1. Линейное пространство. Определение, аксиомы и их следствия. Примеры.

Опр. 1.1. ***Векторным*** (***линейным***) ***пространством*** над полем $\mathbb{F}$ (например, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется множество L с операциями сложения и умножения на элементы поля $\mathbb{F}$, обладающими следующими свойствами (***аксиомами векторного пространства***):

1. Относительно сложения L есть абелева группа;
2. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$ для любых $a, b \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$;
3. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in L$;
4. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in L$;
5. $1a = a$ для любого $a \in L$.

Лемма 1.1. *Следствия аксиом векторного пространства (докажите их!):*

1. $\lambda 0_L = 0_L$ для любого $\lambda \in \mathbb{F}$ (здесь 0_L — нулевой вектор);
2. $\lambda(-a) = \lambda a$ для любых $\lambda \in \mathbb{F}$, $a \in L$;
3. $\lambda(a-b) = \lambda a - \lambda b$ для любых $\lambda \in \mathbb{F}$, $a, b \in L$;
4. $0a = 0_L$ для любого $a \in L$ (здесь 0 слева — скаляр, справа — вектор);
5. $(-1)a = -a$ для любого $a \in L$;
6. $(\lambda - \mu)a = \lambda a - \mu a$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in L$.

Пример 1.1. Примеры линейных пространств:

(а) Пространство $\{0\}$, состоящее только из нулевого вектора;

(б) Множество $\mathbb{F}^n$ столбцов высоты n с элементами из $\mathbb{F}$ относительно операций поэлементного сложения и умножения на числа — ***арифметическое*** или ***координатное*** пространство;

(в) Множество $F(X, \mathbb{F})$ всех функций на множестве X со значениями в поле $\mathbb{F}$ относительно операций поточечного сложения и умножения на числа;

(г) Множество $\mathbb{C}$ с привычными операциями можно рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{R}$;

(д) Геометрические векторы со стандартными операциями сложения и умножения на числа;

(е) Вещественные квадратные матрицы $M_{m,n}(\mathbb{R})$ размерности $m \times n$ относительно стандартных операций сложения и умножения на числа;

(ж) Вещественные многочлены $\mathbb{R}[x]$ с естественными операциями;

(з) Вещественные многочлены степени ровно n с естественными операциями **не являются** векторным пространством.

2. Линейная комбинация. Линейная оболочка. Линейная зависимость и независимость.

Опр. 2.1. Выражение вида $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ ($\lambda_i \in \mathbb{F}$) называется ***линейной комбинацией*** векторов $a_1, \ldots, a_n \in L$. Скаляры λ_i называются ***коэффициентами*** линейной комбинации. Говорят, что вектор $b \in L$ ***линейно выражается*** через векторы $a_1, \ldots, a_n$, если он равен некоторой их линейной комбинации.

Опр. 2.2. ***Линейной оболочкой*** подмножества $S \subseteq L$ называется множество всех векторов из L, представимых в виде <u>конечных</u> линейных комбинаций элементов из S. Она обозначается $\langle S \rangle$. Говорят, что пространство L ***порождается*** множеством S, если $\langle S \rangle = L$

Опр. 2.3. Линейная комбинация $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ векторов $a_1, \ldots, a_n \in L$, где $\lambda_i \in \mathbb{F}$ называется ***тривиальной***, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, и ***нетривиальной*** в противном случае.

Опр. 2.4. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n \in L$ называются ***линейно зависимыми***, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, и ***линейно независимыми*** в противном случае.

3. Базис линейного пространства. Размерность линейного пространства.

Опр. 3.1. Система векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq L$ называется ***базисом*** векторного пространства L, если каждый вектор $a \in L$ <u>единственным</u> образом выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Коэффициенты этого выражения называются ***координатами*** вектора a в данном базисе.

Число элементов в базисе линейного пространства есть его размерность ($\dim L$)

- **0-6 баллов** — ответ на теоретический вопрос по **Разделу II**.
- **0-4 балла** — ответ на дополнительные вопросы по **Разделу II**.
- **0-6 баллов** — ответ на теоретический вопрос по **Разделу III**.
- **0-4 балла** — ответ на дополнительные вопросы по **Разделу III**.

4. Линейное подпространство. Определение, примеры.

Опр. 1.1. Подмножество U векторного пространства L называется ***подпространством***, если

1. U является подгруппой аддитивной группы L;
2. $a \in U \Rightarrow \lambda a \in U$ для любого $\lambda \in \mathbb{F}$.

Пример 1.1. Примеры подпространств:

(а) В любом пространстве L есть «тривиальные» подпространства $\{0\} \leqslant L$, $L \leqslant L$;

(б) $\mathbb{R}_n[x] \leqslant \mathbb{R}[x]$;

(в) В пространстве $F(X, \mathbb{R})$ всех функций на заданном промежутке X числовой прямой множество непрерывных функций является подпространством;

(г) Множество векторов, параллельных заданной плоскости, — подпространство в пространстве геометрических векторов;

(д) Множество диагональных матриц является подпространством в $M_n(\mathbb{R})$;

(е) Линейная оболочка набора векторов является подпространством в изначальном пространстве.

(ж) Множество решение однородной СЛАУ $Ax = 0$ над $\mathbb{F}$ является подпространством в соответствующем координатном пространстве;

5. Линейное многообразие. Гиперплоскость. Определения, примеры.

Опр. 1.2. Пусть $U \leqslant L$, $a \in L$ — фиксированный вектор. Множество векторов вида $x = a + U = \{a + u \mid u \in U\}$ называется ***линейным многообразием*** размерности $\dim U$. Говорят, что оно параллельно подпространству U. Одномерное линейное многообразие называется ***прямой***, k-мерное — ***k-мерной плоскостью***, если $1 < k < \dim V - 1$, ***гиперплоскостью*** — если $k = \dim V - 1$.

Пример 1.2. Примеры линейных многообразий:

(а) В пространстве геометрических векторов, исходящих из точки O, прямая и гиперплоскость $x = a + U$ — это обычные прямая и плоскость, смещённые относительно точки O на вектор a и параллельные прямой или плоскости U, проходящей через точку O;

(б) Множество многочленов, производная которых равна $3x^2 + 4x$, является линейным многообразием в пространстве $\mathbb{R}_3[x]$. В этом случае $a = x^3 + 2x^2$, $U = \mathbb{R}_0[x] = \mathbb{R}$.

6. Изоморфизм линейных пространств.

Опр. 2.1. Векторные пространства U и V над полем $\mathbb{F}$ называются ***изоморфными***, если существует такое биективное отображение $\varphi : V \to U$, что

- $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ для любых $a, b \in V$;
- $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$ для любых $\lambda \in \mathbb{F}$, $a \in V$.

Само отображение φ называется при этом ***изоморфизмом*** пространств.

Теорема 2.1. *Всякое векторное пространство V над полем $\mathbb{F}$, имеющее базис из n векторов, изоморфно пространству $\mathbb{F}^n$.*

Пример 2.1. Примеры изоморфных пространств:

(а) Пространство квадратных матриц $M_n(\mathbb{R})$ изоморфно $\mathbb{R}^{n^2}$;

(б) Пространство полиномов $\mathbb{R}_n[x]$ степени не выше n изоморфно$\mathbb{R}^{n+1}$.

7. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

Опр. 3.1. ***Рангом системы векторов*** называется размерность её линейной оболочки. ***Строчным рангом матрицы*** называется ранг системы её строк. ***Столбцовым рангом матрицы*** называется ранг системы её столбцов.

Опр. 3.2. ***Минорным рангом матрицы*** называется наибольший порядок отличного от нуля минора матрицы. Сам этот минор называется ***базисным***.

Теорема 3.1. ***(о базисном миноре)*** *Столбцы (строки), пересекающие базисный минор матрицы, линейно независимы. Любой столбец (строка) матрицы является линейной комбинацией базисных.*

Следствие 3.1.1. *Минорный, столбцовый и строчный ранги матрицы совпадают, поэтому можно говорить просто о **ранге** матрицы A. Обозначается он $rg\,A$, $rk\,A$, $\operatorname{rank} A$, $rang\,A$, $r(A)$.*

Теорема 3.2. ***(о ранге матрицы)*** *Ранг матрицы равен максимальному числу её линейно независимых строк (столбцов).*

8. Ранг матрицы. Связь с элементарными преобразование. Ранг суммы и произведения матриц.

Следствие 3.2.1. *Ранг матрицы не меняется при умножении её на на любую невырожденную матрицу.*

Лемма 3.1. *Имеют место следующие свойства:*

1. *При элементарных преобразованиях строк (столбцов) матрицы её ранг не меняется;*
2. *Каждая матрица элементарными преобразованиями строк приводится к ступенчатому виду;*
3. *Ранг ступенчатой матрицы равен числу ненулевых строк.*

Теорема 3.3. ***(о ранге суммы и произведения матриц)*** *Имеют место следующие свойства:*

- $\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$;
- $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$.

9. Теорема Кронекера-Капелли. Следствия о рангах.

Теорема 1.1. ***(Кронекера-Капелли)*** *СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг её матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы.*

NtB. Для решения произвольной СЛАУ используется ***метод Гаусса***. Приведём матрицу $(A\,|\,b)$ путём элементарных преобразований к ступенчатому виду $(\widetilde{A}\,|\,\widetilde{b})$. Ясно, что число ненулевых строк матрицы $\widetilde{A}$ равно $\operatorname{rank} A$, матрицы $(\widetilde{A}\,|\,\widetilde{b})$ — $\operatorname{rank}(A\,|\,b)$.

Возможны три случая:

- $\operatorname{rank}(A\,|\,b) = \operatorname{rank} A = n$. Тогда однозначно определяется x_n, потом x_{n-1} и так далее до x_1, то есть решение единственно — такие системы называются ***определёнными***.
- $\operatorname{rank}(A\,|\,b) = \operatorname{rank} A + 1$. То есть возникло уравнение $0x_1 + \ldots + 0x_n = c$, $c \neq 0$. Это означает, что СЛАУ ***несовместна***;
- $\operatorname{rank}(A\,|\,b) = \operatorname{rank} A < n$. В этом случае выберем переменные, коэффициенты при которых образуют базисный минор (эти переменные называются ***базисными***) и выразим их через оставшиеся переменные (они называются ***свободными***). Базисные переменные оказываются функциями от свободных — выражаются как линейные комбинации последних возможно с дополнительным ненулевым свободным членом. В таком случае имеется более одного решения, а сами системы называются ***неопределёнными***. Если поле $\mathbb{F}$ бесконечно, то и решений бесконечно много.

10. Однородная СЛАУ. Степень неопределенности однородной СЛАУ. Общее решение.

Опр. 2.1. СЛАУ называется ***однородной***, если столбец свободных членов является нулевым вектором.

NtB. Часто мы будем использовать запись $Ax = 0$, предполагая, что в данном случае в правой части стоит нулевой вектор из $\mathbb{F}^k$

Лемма 2.1. *Множество $X = \{x \in \mathbb{F}^n | Ax = 0\}$ решений однородной СЛАУ образует линейное подпространство $X \leqslant \mathbb{F}^k$.*

Теорема 2.1. ***(о "степени неопределённости" однородной СЛАУ)*** *Размерность пространства X решений однородной СЛАУ с n неизвестными и матрицей коэффициентов A равна*

$$\dim X = n - \operatorname{rank} A$$

Опр. 2.3. ***Общим решением однородной СЛАУ*** называется линейная комбинация векторов ФСР:

$$x_0 = \sum_{1}^{n-r} \lambda_i e_i, \qquad \forall \lambda_i \in \mathbb{F}$$

11. Однородная СЛАУ. Пространство решений. Задание линейного подпространства однородной СЛАУ.

Опр. 2.1. СЛАУ называется ***однородной***, если столбец свободных членов является нулевым вектором.

NtB. Часто мы будем использовать запись $Ax = 0$, предполагая, что в данном случае в правой части стоит нулевой вектор из $\mathbb{F}^k$

Лемма 2.1. *Множество $X = \{x \in \mathbb{F}^n | Ax = 0\}$ решений однородной СЛАУ образует линейное подпространство $X \leqslant \mathbb{F}^k$.*

Теорема 2.2. *Пусть матрица B состоит из столбцов, образующих базис пространства решений СЛАУ $Ax = 0$. Тогда система $B^T x = 0$ задаёт линейную оболочку строк матрицы A.*

С помощью ФСР однор. СЛАУ можно задать линейное подпространство

12. Неоднородная СЛАУ. Общее решение. Альтернатива Фредгольма.

Теорема 3.1. ***(о структуре решения СЛАУ)*** *Общее решение неоднородной СЛАУ вида $Ax = b$ является суммой общего решения однородной x_0 и произвольного частного решения $\widetilde{x}$ неоднородной:*

$$x = \widetilde{x} + x_0 = \widetilde{x} + \sum_{1}^{n-r} \lambda_i e_i, \qquad \forall \lambda_i \in \mathbb{F},$$

где $Ax_0 = 0$ и $A\widetilde{x} = b$.

Теорема 3.2. ***(альтернатива Фредгольма)*** *Если в СЛАУ $Ax = b$ число уравнений равно числу неизвестных, то*

- *либо она имеет единственное решение при любых значениях правой части,*
- *либо однородная СЛАУ $Ax = 0$ обладает ненулевым решение.*

13. Сумма подпространств. Нахождение базиса суммы подпространств.

Опр. 1.1. Пусть U и W — подпространства векторного пространства V. Минимальное подпространство, содержащее оба подпространства U и W, называется ***суммой*** подпространств U и W и обозначается $U+W$. То есть, если $U,\ W \leqslant U$, то $U + W = \{u + w \mid v \in U,\ w \in W\} \leqslant V$.

векторов. Всё, что нужно сделать для поиска базиса $U + W$, — это исключить лишние (линейно выражающиеся через другие) векторы из объединённой системы векторов. Для этого достаточно записать их в матрицу и привести её к ступенчатому виду. Базисом суммы подпространств будут, например, векторы,

Т.е если подпространство a имеет базис $a_1 = (a_{11}; a_{12}; a_{13})$, $a_2 = (a_{21}; a_{22}; a_{23})$

а подпространство b имеет базис $b_1 = (b_{11}; b_{12}; b_{13})$, $b_2 = (b_{21}; b_{22}; b_{23})$

то $a+b$ имеет базис, состоящий из ненулевых строк решённой по Гауссу СЛАУ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \end{array}\right)$$

14. Пересечение подпространств. Нахождение базиса пересечения подпространств.

Опр. 1.2. Пусть U и W — подпространства векторного пространства V. Пересечение $U \cap W$ множеств U и W замкнуто относительно операций из V и является подпространством V. Оно называется ***пересечением*** подпространств U и W. То есть $U \cap W = \{v \mid v \in U\ \vee\ v \in W\} \leqslant V$.

NtB. $U \cap W$ — наибольшее подпространство, содержащееся в как U, так и в W.

Для определения базиса пересечения подпространств, нужно задать их однородными СЛАУ. Так как любой вектор, принадлежащий пересечению, должен принадлежать каждому из подпространств, то он должен удовлетворять каждой системе. Следовательно, он должен удовлетворять и объединённой СЛАУ. Значит, для нахождения базиса $U \cap W$ нужно найти ФСР этой СЛАУ.

Т.е если подпространство a имеет базис $a_1 = (a_{11}; a_{12}; a_{13}$, $a_2 = (a_{21}; a_{22}; a_{23})$

а подпространство b имеет базис $b_1 = (b_{11}; b_{12}; b_{13})$, $b_2 = (b_{21}; b_{22}; b_{23})$

$a \cap b$: $\alpha a_1 + \beta a_2 = \gamma b_1 + \delta b_1$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & b_{11} & b_{21} \\ a_{12} & a_{22} & b_{12} & b_{22} \\ a_{13} & a_{23} & b_{13} & b_{23} \end{pmatrix}$$ решим по Гауссу -> найти отношения коэффициентов α и β (либо γ и δ); если это возможно, то упростим

Полученный вектор (набор векторов) и есть базис пересеч.

15. Базис, согласованный с подпространством. Формула Грассмана

Опр. 2.1. Базис пространства V называется ***согласованным*** с подпространством U, если U является линейной оболочкой какой-то части базисных векторов пространства V.

Следствие 2.1.1. ***(формула Грассмана)*** *Для любых двух конечномерных подпространств U и W произвольного векторного пространства V верно равенство* $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

16. Прямая сумма. Критерий прямой суммы. Прямое дополнение. Проекции вектора.

Опр. 3.1. Сумма $U+W$ называется ***прямой***, если для любого вектора $v \in U+W$ представление $v = u + w$, где $u \in U$, $w \in W$ единственно. Прямая сумма обозначается $U \oplus W$ или $U \dotplus W$.

Опр. 3.2. Пусть $U \leqslant V$. Подпространство $W \leqslant V$ называется ***прямым дополнением*** к U в V, если $V = U \oplus W$.

Более общо, сумма подпространств $U_1, U_2, \dots, U_k \leqslant V$ называется ***прямой***, если каждый вектор $w \in U_1 + U_2 + \ldots + U_k$ имеет единственное представление в виде $w = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$, где $u_i \in U_i$. Вектор u_i называется проекцией вектора w на подпространство U_i. Заметим, что проекция на подпространство зависит не только от него, но и остальных слагаемых разложения.

17. Матрица перехода. Свойства матрицы перехода.

Пусть $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — некоторый базис в V и $\widetilde{e} = \{\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \dots, \widetilde{e}_n\}$ — другая, в общем случае отличная от первой, система векторов из V. Выразим векторы системы $\{\widetilde{e}_i\}_{i=1}^n$ через базисные векторы.

$$\begin{cases} \widetilde{e}_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n \\ \widetilde{e}_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n \\ \ldots \\ \widetilde{e}_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n \end{cases}$$

и составим матрицу $T = (\tau_{ij})$. Подчеркнем, что матрица T получается выписыванием координат векторов системы относительно базиса в столбцы. Если распространить правило умножения матриц на случай, когда элементами одной из них являются векторы (что имеет смысл ввиду операций, определенных в линейном пространстве), то можно записать

$$(\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_n) = (e_1, \dots, e_n)T \qquad (1)$$

Опр. 1.1. Невырожденная матрица T называется ***матрицей перехода*** от базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к базису $\{\widetilde{e}_i\}_{i=1}^n$.

NtB 1.1. Для явного указания базисов, между которыми совершается преобразование перехода, будем вводить следующее обозначение для матрицы перехода

$$T = (e \rightsquigarrow \widetilde{e})$$

Лемма 1.2. ***(свойства матрицы перехода)***

1. $(e \rightsquigarrow e) = E$;
2. $(e \rightsquigarrow f) = (e \rightsquigarrow g)(g \rightsquigarrow f)$;
3. $(e \rightsquigarrow f)$ *обратима и* $(e \rightsquigarrow f)^{-1} = (f \rightsquigarrow e)$.

V - л.п. , $(e) = (e_1, \dots, e_n)$, $(e') = (e'_1, \dots, e'_n)$ - базисы л.п. V
"старый" "новый"

$e'_i = S_{1i} e_1 + S_{2i} e_2 + S_{3i} e_3 + \ldots + S_{ni} e_n$, $i = 1, \dots, n$

$$\underset{(e)\to(e')}{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & \dots & S_{nn} \end{pmatrix}$$ координаты векторов (e') в базисе (e)

S - матрица перехода от (e) к (e')

$v \in V$ $\quad v = (v_1, \dots, v_n)$ в базисе (e)
$v = (v'_1, \dots, v'_n)$ в базисе (e')

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n = v'_1 e'_1 + v'_2 e'_2 + \ldots + v'_n e'_n$$

$$v = (e) v = (e') v'$$

$$\underset{(e)}{v} = S \underset{(e')}{v'} \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & \dots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

Св-ва S:

1) $\exists$ $(e), (f), (g)$ - базисы ; $\underset{(e)\to(f)}{S}$, $\underset{(f)\to(g)}{S}$: $\underset{(e)\to(g)}{S} = \underset{(e)\to(f)}{S} \; \underset{(f)\to(g)}{S}$

2) $\exists$ $\underset{(e)\to(f)}{S}$ - обратима

$$\underset{(e)}{v} = S \underset{(f)}{v} \qquad \underset{(f)}{v} = S^{-1} \underset{(e)}{v}$$

3) $\forall$ обратимая кв. м-ца порядка n может служить S от одного базиса этого пр-ва к другому

18. Матрица перехода. Изменение координат вектора при преобразовании базиса.

Теорема 2.1. *Пусть V — конечномерное векторное пространство, e и $\widetilde{e}$ — базисы. Тогда для любого вектора $x \in V$ выполнено $\widetilde{X} = (\widetilde{e} \rightsquigarrow e)X$.*

NtB. Обратим внимание: чтобы получить столбец координат в новом базисе, нужно **слева** умножить столбец его координат в старом базисе на матрицу, **обратную** к матрице перехода от старого базиса к новому. Ещё говорят, что координаты вектора в базисе преобразуются ***контравариантно***. Полный смысл этого понятия будет раскрыт в следующих темах.

19. Матричные группы. Определение, примеры. Подгруппы GL(n): SL(n), D(n) и другие.

Лемма 3.1. *Множество квадратных невырожденных матриц с операцией умножения образует некоммутативную группу.*

Опр. 3.1. Множество невырожденных квадратных матриц n-го порядка с операцией умножения называется **полной линейной группой** и обозначается $\mathrm{GL}(n)$.

NtB 3.1. Любая матрица перехода является элементом этой группы $T \in \mathrm{GL}(n)$ и, наоборот, любая матрица $A \in \mathrm{GL}(n)$ может быть матрицей перехода между какими-то базисами.

Опр. 3.2. Специальной линейной группой $\mathrm{SL}(n)$ называется группа, которая образована подмножеством $\mathrm{GL}(n)$ квадратных матриц, определитель которых равен 1.

NtB 3.2. Специальная линейная группа является подгруппой $\mathrm{GL}(n)$.

Перечислим еще ряд других важных подгрупп полной линейной группы:

- Диагональная группа $\mathrm{D}(n)$ — множество всех диагональных невырожден ных матриц n-го порядка.

- Треугольная группа $\mathrm{T}(n)$ — множество (верхне) треугольных невырожденных матриц n-го порядка.
- Унитреугольная группа $\mathrm{UT}(n)$ — множество верхнетреугольных матриц, все диагональные элементы которых равны 1. В этом смысле, $\mathrm{UT}(n)$ является подгруппой как $\mathrm{T}(n)$, так и $\mathrm{SL}(n)$.

20. Матричные группы. Ортогональные матрицы и ортогональные группы.

Лемма 3.1. *Множество квадратных невырожденных матриц с операцией умножения образует некоммутативную группу.*

Опр. 3.4. Вещественная квадратная матрица C называется ***ортогональной***, если $C^T = C^{-1}$, то есть $C^T C = CC^T = E$.

Опр. 3.5. Множество ортогональных матриц n-ного порядка называется ***ортогональной группой*** и обозначается $O(n)$.

Нетрудно заметить, что ортогональные матрицы 2×2 имеют один из следующих видов: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$, угол можно считать принадлежащим $[0, 2\pi)$. В первом случае смысл — поворот на угол φ, и сама матрица называется ***матрицей поворота***. Во втором случае происходит композиция поворота на угол φ и симметрии относительно e_1, повернутого на угол φ — можно показать, что это симметрия относительно направления $(\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2})^T$. Определитель любой ортогональной матрицы равен ± 1. Ортогональная матрица с определителем 1 называется ***специальной ортогональной***. Множество таких матриц n-ного порядка обозначается $SO(n)$ и называется ***специальной ортогональной группой***. $SO(2)$ является группой вращений плоскости, $SO(3)$ — группой вращений пространства.

Опр. 3.6. Евклидовой группой $\mathrm{E}(n)$ называется множество преобразований вида

$$x \mapsto Ax + b,$$

где $x, b \in \mathbb{R}^n$ и $A \in \mathrm{O}(n)$ — ортогональная матрица.

1. Метод координат. Системы координат.

Опр. 1.1. Метод координат — это подход, позволяющий установить соответствие между геометрическими объектами (точками) и алгебраическими объектами (числами), а также описать их свойства и отношения между ними с помощью аналитических соотношений.

Опр. 1.2. Координатная линия — непрерывная линия без самопересечений, каждой точке которой ставится в соответствие действительное число.

Опр. 1.3. Координатной осью α называют координатную линию, представленную ориентированной прямой, имеющей начало отсчета O и снабженную масштабом E. При этом любой точке P координатной оси ставится в соответствие вещественное число x_P, называемое координатой точки:

$$P \in \alpha \qquad \leftrightarrow \qquad x_P \in \mathbb{R}$$

NtB. Координатные оси на плоскости (в пространстве) в совокупности образуют систему координат.

Опр. 1.4. Прямолинейной системой координат на плоскости (в пространстве) называется система из двух (трех) разнонаправленных координатных осей, имеющих общее начало.

Опр. 1.5. Координатной линией уровня на плоскости называется любая прямая, параллельная одной из координатных осей.

Опр. 1.6. Координатной поверхностью уровня в пространстве называется любая плоскость, параллельная одной из координатных плоскостей.

Опр. 1.7. Прямоугольной системой координат называется такая система, в которой угол между каждой парой координатных осей является прямым. Если на координатных осях выбран одинаковый масштаб, то такая система называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Опр. 1.8. Полярной системой координат называется такая система координат, в которой каждой точке соответствует полярный радиус r — расстояние от начала координат (полюса), и полярный угол ϕ, который отсчитывается от луча, выходящего из начала координат (полярная ось), против часовой стрелки.

2. Направленные отрезки. Свободные векторы.

Опр. 2.1. **Направленным отрезком**, или связанным вектором, назовем отрезок, *однозначным образом* определяемый точками, которые назовет началом и концом направленного отрезка.

Пример 2.1. **Радиус-вектором точки** A называется направленный отрезок, проведенный из начала координат в точку A.

Опр. 2.2. Направленные отрезки будем называть **коллинеарными**, если они лежат на параллельных прямых.

Опр. 2.3. Направленные отрезки будем называть **компланарными**, если они лежат на параллельных плоскостях.

Опр. 2.4. **Модулем** (или длиной) направленного отрезка **AB** будем называть длину отрезка AB.

Опр. 2.5. **Отношением эквивалентности** $\sim$ на множестве M называется отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности.

Опр. 2.6. **Класс эквивалентности** элемента $a \in M$ - это подмножество множества M, в котором все элементы эквивалентны a.

Опр. 2.7. Направленные отрезки будем называть **эквивалентными**, если они сонаправлены и их модули равны.

Опр. 2.8. **Свободным вектором**, или просто вектором, называется класс эквивалентности направленных отрезков.

3. Множество векторов. Группа параллельных переносов.

Опр. 3.1. **Суммой векторов a** и **b** называется вектор **c**, являющийся классом эквивалентности направленного отрезка **AC**, начало которого совпадает с началом вектора **AB**, а конец — с концом вектора **BC**.

Опр. 3.2. **Произведением** вектора **a** на скаляр λ называется вектор $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ такой, что

(а) $|\mathbf{b}| = |\lambda||\mathbf{a}|$

(б) $\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \upuparrows \mathbf{b}$

(в) $\lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$

(г) $\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = \mathbf{0}$

Лемма 3.1. *Множество свободных векторов с введенными операциями сложения и умножения на скаляр образуют линейное пространство.*

Опр. 3.3. **Параллельным переносом** (или трансляцией) $T_{\mathbf{a}}$ точки P называется преобразование, которое сопоставляет ей такую точку P', что направленный отрезок $\mathbf{PP}'$ по модулю и направлению совпадает с **a**, называемым **вектором переноса**.

Лемма 3.2. *Множество параллельных переносов образует абелеву группу.*

4. Аффинное пространство. Точечный базис. Базис в ДПСК.

Пусть $\mathcal{A}$ — непустое множество, элементы которого мы будем называть *точками*, $L(\mathbb{B})$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, а также задано отображение (векторизация)

$$\Phi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to L$$

сопоставляющее паре точек (A, B) из $\mathcal{A}$ вектор $\mathbf{AB} = x \in L$.

Опр. 4.1. Тройка $(\mathcal{A}, L, \Phi)$ называется аффинным пространством с ассоциированным линейным пространством L над полем $\mathbb{K}$, если выполнено:

- Для любой точки $A \in \mathcal{A}$ и любого вектора $x \in L$ существует единственная точка $B \in \mathcal{A}$ такая, что $\mathbf{AB} = x \in L$.
- Lля любых трех точек $A, B, C \in \mathcal{A}$ имеет место равенство (треугольника)

$$\mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC} \tag{1}$$

Опр. 4.2. Репером (или точечным базисом) называется совокупность фиксированной точки O (начала координат) и $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базиса ассоциированного линейного пространства.

NtB. Определим базис в различных пространствах:

(а) На прямой линии базисом является любой ненулевой вектор;

(б) На плоскости базисом является любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов;

(в) В трехмерном пространстве базис - упорядоченная тройка любых некомпланарных векторов;

NtB. Единичные векторы **i**, **j** и **k** осей декартовой прямоугольной системы координат образуют базис пространства. Следовательно радиус-вектор любой точки A может быть разложен по базису

$$\mathbf{r}_A = x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k},$$

5. Общий подход к рассмотрению прямых и плоскостей.

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^n$ при $n = 2$ в случае плоскости и $n = 3$ в объемном геометрическом пространстве, а также зафиксируем подпространство $L \leqslant \mathbb{R}^n$. Напомним, что линейным многообразием M называлось подмножество линейного пространства, полученное путем "сдвига" какого-то линейного подпространства на вектор $\mathbf{r}_0$.

$$M = \mathbf{r}_0 + L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{r} \in M \quad \exists \mathbf{s} \in L : \quad \mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{s}$$

Опр. 2.1. Линейное подпространство L, по которому строится линейное многообразие M, называют **направляющим подпространством**.

В зависимости от соотношения между размерностью n геометрического пространства и размерностью $k = \dim L$ линейного подпространства $L \leqslant \mathbb{R}^n$ мы получаем различные примеры линейных многообразий в геометрических пространствах.

Возможны случаи:

- $n = 2$, $k = 1$: M — радиус-векторы, концы которых лежат на прямой в плоскости. При этом
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \alpha \mathbf{s}, \tag{1}$$
где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор **опорной** точки этой прямой, а $\mathbf{s}$ — ненулевой вектор из направляющего подпространства, который также называют **направляющим вектором**.
- $n = 3$, $k = 1$: M — радиус-векторы, концы которых лежат на прямой в пространстве. При этом также как и в предыдущем случае
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \alpha \mathbf{s}. \tag{2}$$
- $n = 3$, $k = 2$: M — радиус-векторы, концы которых лежат на плоскости в пространстве. При этом
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \tag{3}$$
где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор **опорной** точки этой плоскости, а $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — линейно независимые (неколлинеарные) векторы в пространстве, линейная оболочка которых образует линейное подпространство L.

6. Векторные уравнения прямых и плоскостей.

- $n = 2$, $k = 1$: M — радиус-векторы, концы которых лежат на прямой в плоскости. При этом
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \alpha \mathbf{s}, \tag{1}$$
где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор **опорной** точки этой прямой, а $\mathbf{s}$ — ненулевой вектор из направляющего подпространства, который также называют **направляющим вектором**.
- $n = 3$, $k = 1$: M — радиус-векторы, концы которых лежат на прямой в пространстве. При этом также как и в предыдущем случае
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \alpha \mathbf{s}. \tag{2}$$
- $n = 3$, $k = 2$: M — радиус-векторы, концы которых лежат на плоскости в пространстве. При этом
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \tag{3}$$
где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор **опорной** точки этой плоскости, а $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — линейно независимые (неколлинеарные) векторы в пространстве, линейная оболочка которых образует линейное подпространство L.

Из векторного параметрического уравнения прямой (на плоскости или в пространстве) можно получить также **векторное уравнение прямой, проходящей через две точки**

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} - t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0),$$

где $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \mathbf{s}$ определяет направляющий вектор прямой.

Опр. 3.2. Нормальным векторным уравнением прямой на плоскости называют уравнение вида

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = -C$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к прямой, а C — некоторая константа.

Вект. норм. уравн. плоск.

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \tag{10}$$

Действительно, для точки, принадлежащей плоскости, выражение $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ также определяет вектор, лежащий в ней, а значит он будет компланарным в системе с парой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

7. Взаимное расположение прямых, плоскостей и прямых относительно плоскостей.

Прямые в пространстве

Пусть прямые в пространстве заданы векторными параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned}\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{s}_1\\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{s}_2\end{aligned} \tag{4}$$

Возможно несколько случаев:

(а) Прямые параллельны

$$\mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{s}_1 = \lambda\mathbf{s}_2 \tag{5}$$

(б) Прямые совпадают

$$\mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2 \parallel (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \tag{6}$$

(в) Прямые пересекаются

$$\begin{cases}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = 0\\ \mathbf{s}_1 \neq \lambda\mathbf{s}_2\end{cases} \tag{7}$$

(г) Прямые скрещиваются

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \neq 0 \tag{8}$$

§6. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Пусть плоскости заданы векторными параметрическими (или нормальными) векторными уравнениями

$$\begin{aligned}\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \alpha_1\mathbf{a}_1 + \beta_1\mathbf{b}_1 \qquad (\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1) = -D_1\\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \beta_2\mathbf{b}_2 \qquad (\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = (\mathbf{r}_2, \mathbf{n}_2) = -D_2\end{aligned} \tag{11}$$

Возможно несколько случаев:

(а) Параллельность плоскостей

$$\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{n}_1 = \lambda\mathbf{n}_2 \tag{12}$$

(б) Совпадение плоскостей

$$\begin{cases}\mathbf{n}_1 = \lambda\mathbf{n}_2\\ D_1 = \lambda D_2\end{cases} \quad \text{или} \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) = 0 \tag{13}$$

(в) Пересечение плоскостей

$$\mathbf{n}_1 \neq \lambda\mathbf{n}_2 \quad \text{или} \quad [\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2] = \mathbf{s} \neq 0 \tag{14}$$

(г) Ортогональность плоскостей

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0 \tag{15}$$

§7. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть плоскость задана векторным нормальным уравнением, а прямая в пространстве — векторным параметрическим уравнением:

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = -D\\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t \cdot \mathbf{s}\end{aligned} \tag{16}$$

Возможно несколько случаев:

(а) Прямая и плоскость параллельны

$$(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = 0 \tag{17}$$

(б) Прямая принадлежит плоскости (частный случай параллельности)

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{n}) = 0 \tag{18}$$

(в) Прямая пересекает плоскость

$$(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \neq 0 \tag{19}$$

Причем точка пересечения может быть определена через параметр t

$$t = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{n})}{(\mathbf{s}, \mathbf{n})} \tag{20}$$

(г) Прямая ортогональна плоскости (частный случай пересечения)

$$\mathbf{s} \parallel \mathbf{n} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{s} = \lambda\mathbf{n} \tag{21}$$

8. Прямая на плоскости: координатные уравнения.

Зафиксируем декартову прямоугольную систему координат, в которой обозначим

$$\mathbf{r} = (x, y) \qquad \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0) \qquad \mathbf{s} = (s_x, s_y) \qquad \mathbf{n} = (A, B)$$

Тогда можно получить следующие уравнения прямой на плоскости, выраженные как аналитические соотношения между координатами:

(а) Координатные параметрические уравнения прямой на плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot s_x \\ y = y_0 + t \cdot s_y \end{cases}$$

как следствие векторного параметрического уравнения прямой.

(б) Каноническое уравнение прямой на плоскости

$$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y},$$

которое может быть получено из системы координатных параметрических уравнений прямой на плоскости.

(в) Уравнения прямой, проходящей через две точки

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0},$$

полученные из векторного уравнения прямой, проходящей через две точки, а также канонического уравнения прямой на плоскости, если положить направляющий вектор как $\mathbf{s} = (s_x, s_y) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$.

(г) Общее уравнение прямой на плоскости

$$Ax + By + C = 0$$

и нормальное уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Оба уравнения могут быть получены из векторного нормального уравнения прямой на плоскости

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = -C$$

(д) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = kx + b,$$

где $k = s_y/s_x$ — угловой коэффициент, а $b = y_0 - kx_0$.

(е) Уравнение в отрезках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a = -C/A$ и $b = -C/B$ в обозначениях общего уравнения прямой на плоскости.

(ж) Уравнение с прицельным параметром

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta = p,$$

где $\cos\alpha = \frac{A}{|\mathbf{n}|}$, $\cos\beta = \frac{B}{|\mathbf{n}|}$ - направляющие косинусы прямой, а $p = (\mathbf{r}_0, \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}_0|})$ — прицельный параметр прямой.

9. Плоскость в пространстве: координатные уравнения.

В зависимости от способа задания плоскости в пространстве необходимы следующие объекты:

(а) $\mathbf{n} = (A, B, C)$: вектор нормали к плоскости;

(б) $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$: пара неколлинеарных векторов, принадлежащих плоскости;

(в) $\mathbf{r}_{0,1,2} = (x_{0,1,2}, y_{0,1,2}, z_{0,1,2})$: радиус-векторы опорных точек плоскости.

Использование этих объектов в различных комбинациях позволяет описать несколько способов задания плоскости в пространстве при помощи аналитических соотношений на координаты точек плоскости:

(а) Параметрические уравнения плоскости в пространстве:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a_x + \beta b_x \\ y = y_0 + \alpha a_y + \beta b_y \\ z = z_0 + \alpha a_z + \beta b_z \end{cases} \tag{1}$$

(б) Уравнение, полученное из условия компланарности:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

(в) Общее уравнения плоскости в пространстве

$$Ax + By + Cy + D = 0 \tag{3}$$

и нормальное уравнение плоскости в пространстве

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{4}$$

Оба уравнения, как и в случае прямой на плоскости, могут быть получены из векторного нормального уравнения плоскости в пространстве

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = -D$$

(г) Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{5}$$

где $a = -D/A$, $b = -D/B$ и $c = -D/C$ в обозначениях общего уравнения плоскости в пространстве.

(д) Уравнение плоскости с прицельным параметром

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma = p \tag{6}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы, имеющие тот же смысл, что и в уравнении прямой на плоскости, а p — прицельный параметр.

10. Прямая в пространстве: координатные уравнения.

(а) Параметрические уравнения прямой в пространстве

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{s} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = x_0 + ts_x \\ y = y_0 + ts_y \\ z = z_0 + ts_z \end{cases}, \tag{7}$$

где $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — опорная точка прямой, а $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$ — ее направляющий вектор.

(б) Каноническое уравнение прямой в пространстве

$$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y} = \frac{z - z_0}{s_z} \tag{8}$$

(в) Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \tag{9}$$

(г) Прямая как пересечение плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

11. Линии на плоскости. Способы задания. Алгебраическая кривая. Общее уравнение кривой 2-го порядка.

Опр. 1.1. Уравнением линии на $\mathbb{R}^2$ называется такое соотношение между координатами x и y, что координаты любой точки линии удовлетворяют этому уравнению, тогда как координаты любой точки вне линии ему не удовлетворяют.

Способы задания линий

(а) Явное задание линии

$$y = f(x), \qquad \text{или} \qquad x = g(y) \tag{1}$$

(б) Неявное задание линии

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

(в) Параметрическое задание линии

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{3}$$

Опр. 1.2. Алгебраической кривой на плоскости называется геометрическое место точек, для которых соотношения между координатами могут быть выражены с помощью степенных функций.

$$F(x, y) = a_1 x^{m_1} y^{n_1} + \ldots + a_l x^{m_k} y^{n_k} = 0, \qquad m_i, n_i \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Опр. 1.3. Порядком линии p называется порядок полинома, определяющего связь между координатами, т.е.

$$p = \max \{m_i + n_i\} \tag{5}$$

Опр. 1.4. Общим уравнением алгебраической линии (кривой) 2-го порядка называется уравнение вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{6}$$

12. Эллипс. Определения, связанные понятия. Каноническое уравнения. Свойства эллипса.

Опр. 2.1. Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек плоскости (фокусов) есть величина постоянная.

Расположим систему координат таким образом, что ось Ox будет проходить через фокусы F_1 и F_2 эллипса, а ось Oy через середину отрезка, который они образуют. Длина этого отрезка $|F_1F_2| = 2c$ называется фокусным расстоянием. В соответствии с этим фокусы будут иметь координаты

$$F_1(-c, 0), \qquad F_2(c, 0) \tag{7}$$

Тогда произвольная точка $M(x, y)$, принадлежащая эллипсу, будет удовлетворять равенству

$$|\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2| = 2a = \text{const}, \tag{8}$$

где $\mathbf{r}_{1,2}$ — векторы, проведенные из фокусов $F_{1,2}$ в точку $M(x, y)$, называемые фокальными радиусами.

Опр. 2.2. Уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad b^2 = a^2 - c^2 \tag{9}$$

называют **каноническим уравнением эллипса**, где a и b — большая и малая полуось соответственно.

Опр. 2.3. Эксцентриситетом эллипса называют величину $\varepsilon = c/a$, характеризующую степень "вытянутости" эллипса.

Частные случаи

(а) $c = 0$: окружность.

$$c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r_1 = r_2 = a = R, \quad \varepsilon = 0 \tag{10}$$

(б) $c = a$: отрезок.

$$c = a \qquad \Rightarrow \qquad |F_1F_2| = r_1 + r_2 = 2c, \quad \varepsilon = 1 \tag{11}$$

Опр. 2.4. Параметрическими уравнениями эллипса называют

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\cos t \end{cases} \tag{12}$$

Опр. 2.5. Уравнением касательной к эллипсу называют уравнение вида

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \tag{13}$$

Опр. 2.6. Директрисами эллипса называются прямые, параллельные малой оси эллипса и проходящие от нее на расстоянии a/ε.

Свойства эллипса

(а) **Директориальное свойство эллипса**. Эллипс — множество точек, для которых отношение расстояния $r_{1,2}$ до фокуса и расстояния $d_{1,2}$ до соответствующей директрисы постоянно и равно эксцентриситету ε:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \tag{14}$$

(б) **Оптическое свойство эллипса**. Фокальные радиусы произвольной точки M_0 эллипса составляют равные углы с касательной к эллипсу в этой точке.

(в) **Свойства симметрии эллипса**. Для всякой точки $M(x, y)$, принадлежащей эллипсу E, справедливо

(а) $M_1(-x, y) \in E$ — осевая симметрия относительно Oy

(б) $M_1(x, -y) \in E$ — осевая симметрия относительно Ox

(в) $M_1(-x, -y) \in E$ — центральная симметрия относительно начала координат O

13. Гипербола. Определения, связанные понятия. Каноническое уравнения. Свойства гиперболы.

§3. Гипербола

Опр. 3.1. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости таких, что модуль разности расстояний от этих точек до двух фиксированных точек плоскости (фокусов) остается постоянным.

В силу того, что определение гиперболы до крайней степени похоже на определение эллипса, вид уравнений и свойств будут очень похожи. Поэтому для описания гиперболы ограничимся тезисным описанием.

(а) Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad b^2 = c^2 - a^2, \tag{16}$$

где a и b - вещественная и мнимая ось соответственно.

(б) Гипербола имеет две компоненты связности (ветви)

$$|r_1 - r_2| = 2a > 0, \Longrightarrow \left[\begin{matrix} r_1 > r_2 \\ r_2 > r_1 \end{matrix}\right. \tag{17}$$

(в) Частные случаи

(а) $a = 0$: ось Oy

$$a = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varepsilon = \infty \tag{18}$$

(б) $a = c$: два луча на Ox, исходящие из точек фокуса

$$a = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varepsilon = 1 \tag{19}$$

(г) Симметрии. Также наблюдаются осевые и центральная симметрии

(д) Параметрические уравнения гиперболы. Определяются схожим образом, но не через тригонометрические синус и косинус, а гиперболические

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,t \\ y = b\,\mathrm{sh}\,t \end{cases} \tag{20}$$

(е) Уравнение касательной к гиперболе

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \tag{21}$$

(ж) Директрисы гиперболы. Аналогично директрисам эллипса - прямые, параллельные мнимой оси и находящиеся на расстоянии a/ε

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}, \qquad \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \tag{22}$$

(з) Оптическое свойство. Фокальные радиусы произвольной точки M_0 гиперболы составляют равные углы с касательной к гиперболе в точке M_0

Опр. 3.2. Асимптотой неограниченной кривой называется прямая линия такая, что расстояние от точки кривой до асимптоты стремится к нулю, когда точка кривой уходит на бесконечность.

Теорема 3.1. *В канонической системе координат асимптотами гиперболы служат прямые*

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{23}$$

14. Парабола. Определения, связанные понятия. Каноническое уравнения. Свойства параболы.

Опр. 4.1. Параболой называется геометрическое место точек плоскости таких, что расстояние от этих точек до фиксированной точки плоскости (фокуса) и до фиксированной прямой (директрисы) одинаково.

Пусть фокус находится в точке $F(p/2, 0)$, а директриса определяется уравнением

$$x = -\frac{p}{2} \tag{24}$$

(а) Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px, \tag{25}$$

где p - фокальный параметр, определяемый как расстояние от фокуса до директрисы.

(б) Уравнение касательной к параболе в точке (x, y)

$$yy_0 = p(x + x_0) \tag{26}$$

(в) Оптическое свойство параболы. Касательная к параболе в каждой точке M_0 составляет равные углы с фокальным радиусом точки M_0 и с осью параболы.

(г) Парабола P имеет осевую симметрию относительно оси Ox:

$$M(x, y) \in P \qquad \Leftrightarrow \qquad M(x, -y) \in P \tag{27}$$

15. Полярные уравнения кривых 2-го порядка.

Теорема 1.1. *Уравнение вида*

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\phi},$$

где p — фокальный параметр, ρ — полярный радиус, а ϕ — полярный угол, описывает эллипс, гиперболу и параболу в зависимости от параметров:

- *Эллипс*

$$\varepsilon \in [0,1) \qquad p = a - \varepsilon c$$

- *Парабола*

$$\varepsilon = 1 \qquad p = 2c$$

- *Гипербола*

$$\varepsilon \in [0,1) \qquad p = \pm(\varepsilon c - a)$$

А надо ?

Доказательство. Начнем доказательство с **эллипса**.
Поместим полюс системы координат в (левый) фокус F_1. Тогда полярный радиус произвольной точки будет совпадать с первым фокальным радиусом

$$|\mathbf{r}_1| = \rho$$

Из уравнения эллипса, а также связи между координатами получаем

$$r_1 + r_2 = 2a, \qquad r_1 = \rho, \qquad r_2 = a - \varepsilon x, \qquad x + c = \rho\cos\phi$$

Соберем воедино

$$\rho + a - \varepsilon(\rho\cos\phi - c) = 2a \qquad \Rightarrow \qquad (1 - \varepsilon\cos\phi)\rho = a - \varepsilon c$$

Откуда следует утверждение теоремы.

$$\rho = \frac{a - \varepsilon c}{1 - \varepsilon\cos\phi} = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\phi}$$

Гипербола.
Выберем в качестве полюса также левый фокус. Воспользуемся соотношениями:

$$|r_1 - r_2| = 2a, \qquad r_1 = \rho, \qquad r_2 = \varepsilon x - a, \qquad x + c = \rho\cos\phi$$

После раскрытия модуля придем к двум уравнениям соответствующим веткам гиперболы:

$$\rho = \frac{\pm(a - \varepsilon c)}{1 - \varepsilon\cos\phi} = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\phi},$$

где знак "+" соответствует левой ветке параболы $p = a - \varepsilon c$, а "−" соответствует правой $p = \varepsilon c - a$.

Парабола.
Вновь разместим полюс в фокусе. Тогда

$$r = d, \qquad r = \rho, \qquad d = \frac{p}{2} + x, \qquad x - \frac{p}{2} = \rho\cos\phi$$

из которых получаем

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\phi},$$

где эксцентриситет $\varepsilon = 1$, что завершает доказательство теоремы. □

16. Уравнение кривых 2-го порядка через эксцентриситет.

Получим общее уравнение кривых в декартовых координатах.
Для этого рассмотрим параллельный перенос канонической системы координат $Ox'y'$ эллипса в его левую вершину. Соответствующее преобразование в новую систему координат Oxy будет иметь вид

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' \end{cases}$$

Тогда уравнение преобразуется следующим образом

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{(x-a)^2}{a^2}$$
$$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

Вводя обозначения

$$\frac{b^2}{a} = p \qquad \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$$

получим окончательно

$$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2$$

Аналогичное уравнение по своей форме получается и для гиперболы, если разместить новую систему координат в правой вершине гиперболы. Вспомним, что для параболы мы полагали $\varepsilon = 1$. Тогда становится очевидным, что это уравнение описывает все три кривые.

При фиксированном p и изменяющемся $\varepsilon \in [0, +\infty)$ мы последовательно получаем

- $\varepsilon = 0$ — окружность
- $\varepsilon \in (0,1)$ — эллипс
- $\varepsilon = 1$ — парабола
- $\varepsilon \in (1, +\infty)$ — гипербола

16. Уравнение кривых 2-го порядка через эксцентриситет.

17. Приведение общего уравнения кривых 2-го порядка к каноническому виду: поворот.

Общее уравнение кривых 2-го порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

обязательно содержит в себе все частные случаи, но также может содержать дополнительную информацию. Рассмотрим свойства данного уравнения.

- Квадратичное слагаемое $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$. Наличие этого слагаемого, говорит о том, что уравнение описывает кривую 2-го порядка. Более того, сравнивая это уравнение с каноническими, можно заметить, что слагаемое, содержащее xy может возникнуть только при повороте канонической системы координат (в силу наличия перекрестного умножения).
- Линейное слагаемое $Dx + Ey$ сигнализирует о возможном наличии параллельного переноса канонической системы координат. Это становится очевидным, если применить преобразование трансляции к любому из канонических уравнений.

Рассмотрим один из возможных алгоритмов приведения кривой к каноническому виду. Очевидно, что в канонических системах координат отсутствует слагаемое вида $2Bxy$, а значит избавление от него точно позволит нам сделать шаг в сторону канонического уравнения.

Рассмотрим поворот плоскости на неизвестный угол θ

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases}$$

полагая, что x' и y' — координаты точек кривой в новой системе координат.

Подставим это преобразование в общее уравнение кривой 2-го порядка:

$$\begin{gathered} A(x'^2\cos^2\theta - 2x'y'\cos\theta\sin\theta + y'^2\sin^2\theta) + \\ +2B(x'^2\cos\theta\sin\theta + x'y'(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - y'^2\cos\theta\sin\theta) + \\ +C(x'^2\sin^2\theta + 2x'y'\cos\theta\sin\theta + y'^2\cos^2\theta) + \\ +D(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + E(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + F = 0 \end{gathered}$$

Выберем угол θ такой, что коэффициент перед $x'y'$ станет равным нулю. Попробуем выяснить, что это за угол:

$$\begin{gathered} -2A\cos\theta\sin\theta + 2B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2C\cos\theta\sin\theta = 0 \\ 2B\cos 2\theta = (A - C)\sin 2\theta \\ \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2B}{A - C} \end{gathered}$$

Таким образом мы нашли значение угла, при котором слагаемое с $x'y'$ обращается в ноль.

Завершая преобразование с уже найденным углом θ получим уравнение вида

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$$

18. Приведение общего уравнения кривых 2-го порядка к каноническому виду: выделение полного квадрата.

Общее уравнение кривых 2-го порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

обязательно содержит в себе все частные случаи, но также может содержать дополнительную информацию. Рассмотрим свойства данного уравнения.

- Квадратичное слагаемое $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$. Наличие этого слагаемого, говорит о том, что уравнение описывает кривую 2-го порядка. Более того, сравнивая это уравнение с каноническими, можно заметить, что слагаемое, содержащее xy может возникнуть только при повороте канонической системы координат (в силу наличия перекрестного умножения).
- Линейное слагаемое $Dx + Ey$ сигнализирует о возможном наличии параллельного переноса канонической системы координат. Это становится очевидным, если применить преобразование трансляции к любому из канонических уравнений.

Завершая преобразование с уже найденным углом θ получим уравнение вида

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$$

Второй способ использует выделение полного квадрат. Сгруппируем слагаемые следующим образом

$$A'\left(x^2 + \frac{D'}{A'}x\right) + C'\left(y^2 + \frac{E'}{C'}y\right) + F = 0$$

$$A'\left(x + \frac{D'}{2A'}\right)^2 - \frac{D'^2}{4A'} + C'\left(y + \frac{E'}{2C'}\right)^2 - \frac{E'^2}{4C'} + F = 0$$

Вводя обозначения

$$x_0 = -\frac{D'}{2A'} \qquad y_0 = -\frac{E'}{2C'} \qquad F' = F - \frac{D'^2}{4A'} - \frac{E'^2}{4C'}$$

получим уравнение кривой в канонической системе координат:

$$A'(x - x_0)^2 + C'(y - y_0)^2 + F' = 0$$

или

$$A'\xi^2 + C'\eta^2 + F' = 0$$

19. Классификация кривых 2-го порядка: эллиптический тип.

Для удобства переобозначим все буквы следующим образом

$$Ax^2 + By^2 + C = 0$$

Основываясь на коэффициентах A, B и C, разделим уравнения на три группы:

(a) Уравнения эллиптического типа. К уравнениям этого типа отнесем такие, в которых A и B имеют одинаковый знак

$$AB > 0$$

В зависимости от коэффициента C получим несколько случаев

- Пусть C имеет отличный от A и B знак. Тогда уравнение можно переписать как
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
Полученное уравнение описывает **вещественный эллипс**.

- Пусть C имеет одинаковый с A и B знак. Тогда
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$
Полученное уравнение описывает **мнимый эллипс**. Данное уравнение описывает пустое множество точек на декартовой плоскости.
- Пусть $C = 0$. Тогда
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$
В таком случае имеется **пара пересекающихся мнимых прямых**. В вещественной плоскости этому типу уравнения удовлетворяет только одна единственная точка $(0, 0)$.

20. Классификация кривых 2-го порядка: гиперболический тип.

Для удобства переобозначим все буквы следующим образом

$$Ax^2 + By^2 + C = 0$$

Основываясь на коэффициентах A, B и C, разделим уравнения на три группы:

(б) Уравнения гиперболического типа. К этому типу уравнений относят такие, что $AB < 0$ — коэффициенты имеют разный знак. Не теряя общности можем положить, что $A > 0$. В силу того, что знак C не влияет на сам тип кривой, можно выделить два случая:

- $C \neq 0$. В таком случае, уравнение дает **гиперболу** (при $C < 0$) или **двойственную ей гиперболу** ($C > 0$):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

- $C = 0$. В таком случае

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

уравнение описывает **две пересекающиеся прямые**.

21. Классификация кривых 2-го порядка: параболический тип.

(в) Уравнения параболического типа. Рассмотрим вырожденный случай — такой, что какой-то *один из* коэффициентов A или B равен нулю. Не теряя общности и здесь можем положить, например, коэффициент B равным нулю. Тогда уравнение

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$$

параллельным переносом можно привести к виду

$$Sy^2 + Px + Q = 0$$

которое также представляет несколько типов:

- Пусть $P \neq 0$. Знакомый нам случай **параболы**:

$$y^2 = 2px$$

- Пусть $P = 0$, а $SQ \leqslant 0$. Иными словами, что S и Q имеют разный знак или же $Q = 0$. В таком случае уравнение описывает **параллельные (совпадающие при $Q = 0$) прямые**

$$y^2 = a^2$$

- Пусть $P = 0$, а $PQ > 0$. Тогда уравнение примет вид

$$y^2 + a^2 = 0$$

и уравнение будет описывать пустое множество на вещественной плоскости, но, вообще говоря, **мнимые параллельные прямые.**