Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Дисциплина «Дополнительный главы математического анализа»

Расчётно-графическая работа №2

Вариант №16

Выполнил:
Решетников С.Е.

Проверил:
Богачев В.А.

Санкт-Петербург, 2025

Задание №1

Плоская область D ограничена заданными линиями

$$y = \sqrt{4-x} \quad x+y=-2 \quad x = \sqrt{2y}-2$$

1. Сделайте схематический рисунок области D.
2. С помощью двойного интеграла найдите площадь области D.

Решение:

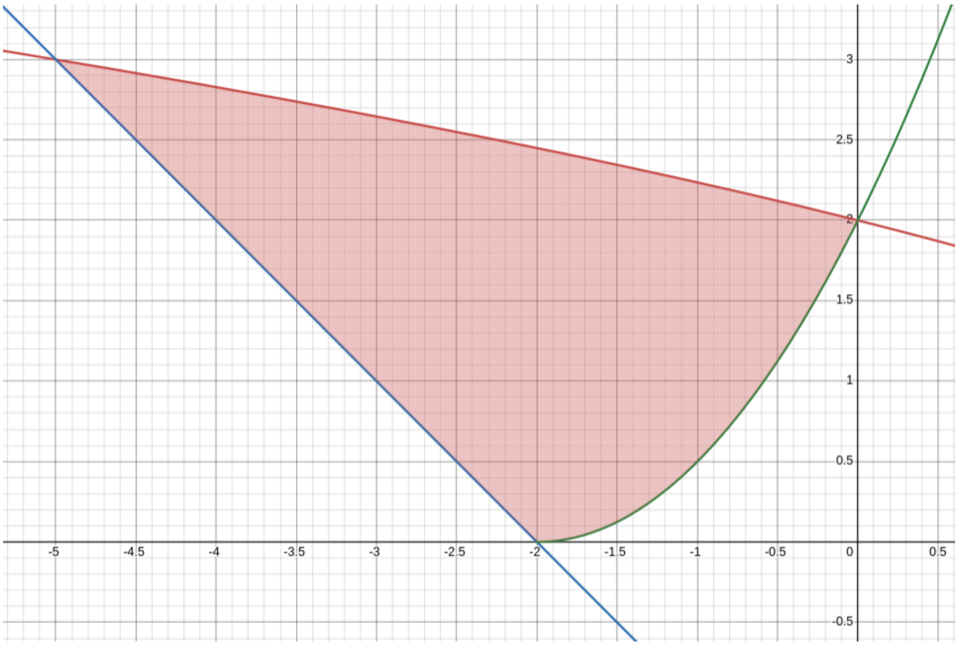

Рис. 1. Рисунок области D

Разделим на 2 подобласти - $D_1(y \le 2)$ и $D_2(y > 2)$

$$S = \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy = \int_0^2 dy \int_{-2-y}^{\sqrt{2y}-2} dx + \int_2^3 dy \int_{-2-y}^{4-y^2} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\sqrt{2y}-2\right) - (-2-y)\, dy + \int_2^3 (4-y^2) - (-2-y)\, dy =$$

$$= \int_0^2 y + \sqrt{2y}\, dy + \int_2^3 6 + y - y^2\, dy = \left(\frac{y^2}{2} + \sqrt{2}\cdot\frac{y^{1.5}}{1.5}\right)\Bigg|_0^2 + \left(6y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= \left(2 + \frac{4}{1.5}\right) + \left(18 + \frac{9}{2} - \frac{27}{3} - 12 - 2 + \frac{8}{3}\right) = 2 + \frac{8}{3} + 18 + \frac{9}{2} - 9 - 14 + \frac{8}{3} =$$

$$= -3 + \frac{16}{3} + \frac{9}{2} = \frac{-18+32+27}{6} = \frac{41}{6}$$

Ответ: $\frac{41}{6}$

Задание №2

Тело T ограничено заданными поверхностями.

$$x^2+y^2+z^2 = 9 \quad x^2+y^2+z^2 = 2\sqrt{3}z \quad x=0 \quad z=0$$
$$\text{при } x \ge 0 \quad 0 \le 2\sqrt{3}z \le x^2+y^2+z^2$$

1. Сделайте схематический рисунок тела T
2. С помощью тройного интеграла найдите объем тела T, перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.

Решение пункта 1:

$$x^2+y^2+z^2=2\sqrt{3}z \Rightarrow x^2+y^2+z^2-2\cdot\sqrt{3}z=0 \Rightarrow x^2+y^2+\left(z-\sqrt{3}\right)^2=3$$

$x^2+y^2+z^2=9$ - *сфера радиуса 3 с центром в (0;0;0). Назовём её* S_1

$x^2+y^2+z^2=2\sqrt{3}z$ - *сфера радиуса* $\sqrt{3}$ *с центром в (0;0;*$\sqrt{3}$*). Назовём её* S_2

$z=0$ и $x\geq 0$ - *часть пространства, где* x *положителен*

$0\leq 2\sqrt{3}z\leq x^2+y^2+z^2$ - *часть пространства, где* $z>0$ *и лежащая вне сферы* S_2

Итого берётся фигура, у которой x и z положительны, а все точки лежат снаружи S_2, но внутри S_1

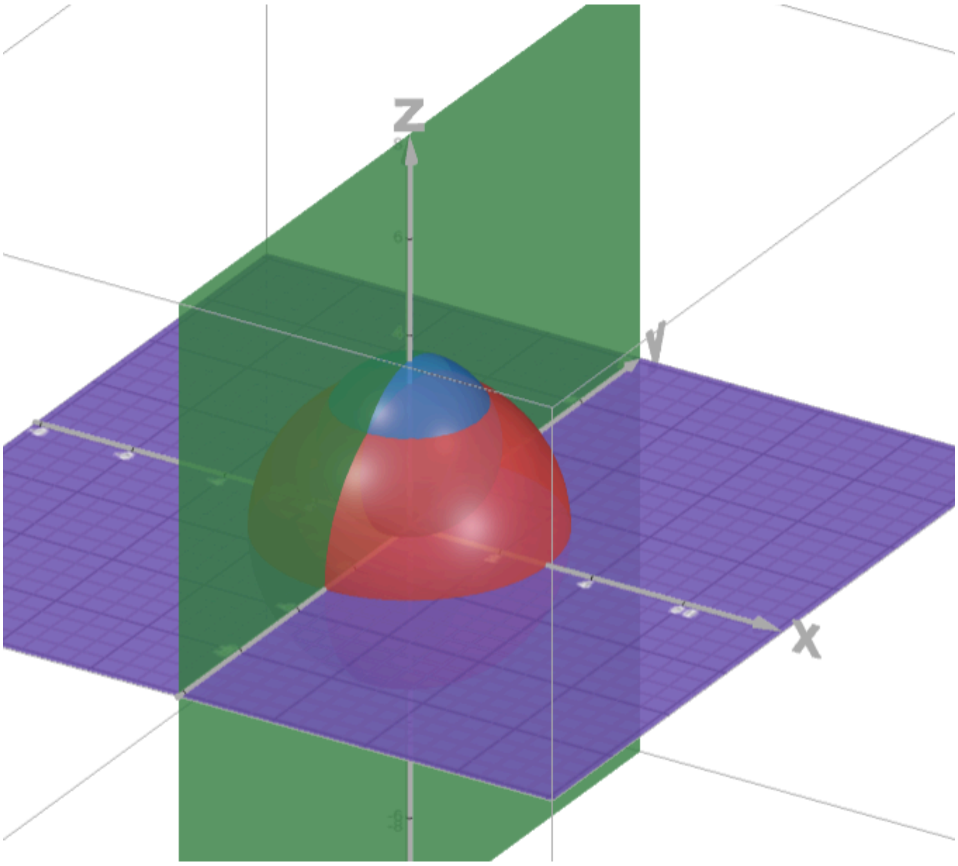

Рис. 2. Рисунок области T (она заключена между красной и синей сферой)

Решение пункта 2:

$$V=\iiint_T dV$$

Перейдём в сферические кординаты

$$\begin{cases} x=\rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y=\rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z=\rho\cos(\varphi) \end{cases}$$

$$dV=|J|d\rho d\varphi d\theta J=\rho^2\sin(\varphi)\Rightarrow dV=\rho^2\sin(\varphi)\ d\rho d\varphi d\theta$$

1. $z\geq 0\Rightarrow\rho\cos(\varphi)\geq 0\Rightarrow\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$

2. $x \geq 0 \Rightarrow \rho \sin(\varphi)\cos(\theta) \geq 0 \Rightarrow \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
3. $S_1 \Rightarrow \rho = 3$
4. $S_2 \Rightarrow \rho = 2\sqrt{3}\cos(\varphi)$

$$2\sqrt{3}\cos(\varphi) \leq 3 \Rightarrow \cos(\varphi) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi \geq \frac{\pi}{6}$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2\sqrt{3}\cos(\varphi)}^{3} \rho^2 \sin(\varphi) d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sin(\varphi) \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_{2\sqrt{3}\cos(\varphi)}^{3} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sin(\varphi)\big(9 - 8\sqrt{3}\cos(\varphi)^3\big) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sin(\varphi)\left(9 - 8\sqrt{3}\frac{1}{4}(3\cos(\varphi) + \cos(3\varphi))\right) =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 9\sin(\varphi) - 3\sqrt{3}\sin(2\varphi) - 2\sqrt{3}\cos(3\varphi)\sin(\varphi) d\varphi$$

$$\int 2\sqrt{3}\cos(3\varphi)\sin(\varphi)d\varphi = \sqrt{3}\int \sin(4\varphi) + \sin(-2\varphi)d\varphi = \sqrt{3}\left(-\frac{\cos(4x)}{4} + \frac{\cos(2x)}{2}\right) + C$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left(-9\cos(\varphi) + \frac{3\sqrt{3}\cos(2\varphi)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(4\varphi) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2\varphi)\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left(\left(0 - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-9\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ((-3 + 0.5 + 1) - (-9 + 1.5 - 0.25 - 0.5))d\theta =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-1.5 + 8.25)d\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{27}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{27\sqrt{3}\pi}{8}$$

Задание №3

С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги плоской материальной кривой, заданной уравнениями:

a. $y = 1 - x^2 + \arccos(x), \quad \rho(x,y) = 1, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{7}{8}$

b. $\begin{cases} x = \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}t} - 1 \\ y = e^t + 1 \end{cases}, \quad \rho(x,y) = \frac{1}{12}, \quad t_1 = \ln(8), \quad t_2 = \ln(80)$

Решение пункта a:

$$M = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{8}} 1\sqrt{1 + \big((1 - x^2 + \arccos(x))'\big)^2}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{8}} \sqrt{1 + \left(-2x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx =$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{8}} \sqrt{1 + 4x^2 + \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1-x^2}}dx = ???$$

Решение пункта b:

$$M=\int_{\ln(8)}^{\ln(80)}\frac{1}{12}\sqrt{\left(\left(\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}t}-1\right)'\right)^2+\left((e^t+1)'\right)^2}dt=\frac{1}{12}\cdot\int_{\ln(8)}^{\ln(80)}\sqrt{\left(e^{\frac{3}{2}t}\right)^2+\left(e^t\right)^2}dt=$$

$$=\frac{1}{12}\int_{\ln(8)}^{\ln(80)}\sqrt{e^{3t}+e^{2t}}dt=\frac{1}{12}\int_{\ln(8)}^{\ln(80)}e^t\sqrt{e^t+1}dt=\begin{bmatrix}r=1+e^t\\dt=e^tdr\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{12}\int_9^{81}\sqrt{r}dr=\frac{r^{1.5}}{1.5}\bigg|_9^{81}=\frac{1}{18}\cdot\left(81^{1.5}-9^{1.5}\right)=\frac{81\cdot 9-9\cdot 3}{18}=\frac{81-3}{2}=39$$

Ответ: a. ???; b. 39

Задание №4

С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги пространственной материальной кривой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases}x=t\\y=3\sin(t)\\z=2\cos(t)\end{cases}\quad \rho(x,y,z)=\frac{xy\sqrt{6}}{\sqrt{48+3z^2+2y^2}}\quad t_1=\frac{\pi}{3}\ t_2=\frac{2\pi}{3}$$

Решение:

$$M=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left((t)'\right)^2+\left((3\sin(t))'\right)^2+\left((2\cos(t))'\right)^2}dt=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{t\cdot 3\sin(t)\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{48+3(2\cos(t))^2+2(3\sin(t))^2}}\sqrt{(1)^2+(3\cos(t))^2+(-2\sin(t))^2}dt=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{t\cdot 3\sin(t)\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{48+12+6(\sin(t))^2}}\sqrt{5+5(\cos(t))^2}dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{t\cdot 3\sin(t)\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{60+6(\sin(t))^2}}\sqrt{5+5(\cos(t))^2}dt=$$

$$=3\sqrt{5}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{t\sin(t)}{\sqrt{10+(\sin(t))^2}}\sqrt{1+\cos(t)^2}dt=\begin{bmatrix}r=1+\cos(t)^2\\dt=-2\sin(t)\cos(t)dr\end{bmatrix}=???$$

Ответ: ???

Задание №5

Дано векторное поле $\vec{a}$ и плоскость σ, пересекающая координатные плоскости по замкнутой ломаной $KLMK$, где K, L, M – точки пересечения плоскости σ координатными осями O_x, O_y, O_z соответственно.

a. Найдите поток Q векторного поля $\vec{a}$ через часть S плоскости σ, вырезанной координатными плоскостями, в сторону нормали $\vec{n}$, направленной от начала координат $O(0,0,0)$.
b. С помощью теоремы Остроградского-Гаусса найдите поток Q векторного поля $\vec{a}$ через полную поверхность тетраэдра $OLMK$ в сторону внешней нормали.
c. Найдите циркуляцию C векторного поля $\vec{a}$ по контуру $KLMK$, образованному пересечением плоскости σ с координатными плоскостями.

$$\vec{a}=(y+z-2x)\vec{\imath}+(x-z)\vec{\jmath}\quad \sigma: x-2y-2z=2;$$

Решение пункта a:

$$Q = \iint_S \vec{a}\vec{n}\ dS = \iint_S a_x \cos(\alpha) + a_y \cos(\beta) + a_z \cos(\gamma)\ dS$$

$$\sigma : x = 2 + 2y + 2z$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 2 \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 2$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\ dydz = \sqrt{1+4+4}\ dxdy = \sqrt{9}\ dydz = 3\ dydz$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-1}{-\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}} = \frac{1}{3} \quad \cos(\beta) = \frac{-\frac{\partial x}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{-\frac{\partial x}{\partial z}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$a_x = (y + z - 2x) \quad a_y = (x - z) \quad a_z = 0$$

$$a_x \cos(\alpha) + a_y \cos(\beta) + a_z \cos(\gamma) = (y + z - 2x) \cdot \frac{1}{3} - (x - z) \cdot \frac{2}{3} - 0 \cdot \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{y + z - 2x - 2x + 2z}{3} = \frac{y + 3z - 4x}{3}$$

$$Q = \iint_{D_{yz}} \frac{y + 3z - 4(2 + 2y + 2z)}{3} \cdot 3\ dydz = \iint_{D_{yz}} y + 3z - 8 - 8y - 8z\ dydz =$$

$$= -\iint_{D_{yz}} 5z + 8 + 7y\ dydz$$

Рассмотрим подробнее область D_{yz}

Найдём точку пересечения с O_y: $0 - 2y - 2 \cdot 0 = 2 \Rightarrow y = -1$

Найдём точку пересечения с O_z: $0 - 2 \cdot 0 - 2z = 2 \Rightarrow z = -1$

$$Q = -\iint_{D_{yz}} 5z + 8 + 7y\ dydz = -\int_{-1}^{0} dz \int_{-1-z}^{0} 5z + 8 + 7y\ dy = -\int_{-1}^{0} dz \left(5zy + 8y + 7\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-1-z}^{0} =$$

$$= \int_{-1}^{0} 5z(-1-z) + 8(-1-z) + 7\frac{(-1-z)^2}{2}\ dz = \int_{-1}^{0} -5z - 5z^2 - 8 - 8z + 7\frac{1 + 2z + z^2}{2}\ dz =$$

$$= \int_{-1}^{0} -13z - 5z^2 - 8 + \frac{7}{2} + 7z + \frac{7}{2}z^2\ dz =$$

$$= \int_{-1}^{0} -1.5z^2 - 6z - 4.5\ dz = \left(0.5z^3 + 3z^2 + 4.5z\right)\Big|_{-1}^{0} = -0.5 + 3 - 4.5 = -2$$

Ответ: -2

Решение пункта b:

Возьмём $a_x,\ a_y,\ a_z$ *из пункта a*

$$Q = \iiint_T \text{div } \vec{a} \; dv$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial(y+z-2x)}{\partial x} + \frac{\partial(x-z)}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = -2$$

$$Q = \iiint_T \text{div } \vec{a} \; dv = -2 \iiint_T dv = -2V_T$$

Рассмотрим подробнее фигуру T

Найдём точку пересечения с O_x: $x - 2\cdot 0 - 2 \cdot 0 = 2 \Rightarrow x = 2$ => (2,0,0)

Найдём точку пересечения с O_y: $0 - 2y - 2\cdot 0 = 2 \Rightarrow y = -1$ => (0,-1,0)

Найдём точку пересечения с O_z: $0 - 2\cdot 0 - 2z = 2 \Rightarrow z = -1$ => (0,0,-1)

Найдём V_T:

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1*1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$Q = -2V_T = -2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

Ответ: $-\frac{2}{3}$

Решение пункта с:

$$C = \iint_S \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n} \; dS = \iint_S (\text{rot } \vec{a})_x \; dydz + (\text{rot } \vec{a})_y \; dxdz + (\text{rot } \vec{a})_z \; dxdy =$$

$$= \iint_{D_{yz}} \text{rot } \vec{a_x} \; dydz - \iint_{D_{xz}} \text{rot } \vec{a_y} \; dxdz - \iint_{D_{xy}} \text{rot } \vec{a_z} \; dxdy$$

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z-2x & x-z & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{i} \cdot 0 + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (x-z) \cdot \vec{k} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot (y+z-2x) - \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot (y+z-2x) - \frac{\partial}{\partial z} \cdot (x-z) \cdot \vec{i} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{j} \cdot 0 =$$

$$= \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot (z-x) + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot (y+z-2x) + \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot (x-z) - \frac{\partial}{\partial y} \cdot (y+z-2x)\right) =$$

$$= \vec{i} \cdot 1 + \vec{j} \cdot 1 + \vec{k} \cdot (1-1) = \vec{i} + \vec{j}$$

$$C = \iint_{D_{yz}} dydz - \iint_{D_{xz}} dxdz = S_{\triangle OLM} - S_{\triangle OKM} = \frac{1\cdot 1}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} = -0.5$$

Ответ: -0.5

Задание №6

Дано векторное поле $\vec{a}(M)$.

a. Проверьте, является ли векторное поле соленоидальным или потенциальным.

b. Если поле потенциально, найдите его потенциал.

$$\vec{a} = (e^z + 2)\vec{i} - (e^z + 3)\vec{j} + (e^z x - e^z y + 1)\vec{k}$$

Решение пункта a:

Проверим, является ли поле потенциальным

$$\operatorname{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^z+2 & -e^z-3 & e^z x - e^z y + 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cdot(e^z x - e^z y + 1) + \vec{j}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\cdot(e^z+2) + \vec{k}\cdot(-e^z-3)\cdot\frac{\partial}{\partial x} - \vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cdot(e^z+2) -$$

$$-(-e^z-3)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\vec{i} - \vec{j}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cdot(e^z x - e^z y + 1) = \vec{i}\cdot(-e^z+e^z) + \vec{j}\cdot(e^z-e^z) + \vec{k}\cdot 0 = 0$$

Проверим, является ли поле соленоидальным

$$\operatorname{div}\,\vec{a}(M) = \frac{\partial(e^z+2)}{\partial x} + \frac{\partial(-e^z-3)}{\partial y} + \frac{\partial(e^z x - e^z y + 1)}{\partial z} = e^z x - e^z y$$

Ответ: является потенциальным, но не является соленоидальным.

Решение пункта b:

$$\vec{a}(M) = \operatorname{grad}\,U(M)$$

$$U(M) = \int_{M_0}^{M} dU + C = \int_{M_0}^{M} a_x dx + a_y dy + a_z dz + C$$

$$dU = (e^z+2)dx + (-e^z-3)dy + (e^z x - e^z y + 1)dz$$

$$U(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (e^{\overline{z}}+2)d\overline{x} + (-e^{\overline{z}}-3)d\overline{y} + (e^{\overline{z}}\overline{x} - e^{\overline{z}}\overline{y} + 1)d\overline{z}$$

В качестве пути интегрирования выберем ломаную, где

$$O = O(0,0,0) \quad A = A(x,0,0) \quad B = B(x,y,0) \quad M = M(x,y,z)$$

Пользуясь свойством аддитивности криволинейного интеграла, представим его в виде суммы интегралов, найденных на каждом отрезке данной ломаной

$$\begin{cases} \overline{y} = 0 \\ \overline{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\overline{y} = 0 \\ d\overline{z} = 0 \end{cases}$$

Переменная $\overline{x}$ меняется от 0 до x. Интеграл по отрезку OA равен

$$\int_0^x e^0 + 2\ d\overline{x} = (3\overline{x})|_0^x = 3x$$

$$\begin{cases} \overline{x} = \text{const} \\ \overline{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\overline{x} = 0 \\ d\overline{z} = 0 \end{cases}$$

Переменная $\overline{y}$ меняется от 0 до y. Интеграл по отрезку AB равен

$$\int_0^y -e^0 - 3\ d\overline{y} = (-4\overline{y})|_0^y = -4y$$

$$\begin{cases} \overline{x} = \text{const} \\ \overline{y} = \text{const} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\overline{x} = 0 \\ d\overline{y} = 0 \end{cases}$$

Переменная $\overline{z}$ меняется от 0 до z. Интеграл по отрезку BM равен

$$\int_0^z e^{\overline{z}}\overline{x} - e^{\overline{z}}\overline{y} + 1 \ d\overline{z} = \left(e^{\overline{z}}\overline{x} - e^{\overline{z}}\overline{y} + \overline{z}\right)\Big|_0^z = e^z x - e^z y + z - x + y$$

Окончательно получим:

$$U(x, y, z) = 3x - 4y + e^z x - e^z y + z - x + y + C = 2x - 3y + z + e^z x - e^z y + C$$

Ответ: $2x - 3y + z + e^z x - e^z y + C$