

利用动态规划数学模型求最短路径

杜彦娟

(黑龙江科技学院 蒿山校区, 黑龙江 哈尔滨 150000)

摘 要 随着科技的发展,数学模型已广泛应用到社会生活的各个领域。文中介绍了数学模型的定义及建立动态规划数学模型步骤,并通过建立动态规划数学模型解决了求最短路径问题,具有广泛的实际意义。

关键词 数学模型;动态规划;最短路径;结点

中图分类号:TB11

文献标识码:A

文章编号:1008-8725(2005)01-0094-02

0 概述

在日常生活和生产中,我们经常遇到与求最短路径的问题。例如,某人因为工作需要,常常往返于城市 A 与城市 B 之间,那么就希望知道从城市 A 到城市 B 的众多路径中,选择哪一条路径的路途最短。经济管理中的货物存贮、设备更新、资源分配、任务均衡、系统可靠性等问题,都需要动态规划数学模型来解决。

数学模型(Mathematical Model)是指对于现实世界的一个特定对象,为了一个特定目的,根据特有的内在规律,作出一些必要的简化、假设,运用适当的数学工具得到的一个数据结构。

动态规划是寻求多阶段生产计划的方法,它是求解多阶段优化决策问题的有效工具。建立动态规划数学模型的主要步骤为:划分阶段,定义状态和决策,建立状态转移律,确定允许状态集合和允许决策集合,列出最优方程并确定终端条件。

1 实例分析

1.1 问题的提出

现有一张城市地图,如图 1 表示,每个结点代表城市,边上的加权值表示城市间距离。在此介绍如何找出某人从城市 A 经城市 B、C、D 到达城市 E 的最短路径的方法。

$K=1$ $K=2$ $K=3$ $K=4$

1.2 问题分析与求解

把整个过程划分 4 个阶段,用 K 表示, $K=1, 2, 3, 4$ 。

$K=1$ (第一阶段):从 A 结点到 B 级结点(B_1 ,

B_2);

$K=2$ (第二阶段):从 B 级结点(B_1, B_2)到级结点(C_1, C_2);

$K=3$ (第三阶段):从 C 级结点(C_1, C_2)到级结点(D_1, D_2, D_3);

$K=4$ (第四阶段):从 D 级结点(D_1, D_2, D_3)到 E 结点。

显然,每两个结点间距离是一定的,用 $d(i, j)$ 表示,且 $d(i, j) = d(j, i)$ 。

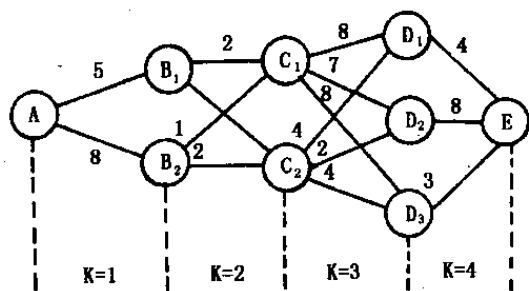


图 1 示意图

从一个路径的每一结点到达下一路径的那个结点,是由阶段初的城市名、阶段末的城市名确定,图中用结点间的连线表示,再将本阶段的两城市间路程作为两结点间的距离,标在结点间的连线上,这样求解某人从城市 A 经城市 B、城市 C、城市 D 至城市 E 的路程最短问题就转化为寻找从阶段 1 的结点 A 至阶段 4 的结点 E 的一条最短路径问题。

求最短路径问题有两种解法:顺序递推法和逆序递推法。顺序递推法即从前向后求解,逆序递推法即从后向前求解。因为从 A 至 E 的最短路径与从 E 至 A 的最短路径相同,所以两种解法的结果是唯一确定的,并且若某一路径为最短路径,则它的任一子路径也必为最短路径。

1.2.1 顺序递推法

$K=1$ 时,考虑第一个阶段。第一阶段的最短路径记作 $f_1(B_i), i=1, 2$ 则 $f_1(B_1)=5, f_1(B_2)=8$ 。

$K=2$ 时,联合考虑前两个阶段。第一阶段、第二阶段至 B_i 结点的最短路径之和记为 $f_2(C_i), i=1, 2$ 。 $f_2(C_1)=\min\{d(B_1, C_1)+f_1(B_1), d(B_2, C_2)+f_1(B_2)\}=\min\{2+5, 1+8\}=7$, 即从 A 结点至 C_1 结点最短路径为 $A-B_1-C$ 。 $f_2(C_2)=\min\{d(B_1, C_2)+f_1(B_1), d(B_2, C_2)+f_1(B_2)\}=\min\{3+5, 2+8\}=8$, 即从 A 结点至 C_2 结点最短路径为 $A-B_1-C_2$ 。

$K=3$ 时,联合考虑前三个阶段。前三个阶段至 D_i 结点的最短路径记作 $f_3(D_i), i=1, 2, 3$ 。 $f_3(D_1)=\min\{d(C_1, D_1)+f_2(C_1), d(C_2, D_1)+f_2(C_2)\}f_3(D_1)=\min\{d(C_1, D_1)+f_2(C_1), d(C_2, D_1)+f_2(C_2)\}=\min\{8+7, 4+8\}=12$, 即从 A 结点至 D_1 结点最短路径为 $A-B_1-C_1-D_1$ 。 $f_3(D_2)=\min\{d(C_1, D_2)+f_2(C_1), d(C_1, D_2)+f_2(C_3)\}=\min\{7+7, 2+8\}=10$, 即从 A 结点至 D_2 结点最短路径为 $A-B_1-C_2-D_2$ 。 $f_3(D_3)=\min\{d(C_1, D_3)+f_2(C_1), d(C_2, D_3)+f_2(C_3)\}=\min\{8+7, 4+8\}=12$, 即从 A 结点至 D_3 结点最短路径为 $A-B_1-C_2-D_3$ 。

$K=4$ 时,联合考虑前四个阶段。完成前四个阶段至 E 结点的最短路径记作 $f_4(E), f_4(E)=\min\{d(D_1, E)+f_3(D_1), d(D_2, E)+f_3(D_2), d(D_3, E)+f_3(D_3)\}=\min\{4+12, 8+10, 3+12\}=15$, 即从 A 到 E 的最短路径为 $A-B_1-C_2-D_3-E$ 。也就是说,从城市 A 经 B_1, C_2, D_3 至城市 E 为最短路径。

1.2.2 逆序递推法

$K=4$ 时,考虑第四个阶段,从 E 结点开始,从后向前推导,与前面顺序递推法类似。用 $f_4'(D_k)$ 表示从 E 结点至 D_i 结点的最短路径。 $f_4'(D_1)=4, f_4'(D_2)=8, f_4'(D_3)=3$ 。

$K=3$ 时,联合考虑后两个阶段。用 $f_3'(C_1)$ 表示第四、第三阶段至 C_1 结点的最短路径, $i=1, 2$ 。

$f_3'(C_1)=\min\{d(D_1, C_1)+f_4'(D_1), d(D_2, C_1)+f_4'(D_2), d(D_3, C_1)+f_4'(D_3)\}=\min\{8+4, 7+8, 3+3\}=11$, 即此阶段至 C_1 最短路径为 $E-D_3-C_1$ 。 $f_3'(C_2)=\min\{d(C_2, D_1)+f_4'(D_1), d(C_2, D_2)+f_4'(D_2), d(C_2, D_3)+f_4'(D_3)\}=\min\{4+4, 2+8, 4+3\}=7$ 。所以此阶段至 C_2 最短路径为 $E-D_3-C_2$ 。

$K=2$ 时,联合考虑后三个阶段。 $f_2'(B_i)$ 表示后三个阶段至 B_i 结点的最短路径。 $f_2'(B_i)=\min\{d(B_i, C_1)+f_3'(C_1), d(B_i, C_2)+f_3'(C_2)\}$

$f_2'(B_1)=\min\{d(B_1, C_1)+f_3'(C_1), d(B_1, C_2)+f_3'(C_2)\}=\min\{2+11, 3+7\}=10$ 所以此时至 B_1 终点最短路径为 $E-D_3-C_2-B_1$ 。

$f_2'(B_2)=\min\{d(B_2, C_1)+f_3'(C_1), d(B_2, C_2)+f_3'(C_2)\}=\min\{1+11, 2+7\}=9$, 所以此时至 B_2 终点最短路径为 $E-D_3-C_2-B_2$ 。

$K=1$ 时,联合考虑前四个阶段。 $f_1'(A)=\min\{d(A, B_1)+f_2'(B_1), d(A, B_2)+f_2'(B_2)\}=\min\{5+10, 8+9\}=15$, 即最短路径为 $A-B_1-C_2-D_3-E$ 。且从 A 至 E 的最短路径为 $f_1'(A)=15$ 。

2 结语

运用此模型,可以解决随机需求下,最优生产计划问题。动态规划模型具有静态规划模型无法比拟的优越性。如能得到全局最优方案,可以得到一组最优解;在计算时,可以利用实际知识和个人经验提高求解效率。但是它也具有的一些缺点,如没有统一的标准模型;用数值方法求解时存在维数灾等。愿我们能扬长避短,运用动态规划数学模型解决更多的实际问题。

参考文献:

- [1] 姜启源,等. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [2] 黄国瑜,等. 数学结构[M]. 北京: 清华大学出版, 2001.

Solving the shortest path by the mobile planning mathematical modle

DU Yan - juan

(Heilongjiang Institute of Science and Technology, Harbin 150008, China)

Abstract: With the development of the science and technology, mathematical modle has been used in many fields of the society. This thesis gives out the defination of the mathematical modle and steps of selling up mobile planning mathematical modle and solves the shortest path by them.

Key words: mathematical modle; mobile planning; the shortest path node

作者: 杜彦娟
作者单位: 黑龙江科技学院, 嵩山校区, 黑龙江, 哈尔滨, 150000
刊名: 煤炭技术 
英文刊名: COAL TECHNOLOGY
年, 卷(期): 2005, 24(1)
被引用次数: 8次

参考文献(2条)

1. 姜启源 数学模型 2003
2. 黄国瑜 数学结构 2001

本文读者也读过(6条)

1. 林旭东. LIN Xu-dong 最短路径动态规划问题及其程序设计[期刊论文]-中国管理信息化2009(9)
2. 梁娟. 郭军丽. 魏勇 利用动态规划算法求解最短路径[期刊论文]-河南机电高等专科学校学报2006, 14(5)
3. 孙晓燕. 李自良. 彭雄凤. 傅亚力. 梁志强. SUN Xia-oyan. LI Zi-liang. PENG Xiong-feng. FU Ya-li. LIANG Zhi-qiang 利用动态规划法求解运输问题的最短路径[期刊论文]-机械设计与制造2010(2)
4. 房茂燕. 汪民乐. 尹香麒. FANG Mao-yan. WANG Min-le. YIN Xiang-qi 基于改进动态规划算法的复杂网络图最短路径求解[期刊论文]-现代计算机(专业版) 2007(10)
5. 袁佳乐. 黄兆华. Yuan Jiale. Huang Zhaohua 在交通运输上使用动态规划求解最短路径[期刊论文]-科技广场 2008(5)
6. 李步军. 王继顺. 王顺绪. LI Bu-jun. WANG Ji-shun. WANG Shun-xu 求解最短路径问题的DNA动态规划算法[期刊论文]-齐齐哈尔大学学报(自然科学版) 2010, 26(4)

引证文献(6条)

1. 王学军 最短路径动态规划问题及C语言实现探讨[期刊论文]-电脑知识与技术 2013(09)
2. 张捷, 张仁杰, 王科岩 最短路径动态规划问题及C语言实现[期刊论文]-内蒙古农业大学学报(自然科学版) 2012(02)
3. 邱伊婕, 敬加强, 孔祥伟 基于动态规划的油气管网路径优选[期刊论文]-内蒙古石油化工 2011(12)
4. 吴涛 动态规划算法应用及其在时间效率上的优化[学位论文]硕士 2008
5. 任立群 复杂场景中基于虚拟空间本体的路径规划方法[学位论文]硕士 2006
6. 刘润舟 交通系统震后连通性研究[学位论文]硕士 2007

引用本文格式: 杜彦娟 利用动态规划数学模型求最短路径[期刊论文]-煤炭技术 2005(1)