

1. Вычислить данные криволинейные интегралы:

- 1) $\int_{L_{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, где L_{AB} — дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(-1, 1)$ до точки $B(1, 1)$
- 2) $\int_{L_{AB}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, где L_{AB} — дуга астроиды $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$ от точки $A(2, 0)$ до точки $B(0, 2)$.
- 3) $\int_{L_{OA}} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$, где L_{OA} — дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.
- 4) $\oint_L (x + 2y)dx + (x - y)dy$, где L — окружность $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$ при положительном направлении обхода
- 5) $\oint_L (x^2y - x)dx + (y^2x - 2y)dy$, где L — дуга эллипса $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$ при положительном направлении обхода.
- 6) $\oint_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2ydy$, где L_{AB} — дуга эллипса $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(0, 2)$.
- 7) $\int_{L_{OBA}} 2xydx - x^2dy$, где L_{OBA} — ломаная OBA : $O(0, 0)$, $B(2, 0)$, $A(2, 1)$.
- 8) $\int_{L_{AB}} (x^2 - y^2)dx + xydy$, где L_{AB} — отрезок прямой AB , $A(1, 1)$, $B(3, 4)$.
- 9) $\int_{L_{AB}} \cos ydx - \sin xdy$, где L_{AB} — отрезок прямой AB , $A(2\pi, -2\pi)$, $B(-2\pi, 2\pi)$.
- 10) $\int_{L_{AB}} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, где L_{AB} — отрезок AB : $A(1, 2)$, $B(3, 6)$.
- 11) $\int_{L_{AB}} xydx + (y - x)dy$, где L_{AB} — дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.
- 12) $\int_{L_{ABC}} (x^2 + y^2)dx + (x + y^2)dy$, где L_{ABC} — ломаная ABC : $A(1, 2)$, $B(3, 2)$, $C(3, 5)$.
- 13) $\int_{L_{OB}} xy^2dx + yz^2dy - x^2zdz$, где L_{OB} — отрезок прямой OB : $O(0, 0, 0)$, $B(-2, 4, 5)$.
- 14) $\int_{L_{OA}} ydx + xdy$, где L_{OA} — дуга окружности $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $O(R, 0)$, $A(0, R)$.
- 15) $\int_{L_{OA}} xydx + (y - x)dy$, где L_{OA} — дуга параболы $y^2 = x$ от $O(0, 0)$ до $A(1, 1)$.
- 16) $\int_{L_{AB}} xdx + ydy + (x - y + 1)dz$, где L_{AB} — отрезок прямой AB : $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$.

- 17) $\int_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2ydy$, где L_{AB} — дуга параболы $y^2 = 4 - 4x$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(0, 2)$.
- 18) $\int_{L_{OB}} xydx + (y - x)dy$, где L_{OB} — дуга параболы $y = x^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.
- 19) $\int_{L_{OB}} (xy - y^2)dx + xdy$, где L_{OB} — дуга параболы $y = x^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.
- 20) $\int_{L_{AB}} xdy - ydx$, где L_{AB} — дуга астроиды $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ от точки $A(2, 0)$ до точки $B(0, 2)$.
- 21) $\int_{L_{AB}} (xy - x)dx + \frac{1}{2}x^2dy$, где L_{AB} — дуга параболы $y^2 = 4x$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 2)$.
- 22) $\int_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2ydy$, где L_{AB} — отрезок прямой AB : $A(1, 0)$, $B(0, 2)$.
- 23) $\int_{L_{AB}} 2xydx + y^2dy + z^2dz$, где L_{AB} — дуга одного витка винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 0, 4\pi)$.
- 24) $\oint_{L_{AB}} ydx - xdy$, где L_{AB} — дуга линии $y = \ln x$ от точки $A(1, 0)$ до $B(e, 1)$.
- 25) $\oint_L ydx - xdy$, где L — дуга эллипса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, «пробегаемая» в положительном направлении обхода.
- 26) $\int_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy$, где L_{OA} — дуга параболы $y = x^2/4$ от $O(0, 0)$ до $A(2, 1)$.
- 27) $\int_{L_{AB}} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, где L_{AB} — ломаная линия $y = |x|$ от точки $A(-1, 1)$ до точки $B(2, 2)$.
- 28) $\int_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy + zdz$, где L_{OA} — отрезок прямой, соединяющий точки $O(0, 0, 0)$ и $A(2, 1, -1)$.
- 29) $\oint_L xdy - ydx$, где L — контур треугольника с вершинами $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ при положительном направлении обхода.
- 30) $\int_{L_{ACB}} (x^2 + y)dx + (x + y^2)dy$, где L_{ACB} — ломаная ACB : $A(2, 0)$, $C(5, 0)$, $B(5, 3)$.
-

2. Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x, y)$. Найти функцию $u(x, y)$.
- 1) $(2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$
 - 2) $\left(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2} - 3\right)dx + \left(\frac{2x^2y}{1+x^2y^2} - 5\right)dy$

- 3) $-\left(\frac{1}{2}\cos 2y + y \sin 2x\right)dx + (x \sin 2y + \cos^2 x + 1)dy$
- 4) $(y^2 e^{xy^2} + 3)dx + (2xye^{xy^2} - 1)dy$
- 5) $\left(\frac{1}{x+y} + \cos x \cos y - 3x^2\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} - \sin x \sin y + 4y\right)dy$
- 6) $\left(\frac{y}{x} + \ln y + 2x\right)dx + \left(\ln x + \frac{x}{y} + 1\right)dy$
- 7) $(e^{x+y} - \cos x)dx + (e^{x+y} + \sin y)dy$
- 8) $\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 2x\right)dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 6y\right)ea$
- 9) $(e^{xy} + xye^{xy} + 2)dx + (x^2e^{xy} + 1)dy$
- 10) $(ye^{xy} + y^2)dx + (xe^{xy} + 2xy)dy$
- 11) $(y \cos(xy) + 2x - 3y)dx + (x \cos(xy) - 3x + 4y)dy$
- 12) $(y \sin(x+y) + xy \cos(x+y) - 9x^2)dx + (x \sin(x+y) + xy \cos(x+y) + 2y)dy$
- 13) $(5y + \cos x + 6xy^2)dx + (5x + 6x^2y)dy$
- 14) $(y^2 e^{xy} - 3)dx + e^{xy}(1 + xy)dy$
- 15) $(1 + \cos(xy))ydx + (1 + \cos(xy))xdy$
- 16) $(y - \sin x)dx + (x - 2y \cos y^2)dy$
- 17) $(\sin 2x - \frac{1}{x^2y})dx - \frac{1}{xy^2}dy$
- 18) $\frac{x+y}{xy}dx + \frac{y-x}{y^2}dy$
- 19) $(20x^3 - 21x^2y + 2y)dx + (3 + 2x - 7x^3)dy$
- 20) $(ye^{xy} - 2 \sin x)dx + (xe^{xy} + \cos y)dy$
- 21) $y(e^{xy} + 5)dx + x(e^{xy} + 5)dy$
- 22) $\left(x - \frac{y}{x^2-y^2}\right)dx + \left(\frac{x}{x^2-y^2} - y\right)dy$
- 23) $\frac{x \ln y + y}{x}dx + \frac{y \ln x + x}{y}dy$
- 24) $e^{x-y}(1 + x + y)dx + e^{x-y}(1 - x - y)dy$
- 25) $(3x^2 - 2xy + y)dx + (x - x^2 - 3y^2 - 4y)dy$
- 26) $(2xe^{x^2-y^2} - \sin x)dz + (\sin y - 2ye^{x^2-y^2})dy$
- 27) $\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + x^2\right)dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} + y\right)dy$
- 28) $\frac{1-y}{x^2y}dx + \frac{1-2x}{xy^2}dy$
- 29) $\left(\frac{1}{y-1} - \frac{y}{(x-1)^2} - 2\right)dx + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{(y-1)^2} + 2y\right)dy$
- 30) $(3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy$
-

3. Решите следующие задачи:

- 1) Вычислить длину дуги цепной линии $y = (e^x + e^{-x})/2$, $x \in [0; 1]$
- 2) Вычислить моменты инерции относительно осей координат отрезка однородной прямой $2x + y = 1$, лежащего между этими осями.
- 3) Найти координаты центра масс четверти однородной окружности $x^2 + y^2 = a^2$, лежащей в первом квадранте.
- 4) Вычислить массу дуги кривой $y = \ln x$, заключенной между точками с абсциссами $x = \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{8}$, если плотность дуги в каждой точке равна квадрату абсциссы этой точки.
- 5) Вычислить момент инерции относительно оси Oy дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, заключенной между точками с абсциссами $x = 0$ и $x = \frac{4}{3}$.
- 6) Вычислить момент инерции относительно начала координат контура квадрата со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm a$. Плотность квадрата считать постоянной.
- 7) Вычислить длину дуги кривой $x = 2 - \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^6}{6}$, ограниченной точками пересечения ее с осями координат.
- 8) Вычислить координаты центра масс однородной полуокружности $x^2 + y^2 = 4$, симметричной относительно оси Ox .
- 9) Вычислить координаты центра масс однородной дуги одной арки циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.
- 10) Вычислить момент инерции относительно начала координат отрезка прямой, заключенного между точками $A(2, 0)$ и $B(0, 1)$, если линейная плотность в каждой его точке равна 1.
- 11) Вычислить координаты центра масс однородного контура сферического треугольника $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
- 12) Вычислить статические моменты относительно координатных осей дуги астроиды $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$, расположенной в первом квадранте.
- 13) Вычислить массу отрезка прямой $y = 2 - x$, заключенного между координатными осями, если линейная плотность в каждой его точке пропорциональна квадрату абсциссы в этой точке, а в точке $(2, 0)$ равна 4.
- 14) Найти статический момент относительно оси Oy однородной дуги первого витка лемнискаты Бернулли $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.
- 15) Найти работу силы $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$ при перемещении точечной массы m по дуге эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$
- 16) Вычислить момент инерции относительно оси Oz однородной дуги первого витка винтовой линии $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = t$.
- 17) Вычислить массу дуги кривой $\rho = 3 \sin \varphi$, где $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$, если плотность в каждой её точке пропорциональна расстоянию до полюса и при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ равна 3.

- 18) Вычислить координаты центра масс однородной дуги первого витка винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$.
- 19) Вычислить моменты инерции относительно координатных осей дуги четверти окружности $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, лежащей в первом квадранте.
- 20) Вычислить координаты центра масс дуги первого витка винтовой линии $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = t$, если линейная плотность в каждой её точке пропорциональна аппликате точки и в точке $t = \pi$ равна 1.
- 21) Вычислить массу дуги четверти эллипса $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, лежащей в первом квадранте, если линейная плотность в каждой её точке равна произведению координат этой точки.
- 22) Вычислить работу силы $\mathbf{F} = yx\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j}$ при перемещении материальной точки по прямой $y = x$ от точки $(0, 0)$ до точки $(1, 1)$.
- 23) Вычислить статический момент относительно оси Ox однородной дуги цепной линии $y = (e^x + e^{-x})/2$, где $x \in [0, \frac{1}{2}]$
- 24) Вычислить работу силы $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
- 25) Вычислить статический момент относительно оси Ox однородной дуги кардиоиды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$
- 26) Вычислить длину дуги одной арки циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$
- 27) Вычислить работу силы $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ при перемещении материальной точки вдоль окружности $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$ по ходу часовой стрелки.
- 28) Вычислить работу силы $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$ при перемещении материальной точки из начала координат в точку $(1, 1)$ по параболе $y = x^2$.
- 29) Вычислить работу силы $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ при перемещении материальной точки из начала координат в точку $(1, -3)$ по параболе $y = -3x^2$.
- 30) Вычислить моменты инерции относительно осей координат однородного отрезка прямой $y = 2x$, заключенного между точками $(1, 2)$ и $(2, 4)$.