Весна '25. Предварительная волна. Вариант 1

1.1 Приведите пример линейной формы в пространстве полиномов

$$f(p) = p(a) \quad a \in \mathbb{R}$$

1.2 Как найти матрицу билинейной формы в некотором базисе

$$\{e_i\}_1^n \text{ - базис. Тогда матрица билин. формы имеет вид } \beta_{\text{ij}} = b\left(e_i, e_j\right)$$

1.3 В чём заключается смысл немого суммирования

Если в выражении встречается один и тот же индекс в верхнем и нижнем положении, то по нему подразумевается суммирование от 1 до n (где n — размерность пространства).

1.4 Как выглядит закон преобразования тензора типа (1, 1)

$$T_j^i \text{— компоненты тензора типа (1,1) в старом базисе,}$$

$$\overline{T_j^i} \text{— компоненты этого же тензора в новом базисе,}$$

$$P = \left(P_k^i\right) \text{— матрица перехода от старого базиса к новому,}$$

$$Q = P^{-1} \text{— матрица перехода от нового базиса к старому,}$$

$$\overline{T_j^i} = P_k^i T_l^k Q_j^l$$

1.5 Напишите закон преобразования матрицы оператора при смене базиса

Пусть $\varphi \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$, а в пространствах заданы базисы:

$$V: \quad \{e_i\}_{\text{i=1}}^n \left\{e'_j\right\}_{\text{j=1}}^n$$

$$W: \quad \{g_k\}_{\text{k=1}}^m \{g'_l\}_{\text{l=1}}^m$$

Причем известно, что $T = \left\{t_{\text{ij}}\right\}$ — матрица перехода из базиса {e} в базис {e'}, а матрица $S = \{s_{\text{kl}}\}$ — матрица перехода из базиса {g} в базис {g'}.

Матрица оператора при замене базисов преобразуется как $A'_\varphi = S^{\text{-1}} A \mathrm{T}$

2.1 Как связаны размерности ядра и образа оператора

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \varphi + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} \varphi = \dim_{\mathbb{K}} V$$

2.2 Найти собственные значения линейного оператора, матрица которого $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 - 2^2 = 0$$

$$(1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = 0$$

$$(-\lambda-1)(3-\lambda) = 0$$

$$\lambda = -1 \quad \lambda = 3$$

2.3 Сформулируйте спектральную теорему для диаганолизируемого оператора

Если линейный оператор A на конечномерном векторном пространстве диагонализируем, то существует такой базис пространства, в котором матрица оператора A является диагональной, и её диагональные элементы — это собственные значения оператора.

2.4 Определите алегбраические и геометрические кратности собственных чисел оператора, если в жордановом базисе его матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

собственное число 1, алгебраическая кратность 3, геометрическая 1

2.5 Запишите матрицу полинома p(x) от диагональной матрицы A

$$p\left(A_\varphi^D\right) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & p(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

3.1 Каким образом из евклидова пространства можно получиль нормированное

Евклидово пространство — частный случай нормированного пространства. Чтобы получить нормированное пространство из евклидова, достаточно использовать норму $\|x\| = \sqrt{\langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle}$

3.2 Вычислите скалярное произведение векторов $x = (1, 2)^T$ и $y = (0, 3)^T$ в базисе, матрица Грама которого $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$(1 \;\; 2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = (5 \;\; 3)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 9$$

3.3 Как найти коэффициенты Фурье вектора в ортонормированном базисе

В ортонормированном базисе координаты вектора находятся с помощью скалярного произведения. Если базис $\{e_1, e_2 ..., e_n\}$ ортонормированный, то для любого вектора v коэффициенты высчитываются как:

$$c_i =< v, e_i >$$

3.4 Что такое сигнатура квадратичной формы

Сигнатура квадратичной формы - это набор из двух чисел (p, q), где p - число положительных собственных значений, q - число отрицательных собственных значений.

3.5 Сформулируйте свойства унитарного оператора в комплексном евклидовом пространстве

1. изометрия: $\left\langle \psi_x, \psi_y \right\rangle = \langle x, y \rangle$
2. сохранение нормы: $\|\psi_x\| = \|x\|$
3. свойство сопряженного: $\psi^\dagger = \psi^{-1}$

Весна '25. Предварительная волна. Вариант 2

1.1 Напишите определение линейной формы

Линейной формой на пространстве V называется такая функция $f:\ \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, что $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}\ ,\forall \lambda \in \mathbb{K}$ выполняется:

1. Аддитивность: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2. Однородность: $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

1.2 Пусть билинейная форма задана своей матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ в некотором базисе. Представьте её в виде суммы симметричной и антисимметричной компонент

$$b_S(x,y) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$b_S(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b_S(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 3.5 \\ 3.5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b_{\mathrm{AS}}(x,y) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$b_{\mathrm{AS}}(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_{\mathrm{AS}}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b(x,y) = b_S + b_{\mathrm{AS}} = \begin{pmatrix} 1 & 3.5 \\ 3.5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3 Что является тензором линейной формы

Линейная форма $\varphi \in \mathbb{V}^*$ является ПЛФ валентности $(1, 0)$

Тензором полилинейной валентности $(1, 0)$ является $T_0^1(\mathbb{V})$

Таким образом тензором линейной формы является ковариантный тензор ранга 1 — элемент сопряжённого пространства $\mathbb{V}^*$.

1.4 Как может быть найден определитель квадратной матрицы с помощью символа Леви-Чевита

Пусть матрица A имеет размерность nxn, тогда

$$\det A = \varepsilon_{i_1, i_2, \dots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}$$

1.5 Матрица линейного оператора φ в базисе e_1, e_2 некоторого линейного пространства является матрица $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу линейного оператора базисе $e_1' = e_2, e_2' = e_1 + e_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2.1 Что такое ядро линейного оператора?

Ядро линейного оператора $A : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ — это множество всех векторов из пространства $\mathbb{V}$, которые оператор A переводит в нулевой вектор пространства $\mathbb{W}$

$$\ker A = \{v \in \mathbb{V} \mid Av = 0_{\mathbb{W}}\}$$

2.2 Сформулируйте определение собственного вектора и собственного значения оператора A

Ненулевой вектор $x \in \mathbb{V}$ называется собственным вектором оператора φ, если $\varphi x = \lambda x$. Число $\lambda \in \mathbb{K}$ называется при этом собственным значением оператора φ, отвечающим собственному вектору x.

2.3 Сформулируйте критерии диагонализируемости оператора A

1. Оператор A диагонализируем тогда и только тогда, когда для каждого его собственного значения λ алгебраическая и геометрическая кратности равны
2. Характеристический многочлен раскладывается на линейные сомножители, то есть все его корни лежат в поле $\mathbb{K}$

2.4 Определите алегбраические и геометрические кратности собственных чисел оператора, если в жордановом базисе его матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

собственное число 0, алгебраическая кратность 2, геометрическая 1

собственное число 1, алгебраическая кратность 1, геометрическая 1

2.5 Запишите матрицу полинома p(x) от диагональной матрицы A

$$p\left(A_\varphi^D\right) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

3.1 Какое пространство называется комплексным евклидовым пространством?

Линейное пространство X над $\mathbb{C}$ называется комплексным евклидовым пространством, если на нем заданаметрическая форма $g(x,y) = \langle x, y\rangle$ со следующими свойствами:

1. $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \alpha\langle x, y_1\rangle + \beta\langle x, y_2\rangle$ - линейность по второму аргументу
2. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ - эрмитовость
3. $\langle x, x\rangle \geq 0, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3.2 Приведите пример скалярного произведения в пространстве квадратных матриц

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$$

3.3 Как найти ортогональный проектор на подпространство, если задан ортонормированный базис

$$P_L(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i\rangle e_i$$

где e_i — ортонормированный базис подпространства L

3.4 Запишите нормальный вид квадратичной формы в $\mathbb{R}$, если её сигнатура $(r_+, r_-) = (2, 3)$

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2$$

3.5 Каким свойством обладает матрица эрмитова оператора в ортонормированном базисе

Если оператор T является эрмитовым, то в любом ортонормированном базисе его матрица A удовлетворяет:

$$A = A^*$$

где A^* — эрмитово сопряжённая

Весна ‘25. Предварительная волна. Вариант 3

1.1 Приведите пример линейной формы в пространстве геометрических векторов

$$f(v) = \langle a, v \rangle \quad a - \text{фиксированный вектор}$$

1.2 Как найти антисимметричную компоненту билинейной формы

$$b^{\mathrm{AS}}(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) - b(y, x))$$

$$B^{\mathrm{AS}} = \frac{1}{2}(B - B^T)$$

1.3 Какой валентностью обладает полилинейная форма валентности (p,q) после операции свёртки

$$(p - 1, q - 1)$$

1.4 Дайте определение символа Леви-Чевита

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \text{ если (i,j,k) - чётная перестановка} \\ -1 \text{ если (i,j,k) - нечётная перестановка} \\ 0 \text{ иначе (есть повторяющиеся индексы)} \end{cases}$$

1.5 Напишите определение матрицы линейного оператора $\mathbb{A}$ в базисе $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$

Матрицей линейного оператора $\mathbb{A}$ в этом базисе называется квадратная матрица A=(a_{ij}) размера n×n, элементы которой определяются следующим образом:

$$A(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \;\text{ для }\; j = 1, 2, ..., n$$

2.1 Что такое ядро линейного оператора

Ядро линейного оператора $A : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ — это множество всех векторов из пространства $\mathbb{V}$, которые оператор A переводит в нулевой вектор пространства $\mathbb{W}$

$$\ker A = \{v \in \mathbb{V} \mid Av = 0_{\mathbb{W}}\}$$

2.2 Найти собственные значения линейного оператора, матрица которого $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}\right) = (1 - \lambda)^2 - 2^2 = 0$$

$$(1 - \lambda - 2)(1 - \lambda + 2) = 0$$

$$(-\lambda - 1)(3 - \lambda) = 0$$

$$\lambda = -1 \quad \lambda = 3$$

2.3 Сформулируйте критерии диагонализируемости оператора A

1. Оператор A диагонализируем тогда и только тогда, когда для каждого его собственного значения λ алгебраическая и геометрическая кратности равны
2. Характеристический многочлен раскладывается на линейные сомножители, то есть все его корни лежат в поле $\mathbb{K}$

2.4 Сформулируйте основную теорему о структуре нильпотентного оператора

Пусть N — нильпотентный оператор на $\mathbb{V}$. Тогда существует разложениепространства $\mathbb{V}$ в прямую сумму циклических подпространств этого оператора $\mathbb{V} = \oplus\, \mathbb{U}_i$. Количество слагаемых в таком разложении равно $\dim \ker N$.

2.5 Запишите матрицу полинома p(x) от диагональной матрицы A

$$p\left(A_{\varphi}^{D}\right) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & p(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

3.1 Сформулируйте определение метрического тензора

Пусть g - метрическая форма. Тогда совокупность чисел $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ называется метрическим тензором.

3.2 Пусть x_1 и x_2 - ортогональные векторы. При каких α и β выполняетсяравентво $\alpha x_1 = \beta x_2$

При $\alpha = \beta = 0$

3.3 Какое подпространство называют ортогональным дополнением

Ортогональным дополнением пространства L называется множество $M = \{x \in X : x \perp L\}$

3.4 Какому необходимому и достаточному условию должны удавоетворять главные миноры отрицательно определённой квадратичной формы

$$(-1)^k D_k > 0 \quad \text{для всех} \;\; k = 1, 2, ..., n$$

где D_k — определитель $k \times k$-го верхнего левого блока (ведущего главного минора)

3.5 Сформулируйте определение унитарного оператора

Пусть ψ — опертор в евклидовом пространстве $X_{\mathbb{E}}(K)$ является унитарным, если сооблюдается хотя-бы одно (а как следствие и все остальные) из свойств:

1. изометрия: $\langle \psi_x, \psi_y \rangle = \langle x, y \rangle$
2. сохранение нормы: $\|\psi_x\| = \|x\|$
3. свойство сопряженного: $\psi^{\dagger} = \psi^{-1}$

Весна ‘25. Предварительная волна. Вариант 4

1.1 Напишите определение линейной формы

Линейной формой на пространстве V называется такая функция $f: \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, что $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ выполняется:

1. Аддитивность: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2. Однородность: $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

1.2 Пусть билинейная форма задана своей матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ в некотором базисе. Представьте её в виде суммы симметричной и антисимметричной формы

$$b_S = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$b_S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b_S = \begin{pmatrix} 2 & -1.5 \\ -1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{\text{AS}} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$b_{\text{AS}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b_{\text{AS}} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = b_S + b_{\text{AS}} = \begin{pmatrix} 2 & -1.5 \\ -1.5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3 В чём заключается смысл немого суммирования

Если в выражении встречается один и тот же индекс в верхнем и нижнем положении, то по нему подразумевается суммирование от 1 до n (где n — размерность пространства).

1.4 Как выглядит закон преобразования тензора типа (2, 0)

$$T^{ij} \text{— компоненты тензора T в старом базисе,}$$

$$\overline{T^{pq}} \text{— компоненты этого же тензора в новом базисе,}$$

$$P = \left(P_k^i\right) \text{— матрица перехода от старого базиса к новому,}$$

$$\overline{T^{pq}} = P_p^i P_p^j Q^{ij}$$

1.5 Матрицей линейного оператора φ в базисе e_1, e_2 некоторого линейного пространства является матрица $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу линейного оператора базисе $e_1' = 2e_1, e_2' = e_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1 Какую размерность имеет образ оператора φ, определённого в $\mathbb{R}^4$, если размерность ядра равна 2

2

2.2 Сформулируйте определение собственного вектора и собственного значения оператора A

Ненулевой вектор $x \in \mathbb{V}$ называется собственным вектором оператора φ, если $\varphi x = \lambda x$. Число $\lambda \in \mathbb{K}$ называется при этом собственным значением оператора φ, отвечающим собственному вектору x.

2.3 Сформулируйте спектральную теорему для диаганолизируемого оператора

Если линейный оператор A на конечномерном векторном пространстве диагонализируем, то существует такой базис пространства, в котором матрица оператора A является диагональной, и её диагональные элементы — это собственные значения оператора.

2.4 Определите алгебраические и геометрические кратности собственных чисел оператора если в жордановом базисе его матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

собственное число 0, алгебраическая кратность 2, геометрическая 1

собственное число 1, алгебраическая кратность 1, геометрическая 1

2.5 Найдите e^A если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$e^A = \begin{pmatrix} e & e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & e \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

3.1 Сформулируйте определение метрического тензора

Пусть g - метрическая форма. Тогда совокупность чисел $g_{ij} = g\left(e_i, e_j\right)$ называется метрическим тензором.

3.2 Приведите пример скалярного произведения в пространстве квадратных матриц

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$$

3.3 Какое подпространство называют ортогональным дополнением

Ортогональным дополнением пространства L называется множество $M = \{x \in X : x \perp L\}$

3.4 Запишите квадратичную форму по её матрице $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$$q(x) = 6x_1x_1 - 2x_1x_3 + x_2x_2 - 8x_2x_3 = 6x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3 - 8x_2x_3$$

3.5 Сформулируйте свойства спектра ортогонального оператора в вещественном евклидовом пространстве

1. Модуль всех собственных значений равен 1
2. Ортогональный оператор диагонализируем над $\mathbb{R}$

Весна '25. Предварительная волна. Вариант 5

1.1 Что из себя представляют элементы сопряжённого пространства

Элементы сопряжённого пространства V^* — это линейные формы (или ковекторы), то есть все линейные отображения вида $\varphi : V \to \mathbb{F}$ где V — ваше исходное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$

1.2 Дайте определение квадратичной формы на линейном пространстве V

Квадратичной формой на линейном пространстве V называется отображение q(v), построенное из билинейной формы b(x, y) следующим образом:

$$q : \mathbb{V} \to \mathbb{K}, q(v) = b(v, v), \forall v \in \mathbb{V}$$

1.3 Сколько различных тензоров можно образовать с помощью свёртки тензора типа (2,2)

4

1.4 Какими свойствами обладает символ Кронакера

1. Симметричность
2. В случае ДПСК справедливо свойство: $\delta_{ij} a^j = a_i$

1.5 Матрицей линейного оператора φ в базисе e_1, e_2 некоторого линейного пространства является матрица $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу линейного оператора базисе $e_1' = 2e_1, e_2' = e_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1 Что такое ядро линейного оператора

Ядро линейного оператора $A : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ — это множество всех векторов из пространства $\mathbb{V}$, которые оператор A переводит в нулевой вектор пространства $\mathbb{W}$

$$\ker A = \{v \in \mathbb{V} \mid Av = 0_{\mathbb{W}}\}$$

2.2 Найти собственные значения линейного оператора, матрица которого $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 - 2^2 = 0$$

$$(1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = 0$$

$$(-\lambda-1)(3-\lambda) = 0$$

$$\lambda = -1 \quad \lambda = 3$$

2.3 Линейный оператор f линейного пространства L^2 в базисе e_1, e_2 задан матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Выясниите, является ли он диагонализируем

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 0$$

$$4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$

$$6 - 5\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \text{ (алг. крат. 1)} \quad \lambda_2 = 3 \text{ (алг. крат. 1)}$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{одна строка линейно зависима} \Rightarrow \dim\ker = 2 - 1 \Rightarrow \text{геом. крат. 1}$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{одна строка линейно зависима} \Rightarrow \dim\ker = 2 - 1 \Rightarrow \text{геом. крат. 1}$$

Да, является

2.4? Опишите 2 подхода к формированию жорданова базиса

Подход через цепочки обобщённых собственных векторов

1. Находим собственные значения λ из характеристического уравнения.
2. Для каждого λ строим последовательность ядер: $\ker(A - \lambda I), \ker(A - \lambda I)^2, ...$
3. Выбираем векторы из разности ядер: $\ker(A - \lambda I)^k / \ker(A - \lambda I)^{k-1}$
4. Для каждого такого вектора строим цепочку: $v, (A - \lambda I)v, ..., (A - \lambda I)^{k-1} v$
5. Объединяя все цепочки, получаем Жорданов базис

Подход через разложение на инвариантные подпространства

1. Разбиваем пространство в сумму обобщённых собственных подпространств $V = \bigoplus V_\lambda$
2. В каждом V_λ находим циклические векторы — такие, чьи образы под действием A порождают инвариантное подпространство
3. Строим базисы:$\{v, Av, A^2 v, ...\}$
4. Полученные базисы соответствуют Жордановым блокам

2.5 Что такое операторный полином?

Операторный полином — это полином, в котором переменная заменена на линейный оператор.

3.1 Приведите произвольный пример нормы в пространстве квадратных матриц

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

3.2 Приведите пример скалярного произведения в пространстве полиномов степени не выше 3

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

3.3 Как найти ортогональный проектор на подпространство, если задан ортонормированный базис

$$P_L(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i$$

где e_i — ортонормированный базис подпространства L

3.4 Какому необходимому и достаточному условию должны удавоетворять главные миноры отрицательно определённой квадратичной формы

$$(-1)^k D_k > 0 \quad \text{для всех} \ \ k = 1, 2, ..., n$$

где D_k — определитель $k \times k$-го верхнего левого блока (ведущего главного минора)

3.5 Сформулируйте свойства унитарного оператора в комплексном евклидовом пространстве

1. изометрия: $\langle \psi_x, \psi_y \rangle = \langle x, y \rangle$
2. сохранение нормы: $\|\psi_x\| = \|x\|$
3. свойство сопряженного: $\psi^\dagger = \psi^{-1}$