1 Дайте определение линейной формы.

Пусть V – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 1.1. **Линейной формой** на пространстве V называется такая функция $f : V \to \mathbb{K}$, что $\forall v, v_1, v_2 \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ выполняется:

(а) Аддитивность: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.

(б) Однородность: $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

2 Что будет являться образом линейной комбинации относительно линейной формы?

Замечание 1.1. Для любого линейного отображения $f : V \to U$ справедливо, что образом линейной комбинации произвольных векторов $v_i \in V$ будет линейная комбинация образов этих векторов:

$$f\left(\sum_i \alpha_i v_i\right) = \sum_i \alpha_i f(v_i)$$

3 Приведите общий вид линейной формы, определяемый координатами вектора-аргумента в произвольном базисе.

Пример 1.1. Пусть E – пространство геометрических векторов (на плоскости или в пространстве) с введенным скалярным произведением $\langle x, y\rangle$. Линейную форму $f(v)$ можно задать как

$$f(v) = \langle a, v\rangle,$$

где $a \in E$ – фиксированный вектор.

4 Что называется коэффициентами линейной формы?

Определение 1.2. **Коэффициентами** φ_i линейной формы f называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$f(e_i) = \varphi_i$$

5 Как найти значение линейной формы, зная ее коэффициенты в некотором базисе, а также координаты вектора-аргумента в этом же базисе?

Доказательство. Пусть в выбранном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства V линейная форма f задана набором коэффициентов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$. Тогда $\forall v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \in V$:

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n f(v^i e_i) = \sum_{i=1}^n v^i f(e_i) = \sum_{i=1}^n v^i \varphi_i$$

6 Как определяется равенство линейных форм?

Определение 2.1. Линейные формы f и g будем называть **равными**, если

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = g(v), \quad \forall v \in V$$

7 Какая линейная форма называется нуль-формой?

Определение 2.2. Линейная форма θ называется **нулевой (нуль-формой)**, если

$$\theta(v) = 0, \qquad \forall v \in V$$

8 Как определяется сумма линейных форм?

Определение 2.3. **Суммой** линейных форм f и g называется отображение $h = f + g$, для которого справедливо

$$h(v) = f(v) + g(v), \qquad \forall v \in V$$

9 Какое пространство называется сопряженным пространством?

Теорема 2.1. *Множество линейных форм V^*, заданных на линейном пространстве V образует линейное (сопряженное) пространство.*

10 Какие значения принимает fj(ei), если {ei} и {fj} — сопряженные базисы?

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j \end{cases}$$

11 Как может быть задан базис сопряженного пространства?

Лемма 2.2. *Набор линейных форм $\{f^j\}_{j=1}^n$ является базисом в сопряженном пространстве V^*.*

Рассмотрим некоторый базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в пространстве V. Введем набор линейных форм $\{f^j\}_{j=1}^n$ следующим образом:

$$f^j(v) = v_j,$$

которая возвращает j-ю координату вектора $v \in V$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

12 Как преобразуются коэффициенты линейной формы при преобразованиях базиса?

Теорема 2.3. *Преобразование координат формы в V^* при переходе от базиса $\{f^i\}_{i=1}^n$ к базису $\{\widetilde{f}\}_{l=1}^n$ имеет вид*

$$\widetilde{\eta}_l = \sum_{i=1}^n \tau_l^i \eta_i \qquad (\widetilde{\eta}^1, \widetilde{\eta}^2, \ldots, \widetilde{\eta}^n) = (\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n) \cdot T$$

13 Как преобразуются базисные линейные формы при преобразованиях базиса?

Теорема 2.2. *Пусть $\{f^i\}_{i=1}^n$ и $\{\widetilde{f}^l\}_{l=1}^n$ – базисы V^*, сопряженные соответственно базисам $\{e^j\}_{j=1}^n$ и $\{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n$. Тогда*

$$\widetilde{f}^l = \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i$$

где $(\sigma_i^l) = S$ – элементы обратной матрицы перехода, полагая $(\tau_k^j) = T$ – матрица перехода из $\{e^j\}_{j=1}^n$ в $\{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n$.

14 Какое пространство называют вторым сопряженным?

Определение 3.1. Вторым сопряженным пространством называют $V^{**} = (V^*)^*$.

Элементами второго сопряженного пространства являются функции, также обладающие линейностью, от линейных форм.

15 Как может быть установлен изоморфизм между пространством V и вторым сопряженным к нему?

Теорема 3.1. *Между пространствами V и V^{**} можно установить изоморфизм без использования базиса (канонический изоморфизм).*

Доказательство. Рассмотрим элементы второго сопряженного пространства $\widehat{v}, \widehat{u} \in V^{**}$:

$$\widehat{v} : V^* \to \mathbb{K}, \qquad \widehat{v}(f) \in \mathbb{K}$$
$$\widehat{v}(f+g) = \widehat{v}(f) + \widehat{v}(g), \qquad \widehat{v}(\alpha f) = \alpha\widehat{v}(f)$$
$$(\widehat{v} + \widehat{u})(f) = \widehat{v}(f) + \widehat{u}(f), \qquad (\alpha\widehat{v})(f) = \alpha\widehat{v}(f)$$

Канонический изоморфизм устанавливается отношением

$$\widehat{x} \leftrightarrow x : \qquad \widehat{v}(f) = f(v) \qquad \forall f \in V^*$$

16 Какой изоморфизм называют каноническим?

Теорема 3.1. *Между пространствами V и V^{**} можно установить изоморфизм без использования базиса (канонический изоморфизм).*

17 Какое отображение называется билинейной формой?

Определение 1.1. **Билинейной формой** на линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ называется такая функция $b : V \times V \to \mathbb{K}$, что $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ выполняется:

(а) Линейность по первому аргументу:

$$b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 b(x_1, y) + \lambda_2 b(x_2, y)$$

(б) Линейность по второму аргументу:

$$b(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 b(x, y_1) + \lambda_2 b(x, y_2)$$

18 Как при помощи линейных форм может быть задана билинейная форма?

Замечание 1.1. Билинейная форма при фиксировании одного из аргументов есть ничто иное как линейная форма согласно определению, которое было введено ранее. Отсюда сразу следует первый пример.

Пример 1.1. Пусть $f, g \in V^*$ – линейные формы в пространстве $V(\mathbb{K})$. Билинейная форма может быть задана как

$$b : V \times V \to \mathbb{K}, \qquad b(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

19 Запишите координатное представление любой билинейной формы

Пример 1.3. Пусть $V = \mathbb{K}^n$ – арифметическое пространство. Билинейную форму можно задать как

$$b(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\xi^i\eta^j,$$

где $x = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)^T \in V$ и $y = (\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n)^T \in V$.

20 Какая билинейная форма называется симметричной?

Определение 1.2. Билинейная форма $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ называется **симметричной**, если выполняется $b(x,y) = b(y,x)$.

21 Какая билинейная форма называется антисимметричной?

Определение 1.3. Билинейная форма $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ называется **антисимметричной**, если выполняется $b(x,y) = -b(y,x)$.

22 Как может быть найдена симметричная компонента билинейной формы?

Из каждой билинейной формы может быть изготовлена симметричная форма:

$$b^S(x,y) = \frac{1}{2}(b(x,y) + b(y,x)), \qquad b^S \in \mathrm{Bil}^S_{\mathbb{K}}(V)$$

23 Как может быть найдена антисимметричная компонента билинейной формы?

Аналогично может быть изготовлена антисимметричная форма:

$$b^{AS}(x,y) = \frac{1}{2}(b(x,y) - b(y,x)), \qquad b^{AS} \in \mathrm{Bil}^{AS}_{\mathbb{K}}(V)$$

24 Как восстановить билинейную форму, если известны ее симметрическая и антисимметричная компонента?

Доказательство. Убеждаемся непосредственной проверкой:

$$b^S(x,y) + b^{AS}(x,y) = \frac{1}{2}(b(x,y) + b(y,x)) + \frac{1}{2}(b(x,y) - b(y,x)) = b(x,y)$$

25 Какая билинейная форма является симметричной и антисимметричной одновременно?

Таким образом, единственная билинейная форма, которая одновременно симметрична и антисимметрична, — это **нулевая форма**:

$$B(x,y) = 0 \quad \text{для всех } x, y.$$

26 Как могут быть найдены коэффициенты билинейной формы?

Определение 2.1. **Коэффициентами** β_{ij} билинейной формы $b(x,y)$ называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$b(e_i, e_j) = \beta_{ij}$$

27 Как устанавливается изоморфизм между пространством билинейных форм и пространством матриц?

Лемма 2.1. *Пространство билинейных форм* $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ *изоморфно пространству квадратных матриц* $M_n(\mathbb{K})$.

Доказательство. Изоморфизм устанавливается следующим образом:

$$b \leftrightarrow B \qquad b' \leftrightarrow B'$$
$$b + b' \leftrightarrow B + B'$$
$$\lambda b \leftrightarrow \lambda B$$

28 Какое свойство определяет матрицу, соответствующую симметричной форме? $b^S \leftrightarrow B_S \qquad B_S = B_S^T$ **Она крч тоже симметрична**

29 Какое свойство определяет матрицу, соответствующую антисимметричной форме? $b^{AS} \leftrightarrow B_{AS} \qquad B_{AS} = -B_{AS}^T$ **ну а эта антисимм**

30 Запишите закон преобразования матрицы билинейной формы при преобразовании базиса?

Теорема 2.2. *Матрицы* B *и* B' *билинейной формы* $b(x, y)$, *заданные в базисах* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *и* $\{e'_j\}_{j=1}^n$ *связаны соотношением*

$$B' = C^T B C,$$

где $C = (c_j^i)$ *- матрица перехода от базиса* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *к базису* $\{e'_j\}_{j=1}^n$.

31 Какое отображение называется квадратичной формой?

Определение 3.1. Квадратичной формой на линейном пространстве V называется отображение $q(v)$, построенное из билинейной формы $b(x, y)$ следующим образом:

$$q : V \to \mathbb{K}, \qquad q(v) = b(v, v), \qquad \forall x \in V$$

32 Что такое однородный полином степени два и как он связан с квадратичной формой?

Лемма 3.1. *Квадратичная форма является однородным полиномом степени 2 от координат вектора.*

Доказательство. Справедливы следующие рассуждения:

$$q(\lambda v) = b(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 b(v, v) = \lambda^2 q(v)$$

33 Как выглядит квадратичная форма, построенная по антисимметричной билинейной форме?

Замечание 3.3. Любой антисимметричной билинейной форме соответствует нулевая квадратичная форма.

34 Как определяется матрица квадратичной формы?

Замечание 3.4. Полагая, что билинейная форма описывается матрицей с коэффициентами β_{ij}, квадратичную форму можно также представить в виде:

$$q(v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}v^i v^j = \sum_{i=1}^{n}\beta_{ii}(v^i)^2 + 2\sum_{i<j}\beta_{ij}v^i v^j,$$

где v^i – i-я координата вектора v в выбранном базисе.

35 Дайте определение полилинейной формы.

Определение 1.1. Полилинейной формой на линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ назовем отображение вида

$$\mathcal{A} : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{q} \to \mathbb{K}$$

обладающее линейностью по каждому из аргументов

$$\mathcal{A}(x_1, \ldots, \alpha x_i' + \beta x_i'', \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^q) =$$
$$= \alpha\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^q) + \beta\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^q),$$

где $x_i \in V$ и $\varphi^j \in V^*$.

36 Что такое валентность полилинейной формы? Поясните обозначения.

Определение 1.2. Валентностью полилинейной формы называют пару чисел (p, q), определяющих количество векторов и ковекторов (линейных форм), являющихся аргументами данного отображения.

37 Какой валентностью обладает скалярное произведение векторов как полилинейная форма?

Таким образом, билинейная форма — это ПЛФ валентности $(2, 0)$. Примером билинейной формы служит скалярное произведение двух геометрических векторов

$$g(x_1, x_2) = (x_1, x_2),$$

а такж все другие примеры билинейных форм, которые рассматривались ранее.

38 Какой валентностью обладает смешанное произведение векторов как полилинейная форма? (3,0)

39 Как определяется сумма полилинейных форм?

Определение 2.3. Отображение $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ будем называть суммой полилинейных форм $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, если

$$\mathcal{C}(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) =$$
$$= \mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) + \mathcal{B}(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \ldots, x_p \in V$ и $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q \in V^*$.

40 Как определяется произведение полилинейной формы на скаляр?

Определение 2.4. Отображение $\lambda\mathcal{A}$ будем называть произведением полилинейной формы $\mathcal{A}$ на скаляр λ, если

$$(\lambda\mathcal{A})(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \ldots, x_p \in V$ и $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q \in V^*$.

41 Как определяется произведение полилинейных форм?

2.2. Произведение ПЛФ

Определение 2.5. Произведением полилинейных форм $\mathcal{A} \in \Omega^{p_1}_{q_1}$ и $\mathcal{B} \in \Omega^{p_2}_{q_2}$ называют отображение $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ определяемое как

$$\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_{p_1}; \varphi^1, \ldots, \varphi^{q_1}) \cdot \mathcal{B}(x_{p_1+1}, \ldots x_{p_1+p_2}; \varphi^{q_1+1}, \ldots \varphi^{q_1+q_2}) =$$
$$= \mathcal{C}(x_1, \ldots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \ldots x_{p_1+p_2}; \varphi^1, \ldots, \varphi^{q_1}, \varphi^{q_1+1}, \ldots \varphi^{q_1+q_2})$$

42 Какой алгебраической структурой обладает множество полилинейных форм вместе с операцией сложения? ?Абелеву группу?

43 Какой алгебраической структурой обладает множество полилинейных форм вместе с операциями сложения и умножения на скаляр? Линейное пр-во

44 Обладает ли операция умножения полилинейных форм свойством коммутативности? Поясните ответ. Нет

Рассмотрим две полилинейные формы T_1 и T_2, действующие на векторы v и w соответственно:

$$T_1(v) = f(v), \quad T_2(w) = g(w),$$

где f и g — линейные функционалы (ковекторы).

Тогда:

$$(T_1 \otimes T_2)(v, w) = f(v) \cdot g(w),$$

$$(T_2 \otimes T_1)(v, w) = g(v) \cdot f(w).$$

45 Как может быть найден тензор полилинейной формы?

Определение 3.1. **Тензором** полилинейной формы $\mathcal{C}$ валентности (p, q) называется набор из n^{p+q} скаляров, определяемых как действие полилинейной формы на всевозможных наборах базисных векторов.

$$c^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \mathcal{C}(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \ldots, f^{j_q}),$$

где индексы $i_1, i_2, \ldots, i_p$ и $j_1, j_2, \ldots, j_q$ принимают значения $1, .., n$, где $n = \dim V$ — это размерность пространства V.

46 В чем заключается смысл немого суммирования?

Если в выражении встречается один и тот же индекс **дважды** (один раз в верхнем положении, другой раз в нижнем), то по этому индексу подразумевается суммирование. Например:

$$a^i b_i \quad \text{означает} \quad \sum_{i=1}^{n} a^i b_i.$$

Прежде чем перейдем к дальнейшим рассуждениям, отметим следующий факт. Наличие большого количества индексов в случае анализа линейных объектов нередко приводит к большому количеству суммирований как в теоретических выкладках, так и в практических приложениях тензоров. По этой причине вводится так называемое **правило суммирования Эйнштейна**, или соглашение о немом суммировании. В контексте данной темы договоримся о следующем:

(а) Если в одночлене присутствует одинаковый верхний и нижний индекс, то подразумевается суммирование по нему:

$$a^i b_i = \sum_i a^i b_i$$

(б) Индекс, по которому происходит суммирование, называют немым в силу того, что его обозначение не принципиально, т.е.

$$a^i b_i = a^j b_j = a^k b_k$$

(в) Необходимо соблюдение баланса индексов. Если индекс не является немым, то в левой и правой частях равенства должны присутствовать одни и те же индексы, а также должен быть неизменным их порядок, т.е.

$$a_{ik} b^{kl} = c_i^l$$

47 Для какой цели служит тензор полилинейной формы?

Замечание 3.1. Таким образом мы получаем, что компоненты тензора однозначно задают его в фиксированной паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f^j\}_{j=1}^n$. Данное свойство аналогично рассмотренным ранее:

(а) Разложению линейной формы φ на коэффициенты $\{\varphi_i\}$ в базисе сопряженного пространства V^*;

(б) Матрице B билинейной формы $b(x, y)$, где коэффициент β_{ij} с парой индексов (ij) соответствует значению билинейной формы на базисных векторах e_i и e_j.

48 Что является тензором билинейной формы?

Тензором билинейной формы является **матрица коэффициентов** этой формы. Если $B\colon V \times V \to \mathbb{K}$ — билинейная форма на векторном пространстве V над полем $\mathbb{K}$, то в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ пространства V эта форма задаётся матрицей $A = (a_{ij})$, где:

$$a_{ij} = B(e_i, e_j).$$

Эта матрица A и является **тензором билинейной формы** B.

49 Что является тензором линейной формы?

Тензором линейной формы является **ковектор**. Если $f\colon V \to \mathbb{K}$ — линейная форма (линейный функционал) на векторном пространстве V, то в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ пространства V эта форма задаётся набором коэффициентов $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, где:

$$f_i = f(e_i).$$

Этот набор коэффициентов $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ можно интерпретировать как **ковектор** (элемент сопряжённого пространства V^*), который и является **тензором линейной формы** f.

50 Как при помощи немого суммирования записать закон преобразования координат вектора?

При этом для координат векторов $x = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и коэффициентов линейных форм $f = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ вводятся аналогичные преобразования:

$$\xi'^k = \sigma_i^k \xi^i \qquad \eta'_l = \eta_j \tau_j^l,$$

51 Как при помощи немого суммирования записать закон преобразования коэффициентов линейных форм?

При этом для координат векторов $x = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и коэффициентов линейных форм $f = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ вводятся аналогичные преобразования:

$$\xi'^k = \sigma_i^k \xi^i \qquad \eta'_l = \eta_j \tau_j^l,$$

52 Запишите закон преобразования компонент тензора полилинейной формы при преобразованиях базиса?

Теорема 1.1. *Тензор полилинейной формы при замене базиса преобразуется по закону:*

$$a'^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p} = \tau^{i_1}_{k_1} \tau^{i_2}_{k_2} \ldots \tau^{i_p}_{k_p} \sigma^{l_1}_{j_1} \sigma^{l_2}_{j_2} \ldots \sigma^{l_q}_{j_q} a^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$$

При этом между парами базисов из соответствующих пространств можно определить преобразование при помощи матрицы перехода $T = \{\tau_k^i\}$ и обратной к ней $S = \{\sigma_j^l\}$:

53 Как выглядит закон преобразования тензора типа (2, 0)?

Тензор типа $(2, 0)$ имеет два контравариантных индекса. Пусть T^{ij} — компоненты тензора в старом базисе, а T'^{kl} — компоненты в новом базисе. Тогда закон преобразования выглядит следующим образом:

$$T'^{kl} = C_i^k C_j^l T^{ij}.$$

Здесь:

- C_i^k и C_j^l — элементы матрицы перехода от старого базиса к новому,
- Индексы i и j суммируются (немое суммирование).

54 Как выглядит закон преобразования тензора типа (1, 1)?

54. Закон преобразования тензора типа $(1, 1)$

Тензор типа $(1, 1)$ имеет один контравариантный и один ковариантный индекс. Пусть T_j^i — компоненты тензора в старом базисе, а $T_l'^k$ — компоненты в новом базисе. Тогда закон преобразования выглядит следующим образом:

$$T_l'^k = C_i^k D_l^j T_j^i.$$

Здесь:

- C_i^k — элементы матрицы перехода от старого базиса к новому,
- D_l^j — элементы обратной матрицы перехода (от нового базиса к старому),
- Индексы i и j суммируются (немое суммирование).

55 Как выглядит закон преобразования тензора типа (0, 2)?

55. Закон преобразования тензора типа $(0, 2)$

Тензор типа $(0, 2)$ имеет два ковариантных индекса. Пусть T_{ij} — компоненты тензора в старом базисе, а T'_{kl} — компоненты в новом базисе. Тогда закон преобразования выглядит следующим образом:

$$T'_{kl} = D_k^i D_l^j T_{ij}.$$

Здесь:

- D_k^i и D_l^j — элементы обратной матрицы перехода (от нового базиса к старому),
- Индексы i и j суммируются (немое суммирование).

56 Какой валентностью будет обладать полилинейная форма валентности (p, q) после операции свертки?

После операции **свертки** полилинейная форма валентности (p, q) будет обладать валентностью $(p-1, q-1)$. Давайте разберём это подробнее.

57 Как определяется операция свертки тензора?

Пусть T — тензор типа (p, q), то есть с p контравариантными индексами и q ковариантными индексами. Его компоненты записываются как:

$$T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}.$$

Свертка выполняется по одному контравариантному индексу (например, i_k) и одному ковариантному индексу (например, j_l). Результатом является новый тензор T' типа $(p-1, q-1)$, компоненты которого определяются как:

$$T'^{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_p}_{j_1 \dots j_{l-1} j_{l+1} \dots j_q} = T^{i_1 \dots i_{k-1} m i_{k+1} \dots i_p}_{j_1 \dots j_{l-1} m j_{l+1} \dots j_q}.$$

58 Дайте определение символа Кронекера.

Определение 3.1. Символ Кронекера δ_{ij} — это дважды ковариантный тензор типа $(2, 0)$, компоненты которого задаются как:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

59 Каким свойством обладает символ Кронекера?

Замечание 3.1. Символ Кронекера является симметричным в том смысле, что для него выполняется свойство:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

60 Как записывается скалярное произведение при помощи операции свертки?

С учетом этого свойства символ Кронекера оказывается полезным при записи скалярного произведения в ДПСК:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^j g_{ij} = a^i b_i = \sum_{i=1}^{n} a^i b_i.$$

61 Дайте определение символа Леви-Чивита.

Определение 3.2. Символ Леви-Чевиты ε_{ijk} — это трижды ковариантный тензор типа $(3, 0)$, компоненты которого в ДПСК задаются как:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — чётная перестановка } (1, 2, 3), \\ -1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — нечётная перестановка}, \\ 0, & \text{иначе (если есть повторяющиеся индексы)}. \end{cases}$$

62 Каким свойством обладает символ Леви-Чивита?

Замечание 3.3. Символ Леви-Чивиты обладает свойством:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj},$$

которое называют антисимметричностью тензора. Это свойство напрямую следует из определения.

63 Как записывается векторное произведение при помощи символа Леви-Чивита?

Перейдем к применению этого тензора в геометрии. Компоненты векторного произведения $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ в ДПСК выражаются через символ Леви-Чевиты:

$$c_i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k.$$

В координатной форме:

$$\mathbf{c} = \left(\varepsilon_{1jk} a^j b^k, \varepsilon_{2jk} a^j b^k, \varepsilon_{3jk} a^j b^k \right).$$

Действительно, векторное произведение в ДПСК в полной форме может быть записано следующим образом

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^2 b^3 - a^3 b^2)\mathbf{i} + (a^3 b^1 - a^1 b^3)\mathbf{j} + (a^3 b^2 - a^2 b^3)\mathbf{k}$$

64 Запишите способ нахождения смешанного произведения при помощи символа ЛевиЧивита.

Смешанное произведение трёх векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в $\mathbb{R}^3$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a^i) \cdot (\varepsilon_{ijk} b^j c^k) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k.$$

65 Как может быть найден определитель квадратной матрицы при помощи символа Леви-Чивита?

Для квадратной матрицы $A = (A_{ij})$ размера $n \times n$ её определитель выражается как:

$$\det A = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_2^{i_2}$$

Учтем, что в силу соглашения Эйнштейна здесь производится суммирование по всем индексам $i_1, i_2, \ldots, i_n$, а сам символ Леви-Чивиты принимает значение только $+1$ или -1. Это приводит нас к определителю матрицы n-го порядка

$$\det A = \sum_{\sigma(1,\ldots,n)} (-1)^{[\sigma]} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_2^{i_2}$$

В данном случае, под σ подразумевается преобразование переупорядочивания индексов.

66 Дайте определение линейному отображению между произвольными пространствами.

Определение 1.1. Отображение $\varphi : V \to W$ линейного пространства V в линейное пространство W называется линейным, если $\forall x, x_1, x_2 \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ выполяются следующие свойства

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \qquad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$$

Замечание 1.1. Множество линейных отображений действующих их $V(\mathbb{K})$ в $W(\mathbb{K})$ будем обозначать $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

67 Что называется линейным отображением растяжения?

(в) Растяжение:

$$\varphi\colon V \to V \qquad \varphi x = \lambda x, \qquad \forall x \in V$$

68 Запишите матрицу тождественного отображения.

(б) Тождественное отображение

$$\mathcal{I} \to E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

69 Какой вид имеет матрица проектирования на подпространство параллельно его прямому дополнению?

(в) Матрица проектора на V_1, если $V = V_1 \oplus V_2$, найденная в базисе, согласованном с обоими подпространствами

$$\mathcal{P}_{V_1}^{||V_2} \to P_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}$$

так как

$$\mathcal{P}_{V_1}^{||V_2} x = x, \qquad \mathcal{P}_{V_1}^{||V_2} x = 0, \qquad \forall x \in V_1$$

70 Какой вид имеет матрица оператора растяжения на λ ∈ K

Матрица оператора растяжения зависит от выбора базиса в пространстве V. Рассмотрим два случая:

а) В стандартном базисе:

Если $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — стандартный базис пространства V, то матрица оператора растяжения T имеет вид:

$$T = \lambda I_n,$$

где:

- I_n — единичная матрица размера $n \times n$,
- λ — скаляр, на который умножаются все векторы.

Например, в трёхмерном пространстве ($n = 3$) матрица оператора растяжения выглядит так:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

71 Как может быть найдена матрица линейного отображения?

3. Действие отображения на базисные векторы:

Для каждого базисного вектора e_j из V найдём его образ $T(e_j)$ в пространстве W. Затем выразим $T(e_j)$ через базис $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$:

$$T(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \cdots + a_{mj} f_m.$$

Здесь a_{ij} — коэффициенты разложения $T(e_j)$ по базису $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$.

---

4. Построение матрицы:

Матрица линейного отображения T в выбранных базисах $\{e_j\}$ и $\{f_i\}$ строится следующим образом:

- Столбцы матрицы — это координаты образов базисных векторов $T(e_j)$ в базисе $\{f_i\}$.
- То есть матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где:

- a_{ij} — коэффициент при f_i в разложении $T(e_j)$,
- $n = \dim V, m = \dim W$.

72 Покажите как найти координаты образа вектора относительно линейного отображения, если оно задано матрицей.

1. Дано:

- Линейное отображение $T: V \to W$, заданное матрицей A размера $m \times n$.
- Вектор $v \in V$ с координатами $v = (v^1, v^2, \ldots, v^n)$ в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ пространства V.

---

2. Цель:

Найти координаты образа $T(v)$ в базисе $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ пространства W.

---

3. Шаги:

a) Записать вектор v в виде столбца:

Координаты вектора v записываются в виде столбца:

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}.$$

b) Умножить матрицу A на вектор v:

Образ $T(v)$ вычисляется как произведение матрицы A на вектор v:

$$T(v) = A \cdot v.$$

Результатом будет вектор-столбец размера $m \times 1$, координаты которого являются координатами образа $T(v)$ в базисе $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$.

73 Какой алгебраической структурой наделено множество линейных отображений с введенными операциями сложения и умножения на скаляр?

Теорема 3.1. *Множество всех линейных отображений из пространства V в пространство W является линейным пространством над полем $\mathbb{K}$.*

74 Какому матричному пространству изоморфно множество HomK(X,Y). Поясните введенные обозначения.

Замечание 3.1. В силу того, что между отображением и его матрицей в фиксированной паре базисов пространств V и W устанавливается соответствие, которое к тому же сохраняет свойства линейности, можно утверждать, что пространство $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ изоморфно матричному пространству $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y) \simeq M_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Множество $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ изоморфно **матричному пространству** $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, где $m = \dim Y$, $n = \dim X$, а $\mathbb{K}$ — поле, над которым определены векторные пространства X и Y. Давайте разберём это подробнее.

75 Что такое композиция линейных отображений?

Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ и $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W)$ — линейные отображения между соответствующими пространствами.

Определение 3.4. Отображение $\chi : V \to W$ называется композицией линейных отображений ψ и φ, если

$$\forall x \in V : \qquad \chi(x) = (\psi \circ \varphi)(x) = \varphi(\varphi(x))$$

76 Как найти матрицу линейного отображения, если оно задано как композиция отображений φ и ψ?

Следствие 3.1.1. *Матрица композиции линейных отображений $\chi = \psi \circ \varphi$ определяется произведением матриц B_ψ и A_φ.*

$$C_\chi = B_\psi \cdot A_\varphi$$

Следствие 3.1.1 утверждает, что матрица композиции двух линейных отображений равна произведению их матриц. Давайте разберём это подробнее.

---

1. Линейные отображения и их композиция:

Пусть:

- $\varphi : U \to V$ — линейное отображение из пространства U в пространство V,
- $\psi : V \to W$ — линейное отображение из пространства V в пространство W.

Тогда **композиция** этих отображений $\chi = \psi \circ \varphi$ — это линейное отображение из U в W, определённое как:

$$\chi(u) = \psi(\varphi(u)) \quad \text{для всех } u \in U.$$

---

2. Матрицы линейных отображений:

- Матрица A_φ соответствует линейному отображению φ в выбранных базисах пространств U и
.
- Матрица B_ψ соответствует линейному отображению ψ в выбранных базисах пространств V и W.

---

3. Матрица композиции:

Матрица C_χ композиции $\chi = \psi \circ \varphi$ определяется как произведение матриц B_ψ и A_φ:

$$C_\chi = B_\psi \cdot A_\varphi.$$

77 Запишите закон преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса.

Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(V, W)$, а в пространствах заданы базисы:

$$V: \quad \{e_i\}_{i=1}^n, \quad \{e'_j\}_{j=1}^n$$
$$W: \quad \{g_k\}_{k=1}^m, \quad \{g'_l\}_{l=1}^m$$

Причем известно, что $T = \{\tau_j^i\}$ — матрица перехода из базиса $\{e\}$ в базис $\{e'\}$, а матрица $S = \{\sigma_l^k\}$ — матрица перехода из базиса $\{g\}$ в базис $\{g'\}$.

Теорема 4.1. *Матрица оператора при замене базисов преобразуется как*

$$A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi T$$