Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Дисциплина «Дополнительный главы математического анализа»

Расчётно-графическая работа №1

Вариант №3

Выполнили:
Горин С.Д.
Пивоваров Р.Н.
Решетников С.Е.

Проверил:
Богачев В.А.

Дата сдачи: 30 октября

Санкт-Петербург, 2025

Задание №1

Найти и построить область определения сложной функции:

$$z = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

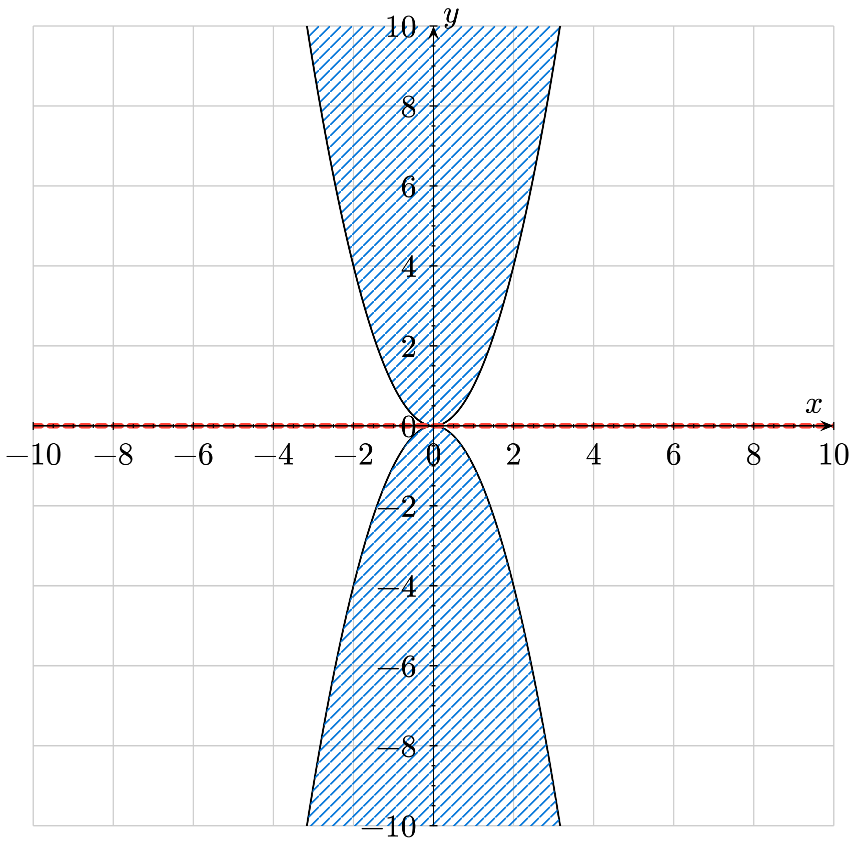
Вспомним область определения для функции $\arcsin(t)$*:*

$$t \in [-1; 1]$$

Тогда область определения нашей сложной функции:

$$-1 \le \frac{x^2}{y} \le 1 \iff \begin{cases} y \ne 0 \\ \left[\begin{array}{l} y > 0\colon \begin{cases} y \ge x^2 \\ y \ge -x^2 \end{cases} \\ \\ y < 0\colon \begin{cases} y \le x^2 \\ y \le -x^2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} y \ne 0 \\ \left[\begin{array}{ll} y \ge x^2 & y > 0 \\ y \le -x^2 & y < 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

Построим её график:



Ответ: $\begin{cases} y \ne 0 \\ \left[\begin{array}{ll} y \ge x^2 & y > 0 \\ y \le -x^2 & y < 0 \end{array}\right. \end{cases}$

Задание №2

Исследовать на непрерывность функцию двух переменных:

$$z = \begin{cases} \left(\frac{x^3+y^3}{x+y}, x + y \ne 0\right) \\ (3, x + y = 0) \end{cases}$$

Для $x+y\neq 0$ функция рациональна, следовательно, непрерывна на этой области. Упростим выражение:

$$z=\frac{x^3+y^3}{x+y}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y}=x^2-xy+y^2.$$

Поскольку это многочлен, он непрерывен для всех (x,y), где $x+y\neq 0$.

Теперь исследуем поведение функции на линии $x+y=0$. Пусть $(x,y)\to(a,-a)$, тогда:

$$\lim_{(x,y)\to(a,-a)} z(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,-a)}(x^2-xy+y^2)=a^2-a(-a)+(-a)^2=3a^2.$$

Таким образом,

$$\lim_{(x,y)\to(a,-a)} z(x,y)=3a^2.$$

На линии $x+y=0$ по определению функции $z=3$. Сравним значение функции и предела:

$$3a^2=3\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm 1.$$

Следовательно функция непрерывна при $x+y\neq 0$ и в точках $(1,-1)$ и $(-1,1)$. А во всех остальных точках линии $x+y=0$ $(a,-a)$ при $a\neq\pm 1$ существует устранимый разрыв, так как предел существует (равен $3a^2$), но не совпадает со значением функции (3).

Ответ:

$$z=\begin{cases}(\text{непрерывна при }\ x+y\neq 0\ \text{ и в точках }\ (1,-1)\ ,\ \ (-1,1))\\ (\text{устранимые разрывы: }\ (a,-a)\ ,\ \ a\neq\pm 1)\end{cases}$$

Задание №3

Для неявно заданной функции записать многочлен Тейлора 2-го порядка по степеням $(x-x_0)$, $(y-y_0)$:

$$x^2-y^2+2z^2-3xyz+y-z+2=0,\quad M_0(2;1;2)$$

Обозначим $F(x,y,z)=x^2-y^2+2z^2-3xyz+y-z+2$. Найдём частные производные:

$$F_x=2x-3yz$$

$$F_y=-2y-3xz+1$$

$$F_z=4z-3xy-1$$

Вычислим в точке $M_0(2;1;2)$:

$$F_{x(2,1,2)}=2\cdot 2-3\cdot 1\cdot 2=4-6=-2$$

$$F_{y(2,1,2)}=-21-3\cdot 2\cdot 2+1=-2-12+1=-13$$

$$F_{z(2,1,2)}=4\cdot 2-3\cdot 2\cdot 1-1=8-6-1=1$$

По формуле неявной функции:

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z},\ z_y=-\frac{F_y}{F_z}$$

Отсюда в точке M_0:

$$z_{x(2,1,2)} = -\frac{-2}{1} = 2$$

$$z_{y(2,1,2)} = -\frac{-13}{1} = 13$$

3. Вторые частные производные функции F:

$$F_{xx} = 2, \quad F_{yy} = -2, \quad F_{zz} = 4,$$

$$F_{xy} = -3z, \quad F_{xz} = -3y, \quad F_{yz} = -3x$$

В точке $(2, 1, 2)$:

$$F_{xx} = 2, \quad F_{yy} = -2, \quad F_{zz} = 4$$

$$F_{xy} = -3 \cdot 2 = -6, \quad F_{xz} = -3 \cdot 1 = -3, \quad F_{yz} = -3 \cdot 2 = -6.$$

Формулы для вторых производных неявной функции:

$$z_{xx} = -\frac{F_{xx} + 2F_{xz}z_x + F_{zz}z_x^2}{F_z}$$

$$z_{yy} = -\frac{F_{yy} + 2F_{yz}z_y + F_{zz}z_y^2}{F_z}$$

$$z_{xy} = -\frac{F_{xy} + F_{xz}z_y + F_{yz}z_x + F_{zz}z_x z_y}{F_z}$$

Подставляем $z_x = 2$, $z_y = 13$, $F_z = 1$:

$$z_{xx} = -(2 + 2 \cdot (-3) \cdot 2 + 4 \cdot 2^2) = -(2 - 12 + 16) = -6$$

$$z_{yy} = -(-2 + 2 \cdot (-6) \cdot 13 + 4 \cdot (13)^2) = -(-2 - 156 + 676) = -518$$

$$z_{xy} = -(-6 + (-3) \cdot 13 + (-6) \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 13) = -(-6 - 39 - 12 + 104) = -47.$$

4. Многочлен Тейлора 2-го порядка в окрестности $M_0(2, 1)$:

Общая формула:

$$z(x, y) = z_0 + z_x \cdot (x - x_0) + z_y \cdot (y - y_0) + \frac{1}{2}\Big(z_{xx} \cdot (x - x_0)^2 + 2 \cdot z_{xy} \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + z_{yy} \cdot (y - y_0)^2\Big).$$

Подставляем числовые значения: $(z_0, x_0, y_0) = (2, 2, 1)$, $z_x = 2$, $z_y = 13$, $z_{xx} = -6$, $z_{xy} = -47$, $z_{yy} = -518$:

$$z(x, y) = 2 + 2 \cdot (x - 2) + 13 \cdot (y - 1) + \frac{1}{2}(-6 \cdot (x - 2)^2 + 2 \cdot (-47) \cdot (x - 2) \cdot (y - 1) - 518 \cdot (y - 1)^2).$$

После упрощения:

$$z(x, y) = 2 + 2 \cdot (x - 2) + 13 \cdot (y - 1) - 3 \cdot (x - 2)^2 - 47 \cdot (x - 2) \cdot (y - 1) - 259 \cdot (y - 1)^2.$$

Ответ: $z(x, y) = 2 + 2(x - 2) + 13(y - 1) - 3(x - 2)^2 - 47(x - 2)(y - 1) - 259(y - 1)^2.$

Задание №4

Найдите угол между градиентами функций $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ в точке M_0.

$$u = 9\sqrt{2} - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$$

$$v = \frac{xy^2}{z^2}, M_0\left(\frac{1}{3}; 2; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

Для начала найдём градиенты каждой из функций. Для этого вычислим частные производные по каждой из переменных(x, y, z):

$$u_x = \frac{y^2}{z^3} \qquad v_x = 27\sqrt{2}x^2$$

$$u_y = \frac{2xy}{z^2} \qquad v_y = -\frac{3y^2}{2\sqrt{2}}$$

$$u_z = -\frac{3xy^2}{z^4} \qquad v_z = -\frac{12z^2}{\sqrt{3}}$$

таким образом градиенты:

$$\nabla u\left(\frac{y^2}{z^3}; \frac{2xy}{z^2}; -\frac{3xy^2}{z^4}\right) \qquad \nabla v\left(27\sqrt{2}x^2; -\frac{3y^2}{2\sqrt{2}}; -\frac{12z^2}{\sqrt{3}}\right)$$

Так как градиенты – это векторы мы можем найти угол между ними по формуле:

$$\angle\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = \arccos\left(\frac{\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Подставим значения и вычислим:

$$\angle(\nabla u; \nabla v) = \arccos\left(\frac{\frac{y^2}{z^3} \cdot 27\sqrt{2}x^2 + \frac{2xy}{z^2} \cdot \left(-\frac{3y^2}{2\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{3xy^2}{z^4}\right) \cdot \left(-\frac{12z^2}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{y^2}{z^3}\right)^2 + \left(\frac{2xy}{z^2}\right)^2 + \left(-\frac{3xy^2}{z^4}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(27\sqrt{2}x^2\right)^2 + \left(-\frac{3y^2}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{12z^2}{\sqrt{3}}\right)^2}}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \cdot 3\sqrt{2} + \frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} \cdot \left(-3\sqrt{2}\right) + \left(-\frac{16}{9}\right) \cdot \left(-6\sqrt{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{16}{9}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(-3\sqrt{2}\right)^2 + \left(-6\sqrt{3}\right)^2}}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$$

Ответ: 45°

Задание №5

Заменяя приращение функции дифференциалом, приближённо вычислить

$$(1.03)^4 \cdot (0.98)^4$$

Возьмём

$$f(x,y) = x^4 \cdot y^4 = (xy)^4$$
$$x_0 = 1\ ,\ y_0 = 1 \Rightarrow f(x_0, y_0) = f(1,1) = 1$$

Тогда

$$\Delta x = 0.03,\ \Delta y = -0.02$$

Найдём полный дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^4 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^4y^3$$

Вычислим

$$f'_x(1,1) = 4 \quad f'_y(1,1) = 4$$
$$df = 4 \cdot 0.03 + 4 \cdot (-0.02) = 0.04$$
$$f(1.03, 0.98) \approx f(1,1) + df = 1.04$$

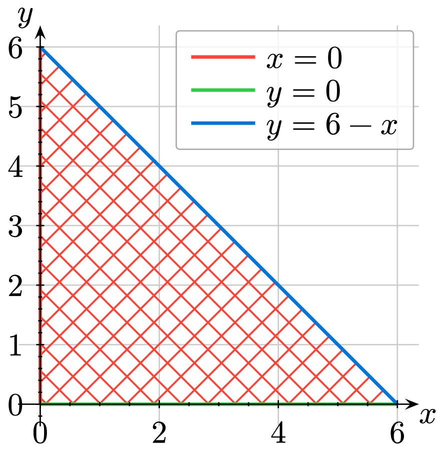
Ответ: 1.04

Задание №6

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,y)$ в области D, ограниченной заданными линиями

$$z = x^2y(4-x-y)$$

$$D : x + 2y = 4$$
$$x - 2y = 4$$
$$x = 0$$



$$z'_x = 2xy(4-x-y) + x^2y(-1) \qquad z'_y = x^2(4-x-y) + x^2y(-1)$$

$$\begin{cases} 2xy(4-x-y) + x^2y(-1) = 0 \\ x^2(4-x-y) + x^2y(-1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy(8-2x-2y-x) = 0 \\ x^2(4-x-y-y) = 0 \end{cases}$$

т.к. пока рассматриваются только точки внутри области, то $y \neq 0, x \neq 0$

$$\begin{cases} 8-3x-2y=0 \\ 4-x-2y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8-12+6y-2y=0 \\ x=4-2y \end{cases} \qquad \begin{cases} -4+4y=0 \\ x=4-2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} - \textit{точка-кандидат}$$

$$\begin{aligned}
z''_{xx} &= 2y(4-x-y)+2xy(-1)+2xy(-1) &&= 8y-6xy-2y^2 \\
z''_{xy} &= 2x(4-x-y)-2xy+x^2(-1) &&= 8x-3x^2-4xy \\
z''_{yy} &= -x^2-x^2 &&= -2x^2 \\
z''_{yx} &= 2x(4-x-y)+x^2(-1)+2xy(-1) &&= 8x-3x^2-4xy
\end{aligned}$$

Подставим $(2,1)$*:*

$$z''_{xx}(2,1)=-6 \quad z''_{xy}(2,1)=-4 \quad z''_{yy}(2,1)=-8 \quad z''_{yx}(2,1)=-4$$

Найдём значение Гессиана в точке $(2,1)$*:*

$$\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 48-16=32>0 \Rightarrow (2,1) - \textit{точка экстремума}$$

$$z''_{xx}(2,1)=-6<0 \Rightarrow (2,1) - \textit{точка максимума}$$

в ней ф-ия принимает значение 4.

Теперь исследуем границы
Проверим $x=0$*:*

$$z(0,y)=0$$

Проверим $y=0$*:*

$$z(x,0)=0$$

Проверим $y=6-x$*:*

$$z=x^2(6-x)(4-x-(6-x))=x^2(6-x)(4-x-6+x)=x^2(6-x)(-2)=-12x^2+2x^3$$

$$z'=-24x+6x^2$$

$$-24x+6x^2=0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ -24+6x=0 \Rightarrow x=4 \end{cases} - \textit{точки экстремума}$$

При $x=0$: $y=6$ $z(0,6)=0$

При $x=4$: $y=2$ $z(4,2)=-64$

Ответ: наибольшее значение 4*, а наименьшее* -64

Задание №7
Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$S: x^2+y^2+z^2-xy+3z=7 \qquad M_0(1,2,1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2x - y \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = 2y - x \qquad \frac{\partial S}{\partial z} = 2z + 3$$

$$\nabla\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}\right) = \nabla(2x - y, 2y - x, 2z + 3)$$

Подставим $M_0(1, 2, 1)$*:*

$$\nabla(0, 3, 5)$$

Составим уравнение плоскости:

$$0 \cdot x + 3 \cdot y + 5 \cdot z + D = 0$$

$$0 + 6 + 5 + D = 0 \Rightarrow D = -11$$

$$0 \cdot x + 3 \cdot y + 5 \cdot z - 11 = 0$$

Составим уравнение нормали:

$$\textit{Вектор нормали к плоскости:} \quad (0, 3, 5)$$

$$\textit{Параметрическое уравнение нормали:} \quad \begin{cases} x = 0t \\ y = 3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 5t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0t + 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = 5t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ t = \frac{y-2}{3} \\ t = \frac{z-1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{5} \end{cases}$$

Ответ: уравнение касательной плоскости в точке $0x + 3y + 5z - 11 = 0$*, уравнение нормали в точке* $\begin{cases} x = 1 \\ \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{5} \end{cases}$

Оценочный лист

ФИО	Горин С.Д.	Пивоваров Р.Н.	Решетников С.Е.
Оценка			