

## 1. Вычислить данные криволинейные интегралы:

- 1)  $\int_{L_{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$ , где  $L_{AB}$  — дуга параболы  $y = x^2$  от точки  $A(-1, 1)$  до точки  $B(1, 1)$
- 2)  $\int_{L_{AB}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5 + \sqrt[3]{y^5}}}$ , где  $L_{AB}$  — дуга астроида  $x = 2 \cos^3 t$ ,  $y = 2 \sin^3 t$  от точки  $A(2, 0)$  до точки  $B(0, 2)$ .
- 3)  $\int_{L_{OA}} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$ , где  $L_{OA}$  — дуга кубической параболы  $y = x^3$  от точки  $O(0, 0)$  до точки  $A(1, 1)$ .
- 4)  $\oint_L (x + 2y)dx + (x - y)dy$ , где  $L$  — окружность  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$  при положительном направлении обхода
- 5)  $\oint_L (x^2 y - x)dx + (y^2 x - 2y)dy$ , где  $L$  — дуга эллипса  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$  при положительном направлении обхода.
- 6)  $\oint_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2 y dy$ , где  $L_{AB}$  — дуга эллипса  $x = \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$  от точки  $A(1, 0)$  до точки  $B(0, 2)$ .
- 7)  $\int_{L_{OBA}} 2xydx - x^2 dy$ , где  $L_{OBA}$  — ломаная  $OBA$ :  $O(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $A(2, 1)$ .
- 8)  $\int_{L_{AB}} (x^2 - y^2)dx + xydy$ , где  $L_{AB}$  — отрезок прямой  $AB$ ,  $A(1, 1)$ ,  $B(3, 4)$ .
- 9)  $\int_{L_{AB}} \cos y dx - \sin x dy$ , где  $L_{AB}$  — отрезок прямой  $AB$ ,  $A(2\pi, -2\pi)$ ,  $B(-2\pi, 2\pi)$ .
- 10)  $\int_{L_{AB}} \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ , где  $L_{AB}$  — отрезок  $AB$ :  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 6)$ .
- 11)  $\int_{L_{AB}} xy dx + (y - x)dy$ , где  $L_{AB}$  — дуга кубической параболы  $y = x^3$  от точки  $A(0, 0)$  до точки  $B(1, 1)$ .
- 12)  $\int_{L_{ABC}} (x^2 + y^2)dx + (x + y^2)dy$ , где  $L_{ABC}$  — ломаная  $ABC$ :  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 2)$ ,  $C(3, 5)$ .
- 13)  $\int_{L_{OB}} xy^2 dx + yz^2 dy - x^2 z dz$ , где  $L_{OB}$  — отрезок прямой  $OB$ :  $O(0, 0, 0)$ ,  $B(-2, 4, 5)$ .
- 14)  $\int_{L_{OA}} y dx + x dy$ , где  $L_{OA}$  — дуга окружности  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$ ,  $O(R, 0)$ ,  $A(0, R)$ .
- 15)  $\int_{L_{OA}} xy dx + (y - x)dy$ , где  $L_{OA}$  — дуга параболы  $y^2 = x$  от  $O(0, 0)$  до  $A(1, 1)$ .
- 16)  $\int_{L_{AB}} x dx + y dy + (x - y + 1)dz$ , где  $L_{AB}$  — отрезок прямой  $AB$ :  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(2, 3, 4)$ .

- 17)  $\int_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2ydy$ , где  $L_{AB}$  — дуга параболы  $y^2 = 4 - 4x$  от точки  $A(1, 0)$  до точки  $B(0, 2)$ .
- 18)  $\int_{L_{OB}} xydx + (y - x)dy$ , где  $L_{OB}$  — дуга параболы  $y = x^2$  от точки  $O(0, 0)$  до точки  $B(1, 1)$ .
- 19)  $\int_{L_{OB}} (xy - y^2)dx + xdy$ , где  $L_{OB}$  — дуга параболы  $y = x^2$  от точки  $O(0, 0)$  до точки  $B(1, 1)$ .
- 20)  $\int_{L_{AB}} xdy - ydx$ , где  $L_{AB}$  — дуга астроида  $x = 2\cos^3 t$ ,  $y = 2\sin^3 t$  от точки  $A(2, 0)$  до точки  $B(0, 2)$ .
- 21)  $\int_{L_{AB}} (xy - x)dx + \frac{1}{2}x^2dy$ , где  $L_{AB}$  — дуга параболы  $y^2 = 4x$  от точки  $A(0, 0)$  до точки  $B(1, 2)$ .
- 22)  $\int_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2ydy$ , где  $L_{AB}$  — отрезок прямой  $AB$ :  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 2)$ .
- 23)  $\int_{L_{AB}} 2xydx + y^2dy + z^2dz$ , где  $L_{AB}$  — дуга одного витка винтовой линии  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 2t$ ,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, 0, 4\pi)$ .
- 24)  $\int_{L_{AB}} \frac{y}{x}dx + xdy$ , где  $L_{AB}$  — дуга линии  $y = \ln x$  от точки  $A(1, 0)$  до  $B(e, 1)$ .
- 25)  $\oint_L ydx - xdy$ , где  $L$  — дуга эллипса  $x = 3\cos t$ ,  $y = 2\sin t$ , «пробегаемая» в положительном направлении обхода.
- 26)  $\int_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy$ , где  $L_{OA}$  — дуга параболы  $y = x^2/4$  от  $O(0, 0)$  до  $A(2, 1)$ .
- 27)  $\int_{L_{AB}} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ , где  $L_{AB}$  — ломаная линия  $y = |x|$  от точки  $A(-1, 1)$  до точки  $B(2, 2)$ .
- 28)  $\int_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy + zdz$ , где  $L_{OA}$  — отрезок прямой, соединяющий точки  $O(0, 0, 0)$  и  $A(2, 1, -1)$ .
- 29)  $\oint_L xdy - ydx$ , где  $L$  — контур треугольника с вершинами  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(0, 1)$  при положительном направлении обхода.
- 30)  $\int_{L_{ACB}} (x^2 + y)dx + (x + y^2)dy$ , где  $L_{ACB}$  — ломаная  $ACB$ :  $A(2, 0)$ ,  $C(5, 0)$ ,  $B(5, 3)$ .

2. Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции  $u(x, y)$ . Найти функцию  $u(x, y)$ .

- 1)  $(2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$
- 2)  $\left(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2} - 3\right)dx + \left(\frac{2x^2y}{1+x^2y^2} - 5\right)dy$

- 3)  $-\left(\frac{1}{2} \cos 2y + y \sin 2x\right) dx + (x \sin 2y + \cos^2 x + 1) dy$
  - 4)  $(y^2 e^{xy^2} + 3) dx + (2xy e^{xy^2} - 1) dy$
  - 5)  $\left(\frac{1}{x+y} + \cos x \cos y - 3x^2\right) dx + \left(\frac{1}{x+y} - \sin x \sin y + 4y\right) dy$
  - 6)  $\left(\frac{y}{x} + \ln y + 2x\right) dx + \left(\ln x + \frac{x}{y} + 1\right) dy$
  - 7)  $(e^{x+y} - \cos x) dx + (e^{x+y} + \sin y) dy$
  - 8)  $\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 2x\right) dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 6y\right) dy$
  - 9)  $(e^{xy} + xy e^{xy} + 2) dx + (x^2 e^{xy} + 1) dy$
  - 10)  $(y e^{xy} + y^2) dx + (x e^{xy} + 2xy) dy$
  - 11)  $(y \cos(xy) + 2x - 3y) dx + (x \cos(xy) - 3x + 4y) dy$
  - 12)  $(y \sin(x+y) + xy \cos(x+y) - 9x^2) dx + (x \sin(x+y) + xy \cos(x+y) + 2y) dy$
  - 13)  $(5y + \cos x + 6xy^2) dx + (5x + 6x^2y) dy$
  - 14)  $(y^2 e^{xy} - 3) dx + e^{xy}(1 + xy) dy$
  - 15)  $(1 + \cos(xy)) y dx + (1 + \cos(xy)) x dy$
  - 16)  $(y - \sin x) dx + (x - 2y \cos y^2) dy$
  - 17)  $(\sin 2x - \frac{1}{x^2y}) dx - \frac{1}{xy^2} dy$
  - 18)  $\frac{x+y}{xy} dx + \frac{y-x}{y^2} dy$
  - 19)  $(20x^3 - 21x^2y + 2y) dx + (3 + 2x - 7x^3) dy$
  - 20)  $(y e^{xy} - 2 \sin x) dx + (x e^{xy} + \cos y) dy$
  - 21)  $y(e^{xy} + 5) dx + x(e^{xy} + 5) dy$
  - 22)  $\left(x - \frac{y}{x^2-y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2-y^2} - y\right) dy$
  - 23)  $\frac{x \ln y+y}{x} dx + \frac{y \ln x+x}{y} dy$
  - 24)  $e^{x-y}(1+x+y) dx + e^{x-y}(1-x-y) dy$
  - 25)  $(3x^2 - 2xy + y) dx + (x - x^2 - 3y^2 - 4y) dy$
  - 26)  $(2x e^{x^2-y^2} - \sin x) dz + (\sin y - 2y e^{x^2-y^2}) dy$
  - 27)  $\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + x^2\right) dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} + y\right) dy$
  - 28)  $\frac{1-y}{x^2y} dx + \frac{1-2x}{xy^2} dy$
  - 29)  $\left(\frac{1}{y-1} - \frac{y}{(x-1)^2} - 2\right) dx + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{(y-1)^2} + 2y\right) dy$
  - 30)  $(3x^2 - 2xy + y^2) dx + (2xy - x^2 - 3y^2) dy$
-

3. Решите следующие задачи:

- 1) Вычислить длину дуги цепной линии  $y = (e^x + e^{-x})/2$ ,  $x \in [0; 1]$
- 2) Вычислить моменты инерции относительно осей координат отрезка однородной прямой  $2x + y = 1$ , лежащего между этими осями.
- 3) Найти координаты центра масс четверти однородной окружности  $x^2 + y^2 = a^2$ , лежащей в первом квадранте.
- 4) Вычислить массу дуги кривой  $y = \ln x$ , заключенной между точками с абсциссами  $x = \sqrt{3}$  и  $x = \sqrt{8}$ , если плотность дуги в каждой точке равна квадрату абсциссы этой точки.
- 5) Вычислить момент инерции относительно оси  $Oy$  дуги полукубической параболы  $y^2 = x^3$ , заключенной между точками с абсциссами  $x = 0$  и  $x = \frac{4}{3}$ .
- 6) Вычислить момент инерции относительно начала координат контура квадрата со сторонами  $x = \pm a$ ,  $y = \pm a$ . Плотность квадрата считать постоянной.
- 7) Вычислить длину дуги кривой  $x = 2 - \frac{t^4}{4}$ ,  $y = \frac{t^6}{6}$ , ограниченной точками пересечения ее с осями координат.
- 8) Вычислить координаты центра масс однородной полуокружности  $x^2 + y^2 = 4$ , симметричной относительно оси  $Ox$ .
- 9) Вычислить координаты центра масс однородной дуги одной арки циклоиды  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ .
- 10) Вычислить момент инерции относительно начала координат отрезка прямой, заключенного между точками  $A(2, 0)$  и  $B(0, 1)$ , если линейная плотность в каждой его точке равна 1.
- 11) Вычислить координаты центра масс однородного контура сферического треугольника  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .
- 12) Вычислить статические моменты относительно координатных осей дуги астроида  $x = 2 \cos^3 t$ ,  $y = 2 \sin^3 t$ , расположенной в первом квадранте.
- 13) Вычислить массу отрезка прямой  $y = 2 - x$ , заключенного между координатными осями, если линейная плотность в каждой его точке пропорциональна квадрату абсциссы в этой точке, а в точке  $(2, 0)$  равна 4.
- 14) Найти статический момент относительно оси  $Oy$  однородной дуги первого витка лемнискаты Бернулли  $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ .
- 15) Найти работу силы  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$  при перемещении точечной массы  $m$  по дуге эллипса  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$
- 16) Вычислить момент инерции относительно оси  $Oz$  однородной дуги первого витка винтовой линии  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $z = t$ .
- 17) Вычислить массу дуги кривой  $\rho = 3 \sin \varphi$ , где  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$ , если плотность в каждой её точке пропорциональна расстоянию до полюса и при  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  равна 3.

- 18) Вычислить координаты центра масс однородной дуги первого витка винтовой линии  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 2t$ .
- 19) Вычислить моменты инерции относительно координатных осей дуги четверти окружности  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ , лежащей в первом квадранте.
- 20) Вычислить координаты центра масс дуги первого витка винтовой линии  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $z = t$ , если линейная плотность в каждой её точке пропорциональна аппликате точки и в точке  $t = \pi$  равна 1.
- 21) Вычислить массу дуги четверти эллипса  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , лежащей в первом квадранте, если линейная плотность в каждой её точке равна произведению координат этой точки.
- 22) Вычислить работу силы  $\mathbf{F} = yx\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$  при перемещении материальной точки по прямой  $y = x$  от точки  $(0, 0)$  до точки  $(1, 1)$ .
- 23) Вычислить статический момент относительно оси  $Ox$  однородной дуги цепной линии  $y = (e^x + e^{-x})/2$ , где  $x \in [0, \frac{1}{2}]$
- 24) Вычислить работу силы  $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
- 25) Вычислить статический момент относительно оси  $Ox$  однородной дуги кардиоиды  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$
- 26) Вычислить длину дуги одной арки циклоиды  $x = 3(t - \sin t)$ ,  $y = 3(1 - \cos t)$
- 27) Вычислить работу силы  $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} - x\mathbf{j}$  при перемещении материальной точки вдоль окружности  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$  по ходу часовой стрелки.
- 28) Вычислить работу силы  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$  при перемещении материальной точки из начала координат в точку  $(1, 1)$  по параболе  $y = x^2$ .
- 29) Вычислить работу силы  $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$  при перемещении материальной точки из начала координат в точку  $(1, -3)$  по параболе  $y = -3x^2$ .
- 30) Вычислить моменты инерции относительно осей координат однородного отрезка прямой  $y = 2x$ , заключенного между точками  $(1, 2)$  и  $(2, 4)$ .