Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Дисциплина «Теория функций комплексного переменного»

Домашняя работа №2

Вариант №24

Выполнил:
Решетников С.Е.

Проверил:
Краснов Ю.А.

Санкт-Петербург, 2025

Задание 1

Найти изображение Лапласа функции

$$f(t) = 4t^2 \sin(t) + 3e^t - 1$$

Решение

Используем свойство линейности преобразования Лапласа:

$$\mathfrak{I}\big(4t^2 \sin(t) + 3e^t - 1\big) = 4\mathfrak{I}\big(t^2 \sin(t)\big) + 3\mathfrak{I}\big(e^t\big) - \mathfrak{I}(1)$$

$$\mathfrak{I}(1) = \frac{1}{s} \quad \mathfrak{I}\big(e^t\big) = \frac{1}{s-1}$$

Для нахождения $\mathfrak{I}\big(t^2 \sin(t)\big)$ используем свойство дифференцирования оригинала:

Пусть $g(t) = t^2 \sin(t)$, тогда

$$\dot{g}(t) = 2t \sin(t) + t^2 \cos(t) \quad \ddot{g}(t) = 2\sin(t) + 4t\cos(t) - t^2 \sin(t)$$

$$\ddot{g}(t) + g(t) = 2\sin(t) + 4t\cos(t)$$

Преобразование левой части

$$\mathfrak{I}(\ddot{g}(t)) = s^2 G(s) - sg(0) - \dot{g}(0)$$

$$g(0) = 0, \quad \dot{g}(0) = 0$$

$$\mathfrak{I}(\ddot{g}(t)) = s^2 G(s)$$

$$\mathfrak{I}(\ddot{g}(t) + g(t)) = \big(s^2 + 1\big)G(s)$$

Преобразование правой части

$$\mathfrak{I}(\sin(t)) = \frac{1}{s^2+1} \quad \mathfrak{I}(\cos(t)) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\mathfrak{I}(t\cos(t)) = -\partial(\mathfrak{I}(\cos(t)), s) =$$

$$= -\partial\left(\frac{s}{s^2+1}, s\right) = \frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}$$

$$\mathfrak{I}(2\sin(t) + 4t\cos(t)) = \frac{2}{s^2+1} + 4\frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{6s^2-2}{\left(s^2+1\right)^2}$$

$$G(s) = \frac{6s^2-2}{\left(s^2+1\right)^3} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{I}\big(t^2 \sin(t)\big) = \frac{6s^2-2}{\left(s^2+1\right)^3}$$

Итоговое изображение Лапласа

$$\mathfrak{I}(f(t)) = 4 \cdot \frac{6s^2-2}{\left(s^2+1\right)^3} + \frac{3}{s-1} - \frac{1}{s}$$

Задание 2

Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{3s+4}{s^2+8s+20}$$

Решение

Приведём знаменатель к каноническому виду: $s^2 + 8s + 20 = (s+4)^2 + 4$

Перепишем числитель с учётом сдвига: $3s + 4 = 3(s+4) - 8$

$$\text{Следовательно } F(s) = 3\frac{s+4}{(s+4)^2+4} - \frac{8}{(s+4)^2+4}$$

По теореме о смещении:

$$\mathfrak{I}(e^{-at}f(t)) = F(s+a) \;\; \text{В нашем случае } a = 4$$

Рассмотрим табличные изображения:

$$\mathfrak{I}(\cos(2t)) = \frac{s}{s^2+4} \quad \mathfrak{I}(\sin(2t)) = \frac{2}{s^2+4}$$

С учётом смещения получаем:

$$\mathfrak{I}(e^{-4t}\cos(2t)) = \frac{s+4}{(s+4)^2+4} \quad \mathfrak{I}(e^{-4t}\sin(2t)) = \frac{2}{(s+4)^2+4}$$

$$F(s) = 3\mathfrak{I}(e^{-4t}\cos(2t)) - 4\mathfrak{I}(e^{-4t}\sin(2t)) \;\Rightarrow\; f(t) = e^{-4t}(3\cos(2t) - 4\sin(2t))$$

Ответ: $f(t) = e^{-4t}(3\cos(2t) - 4\sin(2t))$

Задание 3

Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = e^t, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Решение

Преобразование левой части

$$\mathfrak{I}(\dot{y}(t)) = sY(s) - y(0) \quad \mathfrak{I}(\ddot{y}(t)) = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$$

С учётом начальных условий $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, получаем:

$$\mathfrak{I}(\ddot{y}(t)) = s^2Y(s) \quad \mathfrak{I}(-2\dot{y}(t)) = -2sY(s) \quad \mathfrak{I}(y(t)) = Y(s)$$

$$\mathfrak{I}(y(t)) = (s^2 - 2s + 1)Y(s)$$

Преобразование правой части

$$\mathfrak{I}(e^t) = \frac{1}{s-1}$$

Получаем уравнение:

$$(s^2 - 2s + 1)Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$(s-1)^2Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^3}$$

Найдём оригинал:

$$\mathfrak{I}(t^2e^{at}) = \frac{2}{(s-a)^3} \;\Rightarrow\; \mathfrak{I}(t^2e^t) = \frac{2}{(s-1)^3}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)\Im(t^2 e^t)$$

$$y(t) = t^2 \frac{e^t}{2}$$

Ответ: $y(t) = \frac{t^2 e^t}{2}$