Тестовые задания к экзамену

Дополнительные главы математического анализа
(по материалам объединённых лекций и практик)

Подготовил решение: Решетников Сергей Р3208 @ReshNF
Поставить звёздочку

Функции нескольких переменных: основные понятия

1. Что называется ε-окрестностью точки $P_0 \in \mathbb{R}^n$
   Ответ: $\{P : \rho(P, P_0) < \varepsilon\}$ (A)
2. Точка P_0 называется точкой сгущения множества M, если:
   Ответ: в любой окрестности P_0 есть точки M, отличные от P_0 (C)
3. Множество называется связным, если
   Ответ: любые две точки можно соединить непрерывной кривой, лежащей в множестве (C)
4. Верно ли: любое открытое множество состоит только из внутренних точек?
   Ответ: Да (A)
5. Верно ли: всякое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ является ограниченным?
   Ответ: Нет (B)

Предел функции нескольких переменных. Повторные и двойной пределы

6. Запись $\lim_{P \to P_0} f(P) = A$ означает:
   Ответ: $f(P)$ стремится к A при $P \to P_0$ по любому пути (A)
7. Какое утверждение корректно?
   Ответ: Двойной предел существует $\Rightarrow$ любой повторный существует и равен ему (D)
8. Условие непрерывности f в точке P_0:
   Ответ: $\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$ (B)
9. Если при подходе к P_0 по двум различным кривым пределы различны, то:
   Ответ: двойного предела не существует (B)
10. Если двойной предел существует и равен A, то предел по любой кривой, стремящейся к P_0, равен:
    Ответ: A (B)

Частные производные: определение и смысл

11. Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ - это
    Ответ: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}$ (B)
12. Геометрический смысл $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ для поверхности $z = f(x, y)$
    Ответ: наклон касательной к сечению плоскостью y = y_0 (A)

13. Что верно?
Ответ: Дифференцируемость гарантирует существование частных производных (B)
14. Если в точке существуют частные производные, но функция не непрерывна, то функция:
Ответ: может быть дифференцируема или нет (нужно проверять определение) (C)
15. Верно ли: если частные производные непрерывны в окрестности точки, то функция дифференцируема в этой точке?
Ответ: Да (A)

Дифференцируемость и полный дифференциал

16. Дифференцируемость $f(x, y)$ в точке эквивалентна представлению:
Ответ: $\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + o\Big(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\Big)$ (B)
17. Полный дифференциал df функции $f(x, y)$ равен:
Ответ: $df = f_x dx + f_y dy$ (C)
18. Что верно?
Ответ: df линейно по (dx, dy) (B)
19. Если f дифференцируема, то при малых приращениях:
Ответ: Δf лучше аппроксимируется df (A)
20. Верно ли: непрерывность частных производных в окрестности точки является достаточным условием дифференцируемости?
Ответ: Да (A)

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

21. Для поверхности $F(x, y, z) = 0$ уравнение касательной плоскости в точке P_0 имеет вид:
Ответ: $F_{x(P_0)}(x - x_0) + F_{y(P_0)}(y - y_0) + F_{z(P_0)}(z - z_0) = 0$ (B)
22. Нормальный вектор к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке P_0:
Ответ: $\big(F_x, F_y, F_z\big)|_{\{P_0\}}$ (B)
23. Что описывает нормаль к поверхности в точке P_0?
Ответ: прямую, проходящую через P_0 и параллельную градиенту F (B)
24. Для сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ нормаль в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельна:
Ответ: (x_0, y_0, z_0) (D)
25. Верно ли: если $\nabla F(P_0) = 0$, то касательная плоскость по стандартной формуле не определяется?
Ответ: Да (A)

Экстремум функции двух переменных: стационарные точки

26. Стационарная точка $f(x, y)$ - это точка, где:
Ответ: $f_x = f_y = 0$ (B)

27. В достаточных условиях экстремума используется величина:
Ответ: $D = AC - B^2$ (B)

28. Если в стационарной точке $D < 0$, то:
Ответ: седло (экстремума нет) (C)

29. Если функция дифференцируема в замкнутой области, то глобальные экстремумы достигаются:
Ответ: в стационарных точках и/или на границе (C)

30. Верно ли: из существования стационарной точки следует существование локального экстремума?
Ответ: Нет (B)

Наибольшее и наименьшее значения на замкнутой области

31. Для непрерывной функции на ограниченной замкнутой области верно:
Ответ: имеет и максимум, и минимум (C)

32. Где нужно искать глобальные экстремумы дифференцируемой функции в замкнутой области?
Ответ: в критических точках и на границе (C)

33. Что означает проверка значений функции на границе области?
Ответ: сведение к задаче одной переменной (B)

34. Верно ли: если на границе нет критических точек (как у функции одной переменной), то достаточно значений на концах параметрического отрезка?
Ответ: Да (A)

35. Верно ли: глобальный экстремум в замкнутой области не может достигаться в точке, где функция не определена?
Ответ: Да (A)

Мера Жордана. Площадь области

36. Мера Жордана области (в плоском случае) связана с:
Ответ: площадью области (B)

37. Область (в контексте кратных интегралов) — это:
Ответ: открытое связное множество (B)

38. Для существования двойного интеграла в смысле Римана–Жордана требуется:
Ответ: область имеет меру Жордана и функция ограничена (B)

39. Если $f(x, y) = 1$, то $\iint_D 1 \cdot dxdy$ равен:
Ответ: площади D (B)

40. Верно ли: если область D не является жордановой, то классическое определение двойного интеграла может быть неприменимо?
Ответ: Да (A)

Двойной интеграл и сведение к повторному

41. Двойной интеграл определяется как:
    Ответ: предел интегральных сумм при измельчении разбиения (B)

42. Формула сведения к повторному интегралу для области типа I (по x):
    Ответ: $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ (A)

43. Теорема о среднем значении для двойного интеграла утверждает:
    Ответ: $\int\int_D f \cdot dxdy = f(x^* *, y^* *) \cdot S_D$ (B)

44. Изменение порядка интегрирования применяется, когда:
    Ответ: область удобнее описать другим способом (A)

45. Верно ли: при корректной перестройке области значение двойного интеграла не меняется?
    Ответ: Да (A)

Криволинейные координаты. Якобиан

46. Якобиан перехода $(u,v) \to (x,y)$ равен:
    Ответ: $\det\left(\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right)$ (B)

47. Условие взаимно-однозначного соответствия внутри области:
    Ответ: $J \neq 0$ (B)

48. Что происходит с ориентацией обхода контура при $J < 0$?
    Ответ: меняется на противоположную (B)

49. При переходе к полярным координатам элемент площади равен:
    Ответ: $rdrd\varphi$ (B)

50. Верно ли: если якобиан обращается в нуль в точках области, стандартная формула замены требует отдельной проверки?
    Ответ: Да (A)

Площадь в криволинейных координатах

51. Идея вывода формулы площади через (u,v) состоит в том, что:
    Ответ: разбивают образ прямоугольной сеткой и переносят элемент площади через якобиан (B)

52. Какой множитель появляется при переходе к криволинейным координатам в двойном интеграле?
    Ответ: $|J|$ (B)

53. Сферические координаты (r,φ,θ) имеют якобиан вида:
    Ответ: $r^2 \sin\theta$ (B)

54. При переходе к цилиндрическим координатам (ρ,φ,z) элемент объёма равен:
    Ответ: $\rho d\rho d\varphi dz$ (B)

55. Верно ли: при вычислении площади или объёма всегда используется модуль якобиана?
    Ответ: Да (A)

Тройной интеграл и сведение к повторному

56. Тройной интеграл определяется как:
    Ответ: предел интегральных сумм по разбиению объёма (B)
57. Сведение тройного интеграла к повторному записывается как:
    Ответ: $\int dx \int dy \int dz \cdot f(x, y, z)$ (A)
58. При переходе к цилиндрическим координатам в $\mathbb{R}^3$ верно:
    Ответ: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$ (A)
59. При вычислении тройного интеграла в цилиндрических координатах появляется множитель:
    Ответ: ρ (A)
60. Верно ли: пределы интегрирования по ρ, φ, z определяются проекцией тела и ограничивающими поверхностями?
    Ответ: Да (A)

Криволинейные интегралы первого рода: длина кривой

61. Длина кривой AB определяется как:
    Ответ: точная верхняя грань периметров вписанных ломаных (B)
62. Кривая называется спрямляемой, если:
    Ответ: её длина конечна (C)
63. Аддитивность длины утверждает:
    Ответ: $L(AB) = L(AC) + L(CB)$ при C между A и B (B)
64. Формула длины при параметрическом задании $x = x(t)$, $y = y(t)$:
    Ответ: $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$ (A)
65. Формула длины для $y = y(x)$ на $[a, b]$:
    Ответ: $\int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$ (A)

Криволинейный интеграл 1 рода: определение и вычисление

66. Криволинейный интеграл 1 рода $\int_L f dS$ определяется как:
    Ответ: предел сумм $\sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$ (A)
67. При параметрическом задании кривой интеграл 1 рода равен:
    Ответ: $\int f(x(t), y(t)) \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$ (B)
68. При задании $y = y(x)$ формула имеет вид:
    Ответ: $\int_a^b f(x, y) \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$ (B)
69. Верно ли: криволинейный интеграл 1 рода зависит от ориентации кривой?
    Ответ: Нет (B)
70. При полярном задании $\rho = \rho(\varphi)$ дифференциал дуги содержит:
    Ответ: $\sqrt{\left(\rho'_\varphi\right)^2 + \rho^2 d\varphi}$ (A)

Сведение криволинейного интеграла 1 рода к определённому

71. Связь $\int_L f dS$ с определённым интегралом основана на:
Ответ: разбиении кривой на дуги и пределе интегральных сумм (B)

72. Если кривая задана параметром t, то $dS =$
Ответ: $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$ (B)

73. При выборе параметра как длины дуги ℓ справедливо:
Ответ: $dS = d\ell$ (A)

74. Верно ли: формулы интеграла 1 рода зависят от способа задания кривой?
Ответ: Да (A)

75. Если $f \equiv 1$, то $\int_L 1 dS$ равен:
Ответ: длине кривой L (B)

Поверхности. Двусторонние поверхности. Элемент площади

76. Поверхность называется двусторонней, если:
Ответ: при обходе замкнутого контура нормаль возвращается к исходному направлению (B)

77. Классический пример односторонней поверхности:
Ответ: лист Мёбиуса (C)

78. При параметризации поверхности направляющие косинусы нормали выражаются через:
Ответ: определители из производных по u и v (B)

79. Верно ли: поверхностный интеграл 1 рода — предел сумм $\sum f(M_i)\Delta S_i$?
Ответ: Да (A)

80. Верно ли: поверхностный интеграл 1 рода не зависит от ориентации нормали?
Ответ: Да (A)

Векторные операторы: grad, div, rot и тождества

81. Оператор $\operatorname{div} \vec{A}$ по смыслу соответствует:
Ответ: мере источниковости поля (B)

82. Оператор $\operatorname{rot} \vec{A}$ по смыслу соответствует:
Ответ: локальной вихревости поля (A)

83. Какое тождество верно?
Ответ: $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{A}$ (A)

84. Формула $\operatorname{div}\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$ относится к:
Ответ: тождествам векторного анализа (B)

85. Верно ли: для потенциального поля $\vec{A} = \nabla\varphi$ выполняется $\operatorname{rot} \vec{A} = \mathsf{vec}\ 0$?
Ответ: Да (A)