Peking University 严绍恒, Shaoheng Yan
Name of Course: 线性代数-A **ID:** 2400017416
Prof. 赵玉凤 **Date:** 2024 年 10 月 9 日

矩阵的秩作业

问题 1 现在有主对角线占优矩阵 $\boldsymbol{B}_{s\times s}$ 与一个列向量组 $\boldsymbol{C}_{s\times n-s}$，二者并置构成矩阵 $\boldsymbol{A}$。证明 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 s。

证明 设 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 λ，且对应特征向量 $\boldsymbol{\beta}$。记 $|\beta_k| = \max\{|\beta_1|, \cdots, |b_k|\}$：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B\beta} &= \lambda\boldsymbol{\beta} \\
\sum_{i=1}^{s} B_{ki}\beta_i &= \lambda\beta_k \\
\lambda &= \sum_{i=1}^{s} B_{ki}\frac{\beta_i}{\beta_k} \\
|\lambda| &\geq |B_{kk}| - \sum_{i\neq k}|B_{ki}| \\
&> 0
\end{aligned}$$

从而 $\det(\operatorname{diag}(\lambda)) = \det\boldsymbol{B} \neq 0$，$\boldsymbol{B}$ 的每个行向量线性无关。从而扩充为 $\boldsymbol{\gamma}$ 后亦线性无关，行向量组 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 s。 ■

问题 2 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 可以线性表示 $\boldsymbol{\beta}$，且不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表示。证明：$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} = \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}\}$.

证明 由题设，$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}(i \neq s)$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 必然线性无关：

$$\sum k_i\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\beta}$$

$$\det(\boldsymbol{\alpha}_1 \cdots \boldsymbol{\alpha}_s) \xlongequal{\text{初等行变换}} \det\left(\boldsymbol{\alpha}_1 \cdots \sum\frac{k_i}{k_s}\boldsymbol{\alpha}_i + \alpha_s\right) = \det\left(\boldsymbol{\alpha}_1 \cdots \frac{\boldsymbol{\beta}}{k}\right) \neq 0$$

从而 $\boldsymbol{\beta}$ 也与 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}(i \neq s)$ 线性无关。二者等秩。证毕。 ■