Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Дисциплина «Дополнительный главы математического анализа»

Домашняя работа №2

Вариант №1

Выполнил:
Решетников С.Е.

Проверил:
Богачев В.А.

Санкт-Петербург, 2025

Задание №1
Вычислить площади фигур, ограниченных кривыми:

$$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$$

$$D:\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\qquad S=\iint_D dxdy$$

Проведём замену:

$$\begin{cases}u=\frac{x}{2}\\ v=\frac{y}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2u\\ y=3v\end{cases}$$

$$J=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}=6$$

$$D_2:\left(u^2+v^2\right)^2=u^2-v^2\qquad S=6\cdot\iint_{D_2}dudv$$

Перейдём в полярные кординаты:

$$\begin{cases}u=r\cos(\varphi)\\ v=r\sin(\varphi)\end{cases}$$

$$\left((r\cos(\varphi))^2+(r\sin(\varphi))^2\right)^2=(r\cos(\varphi))^2-(r\sin(\varphi))^2$$

$$r^4\left(\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2\right)^2=r^2\left(\cos(\varphi)^2-\sin(\varphi)^2\right)$$

$$r^2=\cos(2\varphi)\Rightarrow r=\pm\sqrt{\cos(2\varphi)}\ \ \textit{но т.к}\ r>0,\textit{то}\ \ r=\sqrt{\cos(2\varphi)}$$

$$\textit{при этом}\ \ 2\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]+2\pi k\Rightarrow\varphi\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]+\pi k$$

$$\textit{т.е. кривую можно разбить на 2 идентичные области}$$

$$S=6\cdot 2\cdot\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos(2\varphi)}}r\ drd\varphi=12\cdot\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos(2\varphi)d\varphi=\begin{bmatrix}t=2\varphi\\ dt=2d\varphi\end{bmatrix}=$$

$$=6\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos(t)dt=3\cdot\left(-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=6$$

Ответ: 6

Задание №2
Вычислить объёмы тел, ограниченных данными поверхностями: $z=0$, $z=3-x^2-y^2$

Найдём точки пересечения:

$$3-x^2-y^2=0$$

$$x^2+y^2=3\Rightarrow\textit{окружность радиуса}\ \sqrt{3}\ \textit{с центром}\ (0;0)$$

$$V=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_0^{3-x^2-y^2}dzdydx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}(3-x^2-y^2)dydx=$$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left((3-x^2)\sqrt{3-x^2}-\frac{(3-x^2)^{1.5}}{3}\right)+\left((3-x^2)\sqrt{3-x^2}-\frac{(3-x^2)^{1.5}}{3}\right)dx=$$

$$=2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}2\frac{(3-x^2)^{1.5}}{3}dx=\frac{4}{3}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(3-x^2)^{1.5}dx=\begin{bmatrix}x=\sqrt{3}\sin(t)\\ dx=\sqrt{3}\cos(t)dt\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3-3\sin(t)^2)^{1.5}\sqrt{3}\cos(t)dt=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}9\cos(t)^{2\cdot1.5+1}dt=12\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)^4dt=$$

$$=12\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos(2t)+1}{2}\right)^2dt=3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2t)^2+2\cos(2t)+1\ dt=$$

$$=3\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(4t)+1}{2}dt+2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2t)dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dt\right)=$$

$$=3\left(\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(4t)dt+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dt+(\sin(\pi)-\sin(-\pi))+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=3\left(\frac{1}{8}(\sin(2\pi)-\sin(-2\pi))+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+0+\pi\right)=3\cdot\frac{3}{2}\pi=\frac{9}{2}\pi$$

Ответ: $\frac{9}{2}\pi$

Задание №3

Вычислить координаты центра тяжести тела, ограниченного: параболоидом $4x=y^2+z^2$ и плоскостью $x=2$

Найдём точки пересечения:

$$8=y^2+z^2$$

$$y^2+z^2=8\Rightarrow \textit{окружность радиуса } \sqrt{8} \textit{ с центром } (0;0)$$

Т.к. тело однородное, то примем его плотность за 1

$$V=\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\int_{-\sqrt{8-z^2}}^{\sqrt{8-z^2}}\int_2^{\frac{y^2+z^2}{4}}dxdydz$$

Перейдём в ЦСК

$$\begin{cases} x = h \\ y = r\cos(\theta) \\ z = r\sin(\theta) \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = 1 \cdot \cos(\theta) \cdot r\cos(\theta) - (-r\sin(\theta)) \cdot \sin(\theta) \cdot 1 = r\big(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2\big) = r$$

$$\frac{y^2 + z^2}{4} = \frac{r^2 \cos(\theta)^2 + r^2 \sin(\theta)^2}{4} = \frac{r^2}{4}$$

$$V = \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} \int_2^{\frac{r^2}{4}} r \; dh d\varphi dr = \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} r\left(\frac{r^2}{4} - 2\right) d\varphi dr = \int_0^{\sqrt{8}} 2\pi r\left(\frac{r^2}{4} - 2\right) dr =$$

$$\frac{1}{2}\pi \int_0^{\sqrt{8}} r^3 dr - 4\pi \int_0^{\sqrt{8}} r dr = \frac{1}{2}\pi \frac{\left(\sqrt{8}\right)^4}{4} - 4\pi \frac{\left(\sqrt{8}\right)^2}{2} =$$

$$= \pi \frac{64}{8} - \pi 18 = -8\pi$$

Теперь найдём координаты центра масс:

$$x = \frac{\int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} \int_2^{\frac{r^2}{4}} rh \; dh d\varphi dr}{V}$$

$$\int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} \int_2^{\frac{r^2}{4}} rh \; dh d\varphi dr = \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} r\left(\frac{\left(\frac{r^2}{4}\right)^2}{2} - \frac{(2)^2}{2}\right) \; d\varphi dr = \int_0^{\sqrt{8}} \pi r\left(\frac{r^4}{16} - 4\right) \; dr =$$

$$= \int_0^{\sqrt{8}} \pi r\left(\frac{r^4}{16} - 4\right) \; dr = \frac{\pi}{16} \int_0^{\sqrt{8}} r^5 \; dr - 4\pi \int_0^{\sqrt{8}} r \; dr = \frac{\pi}{16} \frac{\left(\sqrt{8}\right)^6}{6} - 4\pi \frac{8}{2} = \frac{\pi \cdot 8^2}{2 \cdot 6} - 16\pi =$$

$$= \frac{\pi \cdot 16}{3} - 16\pi = -\frac{32}{3}\pi$$

$$x = -\frac{32}{3}\pi \cdot \left(-\frac{1}{8\pi}\right) = \frac{32}{3 \cdot 8} = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{\int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} \int_2^{\frac{r^2}{4}} r^2 \cos(\varphi) \; dh d\varphi dr}{V}$$

$$\int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} \int_2^{\frac{r^2}{4}} r^2 \cos(\varphi) \; dh d\varphi dr = \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} 2\pi r^2 \cos(\varphi) - 2r^2 \cos(\varphi) \; d\varphi dr =$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{8}} r^2 \int_0^{2\pi} \pi \cos(\varphi) - \cos(\varphi) \; d\varphi dr = 2 \int_0^{\sqrt{8}} 0 dr = 0$$

$$y = 0$$

$$z = \frac{\int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} \int_2^{\frac{r^2}{4}} r^2 \sin(\varphi)\ dh d\varphi dr}{V}$$

$$\int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} \int_2^{\frac{r^2}{4}} r^2 \sin(\varphi)\ dh d\varphi dr = \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} 2\pi r^2 \sin(\varphi) - 2r^2 \sin(\varphi)\ d\varphi dr =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{8}} r^2 \int_0^{2\pi} \pi \sin(\varphi) - \sin(\varphi)\ d\varphi dr = 2\int_0^{\sqrt{8}} 0 dr = 0$$

$$z = 0$$

Ответ: $\left(\frac{4}{3}; 0; 0\right)$

Задание №4

Вычислить (тройным интегралом) объёмы тел, ограниченных поверхностями:

$$z = x + y \quad z = xy \quad x + y = 1 \quad x = 0 \quad y = 0$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{xy}^{x+y} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y) - xy\ dy dx =$$

$$= \int_0^1 x(1-x) dx + \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx - \int_0^1 x \frac{(1-x)^2}{2} dx =$$

$$= \int_0^1 x - x^2\ dx + \frac{1}{2}\int_0^1 1 - 2x + x^2\ dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x - 2x^2 + x^3\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\int_0^1 x dx - 2\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 dx - 2\int_0^1 x dx + \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x dx + 2\int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 dx - \int_0^1 x dx + \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12 - 6 + 4 - 3}{12} = \frac{7}{24}$$

Ответ: $\frac{7}{24}$