TEMA 7 - CONJUNTOS BORROSOS

2 – CONJUNTOS BORROSOS

► Conjuntos clásicos → se puede determinar sin ambigüedad si algo es miembro o no del conjunto, el conjunto es claro y preciso. *Ejemplos*: números menores a 10, persona que mide más de 1:70 m de altura,…

Todo **predicado preciso P** (permiten realizar una división satisfactoria de una población de individuos en dos subconjuntos), aplicado a una colección U, tiene asociado un *conjunto preciso* *(P⊂ U)* y se describirse mediante la función *μ p (u),* cuyo valor viene determinado por la pertenencia a P de los distintos elementos u ∈ U, y definida como:

$$\mu_P(u) = \begin{cases} 0 & \text{si u} \notin \text{P} \\ 1 & \text{si u} \in \text{P} \end{cases}$$

La ***lógica difusa*** → en un instante dado, no es posible precisar el valor de una variable X, sino tan solo conocer el grado de pertenencia a cada uno de los conjuntos en que se ha participado el rango de variación de la variable. Permite representar conocimiento de tipo *impreciso* y *subjetivo*.

► Conjunto borroso → los elementos pueden estar contenidos parcialmente. En un conjunto borroso el límite no está bien definido, los miembros pueden tener un grado de pertenencia en cualquier nivel (desde completamente miembro hasta no-miembro). *Ejemplos*: personas altas, números pequeños

Un **predicado vago V** (NO permiten realizar una división satisfactoria de una población de individuos en dos subconjuntos), aplicado a la colección U, tiene asociado un *conjunto borroso* *(V⊂ U)*, se describirse mediante la función *μ* $_V$ *(u),* cuya representación de la pertenencia a V de los distintos elementos de U es una *cuestión de grado*, de modo que:

$$\mu_V : U \rightarrow [0, 1]$$

Los conjuntos borrosos están definidos sobre un universo de discurso y caracterizados por la *función de pertenencia*. Más que el valor exacto de pertenencia de un individuo a un conjunto, proporciona una ordenación del conjunto de individuos. Cuyos valores no son sólo los números 0 y 1, sino todos los números entre 0 y 1

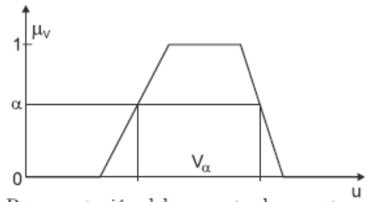
μv(u) *está entre 0 y 1*
si μv(u) =1 *cierto → u pertenece totalmente a U*
si μv(u) =0 *falso → u no pertenece a U*

Las funciones de pertenencia se representan por una de estas dos maneras:
- pares ordenados → V = { (μv (u), u) / u € V}
- función continua

Se pueden definir estos **conjuntos asociados a una función de pertenencia**:

- soporte: conjunto de valores de para las cuales ***μv(u)*** **> 0**
- núcleo: ***μv(u)*=1** aquellos elementos que pertenecen al núcleo de U se consideran *prototipos* de V.

El **α- corte Vα** del conjunto borroso V se define como el conjunto $\{u \in U : \mu V(u) \geq \alpha\}$, para cualquier $0 < \alpha \leq 1$



Representación del concepto de α-corte.

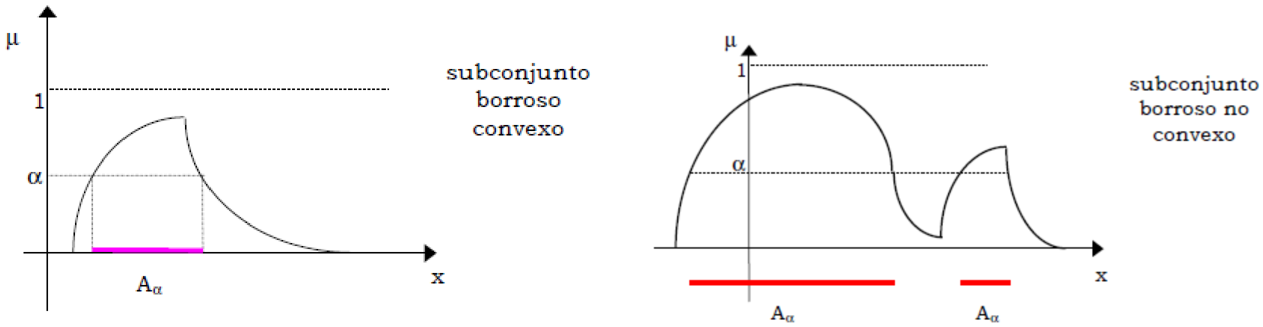
Ejemplo: Consideremos el subconjunto borroso A, E = {a, b, c, d, e}

x	a	b	c	d	e	f
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	1	0	.5	.9	.2	.4

A.1 = {a , c , d , e ,f} *A.3 = {a , c , d , f}* *A.5 = {a , c , d}*
A.8 = {a , d} *A.9 = {a , d}* *A1 ={a}*

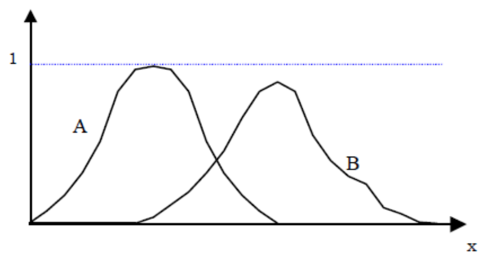
Un conjunto V se dice **convexo** si:

$$\forall u, u', u'' \in U,\ u' \in [u, u''],\ \mu_V(u') \geq \min\{\mu_V(u), \mu_V(u'')\}$$

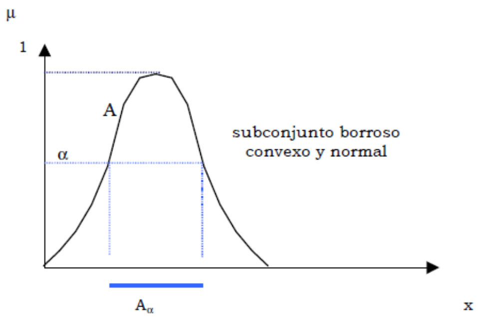


Un conjunto V se dice **normalizado** si $\exists u \in U$, tal que $\mu V(u) = 1$.

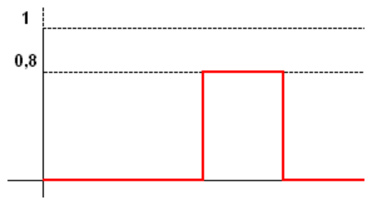
$$\exists u \in U, \text{ tal que } \mu_V(u) = 1$$



A es normal y B no.



8. Si la *función de pertenencia* a un conjunto borroso V es: $\mu_V(x) = \{0.8 \text{ si } 618 < x < 780;\ 0 \text{ en caso contrario}\}$, entonces el **conjunto V es:**
   (a) No-convexo y no-normalizado.
   (b) Convexo y normalizado.
   (c) Convexo y no-normalizado.
   (d) No-convexo y normalizado.



No-normalizada ya que no existe ningún puntos donde $\mu_V(u) = 1$
Es **convexa** ya que $\forall x \in [x1, x2]$ se verifica que: $\mu A(x) \geq \min\{\mu_V(x1), \mu_V(x2)\}$

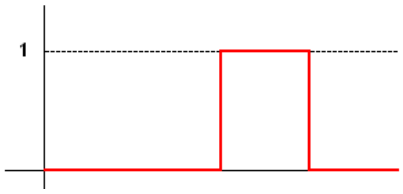
6. Si la *función de pertenencia* a un conjunto borroso V es: $\mu_V(x) = \{1 \text{ si } 618 < x < 780; \ 0 \text{ en caso contrario}\}$, entonces el **conjunto V es:**

(a) Convexo y no-normalizado.

(b) No-convexo y normalizado.

(c) Convexo y normalizado.

(d) No-convexo y no-normalizado.



Normalizada ya que para [618,780] μv (u) = 1

Es **convexa** ya que ∀x ∊ [x1 , x2] se verifica que: μA(x) ≥ mın{μv (x1), μv (x2)

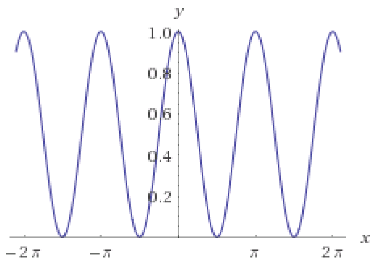
10. Si la *función de pertenencia* a un conjunto borroso V es: $\mu_V(x) = \cos^2 x$, entonces el **conjunto V es:**

(a) No-convexo y no-normalizado.

(b) Convexo y normalizado.

(c) No-convexo y normalizado.

(d) Convexo y no-normalizado.



Normalizada ya que existen puntos donde μv (u) = 1 → ejem: 0

NO-**convexa** ya que ∀x ∊ [x1 , x2] se verifica que:

μA(x) ≥ mın{μv (x1), μv (x2) → intervalo [0,

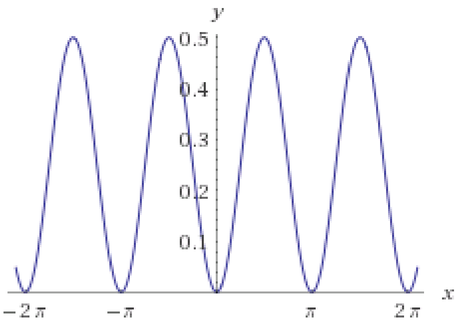
2. Si la *función de pertenencia* a un conjunto borroso V es $\mu_V(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin^2 x$, entonces el **conjunto V es:**

(a) No-convexo y normalizado.

(b) Convexo y normalizado.

(c) No-convexo y no-normalizado.

(d) Convexo y no-normalizado.



No-normalizada ya que no existe ningún puntos donde μv (u) = 1

NO-convexa ya que ∀x ∊ [x1 , x2] NO se verifica que:

μA(x) ≥ mın{μv (x1), μv (x2) → intervalo [Π/2, 3Π/4]

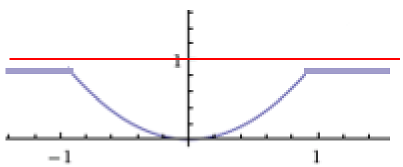
5. Si la *función de pertenencia* a un conjunto borroso V es: $\mu_V(x) = \{x^2 \text{ si } -0.9<x<0.9 \ ; \ 0.8 \text{ en caso contrario}\}$, entonces el **conjunto V es:**

(a) No-convexo y no-normalizado.

(b) Convexo y normalizado.

(c) Convexo y no-normalizado.

(d) No-convexo y normalizado.



Valor máximo = 0,9^2= 0.81, No es normalizado

Es **no-convexa** ya que ∀x ∊ [x1 , x2] NO se verifica que:

μA(x) ≥ mın{μv (x1), μv (x2)

Dados dos conjuntos borrosos A,B ⊂ U, decimos que **"<u>A está contenido en B</u>**", escribimos **A ⊆ B**, si y sólo si, ∀u ∈ U:

$\mu A(u) \leq \mu B(u)$

Si A ⊆ B y B ⊆ A entonces, obviamente, A = B

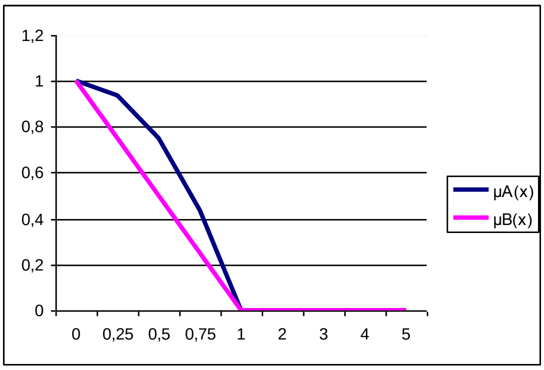
7. Si la *función de pertenencia* a un conjunto borroso A es: $\mu_A(x) = \{1 - x^2$ si $|x| < 1$; 0 en caso contrario$\}$, y la del conjunto borroso B es: $\mu_B(x) = \{1 - |x|$ si $|x| < 1$; 0 en caso contrario$\}$. Entonces **se cumple**:

$\boxed{\text{(a) } B \subseteq A.}$

(b) $A \subseteq B$.

(c) $A = B$.

(d) $A \not\subseteq B$ y $B \not\subseteq A$.



Para que "<u>A está contenido en B</u>", y escribimos **A ⊆ B**, si y sólo si, ∀x ∈ U:

$\mu A(x) \leq \mu B(x)$

Calculamos y comparamos:

x	μA(x)	μB(x)
0	1	1
0,25	0,9375	0,75
0,5	0,75	0,5
0,75	0,4375	0,25
1	0	0
2	0	0
3	0	0

Para todos los valores de x se cumple $\mu B(x) \leq \mu A(x)$, por lo que → **B ⊆ A**

3 – SEMÁNTICA DE LOS CONJUNTOS BORROSOS

La idea de conjunto es por definición abstracta: una reunión de elementos que comparten alguna propiedad. Esta propiedad es la que determina la pertenencia de un elemento particular al conjunto. Si el conjunto es borroso, la pertenencia es una cuestión de grado. Sin embargo, el significado también depende del uso que se hace de dicho predicado. Tipos de predicados borrosos habituales:

<u>- Similitud</u>: Sea V un conjunto borroso. Si pensamos en los elementos del núcleo de V como en prototipos de V, entonces μV (u) es el <u>*grado de proximidad*</u> de u al tipo de elementos prototipo de V.

<u>- Preferencia</u>: V reúne a un conjunto de elementos entre los que existe alguna preferencia y la función representa el <u>*grado de preferencia*</u> entre dichos elementos.

<u>- Incertidumbre</u>: Dada una variable x que toma variables en U un predicado (p.ej x toma un valor pequeño) se modela mediante un conjunto borroso V ⊂ U, con una función de pertenencia uv=pequeño. Lo que tenemos es que puesto que la única disponible es que x toma valor pequeño, la función de pertenencia se utiliza como una <u>*medida de la posibilidad que el valor*</u> de x este en u. si la función modela una distribución de posibilidad como esta, los elementos son mutualmente excluyentes para el valor de x. Esta semántica esta ligada a la presencia de incertidumbre en tareas de razonamiento.

4 - TEORÍA DE CONJUNTOS BORROSOS

El subconjunto partes de u (P(U)) es el conjunto formado por todos los *subconjuntos precisos* de U y con ellas forma una estructura (P, U ,∩,U,−), denominado **algebra de Boole**, dotada de un conjunto de propiedades (ver tabla), en conjuntos borrosos estas **no** funcionan, ya que en algunas de ellas nos indica que un predicado sólo puede ser cierto o falso.

Podemos representar la **composición de predicados precisos** utilizando funciones de pertenencia, haciendo uso de las siguientes definiciones:

Complemento: $\overline{A}$ es el subconjunto preciso de U cuya función de pertenencia es:

$$\mu_{\overline{A}}(u) = 1 - \mu_A(u)$$

Intersección: A ∩ B es el subconjunto preciso de U cuya función de pertenencia es:

$$\mu_{A\cap B}(u) = \text{mín}\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$$

Unión: A U B es el subconjunto preciso de U cuya función de pertenencia es

$$\mu_{A\cup B}(u) = \text{máx}\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$$

Una forma de representar la **composición en subconjuntos borrosos** de U es mediante el uso de funciones: T ($T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$) y S ($S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$) podríamos pedir las siguientes propiedades, donde A y B son subconjuntos borrosos de U

1. Ley de identidad: $\forall x \in [0, 1]$

$$T(x,1) = x \quad (A \cap U = A)$$

$$S(x,0) = x \quad (A \cup \emptyset = A)$$

2. Ley conmutativa: $\forall x, y \in [0, 1]$

$$T(x,y) = T(y,x) \quad (A \cap B = B \cap A)$$

$$S(x,y) = S(y,x) \quad (A \cup B = B \cup A)$$

3. Ley asociativa: $\forall x, y, z \in [0, 1]$

$$T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z) \quad (A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C)$$

$$S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z) \quad (A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C)$$

4. Ley de monotonía: $\forall x, y, u, v \in [0, 1]$, $x \leq u$, $y \leq v$

$$T(x,y) \leq T(u,v)$$

$$S(x,y) \leq S(u,v)$$

Aquellas funciones T que satisfacen las anteriores propiedades reciben el nombre de **normas triangulares o t-normas** y aquellas funciones S que también las satisfacen reciben el nombre de **conormas triangulares o t-conormas**

1. ¿Qué cuatro *propiedades matemáticas* debe cumplir una función T: $[0,1]^2 \to [0,1]$, para ser una **t-norma o norma triangular** en la representación de la intersección de conjuntos borrosos? Indique para cada una su definición matemática en su forma funcional con $T(x,y)$.

Hay muchas propuestas de pares **de t-normas(T) y t-conormas (S)** duales, destacamos las siguientes:

• El máximo y el mínimo:

$$T_Z(x,y) = \text{mín}(x,y) \qquad S_Z(x,y) = \text{máx}(x,y)$$

• El producto y la suma probabilística:

$$T_G(x,y) = xy \qquad S_G(x,y) = x + y - xy$$

La t-norma y la t-conorma de Lukasiewicz:

$$T_L(x,y) = \text{máx}(x+y-1, 0) \qquad S_L(x,y) = \text{mín}(x+y, 1)$$

7. Si consideramos una función $T(x,y)$ que cumple las propiedades de **t-norma** o norma triangular en *conjuntos borrosos*, entonces $R(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y)$

(a) es también una t-norma o norma triangular.

(b) es una t-conorma o conorma triangular.

(c) es una relación de comparación con $\delta = 0$ y $\rho = 1$.

(d) satisface las propiedades de las relaciones de similitud.

Como T(x,y) es *t-norma* → TZ(x, y) =mın(x, y)

Utilizamos un ejemplo para comprobarlo x=0,1 e y=0,9
Tenemos: R(x,y) = 1- T(1-x, 1-y)
R(x,y) = 1- T(1-0.1, 1-0.9)
R(x,y) = 1- T(0.9, 0.1)
R(x,y) = 1- 0.1 = **0.9**

R(x, y) nos devuelve le valor máximo, con lo que será t-conorma

9. Si consideramos la función $R(x,y) = 1 - x \cdot y$, como representante de la *unión borrosa*, ¿cumple R la **ley asociativa** para funciones de pertenencia borrosas?

(a) Sólo para funciones de pertenencia convexas.

(b) No.

(c) Sólo para funciones de pertenencia normalizadas.

(d) Sí, para cualesquiera funciones de pertenencia.

R(x,y)= 1 - xy , Entonces, si R es asociativa:

R(x,R(y,z)) = R(R(x,y),z)

1 - x (**1-yz**) = 1- (**1 - xy**) z → 1- x (1-yz) = 1- z (1 - xy)

1 -x + xyz = 1 - z + xyz
*Sólo se cumplirá la igualdad cuando **x = z**.*

4. Si consideramos la función $R(x,y) = 1 - x \cdot y$, como representante de la *intersección borrosa*, ¿cumple R la ley **asociativa** para funciones de pertenencia borrosas?
   (a) No.
   (b) Sólo para funciones de pertenencia normalizadas.
   (c) Sólo para funciones de pertenencia convexas.
   (d) Sí, para cualesquiera funciones de pertenencia.

El desarrollo sería el mismos que el ejercicio anterior (no influye que represente la intersección o la unión borrosa) → *Sólo se cumplirá la igualdad cuando **x = z**.*

2. Si consideramos la función $R(x,y) = \text{mín}(x \cdot y, 1)$, como representante de la *intersección borrosa*, ¿cumple R la ley **asociativa** para funciones de pertenencia borrosas?
   (a) Sí, para cualesquiera funciones de pertenencia.
   (b) Sólo para funciones de pertenencia normalizadas.
   (c) No.
   (d) Sólo para funciones de pertenencia convexas.

R(x,y)= min (x*y, 1) , Entonces, si R es asociativa:

R(x,R(y,z)) = R(R(x,y),z)

a) R(x, **R(y,z)**) = R(x * **min(yz,1)**) = min(x * min(y*z,1),1)
b) R(**R(x,y)**,z) = R(**min(x*y,1)** * z) = min(min(xy,1) * z,1)

El valor máxima de la función de pertenencia es 1 por lo que → **xyz = zxy**

3. Si consideramos la función $R(x,y) = \text{máx}(x \cdot y, 0)$, como representante de la *unión borrosa*, ¿cumple R la ley **asociativa** para funciones de pertenencia borrosas?
   (a) No.
   (b) Sólo para funciones de pertenencia normalizadas.
   (c) Sí, para cualesquiera funciones de pertenencia.
   (d) Sólo para funciones de pertenencia convexas.

R(x,y)= max (x*y, 0) , Entonces, si R es asociativa:

R(x,R(y,z)) = R(R(x,y),z)

a) R(x, **R(y,z)**) = R(x * **max(yz,0)**) = max(x * max(y*z,0),0)
b) R(**R(x,y)**,z) = R(**max(x*y,1)** * z) = max(max(xy,0) * z,0)

El valor mínimo de la función de pertenencia es 0 por lo que → **xyz = zxy**

5 - VARIABLE LINGÜISTICA

Una variable lingüística V toma valores en un conjunto L = {L1, L2, ...,Ln} de términos lingüísticos que realizan una *descripción cualitativa* de un conjunto de referencia U.

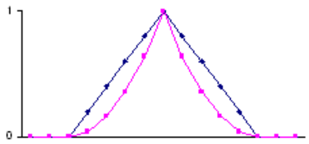
Ejemplo, U es el conjunto de temperaturas, podríamos LT = {frío, templado, caliente}.

Cada uno de estos términos Li ∈ L puede representarse mediante un conjunto borroso de U, donde normalmente U se corresponde con una escala de valores numéricos. Podemos añadir a estos términos lingüísticos el uso de modificadores lingüísticos, como son 'muy', 'bastante', 'más o menos', etc., que nos permiten enriquecer el lenguaje. Podemos modelar la acción de un modificador lingüístico Mi sobre la etiqueta Li mediante dos funciones: una función de modificación m_{M_i}: [0, 1] → [0, 1], y una función de desplazamiento d_{M_i}: U → U, de modo que:

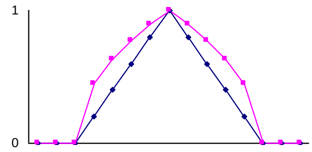
$$\mu_{M_i L_i} = m_{M_i} \circ \mu_{L_i} \circ d_{M_i}$$

donde ∘ representa la composición de funciones

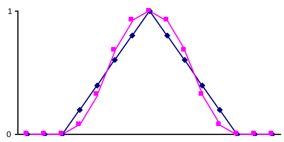
CONCENTRACION:
Los valores son el cuadro de los originales



DILATACIÓN:



INTENSIFICACIÓN: Para valores pequeños se minimiza y para valores mayores aumenta



Tipo de operación	Representación	Cálculos
Negación	NEG(μ (x))	1 - μ (x)
Concentración	CON(μ (x))	$\mu^2(x)$
Dilatación	DIL(μ (x))	$2\mu(x) - \mu^2(x)$
Intensificación	INT ((μ (x))	$2\mu^2(x)$ si 0<= μ(x)<=0,5 $\lvert 1-2(1-2\mu(x))^2 \rvert$ si μ(x)>=0,5

Nombre del modificador	Operación asociada
No	NEG(μ (x))
Muy	CON(μ (x))
Algo	DIL(μ (x))
Casi	DIL(DIL(μ (x)))
Bastante	(INT(CON((μ (x))))

6 - PRINCIPIO DE EXTENSIÓN

Sea una función φ : U1 × ... × Un → W, que tiene como argumentos n valores precisos (u1, ..., un) ∈ U1×...×Un, y tal que w = φ(u1, ..., un). Este principio nos permite extender la función φ a un conjunto de argumentos borrosos A1 ⊂ U1, ...,An ⊂ Un, e inferir un nuevo conjunto borroso B ⊂ W como B = Φ(A1, ...,An), mediante la siguiente expresión:

$$\mu_B(w) \;=\; \sup_{w=\phi(u_1,u_2,\ldots,u_n)} \text{mín}\{\mu_{A_1}(u_1),\mu_{A_2}(u_2),\ldots,\mu_{A_n}(u_n)\} = \;\; 0 \quad si \;\; \phi^{-1}(w)=\emptyset.$$

siendo μAi la función de pertenencia de Ai (i = 1, ..., n). De este modo, el principio de extensión nos permite hacer borroso cualquier dominio del razonamiento matemático basado en la teoría de conjuntos. Además, toda extensión borrosa ha de satisfacer siempre un axioma básico: ha de preservar el resultado clásico cuando opera sobre conjuntos precisos.

1 - Aritmética borrosa

Podemos ilustrar el principio de extensión en el dominio de la aritmética. Definamos un número borroso como un conjunto borroso convexo y normalizado en el conjunto de los números reales R. Decimos que un número borroso A es positivo si μA(x) = 0, ∀x < 0. Del mismo modo, un número borroso A es negativo si μA(x) = 0, ∀x > 0.

* Sean A,B ⊂ R dos de estos números borrosos. El principio de extensión nos dice que podemos definir su **suma borrosa, A ⊕ B**, mediante la siguiente expresión:

$$\mu_{A\oplus B}(z) = \sup_{z=x+y} \text{mín}\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}, \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

Podemos descomponer la suma borrosa en una suma de intervalos

$$A_\alpha + B_\alpha = [a_\alpha^1 + b_\alpha^1, a_\alpha^2 + b_\alpha^2]$$

* **Resta borrosa**:

$$\mu_{A\ominus B}(z) = \sup_{z=x+y} \text{mín}\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}, \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

Podemos descomponer la resta borrosa en una suma de intervalos:

$$(A\ominus B)_\alpha = [a_\alpha^1 - b_\alpha^2, a_\alpha^2 - b_\alpha^1].$$

* **Multiplicación borrosa**:

$$\mu_{A\otimes B}(z) = \sup_{z=x\times y} \text{mín}\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}, \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

La representación de esta operación mediante aritmética de intervalos adopta la forma:

$$(A\otimes B)_\alpha = [\text{mín}(a_\alpha^1\times b_\alpha^1, a_\alpha^1\times b_\alpha^2, a_\alpha^2\times b_\alpha^1, a_\alpha^2\times b_\alpha^2), \text{máx}(a_\alpha^1\times b_\alpha^1, a_\alpha^1\times b_\alpha^2, a_\alpha^2\times b_\alpha^1, a_\alpha^2\times b_\alpha^2)]$$

* **División borrosa**:

$$\mu_{A\oslash B}(z) = \sup_{z=x/y} \text{mín}\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}, \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}^+$$

La representación de esta operación mediante aritmética de intervalos adopta la forma:

$$(A\oslash B)_\alpha = [a_\alpha^1/b_\alpha^2, a_\alpha^2/b_\alpha^1]$$

7 - RELACIONES BORROSAS

Definimos una relación borrosa como un subconjunto borroso del producto cartesiano entre conjuntos. Así, por ejemplo, dados dos conjuntos U y V , definimos la relación R mediante una función de pertenencia μR : U × V → [0, 1], de manera que para todo par (u, v) ∈ U × V , μR(u, v) determina el grado de relación que existe entre u y v.

Supongamos que U = {u1, u2, u3, u4} y V = {v1, v2, v3, v4}. Podemos definir entre ellos la relación R dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & 1 & 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 1 & 0,2 \\ 0,8 & 0,2 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta relación nos dice que, por ejemplo, μR(u2, v4) = 0, 2, y μR(u4, v1) = 0, 8.

1 - Relaciones de similitud

Definidas mediante una función de pertenencia μS : U ×U → [0, 1], donde U se corresponde habitualmente con una escala numérica. Todas las relaciones de similitud deben satisfacer tres **propiedades**:

S1. Reflexiva: ∀u ∈ U, μS(u, u) = 1.

S2. Simétrica: ∀u, v ∈ U, μS(u, v) = μS(v, u).

S3. t-Transitiva: ∀u, v,w ∈ U, T (μS(u, v), μS(v,w)) ≤ μS(u,w).

Donde T denota una t-norma cualquiera, haciendo depender la propiedad de transitividad de la t-norma escogida

Podemos modelar una similitud mediante dos funciones: una distancia d : U×U → [0,+∞), y una función de proximidad μp : [0,+∞) → [0, 1], función no creciente a la que se exige que μp(0) = 1, de modo que:

$$\mu_S = \mu_p \circ d$$

1. ¿Qué tres *propiedades matemáticas* debe cumplir una **relación de similitud** o de equivalencia en conjuntos borrosos, definida mediante una función de pertenencia $\mu_S : U \times U \to [0,1]$, donde U se corresponde con una escala numérica? Especifique las definiciones matemáticas mediante la función μ_S.

2 - Relaciones de comparación

Podemos modelar relaciones de comparación, como pueden ser “mucho mayor que” o “menor o igual que”, mediante una expresión del tipo de:

$$\mu_C = 1 - \mu_p \circ \text{máx}(0, u - v)$$

3 - Proyección. Extensión cilíndrica

Definimos la proyección de R en Ui1× ... × Uik , donde (i1, ..., ik) es una subsecuencia de (1, 2, ..., n), como una nueva relación borrosa que definimos como:

$$\mu_{Pr(R;U_{i_1}\times\ldots\times U_{i_k})}(u_{i_1},\ldots,u_{i_k}) = \sup_{u:U_{i_1}=u_{i_1},\ldots,U_{i_k}=u_{i_k}} \mu_R(u)$$

4 - Composición de relaciones

Dada una relación R entre los conjuntos U y V , y otra relación Q entre los conjuntos V y W, definimos la composición de estas dos relaciones, y la denotamos como R ◦ Q, como una nueva relación entre los conjuntos U y W. Un ejemplo de esta composición lo encontramos en la sentencia "busco hotel cerca de alguna playa alejada de un centro urbano", donde la relación R se corresponde con la expresión "hotel cerca de alguna playa", y la relación Q se corresponde con la expresión "playa alejada de un centro urbano ". La composición entre R y Q define una relación entre u ∈ U y w ∈ W a partir de la relación que mantienen tanto u como w con cada uno de los elementos de V . Dados tres elementos u, v y w, la relación que existe entre u y w no sea mejor que la peor de las relaciones que hay entre u y v y entre v y w, y dados dos elementos u y w, la relación que existe entre ellos debe ser la de aquel v con quien están mejor relacionados. Zadeh propone modelar este vínculo mediante la siguiente expresión:

$$\mu_{R\circ Q}(u,w) = \sup_v \text{mín}\{\mu_R(u,v), \mu_Q(v,w)\}$$

Supongamos las relaciones borrosas R en U × V , Q en V × W, S en V ×W y T en W ×X. Se puede probar entonces el siguiente conjunto de **propiedades**:

R1. <u>Asociativa</u>: R ◦ (Q ◦ T) = (R ◦ Q) ◦ T .
R2. <u>Distributiva respecto a la unión</u>: R ◦ (Q U S) = (R ◦ Q) U (R ◦ S).
R3<u>. Distributiva débil respecto a la intersección</u>: R ◦ (Q ∩ S) ⊆ (R ◦ Q) ∩ (R ◦ S).
R4. <u>Monotonía</u>: Si Q ⊆ S entonces R ◦ Q ⊆ R ◦ S.

8 - EL CONDICIONAL

Una expresión de la forma "Si x es A entonces y es B" puede adoptar múltiples significados en el lenguaje.

Como primera aproximación a la representación del condicional, nos interesa encontrar una implicación multivaluada, extensión de la implicación material clásica, y que permita modelar expresiones condicionales en las que los predicados A y B sean borrosos, como:

$$\mu_{A\to B}(u,v) = I(\mu_A(u), \mu_B(v))$$

Sustituyendo las distintas t-conormas, y la negación fuerte, obtenemos las siguientes expresiones para la relación de implicación obtenemos las siguientes expresiones para la relación de implicación:

$$\begin{aligned}
\mu_{A\to B}(u,v) &= \text{máx}\{1-\mu_A(u), \mu_B(v)\} \\
\mu_{A\to B}(u,v) &= 1-\mu_A(u)+\mu_A(u)\mu_B(v) \\
\mu_{A\to B}(u,v) &= \text{mín}\{1-\mu_A(u)+\mu_B(v), 1\}
\end{aligned}$$

9 - CUALIFICACIÓN LINGÜÍSTICA

De cualquier sentencia del lenguaje podemos decir si nos parece cierta o falsa. Y podemos añadir el uso de modificadores lingüísticos para dar lugar a apreciaciones del tipo de "muy cierta", "más o menos cierta" o "bastante falsa". A estas expresiones les podemos asignar un significado que viene determinado por un conjunto borroso en el intervalo [0, 1], y que por su sentido se corresponde con un valor de verdad borroso

10 - RAZONAMIENTO BORROSO

Una de las reglas de inferencia básicas en la lógica clásica es el Modus Ponens, ya que permite la deducción de nuevas observaciones y condiciones a partir de las observaciones y condiciones disponibles, y que podemos reducir al siguiente esquema:

CONDICIÓN:	Si X es A	entonces	Y es B
OBSERVACIÓN:	X es A		
CONCLUSIÓN:			Y es B

11 - CUANTIFICACIÓN

Considera dos tipos básicos de cuantificadores:

• Cuantificadores absolutos, aquéllos que representan cantidades, y se pueden modelar mediante números borrosos definidos en dominios como N o R+. Ejemplos de cuantificadores absolutos son “aproximadamente cinco”, “algún”, ...
• Cuantificadores relativos, aquéllos que representan proporciones, y se pueden modelar mediante conjuntos borrosos en [0, 1]. Ejemplos de cuantificadores relativos son “la gran mayoría”, “pocos”, “muchos”, ….