

Группа: ПИиКТ 1.1

К работе допущен \_\_\_\_\_

Студенты:

Решетников Сергей 467233

Работа выполнена \_\_\_\_\_

Шкиптан Александр 468105

Преподаватель: Сорокина Е.К.

Отчет принят \_\_\_\_\_

## Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе № 2

### «Исследование скольжения тележки по наклонной плоскости»

#### 1. Цель работы

- Проведение эксперимента по проверке равноускоренного движения тележки по наклонной плоскости
- Измерение модуля ускорения свободного падения

#### 2. Задачи, решаемые при выполнении работы

- Измерение времени движения тележки по рельсу с фиксированным углом наклона
- Измерение времени движения тележки по рельсу при разных углах наклона рельса к горизонту
- Исследование движения тележки при фиксированном угле наклона рельса.  
Проверка равноускоренного движения тележки
- Исследование зависимости ускорения тележки от угла наклона рельса к горизонту.  
Определение ускорения свободного падения

#### 3. Объект исследования

Ускорение тележки при различных углах наклона

#### 4. Метод экспериментального исследования

Многократное измерение промежутков времени, за которые тележка преодолевает заданное расстояние при различных углах наклона.

#### 5. Рабочие формулы и исходные данные

- Перемещение

$$Y = x_2 - x_1$$

- Полуразность квадратов значений времени

$$Z = \frac{(t_2^2 - t_1^2)}{2}$$

- Абсолютная погрешность Y

$$\Delta_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2\right)^2}$$

- Абсолютная погрешность Z

$$\Delta_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial t_1} \cdot \Delta t_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial t_2} \cdot \Delta t_2\right)^2}$$

- Относительная погрешность Y

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta_y}{Y} \cdot 100\%$$

- Относительная погрешность Z

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta_z}{Z} \cdot 100\%$$

- Коэффициент  $\alpha$  в зависимости  $Y = \alpha Z$

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^N Z_i Y_i}{\sum_{i=1}^N Z_i^2}$$

- Среднеквадратичное отклонение коэффициента  $\alpha$

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \alpha Z_i)^2}{(N-1) \cdot \sum_{i=1}^N Z_i^2}}$$

- Абсолютная погрешность коэффициента  $\alpha$

$$\Delta_\alpha = 2\sigma_\alpha$$

- Относительная погрешность ускорения

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta_a}{a} \cdot 100\%$$

- Синус угла  $\alpha$  (наклона рельса к горизонту)

$$\sin \alpha = \frac{(h_0 - h) - (h_0' - h')}{x' - x}$$

- Среднее значение ускорения

$$\langle a \rangle = \frac{2(x_2 - x_1)}{\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2}$$

- Погрешность значения ускорения для каждой серии измерений

$$\Delta_a = \langle a \rangle \cdot \sqrt{\frac{(\Delta x_{i2})^2 + (\Delta x_{i1})^2}{(x_2 - x_1)^2} + 4 \frac{(\langle t_1 \rangle \Delta t_1)^2 + (\langle t_2 \rangle \Delta t_2)^2}{(\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2)^2}}$$

- Коэффициент B из теоретической линейной зависимости  $a = A + B \sin \alpha$

$$B \equiv g = \frac{\sum_{i=1}^N (a_i \cdot \sin \alpha_i) - \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N a_i \cdot \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^N \sin \alpha_i^2 - \frac{1}{N} \cdot (\sum_{i=1}^N \sin \alpha_i)^2}$$

- Коэффициент A из теоретической линейной зависимости  $a = A + B \sin \alpha$

$$A = \frac{1}{N} \cdot (\sum_{i=1}^N a_i - B \cdot \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i)$$

- Среднеквадратичное отклонение ускорения свободного падения

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (a_i - (A + B \sin \alpha_i))^2}{(\sum_{i=1}^N \sin \alpha_i^2 - \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^N \sin \alpha_i)^2)(N-2)}}$$

- Абсолютная погрешность коэффициента  $g$

$$\Delta_g = 2\sigma_g$$

- Относительная погрешность коэффициента  $g$

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta_g}{g} \cdot 100\%$$

- Среднее значение времени

$$\langle t \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N}$$

- Среднеквадратичное отклонение  $\langle t \rangle$

$$\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2}$$

- Доверительный интервал для  $\langle t \rangle$

$$\Delta_{\langle t \rangle} = t_{\alpha, N} \cdot \sigma_{\langle t \rangle}$$

- Количество измерений

$$N = 5$$

- Табличное значение ускорения свободного падения

$$g_{\text{табл}} = 9.82 \frac{m}{s^2}$$

## 6. Измерительные приборы

Таблица 1 - Измерительные приборы

№ п/п	Наименование	Предел измерений	Цена деления	Класс точности	$\Delta_i$
1	Линейка на рельсе	1.3 м	1 см/дел	—	5 мм
2	Линейка на угольнике	250 мм	1 мм/дел	—	0.5 мм
3	ПКЦ-3 в режиме секундометра	100 с	0.1 с	—	0.1 с

## 7. Схема экспериментальной установки

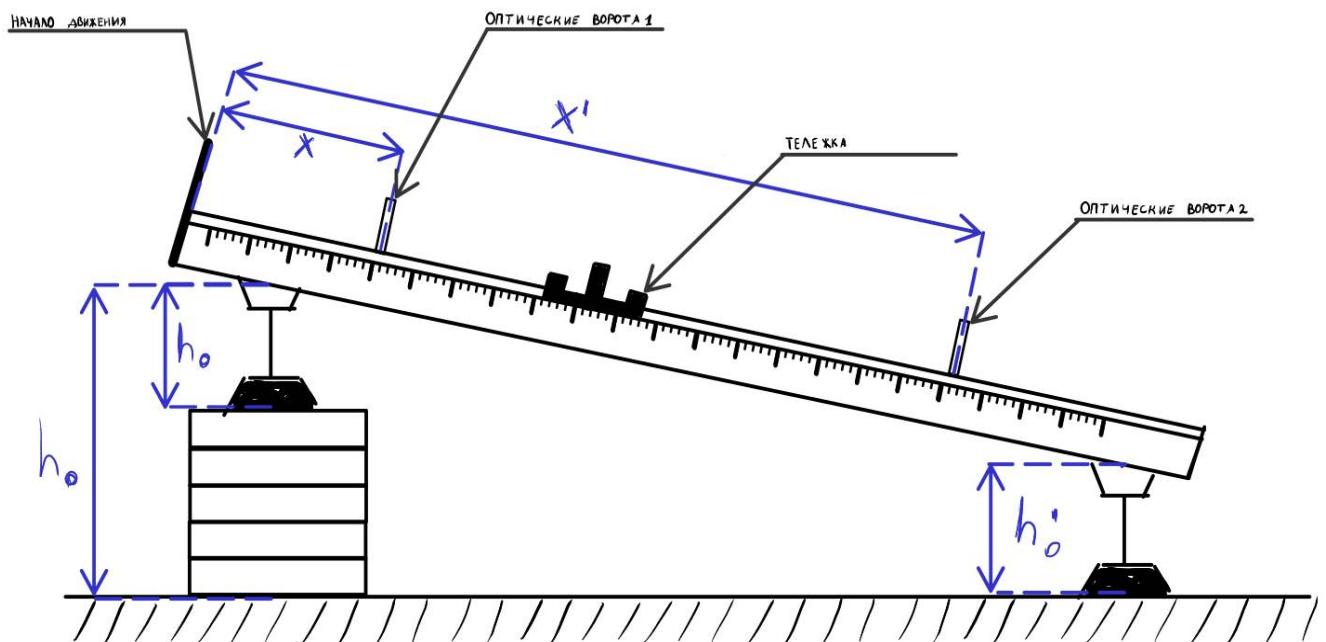


Рисунок 1 - Общий вид экспериментальной установки

## 8. Результаты прямых измерений и их обработка (таблицы, примеры расчетов)

Таблица 2

$x, M$	$x', MM$	$h_0, MM$	$h'_0, MM$
$0.220 \pm 0.005$	$1.000 \pm 0.005$	$180.0 \pm 0.5$	$180.0 \pm 0.5$

Таблица 3 - Результаты прямых измерений (Задание 1)

№	Измеренные величины				Рассчитанные величины	
	$x_1, M$	$x_2, M$	$t_1, c$	$t_2, c$	$x_2 - x_1, M$	$\frac{t_2^2 - t_1^2}{2}, c^2$
1	0.15	0.40	2.5	3.8	0.25	4.10
2	0.15	0.50	1.2	2.8	0.35	3.20
3	0.15	0.70	1.2	3.4	0.55	5.06
4	0.15	0.90	1.3	3.9	0.75	6.76
5	0.15	1.10	1.3	4.4	0.95	8.84

Таблица 4 - Результаты прямых измерений (Задание 2)

$n_p$	$h, mm$	$h', mm$	№	$t_1, c$	$t_2, c$
1	189	180	1	1.3	4.6
			2	1.3	4.6
			3	1.2	4.5
			4	1.2	4.5
			5	1.3	4.6
2	200	181	1	0.9	3.1
			2	0.9	3.2
			3	0.9	3.2
			4	0.8	3.1
			5	0.8	3.1
3	209	181	1	0.8	2.7
			2	0.8	2.7
			3	0.8	2.7
			4	0.8	2.8
			5	0.8	2.7
4	219	182	1	0.7	2.3
			2	0.7	2.3
			3	0.7	2.3

			4	0.7	2.3
			5	0.7	2.2
5	230	183	1	0.6	2.0
			2	0.6	2.0
			3	0.6	2.0
			4	0.6	2.0
			5	0.6	2.0

## 9. Расчет результатов косвенных измерений (таблицы, примеры расчетов).

**Задание 1.** Исследование движения тележки при фиксированном угле наклона рельса. Проверка равноускоренного движения тележки  
Заполним Таблица 3

1. По результатам прямых измерений рассчитаем величины:

$$x_2 - x_1, \frac{t_2^2 - t_1^2}{2}$$

Для примера рассчитаем для первой строки:

$$Y_1 = 0.40 - 0.15 = 0.25 \text{ м}, Z_1 = \frac{3.8^2 - 2.5^2}{2} = 4.10 \text{ с}$$

2. Теперь вычислим ускорение тележки методом наименьших квадратов. Вычислим коэффициент  $a$  в теоретической зависимости  $Y = aZ$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^5 Z_i Y_i}{\sum_{i=1}^5 Z_i^2} = 0.104 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Теперь найдём среднеквадратичное отклонение  $\sigma_a$  этого коэффициента

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (Y_i - 0.10 \cdot Z_i)^2}{(5-1) \cdot \sum_{i=1}^5 Z_i^2}} = 0.007 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Рассчитаем абсолютную погрешность коэффициента  $a$  для доверительной вероятности  $\alpha = 0.90$

$$\Delta_a = 2 \cdot \sigma_a = 0.014 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Наконец найдём относительную погрешность ускорения

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta_a}{a} \cdot 100 \% = 13.50 \%$$

**Задание 2.** Исследование зависимости ускорения тележки от угла наклона рельса к горизонту.

Таблица 5 - Результаты расчётов (Задание 2)

Nпл	$\sin \alpha$	$\langle t_1 \rangle \pm \Delta t_1, \text{ с}$	$\langle t_2 \rangle \pm \Delta t_2, \text{ с}$	$\langle a \rangle \pm \Delta a, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
1	0.012	$1.260 \pm 0.083$	$4.560 \pm 0.083$	$0.099 \pm 0.004$
2	0.024	$0.860 \pm 0.083$	$3.140 \pm 0.083$	$0.208 \pm 0.012$
3	0.036	$0.800 \pm 0.067$	$2.720 \pm 0.078$	$0.281 \pm 0.019$
4	0.047	$0.700 \pm 0.067$	$2.280 \pm 0.078$	$0.404 \pm 0.032$

5	0.060	$0.600 \pm 0.067$	$2.000 \pm 0.067$	$0.522 \pm 0.040$
<i>Nпл – количество пластин</i>				

Для каждой серии измерений вычислим  $\sin \alpha$  и занесём результаты во второй столбец Таблица 5

$$\sin \alpha = \frac{(h_0 - h) - (h_0' - h')}{x' - x}$$

В качестве примера вычислим  $\sin \alpha$  для первой серии измерений

$$\sin \alpha = \frac{(180.0 - 189.0) - (180.0 - 180.0)}{1.000 \cdot 10^3 - 0.220 \cdot 10^3} = 0.012$$

Теперь вычислим средние значения времени  $\langle t_1 \rangle$  и  $\langle t_2 \rangle$ , заполнив третий и четвёртый столбцы Таблица 5

$$\langle t \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N}$$

Для первой серии измерений получим

$$\langle t_1 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^5 t_{1i}}{5} = 1.3 \text{ с} \quad \langle t_2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^5 t_{2i}}{5} = 4.6 \text{ с}$$

Вычислим среднее значение ускорения  $\langle a \rangle$  и его погрешность  $\Delta a$ , заполнив последний столбец Таблица 5

$$\langle a \rangle = \frac{2(x_2 - x_1)}{\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2} \quad \Delta_a = \langle a \rangle \cdot \sqrt{\frac{(\Delta x_{U2})^2 + (\Delta x_{U1})^2}{(x_2 - x_1)^2} + 4 \frac{(\langle t_1 \rangle \Delta t_1)^2 + (\langle t_2 \rangle \Delta t_2)^2}{(\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2)^2}}$$

Для примера вычислим значения в первой строке

$$\langle a \rangle = \frac{2(1.1 - 0.15)}{1.26^2 - 4.56^2} = 0.099 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\Delta_a = \langle a \rangle \cdot \sqrt{\frac{(0.005)^2 + (0.005)^2}{(1.10 - 0.15)^2} + 4 \frac{(1.26 \cdot 0.083)^2 + (4.56 \cdot 0.083)^2}{(4.56^2 - 1.26^2)^2}} = 0.004 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Теперь для теоретической линейной зависимости  $a = A + B \cdot \sin \alpha$  вычислим коэффициенты А и В методом МНК

$$B \equiv g = \frac{\sum_{i=1}^5 (a_i \cdot \sin \alpha_i) - \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^5 a_i \cdot \sum_{i=1}^5 \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^5 \sin \alpha_i^2 - \frac{1}{5} \cdot (\sum_{i=1}^5 \sin \alpha_i)^2} = 8.64 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$A = \frac{1}{5} \cdot (\sum_{i=1}^5 a_i - 8.64 \cdot \sum_{i=1}^5 \sin \alpha_i) = -0.007$$

Наконец вычислим среднеквадратичное отклонение ускорения свободного падения  $g$  (коэффициента В)

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (a_i - (A + B \sin \alpha_i))^2}{(\sum_{i=1}^5 \sin \alpha_i^2 - \frac{1}{5} (\sum_{i=1}^5 \sin \alpha_i)^2)(5-2)}} = 0.38 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Рассчитаем абсолютную погрешность коэффициента  $g$  для доверительной вероятности  $\alpha = 0.90$

$$\Delta_g = 2 \cdot \sigma_g = 0.75 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Также вычислим относительную погрешность  $g$

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta_g}{g} = 8.70 \%$$

Вычислим абсолютное отклонение экспериментального значения ускорения свободного

падения  $g$  от его табличного значения  $g_{\text{табл}}$  для Санкт-Петербурга

$$\Delta g_{\text{табл}} = |g - g_{\text{табл}}| = |8.64 - 9.82| = 1.18 \frac{m}{c^2}$$

А также относительное отклонение от табличного значения

$$\varepsilon_{g_{\text{табл}}} = \frac{\Delta_{g_{\text{табл}}}}{g_{\text{табл}}} \cdot 100\% = 12.00\%$$

## 10. Расчет погрешностей измерений (для прямых и косвенных измерений)

**Задание 1.** Вычислим погрешность для косвенных измерений  $Y$  и  $Z$

Начнём с относительной погрешности  $\Delta Y$

В формуле  $f_1$  это функция двух переменных  $x_1$  и  $x_2$  определяющая значение  $Y$ , таким образом

$$f_1 = x_2 - x_1$$

Вычисляя частные производные по переменным  $x_1$  и  $x_2$  получаем:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -x_1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_2$$

Абсолютную погрешность  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$  вычислим, используя инструментальную погрешность  $\Delta_i$  линейки на рельсе из Таблица 1 и пересчитав её для доверительной вероятности  $\alpha=0.95$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{2}{3} \cdot 0.005 = 0.003 \text{ м}$$

Получаем итоговую формулу для относительной погрешности  $Y$

$$\Delta Y = 0.003 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Для примера, в первой строке получим

$$\Delta Y = 0.003 \cdot \sqrt{0.15^2 + 0.40^2} = 0.001 \text{ м}$$

Аналогично рассчитываем относительную погрешность  $\Delta Z$

$$f_2 = \frac{t_2^2 - t_1^2}{2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t_1} = -t_1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial t_2} = t_2$$

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \frac{2}{3} \cdot 0.1 = 0.07 \text{ с}$$

Для примера, в первой строке получим

$$\Delta Z = 0.07 \cdot \sqrt{2.5^2 + 3.8^2} = 0.31 \text{ с}$$

**Задание 2.** Опишем процесс вычисления погрешности для  $\langle t_2 \rangle$  и  $\langle t_1 \rangle$  на примере первой серии измерений.

Начнём с  $\langle t_1 \rangle$ .

Рассчитаем среднеквадратичное отклонение среднего значения:

$$\sigma_{\langle t_1 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{5(5-1)} \sum_{i=1}^5 (t_{1i} - 1.3)^2} = 0.02 \text{ с}$$

Табличное значение коэффициента Стьюдента  $t_{\alpha, N}$  для доверительной вероятности  $\alpha = 0.95$ :

$$t_{\alpha, N} = 2.015$$

Рассчитаем доверительный интервал:

$$\Delta \langle t_1 \rangle = t_{\alpha, N} \cdot \sigma_{\langle t_1 \rangle} = 0.049$$

Определим абсолютную погрешность измерения с учетом доверительного интервала  $\Delta \langle t_2 \rangle$  и инструментальной погрешности  $\Delta_{\text{ит}} = 0.1 \text{ с}$ :

$$\Delta_{t_1} = \sqrt{\Delta_{\langle t_1 \rangle}^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \Delta_{\text{ит}}\right)^2} = \sqrt{0.049^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 0.1\right)^2} = 0.083 \text{ с}$$

## 11. Графики (перечень графиков, которые составляют Приложение 2).

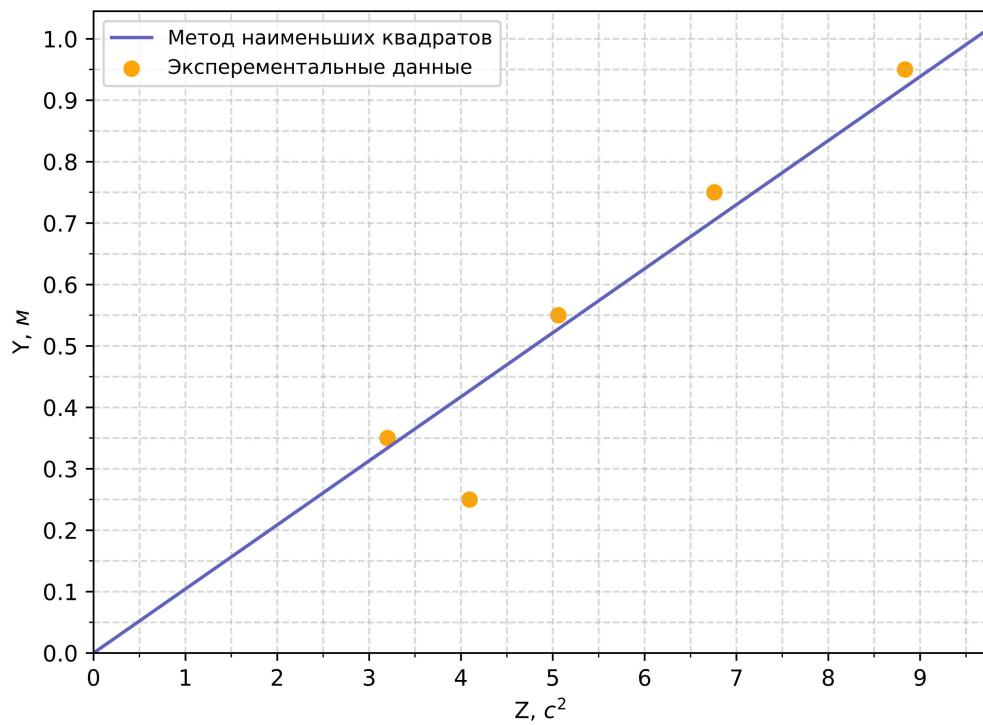


Рисунок 2 - Зависимость  $Y$  от  $Z$

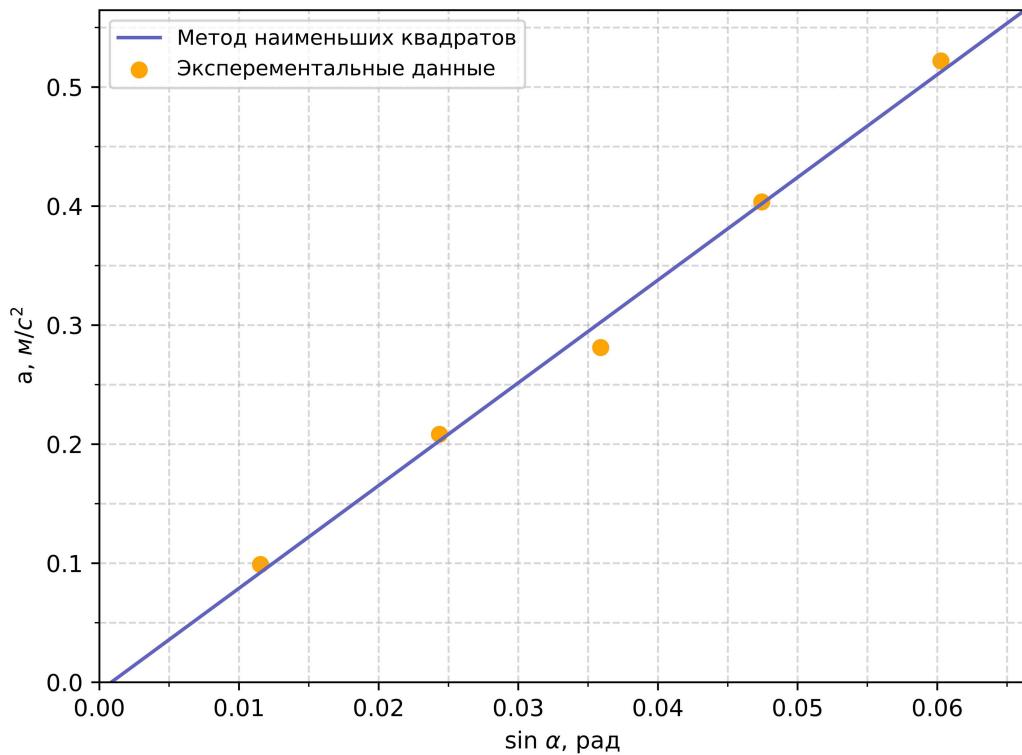


Рисунок 3 - Зависимость  $a$  от  $\sin \alpha$

## 12. Окончательные результаты

Ускорение из задания 1

$$a = (0.104 \pm 0.014) \frac{M}{c^2} \quad \varepsilon_a = 13.50\% \quad \alpha = 0.90$$

Вычисленное значение ускорения свободного падения

$$g = (8.64 \pm 0.75) \frac{M}{c^2} \quad \varepsilon_g = 8.70\% \quad \alpha = 0.90$$

Абсолютное и относительное отклонение измеренного ускорения свободного падения от его табличного значения

$$\Delta g_{\text{табл}} = 1.18 \frac{M}{c^2} \quad \varepsilon_{g\text{табл}} = 12.00\%$$

### 13. Выводы и анализ результатов работы

В ходе выполнения лабораторной работы были проведены необходимые измерения и расчёты. Было экспериментально подтверждено, что движение тележки по наклонной плоскости является равноускоренным, и в нашем случае ровнялось

$$a = (0.104 \pm 0.014) \frac{M}{c^2}$$

По результатам обработки данных об ускорении тележки при разных углах наклона получено значение ускорения свободного падения

$$g = (8.64 \pm 0.75) \frac{M}{c^2}$$

Отклонение от табличного значения составило

$$\Delta g_{\text{табл}} = 1.18 \frac{M}{c^2} \text{ или } \varepsilon_{g\text{табл}} = 12.00\%$$

что с учётом погрешности близко к табличному значению для Санкт-Петербурга

$$g_{\text{табл}} = 9.82 \frac{M}{c^2}$$

Следовательно, результат можно считать достоверным, а цель работы выполненной.