4.1 Introducción

En este capítulo, nos centraremos en la parte de la IA que concierne el razonamiento automático. Para nosotros, razonar significa obtener conclusiones (correctas) a partir de ciertas premisas (que consideramos correctas).

- Si el método que utilicemos nos devuelve siempre **conclusiones correctas**, entonces diremos que el método (de deducción) **es correcto**;
- Si, además, el método es capaz de **devolvernos todas las conclusiones correctas**, entonces lo llamamos **completo**.

La corrección y completitud de los métodos deductivos no son las únicas características en las que estamos interesados; también debemos tener en cuenta:

- El poder expresivo del lenguaje que utilicemos.
- Las propiedades computacionales del método.
- El grado de síntesis de las expresiones.

Al conjunto **lenguaje + semántica** que nos sirve para representar el conocimiento relacionado con la capacidad de llevar al cabo ciertos razonamientos lo llamamos **lógica**.

La lógica tiene como objeto de estudio los procesos de razonamiento expresados a través del lenguaje.

5.2 La lógica clásica

El formalismo elegido para la representación de los problemas es una de las principales áreas de investigación en la IA. La riqueza expresiva de los formalismos de representación del conocimiento y su realización computacional determinan la *eficiencia* y la *corrección* de las soluciones obtenidas.

El lenguaje de la **lógica proposicional clásica** (**LP**), está basado en un **conjunto** numerable (no necesariamente finito) de **proposiciones** y sus fórmulas bien formadas.

El primer problema que se presenta a la hora de utilizar una lógica (en este caso LP) para el razonamiento automático, es el problema de distinguir entre una fórmula bien formada y otra que no lo es.

Una **proposición** es una expresión en lenguaje natural que sólo puede ser **falsa** (F) o **verdadera** (V) (en la semántica del sentido común).

La lógica de enunciados, de *proposiciones o cálculo proposicional* permite estudiar la validez formal de los razonamientos realizados mediante frases formadas por enunciados simples (**proposiciones**) que tiene un significado sobre el que es posible pronunciarse y que puede ser verdadero (*V*) o falso (*F*), pero no ambos a la vez.

Los símbolos básicos utilizados para representar los enunciados simples son las llamadas *variables proposiciones* (p, q, r, etc.).

Los enunciados en los que aparecen varias proposiciones (enunciados compuestos) se representan enlazando las variables llamadas conectivas (ver tabla). Cada conectiva representa varias expresiones del lenguaje natural:

- **p** $\vee$ **q** indica p o q o ambos a la vez.
- **p** $\oplus$ **q** indica p o q pero no ambos a la vez.
- **p** $\wedge$ **q** indica p y q, p sin embargo q, p a pesar de q, etc.
- **p** $\rightarrow$ **q** se puede asociar a si p entonces q,
- **p** $\leftrightarrow$**q** indica p si y sólo si q.

Las expresiones así formadas se conocen como **fórmulas bien formadas (fbf).** Una fórmula cualquiera puede ser:

- **Válida**: cierta en todas las interpretaciones posibles (tautologías).
- **Satisfactible**: cierta en al menos una interpretación.
- **Insatisfactible**: falsa en todas las interpretaciones (contradicciones).

p	Q	¬ p	p∧ q	p ∨ q	p ⊕ q	p → q	p ↔ q
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V

Una *demostración en el sistema axiomático* consiste en, dadas una serie de fórmulas válidas de las cuales se parte (llamadas *axiomas*), obtener un conjunto de nuevas fórmulas igualmente válidas aplicando para ello las denominadas *reglas de transformación* (sucesivamente hasta que se genere la conclusión buscada).

La regla de transformación básica de los procesos deductivos de la lógica clásica es el *modus ponens*, "si S y S → R son fórmulas válidas, entonces R también el una fórmula válida".

Además del *modus ponens*, existen otra serie de reglas que muestran los procesos de razonamiento del lenguaje ordinario (*deducción natural*). La diferencia con el *método axiomático* es que las inferencias aplicadas para poder avanzar en las secuencias deductivas de éste requerían que tanto las fórmulas de las que se partía, como aquéllas que se generaban, fueran enunciados formalmente válidos (verdaderos en todos los casos). Sin embargo, en deducción natural los enunciados están indeterminados en su valor de verdad.

Ambos métodos son equivalentes en el sentido que en ambos son correctas las mismas estructuras deductivas.

Como hemos visto, LP es un lenguaje que permite expresar ciertos razonamientos y cuyos métodos deductivos, como veremos, son particularmente sencillos y aptos.

Pero ¿cuáles son los límites de LP? Podemos identificar básicamente dos problemas.

1. Hemos podido expresar las premisas solamente con la condición de conocer con antelación el número (y los nombres) de los objetos que hay en el suelo. ¿Qué ocurriría si elimináramos esta hipótesis?
2. No hemos tenido en cuenta ninguna componente temporal o espacial en la descripción de las acciones. ¿Es posible hacerlo con algún lenguaje extendido?

Terminaremos esta sección con un ejemplo; supongamos que queremos demostrar que:

$\varphi = ((p \to q) \wedge (q \to \neg r) \wedge p) \to \neg r$ es válida.

Como hemos visto, esto supone demostrar que la fórmula:

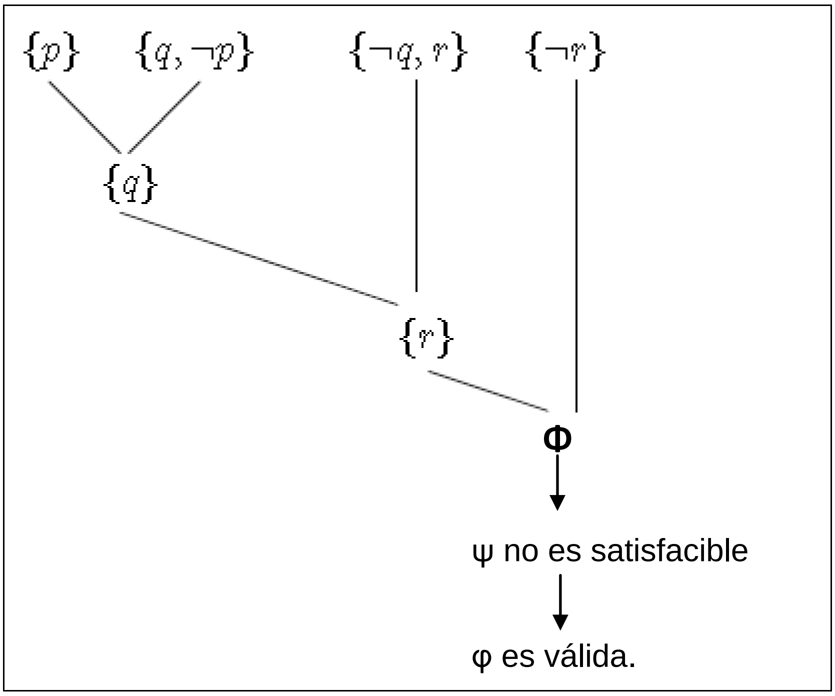
$\psi = \neg(((p \to q) \wedge (q \to \neg r) \wedge p) \to \neg r)$ no es satisfacible.

Primero, observamos que se trata de un condicional; esto significa que ψ es satisfacible si y sólo si es satisfacible el conjunto $\{((p \to q) \wedge (q \to \neg r) \wedge p), \neg\neg r\}$ o, lo que es lo mismo, si y sólo si es satisfacible la fórmula:

$(p \to q) \wedge (q \to \neg r) \wedge p \wedge \neg\neg r$. o lo que es lo mismo:

En la siguiente Figura podemos ver el desarrollo del árbol para esta fórmula, que termina con todas las ramas cerradas.

Un ejemplo de resolución para $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge p \wedge r$



5.3 Extensiones de la Lógica Clásica

La lógica de predicados abarca a la de proposiciones. En el cálculo de predicados, las *propiedades* y los nombres de *relaciones* entre individuos se denominan *predicados.*

En cuanto a los **cuantificadores** ($\forall$ y $\exists$) realmente se puede utilizar sólo uno:

$\neg(\forall x\ P(x)) \leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$ $\qquad$ $\forall x\ \neg P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x\ P(x))$

$\neg(\forall x\ \neg P(x)) \leftrightarrow \exists x\ P(x)$ $\qquad$ $\neg\exists x\ \neg P(x) \leftrightarrow \forall x\ P(x)$

Para poder interpretar el cálculo de predicados tenemos que hacer referencia a individuos concretos, por lo tanto, para validar sentencias en el cálculo de predicados habrá que referirse a un determinado *universo de discurso*. Si consideramos que el universo de discurso es el conjunto {a, b, c} se tienen en cuenta las equivalencias siguientes:

$\forall x\ P(x) \leftrightarrow P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$ $\qquad$ $\exists x\ P(x) \leftrightarrow P(a) \vee P(b) \vee P(c)$

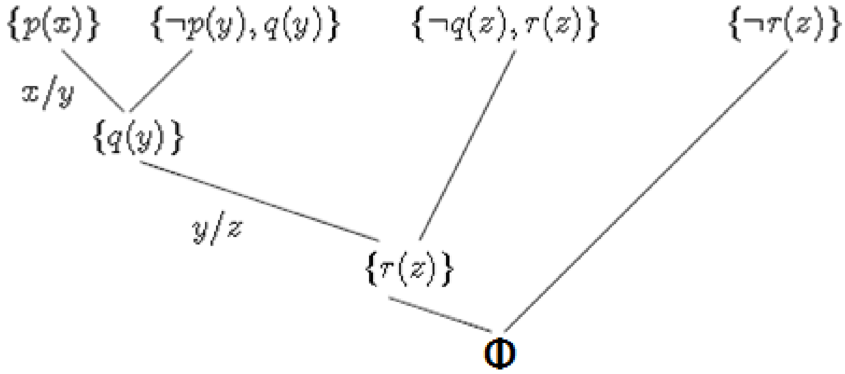
El método de resolución. En el caso de LPO el método de resolución es un poco más complicado que en el caso de LP. Básicamente hay dos problemas nuevos con respecto al caso proposicional:

1. Los cuantificadores en la fase de transformación de la fórmula de salida en forma clausal.
2. El reconocimiento de las fórmulas atómicas contradictorias, cuando éstas contengan variables o términos.

Ejemplo. Consideremos la fórmula $\neg(\exists x(p(x) \rightarrow \forall y(q(x, y))))$:

1. $\neg(\exists x(\neg p(x) \vee \forall y(q(x, y))))$ (eliminación de $\rightarrow$);
2. $(\forall x \neg(\neg p(x) \vee \forall y(q(x, y))))$ (interdefinición de $\forall$ y $\exists$);
3. $(\forall x(\neg\neg p(x) \wedge \neg\forall y(q(x, y))))$ (ley de De Morgan);
4. $(\forall x(p(x) \wedge \exists y \neg(q(x, y))))$ (eliminación de $\neg\neg$ e interdefinición de $\forall$ y $\exists$);
5. $\forall x \exists y(p(x) \wedge \neg(q(x, y)))$ (cuantificador $\exists$).

Ejemplo, la fórmula $(\forall x p(x) \wedge \forall y(p(y) \rightarrow q(y)) \wedge \forall z(q(z) \rightarrow r(z))) \rightarrow r(a)$.



Un ejemplo de resolución de primer orden

5.4. Ampliaciones de la Lógica de predicados.

LÓGICA DE PREDICADOS DE ORDEN SUPERIOR:

Es necesario introducir la posibilidad de representar dominios de referencia tanto para predicados como para funciones, entonces, los nombres de predicados y de función tienen las mismas atribuciones que los nombres de variable, es decir que pueden ser cuantificados. Este tipo de lógica recibe el nombre de *cálculo de predicados de segundo orden*, así como de tercer orden y todas se agrupan bajo el nombre de *lógicas de orden superior*.

Ejemplo: “todos los mamíferos tienen una Propiedad común”

∃P ∀x (Mamífero(x) → P(x))

Lógica de predicados con identidad:

Supone la ampliación de la lógica de predicados tradicional con el predicado diádico " **=** ", de manera que si se escribe **x=y**, lo que se quiere expresar es que "x" e "y" se refieren al mismo elemento.

Algunos ejemplos de la utilización de este nuevo predicado podrían ser:

1. "Alguien que no es Roberto es rico."

$\exists x (x \neq r \wedge Rx)$

donde "r" representa "Roberto", "R" representa "ser rico" y $\neq$ equivale a la negación lógica de la identidad.

2. "Sólo Roberto es rico."

$\mathbf{Rr \wedge \neg \exists x (x \neq r \wedge Rx)}$

3. "Por lo menos dos personas son ricas."

$\mathbf{\exists x \exists y (x \neq y \wedge Rx \wedge Ry)}$

4. "Exactamente dos personas son ricas."

$\mathbf{\exists x \exists y ((x \neq y \wedge Rx \wedge Ry) \wedge \neg \exists z (z \neq x \wedge z \neq y \wedge Rz))}$

Se necesitan dos reglas nuevas cuando se amplía la lógica de predicados con la identidad:

1. **regla a):** a = a siempre es cierto, sea cual sea la constante "a".
2. **regla b):** Fa, a = b → Fb para cualesquiera dos constantes "a" y "b".

Por ejemplo:

Cj "Juan es ciego."
j = a "Juan es tu mejor amigo."
∴ Ca Por tanto, "Tu mejor amigo es ciego.", donde
∴ representa "se infiere" o "se deduce".

Las expresiones de igualdad o de identidad tienen una serie de peculiaridades dentro del cálculo de predicados que estamos analizando. Por lo tanto, la l*ógica de predicados con identidad* es una extensión de la lógica de predicados. Por ejemplo, la ley de *indiscernibilidad* de los idénticos es:

$$\forall x\ \forall y\ ((x = y) \rightarrow (P(x) \leftrightarrow P(y))$$

5.5 Extensiones de la lógica clásica.

Las *lógicas clásicas* responden a una serie de supuestos utilizados en su construcción. Algunos de éstos son:

- no considerar enunciados de los que no se pueda afirmar su verdad o falsedad.
- no admitir más que dos valores de verdad.
- operar *extensionalmente* en las expresiones consideradas.

La operación en extenso (individuos abarcados en una idea) o en intenso (serie de reglas para comprobar si un individuo está abarcado o no por un concepto) se refiere a si se considera exclusivamente los elementos que forman un determinado conjunto y su valor de verdad (*extensión*) o si se tiene el concepto que designa (*intensión*: en un predicado sería la propiedad significada por el nombre del predicado), es decir, desde el punto de vista intencional dos predicados pueden ser diferentes aun cuando estén definidos sobre los mismos elementos del dominio. Por lo tanto, la teoría intencional de tipos estará basada en la distinción entre predicados y clases. La distinción entre *intensión* y *extensión* es fundamental a la hora de valorar la capacidad de cualquier sistema computacional.

5.5.1 Lógica modal.

Surge para satisfacer la necesidad de manipular los conceptos de *necesidad* y *posibilidad*. Se introducen los siguientes símbolos:

■ P es necesario que P
♦ P es posible que P

estos símbolos tienen el mismo nivel que el operador ¬. Así, se cumple la siguiente ley de equivalencia:

♦ P ↔ ¬ ■ ¬ P	es posible que P ≡ no es necesario que no-P
■ ¬ P ↔ ¬ ♦ P	es necesario que no-P ≡ es imposible que P
R ⇒ S ≡ ¬ ♦ (R ∧ ¬S)	implicación en sentido estricto

Un objetivo de la lógica modal es llegar a expresar la relación de necesidad entre premisas y conclusiones en el razonamiento deductivo.

"■A" es un concepto <u>más fuerte</u> que "A es cierto" y significa "A *tiene que ser* cierto".

"♦A" es <u>más débil</u> que "A es cierto" y significa: "A *podría ser* cierto". Para poder realizar la interpretación de fórmulas modales se introduce la idea de **mundos** (*dominios parciales*). Los mundos son subdivisiones del universo del discurso, de forma que en un determinado mundo un predicado sea verdad y en otro falso. Se debe de considerar entonces una relación de accesibilidad entre los mundos. Un enunciado *necesario* sería aquél que es cierto en todos los mundos posibles. Un enunciado *verdadero* es aquél que es cierto en el *mundo real*. Finalmente, un enunciado *posible* es aquél que es cierto en algún posible mundo. Un enunciado *posible* puede o no ser cierto en el mundo real. Con cualquier fórmula válida (A), podemos considerar estas reglas:

■A →A: Si A es necesario, entonces es cierto en cualquier posible mundo M que escojamos.
♦A →A: Si A es posible, entonces es cierto en un mundo no especificado con anterioridad.

La mejor estrategia para probar un razonamiento en lógica modal consiste en intentar sacar los operadores modales fuera en cada enunciado y posteriormente hacerlos desaparecer especificando un mundo en el que el enunciado se cumple. Por otra parte, sólo se podrá usar una regla de inferencia dentro de un mundo dado. Si se tuviera "(A⊃ B)" y "A" en el mismo mundo, entonces se podría inferir "B", pero sólo en ese mundo.

5.5.2 Lógica difusa.

La lógica clásica no ofrece un marco adecuado para la representación de conocimiento de tipo impreciso y subjetivo. Además, no permite la realización de razonamientos donde la incertidumbre deba ser tenida en cuenta. Considérese, por ejemplo, la frase:

"Las personas altas generalmente son bastante pesadas."

Si nos encontramos con una persona que mida 1 metro y 70 centímetros, deberíamos poder decir algo a partir de este dato y el conocimiento representado en la frase anterior. Sin embargo, surgen una serie de preguntas:

- ¿Es alta una persona de 170 cm. de altura?
- ¿Cuál es el rango de pesos donde entran las personas *bastante pesadas*?
- Dada una persona considerada como *alta*, ¿cuándo se podrá decir que es bastante pesada? Es decir, ¿cuál es el efecto real del adverbio *generalmente* sobre el resto de la frase?

La lógica difusa intenta resolver las deficiencias que aparecen en la lógica clásica al abordar problemas de características similares a las mencionadas con anterioridad.

Esta lógica permite afirmar que los enunciados son más o menos verdaderos en un contexto determinado y más o menos falsos en otro contexto diferente. Para definir formalmente un conjunto difuso se define el valor de la llamada *función de pertenencia* que determina el grado de pertenencia de cada elemento del universo de discurso a dicho conjunto. La definición matemática de un conjunto difuso P es la siguiente:

$$P = \{x \mid \mu_p(x), \forall x \in U \wedge \mu_p(x) \neq 0\}$$

Los valores de verdad de los conjuntos difusos se toman como referencia en el intervalo [0,1], la suma de los valores de verdad no está sujeta a ningún tipo de restricciones (no debe confundirse con el cálculo probabilístico).

<u>Ejemplo</u> Considérese el universo de edades *U*= {0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80}.

Se puede definir el conjunto borroso *C*, que representa el concepto "**viejo**", del siguiente modo: *C*={0|0, 10|0, 20|0, 30|0’1, 40|0’2, 50|0’5, 60|0’9, 70|1, 80|1}

donde al lado de cada elemento (edad en años) aparece el grado de pertenencia del mismo al conjunto representado. A la función que asocia a cada elemento su grado de pertenencia se la llama *función de pertenencia*. Esta función da idea de la compatibilidad de cada elemento con el concepto representado.

5.6 Conclusiones.

Podemos extraer las siguientes conclusiones generales:

- La lógica surge como intento de abstraer, formalizar y hacer calculables las propiedades inferenciales implícitas en el razonamiento expresado a través del lenguaje.
- Los diferentes cálculos lógicos intentan dar satisfacción a los distintos grados de complejidad expresiva e inferencial requerida en los problemas del mundo real.
- Existen métodos de inferencia sistemáticos para un número significativo de problemas.
- La efectividad de los métodos de inferencia depende del grado de conocimiento del dominio y la tarea.

Finalmente, señalaremos que, la complejidad inherente a muchos de los sistemas de inteligencia artificial hace aconsejable combinar las técnicas vistas con otras que veremos más adelante.

PROBLEMAS

Probar:

Fa

$\therefore (\neg Fb \supset b \neq a)$

SOLUCIÓN:

1. Fa[$\therefore (\neg Fb \supset b \neq a)$
2. supóngase: $\neg(\neg Fb \supset b \neq a)$ es decir, negar la conclusión para demostrar por reducción al absurdo.
3. $\therefore \neg Fb$ (a partir de **2**), ya que $\neg(\neg Fb \supset b \neq a)$ es igual a $\neg(\neg Fb \vee b \neq a)$, y esto, por De Demorgan, pasa a $(Fb \wedge b = a)$.
4. $\therefore b = a$ (a partir de **2**) Por lo mismo que antes.
5. $\therefore Fb$ (a partir de **1** y **4**, contradiciendo a **3**)
6. $\therefore$ $\mathbf{(\neg Fb \supset b \neq a)}$ (a partir de **2**, **3** y **5**)