

1. Вычислить площади фигур, ограниченных кривыми:

- 1) $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$
- 2) $(y - x)^2 + x^2 = 1$
- 3) $x^3 + y^3 = 2xy, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$
- 4) $x^2 + y^2 = 2ax, \quad x^2 + y^2 = 2bx, \quad y = 0, \quad y = x, \quad 0 < a < b$
- 5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- 6) $xy = a^2, \quad xy = b^2, \quad y = m, \quad y = n \quad (a > b; \quad m > n)$
- 7) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad \left(\sqrt{x^2 + y^2} \geq a > 0\right)$
- 8) $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$
- 9) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$
- 10) $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2), \quad a > 0$
- 11) $x^2 = 2py, \quad y^2 = 2px$
- 12) $(x - a)^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + (y - a)^2 = a^2$
- 13) $y = x^2 + 4x, \quad y = x + 4$
- 14) $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$
- 15) $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$

2. Вычислить объёмы тел, ограниченных данными поверхностями:

- 1) $z = 0, \quad z = 3 - x^2 - y^2$
- 2) $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad y = 4, \quad z + x^2 + y^2 = 1$
- 3) $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$
- 4) $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x = y^2 + z^2, \quad y + z = 1$
- 5) $az = y^2, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad z = 0$
- 6) $z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0$
- 7) $x + y + z = a, \quad 3x + y = a, \quad 3x + 2y = 2a, \quad y = 0, \quad z = 0$
- 8) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = \frac{b}{a}x, \quad y = 0, \quad z = 0$
- 9) $z = 4x^2 + 2y^2 + 1, \quad z = 1, \quad x + y = 3, \quad x = 0, \quad y = 0$
- 10) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad z = c$
- 11) $3x - 2y = 0, \quad 8x - y = 0, \quad 2x + 3y - 13 = 0, \quad 2x + 3y - 26 = 0, \\ 17x + 16y - 13z = 0, \quad z = 0$
- 12) $6x - 9y + 5z = 0, \quad 3x - 2y = 0, \quad 4x - y = 0, \quad x + y - 5 = 0, \quad z = 0$
- 13) $z = 4 - x^2, \quad y = 5, \quad y = 0, \quad z = 0$
- 14) $z = a^2 - x^2, \quad x + y = a, \quad y = 2x, \quad y = 0, \quad z = 0$
- 15) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

3. Вычислить координаты центра тяжести тела, ограниченного

- 1) параболоидом $4x = y^2 + z^2$ и плоскостью $x = 2$
- 2) конусом $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{25}$ и плоскостью $z = 5$
- 3) параболоидом $z = x^2 + y^2$, плоскостью $x + y = 5$ и координатными плоскостями
- 4) эллипсоидом $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{36} = 1$ и координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$)
- 5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$
- 6) $x^2 + y^2 = z$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

Найти момент инерции:

- 7) прямого цилиндра, высота которого равна H и радиус основания R , относительно оси, содержащей диаметр основания цилиндра
- 8) круглого конуса, высота которого равна H , а радиус основания R , относительно диаметра основания
- 9) относительно координатных плоскостей тела, ограниченного плоскостями $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5}$, $x = 0$, $y = 0$
- 10) относительно координатных плоскостей тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$)
- 11) однородного тела с массой M прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c относительно каждого из ребер и относительно своего центра тяжести

Найти массу:

- 12) прямоугольного параллелепипеда $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$, если плотность в точке (x, y, z) пропорциональна сумме координат этой точки
- 13) шара радиуса R , плотность которого пропорциональна расстоянию от центра шара, причем на расстоянии единицы от центра плотность равна двум
- 14) тела, ограниченного поверхностями $z = h$, $x^2 + y^2 = z^2$, если плотность в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки
- 15) сферического слоя между сферами $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат

4. Вычислить (тройным интегралом) объёмы тел, ограниченных поверхностями:

1) $z = x + y, \quad z = xy, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$

2) $x^2 + z^2 = a^2, \quad x + y = \pm a, \quad x - y = \pm a$

3) $az = x^2 + y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad a > 0$

4) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2az, \quad x^2 + y^2 = z^2$

5) $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad 2x - 3y - 12 = 0, \quad 2z = y^2$

6) $x^2 + y^2 = R^2, \quad z = \frac{x^3}{a^2}, \quad z = 0 \quad (z \geq 0)$

7) $z = 4 - y^2, \quad y = \frac{x^2}{2}, \quad z = 0$

8) $z = \frac{17}{2} - x^2 - y^2, \quad z = \frac{15}{2} \sqrt{x^2 + y^2}$

9) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{255}}$

10) $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 60, \quad z = 1$

11) $x^2 + y^2 = y, \quad x^2 + y^2 = 4y, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0$

12) $x^2 + y^2 = 18, \quad x = \sqrt{3y}, \quad z = \frac{10y}{11}, \quad x = 0, \quad z = 0$

13) $z = x^2 + y^2, \quad z = 2(x^2 + y^2), \quad y = x, \quad y = x^2$

14) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 3z = x^2 + y^2$

15) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z$