Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Дисциплина «Дополнительный главы математического анализа»

Домашняя работа №3

Вариант №16

Выполнил:
Решетников С.Е.

Проверил:
Богачев В.А.

Санкт-Петербург, 2025

Задание №1

Вычислить данные криволинейные интегралы:

$$\int_{L_{AB}} xdx + ydy + (x - y + 1)dz,$$

где L_{AB} — отрезок прямой AB: $A(1, 1, 1),\ B(2, 3, 4)$.

Решение:

$$B - A = (1, 2, 3)$$
$$x = 1 + t \quad y = 1 + 2t \quad z = 1 + 3t$$
$$\int_0^1 (1+t)dt + (1+2t)\cdot 2dt + (1+t-1-2t+1)\cdot 3dt = \int_0^1 t\cdot(1+2\cdot 2+3\cdot(1-2)) + 6\ dx =$$
$$= \int_0^1 t\cdot 2 + 6\ dx = 2\cdot\frac{x^2}{2} + 6x\Big|_0^1 = 1 + 6 = 7$$

Ответ: 7

Задание №2

Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x, y)$. Найти функцию $u(x, y)$.

$$(y - \sin(x))dx + (x - 2y\cos(y^2))dy$$

Решение:

$$\textit{Проверим условие Грина:}\quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
$$1 = 1 \Rightarrow \textit{условие выполняется} \Rightarrow \textit{выражение является полным дифференциалом}$$
$$\int (y - \sin(x))dx = xy + \cos(x)$$
$$u(x, y) = (y - \sin(x))dx = xy + \cos(x) + \varphi(y)$$
$$u'_y(x, y) = x + \varphi'(y) = x - 2y\cos(y^2) \Rightarrow$$
$$\varphi(y) = \int(-2y\cos(y^2))dy = -2\int(y\cos(y^2))dy = \begin{bmatrix} t = y^2 \\ dt = 2y\ dt \end{bmatrix} = -\int\cos(t)dt = -\sin(y^2) + C$$

Ответ: $u(x, y) = xy + \cos(x) - \sin(y^2) + C$

Задание №3

Вычислить момент инерции относительно оси Oz однородной дуги первого витка винтовой линии $x = 2\cos(t)$, $y = 2\sin(t)$, $z = t$.

Решение:

$$I = \int r^2 dm$$
$$\textit{В нашем случае}\quad I = \int_0^{2\pi} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 = (2\cos(t))^2 + (2\sin(t))^2 = 4\big(\cos^2(t) + \sin^2(t)\big) = 4$$

$$I = \int_0^{2\pi} 4 \cdot \sqrt{(2\sin(t))^2 + (-2\cos(t))^2 + 1^2} dt = \int_0^{2\pi} 4\sqrt{4+1}\ dt = 4\sqrt{5} \int_0^{2\pi} dt = 8\pi\sqrt{5}$$

Ответ: $8\pi\sqrt{5}$