1. Линейные формы. Определения, примеры. Коэффициенты линейных форм.

Определение 1.1. **Линейной формой** на пространстве V называется такая функция $f : V \to \mathbb{K}$, что $\forall v, v_1, v_2 \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ выполняется:

(а) Аддитивность: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.

(б) Однородность: $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Пример 1.1. Пусть E – пространство геометрических векторов (на плоскости или в пространстве) с введенным скалярным произведением $\langle x, y\rangle$. Линейную форму $f(v)$ можно задать как

$$f(v) = \langle a, v\rangle,$$

где $a \in E$ – фиксированный вектор.

Пример 1.2. Пусть $V = M_n(\mathbb{K})$ – пространство квадратных матриц n-го порядка с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$. Линейную форму можно задать как

$$f(A) = \operatorname{tr} A, \qquad A \in M_n(\mathbb{K})$$

Пример 1.3. Пусть $V = \mathbb{R}^{\leqslant n}[x]$ – пространство полиномов степени не выше n. Линейную форму можно задать как

$$f(p) = p(x)\Big|_{x=x_0}$$

Пример 1.4. Пусть $V = \mathbb{K}^n$ – арифметическое пространство элементов $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Линейную форму можно задать как

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Определение 1.2. **Коэффициентами** φ_i линейной формы f называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$f(e_i) = \varphi_i$$

Теорема 1.1. *Задание линейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных формах, т.е. заданию ее коэффициентов.*

Доказательство. Пусть в выбранном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства V линейная форма f задана набором коэффициентов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$. Тогда $\forall v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \in V$:

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} v^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(v^i e_i) = \sum_{i=1}^{n} v^i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} v^i \varphi_i$$

Таким образом получаем, что образ любого вектора однозначно определен координатами этого векторами и коэффициентами линейной формы, где оба набора чисел найдены *в одном и том же базисе.*

2. Операции с линейными формами. Сопряженное пространство.

Определение 2.1. Линейные формы f и g будем называть **равными**, если

$$f = g \qquad \Leftrightarrow \qquad f(v) = g(v), \quad \forall v \in V$$

Определение 2.2. Линейная форма θ называется **нулевой (нуль-формой)**, если

$$\theta(v) = 0, \qquad \forall v \in V$$

Очевидно, что мы можем определить действия на множестве форм.

Определение 2.3. **Суммой** линейных форм f и g называется отображение $h = f + g$, для которого справедливо

$$h(v) = f(v) + g(v), \qquad \forall v \in V$$

Лемма 2.1. *Отображение h является линейной формой.*

Доказательство. Покажем справедливость свойства аддитивности:

$$h(v_1 + v_2) = f(v_1 + v_2) + g(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) + g(v_1) + g(v_2) =$$
$$= (f(v_1) + g(v_1)) + (f(v_2) + g(v_2)) = h(v_1) + h(v_2)$$

Выполнение свойства однородности показывается аналогично.

Определение 2.4. **Произведением** линейной формы f на число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется отображение $l = \alpha f$ такое, что

$$l(v) = \alpha \cdot f(v), \qquad \forall v \in V$$

Доказательство. Аналогично лемме о сумме линейных форм.

Теорема 2.1. *Множество линейных форм V^*, заданных на линейном пространстве V образует линейное (сопряженное) пространство.*

Рассмотрим некоторый базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в пространстве V. Введем набор линейных форм $\{f^j\}_{j=1}^n$ следующим образом:

$$f^j(v) = v_j,$$

которая возвращает j-ю координату вектора $v \in V$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Очевидно, что для линейных форм из этого набора справедливо

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j \end{cases}$$

3. Базис сопряженного пространства. Сопряженные базисы.

Лемма 2.2. *Набор линейных форм $\{f^j\}_{j=1}^n$ является базисом в сопряженном пространстве V^*.*

Доказательство. Чтобы показать справедливость утверждения, необходимо доказать полноту и линейную независимость этого набора. Покажем сначала полноту:

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \varphi_i v^i = \sum_{i=1}^n \varphi_i f^i(v) = \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i f^i\right)(v)$$

Аналогично с линейной независимостью. Предположим, что линейная комбинация форм с некоторыми коэффициентами α_i равна нуль-форме.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i = \theta$$

Применяя эту нуль-форму к произвольному базисному вектору, получим

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i\right)(e_k) = \theta(e_k) = 0$$

Учитывая также свойства линейности и их определение

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i(e_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k f^k(e_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = 0$$

4. Преобразование базиса сопряженного пространства и коэффициентов форм при преобразованиях базиса.

Теорема 2.2. *Пусть $\{f^i\}_{i=1}^n$ и $\{\widetilde{f}^l\}_{l=1}^n$ – базисы V^*, сопряженные соответственно базисам $\{e^j\}_{j=1}^n$ и $\{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n$. Тогда*

$$\widetilde{f}^l = \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i$$

где $(\sigma_i^l) = S$ – элементы обратной матрицы перехода, полагая $(\tau_k^j) = T$ – матрица перехода из $\{e^j\}_{j=1}^n$ в $\{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n$.

Доказательство. По определению сопряженных базисов имеем

$$\widetilde{f}^l(\widetilde{e}_k) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i\left(\sum_{i=1}^n \tau_k^j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^l \tau_k^j f^i(e_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^l \tau_k^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^l \tau_k^i = \delta_k^l$$

Откуда следует, что произведение матрицы, составленной из σ_i^l, на матрицу перехода с элементами τ_k^i должно быть равно единичной матрице. А это есть не что иное как определение обратной матрицы.

Теорема 2.3. *Преобразование координат формы в V^* при переходе от базиса $\{f^i\}_{i=1}^n$ к базису $\{\widetilde{f}\}_{l=1}^n$ имеет вид*

$$\widetilde{\eta}_l = \sum_{i=1}^n \tau_l^i \eta_i \qquad (\widetilde{\eta}^1, \widetilde{\eta}^2, \ldots, \widetilde{\eta}^n) = (\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n) \cdot T$$

Доказательство.

$$\widetilde{\eta}_l = f(\widetilde{e}_l) = \sum_{i=1}^n \eta_i f^i\left(\sum_{j=1}^n \tau_l^j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \tau_l^j f^i(e_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \tau_l^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^n \tau_l^i \eta_i$$

5. Изоморфизм сопряженных пространств. Второе сопряженное пространство.

Лемма 3.1. *Пространство V и сопряженное пространство V^* изоморфны.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из того, что $\dim V = \dim V^*$ (мощности базисов равны), а следовательно

$$V \simeq \mathbb{K}^n \simeq V^*$$

Изоморфизм устанавливается введенным соответствием между базисами пространств V и V^*.

Отметим, что операцию нахождения сопряженного пространства можно применять итеративно.

Определение 3.1. Вторым сопряженным пространством называют $V^{**} = (V^*)^*$.

Элементами второго сопряженного пространства являются функции, также обладающие линейностью, от линейных форм.

Теорема 3.1. *Между пространствами V и V^{**} можно установить изоморфизм без использования базиса (канонический изоморфизм).*

Доказательство. Рассмотрим элементы второго сопряженного пространства $\widehat{v}, \widehat{u} \in V^{**}$:

$$\widehat{v} : V^* \to \mathbb{K}, \qquad \widehat{v}(f) \in \mathbb{K}$$
$$\widehat{v}(f+g) = \widehat{v}(f) + \widehat{v}(g), \qquad \widehat{v}(\alpha f) = \alpha \widehat{v}(f)$$
$$(\widehat{v} + \widehat{u})(f) = \widehat{v}(f) + \widehat{u}(f), \qquad (\alpha \widehat{v})(f) = \alpha \widehat{v}(f)$$

Канонический изоморфизм устанавливается отношением

$$\widehat{x} \leftrightarrow x : \qquad \widehat{v}(f) = f(v) \qquad \forall f \in V^*$$

6. Билинейные формы. Определения, примеры.

Определение 1.1. **Билинейной формой** на линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ называется такая функция $b : V \times V \to \mathbb{K}$, что $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ выполняется:

(а) Линейность по первому аргументу:

$$b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 b(x_1, y) + \lambda_2 b(x_2, y)$$

(б) Линейность по второму аргументу:

$$b(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 b(x, y_1) + \lambda_2 b(x, y_2)$$

Пример 1.1. Пусть $f, g \in V^*$ – линейные формы в пространстве $V(\mathbb{K})$. Билинейная форма может быть задана как

$$b : V \times V \to \mathbb{K}, \qquad b(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

Пример 1.2. Скалярное произведение геометрических векторов на плоскости (в пространстве) линейно по каждому из аргументов, а следовательно является билинейной формой.

Пример 1.3. Пусть $V = \mathbb{K}^n$ – арифметическое пространство. Билинейную форму можно задать как

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \xi^i \eta^j,$$

где $x = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)^T \in V$ и $y = (\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n)^T \in V$.

7. Операции с билинейными формами. Линейное пространство билинейных форм.

Рассмотрим $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ – множество всех билинейных форм с аргументами из V. Для этого множества справедливо следующее.

(а) Билинейные формы $b, b' \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ равны тогда и только тогда, когда принимают равные значения на одинаковых парах аргументов:

$$b = b' \quad \Leftrightarrow \quad b(x, y) = b'(x, y) \quad \forall x, y \in V$$

(б) Существует нулевая билинейная форма $\theta \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$, принимающая $0 \in \mathbb{K}$ на любой паре аргументов.

$$\theta \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V) : \qquad \theta(x, y) = 0, \quad \forall x, y \in V$$

(в) Может быть определена сумма билинейных форм $b, b' \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ как отображение вида

$$c = b + b' \quad \Leftrightarrow \quad c(x, y) = b(x, y) + b'(x, y), \quad \forall x, y \in V$$

(г) Может быть определено умножение билинейной формы $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ на скаляр $\lambda \in \mathbb{K}$ как отображение вида

$$d = \lambda b \quad \Leftrightarrow \quad d(x, y) = \lambda b(x, y), \quad \forall x, y \in V$$

Лемма 1.1. *Отображения c и d являются билинейными формами.*

Доказательство. Аналогично соответствующим утверждениям для линейных форм.

Лемма 1.2. *Множество $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ наделено структурой линейного пространства.*

Доказательство. Можно убедиться путем прямой проверки аксиом линейного пространства.

8. Симметричные и антисимметричные билинейные формы.

Определение 1.2. Билинейная форма $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ называется **симметричной**, если выполняется $b(x, y) = b(y, x)$.

Определение 1.3. Билинейная форма $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ называется **антисимметричной**, если выполняется $b(x, y) = -b(y, x)$.

Замечание 1.3. Множество симметричных (антисимметричных) билинейных форм образует линейное подпространство $\mathrm{Bil}^S_{\mathbb{K}}(V)$ ($\mathrm{Bil}^{AS}_{\mathbb{K}}(V)$) в $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$.

Из каждой билинейной формы может быть изготовлена симметричная форма:

$$b^S(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) + b(y, x)), \qquad b^S \in \mathrm{Bil}^S_{\mathbb{K}}(V)$$

Аналогично может быть изготовлена антисимметричная форма:

$$b^{AS}(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) - b(y, x)), \qquad b^{AS} \in \mathrm{Bil}^{AS}_{\mathbb{K}}(V)$$

Лемма 1.3. *Сумма симметричной и антисимметричной формы, построенных согласно процедуре выше, дает исходную билинейную форму.*

Доказательство. Убеждаемся непосредственной проверкой:

$$b^S(x, y) + b^{AS}(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) + b(y, x)) + \frac{1}{2}(b(x, y) - b(y, x)) = b(x, y)$$

Лемма 1.4. *Пространство билинейных форм представляется в виде прямой суммы подпространств симметричных и антисимметричных билинейных форм.*

$$\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V) = \mathrm{Bil}^S_{\mathbb{K}}(V) \oplus \mathrm{Bil}^{AS}_{\mathbb{K}}(V)$$

Доказательство. Процедура изготовления симметричных (антисимметричных) форм, описанная выше, позволяет заключить, что

$$\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V) = \mathrm{Bil}^S_{\mathbb{K}}(V) + \mathrm{Bil}^{AS}_{\mathbb{K}}(V)$$

Покажем, что сумма будет прямой. Пусть билинейная форма $h(x, y)$ такова, что $h \in \mathrm{Bil}^S_{\mathbb{K}}(V) \bigcap \mathrm{Bil}^{AS}_{\mathbb{K}}(V)$. Тогда имеем

$$\begin{cases} h(x, y) = h(y, x) \\ h(x, y) = -h(y, x) \end{cases} \Rightarrow \quad h(y, x) = -h(y, x) \quad \Rightarrow \quad h(x, y) = 0 \quad \forall x, y \in V$$

В пересечении подпространств лежит только нулевая билинейная форма. Следовательно сумма является прямой.

9. Коэффициенты билинейной формы. Матрица билинейной формы.

Предположим, что V – конечномерное линейное пространство. Зафиксируем в V базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, где $n = \dim V$.

Определение 2.1. Коэффициентами β_{ij} билинейной формы $b(x, y)$ называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$b(e_i, e_j) = \beta_{ij}$$

Теорема 2.1. *Задание билинейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных векторах, т.е. заданию ее коэффициентов.*

Доказательство. Пусть в выбранном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства V билинейная форма $b(x, y)$ задана набором коэффициентов $\{\beta_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Тогда $\forall x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j$:

$$b(x, y) = b\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \sum_{j=1}^n \eta^j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \eta^j b(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \eta^j \beta_{ij}$$

По аналогии с линейными формами, коэффициенты которых можно представить в виде вектора-строки, существует аналогичное представление для билинейной формы.

Определение 2.2. Матрицей билинейной формы $b(x, y)$ называется матрица B, составленная из ее коэффициентов.

10. Изоморфизм пространства билинейных форм и пространства матриц.

Лемма 2.1. *Пространство билинейных форм* $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ *изоморфно пространству квадратных матриц* $M_n(\mathbb{K})$.

Доказательство. Изоморфизм устанавливается следующим образом:

$$b \leftrightarrow B \qquad b' \leftrightarrow B'$$
$$b + b' \leftrightarrow B + B'$$
$$\lambda b \leftrightarrow \lambda B$$

Соответствие между линейными операциями с билинейными формами и матрицами проверяется непосредственной проверкой определений.

Замечание 2.1. По этой же самой аналогии мы устанавливали изоморфизм между $V^* \simeq \mathbb{K}^n$, если $\dim V = n$. Мы снова наблюдаем идею "координатизации"пространства. В данном случае "координатами"билинейной формы служат коэффициенты ее матрицы.

Замечание 2.2. Матрица симметричной (антисимметричной) билинейной формы является симметричной (антисимметричной).

$$b^S \leftrightarrow B_S \qquad B_S = B_S^T$$
$$b^{AS} \leftrightarrow B_{AS} \qquad B_{AS} = -B_{AS}^T$$

В силу того, что матрица билинейной формы определяется как объект, зависящий от выбора базиса, то и смена базиса должна приводить к изменению матрицы билинейной формы. Действительно аналогичную ситуацию мы опять же уже встречали на примере строки коэффициентов линейной формы.

11. Преобразование матрицы билинейной формы при преобразовании базиса.

Теорема 2.2. *Матрицы B и B' билинейной формы $b(x, y)$, заданные в базисах $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{e'_j\}_{j=1}^n$ связаны соотношением*

$$B' = C^T B C,$$

где $C = (c_j^i)$ - матрица перехода от базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к базису $\{e'_j\}_{j=1}^n$.

Доказательство. Полагая, что известна матрица перехода $C = (c_j^i)$, компоненты нового базиса можно выразить через векторы старого базиса как

$$e'_j = \sum_{i=1}^n c_j^i e_i$$

Воспользуемся этим, чтобы получить компоненты матрицы билинейной формы в новом базисе

$$\beta'_{ij} = b(e'_i, e'_j) = b\left(\sum_{k=1}^n c_i^k e_k, \sum_{l=1}^n c_j^l e_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_i^k c_j^l \, b(e_k, e_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_i^k c_j^l \beta_{kl},$$

где $\beta_{kl} = b(e_k, e_l)$ для всех $k, l = 1, ..n$ - коэффициенты матрицы билинейной формы в старом базисе. Данное двойное суммирование означает ничто иное как матричное умножение, которое можно записать в виде

$$B' = C^T B C$$

Данное утверждение легко проверяется прямым раскрытием матричного умно-

12. Квадратичные формы. Определения, свойства.

Пусть $V(\mathbb{K})$ – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Предположим также, что в этом линейном пространстве определена билинейная форма $b : V \times V \to \mathbb{K}$.

Определение 3.1. Квадратичной формой на линейном пространстве V называется отображение $q(v)$, построенное из билинейной формы $b(x, y)$ следующим образом:

$$q : V \to \mathbb{K}, \qquad q(v) = b(v, v), \qquad \forall x \in V$$

Лемма 3.1. *Квадратичная форма является однородным полиномом степени 2 от координат вектора.*

Доказательство. Справедливы следующие рассуждения:

$$q(\lambda v) = b(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 b(v, v) = \lambda^2 q(v)$$

Тем самым мы показали, что квадратичная форма является однородной функцией 2-го порядка. Зафиксируем теперь базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в пространстве V. Произвольный вектор можем разложить по этому базису единственным образом $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$. Тогда квадратичная функция в координатном представлении имеет вид

$$q(v) = q\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i\right) = b\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i, \sum_{j=1}^n v^j e_j\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i v^j b(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i v^j \beta_{ij},$$

где β_{ij} – коэффициенты билинейной формы, по которой построена квадратичная форма $q(v)$.

13. Построение билинейной формы из квадратичной. Свойства операции.

Лемма 3.2. *По квадратичной форме $q(v)$ однозначно восстанавливается симметричная компонента билинейной формы $b(x,y)$.*

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму от суммы векторов $x, y \in V$:

$$q(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x,x)+b(x,y)+b(y,x)+b(y,y) = q(x)+b(x,y)+b(y,x)+q(y)$$

Откуда
$$b(x,y) + b(y,x) = q(x+y) - q(x) - q(y)$$

Если билинейную форму полагать симметричной, т.е. $b \in \mathrm{Bil}^S(V)$, то имеем

$$b(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$$

Замечание 3.2. Предыдущей леммой определяется взаимно однозначное соответствие между множеством квадратичных форм и множеством симметричных билинейных форм.

Замечание 3.3. Любой антисимметричной билинейной форме соответствует нулевая квадратичная форма.

Замечание 3.4. Полагая, что билинейная форма описывается матрицей с коэффициентами β_{ij}, квадратичную форму можно также представить в виде:

$$q(v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} v^i v^j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ii}(v^i)^2 + 2\sum_{i<j} \beta_{ij} v^i v^j,$$

где v^i – i-я координата вектора v в выбранном базисе.

14. Полилинейные формы. Основные определения и примеры.

Определение 1.1. **Полилинейной формой** на линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ назовем отображение вида

$$\mathcal{A} : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{q} \to \mathbb{K}$$

обладающее линейностью по каждому из аргументов

$$\mathcal{A}(x_1, \ldots, \alpha x_i' + \beta x_i'', \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^q) =$$
$$= \alpha\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^q) + \beta\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^q),$$

где $x_i \in V$ и $\varphi^j \in V^*$.

Рассмотрим частные случаи полилинейных форм.

Определение 1.2. **Валентностью** полилинейной формы называют пару чисел (p,q), определяющих количество векторов и ковекторов (линейных форм), являющихся аргументами данного отображения.

Пример 1.1. Линейные формы над V — это отображения вида

$$f : V \to \mathbb{K}$$

Следовательно, линейная форма $\varphi \in V^*$ является ПЛФ валентности $(1,0)$.

Пример 1.2. Линейные формы над V^* — это отображения вида

$$\widehat{x} : V^* \to \mathbb{K}$$

Следовательно, линейная форма $\widehat{x} \in V^{**}$ является ПЛФ валентности $(0,1)$. Однако ранее обсуждалось, что между пространствами V и V^{**} существует естественный изоморфизм, определяемый как

$$x \leftrightarrow \widehat{x} \qquad (\widehat{x}, f) = (f, x) \qquad \forall f \in V^*$$
$$x \in V, \qquad \widehat{x} \in V^{**}$$

Следовательно, можно утверждать, что ПЛФ валентности $(0,1)$ однозначно соответствует элемент линейного пространства V в силу обсуждаемого изоморфизма.

Пример 1.3. Билинейные формы над V — это отображения вида

$$g : V \times V \to \mathbb{K}$$

Таким образом, билинейная форма — это ПЛФ валентности $(2,0)$. Примером билинейной формы служит скалярное произведение двух геометрических векторов
$$g(x_1, x_2) = (x_1, x_2),$$
а также все другие примеры билинейных форм, которые рассматривались ранее.

Пример 1.4. Можно также рассмотреть трилинейные формы как отображения вида
$$\psi : V \times V \times V \to \mathbb{K}$$
являющиеся ПЛФ валентности $(3,0)$. Отображения такого вида встречались в геометрии — это смешанное произведение трех векторов.

Пусть Ω_q^p — множество полилинейных форм валентности (p,q).

Определение 2.1. Полилинейные формы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Omega_q^p$ *одинаковой валентности* будем называть **равными**, если

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) = \mathcal{B}(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \ldots, x_p \in V$ и $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q \in V^*$.

Определение 2.2. **Нуль-формой** $\Theta \in \Omega_q^p$ называется такая полилинейная форма, что

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) = 0 \qquad \forall x_i \in V, \forall \varphi^j \in V^*$$

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - полилинейные формы валентности (p,q). Введем операции с ними.

15. Действия с полилинейными формами: сложение и умножение на скаляр.

2.1. Линейные операции

Определение 2.3. Отображение $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ будем называть суммой полилинейных форм $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, если

$$\mathcal{C}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \\ = \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) + \mathcal{B}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$ и $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in V^*$.

Лемма 2.1. *Отображение $\mathcal{C}$, определенное как сумма полилинейных форм $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Omega^p_q$ является полилинейной формой из Ω^p_q*

Доказательство. Доказательство строится также как аналогичное доказательство для линейных и билинейных форм. □

Определение 2.4. Отображение $\lambda\mathcal{A}$ будем называть произведением полилинейной формы $\mathcal{A}$ на скаляр λ, если

$$(\lambda\mathcal{A})(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$ и $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in V^*$.

Лемма 2.2. *Отображение $\lambda\mathcal{A}$, определенное как произведение полилинейной формы $\mathcal{A} \in \Omega^p_q$ на скаляр $\lambda \in \mathbb{K}$ является полилинейной формой из Ω^p_q*

Доказательство. Доказательство строится также как аналогичное доказательство для линейных и билинейных форм. □

16. Соглашение о немом суммировании. Принципы, применение.

Прежде чем перейдем к дальнейшим рассуждениям, отметим следующий факт. Наличие большого количества индексов в случае анализа линейных объектов нередко приводит к большому количеству суммирований как в теоретических выкладках, так и в практических приложениях тензоров. По этой причине вводится так называемое **правило суммирования Эйнштейна**, или соглашение о немом суммировании. В контексте данной темы договоримся о следующем:

(а) Если в одночлене присутствует одинаковый верхний и нижний индекс, то подразумевается суммирование по нему:

$$a^i b_i = \sum_i a^i b_i$$

(б) Индекс, по которому происходит суммирование, называют немым в силу того, что его обозначение не принципиально, т.е.

$$a^i b_i = a^j b_j = a^k b_k$$

(в) Необходимо соблюдение баланса индексов. Если индекс не является немым, то в левой и правой частях равенства должны присутствовать одни и те же индексы, а также должен быть неизменным их порядок, т.е.

$$a_{ik} b^{kl} = c_i^l$$

17. Действия с полилинейными формами: произведение ПЛФ.

Определение 2.5. Произведением полилинейных форм $\mathcal{A} \in \Omega^{p_1}_{q_1}$ и $\mathcal{B} \in \Omega^{p_2}_{q_2}$ называют отображение $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ определяемое как

$$\mathcal{A}(x_1, \dots, x_{p_1}; \varphi^1, \dots, \varphi^{q_1}) \cdot \mathcal{B}(x_{p_1+1}, \dots x_{p_1+p_2}; \varphi^{q_1+1}, \dots \varphi^{q_1+q_2}) = \\ = \mathcal{C}(x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots x_{p_1+p_2}; \varphi^1, \dots, \varphi^{q_1}, \varphi^{q_1+1}, \dots \varphi^{q_1+q_2})$$

Замечание 2.1. Произведение полилинейных форм валентностей (p_1, q_1) и (p_2, q_2) всегда позволяет получить полилинейную форму валентности (p_1+p_2, q_1+q_2). Однако **не каждая** полилинейная форма валентности (p, q) **может быть представлена (разложена)** в произведение полилинейных форм валентностей (p_1, q_1) и (p_2, q_2), даже если $p_1 + p_2 = p$ и $q_1 + q_2 = q$.

Лемма 2.3. *Отображение $\mathcal{C}$, введенное как произведение полилинейных форм, является полилинейной формой.*

$$\mathcal{C} \in \Omega^{p_1+p_2}_{q_1+q_2}$$

Доказательство. Не теряя общности, мы можем показать линейность по первому векторному аргументу. Для остальных доказательство может быть построено аналогичным образом, но его запись при этом усложнится значительно. Пусть произведение полилинейных форм задается следующим образом:

$$\mathcal{C}(x, \dots; \dots) = \mathcal{A}(x, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots, \dots; \dots),$$

где через многоточия обозначены остальные аргументы всех полилинейных форм согласно определению выше.

При этом, если аргумент x представлен линейной комбинацией $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, имеем

$$\mathcal{C}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \dots; \dots) = \mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) = \\ = (\alpha_1 \mathcal{A}(x_1, \dots; \dots) + \alpha_2 \mathcal{A}(x_2, \dots; \dots)) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) = \\ = \alpha_1 \mathcal{A}(x_1, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) + \alpha_2 \mathcal{A}(x_2, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) = \\ = \alpha_1 \mathcal{C}(x_1, \dots; \dots) + \alpha_2 \mathcal{C}(x_2, \dots; \dots),$$

где мы воспользовались свойством полилинейности отображения $\mathcal{A}$. В силу того, что это отображение линейно по каждому из аргументов, данные рассуждения справедливы по набору его аргументов. А также в силу того, что отображение $\mathcal{B}$ тоже является полилинейным, свойство линейности отображения $\mathcal{C}$ по каждому из аргументов набора из $\mathcal{B}$. □

18. Свойства произведения полилинейных форм.

(а) Некоммутативность

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$$

Данное свойство очевидно вытекает из определения произведения в силу того, что порядок произведения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ определяет порядок аргументов в $\mathcal{C}$. Однако продемонстрируем это свойство на более простом примере. Рассмотрим следующие полилинейные формы, определенные как произведения обычных линейных форм $f^1, f^2 \in V^*$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 = f^1 \cdot f^2 \qquad &\Rightarrow \qquad \mathcal{C}_1(x, y) = f^1(x) \cdot f^2(y) \\ \mathcal{C}_2 = f^2 \cdot f^1 \qquad &\Rightarrow \qquad \mathcal{C}_2(x, y) = f^2(x) \cdot f^1(y) \end{aligned}$$

(б) Ассоциативность

$$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$$

(в) Нуль-форма

$$\mathcal{A} \cdot \Theta_{(p_2, q_2)} = \Theta_{(p_1, q_1)} \cdot \mathcal{B} = \Theta_{(p_1 + p_2, q_1 + q_2)}$$

(г) Законы согласования операций (дистрибутивность)

$$\begin{gathered} \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} \\ (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{C} \\ (\alpha \mathcal{A}) \cdot \mathcal{B} = \alpha (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \mathcal{A} \cdot (\alpha \mathcal{B}) \end{gathered}$$

19. Тензор ПЛФ. Определение. Эквивалентность между ПЛФ и ее тензором в паре базисов.

Зафиксируем в $V(\mathbb{K})$ базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ и построим к нему сопряженный базис $\{f^j\}_{j=1}^n$ в пространстве V^*. Вспомним, что эти базисы связаны соотношением

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Определение 3.1. **Тензором** полилинейной формы $\mathcal{C}$ валентности (p, q) называется набор из n^{p+q} скаляров, определяемых как действие полилинейной формы на всевозможных наборах базисных векторов.

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q} = \mathcal{C}(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \ldots, f^{j_q}),$$

где индексы $i_1, i_2, \ldots, i_p$ и $j_1, j_2, \ldots, j_q$ принимают значения $1, .., n$, где $n = \dim V$ — это размерность пространства V.

Теорема 3.1. *Задание тензора эквивалентно заданию его компонент в паре базисов пространств V и V^*.*

Доказательство. Рассмотрим набор векторов $x_1, \ldots, x_p$ и форм $\varphi^1, \ldots, \varphi^q$, заданных своими разложениями по базисам

$$x_k = \sum_{i=1}^n \xi_k^i e_i = \xi_k^i e_i \qquad \varphi^l = \sum_{j=1}^n \eta_j^l f^j = \eta_j^l f^j$$

Применим к ним тензор $\mathcal{C}(x_1, \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^q)$ и воспользуемся его линейными свойствами

$$\begin{gathered} \mathcal{C}(x_1, \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^q) = \mathcal{C}(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, \xi_p^{i_p} e_{i_p}; \eta_{j_1}^1 f^{j_1}, \ldots, \eta_{j_q}^q f^{j_q}) = \\ = \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \ldots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \ldots \eta_{j_q}^q \mathcal{C}(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \ldots, f^{j_q}) = \\ = \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \ldots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \ldots \eta_{j_q}^q c_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q}, \end{gathered}$$

где в данной записи мы как раз воспользовались соглашением о немом суммировании. □

20. Закон преобразования компонент тензора при замене базиса.

Пусть $V(\mathbb{K})$ — линейное пространство размерности $n = \dim_{\mathbb{K}} V$, а V^* — сопряженное к нему пространство. Определим в этих пространствах по паре базисов — "старый" и "новый":

$$\begin{aligned} V &: \{e_i\}_{i=1}^n, \quad \{e'_k\}_{k=1}^n \\ V^* &: \{f^j\}_{j=1}^n, \quad \{f'^l\}_{l=1}^n \end{aligned}$$

При этом между парами базисов из соответствующих пространств можно определить преобразование при помощи матрицы перехода $T = \{\tau_k^i\}$ и обратной к ней $S = \{\sigma_j^l\}$:

$$e'_k = e_j \tau_k^i \qquad f'^l = \sigma_j^l f^j,$$

где для записи преобразований мы сразу воспользовались соглашением о немом суммировании.

При этом для координат векторов $x = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и коэффициентов линейных форм $f = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ вводятся аналогичные преобразования:

$$\xi'^k = \sigma_i^k \xi^i \qquad \eta'_l = \eta_j \tau_j^l,$$

Откуда мы можем сделать выводы, что в принятых в данном курсе обозначениях, объекты, имеющие верхние индексы преобразуются при помощи обратной матрицы перехода S, а те объекты, что имеют нижние индексы, преобразуются при помощи исходной матрицы перехода T.

Обобщим этот результат на тензор полилинейной формы $\mathcal{A} \in \Omega_q^p$ и закон преобразования его компонент при замене базиса. В согласии с определением из предыдущей лекции, введем тензор в новом базисе.

$$a'^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p} = \mathcal{A}(e'_{k_1}, e'_{k_2}, \ldots, e'_{k_p}; f'^{l_1}, f'^{l_2}, \ldots, f'^{l_q}) = \mapsto$$

Теперь воспользуемся введенными преобразованиями базиса, чтобы записать выражение через элементы "старых" базисов:

$$\begin{gathered} \mapsto = \mathcal{A}(e_{i_1} \tau_{k_1}^{i_1}, e_{i_2} \tau_{k_2}^{i_2}, \ldots, e_{i_p} \tau_{k_p}^{i_p}; \sigma_{j_1}^{l_1} f^{j_1}, \sigma_{j_2}^{l_2} f^{j_2}, \ldots, \sigma_{j_q}^{l_q} f^{j_q}) = \\ = \tau_{k_1}^{i_1} \tau_{k_2}^{i_2} \ldots \tau_{k_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{l_1} \sigma_{j_2}^{l_2} \ldots \sigma_{j_q}^{l_q} \mathcal{A}(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \ldots, f^{j_q}) = \\ = \tau_{k_1}^{i_1} \tau_{k_2}^{i_2} \ldots \tau_{k_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{l_1} \sigma_{j_2}^{l_2} \ldots \sigma_{j_q}^{l_q} a_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q}, \end{gathered}$$

где мы воспользовались тем, что отображение $\mathcal{A}$ является линейным по каждому из аргументов, а также то, что в каждом аргументе подразумеваются именно линейные операции (немое суммирование и умножение на скаляры из матриц перехода).

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Тензор полилинейной формы при замене базиса преобразуется по закону:*

$$a'^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p} = \tau_{k_1}^{i_1} \tau_{k_2}^{i_2} \ldots \tau_{k_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{l_1} \sigma_{j_2}^{l_2} \ldots \sigma_{j_q}^{l_q} a_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q}$$

21. Операция свертки ПЛФ и тензора.

Определение 2.1. Сверткой полилинейной формы $\mathcal{A} \in \Omega_q^p$ называется отображение, результатом которого является функция $\mathcal{B}$ от $p-1$ векторного аргумента и $q-1$ ковекторного аргумента, определяемая как

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^{l-1}, \varphi^{l+1}, \ldots, \varphi^q) = \\ &= \mathcal{A}(x_1, \ldots, x_{k-1}, \mathbf{e_r}, x_{k+1}, \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^{l-1}, \mathbf{f^r}, \varphi^{l+1}, \ldots, \varphi^q)\end{aligned}$$

полагая, что в правой части производится суммирование по немому индексу r.

Рассмотрим компоненты полученной полилинейной формы и введем для них обозначения в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f^j\}_{j=1}^n$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \leftrightarrow & a^{j_1 \ldots j_{l-1} j_l j_{l+1} \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k i_{k+1} \ldots i_p} \\ \mathcal{B} & \leftrightarrow & b^{j_1 \ldots j_{l-1} j_{l+1} \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_p} \end{array}$$

Компоненты полилинейной формы $\mathcal{B}$ связаны с компонентами полилинейной формы $\mathcal{A}$ соотношением

$$b^{j_1 \ldots j_{l-1} j_{l+1} \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_p} = a^{j_1 \ldots j_{l-1} \mathbf{r} j_{l+1} \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_{k-1} \mathbf{r} i_{k+1} \ldots i_p},$$

которое получается из рассмотрения определения свертки при подстановке в них базисных векторов в качестве аргументов согласно определению тензора полилинейной формы.

22. Символ Кронекера и его связь со скалярным произведением.

Определение 3.1. Символ Кронекера δ_{ij} — это дважды ковариантный тензор типа $(2, 0)$, компоненты которого задаются как:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Замечание 3.2. В случае ДПСК справедливо свойство:

$$\delta_{ij} a^j = a_i,$$

которое называют операцией поднятия и опускания индекса. Данное свойство справедливо не только в ДПСК и в дальнейших частях курса мы обобщим это свойство для произвольных систем координат.

С учетом этого свойства символ Кронекера оказывается полезным при записи скалярного произведения в ДПСК:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^j g_{ij} = a^i b_i = \sum_{i=1}^n a^i b_i.$$

23. Символ Леви-Чивита. Определение, свойства.

Определение 3.2. Символ Леви-Чевиты ε_{ijk} — это трижды ковариантный тензор типа $(3, 0)$, компоненты которого в ДПСК задаются как:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — чётная перестановка } (1, 2, 3), \\ -1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — нечётная перестановка}, \\ 0, & \text{иначе (если есть повторяющиеся индексы)}. \end{cases}$$

Замечание 3.3. Символ Леви-Чивиты обладает свойством:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj},$$

которое называют антисимметричностью тензора. Это свойство напрямую следует из определения.

24. Связь символа Леви-Чивита с векторным и смешанным произведением.

Перейдем к применению этого тензора в геометрии. Компоненты векторного произведения $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ в ДПСК выражаются через символ Леви-Чевиты:

$$c_i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k.$$

В координатной форме:

$$\mathbf{c} = \left(\varepsilon_{1jk} a^j b^k, \varepsilon_{2jk} a^j b^k, \varepsilon_{3jk} a^j b^k\right).$$

Действительно, векторное произведение в ДПСК в полной форме может быть записано следующим образом

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^2 b^3 - a^3 b^2)\mathbf{i} + (a^3 b^1 - a^1 b^3)\mathbf{j} + (a^3 b^2 - a^2 b^3)\mathbf{k}$$

Смешанное произведение трёх векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в $\mathbb{R}^3$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a^i) \cdot (\varepsilon_{ijk} b^j c^k) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k.$$

Наконец перейдем к еще одному обобщению применения символа Леви-Чивиты не только на геометрические задачи. Вспомним, что в ДПСК смешанное произведение может быть найдено при помощи определителя:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix},$$

но тогда можно предположить, что и определитель произвольной тройки векторов может быть найден при помощи операции свертки векторов-столбцов матрицы с символом Леви-Чивиты.

25. Связь символа Леви-Чивита с определителями матриц.

Определение 3.3. Символ Леви-Чевиты $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ в n-мерном пространстве — это полностью антисимметричный тензор типа $(0, n)$ с n индексами. Его компоненты в любой декартовой системе координат определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1, & \text{если } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ — чётная перестановка чисел } (1, 2, \dots, n), \\ -1, & \text{если } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ — нечётная перестановка,} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях (если есть повторяющиеся индексы).} \end{cases}$$

Пояснение:

- **Антисимметричность:** Перестановка любых двух индексов меняет знак символа:
$$\varepsilon_{\dots i \dots j \dots} = -\varepsilon_{\dots j \dots i \dots}.$$
- **Ненулевые компоненты:** Отличны от нуля только компоненты, где все индексы различны и образуют перестановку чисел $1, 2, \dots, n$.
- **Знак перестановки:** Чётность перестановки определяется количеством транспозиций, необходимых для восстановления исходного порядка $(1, 2, \dots, n)$.

Для квадратной матрицы $A = (A_{ij})$ размера $n \times n$ её определитель выражается как:

$$\det A = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_2^{i_2}$$

Учтем, что в силу соглашения Эйнштейна здесь производится суммирование по всем индексам $i_1, i_2, \dots, i_n$, а сам символ Леви-Чивиты принимает значение только $+1$ или -1. Это приводит нас к определителю матрицы n-го порядка

$$\det A = \sum_{\sigma(1,\dots,n)} (-1)^{[\sigma]} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_2^{i_2}$$

В данном случае, под σ подразумевается преобразование переупорядочивания индексов.

26. Линейные отображения. Основные определения, примеры.

Определение 1.1. Отображение $\varphi : V \to W$ линейного пространства V в линейное пространство W называется линейным, если $\forall x, x_1, x_2 \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ выполяются следующие свойства

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \qquad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$$

Замечание 1.1. Множество линейных отображений действующих их $V(\mathbb{K})$ в $W(\mathbb{K})$ будем обозначать $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

Пример 1.1. Примеры линейных отображений:

(а) Нулевое отображение:

$$\mathcal{O} \colon V \to W \qquad \mathcal{O}x = 0_W, \qquad \forall x \in V$$

(б) Тождественное отображение:

$$\mathcal{I} \colon V \to V \qquad \mathcal{I}x = x, \qquad \forall x \in V$$

(в) Растяжение:

$$\varphi \colon V \to V \qquad \varphi x = \lambda x, \qquad \forall x \in V$$

(г) Пусть V разбивается в прямую сумму подпространств $V = V_1 \oplus V_2$. Тогда проектором будем называть отображение:

$$\mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2} \colon V \to V, \qquad \mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2} x = x_1, \qquad \forall x_1 \in V_1$$

(д) Пусть $\mathbb{R}^{\leqslant n}[t]$ — пространство полиномов степени не выше n, а символом $\mathcal{D}$ будем обозначать дифференцирование

$$\mathcal{D}p = \frac{dp}{dt}, \qquad \forall p \in \mathbb{R}^{\leqslant n}[t]$$

(е) Пусть $M_n(\mathbb{K})$ — пространство квадратных матриц n-го порядка, на котором введены отображения симметризации Sym и антисимметризации Asym

$$\mathrm{Sym}(A) = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) \qquad \mathrm{Asym}(A) = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

27. Матрица линейного отображения.

Пусть $\varphi : V \to W$, причем $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, $\dim_{\mathbb{K}} W = m$, а также $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$ — базисы пространств V и W соответственно.

Определение 2.1. Матрицей линейного отображения φ в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$ называется матрица $A_\varphi = \{\alpha_i^j\}$, в столбцах которой находятся координаты образов векторов базиса $\{e_i\}$ в базисе $\{g_j\}$

$$\varphi e_i = \sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j$$

Пример 2.1. (а) Нулевое отображение

$$\mathcal{O} \to \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(б) Тождественное отображение

$$\mathcal{I} \to E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(в) Матрица проектора на V_1, если $V = V_1 \oplus V_2$, найденная в базисе, согласованном с обоими подпространствами

$$\mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2} \to P_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}$$

так как

$$\mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2} x = x, \qquad \mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2} x = 0, \qquad \forall x \in V_1$$

Теорема 2.1. *Задание линейного отображения φ эквивалентно заданию его матрицы A_φ в фиксированной паре базисов.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ — линейное отображение и $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{g_j\}_{j=1}^m$ — базисы пространств V и W соответственно. Рассмотрим элементы $x \in V$ и $y \in W$ такие, что

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \qquad y = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j, \qquad \varphi(x) = y$$

Действие отображения на элемент x можно представить как

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi^i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \xi^i \sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j$$

Откуда следует, что

$$\eta^j = \sum_{i=1}^n \xi^i \alpha_i^j$$

28. Линейное пространство линейных отображений.

Определение 3.1. Линейные отображения φ и ψ будем считать равными, если

$$\forall x \in V \qquad \varphi(x) = \psi(x)$$

Определение 3.2. Отображение $\chi : V \to W$ называется суммой линейных отображений $\varphi, \psi : V \to W$, если

$$\forall x \in V \qquad \chi(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

Лемма 3.1. *Сумма $\chi = \varphi + \psi$ линейных отображений является линейным отображением.*

Доказательство. Для доказательства необходимо рассмотреть линейные свойства суммы линейных отображений:

$$\chi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1 + x_2) + \psi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \psi(x_1) + \psi(x_2) = \\ = (\varphi + \psi)(x_1) + (\varphi + \psi)(x_2) = \chi(x_1) + \chi(x_2)$$

$$\chi(\alpha x) = \varphi(\alpha x) + \alpha\psi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) + \alpha\psi(x) = \alpha(\varphi + \psi)(x) = \alpha\chi(x)$$

□

Определение 3.3. Отображение ω называется произведением линейного отображения φ на число $\lambda \in \mathbb{K}$, если

$$\forall x \in V \qquad \omega(x) = \lambda\varphi(x)$$

Лемма 3.2. *Произведение $\omega = \lambda\varphi$ линейного отображения на скаляр является линейным отображением.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству суммы. □

Теорема 3.1. *Множество всех линейных отображений из пространства V в пространство W является линейным пространством над полем $\mathbb{K}$.*

Доказательство. Доказательство сводится к проверке аксиом линейного пространства. □

29. Изоморфизм линейных пространств линейных отображений и матриц.

Замечание 3.1. В силу того, что между отображением и его матрицей в фиксированной паре базисов пространств V и W устанавливается соответствие, которое к тому же сохраняет свойства линейности, можно утверждать, что пространство $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X,Y)$ изоморфно матричному пространству $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X,Y) \simeq M_{m\times n}(\mathbb{K})$$

30. Композиция линейных отображений и связь с матричными операциями.

Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,U)$ и $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U,W)$ — линейные отображения между соответствующими пространствами.

Определение 3.4. Отображение $\chi : V \to W$ называется композицией линейных отображений ψ и φ, если

$$\forall x \in V: \qquad \chi(x) = (\psi\circ\varphi)(x) = \varphi(\varphi(x))$$

Лемма 3.3. *Композиция $\chi = \psi\circ\varphi$ линейных отображений является линейным отображением.*

Доказательство. Рассмотрим образ линейной комбинации векторов из V

$$\chi\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha^i x_i\right) = (\psi\circ\varphi)\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha^i x_i\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha^i \varphi(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{k}\alpha^i\psi(\varphi(x_i)) = \sum_{i=1}^{k}\alpha^i\chi(x_i)$$

□

Следствие 3.1.1. *Матрица композиции линейных отображений $\chi = \psi\circ\varphi$ определяется произведением матриц B_ψ и A_φ.*

$$C_\chi = B_\psi \cdot A_\varphi$$

31. Преобразование матрицы линейного оператора при преобразовании базиса.

Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(V,W)$, а в пространствах заданы базисы:

$$\begin{aligned} V: &\qquad \{e_i\}_{i=1}^n, \quad \{e'_j\}_{j=1}^n \\ W: &\qquad \{g_k\}_{k=1}^m, \quad \{g'_l\}_{l=1}^m \end{aligned}$$

Причем известно, что $T = \{\tau^i_j\}$ — матрица перехода из базиса $\{e\}$ в базис $\{e'\}$, а матрица $S = \{\sigma^k_l\}$ — матрица перехода из базиса $\{g\}$ в базис $\{g'\}$.

Теорема 4.1. *Матрица оператора при замене базисов преобразуется как*

$$A'_\varphi = S^{-1}A_\varphi T$$

Доказательство. Пусть $x \in V$ произвольный элемент пространства V, а y — образ этого элемента. Тогда в паре базисов $\{e\}$ и $\{g\}$

$$\varphi(x) = y \qquad \leftrightarrow \qquad A_\varphi x = y$$

В то же время можно утверждать, что в паре базисов $\{e'\}$ и $\{g'\}$ справедливо

$$\varphi(x) = y \qquad \leftrightarrow \qquad A'_\varphi x' = y'$$

Однако известно, что при изменении базиса соответствующим образом преобразуются координаты векторов x и y

$$x' = T^{-1}x, \qquad y' = S^{-1}y$$

Подставляя данные преобразования в матричное выражение, получаем

$$A'_\varphi T^{-1}x = S^{-1}y$$

Матрицы перехода всегда обратимы, следовательно можно утверждать, что

$$SA'_\varphi T^{-1} = A_\varphi$$

Или, что тоже самое

$$S^{-1}A_\varphi T = A'_\varphi$$

□