Университет ИТМО
Физико-технический мегафакультет
Физический факультет

Группа: *ПИиКТ 1.1*

К работе допущен___________________

Студенты:
Решетников Сергей 467233
Шкиптан Александр 468105

Работа выполнена__________________

Преподаватель: *Сорокина Е.К.*

Отчет принят_______________________

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №2

«Исследование скольжения тележки по наклонной плоскости»

1. Цель работы
1. Проведение эксперимента по проверке равноускоренного движения тележки по наклонной плоскости
2. Измерение модуля ускорения свободного падения

2. Задачи, решаемые при выполнении работы
1. Измерение времени движения тележки по рельсу с фиксированным углом наклона
2. Измерение времени движения тележки по рельсу при разных углах наклона рельса к горизонту
3. Исследование движения тележки при фиксированном угле наклона рельса. Проверка равноускоренного движения тележки
4. Исследование зависимости ускорения тележки от угла наклона рельса к горизонту. Определение ускорения свободного падения

3. Объект исследования
Ускорение тележки при различных углах наклона

4. Метод экспериментального исследования
Многократное измерение промежутков времени, за которые тележка преодалевает заданное расстояние при различных углах наклона.

5. Рабочие формулы и исходные данные
- Перемещение
$$Y = x_2 - x_1$$
- Полуразность квадратов значений времени
$$Z = \frac{(t_2^2 - t_1^2)}{2}$$
- Абсолютная погрешность Y
$$\Delta_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2\right)^2}$$
- Абсолютная погрешность Z

$$\Delta_Z=\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial t_1}\cdot\Delta t_1\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial t_2}\cdot\Delta t_2\right)^2}$$

- Относительная погрешность Y

$$\varepsilon_Y=\frac{\Delta_Y}{Y}\cdot 100\,\%$$

- Относительная погрешность Z

$$\varepsilon_Z=\frac{\Delta_Z}{Z}\cdot 100\,\%$$

- Коэффициент α в зависимости $Y = \alpha Z$

$$\alpha=\frac{\sum_{i=1}^{N} Z_i Y_i}{\sum_{i=1}^{N} Z_i^2}$$

- Среднеквадратичное отклонение коэффициента α

$$\sigma_\alpha=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\alpha Z_i)^2}{(N-1)\cdot\sum_{i=1}^{N} Z_i^2}}$$

- Абсолютная погрешность коэффициента α

$$\Delta_\alpha=2\sigma_\alpha$$

- Относительная погрешность ускорения

$$\varepsilon_\alpha=\frac{\Delta_\alpha}{\alpha}\cdot 100\,\%$$

- Синус угла α (наклона рельса к горизонту)

$$\sin\alpha=\frac{(h_0-h)-(h_0{}'-h')}{x'-x}$$

- Среднее значение ускорения

$$\langle a\rangle=\frac{2(x_2-x_1)}{\langle t_2\rangle^2-\langle t_1\rangle^2}$$

- Погрешность значения ускорения для каждой серии измерений

$$\Delta_\alpha=\langle\alpha\rangle\cdot\sqrt{\frac{(\Delta x_{И2})^2+(\Delta x_{И1})^2}{(x_2-x_1)^2}+4\frac{(\langle t_1\rangle\Delta t_1)^2+(\langle t_2\rangle\Delta t_2)^2}{(\langle t_2\rangle^2-\langle t_1\rangle^2)^2}}$$

- Коэффициент B из теоретической линейной зависимости $a = A + B sin\alpha$

$$B\equiv g=\frac{\sum_{i=1}^{N}(a_i\cdot\sin\alpha_i)-\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} a_i\cdot\sum_{i=1}^{N}\sin\alpha_i}{\sum_{i=1}^{N}\sin\alpha_i^2-\frac{1}{N}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\sin\alpha_i\right)^2}$$

- Коэффициент A из теоретической линейной зависимости $a = A + B sin\alpha$

$$A=\frac{1}{N}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} a_i-B\cdot\sum_{i=1}^{N}\sin\alpha_i\right)$$

- Среднеквадратичное отклонение ускорения свободного падения

$$\sigma_g=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(a_i-(A+B\sin\alpha_i))^2}{\left(\sum_{i=1}^{N}\sin\alpha_i^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\sin\alpha_i\right)^2\right)(N-2)}}$$

- Абсолютная погрешность коэффициента g

$$\Delta_g=2\sigma_g$$

- Относительная погрешность коэффициента g

$$\varepsilon_g=\frac{\Delta_g}{g}\cdot 100\,\%$$

- Среднее значение времени

$$\langle t\rangle=\frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N}$$

- Среднеквадратичное отклонение $\langle t\rangle$

$$\sigma_{\langle t\rangle}=\sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(t_i-\langle t\rangle_N\right)^2}$$

- Доверительный интервал для $\langle t\rangle$

$$\Delta_{\langle t\rangle}=t_{\alpha,N}\cdot\sigma_{\langle t\rangle}$$

- Количество измерений

$$N=5$$

- Табличное значение ускорения свободного падения

$$g_{\text{табл}}=9.82\,\frac{м}{с^2}$$

6. Измерительные приборы

Таблица 1 - Измерительные приборы

№ п/п	Наименование	Предел измерений	Цена деления	Класс точности	$\Delta_И$
1	Линейка на рельсе	1.3 м	1 см/дел	—	5 мм
2	Линейка на угольнике	250 мм	1 мм/дел	—	0.5 мм
3	ПКЦ-3 в режиме секундомера	100 с	0.1 с	—	0.1 с

7. Результаты прямых измерений и их обработки (*таблицы, примеры расчетов*)

Таблица 2

x, м	x', мм	h_0, мм	h'_0, мм
0.220 ± 0.005	1.000 ± 0.005	180.0 ± 0.5	180.0 ± 0.5

Таблица 3 - Результаты прямых измерений (Задание 1)

№	Измеренные величины				Рассчитанные величины	
	x_1, м	x_2, м	t_1, с	t_2, с	x_2-x_1, м	$\frac{t_2^2-t_1^2}{2}$, с^2
1	0.15	0.40	2.5	3.8	0.25	4.10
2	0.15	0.50	1.2	2.8	0.35	3.20
3	0.15	0.70	1.2	3.4	0.55	5.06
4	0.15	0.90	1.3	3.9	0.75	6.76
5	0.15	1.10	1.3	4.4	0.95	8.84

Таблица 4 - Результаты прямых измерений (Задание 2)

n_p	h, мм	h', мм	№	t_1, с	t_2, с
1	189	180	1	1.3	4.6
			2	1.3	4.6
			3	1.2	4.5
			4	1.2	4.5
			5	1.3	4.6
2	200	181	1	0.9	3.1
			2	0.9	3.2
			3	0.9	3.2
			4	0.8	3.1
			5	0.8	3.1
3	209	181	1	0.8	2.7
			2	0.8	2.7
			3	0.8	2.7
			4	0.8	2.8
			5	0.8	2.7
4	219	182	1	0.7	2.3
			2	0.7	2.3
			3	0.7	2.3
			4	0.7	2.3
			5	0.7	2.2
5	230	183	1	0.6	2.0
			2	0.6	2.0
			3	0.6	2.0
			4	0.6	2.0
			5	0.6	2.0

8. Расчет результатов косвенных измерений (*таблицы, примеры расчетов*).

Задание 1. Исследование движения тележки при фиксированном угле наклона рельса. Проверка равноускоренного движения тележки

Заполним Таблица 3

1. По результатам прямых измерений рассчитаем величины:

$$x_2 - x_1\ ,\ \frac{t_2^2 - t_1^2}{2}$$

Для примера рассчитаем для первой строки:

$$Y_1 = 0.40 - 0.15 = 0.25\,м\ ,\ Z_1 = \frac{3.8^2 - 2.5^2}{2} = 4.10\,с$$

2. Теперь вычислим ускорение тележки методом наименьших квадратов. Вычислим коэффициент a в теоретической зависимости $Y = aZ$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{5} Z_i Y_i}{\sum_{i=1}^{5} Z_i^2} = 0.104\,\frac{м}{c^2}$$

Теперь найдём среднеквадратичное отклонение σ_a этого коэффициента

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(Y_i - 0.10 \cdot Z_i)^2}{(5-1) \cdot \sum_{i=1}^{5} Z_i^2}} = 0.007\,\frac{м}{c^2}$$

Рассчитаем абсолютную погрешность коэффициента a для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}90$

$$\Delta_a = 2 \cdot \sigma_\alpha = 0.014\,\frac{м}{c^2}$$

Наконец найдём относительную погрешность ускорения

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta_a}{a} \cdot 100\,\% = 13.50\,\%$$

Задание 2. Исследование зависимости ускорения тележки от угла наклона рельса к горизонту.

Таблица 5 - Результаты рассчётов (Задание 2)

Nпл	$\sin\alpha$	$\langle t_1 \rangle \pm \Delta t_1$, с	$\langle t_2 \rangle \pm \Delta t_2$, с	$\langle a \rangle \pm \Delta a$, $\frac{м}{c^2}$
1	*0.012*	*1.260 ± 0.083*	*4.560 ± 0.083*	*0.099 ± 0.004*
2	*0.024*	*0.860 ± 0.083*	*3.140 ± 0.083*	*0.208 ± 0.012*
3	*0.036*	*0.800 ± 0.067*	*2.720 ± 0.078*	*0.281 ± 0.019*
4	*0.047*	*0.700 ± 0.067*	*2.280 ± 0.078*	*0.404 ± 0.032*
5	*0.060*	*0.600 ± 0.067*	*2.000 ± 0.067*	*0.522 ± 0.040*
Nпл – количество пластин				

Для каждой серии измерений вычислим $\sin\alpha$ и занесём результаты во второй столбец

$$\sin\alpha = \frac{(h_0 - h) - (h_0' - h')}{x' - x}$$

В качестве примера вычислим $\sin\alpha$ для первой серии измерений

$$\sin\alpha = \frac{(180.0 - 189.0) - (180.0 - 180.0)}{1.000 \cdot 10^3 - 0.220 \cdot 10^3} = 0.012$$

Теперь вычислим средние значения времени $\langle t_1 \rangle$ и $\langle t_2 \rangle$, заполнив третий и четвёртый столбцы

$$\langle t \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N}$$

Для первой серии измерений получим

$$\langle t_1 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_{1i}}{5} = 1.3\,c \qquad \langle t_2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_{2i}}{5} = 4.6\,c$$

Вычислим среднее значение ускорения $\langle a \rangle$ и его погрешность Δa, заполнив последний столбец

$$\langle a \rangle = \frac{2(x_2 - x_1)}{\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2} \qquad \Delta_a = \langle a \rangle \cdot \sqrt{\frac{(\Delta x_{И2})^2 + (\Delta x_{И1})^2}{(x_2 - x_1)^2} + 4\,\frac{(\langle t_1 \rangle \Delta t_1)^2 + (\langle t_2 \rangle \Delta t_2)^2}{(\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2)^2}}$$

Для примера вычислим значения в первой строке

$$\langle a\rangle=\frac{2(1.1-0.15)}{1.26^2-4.56^2}=0.099\,\frac{м}{с^2}$$

$$\Delta_\alpha=\langle a\rangle\cdot\sqrt{\frac{(0.005)^2+(0.005)^2}{(1.10-0.15)^2}+4\,\frac{(1.26\cdot0.083)^2+(4.56\cdot0.083)^2}{(4.56^2-1.26^2)^2}}=0.004\,\frac{м}{с^2}$$

Теперь для теоретической линейной зависимости $a=A+B\cdot\sin a$ вычислим коэффициенты A и B

$$B\equiv g=\frac{\sum_{i=1}^{5}(a_i\cdot\sin\alpha_i)-\frac{1}{5}\cdot\sum_{i=1}^{5}a_i\cdot\sum_{i=1}^{5}\sin\alpha_i}{\sum_{i=1}^{5}\sin\alpha_i^2-\frac{1}{5}\cdot(\sum_{i=1}^{5}\sin\alpha_i)^2}=8.64\,\frac{м}{с^2}$$

$$A=\frac{1}{5}\cdot(\sum_{i=1}^{5}a_i-8.64\cdot\sum_{i=1}^{5}\sin\alpha_i)=-0.007$$

Наконец вычислим среднеквадратичное отклонения ускорения свободного падения g (коэффициента B)

$$\sigma_g=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(a_i-(A+B\sin\alpha_i))^2}{(\sum_{i=1}^{5}\sin\alpha_i^2-\frac{1}{5}(\sum_{i=1}^{5}\sin\alpha_i)^2)(5-2)}}=0.38\,\frac{м}{с^2}$$

Рассчитаем абсолютную погрешность коэффициента g для доверительной вероятности $\alpha=0{,}90$

$$\Delta_g=2\cdot\sigma_g=0.75\,\frac{м}{с^2}$$

Также вычислим относительную погрешность g

$$\varepsilon_g=\frac{\Delta_g}{g}=8.70\,\%$$

Вычислим абсолютное отклонение экспериментального значения ускорения свободного падения g от его табличного значения $g_{табл}$ для Санкт-Петербурга

$$\Delta g_{табл}=|g-g_{табл}|=|8.64-9.82|=1.18\,\frac{м}{с^2}$$

А также относительное отклонение от табличного значения

$$\varepsilon_{g\,табл}=\frac{\Delta_{g\,табл}}{g_{табл}}\cdot100\,\%=12.00\,\%$$

9. Расчет погрешностей измерений (*для прямых и косвенных измерений*)

Задание 1. Вычислим погрешность для косвенных измерений Y и Z

Начнём с относительной погрешности ΔY

В формуле f_1 это функция двух переменных x_1 и x_2 определяющая значение Y, таким образом

$$f_1=x_2-x_1$$

Вычисляя частные производные по переменным x_1 и x_2 получаем:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=-x_1\quad\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=x_2$$

Абсолютную погрешность Δx_1 и Δx_2 вычислим, используя инструментальную погрешность $\Delta_И$ линейки на рельсе из Таблица 1 и пересчитав её для доверительной вероятности $\alpha=0{,}95$

$$\Delta x_1=\Delta x_2=\frac{2}{3}\cdot0.005=0.003\,м$$

Получаем итоговую формулу для относительной погрешности Y

$$\Delta Y=0.003\cdot\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

Для примера, в первой строке получим

$$\Delta Y = 0.003 \cdot \sqrt{0.15^2 + 0.40^2} = 0.001\,м$$

Аналогично рассчитываем относительную погрешность ΔZ

$$f_2 = \frac{t_2^2 - t_1^2}{2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t_1} = -t_1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial t_2} = t_2$$

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \frac{2}{3} \cdot 0.1 = 0.07\,c$$

Для примера, в первой строке получим

$$\Delta Z = 0.07 \cdot \sqrt{2.5^2 + 3.8^2} = 0.31\,c$$

Задание 2. Опишем процесс вычисления погрешности для $\langle t_2 \rangle$ и $\langle t_2 \rangle$ на примере первой серии измерений.

Начнём с $\langle t_1 \rangle$.

Рассчитаем среднеквадратичное отклонение среднего значения:

$$\sigma_{\langle t1 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{5(5-1)} \sum_{i=1}^{5} (t_{1i} - 1.3)^2} = 0.02\,c$$

Табличное значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,N}$ для доверительной вероятности α = 0,95:

$$t_{\alpha,N} = 2.015$$

Рассчитаем доверительный интервал:

$$\Delta \langle t_1 \rangle = t_{\alpha,N} \cdot \sigma_{\langle t1 \rangle} = 0.049$$

Определим абсолютную погрешность измерения с учетом доверительного интервала $\Delta \langle t_2 \rangle$ и инструментальной погрешности $\Delta_{\langle Иt \rangle} = 0.1\,c$:

$$\Delta_{t1} = \sqrt{\Delta_{\langle t1 \rangle}^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \Delta_{\langle Иt \rangle}\right)^2} = \sqrt{0.049^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 0.1\right)^2} = 0.083\,c$$

10. Графики (*перечень графиков, которые составляют Приложение 2*).

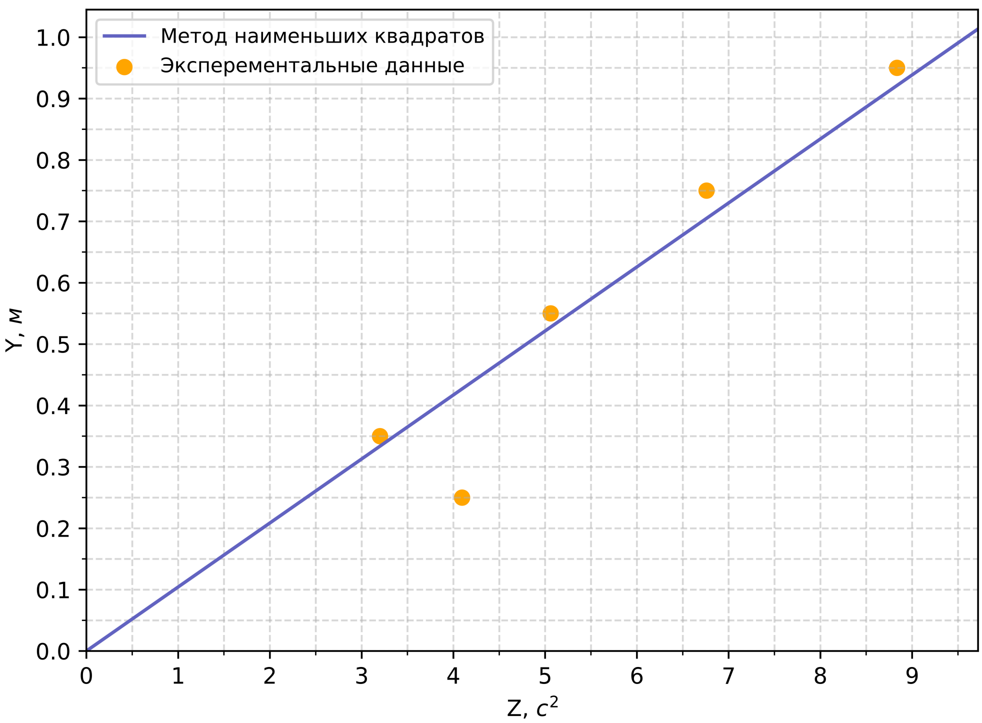

Рисунок 1 - Зависимость Y от Z

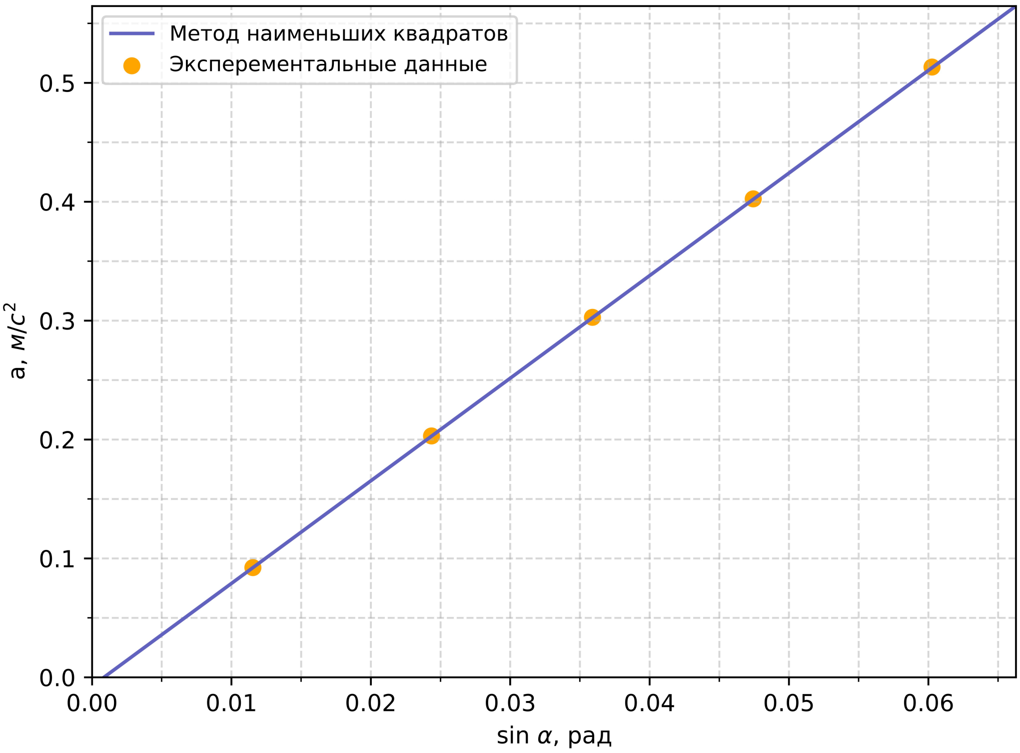

Рисунок 2 - Зависимость α от sinα

11. Окончательные результаты

Ускорение из задания 1

$$a=(0.104\pm0.014)\frac{м}{c^2}\quad \varepsilon_a=13.50\,\%\quad \alpha=0{,}90$$

Вычисленное значение ускорения свободного падения

$$g=(8.64\pm0.75)\frac{м}{c^2}\quad \varepsilon_g=8.70\,\%\quad \alpha=0{,}90$$

Абсолютное и относительное отклонение измеренного ускорения свободного падения от его табличного значения

$$\Delta g_{табл}=1.18\frac{м}{c^2}\quad \varepsilon_{g\,табл}=12.00\,\%$$

12. Выводы и анализ результатов работы

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено исследование распределения случайной величины - времени сборки docker-контейнера. По результатам 50 измерений были получены следующие результаты:

1. Среднее время сборки составило $t=(2.89\pm0.05)\,c$

2. Выборочное стандартное отклонение $\sigma_N\approx0.16\,c$

3. Относительная погрешность измерения $t=(2.89\pm0.05)\,c\,;\varepsilon_t=1{,}56\,\%\,\alpha=0{,}95$ при доверительной вероятности $\alpha=0{,}95$.

Гистограмма экспериментального распределения времени сборки визуально близка к нормальному распределению, что подтверждается сравнением эмпирических и теоретических вероятностей попадания в стандартные интервалы ($\langle t\rangle_N\pm k\,\sigma_N$):

1. В интервал $\langle t\rangle_N\pm\sigma_N$ попало 80% измерений при теоретическом значении 68%.

2. В интервал $\langle t\rangle_N\pm2\,\sigma_N$ — 92% при теоретическом 95%.

3. В интервал $\langle t \rangle_N \pm 3\sigma_N$ — 96% при теоретическом 99%.

Небольшие отклонения эмпирических данных от теоретических значений могут быть объяснены ограниченным объёмом выборки и влиянием внешних факторов (например, изменение нагрузки на систему в момент отдельных измерений).

Таким образом, можно заключить, что рассмотренная случайная величина подчиняется нормальному закону распределения. Результаты работы могут быть использованы для прогнозирования времени сборки и оптимизации процесса разработки.