№1

1. Продолжите равенства $(\lambda+\mu)a = \ldots$ и $\lambda(a+b) = \ldots$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ — элементы из поля, а $a, b \in L$ — элементы линейного пространства.

$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$ для любых $a, b \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$;

$(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in L$;

№2

2. Используя аксиомы линейного пространства и следствия из него, покажите, что $(-\lambda)a = \lambda\cdot(-a)$ и $\lambda(a-b) = (-\lambda)(b-a)$, где $\lambda \in \mathbb{F}$ — элемент из поля, а $a, b \in L$ — элементы линейного пространства.

Аксиомы:

1. Относительно сложения L есть абелева группа;
2. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$ для любых $a, b \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$;
3. $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in L$;
4. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in L$;
5. $1a = a$ для любого $a \in L$.

Следствия:

1. $\lambda 0_L = 0_L$ для любого $\lambda \in \mathbb{F}$ (здесь 0_L — нулевой вектор);
2. $\lambda(-a) = \lambda a$ для любых $\lambda \in \mathbb{F}$, $a \in L$;
3. $\lambda(a-b) = \lambda a - \lambda b$ для любых $\lambda \in \mathbb{F}$, $a, b \in L$;
4. $0a = 0_L$ для любого $a \in L$ (здесь 0 слева — скаляр, справа — вектор)
5. $(-1)a = -a$ для любого $a \in L$;
6. $(\lambda-\mu)a = \lambda a - \mu a$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in L$.

$(-\lambda)a = (-1\cdot\lambda)a = \lambda(-1a) = \lambda(-a)$

? $\lambda(a-b) = (1\lambda)(a-b) = ((-1(-1))\lambda)(a-b) = ((-1\lambda)\cdot(-1))(a-b) =$

$= (-1\lambda)((-1)(a-b)) = (-\lambda)((-1)(a-b)) = (-\lambda)(-1a-(-1)b) =$

$= (-\lambda)(-a+b)$

№3

3. Какие линейные пространства называются вещественными? Комплексными?

NtB. Элементы пространства L называются ***векторами***, поля $\mathbb{F}$ — ***скалярами*** или ***числами***. Векторные пространства над полем $\mathbb{R}$ называются ***вещественными***, над $\mathbb{C}$ — ***комплексными***.

№4

4. Какое пространство называется арифметическим (координатным) над полем $\mathbb{F}$?

Множество $\mathbb{F}^n$ столбцов высоты n с элементами из $\mathbb{F}$ относительно операций поэлементного сложения и умножения на числа — ***арифметическое*** или ***координатное*** пространство;

№5

5. Почему вещественные многочлены $\mathbb{R}[x]$ фиксированной степени n с естественными операциями сложения и умножения на скаляр не являются линейным пространством? Какая аксиома линейного пространства нарушается?

Возьмём 2 многочлена:

$m = -a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1$ $\quad n = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1$

$m+n = 2a_{n-1}x^{n-1} + 2a_{n-2}x^{n-2} + \ldots 2a_1$ – имеет степень $n-1$

$(m+n) \notin R[x]$ со степ. n

Такое лиенейное пространство не является абелевой группой
по сложению т.к. не замкнуто относительно этой операции

№6

6. Сформулируйте определение линейной комбинации векторов.

Опр. 2.1. Выражение вида $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ ($\lambda_i \in \mathbb{F}$) называется ***линейной комбинацией*** векторов $a_1, \ldots, a_n \in L$. Скаляры λ_i называются ***коэффициентами*** линейной комбинации. Говорят, что вектор $b \in L$ ***линейно выражается*** через векторы $a_1, \ldots, a_n$, если он равен некоторой их линейной комбинации.

№7 + 8

7. Сформулируйте определение линейной оболочки. Как обозначается линейная оболочка векторов из множества S?

8. В каком случае пространство L порождается множеством векторов S?

Опр. 2.2. ***Линейной оболочкой*** подмножества $S \subseteq L$ называется множество всех векторов из L, представимых в виде конечных линейных комбинаций элементов из S. Она обозначается $\langle S \rangle$. Говорят, что пространство L ***порождается*** множеством S, если $\langle S \rangle = L$

Обознач. как $\langle S \rangle$

№9

9. Какая линейная комбинация векторов называется тривиальной? Нетривиальной?

Опр. 2.3. Линейная комбинация $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ векторов $a_1, \ldots, a_n \in L$, где $\lambda_i \in \mathbb{F}$ называется ***тривиальной***, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, и ***нетривиальной*** в противном случае.

№10

10. В каком случае векторы называются линейно зависимыми? Независимыми?

Опр. 2.4. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n \in L$ называются ***линейно зависимыми***, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, и ***линейно независимыми*** в противном случае.

№11

11. Дайте определение понятия системы векторов? Чем система отличается от множества?

NtB. Понятие ***системы векторов*** отличается от понятия множества векторов следующим:

1. Векторы системы занумерованы (если не менять сами векторы, но поменять лишь их нумерацию, получим уже другую систему);
2. Среди них могут быть равные.

Может быть ***пустая система***, состоящая из пустого множества векторов.

№12

12. В каком случае система векторов называется линейно зависимой?

1. *Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из этих столбцов есть линейная комбинация остальных;*

№13

13. Может ли система, состоящая из одного вектора, быть линейно зависимой? Почему?

Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой;

т.к. только нулевой вектор может образовывать нетривиальную комбинацию из одного элемента, равную 0

$\forall n \in \mathbb{Z} / \{0\} \quad n\bar{0} = \bar{0}$

№14

14. Сформулируйте определение базиса линейного пространства.

Опр. 3.1. Система векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq L$ называется ***базисом*** векторного пространства L, если каждый вектор $a \in L$ единственным образом выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Коэффициенты этого выражения называются ***координатами*** вектора a в данном базисе.

№15

15. Может ли в линейно независимой системе векторов быть линейно зависимая подсистема? Почему?

3. Если система векторов линейно независима, то любая её подсистема тоже линейно независима.

Система линейно независима, т.е. из её векторов нельзя составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю. Если из этой системы вычеркнуть несколько векторов, то очев, что в ней не появится такая линейная комбинация, а значит такая подсистема независима.

№16

16. Укажите возможный базис пространства $\mathbb{F}^n$.

(в) Единичные столбцы $(1, 0, \ldots, 0)^T$, $(0, 1, \ldots, 0)^T$, …, $(0, 0, \ldots, 1)^T$ составляют базис пространства $\mathbb{F}^n$;

№17

17. Приведите пример базиса в пространстве матриц размерности 2×3.

Всевозможные матричные единицы, т.е:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \right\}$$

№18 + 19 + 20

18. Что называется размерностью векторного пространства? Как обозначается размерность пространства L?

19. Чему равна размерность пространства $\{0\}$?

20. Какое линейное пространство называется конечномерным? Бесконечномерным?

NtB. Не во всяком векторном пространстве существует базис в смысле данного выше определения. Вообще, если в пространстве существует базис из n векторов, то и любой другой базис этого пространства тоже содержит n векторов. Число элементов произвольного базиса (если он существует) в L называется ***размерностью*** пространства L и обозначается $\dim L$. В пространстве $\{0\}$ базисом по определению является пустая система (то есть его размерность равна нулю). Если базиса в смысле данного вышего определения не существует, то можно считать, что $\dim L = \infty$. Если $\dim L < \infty$, то пространство называется ***конечномерным***.

№21

21. В каком случае подмножество $U \subset L$ будет являться подпространством L?

Опр. 1.1. Подмножество U векторного пространства L называется ***подпространством***, если

1. U является подгруппой аддитивной группы L;
2. $a \in U \Rightarrow \lambda a \in U$ для любого $\lambda \in \mathbb{F}$.

Тот факт, что U является подпространством V будем обозначать $U \leqslant \overset{V}{\cancel{L}}$.

№22

22. Какие подпространства L называются тривиальными?

$\{0\}$ и $\{L\}$

№23

23. Как связаны размерности подпространства и пространства, если они конечномерны?

$U \leq L$, $\dim(L) \neq \infty$ $\Rightarrow$ $\dim(U) \leq \dim(L)$

№24 + 25

24. Какое множество называется линейным многообразием? Как определяется его размерность?

25. При каком условии линейное многообразие называют гиперплоскостью в линейном пространстве? Как иначе называют гиперплоскость в пространстве $\dim V = 2$.

Опр. 1.2. Пусть $U \leqslant L$, $a \in L$ — фиксированный вектор. Множество векторов вида $x = a + U = \{a + u \mid u \in U\}$ называется ***линейным многообразием*** размерности $\dim U$. Говорят, что оно параллельно подпространству U. Одномерное линейное многообразие называется ***прямой***, k-мерное — ***k-мерной плоскостью***, если $1 < k < \dim V - 1$, ***гиперплоскостью*** — если $k = \dim V - 1$.

Гиперплоскость в пр-ве dim(V) = 2 - прямая

№26

26. При каком условии линейное многообразие является подпространством?

NtB. Линейное многообразие является подпространством только при условии $a \in U$. При этом оно совпадает с U.

№27

27. В каком случае размерность подпространства $U \leqslant V$ совпадает с размерностью пространства V?

Если U=V

№28

28. Напишите размерности пространства диагональных матриц $\mathrm{Mat}_n^D(\mathbb{R})$, пространства полиномов $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$степени не выше n, комплексного арифметического пространства $\mathbb{C}n$.

Потом

№29

29. Какие линейные пространства называются изоморфными?

Опр. 2.1. Векторные пространства U и V над полем $\mathbb{F}$ называются ***изоморфными***, если существует такое биективное отображение $\varphi : V \to U$, что

- $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ для любых $a, b \in V$;
- $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$ для любых $\lambda \in \mathbb{F}$, $a \in V$.

Само отображение φ называется при этом ***изоморфизмом*** пространств.

№30

30. Благодаря чему существует возможность построить изоморфизм между линейным пространством и координатным пространством той же размерности?

Теорема 2.1. *Всякое векторное пространство V над полем $\mathbb{F}$, имеющее базис из n векторов, изоморфно пространству $\mathbb{F}^n$.*

Доказательство. Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис V. Рассмотрим отображение $\varphi : V \to \mathbb{F}^n$, которое ставит в соответствие каждому вектору из V его координатную строку в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. В силу определения базиса оно биективно. Если $a = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots a_ne_n$ и $b = b_1e_1 + b_2e_2 + \ldots b_ne_n$, то

$$a + b = (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + \ldots (a_n + b_n)e_n,$$

$$\lambda a = (\lambda a_1)e_1 + (\lambda a_2)e_2 + \ldots (\lambda a_n)e_n.$$

Из этого следует, что φ — изоморфизм. $\square$