Задача 1 1/1

Квадратичная форма q в некотором базисе задаётся формулой:

$$q(x) = -2(\xi^1)^2 - 6\xi^1\xi^2 - 5(\xi^2)^2$$

Найти матрицу этой квадратичной формы.

Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 3 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.

Пример ввода:

$[1, 0; 0, -3/4]$

[-2, -3; -3, -5]

$q(x) = b(x;x)$

по опред. квадр. формы её можно преобразовать в билинейную от двух одинаковых элементов

Для удобства обозначим второй x за y:

$$b(x;y) = \beta_1 x_1 y_1 + \beta_2 x_1 y_2 + \beta_3 x_2 y_1 + \beta_4 x_2 y_2$$

Примечание: i в x_i и y_i – номер координаты вектора

$\beta_1 \dots \beta_4$ – коэф. билинейной формы

По сути здесь перебраны всевозможные пары из координат обоих векторов и к каждой паре приписан некий коэф.

$$\begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ x_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array}$$ – матрица коэф.

В нашем случае: (я заменил ξ_i на x_i т.к не умею быстро писать кси)

$$\underset{\overset{\parallel}{b(x;x)}}{q(x)} = -2x_1x_1 \underbrace{-6x_1x_2}_{} - 5x_2x_2$$

по сути этот аргумент эквивалентен $\beta_2 x_1 x_2 + \beta_3 x_2 x_1$ из разобранного ранее уравнения, поэтому можем преобразовать уравнение далее:

$$q(x) = b(x;x) = \underset{\beta_1}{-2}\, x_1 x_2 \underset{\beta_2}{-3}\, x_1 x_2 \underset{\beta_3}{-3}\, x_2 x_1 \underset{\beta_4}{-5}\, x_2 x_2$$

Подставим β_i в матрицу коэф. и получим ответ

$$\begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ x_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Задача 2 1/1

Найти базис пространства R^{*3}, сопряженный данному:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Пример ответа:

$f^1 = (1.11 \quad 2.22 \quad 3.33)$ $f^2 = (4.44 \quad 5.55 \quad 6.66)$ $f^3 = (7.77 \quad 8.88 \quad 9.99)$

Пример ввода:

[1.11, 2.22, 3.33; 4.44, 5.55, 6.66; 7.77, 8.88, 9.99]

[5, 2, 0; 2, 2, 1; 0, 1, 1] ✓

Пусть $f^1, f^2 f^3$ – новый базис

т.к базис должен быть сопряж. то $f^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Подставим e_i и решим Гауссом:

$f^1(e_1) = 1 \quad f^1(e_2) = 0 \quad f^1(e_3) = 0$ $x_1\ x_2\ x_3$ – коэф. нового базиса

$$f^1: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2 = 1 \Rightarrow x_1 = 5 \\ x_2 - x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$f^1 = (5; 2; 0)$

$f^2(e_1) = 0 \quad f^2(e_2) = 1 \quad f^2(e_3) = 0$ $x_1\ x_2\ x_3$ – коэф. нового базиса

$$f^2: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -5 & 1 \\ 2 & -5 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \\ x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

$f^2 = (2; 2; 1)$

$f^3(e_1) = 0 \quad f^3(e_2) = 0 \quad f^3(e_3) = 1$ $x_1\ x_2\ x_3$ – коэф. нового базиса

$$f^3: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$f^3 = (0; 1; 1)$

Задача 3 1/1

Квадратичная форма q в некотором базисе $\{e_i\}_{i=1}^2$ задаётся формулой:

$$q(x) = 5(\xi^1)^2 - 16\xi^1\xi^2 + 13(\xi^2)^2$$

Найти матрицу формы q в базисе $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^2$, если координаты векторов ξ^i в базисе $\{e_i\}_{i=1}^2$ связаны с координатами векторов $\tilde{\xi}^i$ в базисе $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^2$ соотношением:

$$\begin{cases} \xi^1 = -7\tilde{\xi}^1 + 12\tilde{\xi}^2 \\ \xi^2 = -3\tilde{\xi}^1 + 5\tilde{\xi}^2 \end{cases}.$$

Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 3 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.

Пример ввода:

$[1, 0; 0, -3/4]$

[26, -47;-47, 85]

Подставим новые координаты в уравн. кв. формы

(обозначу ξ^i за x_i, а $\tilde{\xi}^i$ за $\tilde{x}_i$, ибо не умею быстро писать кси)

$$q(\tilde{v}) = 5(-7\tilde{x}_1 + 12\tilde{x}_2)^2 - 16(-7\tilde{x}_1 + 12\tilde{x}_2)(-3\tilde{x}_1 + 5\tilde{x}_2) + 13(-3\tilde{x}_1 + 5\tilde{x}_2)^2$$

$$q(x) = 5(\xi^1)^2 - 16\xi^1\xi^2 + 13(\xi^2)^2$$

$$\begin{cases} \xi^1 = -7\tilde{\xi}^1 + 12\tilde{\xi}^2 \\ \xi^2 = -3\tilde{\xi}^1 + 5\tilde{\xi}^2 \end{cases}$$

$$\overset{\shortparallel}{} \; 5\cdot(49)x_1^2 - 5\cdot 7\cdot 12\cdot 2\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + 5\cdot 144\tilde{x}_2 -$$
$$- 16\cdot 21\tilde{x}_1^2 + 16\cdot 7\cdot 5\tilde{x}_2 + 16\cdot 12\cdot 3\tilde{x}_2\tilde{x}_1 - 16\cdot 12\cdot 5\tilde{x}_2^2 +$$
$$+ 13\cdot 9\tilde{x}_1^2 - 13\cdot 3\cdot 5\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + 13\cdot 25\tilde{x}_2^2 = \underbrace{\ldots}_{\text{Пропущу сокращение}} =$$

$$= 26\tilde{x}_1 - 94\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + 85\tilde{x}_2^2$$

По аналогии с заданием №1 преобразуем квадр. форму в матрицу из соотв. билинейной формы

$$q(\tilde{x}) = b(\tilde{x};\tilde{x}) = \underbrace{26}_{\beta_1}\tilde{x}_1 \underbrace{-47}_{\beta_2}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \underbrace{-47}_{\beta_3}\tilde{x}_2\tilde{x}_1 + \underbrace{85}_{\beta_4}\tilde{x}_2^2$$

$$\begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & & \\ x_2 & & \end{array} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -47 \\ -47 & 85 \end{pmatrix}$$

Задача 4 1/1

Билинейная форма b в некотором базисе задаётся формулой:

$$b(x,y) = 3\xi^1\eta^1 + 4\xi^1\eta^2 + 2\xi^1\eta^3 - 2\xi^1\eta^4 - 3\xi^2\eta^1 - 4\xi^2\eta^2 - 4\xi^2\eta^3 + \xi^2\eta^4 + \xi^3\eta^1 + 2\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3 - 3\xi^3\eta^4 - 5\xi^4\eta^1 + 2\xi^4\eta^2$$

В этой формуле ξ^i - координаты вектора x, а η^i - координаты вектора y.

Найти матрицу билинейной формы b.

Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 3 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.

Пример ввода:

$[1, 0; 0, -3/4]$

[3,4,2,-2;-3,-4,-4,1;1,2,-4,-3;-5,2,0,0]

Переобозначу $\underbrace{\xi^i \text{ за } x_i}_{\text{т.к не умею писать}}$ и $\underbrace{\eta^i \text{ за } y_i}_{\text{для единообразия}}$

Восстановим пропущенные пары координат

$$\begin{aligned} b(x;y) = {} & 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + 2x_1y_3 - 2x_1y_4 \\ & -3x_2y_1 - 4x_2y_2 - 4x_2y_3 + 1x_2y_4 \\ & +1x_3y_1 + 2x_3y_2 - 4x_3y_3 - 3x_3y_4 \\ & -5x_4y_1 + 2x_4y_2 + 0x_4y_3 + 0x_4y_4 \end{aligned}$$

По аналогии с задачей 1 запишем коэф. в матрицу

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & -2 \\ -3 & -4 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -3 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Задача 6　　　　1/1

Квадратичная форма q в некотором базисе задаётся формулой:

$$q(x) = -(\xi^1)^2 - 2\xi^1\xi^2 - 4\xi^1\xi^3 + 2\xi^1\xi^4 - (\xi^2)^2 - 4\xi^2\xi^3 + 2\xi^2\xi^4 - 4(\xi^3)^2 + 4\xi^3\xi^4 - (\xi^4)^2$$

Найти матрицу этой квадратичной формы.

Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 3 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.

Пример ввода:

$[1, 0; 0, -3/4]$

[-1,-1,-2,1;-1,-1,-2,1;-2,-2,-4,2;1,1,2,-1] ✓

Переобозначу ξ^i за x_i т.к. не умею писать

Представим кв. форму в виде билинейной в общем виде

$$g(x) = b(x;x) = \beta_1 x_1 x_1 + \beta_2 x_1 x_2 + \beta_3 x_1 x_3 + \beta_4 x_1 x_4 + \beta_5 x_2 x_1 + \beta_6 x_2 x_2 + \beta_7 x_2 x_3 + \beta_8 x_2 x_4 + \beta_9 x_3 x_1 + \beta_{10} x_3 x_2 + \beta_{11} x_3 x_3 + \beta_{12} x_3 x_4 + \beta_{13} x_4 x_1 + \beta_{14} x_4 x_2 + \beta_{15} x_4 x_3 + \beta_{16} x_4 x_4$$

Одним цветом подчёркнуты слагаемые с одинаковыми x-ами, из-за чего их коэф. были сложены.

$$q(x) = \underbrace{-(\xi^1)^2}_{\alpha_1} \underbrace{- 2\xi^1\xi^2}_{\alpha_2} \underbrace{- 4\xi^1\xi^3}_{\alpha_3} \underbrace{+ 2\xi^1\xi^4}_{\alpha_4} \underbrace{- (\xi^2)^2}_{\alpha_5} \underbrace{- 4\xi^2\xi^3}_{\alpha_6} \underbrace{+ 2\xi^2\xi^4}_{\alpha_7} \underbrace{- 4(\xi^3)^2}_{\alpha_8} \underbrace{+ 4\xi^3\xi^4}_{\alpha_9} \underbrace{- (\xi^4)^2}_{\alpha_{10}}$$

$\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2 + \beta_5$, $\alpha_3 = \beta_3 + \beta_9$, $\alpha_4 = \beta_4 + \beta_{13}$, $\alpha_5 = \beta_6$, $\alpha_6 = \beta_7 + \beta_{10}$, $\alpha_7 = \beta_8 + \beta_{14}$, $\alpha_8 = \beta_{11}$, $\alpha_9 = \beta_{12} + \beta_{15}$, $\alpha_{10} = \beta_{16}$

Чтобы восстановить сложенные β: просто поделим соответствующие α_i на 2

$\beta_2 = \beta_5 = -1$　　$\beta_7 = \beta_{10} = -2$

$\beta_3 = \beta_9 = -2$　　$\beta_8 = \beta_{14} = 1$

$\beta_4 = \beta_{13} = 1$　　$\beta_{12} = \beta_{15} = 2$

Преобразуем в матрицу:

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ x_2 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 \\ x_3 & \beta_9 & \beta_{10} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ x_4 & \beta_{13} & \beta_{14} & \beta_{15} & \beta_{16} \end{array} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 9

Билинейная форма b в некотором базисе задаётся формулой:

$$b(x, y) = 4\xi^1\eta^1 + \xi^1\eta^2 + 5\xi^2\eta^1 + 2\xi^2\eta^2$$

В этой формуле ξ^i - координаты вектора x, а η^i - координаты вектора y.

Найти матрицу билинейной формы b.

Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 3 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.

Пример ввода:

$[1, 0; 0, -3/4]$

[4,1;5,2]

Аналогично предыдущим:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \eta_1 & \eta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

откуда?