Билеты к коллоквиуму/теормину по матанализу (КЛК2)

База, сем. 2

Подготовили:
Решетников Сергей Р3108 @ReshNF
Поставить звёздочку

O0. Структура

+[**Номер**] - билет нужен для теормина

[**Номер**]* - доказательство нужно учить только если вы собираетесь идти на дополнительную часть коллоквиума

[**Номер**]? - билет с неясными требованиями

Если нашли ошибку или хотите дополнить pdf файлы - можете найти typst-исходники в репозитории, указанном на титульном листе. Ну или просто добавьте ишуй в него и я сам отредактирую файл)

Ну и поставьте звёздочку, ибо времени и сил было потрачено много

+O1. Числовой ряд

Пусть дана последовательность a_k. Символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_k + ...$$

называется числовым рядом с общим членом a_k.

+О2. Частичная сумма числового ряда

n-ой частичной суммой ряда с общим членом a_k называется величина

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

+О3. Сумма числового ряда

Суммой ряда с общим членом a_k называют предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

если он существует в $\overline{R}$.

+O4. Понятие сходящегося ряда

Ряд с общим членом a_k называется сходящимся, если его сумма существует в $\mathbb{R}$. Иначе ряд называется расходящимся.

+O6. Остаток числового ряда

Пусть дан ряд с общим членом a_k. Тогда

$$R_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

называется m-ым остатком ряда.

+П1.1. Гармонический ряд и его поведение в смысле сходимости

Внимание! В списках билетов указано “Гармонический ряд и его поведение в смысле сходимости”, но в списках указано замечание №90, которое соответствует Геометрическому ряду. В этом билете указан геометрический ряд (№90), ниже приведён гармонический

Пусть $a \in \mathbb{R}$. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k$$

называемый в дальнейшем геометрическим рядом.

Ясно, что согласно (или по аналогии) примерам, приведенным выше, при $a = +-1$ он расходится. Если же $a \neq +-1$, то

$$S_n = a + a^2 + ... + a^n = \frac{a(1 - a^n)}{1 - a}$$

Эта последовательность имеет конечный предел лишь когда $|a| < 1$. В этом случае

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1 - a}$$

Иначе ряд расходится.

+П1.2. Гармонический ряд и его поведение в смысле сходимости

Исследовать на сходимость (гармонический) ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Положим в критерии Коши $p = n$ и рассмотрим следующую цепочку преобразований:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}$$

Итак, взяв $\varepsilon = 0.5$, для любого наперед заданного n_0 достаточно взять $n > n_0$ и $p = n$, чтобы сумма

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

была больше, чем 0.5. Тем самым, мы попадаем в рамки отрицания критерия Коши, и рассматриваемый ряд расходится.

+П2. Обобщённый гармонический ряд (ряд Дирихле) и его поведение в смысле сходимости

Исследовать на сходимость ряд (обобщенный гармонический ряд, ряд Дирихле):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

Как мы уже знаем, при $\alpha = 1$ рассматриваемый ряд является гармоническим (пример 92), а значит он расходится. Так как при $\alpha < 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{k^{\alpha}} \geq \frac{1}{k}$$

то, согласно теореме 130 о признаках сравнения, при $\alpha < 1$ рассматриваемый ряд расходится.

Пусть $\alpha > 1$, на отрезке $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим функцию $x^{1-\alpha}$. По теореме Лагранжа (56),

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = -\frac{\alpha-1}{\xi^{\alpha}}, \quad \xi \in (n, n+1)$$

Но тогда

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{\xi^{\alpha}} \geq \frac{\alpha-1}{(n+1)^{\alpha}}$$

Суммируя неравенства по $n \in \{1, ..., k\}$, получим

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(n+1)^{\alpha}}$$

Так как

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha-1}$$

то, согласно теореме 130 о признаках сравнения заключаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha}}$$

сходится, а значит сходится и исследуемый нами ряд. Итого,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \longleftrightarrow \begin{cases} \text{сходится} & \alpha > 1 \\ \text{расходится} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

+O7. Абсолютная сходимость числового ряда

Говорят, что ряд с общим членом a_k сходится абсолютно, если сходится ряд с общим членом $|a_k|$.

+O8. Условная сходимость числовго ряда

Если ряд с общим членом a_k сходится, но абсолютной сходимости нет, то говорят, что ряд с общим членом a_k сходится условно (или неабсолютно).

+O9. Функциональная последовательность

Последовательность $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, называется функциональной последовательностью.

+O10. Функциональный ряд

Пусть дана функциональная последовательность $f_k : X \to \mathbb{R}$. Символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f_1 + f_2 + ... + f_k + ...$$

называется функциональным рядом с общим членом f_k.

+O11. Поточечная сходимость функциональной последовательности, множество поточечной сходимости

Говорят, что функциональная последовательность $f_k : X \to \mathbb{R}$ сходится поточечно (или просто сходится) на множестве $D \subset X$, если

$$\forall x \in D \quad \exists \lim_{k\to\infty} f_k(x) \in \mathbb{R}$$

Множество D при этом называется множеством (поточечной) сходимости функциональной последовательности f_k.

+O12. Частичная сумма функционального ряда

n-ой частичной суммой функционального ряда с общим членом $f_k : X \to \mathbb{R}$ называется величина

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

+O13. Сходимость функционального ряда, множество поточечной сходимости

Говорят, что функциональный ряд с общим членом $f_k : X \to \mathbb{R}$ сходится поточечно (или просто сходится) на множестве $D \subset X$, если

$$\forall x \in D \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{сходится.}$$

Множество D при этом называется множеством (поточечной) сходимости функционального ряда с общим членом f_k.

+31. Предел функциональной последовательности

На множестве (поточечной) сходимости D возникает функция

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x), \quad x \in D$$

Эта функция называется пределом функциональной последовательности (или поточечным пределом) f_k на множестве D

+O14. Равномерная сходимость функциональной последовательности

Говорят, что последовательность $f_k : X \to \mathbb{R}$ сходится к функции f на множестве $D \subset X$ равномерно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 \forall x \in D \; |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначают это так:

$$f_k \underset{k \to \infty}{\overset{D}{\rightrightarrows}} f.$$

+O15. Равномерно сходящийся функциональный ряд

Говорят, что функциональный ряд с общим членом $f_k : X \to \mathbb{R}$ сходится равномерно на множестве $D \subset X$, если последовательность его частичных сумм сходится равномерно на D.

+O16. Степенной ряд

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ и $a_k \in \mathbb{R}$.

+O17. Радиус сходимости степенного ряда

Число R, существование которого доказано в предыдущем следствии, называется радиусом сходимости степенного ряда с общим членом $a_k x^k$, а множество $(-R, R)$ — интервалом сходимости соответствующего степенного ряда.

+O18. Ряды Тейлора и Маклорена

Пусть функция f бесконечное число раз дифференцируема в точке x_0. Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

называется рядом Тейлора, порожденным в точке x_0 функцией f. В случае $x_0 = 0$ ряд Тейлора часто называется рядом Маклорена.

+O19. Тригонометрический ряд

Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

называется тригонометрическим рядом, построенным по функциям

$$\{1, \cos kx, \sin kx, k \in \mathbb{N}\}$$

+O20. Тригонометрический ряд Фурье

Если для функции f существуют числа $a_m(f)$ и $b_m(f)$, введенные выше, то ряд

$$a_0 \frac{f}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

называется тригонометрическим рядом Фурье функции f, а числа $a_m(f)$ и $b_m(f)$ – коэффициентами Фурье функции f относительно системы функций

$$\{1, \cos kx, \sin kx, k \in \mathbb{N}\}$$

+O21. Ряд Фурье в комплексной форме

Если для функции f существуют числа $c_k(f)$, введенные выше, то ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}$$

называется рядом Фурье в комплексной форме функции f, а числа $c_k(f)$ – коэффициентами Фурье функции f относительно системы функций

$$\{e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$$

О22. Ядро Дирихле

Преобразуем частичную сумму ряда Фурье в комплексной форме к более удобному виду:

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt \right) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}dt$$

Отдельно рассмотрим сумму (при $e^{ip} \neq 1 \Leftrightarrow p \neq 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$):

$$D_n(p) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikp} = \sum_{k=-n}^{n} \left(e^{ip}\right)^k = \frac{e^{-ipn}\left(1 - e^{ip(2n+1)}\right)}{1 - e^{ip}} = \frac{e^{-ipn} - e^{ip(n+1)}}{1 - e^{ip}}$$

Разделим числитель и знаменатель на $e^{i\frac{p}{2}}$, получим:

$$D_n(p) = \frac{e^{-ip(n+\frac{1}{2})} - e^{ip(n+\frac{1}{2})}}{e^{-i\frac{p}{2}} - e^{i\frac{p}{2}}} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)p\right)}{\sin\left(\frac{p}{2}\right)}$$

При $e^{ip} = 1$, очевидно, $D_n(p) = 2n + 1$. Итого,

$$D_n(p) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)p\right)}{\sin\left(\frac{p}{2}\right)} & p \neq 2\pi k k \in \mathbb{Z} \\ 2n + 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

Введем следующее определение.

Функция $D_n(p)$ называется ядром Дирихле.

+O23. Условия Дини

Говорят, что функция $f : U(x) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет в точке $x \in \mathbb{R}$ условиям Дини, если:

1. Существуют односторонние пределы $f(x + -0)$ функции f в точке x.

2. Интегралы

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right| dt, \quad \int_0^\delta \left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right| dt$$

сходятся при некотором $\delta > 0$.

+Unspecified1. Ряд Фурье по произвольному промежутку длины 2L

+T1*. Критерий Коши сходимости числового ряда

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Согласно определению, сходимость ряда — это сходимость последовательности его частичных сумм

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

По критерию Коши (теорема 16) эта последовательность сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \ |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

Последнее неравенство равносильно тому, что $|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon$

32. Отрицание критерия Коши сходимости числового ряда

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится тогда и только тогда, когда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0, \exists p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \geq \varepsilon$$

+T2*. Необходимое условие сходимости числового ряда

Пусть ряд с общим членом a_k сходится. Тогда

$$a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Доказательство. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Так как ряд сходится, то, так как S_{n-1} — подпоследовательность S_n, то (теорема 27)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R}$$

Но тогда

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = S - S = 0$$

+Л1*. О сходимости числового ряда в терминах остатков

Для сходимости ряда с общим членом a_k необходимо и достаточно, чтобы сходился любой его остаток R_m. В этом случае

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + R_m = S_m + R_m$$

Доказательство. Ясно, что при $n > m$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

Так как первое слагаемое после знака равенства — число, не зависящее от n, то сходимость исходного ряда равносильна сходимости R_m. Заявленное равенство получается предельным переходом.

+Л2*. О стремлении остатка числового ряда к нулю

Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{m\to\infty} R_m = 0$$

Доказательство.

1. Докажем необходимость. Пусть ряд сходится. Тогда, по предыдущей лемме,

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_m + R_m$$

Так как $\lim_{m\to\infty} S_m = S$, то $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$

2. Докажем достаточность. Пусть $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$. Тогда для всех номеров m определен и конечен R_m, а значит, например, сходится R_1. Но тогда, по замечанию выше, сходится и ряд.

+Л3*. Линейность суммирования для числового ряда

Пусть сходятся ряды с общими членами a_k и b_k. Тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сходится ряд с общим членом $\alpha a_k + \beta b_k$, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Доказательство. Обозначим

$$S^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad S_n^B = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha S_n^A + \beta S_n^B \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha S^A + \beta S^B$$

что и доказывает утверждение.

+Л4*. Монотонность суммирования для числового ряда

Пусть $a_k \leq b_k$ и ряды с общими членами a_k и b_k имеют суммы в $\mathbb{R}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Доказательство. Обозначим

$$S^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad S_n^B = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Тогда, согласно условию,

$$S_n^A \leq S_n^B \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n^A \leq \lim_{n\to\infty} S_n^B \Rightarrow S^A \leq S^B$$

T3*. Критерий сходимости числового ряда с положительными членами

Пусть $a_k \geq 0$ Тогда последовательность частичных сумм ряда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

возрастает и

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

Тем самым, сходимость ряда равносильна ограниченности последовательности его частичных сумм.

Доказательство. Так как $a_k \geq 0$, то

$$S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n$$

Тем самым, вопрос о наличии (и конечности) предела S_n сводится к вопросу ограниченности S_n (теорема Вейерштрасса (теорема 11)).

+T4. Признак сравнения (первый, с неравенством)

Пусть $0 \le a_k \le b_k$. Тогда:

1. Сходимость ряда с общим членом b_k влечет сходимость ряда с общим членом a_k, то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$$

2. Расходимость ряда с общим членом a_k влечет расходимость ряда с общим членом b_k, то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$$

Доказательство.

1. Докажем первый пункт. Обозначим

$$S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad S_n^B = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Ясно, что в условиях теоремы

$$S_n^A \le S_n^B \le S^B < +\infty$$

В силу ограниченности последовательности S_n^A, согласно предыдущей теореме заключаем, что S_n^A имеет конечный предел.

2. Докажем второй пункт. От противного, если сходится ряд с общим членом b_k, то, по только что доказанному, сходится и ряд с общим членом a_k. Это противоречит условию.

+T5. Признак сравнения (второй, предельный, с эквивалентом)

Пусть $0 \le a_k \le b_k$. Тогда:

3. Если $a_k \sim b_k$ при $k \to +\infty$, то ряды с общими членами a_k и b_k сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство.

3. Докажем третий пункт. Так как $a_k \sim b_k$, то $a_k = \alpha_k b_k$, где $\alpha_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Тогда

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow \frac{1}{2} b_k \le a_k \le \frac{3}{2} b_k$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям в соответствующей теореме 123 про интегралы и остаются в качестве упражнения.

+T6. Радикальный признак Коши

Пусть $a_k > 0$ и

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = l \in [0, +\infty]$$

Тогда:

1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_k расходится.
2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_k сходится.

Доказательство.

1. Докажем первый пункт. В силу того, что верхний предел — это частичный предел (лемма 29), найдется подпоследовательность a_{k_n} такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{k_n}} = l$$

Так как $l > 1$, то, начиная с некоторого номера n_0, выполняется

$$\sqrt[n]{a_{k_n}} > 1 \Rightarrow a_{k_n} > 1$$

Отсюда следует, что a_{k_n} не стремится к нулю, а значит не выполнено необходимое условие сходимости ряда (теорема 128), и ряд с общим членом a_k расходится.

2. Докажем второй пункт. Положим $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$. По свойству верхнего предела,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \sqrt[k]{a_k} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1$$

Действительно, иначе мы могли бы из последовательности $\sqrt[k]{a_k}$ выделить подпоследовательность, все члены которой больше, чем $\frac{l+1}{2}$, а значит ее верхний предел был бы не меньше, чем $\frac{l+1}{2} > l$, что противоречит условию. Из полученного неравенства приходим к тому, что при $k > k_0$ выполняется

$$a_k < \left(\frac{l+1}{2}\right)^k$$

Так как ряд

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^k$$

сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем меньше единицы (пример 90), то по признаку сравнения (теорема 130) сходится и ряд

$$R_{k_0} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k$$

а значит (теорема 82) сходится и исходный ряд.

+Т7. Признак Даламбера

Пусть $a_k > 0$ и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l \in [0, +\infty]$$

.

Тогда:

1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_k расходится.
2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_k сходится.

Доказательство.

1. Докажем первый пункт. Так как $l > 1$, то при $k > k_0$ оказывается справедливым неравенство

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \Rightarrow a_k \geq a_{k_0+1} > 0$$

откуда следует, что a_k не стремится к нулю. Это противоречит необходимому условию сходимости ряда (теорема 128).

2. Докажем второй пункт. Положим $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$. Согласно определению предела, найдется k_0, что при $k > k_0$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1$$

а значит

$$a_{k+1} < \frac{l+1}{2} a_k$$

По индукции, при $k > k_0$ имеем

$$a_k \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{k-k_0-1} a_{k_0+1}$$

Так как ряд

$$a_{k_0+1} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^{k-k_0-1}$$

сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем меньше единицы (пример 90), то по признаку сравнения (теорема 130) сходится и ряд

$$R_{k_0} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k$$

+T8. Интегральный признак Коши

Пусть $f \in R_{\text{loc}[1,\infty)}$ и монотонна на $[1, +\infty)$. Тогда ряд с общим членом $f(k)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_1^{\infty} f dx$$

Доказательство. Пусть, скажем, f убывает. Тогда, если $f(x_0) < 0$, в силу монотонности, неравенство $f(x) \leq f(x_0) < 0$ выполняется при $x > x_0$, а значит $f(k)$ не стремится к 0 при $k \to \infty$, то есть ряд с общим членом $f(k)$ расходится. Кроме того (следствие 28),

$$\int_{x_0}^{A} f dx \leq f(x_0)(A - x_0) \underset{A \to +\infty}{\to} -\infty$$

а значит расходится и интеграл. В итоге, $f(x) \geq 0$ В этом случае, вспоминая, что f убывает, очевидно следующее неравенство:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f dx \leq f(k)$$

которое влечет неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Учитывая, что функция

$$F(\omega) = \int_1^{\omega} f dx$$

возрастает, для существования предела $\lim_{\omega \to +\infty} F(\omega)$ достаточно (и, конечно же, необходимо) существование предела $\lim_{n \to \infty} F(n+1)$ (докажите это!). Тогда утверждение теоремы легко получить предельным переходом при $n \to \infty$ и рассуждениями, аналогичными приводимым в доказательстве третьего пункта признаков сравнения (теорема 130).

+T9. О сходимости абсолютно сходящегося ряда

Если ряд с общим членом a_k сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши (теорема 127). Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

В то же время,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

откуда, согласно тому же критерию Коши (теорема 127) получаем, что ряд с общим членом a_k сходится.

+T10. Признак Лейбница

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$$

где $a_k \geq 0$ и a_k монотонно стремится к нулю, сходится.

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность S_{2n} последовательности частичных сумм данного ряда. Группируя, получим, что

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n} =$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2}$$

где неравенство верно ввиду неотрицательности скобок (в силу убывания a_n). Тем самым, последовательность S_{2n} возрастает. Кроме того,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - ... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

откуда S_{2n} ограничена сверху. Значит, по теореме Вейерштрасса (теорема 11), последовательность S_{2n} имеет предел, например S. Но тогда

$$S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S$$

так как общий член стремится к нулю. Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Тогда, по доказанному,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ |S_{2n} - S| < \varepsilon$$

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \ |S_{2n-1} - S| < \varepsilon$$

Но тогда, если $k > \max(2n_0, 2n_1 - 1)$, то либо $k = 2n$ и $n > n_0$, либо $k = 2n - 1$ и $n > n_1$, а значит

$$|S_k - S| < \varepsilon$$

что доказывает сходимость рассматриваемого ряда.

Л5. Об остатке ряда лейбницевского типа

Пусть рассматривается ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$$

где $a_k \geq 0$ и a_k монотонно стремится к нулю. Тогда

$$|R_n| \leq a_{n+1} \quad R_n(-1)^n \geq 0$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что остаток ряда лейбницевского типа – с точностью до знака ряд лейбницевского типа и применить к нему сформулированное выше замечание.

+T11*. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности

Для того чтобы функциональная последовательность $f_k : X \to \mathbb{R}$ сходилась равномерно на $D \subset X$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D \ |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости f_k к некоторой функции f,

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 \ |f_k - f| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$, тогда $k + p > k_0$ и, по неравенству треугольника,

$$|f_{k+p} - f_k| \leq |f_{k+p} - f| + |f - f_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Докажем достаточность. Условие

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D \ |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon$$

гарантирует, что при каждом $x \in D$ числовая последовательность фундаментальна, значит (теорема 16) сходится. Положим

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x), \quad x \in D$$

Пусть $\varepsilon > 0$. По условию найдем k_0, что при $k > k_0$ и $p \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in D \ |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon$$

Переходя к пределу при $p \to \infty$, получим

$$\forall x \in D \ |f(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon$$

откуда и следует требуемое.

+T12*. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда

Ряд с общим членом $f_k : X \to \mathbb{R}$ сходится равномерно на $D \subset X$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Доказательство следует из предыдущей теоремы, так как равномерная сходимость ряда — суть равномерная сходимость последовательности его частичных сумм.

+T13*. Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда

Если ряд с общим членом $f_k : X \to \mathbb{R}$ сходится равномерно на $D \subset X$, то

$$f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство. Доказательство получается сразу, если положить в критерии Коши 140 $p = 1$.

+T14. Признак Вейерштрасса

Пусть $f_k : X \to \mathbb{R}$, $D \subset X$. Если существует последовательность a_k, что

$$|f_k(x)| \leq a_k, \quad x \in D$$

и ряд с общим членом a_k сходится, то функциональный ряд с общим членом f_k сходится равномерно (и абсолютно) на D.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Используя критерий Коши (теорема 127) и учитывая неотрицательность a_k, имеем

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

В то же время,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

что верно сразу для всех $x \in D$. Значит, используя критерий Коши равномерной сходимости ряда (теорема 140), а также определение абсолютной сходимости, получаем требуемое.

T15*. О перестановке предельных переходов

Пусть $f, f_k : D \to \mathbb{R}$, причем:

1. Последовательность f_k равномерно сходится на D к функции f.
2. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует предел

$$\lim_{x \to x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R}$$

где x_0 — предельная для D.

Тогда пределы

$$\lim_{k \to \infty} a_k \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0} f(x)$$

существуют (в $\mathbb{R}$) и совпадают, то есть

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{k \to \infty} f_k(x) = \lim_{k \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x)$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши 139,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \; |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon$$

Перейдя к пределу при $x \to x_0$, получим

$$|a_{k+p} - a_k| \leq \varepsilon$$

что влечет фундаментальность a_k, как следствие, сходимость последовательности a_k. Пусть ее предел равен A. Осталось показать, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, в силу равномерной сходимости на D,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \forall x \in D \; |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

В силу сходимости последовательности a_k к числу A,

$$\exists k_1 : \forall k > k_1 \; |a_k - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Пусть $m = 1 + \max(k_0, k_1)$, тогда одновременно, причем $\forall x \in D$

$$|a_m - A| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Согласно определению предела функции,

$$\exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D \; |f_{m(x)} - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Значит, при $x \in U_{\delta(x_0)} \cap D$, имеем

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - a_m| + |a_m - A| < \varepsilon$$

что и завершает доказательство.

T16*. О почленном переходе к пределу в функциональном ряде

Пусть $f_k : D \to \mathbb{R}$, причем:

1. Ряд с общим членом f_k равномерно сходится на D к сумме S.
2. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует предел

$$\lim_{x \to x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R}$$

где x_0 — предельная для D.

Тогда ряд с общим членом a_k сходится к сумме A, причем

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = A$$

то есть

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x)$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм рассматриваемого ряда.

T17*. О непрерывности предельной функции для функциональной последовательности

Пусть $f, f_k : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, причем:

1. Последовательность f_k равномерно сходится на D к функции f.
2. Все члены последовательности f_k непрерывны в x_0.

Тогда f непрерывна в x_0. В частности, если все члены последовательности f_k непрерывны на D, то и f непрерывна на D.

Доказательство. Если x_0 — изолированная точка, то, так как любая функция непрерывна в изолированной точке своей области определения (теорема 33), утверждение доказано. Если x_0 — предельная, то выполнены условия теоремы о перестановке предельных переходов (143), где $a_k = f_{k(x_0)}$. Поэтому,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x_0) = f(x_0)$$

что и завершает доказательство (теорема 33).

+T18*. О непрерывности суммы функционального ряда

Пусть $f_k : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, причем:

1. Ряд с общим членом f_k равномерно сходится на D к сумме S.

2. Все члены последовательности f_k непрерывны в x_0.

Тогда сумма ряда S непрерывна в x_0. В частности, если все члены последовательности f_k непрерывны на D, то и сумма ряда непрерывна на D.

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм рассматриваемого ряда.

T19*. Интегрирование и предельный переход для функциональной последовательности

Пусть $f_k, f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_k \in C[a, b]$, и

$$f_k \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$$

Тогда $f \in C[a, b]$ и

$$\int_a^x f_k dx \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int_a^x f dx$$

Доказательство. То, что $f \in C[a, b]$ следует из теоремы о непрерывности предельной функции (145). Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу равномерной сходимости,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \forall x \in [a, b] \ |f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Пусть $k > k_0$, тогда

$$\left| \int_a^x f_k dx - \int_a^x f dx \right| \leq \int_a^x |f_k - f| dx \leq \frac{\varepsilon}{b - a}(x - a) \leq \varepsilon$$

причем последняя оценка справедлива при всех $x \in [a, b]$. Это и доказывает равномерную сходимость.

+T20*. О почленном интегрировании функционального ряда

Пусть $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, причем $f_k \in C[a, b]$. Если ряд с общим членом f_k сходится равномерно к функции S на $[a, b]$, то $S \in C[a, b]$, причем

$$\int_a^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^x f_k dx \right) \quad x \in [a, b]$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к частичным суммам рассматриваемого ряда.

T21*. Дифференцирование и предельный переход для функциональной последовательности

Пусть $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, причем $f_k \in C^1[a, b]$. Если

1. Существует $x_0 \in [a, b]$, что последовательность $f_{k(x_0)}$ сходится.
2. Последовательность производных f'_k сходится на $[a, b]$ равномерно к функции g то

$$f_k \underset{[a,b]}{\rightarrow} f$$

причем $f' = g$ на $[a, b]$. В частности, $f \in C^1[a, b]$.

Доказательство. Сперва заметим (теорема 145), что $g \in C[a, b]$. По теореме об интегрировании и предельном переходе (147),

$$\lim_{k\to\infty} \int_{x_0}^{x} f'_k dx = \int_{x_0}^{x} g dx$$

где последняя сходимость равномерна по $x \in [a, b]$. В то же время (теорема 100),

$$\lim_{k\to\infty} \int_{x_0}^{x} f'_k dx = \lim_{k\to\infty} (f_k(x) - f_k(x_0)) = \int_{x_0}^{x} g dx$$

Так как, согласно условию, существует предел

$$C = \lim_{k\to\infty} f_k(x_0)$$

то

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) = C + \int_{x_0}^{x} g dx$$

где последняя сходимость, опять-таки, равномерна на $[a, b]$. Используя теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом (99), получим

$$f'(x) = g(x), \quad x \in [a, b]$$

что и завершает доказательство.

+T22*. Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда

Пусть $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, причем $f_k \in C^1[a, b]$. Если

1. Существует $x_0 \in [a, b]$, что ряд с общим членом $f_{k(x_0)}$ сходится.
2. Ряд с общим членом $f_{k'}$ сходится на $[a, b]$ равномерно к сумме $\tilde{S}$,

то ряд с общим членом f_k сходится на $[a, b]$ равномерно к сумме S, причем $S' = \tilde{S}$ на $[a, b]$. В частности, $S \in C^1[a, b]$.

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм рассматриваемого ряда.

+T23. Первая теорема Абеля

Пусть дан степенной ряд с общим членом $a_k x^k$.

1. Если существует x_1, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \quad \text{сходится}$$

то ряд с общим членом $a_k x^k$ сходится абсолютно при всех x таких, что $|x| < |x_1|$.

2. Если существует x_1, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \quad \text{расходится}$$

то ряд с общим членом $a_k x^k$ расходится при всех x таких, что $|x| > |x_1|$

Доказательство.

1. Докажем первый пункт. Ясно, что имеет смысл рассматривать случай $x_1 \neq 0$, ведь иначе множество x таких, что $|x| < |x_1|$, пусто. Пусть $x_1 \neq 0$ и $|x| < |x_1|$, тогда

$$\left|a_k x^k\right| = \left|a_k x_1^k\right| \left|\frac{x}{x_1}\right|^k$$

Так как ряд с общим членом $a_k x_1^k$ сходится, то его общий член стремится (теорема 128) к нулю, а значит ограничен. Тем самым, $\left|a_k x_1^k\right| \leq C$, а тогда

$$\left|a_k x_1^k\right| \left|\frac{x}{x_1}\right|^k \leq C \left|\frac{x}{x_1}\right|^k$$

Заметим, что

$$0 \leq \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$$

, а значит ряд с общим членом

$$C \left|\frac{x}{x_1}\right|^k$$

сходится как геометрическая прогрессия (пример 90). Отсюда, согласно признакам сравнения (теорема 130), сходится, причем абсолютно, исходный ряд.

2. Докажем второй пункт. От противного. Если бы при x таком, что $|x| > |x_1|$, ряд сходился, то по только что доказанному, он бы сходился и при $x = x_1$, что противоречит условию.

+C1. О виде множества сходимости степенного ряда

Пусть дан степенной ряд с общим членом $a_k x^k$. Тогда существует $R \in [0, +\infty]$, что при $x \in (-R, R)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ ряд расходится.

+T24*. Формула Коши-Адамара

Пусть дан степенной ряд с общим членом $a_k x^k$. Тогда

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Доказательство. Воспользуемся радикальным признаком Коши (131). Найдем

$$l = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Если $l < 1$, то ряд сходится, причем абсолютно. Если $l > 1$, то ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Если договориться, что $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$, то последнее равносильно неравенствам

$$|x| < \frac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad \text{и} \quad |x| > \frac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

соответственно, что и доказывает теорему.

+Т25. О равномерной сходимости степенного ряда

Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$ и пусть R — его радиус сходимости. Тогда для любого $r \in (0, R)$ рассматриваемый ряд сходится равномерно на $[-r, r]$.

Доказательство. Для общего члена ряда при $x \in [-r, r]$ справедлива оценка

$$|a_k x^k| \leq a_k r^k$$

Но, так как $r \in (0, R)$, то ряд с общим членом $a_k r^k$ сходится. Значит, утверждение теоремы следует из признака Вейерштрасса (142).

T26*. Вторая теорема Абеля

Пусть дан ряд с общим членом $a_k R^k$ и пусть R — его радиус сходимости. Если сходится ряд с общим членом $a_k R^k$, то исходный ряд сходится равномерно на $[0, R]$.

Доказательство. Так как ряд с общим членом $a_k R^k$ сходится, то, согласно критерию Коши 127, для любого $\varepsilon > 0$

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k R^k\right| < \varepsilon$$

Пусть $n > n_0$, $m > n$. Обозначим

$$A_m = \sum_{k=n+1}^{m} a_k R^k, \quad A_n = 0$$

и заметим, что

$$|A_m| < \varepsilon, \quad m \in \mathbb{N}$$

Тогда

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (A_k - A_{k-1}) \left(\frac{x}{R}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k \left(\frac{x}{R}\right)^k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{k-1} \left(\frac{x}{R}\right)^k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right) + A_{n+p} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}$$

Так как $x \in [0, R]$, то

$$\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \geq 0, \quad \left(\frac{x}{R}\right)^k \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |A_k| \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right) + |A_{n+p}| \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} <$$

$$< \varepsilon \left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right) + \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}\right) = \varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \leq \varepsilon$$

откуда, согласно критерию Коши равномерной сходимости 140, и следует утверждение.

+T27. О непрерывности суммы степенного ряда

Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$ и пусть R — его радиус сходимости. Тогда сумма ряда непрерывна на множестве сходимости $(-R, R)$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in (-R, R)$ и

$$\delta = \min\left(\frac{R - x_0}{2}, \frac{x_0 + R}{2}\right)$$

Тогда $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (-R, R)$ и, по теореме о равномерной сходимости степенного ряда (153), на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ряд сходится равномерно. Так как члены рассматриваемого ряда непрерывны на этом отрезке, то по теореме о непрерывности суммы ряда (146), сумма рассматриваемого ряда тоже непрерывна на этом отрезке. В частности, она непрерывна при $x = x_0$.

Допустим теперь, что $x_0 = R$, $R \in [-R, R]$. Тогда, согласно второй теореме Абеля (154), рассматриваемый ряд сходится равномерно на отрезке $[0, R]$. Аналогичные приведенным ранее рассуждения показывают, что сумма рассматриваемого ряда непрерывна при $x = R$. Аналогичным образом рассматривается случай $x_0 = -R$, $-R \in [-R, R]$

T28*. Об интегрировании степенного ряда

Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$ и пусть R — его радиус сходимости. Тогда сумма ряда интегрируема по любому отрезку $[a, b]$ внутри множества сходимости $(-R, R)$, причем

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

Доказательство. Опираясь на теоремы (153) и (154) данная теорема — прямое следствие теоремы об интегрировании равномерно сходящегося ряда (148).

+Л6. О радиусах сходимости степенного ряда, ряда из производных и первообразных

Радиусы сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

совпадают.

Доказательство. Докажем, например, что радиусы сходимости первого и второго рядов совпадают. Так как $1 \leq \sqrt[k]{k} \to 1$, то по $\varepsilon > 0$ найдется k_0, что $\forall k > k_0$ выполняется

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \sqrt[k]{k\ |a_k|} < (1+\varepsilon) \sqrt[k]{|a_k|}$$

Переходя к верхнему пределу, получим

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k\ |a_k|} \leq (1+\varepsilon) \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

В силу произвольности ε

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k\ |a_k|}$$

а значит, по теореме Коши–Адамара (152), радиусы сходимости одинаковы. Аналогично доказывается, что радиус сходимости третьего ряда такой же.

+T29. О дифференцировании степенного ряда

Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$, R — его радиус сходимости, S — его сумма.

Тогда $S \in C^{\infty(-R,R)}$, причем

$$S^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)(k-2)...(k-m+1)a_k x^{k-m}, \quad m \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Как было доказано в предыдущей лемме, ряд, полученный формальным дифференцированием, то есть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$$

имеет тот же радиус сходимости R, что и исходный. Пусть $x_0 \in (-R, R)$. Тогда, выбрав

$$\delta = \frac{1}{2}\min(R - x_0, x_0 + R)$$

получим, что

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \in (-R, R)$$

а значит (теорема 153) ряд, полученный формальным дифференцированием, сходится на этом отрезке равномерно. Так как исходный ряд сходится (хотя бы в точке $x_0 \in (-R, R)$), то по теореме о дифференцировании функционального ряда (150) заключаем, что

$$S'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x_0^k$$

Так как x_0 — произвольная точка из интервала сходимости, то доказано, что S дифференцируема на $(-R, R)$ и

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$$

Из теоремы о непрерывности суммы степенного ряда (155) заключаем, что $S \in C^1(-R, R)$. Дальнейшее доказательство проводится по индукции.

T30. Интегральная форма остаточного члена

Пусть функция f непрерывно дифференцируема $(n+1)$ раз на отрезке с концами x_0 и x. Тогда

$$r_{n(x,x_0)} = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница (100) и проинтегрируем по частям (теорема 102). Тогда,

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)(x-t)'dt =$$

$$= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt = f'(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f''(t)\left((x-t)^2\right)'dt$$

Продолжая этот процесс, приходим к тому, что

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

Теперь, используя первую теорему о среднем (97), мы без труда получим остаток в форме Лагранжа (20):

$$r_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{n+1}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n dt = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

где ξ лежит между x и x_0.

Аналогичным образом можно получить и остаток в форме Коши (21):

$$r_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{n+1}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\int_{x_0}^{x} dt = \frac{f^{n+1}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$$

где ξ лежит между x и x_0.

T31*. Критерий представимости функции своим рядом Тейлора

Для того чтобы ряд Тейлора, построенный по функции f, сходился к этой функции в точке x необходимо и достаточно, чтобы

$$r_n(x, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Доказательство. Доказательство немедленно следует из представления

$$f(x) = P_n(x, x_0) + r_n(x, x_0)$$

Т32. Достаточное условие представимости функции своим рядом Тейлора

Пусть функция f бесконечно дифференцируема на отрезке I с концами x_0 и x. Если на этом отрезке производные функции f равномерно ограничены, то есть

$$|f^{(n)}(t)| \leq M, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, t \in I$$

то

$$r_{n(x,x_0)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

то есть ряд Тейлора, построенный по функции f, сходится к этой функции в точке x.

Доказательство. Рассмотрим остаток в форме Лагранжа (20). Согласно условию,

$$|r_{n(x,x_0)}| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq M \frac{|(x-x_0)|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

где последнее утверждение верно в силу леммы 23. Последнее утверждение теоремы следует из (предыдущей) теоремы 159.

T33*. Единственность представления функции своим рядом Тейлора

Пусть при $|x - x_0| < R$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

Тогда

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Доказательство. Согласно теореме о дифференцировании суммы степенного ряда (157),

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)...(k-m+1) a_k (x - x_0)^{k-m}$$

Подставив $x = x_0$, получаем, что

$$f^{(m)}(x_0) = m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot 1 \cdot a_m$$

откуда

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$$

+T34*. Ряд Маклорена для показательной функции

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$a^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln^k a}{k!} x^k, \quad x \in \mathbb{R}$$

Доказательство. Докажем, например, первое соотношение. Пусть $f(x) = e^x$. Так как $f^{(n)}(x) = e^x$, то на отрезке с концами 0 и x выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(t)| \leq e^{|x|}$$

а значит утверждение следует из теоремы 160.
Для доказательства второго соотношения заметим, что

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Так как $x \ln a \in \mathbb{R}$, то утверждение следует из доказанного для экспоненты.

+T35*. Ряд Маклорена для синуса и косинуса

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Доказательство. Докажем, например, первое соотношение. Пусть $f(x) = \sin x$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

то на отрезке с концами 0 и x выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(t)| \leq 1$$

а значит утверждение следует из теоремы 160. Второе соотношение доказывается аналогичным образом.

+Т36?. Ряд Маклорена для логарифма (доказательство с помощью остатка в форме Коши)

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad x \in (-1, 1]$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = \ln(1+x)$$

. Так как

$$f^n(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$$

то ограниченности, и тем более равномерной ограниченности $f^n(x)$ на множестве $(-1, 1]$ нет. Воспользуемся остатком в форме Коши (21), получим

$$|r_n(x,0)| = \left|\frac{(x-\xi)^n}{(1+\xi)^{n+1}}\right| |x| = \frac{|x|}{1+\xi} \left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right|^n$$

Так как при

$$x \in (-1, 1)$$

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = \frac{|x|-|\xi|}{1+\xi} \leq \frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|} = 1 + \frac{|x|-1}{1-|\xi|} \leq 1 + |x| - 1 = |x|$$

то мы приходим к тому, что

$$|r_n(x,0)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1+\xi} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|\xi|} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \xrightarrow[n\to\infty]{(-1,1)} 0$$

Наконец, так как при $x = 1$ по признаку Лейбница (138) заявленный ряд сходится, то его сумма непрерывна (теорема 155) не только на $(-1, 1)$, но и на $(-1, 1]$, а значит заявленное разложение справедливо и при $x = 1$

+33*. Ряд Маклорена для логарифма (доказательство при помощи интегрирования)

Мы знаем (пример 90), что

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \ , \quad x \in (-1,1)$$

Заменой x на $-x$ придем к тому, что

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \ , \quad x \in (-1,1)$$

Теперь, интегрируя написанный ряд (теорема 156) по отрезку с концами 0 и x при $x \in (-1,1)$ приходим к тому, что

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \ , \quad x \in (-1,1)$$

Рассуждения про точку $x = 1$ остаются прежними. Заметьте, что в приведенном подходе мы нигде не пользовались каким-либо остаточным членом.

+T37*. Ряд Маклорена для арктангенса

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad x \in [-1, 1]$$

Доказательство. В верном равенстве (пример 90)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad x \in (-1, 1)$$

заменим x на $-x^2$, получим

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad x \in (-1, 1)$$

Теперь, интегрируя написанный ряд (теорема 156) по отрезку с концами 0 и x при $x \in (-1, 1)$ приходим к тому, что

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad x \in (-1, 1)$$

По признаку Лейбница (138), ряд, написанный справа, сходится при $x = \pm 1$, а значит, его сумма непрерывна (теорема 155) не только на $(-1, 1)$, но и на $[-1, 1]$. Тем самым, заявленное разложение справедливо и при $x = \pm 1$.

+T38?. Ряд Маклорена для бинома (доказательство с помощью остатка в форме Коши)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k, \quad x \in (-1,1), \alpha \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$. Так как

$$f^n(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

то при $\alpha - n < 0$ ограниченности, и тем более равномерной ограниченности $f^n(x)$ на множестве $(-1,1)$ нет. Воспользуемся остатком в форме Коши (21), получим

$$|r_{n(x,0)}| = \frac{|\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)|}{n!}(1+\varepsilon)^{\alpha-1} \ |x| \ \left|\frac{x-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right|^n.$$

Тогда, при $x \in (-1,1)$, так как $(1+\varepsilon) < 2$, аналогично доказанному при рассмотрении логарифма,

$$|r_{n(x,0)}| \leq 2^{\alpha-1} \ |x|^{n+1} \ \left|\alpha\left(\frac{\alpha}{1}-1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)...\left(\frac{\alpha}{n}-1\right)\right|$$

Так как при достаточно больших n (момент зависит от α и x) при увеличении n на единицу правая часть полученного неравенства умножается на

$$\left|\frac{\alpha}{n+1}-1\right| |x| < q < 1,$$

то $r_n(x,0)$ с ростом n стремится к нулю, что и доказывает утверждение.

+34*. Ряд Маклорена для бинома (доказательство при помощи дифференцирования)

Понятно, что если $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то заявленное равенство верно при всех $x \in \mathbb{R}$, ведь $(1+x)^\alpha$ в этом случае – это просто многочлен.

Если же $\alpha \notin \mathbb{N}$, то заявленное равенство не может выполняться при $x \notin [-1, 1]$, ведь при достаточно большом n производная $f^n(x)$ будет бесконечна при $x = -1$, что противоречит бесконечной дифференцируемости суммы степенного ряда внутри интервала сходимости. В случае, если рассматриваемый ряд сходится либо при $x = -1$, либо при $x = 1$, вопрос все так же решается с использованием теоремы 155. Отметим результаты, касающиеся сходимости:

1. Если $\alpha \geq 0$, то рассматриваемый ряд сходится абсолютно при $x = \pm 1$.
2. Если $\alpha \in (-1, 0)$, то рассматриваемый ряд сходится условно при $x = -1$ и расходится при $x = 1$.
3. Если $\alpha \leq -1$, то рассматриваемый ряд расходится при $x = \pm 1$.

Выводы о значении суммы ряда во всех этих случаях остаются читателю в качестве упражнения.

+T39*. Ряд Маклорена для арксинуса (доказательство при помощи интегрирования)

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

Доказательство. Доказательство можно провести с использованием разложения бинома для функции $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ и последующим интегрированием полученного равенства. Остальные детали остаются читателю в качестве упражнения.

Л7. Об ортогональности системы тригонометрических функций

Пусть $k, m \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx = 0, \quad k \neq m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi$$

Доказательство. Доказательство проводится прямым вычислением и остается в качестве упражнения.

Л8*.Свойства ядра Дирихле

Ядро Дирихле обладает следующими свойствами:

1. $D_{n(p)}$— 2π периодическая функция.
2. $D_{n(p)}$ — четная функция.
3. Выполнено условие нормировки:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n dp = 1$$

Доказательство. Все эти свойства моментально следуют из исходного представления ядра Дирихле:

$$D_{n(p)} = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikp}$$

Детали остаются в качестве упражнения.

Л9*. Лемма Римана

Пусть $f \in R_{\text{loc }(a,b)}$ и

$$\int_a^b |f|\ dx < +\infty$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)e^{\lambda x}dx \underset{|\lambda|\ \to+\infty}{\longrightarrow} 0\ , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Доказательство. Для начала заметим, что если $f(x) = c$ — некоторая константа и (a, b) — ограниченный промежуток, то

$$\int_a^b ce^{i\lambda x}dx = c\left(\int_a^b \cos\lambda x dx + i\int_a^b \sin\lambda x dx\right) = c\left(\frac{\sin\lambda b - \sin\lambda a}{\lambda} - i\frac{\cos\lambda b - \cos\lambda a}{\lambda}\right) \underset{|\lambda|\ \to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

и утверждение теоремы выполнено. Сведем общий случай к данному.

Для начала покажем, что $\forall\varepsilon > 0$ найдется отрезок $[\delta_1, \delta_2] \subset [a, b]$, что

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)e^{i\lambda x}dx\ \right| < \varepsilon \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

Согласно условию (об абсолютной сходимости интеграла), можно найти числа δ_1 и δ_2, $\delta_1 < \delta_2$ такие что

$$\int_a^{\delta_1} |f(x)|\ dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_{\delta_2^b} |f(x)|\ dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

Далее, для найденных δ_1 и δ_2

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)e^{i\lambda x}dx\right| = \left|\int_a^{\delta_1} f(x)e^{i\lambda x}dx + \int_{\delta_2^b} f(x)e^{i\lambda x}dx\right| \leq$$

$$\int_a^{\delta_1} |f(x)|\ |e^{i\lambda x}|\ dx + \int_{\delta_2^b} |f(x)|\ |e^{i\lambda x}|\ dx = \int_a^{\delta_1} |f(x)|\ dx + \int_{\delta_2^b} |f(x)|\ dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Так как $f \in R[\delta_1, \delta_2]$, то существует разбиение τ отрезка $[\delta_1, \delta_2]$ на отрезки δ_i, $i \in \{1, ..., n\}$, что

$$0 \leq \int_{\delta_1}^{\delta_2} f dx - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i < \varepsilon$$

где

$$s_{\tau(f)} = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

— нижняя сумма Дарбу. Пусть $g(x) = m_i$ при $x \in \delta_i$ (на общих концах отрезков значения g можно брать любыми), тогда

$$0 \leq \left|\int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)e^{i\lambda x}dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x)e^{i\lambda x}dx\right| = \left|\int_{\delta_1}^{\delta_2} (f(x) - g(x))e^{i\lambda x}dx\right| \leq$$

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x) - g(x)|\ |e^{i\lambda x}|\ dx = \int_{\delta_1}^{\delta_2} (f - g)dx$$

так как $f(x) \geq g(x)$. Последний интеграл может быть переписан так:

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} (f(x) - g(x))dx = \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x)dx = \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx - s_\tau(f) < \varepsilon$$

Итого,

$$0 \leq \left|\int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)e^{i\lambda x}dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x)e^{i\lambda x}dx\right| < \varepsilon$$

Осталось заметить, что

$$\lim_{|\lambda|\ \to+\infty} \int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x)e^{i\lambda x}dx = \lim_{|\lambda|\ \to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i e^{i\lambda x}dx = 0$$

где последнее равенство верно в силу того, что слагаемых конечное число, и каждое слагаемое стремится к нулю по доказанному в самом начале. В силу произвольности epsilon, лемма Римана полностью доказана.

Л10*. Лемма к достаточному условию сходимости ряда Фурье

Пусть функция f является 2π-периодической на $\mathbb{R}$. Тогда

$$T_{n(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x-t)+f(x+t))D_{n(t)}dt$$

Доказательство. Вспомним, что

$$T_{n(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt$$

Сделаем замену переменной $p = x - t$ и учтем, что, согласно условию и свойствам ядра Дирихле (90), подынтегральная функция является 2π-периодической. Тогда

$$T_{n(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x-p)D_n(p)dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-p)D_n(p)dp$$

Так как ядро Дирихле является четным (лемма 90), то

$$T_{n(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x-p)+f(x+p))D_n(p)dp$$

что и доказывает лемму.

+T40*. Достаточное условие сходимости ряда Фурье

Пусть f - 2π-периодическая на $\mathbb{R}$ функция, причем $|f| \in R[-\pi, \pi]$. Если функция f удовлетворяет в точке $x \in \mathbb{R}$ условиям Дини, то

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k(f)} e^{ikx} = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

Доказательство. Так как (лемма 92)

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x-t)+f(x+t))D_n(t)dt$$

и так как (лемма 90)

$$\int_0^{\pi} D_n(t)dt = \pi$$

то

$$T_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x-t)+f(x+t))D_n(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x+0)+f(x-0))D_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x-t)-f(x-0)+f(x+t)-f(x+0)}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt$$

Так как $\sin\frac{t}{2} \sim \frac{t}{2}$ при $t \to 0+$, то, согласно условиям Дини, интегралы

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{f(x-t)-f(x-0)}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt \quad \text{и} \quad \int_0^{\pi}\left|\frac{f(x+t)-f(x+0)}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt$$

сходятся, а значит мы попадаем в условия леммы Римана (91). Тем самым,

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$