1. Дайте определение метрическому пространству.

Определение. Метрическим пространством M называется некоторое множество, на котором определено отображение $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

M1. $\rho(x, y) \geqslant 0, \quad \rho(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y;$

M2. $\rho(x, y) = \rho(y, x);$

M3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$

2. Линейна ли метрическая форма по обоим аргументам? Объясните ответ.

3. Дайте определение нормированному пространству.

Определение. Нормированным пространством называется линейное пространство $X(\mathbb{R})$, наделенное отображением $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, обладающим следующими свойствами:

N1. $\|x\| \geqslant 0, \quad \|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0;$

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \alpha \in \mathbb{R};$

N3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$

4. Как можно метризовать нормированное пространство?

Лемма 1.1. *Любое нормированное пространство может быть метризовано:*

$$\rho(x, y) = \|x - y\| .$$

5. Что называется (комплексным) евклидовым пространством?

Определение. Линейное пространство X над $\mathbb{C}$ называется **комплексным евклидовым пространством**, если на нем задана *метрическая форма* $g(x, y) = \langle x, y \rangle$ со следующими свойствами:

E1. $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x, y_1 \rangle + \beta \langle x, y_2 \rangle$ - линейность по второму аргументу;

E2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ - эрмитовость;

E3. $\langle x, x \rangle \geqslant 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$

6. Что такое метрический тензор в евклидовом пространстве?

Определение. Совокупность чисел $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ называется **метрическим тензором**,

метрич. форма базисные вектора

7. Как записать скалярное произведение в координатной форме, используя метрический тензор?

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} u^i v^j$$

8. Что называется матрицей Грама?

Определение. Совокупность чисел $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ называется **метрическим тензором**, а соответствующая матрица $G = \|g_{ij}\|$ - **матрицей Грама**:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \dots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}.$$

9. Запишите свойства матрицы Грама.

Замечание. Свойства матрицы Грама:

(а) $G_{ji} = \overline{G}_{ij}$;

(б) $G_{ii} > 0 \quad \forall i = 1 \dots n$;

(в) $\overline{\xi^i} \xi^j g_{ij} \geqslant 0, \quad \overline{\xi}^i \xi^j g_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi^i = 0, \quad \forall i.$

10. Запишите неравенство Шварца.

Теорема 3.1. *(Неравенство Шварца) Имеет место следующее соотношение между скалярным произведением и порождаемой им нормой*

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\| \, .$$

11. При каком условии неравенство Шварца становится равенством?

Лемма 3.2. *Неравенство Шварца обращается в точное равенство тогда и только тогда, когда x и y - линейно зависимые векторы.*

12. Как вводится норма, порожденная скалярным произведением?

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, ?

13. Какие векторы называются ортогональными?

Определение 1.1. Пусть $x, y \in E$. Говорят, что x **ортогонален** y (пишут $x \perp y$), если $\langle x, y \rangle = 0$.

14. Как связана ортогональность векторов и линейная (не)зависимость.

Теорема 1.1. *(Об ортогональности и линейной независимости) Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ - набор ненулевых попарно ортогональных векторов, тогда $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ - линейно независимый набор.*

15. Запишите теорему Пифогора для набора попарно ортогональных векторов.

Теорема 1.2. *(Пифагора) Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ - набор ненулевых попарно ортогональных векторов, тогда*

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 \, .$$

16. Как определяется ортогональность вектора подпространству?

Определение 1.2. Говорят, что x **ортогонален подпространству** $L \leqslant X_E$, если

$$\forall y \in L \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

17. Что такое ортогональное дополнение пространства?

Лемма 1.2. *Ортогональное дополнение является подпространством X_E.*

18. В чем цель процесса ортогонализации?

Цель процесса ортогонализации — преобразование заданного набора векторов в новый набор, состоящий из попарно ортогональных векторов.

19. Можно ли ортогонализовать линейно зависимый набор векторов? Ответ поясните.

Линейно зависимый набор векторов можно ортогонализовать, но в результате получится ортогональный набор векторов, содержащий нулевые векторы

20. Опишите [кратко] процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

21. Как соотносятся нормы начального и ортогонализированного (с помощью ортогонализации Грама-Шмидта) наборов?

22. Какой набор векторов называется ортонормированным?

Определение 3.1. Базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ евклидова пространства X_E называется

- **ортогональным**, если $\langle e_i, e_{j\neq i}\rangle = 0$.
- **ортонормированным**, если $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$.

23. Как осуществляется нормировка ортогонального набора?

$\{e_i\}$ – ортог. набор $\quad n_i = \dfrac{e_i}{\|e_i\|}$ – применить для кажд. вектора из набора

24. Какой вид имеет матрица Грама для ортогонального набора? Ортонормированного?

Для ортогонального набора - диагональный вид
Для ортонормированного - единичная матрица

25. Что такое ортогональная сумма подпространств?

Замечание 4.1. В более общем случае, сумма попрано ортогональных подпространств $L_i \perp L_{j\neq i}$ называется ортогональной суммой подпространств:

$$L = \bigoplus_{i=1}^{s} L_i.$$

26. Как представить евклидово пространство в виде прямой суммы с помощью ортогонального дополнения?

27. Что такое ортогональный проектор?

Определение 5.1. **Ортогональным проектром** на подпространство L называется линейный оператор, обладающий следующим свойством:

$$\mathcal{P}_L^{\perp}(x) = z, \quad x = z + h, \quad z \in L, \quad h \in M = L^{\perp}.$$

28. Является ли ортогональный проектор линейным оператором? Почему?

Да, ортогональный проектор является линейным оператором, так как он удовлетворяет св-ву аддитивности и однородности

?

29. В чем суть задачи о перпендикуляре?

Определение 5.2. **Задачей о перпендикуляре** называется задача об отыскании компонент произвольного вектора x в подпространствах L и M.

30. Запишите алгоритм отыскания компонент вектора при разложении $E = L \oplus L^{\perp}$.

Замечание 5.2. Алгоритм решения задачи о перпендикуляре:

1. Найти ортонормированный базис $\{e_j\}_{j=1}^{k}$ подпространства L;
2. Найдем ортогональную проекцию $\mathcal{P}_L^{\perp} x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i$,
3. Найдем ортогональную проекцию $\mathcal{P}_M^{\perp} = x - \mathcal{P}_L^{\perp}$.

31. Что такое коэффициенты Фурье?

Определение 5.3. Коэффициенты $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$ ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ пространства X_E называются **коэффициентами Фурье** вектора x относительно этого базиса.

32. Запишите соотношение, связвающее норму ортогональной проекции вектора и коэффициенты Фурье.

Лемма 6.2. *Справедливо следующее равенство:*

$$\left\|\mathcal{P}_L^{\perp} x\right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2$$

$x \in L$

33. Запишите неравенство Бесселя.

Лемма 6.3. *(Следствие предыдущих лемм) Неравенство Бесселя:*

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in L.$$

34. В чем заключается геометрический смысл неравенства Бесселя?

Квадрат длины проекции вектора на подпространство
не превосходит квадрата длины самого вектора

35. В каком случае система ортонормированных векторов является полной?

Теорема 6.1. *Система ортонормированных векторов $\{e_i\}_{i=1}^{k}$ является полной в X_E тогда и только тогда, когда для любого $x \in X_E$ имеет место равенство Парсеваля:*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2, \quad \alpha_i = \langle e_i, x \rangle \quad \forall x \in X_E.$$

36. Дайте определение эрмитово сопряженному оператору.

Определение 1.1. Оператор $\varphi^{\dagger}$ называется **эрмитово сопряженным** к оператору φ, если он обладает следующим свойством:

$$\langle x, \varphi y \rangle = \langle \varphi^{\dagger} x, y \rangle.$$

37. Запишите свойство аддитивности и контравариантности операции эрмитового сопряжения.

Замечание 1.1. Операция эрмитового сопряжения обладает следующими свойствами:

- аддитивность: $(\varphi + \psi)^{\dagger} = \varphi^{\dagger} + \psi^{\dagger}$;
- сопряженная однородность: $(\lambda\varphi)^{\dagger} = \overline{\lambda}\varphi^{\dagger}$;
- контравариантность: $(\psi \circ \varphi)^{\dagger} = \varphi^{\dagger} \circ \psi^{\dagger}$;
- инволютивность: $(\varphi^{\dagger})^{\dagger} = \varphi$.

38. Запишите свойства сопряженной однородности и инволютивности эрмитового сопряжения. Обозначения поясните.

39. Как найти матрицу эрмитово сопряженного оператора?

Лемма 1.1. *Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис евклидова пространства $X_E(\mathbb{K})$ и G - его матрица Грама. Тогда если A_φ — матрица оператора φ в этом базисе, то матрица $\varphi^\dagger$ будет имеет вид*

$$A_{\varphi^\dagger} = G^{-1}A^\dagger G, \quad A^\dagger = \overline{A}^T.$$

40. Какой оператор называется самосопряженным?

Определение 2.1. Оператор, обладающий свойством $\varphi^\dagger = \varphi$ называется **самосопряженным**, если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и **эрмитовским**, если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

41. В чем разница между самосопряженным и эрмитовым операторами?

42. Запишите свойства матриц самосопряженного и эрмитова операторов.

Замечание 2.1. Матрицы самосопряженного φ и эрмитовского ψ операторов обладают соответственно свойствами:

$$A_\varphi^T = A_\varphi, \quad B_\psi^\dagger = B_\psi.$$

43. Что можно сказать про свойства собственных векторов эрмитова оператора относительно скалярного произведения?

44. Запишите спектральную теорему для эрмитова оператора.

Теорема 3.2. *(Спектральная теорема для эрмитова оператора) Пусть $\varphi : X_E \to X_E$ — эрмитов оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортонормированный базис X_E, состоящий из собственных векторов φ, тогда:*

$$\varphi(*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle *, e_i \rangle e_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

45. Запишите определение унитарного оператораю.

Определение 4.1. **Унитарным** называется оператор ψ, обладающий одним из перечисленных выше свойств (и, как следствие, всем остальными).

Лемма 4.1. *Пусть ψ — опертор в евклидовом пространстве $X_E(\mathbb{K})$, тогда следующие свойства эквиваентны:*

(а) *изометрия:* $\langle \psi x, \psi y \rangle = \langle x, y \rangle$;

(б) *сохранение нормы:* $\|\psi x\| = \|x\|$;

(в) *свойство сопряженного:* $\psi^\dagger = \psi^{-1}$

46. Запишите три свойства, которые определяют унитарный оператор.

Лемма 4.1. *Пусть ψ — опертор в евклидовом пространстве $X_E(\mathbb{K})$, тогда следующие свойства эквиваентны:*

(а) *изометрия:* $\langle \psi x, \psi y \rangle = \langle x, y \rangle$;

(б) *сохранение нормы:* $\|\psi x\| = \|x\|$;

(в) *свойство сопряженного:* $\psi^\dagger = \psi^{-1}$

47. Чему может быть равен определитель унитарного оператора?

Лемма 4.2. *Определитель оператора ψ имеет следующее свойство:*

$$|\det \psi| = 1.$$

48. Запишите свойства матрицы унитарного оператора.

Замечание 5.1. Матрицы унитарного и ортогонального операторов имеют свойсва:

$$\mathbb{C}: \quad \psi \leftrightarrow U_\psi, \quad \overline{U^T} = U^{-1};$$
$$\mathbb{R}: \quad \psi \leftrightarrow U_\psi, \quad U^T = U^{-1}.$$

49. Что такое ортогональная матрица?

Q - ортог. матр, если $QQ^T = I$

числа в Q - вещественные!

↖ единич. матр.

50. Что можно сказать про собственные числа унитарного оператора?

$|\lambda| = 1$?

51. Запишите спектральную теорему для унитарного оператора.

Теорема 6.2. *(Спектральная теорема для унитарного оператора) Пусть $\psi : X_E \to X_E$ — унитарный оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортонормированный базис X_E, состоящий из собственных векторов ψ, тогда:*

$$\psi(*) = \sum_{j=1}^{n} e^{i\chi_j} \langle e_j, * \rangle e_j.$$

52. Почему эрмитов оператор диагонализуем?

53. Дайте определение векторам, ортогональным относительно билинейной формы. Какой должна быть билинейная форма?

Определение 2.1. Векторы $u, v \in V$ называются ортогональными относительно билинейной формы b (b-ортогональными), если $b(u, v) = 0$.

54. Что такое базис ортогональный, относительно билинейной формы?

Определение 2.2. Базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в V называется ортогональным относительно b, если его векторы попарно ортогональны, т.е. $b(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$.

55. Как выглядит билинейная форма в ортогональном относительно нее базисе?

Билинейная форма в ортогональном базисе принимает диагональный вид
(значения только на главной диагонали. остальное - нули)

56. Запишите вид нормальный вид квадратичной формы в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Лемма 2.1. *В поле $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ любая квадратичная форма может быть приведена к виду*

$$q(v) = (\widetilde{v}^1)^2 + \ldots + (\widetilde{v}^r)^2,$$

где r – количество ненулевых a_i.

Замечание 2.3. В поле $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ квадраты ненулевых чисел λ_i всегда являются положительными, поэтому указанным преобразованием базиса мы можем найти такие λ_i для всех $a_i \neq 0$, что $|\widetilde{a}_i| = 1$, но при этом знак сохранится. Следовательно в $\mathbb{R}$ квадратичная форма может быть приведена только к виду

$$q(v) = \sum_{i=1}^{r_+} (\widetilde{v}^i)^2 - \sum_{j=r_++1}^{r_-} (\widetilde{v}^j)^2$$

57. Что такое сигнатура квадратичной формы и из чего она состоит?

Определение 2.3. Указанные виды квадратичной формы в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ называются **нормальным видом** квадратичной формы, а числа r_+ и r_- – **положительными и отрицательными индексами инерции** вещественной квадратичной функции. Набор этих чисел (r_+, r_-) также называют **сигнатурой** квадратичной формы.

Сигнатура квадратичной формы является ее инвариантом (не зависит от базиса). Чтобы это показать, введем еще несколько определений.

58. Дайте определение положительно (отрицательно) определенной квадратичной формы.

Определение 2.4. Квадратичная форма называется **положительно определенной**, если $q(v) > 0$ для любого $v \in V, v \neq 0$. Аналогичным образом вводится **отрицательно определенная** форма.

59. Дайте определение положительно (отрицательно) полуопределенной квадратичной формы.

Определение 2.5. Квадратичная форма называется **положительно полуопределенной**, если $q(v) \geqslant 0$ для любого $v \in V, v \neq 0$. Аналогичным образом вводится **отрицательно полуопределенная** форма.

60. В чем геометрический смысл индексов инерции квадратичной формы?

61. Сформулируйте критерий Сильвестра и для чего он применяется.

Теорема 2.2. *(Критерий Сильвестра) Вещественная квадратичная форма q, имеющая матрицу A_q в некотором базисе, положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы A_q положительны.*

62. Что такое оператор, присоединенный к квадратичной форме?

Пусть E_V – евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Определим также в этом пространстве линейный оператор $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Определим при помощи него билинейную функцию b_φ

присоединённый

$$b_\varphi(u, v) = \langle u, \varphi(v) \rangle \qquad \forall u, v \in V$$

63. Каким свойством обладает присоединенный к квадратичной форме оператор?

Он изоморфен с кв. формой ?

64. Как связана матрица квадратичной формы, матрица Грама и матрица присоединенного оператора?

Лемма 3.1. *Матрицы Грама G скалярного произведения, квадратичной формы A_q и присоединенного к нему оператора A_φ связаны соотношением*

$$A_q = GA_\varphi$$

65. Как диагонализовать квадратичную форму, используя ее связь с присоединенным оператором?

66. В чем заключается основная идея метода Лагранжа? Опишите кратко метод.

67. Как применить метод Лагранжа, если отсутствуют квадраты координат, но при этом существует их произведение?

68. Запишите общий вид верхнетреугольного преобразования базиса.

$$\begin{cases} g_1 = e_1, \\ g_2 = s_{21}e_1 + e_2, \\ g_3 = s_{31}e_1 + s_{32}e_2 + e_3, \\ \vdots \\ g_n = s_{n1}e_1 + s_{n2}e_2 + \ldots + e_n, \end{cases}$$

69. Запишите канонический вид квадратичной формы в результате применения метода Якоби. Поясните обозначения.

70. При каком условии может применяться метод Якоби? Поясните обозначения.

71. Опишите алгоритм одновременной диагонализации двух квадратичных форм.

(а) **Диагонализация $q_1(v)$:**
Приведем квадратичную форму $q_1(v)$ к диагональному виду с помощью ортогональных преобразований, например при помощи спектрального анализа присоединенного оператора к этой квадратичной форме. Получим базис $\{f_i\}$, в котором форма имеет матрицу

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

(б) **Преобразование $q_2(v)$:**
Вычислим матрицу B формы $q_2(v)$ в базисе $\{f_i\}$:

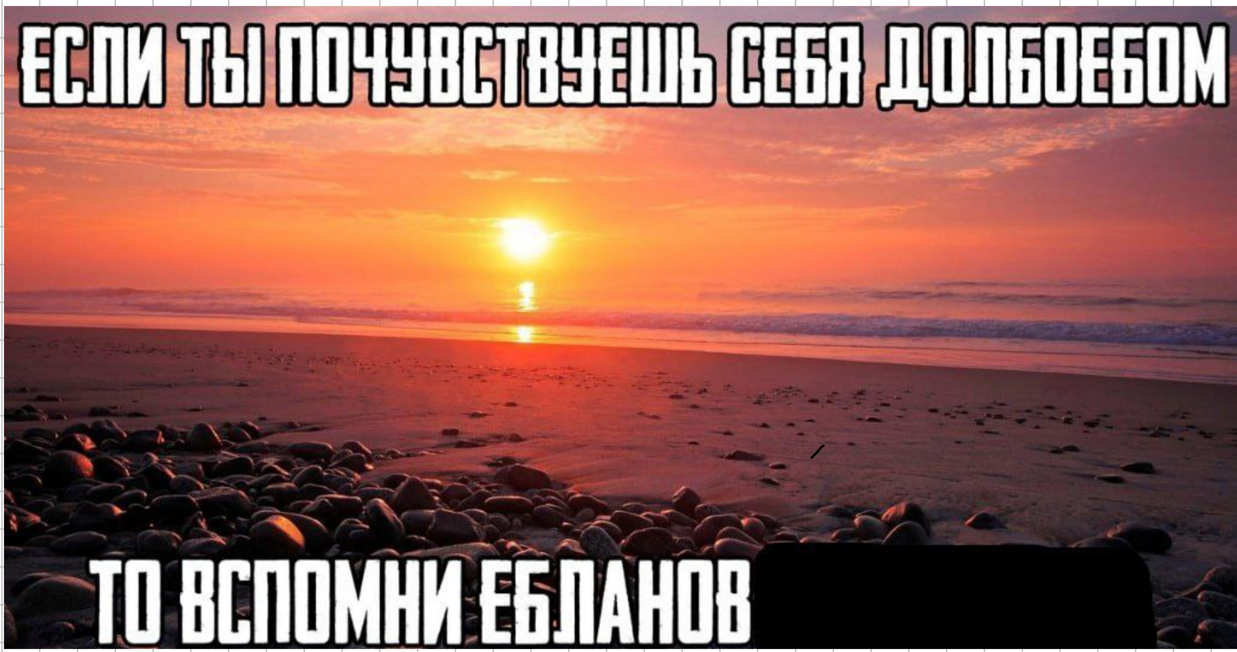
$$B = T_1^T B' T_1,$$

где T_1 — матрица перехода из $\{e_i\}$ в $\{f_i\}$, B' — исходная матрица $q_2(v)$. Еще раз обратим внимание, что преобразование T является ортогональным, т.к. основано на собственных векторах присоединенного оператора.

(в) **Диагонализация $q_2(v)$:**
Вновь применим спектральную теорию для диагонализации второй квадратичной формы, находя ортогональное преобразование из $\{f_i\}$ в $\{g_i\}$, которое позволит преобразовать квадратичную форму $q_2(v)$ в диагональный вид

$$B \quad \mapsto \quad \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$$

72. Какие преобразования необходимо использовать при одновременной диагонализации двух квадратичных форм?



Насрал в файлик @ReshNF
(ГХ: NF-coder)

Буду рад исправлениям и дополнениям.