Тестовые задания к экзамену

Дополнительные главы математического анализа

(по материалам объединённых лекций и практик)

Функции нескольких переменных: основные понятия

1. Что называется ε-окрестностью точки $P_0 \in \mathbb{R}^n$? A) $\{P : \rho(P, P_0) \leq \varepsilon\}$ B) $\{P : \rho(P, P_0) < \varepsilon\}$ C) $\{P : \|P\| < \varepsilon\}$ D) $\{P : \rho(P, P_0) = \varepsilon\}$
2. Точка P_0 называется точкой сгущения множества M, если: A) $P_0 \in M$ B) P_0 — внутренняя точка M C) в любой окрестности P_0 есть точки M, отличные от P_0 D) P_0 — граничная точка M и $P_0 \notin M$
3. Множество называется связным, если: A) оно замкнуто B) оно ограничено C) любые две точки можно соединить непрерывной кривой, лежащей в множестве D) оно содержит все свои точки сгущения
4. Верно ли: любое открытое множество состоит только из внутренних точек? A) Да B) Нет
5. Верно ли: всякое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ является ограниченным? A) Да B) Нет

Предел функции нескольких переменных. Повторные и двойной пределы

6. Запись $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$ означает: A) $f(P_0) = A$ B) $f(P)$ стремится к A при $P \to P_0$ по любому пути C) существуют повторные пределы по каждой координате D) функция обязана быть определена в точке P_0
7. Какое утверждение корректно? A) Из существования повторных пределов следует существование двойного B) Двойной предел всегда равен любому повторному C) Двойной предел может существовать, но повторные не существовать D) Двойной предел существует $\Rightarrow$ любой повторный существует и равен ему
8. Условие непрерывности f в точке P_0: A) f ограничена в окрестности P_0 B) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$ C) существуют частные производные в P_0 D) $f(P) = f(P_0)$ при всех P из некоторой окрестности

9. (практика) Если при подходе к P_0 по двум различным кривым пределы различны, то: A) предел существует, но зависит от пути B) двойного предела не существует C) существует повторный предел D) функция непрерывна в P_0

10. (практика) Если двойной предел существует и равен A, то предел по любой кривой, стремящейся к P_0, равен: A) может быть любым B) A C) 0 D) не определён

Частные производные: определение и смысл

11. Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ — это: A) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ B) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ C) $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ D) $\frac{df}{dx}$ при $y = y(x)$

12. Геометрический смысл $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ для поверхности $z = f(x, y)$: A) наклон касательной к сечению плоскостью $y = y_0$ B) наклон касательной плоскости по нормали C) кривизна линии уровня D) площадь элемента поверхности

13. Что верно? A) Существование частных производных гарантирует дифференцируемость B) Дифференцируемость гарантирует существование частных производных C) Непрерывность гарантирует существование частных производных D) Частные производные не связаны с дифференциалом

14. (практика) Если в точке существуют частные производные, но функция не непрерывна, то функция: A) обязательно дифференцируема B) обязательно не дифференцируема C) может быть дифференцируема или нет (нужно проверять определение) D) обязательно непрерывна

15. (практика) Верно ли: если частные производные непрерывны в окрестности точки, то функция дифференцируема в этой точке? A) Да B) Нет

Дифференцируемость и полный дифференциал

16. Дифференцируемость $f(x, y)$ в точке эквивалентна представлению: A) $\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y$ B) $\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$ C) $\Delta f = o(1)$ D) $\Delta f = O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$

17. Полный дифференциал df функции $f(x, y)$ равен: A) $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx$ B) $df = \frac{\partial f}{\partial y} dy$ C) $df = f_x\,dx + f_y\,dy$ D) $df = f_{xx} dx + f_{yy} dy$

18. Что верно? A) df зависит от пути изменения (x, y) B) df линейно по (dx, dy) C) df содержит малые высших порядков D) df определён только при наличии вторых производных

19. (практика) Если f дифференцируема, то при малых приращениях: A) Δf лучше аппроксимируется df B) Δf и df всегда равны C) df не имеет смысла D) Δf всегда квадратично мала

20. (практика) Верно ли: непрерывность частных производных в окрестности точки является достаточным условием дифференцируемости? A) Да B) Нет

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

21. Для поверхности $F(x, y, z) = 0$ уравнение касательной плоскости в точке P_0 имеет вид: A) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ B) $F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$ C) $F_{xx}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^2 + \cdots = 0$ D) $z = z_0$

22. Нормальный вектор к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке P_0: A) (x_0, y_0, z_0) B) $(F_x, F_y, F_z)\big|_{P_0}$ C) $(F_{xx}, F_{yy}, F_{zz})\big|_{P_0}$ D) $(1, 1, 1)$

23. Что описывает нормаль к поверхности в точке P_0? A) любую прямую в касательной плоскости B) прямую, проходящую через P_0 и параллельную градиенту F C) прямую, перпендикулярную оси Oz D) любую прямую, пересекающую поверхность

24. (практика) Для сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ нормаль в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельна вектору: A) $(1, 0, 0)$ B) $(0, 1, 0)$ C) $(0, 0, 1)$ D) (x_0, y_0, z_0)

25. (практика) Верно ли: если $\nabla F(P_0) = 0$, то касательная плоскость по формуле из пункта 1) не определяется? A) Да B) Нет

Экстремум функции двух переменных: стационарные точки

26. Стационарная точка $f(x, y)$ — это точка, где: A) $f = 0$ B) $f_x = f_y = 0$ C) $f_{xx} = f_{yy} = 0$ D) $f_x \neq 0, f_y \neq 0$

27. В достаточных условиях экстремума используется величина: A) $D = A+B+C$ B) $D = AC - B^2$ C) $D = A^2 + B^2 + C^2$ D) $D = AB - C$

28. Если в стационарной точке $D < 0$, то: A) минимум B) максимум C) седло (экстремума нет) D) нельзя ничего сказать

29. (практика) Если функция дифференцируема в замкнутой области, то глобальные экстремумы достигаются: A) только в стационарных точках B) только на границе C) в стационарных и/или на границе D) нигде не достигаются

30. (практика) Верно ли: из существования стационарной точки следует существование локального экстремума? A) Да B) Нет

Наибольшее и наименьшее значения на замкнутой области

31. Для непрерывной функции на ограниченной замкнутой области верно: A) всегда имеет максимум, но не обязательно минимум B) всегда имеет минимум, но не обязательно максимум C) имеет и максимум, и минимум D) может не иметь ни того, ни другого

32. Где нужно искать глобальные экстремумы дифференцируемой функции в замкнутой области? A) только в критических точках B) только на границе C) в критических точках и на границе D) только в вершинах области

33. Что означает проверка значений функции на границе области? A) проверку повторного предела B) сведение к задаче одной переменной (параметризация/подстановка) C) поиск частных производных второго порядка D) интегрирование по области

34. (практика) Верно ли: если на границе нет критических точек (как у функции одной переменной), то достаточно значений на концах параметрического отрезка? A) Да B) Нет

35. (практика) Верно ли: глобальный экстремум в замкнутой области не может достигаться в точке, где функция не определена? A) Да B) Нет

Мера Жордана. Площадь области

36. Мера Жордана области (в плоском случае) связана с: A) длиной границы B) площадью области C) объёмом тела D) кривизной контура

37. Область (в контексте кратных интегралов) — это: A) любое множество точек B) открытое связное множество C) замкнутое множество D) множество без граничных точек

38. Для существования двойного интеграла в смысле Римана–Жордана обычно требуется: A) чтобы функция была строго монотонна B) чтобы область имела меру Жордана и функция была ограничена C) чтобы функция была аналитична D) чтобы область была кругом

39. (практика) Если $f(x, y) = 1$, то $\iint_D 1\, dxdy$ равен: A) длине границы D B) площади D C) нулю D) зависит от параметризации

40. (практика) Верно ли: если область D не является жордановой, то классическое определение двойного интеграла через интегральные суммы может быть неприменимо? A) Да B) Нет

Двойной интеграл и сведение к повторному

41. Двойной интеграл определяется как: A) сумма значений функции B) предел интегральных сумм при измельчении разбиения C) произведение двух одномерных интегралов D) интеграл по границе области

42. Формула сведения к повторному интегралу для области типа I (по x): A) $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ B) $\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dy \int_a^b f(x,y)\,dx$ C) $\int_a^b f(x,\varphi(x))\,dx$ D) $\int_a^b \int_c^d f\,dydx$ (без условий)

43. Теорема о среднем значении для двойного интеграла утверждает существование точки $(x^*,y^*)\in D$, такой что: A) $\iint_D f\,dxdy = f(x^*,y^*)$ B) $\iint_D f\,dxdy = f(x^*,y^*)\cdot S_D$ C) $\iint_D f\,dxdy = S_D$ D) $f(x^*,y^*) = 0$

44. (практика) Изменение порядка интегрирования применяется, когда: A) область интегрирования удобнее описать другим способом B) функция становится непрерывной C) интеграл исчезает D) якобиан равен нулю

45. (практика) Верно ли: при корректной перестройке области значение двойного интеграла не меняется? A) Да B) Нет

Криволинейные координаты. Якобиан

46. Якобиан перехода $(u,v)\mapsto(x,y)$ равен: A) $\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}$ B) $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ C) $\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$ D) $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$

47. Условие взаимно-однозначного соответствия (внутри области) в лекции формулируется как: A) $J=0$ B) $J\neq 0$ C) $J>1$ D) $J<0$

48. Что происходит с ориентацией обхода контура при $J<0$? A) сохраняется B) меняется на противоположную C) всегда становится положительной D) зависит только от области D

49. (практика) При переходе к полярным координатам (r,φ) в плоскости элемент площади равен: A) $dr\,d\varphi$ B) $r\,dr\,d\varphi$ C) $r^2\,dr\,d\varphi$ D) $\sin\varphi\,dr\,d\varphi$

50. (практика) Верно ли: если при замене переменных якобиан обращается в нуль в точках области, то стандартная формула замены требует отдельной проверки условий? A) Да B) Нет

Площадь в криволинейных координатах

51. Идея вывода формулы площади через (u, v) состоит в том, что: A) область D разбивают по x, y, а потом интегрируют по u, v без коэффициента B) разбивают образ Г прямоугольной сеткой и переносят элемент площади через якобиан C) используют только формулу Грина D) используют только формулу Стокса

52. Какой множитель появляется при переходе к криволинейным координатам в двойном интеграле? A) J B) $|J|$ C) J^2 D) $\sqrt{|J|}$

53. Сферические координаты (r, φ, θ) имеют якобиан вида: A) r B) $r^2 \sin\theta$ C) $r \sin\varphi$ D) $\sin r$

54. (практика) При переходе к цилиндрическим координатам (ρ, φ, z) элемент объёма равен: A) $d\rho\, d\varphi\, dz$ B) $\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$ C) $\rho^2\, d\rho\, d\varphi\, dz$ D) $\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, dz$

55. (практика) Верно ли: при вычислении площади/объёма в новых координатах всегда используется модуль якобиана, чтобы исключить зависимость от ориентации? A) Да B) Нет

Тройной интеграл и сведение к повторному

56. Тройной интеграл определяется как: A) сумма по ребрам тела B) предел интегральных сумм по разбиению объёма C) произведение трёх одномерных интегралов без условий D) интеграл по поверхности тела

57. Сведение тройного интеграла к повторному в лекции записывается в виде цепочки интегралов по переменным (пример общего вида): A) $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz$ B) $\int_a^b f(x, y, z)\, dx$ C) $\int f\, dS$ D) $\iint f\, dxdy$

58. При переходе к цилиндрическим координатам в $\mathbb{R}^3$ верно: A) $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$ B) $x = r,\ y = \varphi,\ z = \theta$ C) $x = r\sin\theta,\ y = r\cos\theta,\ z = \varphi$ D) $x = \theta,\ y = \varphi,\ z = r$

59. (практика) При вычислении тройного интеграла через цилиндрические координаты обязательно появляется множитель: A) ρ B) ρ^2 C) $\sin\varphi$ D) $\sin\theta$

60. (практика) Верно ли: пределы интегрирования по ρ, φ, z определяются проекцией тела на плоскость и ограничивающими поверхностями? A) Да B) Нет

Криволинейные интегралы первого рода: длина кривой

61. Длина кривой AB определяется как: A) минимум периметров вписанных ломаных B) точная верхняя грань периметров вписанных ломаных C) значение параметра в конце D) площадь под графиком

62. Кривая называется спрямляемой, если: A) параметризуема B) имеет касательную в каждой точке C) её длина конечна D) она замкнута

63. Аддитивность длины утверждает: A) $L(AB) = L(AC) - L(CB)$ B) $L(AB) = L(AC) + L(CB)$ при C между A и B C) $L(AB) = \max\{L(AC), L(CB)\}$ D) $L(AB) = 0$

64. (практика) Формула длины при параметрическом задании $x = x(t)$, $y = y(t)$: A) $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$ B) $\int_{t_1}^{t_2} (x' + y')\, dt$ C) $\int_{t_1}^{t_2} (x^2 + y^2)\, dt$ D) $\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}$

65. (практика) Формула длины для $y = y(x)$ на $[a, b]$: A) $\int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$ B) $\int_a^b (1 + y'_x)\, dx$ C) $\int_a^b \sqrt{1 - (y'_x)^2}\, dx$ D) $\int_a^b y\, dx$

Криволинейный интеграл 1 рода: определение и вычисление

66. Криволинейный интеграл 1 рода $\int_L f\, dS$ определяется как: A) предел сумм $\sum f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$ при $\max|\Delta S_i| \to 0$ B) предел сумм $\sum f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i$ C) произведение f на длину кривой без условий D) интеграл по области

67. При параметрическом задании кривой интеграл 1 рода вычисляется как: A) $\int f(x(t), y(t))\, dt$ B) $\int f(x(t), y(t))\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$ C) $\int f(x(t), y(t))((x')^2 + (y')^2)\, dt$ D) $\int f(x, y)\, dxdy$

68. При задании $y = y(x)$ формула принимает вид: A) $\int_a^b f(x, y)\, dx$ B) $\int_a^b f(x, y)\sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$ C) $\int_a^b f(x, y)\, dy$ D) $\int_a^b f(x, y)\, dS$ без уточнения

69. (практика) Верно ли: интеграл 1 рода зависит от ориентации (направления обхода кривой)? A) Да B) Нет

70. (практика) При полярном задании $\rho = \rho(\varphi)$ дифференциал дуги содержит: A) $\sqrt{(\rho'_\varphi)^2 + \rho^2}\, d\varphi$ B) $\rho\, d\varphi$ C) $\rho^2\, d\varphi$ D) $d\rho$

Сведение криволинейного интеграла 1 рода к определённому

71. Связь $\int_L f\,dS$ с определённым интегралом основана на: A) разбиении области D B) разбиении кривой на дуги и пределе интегральных сумм C) теореме Гаусса D) формуле замены переменных в двойном интеграле

72. Если параметр t используется для задания кривой, то dS равен: A) dt B) $\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$ C) $(x'+y')\,dt$ D) $\frac{dt}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}$

73. При выборе параметра как длины дуги ℓ (в лекции), справедливо: A) $dS = d\ell$ B) $dS = \ell\,d\ell$ C) $dS = \ell^2\,d\ell$ D) $dS = \sin\ell\,d\ell$

74. (практика) Верно ли: формулы вычисления интеграла 1 рода отличаются в зависимости от способа задания кривой (параметрически/декартово/полярно)? A) Да B) Нет

75. (практика) Если функция $f \equiv 1$, то $\int_L 1\,dS$ равен: A) площади области B) длине кривой L C) нулю D) значению f в конечной точке

Поверхности. Двусторонние поверхности. Элемент площади

76. Поверхность называется двусторонней, если: A) у неё нет касательной плоскости B) при обходе замкнутого контура направление выбранной нормали возвращается к исходному C) она имеет самопересечения D) она замкнута

77. Классический пример односторонней поверхности: A) сфера B) цилиндр C) лист Мёбиуса D) плоскость

78. При параметризации поверхности $(u,v)\mapsto(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ направляющие косинусы нормали выражаются через определители вида: A) $x'_u + x'_v$ B) определители из производных по u и v (компоненты A,B,C) C) только через z'_u и z'_v D) только через вторые производные

79. (практика) Верно ли: поверхностный интеграл 1 рода является пределом сумм $\sum f(M_i)\Delta S_i$ по разбиению поверхности? A) Да B) Нет

80. (практика) Верно ли: поверхностный интеграл 1 рода не зависит от выбора ориентации нормали? A) Да B) Нет

Векторные операторы: grad, div, rot и тождества

81. Оператор $\operatorname{div}\vec{A}$ по смыслу соответствует: A) скалярному произведению $\vec{A}\cdot\vec{A}$ B) мере “источниковости” поля (локальной интенсивности стока/истока) C) длине вектора D) кривизне траектории

82. Оператор $\operatorname{rot}\vec{A}$ по смыслу соответствует: A) локальной “вихревости” поля B) площади поверхности C) плотности массы D) значению потенциала

83. Какое тождество приведено в лекции? A) $\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - (\nabla\cdot\nabla)\vec{A}$ B) $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times\vec{B}$ C) $\nabla\cdot(\nabla f) = 0$ D) $\nabla\times(\nabla f) \neq 0$

84. (практика) Формула вида $\operatorname{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}$ относится к: A) свойствам скалярного произведения B) тождествам векторного анализа C) теореме о среднем D) формуле замены переменных

85. (практика) Верно ли: для потенциального поля $\vec{A} = \nabla\varphi$ обычно выполняется $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0}$? A) Да B) Нет