迭代未知输入观测器设计—基于迭代学习控制思想

朱芳来

观测器设计的基本思想

上世纪60年代中下期，针对线性系统，提出了Luenberger观测器设计方法，用于估计系统未知状态。考虑如下的线性时不变系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{1}$$

观测器的定义：线性系统(1)的观测器是基于原系统(1)的已知信息(通常是看成输出y和控制输入u)所构造出的一个新动态系统，使得新系统的输出为原系统(1)状态的渐近收敛估计。

Luenberger全维观测器：$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$ (2)

其中 $L \in \mathbf{R}^{n \times p}$ 称为观测器增益矩阵。

未知输入观测器设计

Luenberger观测器提出不久，在上世纪60年代末期，未知输入观测器就得到了关注。

考虑具有未知输入的线性系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + D\eta \\ y = Cx \end{cases} \tag{3}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m, y \in \mathbf{R}^p$ 分别是系统的状态，控制输入和观测输出向量，而 $\eta \in \mathbf{R}^q$ 为系统的未知输入，表征系统的外部干扰，模型参数的不确定性，执行器故障等未知信号的综合。

针对具有未知输入的系统(3)进行观测器设计，不仅估计出系统的未知状态 x，同时还估计出系统的未知输入 η, 称为未知输入观测器设计。

迭代未知输入观测器设计

显然，在未知输入η已知的假设下，可以设计如下的Luenberger观测器

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + D\eta + L(y - C\hat{x}) \tag{4}$$

但事实上，η是未知，所以观测器(4)不可实施。称(4)为系统(3)的虚拟观测器。$\tilde{x} = x - \hat{x}, \tilde{y} = y - \hat{y}$ 为虚拟观测器的状态估计误差和输出估计误差，其中 $\hat{y} = C\hat{x}$ 。理论上，有 $\lim_{t\to\infty}\tilde{x}(t) = 0, \lim_{t\to\infty}\tilde{y}(t) = 0$ 且 $\lim_{t\to\infty}\dot{\tilde{y}}(t) = 0$ 。

迭代未知输入观测器设计方法

给出未知输入$\eta(t)$的迭代估计初值$\eta_0(t)$，针对该未知输入迭代初值，构造第0步虚拟系统

$$\dot{x}_0 = Ax_0 + Bu + D\eta_0 \tag{5}$$

针对第0步虚拟系统，构造Luenberger观测器：

$$\dot{\hat{x}}_0 = A\hat{x}_0 + Bu + D\eta_0 + L(y - C\hat{x}_0) \tag{6}$$

称系统(6)为原未知输入系统(3)的第0步迭代未知输入观测器。第0步的状态估计误差，输出估计误差和未知输入估计误差分别记为：

$$\tilde{x}_0 = x - \hat{x}_0, \tilde{y}_0 = y - C\hat{x}_0, \tilde{\eta}_0 = \eta - \eta_0$$

在此基础上，提出未知输入D型迭代估计：

$$\eta_1(t)=\eta_0(t)+\Gamma\dot{\tilde{y}}_0(t)$$

迭代出 $\eta_1(t)$，其中 Γ 待设计的迭代增益矩阵。

不失一般性，设得到了第k步的未知输入估计 $\eta_k(t)$，为此构造第k步的虚拟状态方程

$$\dot{x}_k(t)=Ax_k(t)+Bu(t)+D\eta_k(t) \tag{7}$$

针对系统(7)，利用原系统的已知信号(控制输入u和可测输出y)，构造第k步迭代未知输入观测器

$$\dot{\hat{x}}_k(t)=A\hat{x}_k(t)+Bu(t)+D\eta_k(t)+L\left(y(t)-C\hat{x}_k(t)\right) \tag{8}$$

第k步迭代状态估计，输出估计和未知输入估计误差分别记为

$$\tilde{x}_k(t)=x(t)-\hat{x}_k(t),\tilde{y}_k(t)=y(t)-C\hat{x}_k(t),\tilde{\eta}_k(t)=\eta(t)-\eta_k(t)$$

在此基础上，提出第k+1步未知输入估计方法：

$$\eta_{k+1}(t)=\eta_k(t)+\Gamma\dot{\tilde{y}}_k(t) \tag{9}$$

需要考虑的问题是：迭代增益 Γ 满足什么条件，可使得如下的迭代未知输入观测器

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}_k(t)=A\hat{x}_k(t)+Bu(t)+D\eta_k(t)+L\big(y(t)-C\hat{x}_k(t)\big)\\ \eta_k(t)=\eta_{k-1}(t)+\Gamma\dot{\tilde{y}}_{k-1}(t)\end{cases},\ (k=0,1,\cdots) \tag{10}$$

满足：$\lim\limits_{k\to\infty}\hat{x}_k(t)=x(t),\forall t\in[0,T]$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\hat{\eta}_k(t)=\eta(t),\forall t\in[0,T]$。(10)中，

$$\tilde{y}_{k-1}(t)=y(t)-C\hat{x}_{k-1}(t) \tag{11}$$

定理1：对于未知输入系统(3)及其迭代未知输入观测器(10)，如果满足：(i) $\left\| I-\Gamma CD \right\| < 1$，且(ii) $\hat{x}_k\left(0\right)=\hat{x}_{k-1}\left(0\right)+D\Gamma\tilde{y}_{k-1}\left(0\right),(k=1,2,\cdots)$，则有 $\lim_{k\to\infty}\hat{x}_k\left(t\right)=x\left(t\right),\forall t\in[0,T]$ 且 $\lim_{k\to\infty}\hat{\eta}_k\left(t\right)=\eta\left(t\right),\forall t\in[0,T]$。

为了消去(10)中 $\eta_k\left(t\right)=\eta_{k-1}\left(t\right)+\Gamma\dot{\tilde{y}}_{k-1}\left(t\right),\ (k=0,1,\cdots)$ 中的微分信息，先将它带入(10)中的第一是，并做化简得到

$$\dot{\hat{x}}_k\left(t\right)=\left(A-LC\right)\hat{x}_k\left(t\right)+Bu\left(t\right)+D\eta_{k-1}\left(t\right)+D\Gamma\dot{y}\left(t\right)-D\Gamma C\dot{\hat{x}}_{k-1}\left(t\right)+Ly\left(t\right) \quad (12)$$

针对(12)，做平移变换 $z_k\left(t\right)=\hat{x}_k\left(t\right)-D\Gamma y\left(t\right)+D\Gamma C\hat{x}_{k-1}\left(t\right)$，则关于平移变换后状态 $z_k\left(t\right)$ 的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{z}_k\left(t\right)=&\left(A-LC\right)z_k\left(t\right)-\left(A-LC\right)D\Gamma C\hat{x}_{k-1}\left(t\right)+Bu\left(t\right)\\&+D\eta_{k-1}\left(t\right)+\left[\left(A-LC\right)D\Gamma+L\right]y\left(t\right)\end{aligned} \quad (13)$$

根据 $z_k(t)=\hat{x}_k(t)-D\Gamma y(t)+D\Gamma C\hat{x}_{k-1}(t)$ 可以递推出

$$\hat{x}_k(t)=\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\left(D\Gamma C\right)^l z_{k-l}(t)+\left[\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\left(D\Gamma C\right)^l D\Gamma\right]y(t)+(-1)^k\hat{x}_0(t) \qquad (14)$$

于是，得到迭代未知输入观测器：

$$\begin{cases}\dot{z}_k(t)=\left(A-LC\right)z_k(t)-\left(A-LC\right)D\Gamma C\hat{x}_{k-1}(t)+Bu(t)\\ \qquad\qquad +D\eta_{k-1}(t)+\left[\left(A-LC\right)D\Gamma+L\right]y(t)\\ \hat{x}_k(t)=\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l\left(D\Gamma C\right)^l z_{k-l}(t)+\left(\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l\left(D\Gamma C\right)^l\right)D\Gamma y(t)+(-1)^k\left(D\Gamma C\right)^k\hat{x}_0(t) \\ \eta_k(t)=\eta_{k-1}(t)+\Gamma\dot{\tilde{y}}_{k-1}(t)\end{cases} \qquad (15)$$

$\left(k=1,2,\cdots\right)$

仿真

考虑某飞行器的定杆横向飞行的线性简化模型,该模型描述成式(3)的形式,其中

$$A=\begin{bmatrix}-0.08 & -0.030 & -0.157 & 0\\ -0.73 & -0.377 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -8.650 & 0 & -0.5\end{bmatrix}\qquad D=B=\begin{bmatrix}1.54 & -0.020\\ -0.1 & -0.056\\ 0 & 0\\ 0 & -6.50\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

将系统的极点配置到 $-0.487\pm 2.335j$, -8.435和-0.00877。取控制输入为 u=0. $\hat{x}_k(0)=[0;0;0;0]$ $\eta(t)=\begin{bmatrix}5\cos(2t)\\ \sin(t)\end{bmatrix}$。结果200次迭代，有

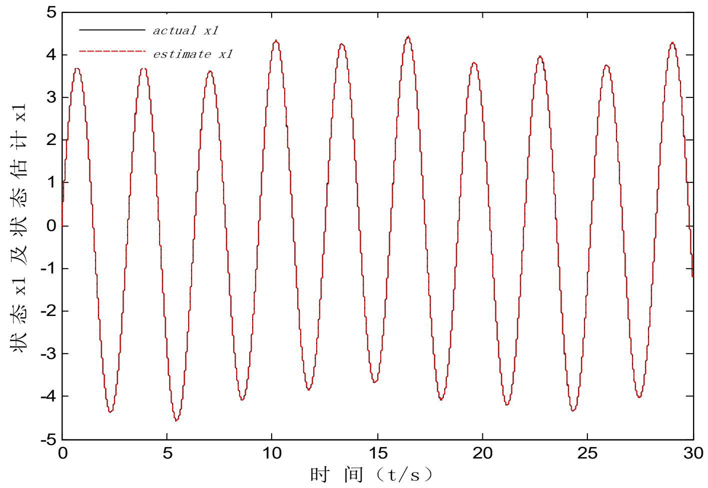

图1：状态x1的估计

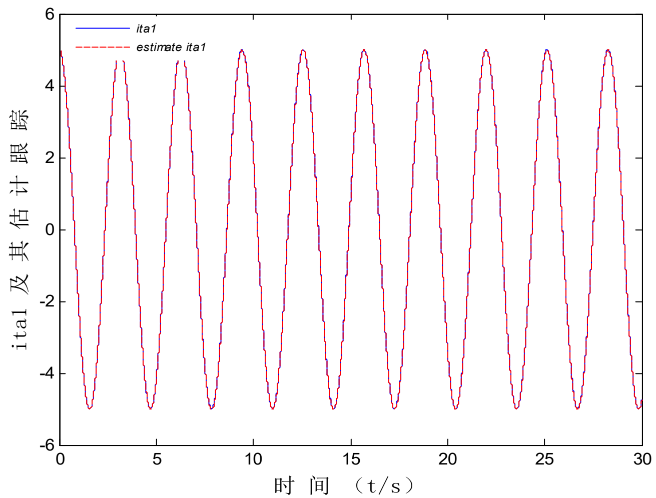

图2：第一个未知输入的估计

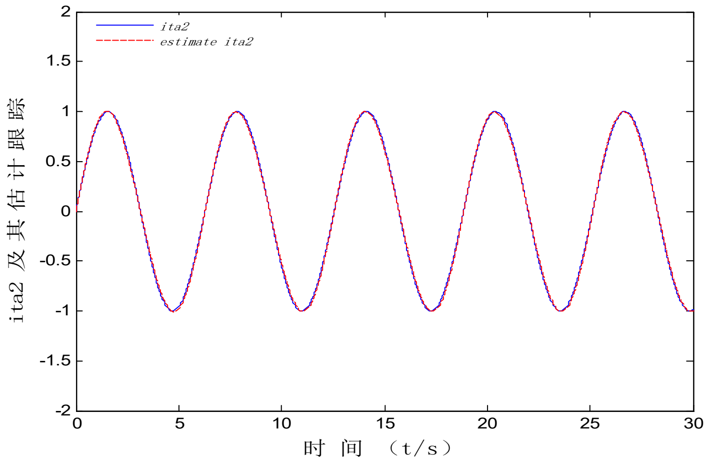

图3：第二个未知输入的估计