{0.4}{c_2} + \frac{0.5}{c_3}$