

Chapter 1

高等数学引入课

教材：我也弄不清楚在讲数分还是高数

教师：束琳

邮箱：lshu@math.pku.edu.cn

注意事项：不要追求满分

先来讲一些历史故事。1609 与 1619 年开普勒发表了其三定律，为后续理论研究提供了实验数据支撑。

笛卡尔 1619（1637）创立了解析几何与坐标系，使得方程与公式得以展现联系与演化。

Je pense, donc je suis.

牛顿在 1661-1666 年初步创立了微积分，在 1679 年与 1687 年出版的书正式创立了微积分。牛顿以万有引力公式：

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r} \quad (1.1)$$

开启了人类对“有形宇宙”的研究。

事实上：

$$m\mathbf{a} + G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r} = 0 \quad (1.2)$$

$$\mathbf{a} + G \frac{M}{r^3} \mathbf{r} = 0 \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r + G \frac{M}{r^2} = 0 \\ \ddot{\theta} r + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

凑微分:

$$r\ddot{\theta}r + 2\dot{r}^2\dot{\theta} = \frac{d}{dr}(r\dot{\theta}r) = 0 \quad (1.5)$$

记 $\dot{\theta}r^2$ 为 l , 代入第一式:

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{r^3} + G\frac{M}{r^2} = 0 \quad (1.6)$$

换 $dt \rightarrow d\theta$, 注意到 $\dot{\theta} = lr^{-2}$; 换元, $u := 1/r$, $\dot{r} = -\dot{\theta}\frac{d}{d\theta}u^{-1} = l\frac{du}{d\theta}$, $\ddot{r} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$:

$$-l^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - l^2u^3 = -ku^2 \quad (1.7)$$

即:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{k}{l^2} \quad (1.8)$$

解得:

$$r = \frac{1}{u} = \frac{\frac{h^2}{k}}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)} \quad (1.9)$$

其中 ε 是参数, 其实际意义为离心率。

自此, “分析学” 融入了力学的各个分支。伯努利、莱布尼茨、欧拉、达朗贝尔、高斯、柯西、黎曼等数学家在此基础上继续研究, 使得人类对分析学的认知愈发深入。而拉格朗日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、哈密顿、格林、雅可比等科学家亦从另外的角度出发, 在应用中促进了分析学的发展。

Chapter 2

函数

定义 1 函数式描述事物演变规律的基本概念之一。函数是两集合（分别称作定义域和值域）之间的对应关系：

$$f : X \mapsto Y \quad (2.1)$$

♠

六类基本初等函数：

$$\text{常值函数: } f(x) = C \quad (2.2)$$

$$\text{指数函数: } f(x) = a^x = \exp(x \ln a) \quad (2.3)$$

$$\text{对数函数: } f(x) = \log_a(x) \quad (2.4)$$

$$\text{幂函数: } f(x) = x^a \quad (2.5)$$

$$\text{三角函数: } f(x) = \sin(x) \ f(x) = \cos(x) \ f(x) = \tan(x) \cdots \quad (2.6)$$

$$\text{反三角函数: } f(x) = \sin^{-1}(x) \ f(x) = \cos^{-1}(x) \ f(x) = \tan^{-1}(x) \cdots \quad (2.7)$$

有限次初等函数的复合也是初等函数。例如，双曲函数：

$$\text{sh } x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (2.8)$$

$$\text{ch } x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (2.9)$$

$$\text{th } x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (2.10)$$

还有：

$$\text{Shannon 信息熵: } H = - \sum p_k \ln p_k \quad (2.11)$$

$$\text{正态分布: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad (2.12)$$

而极限可以帮我们在此基础上**创造新的函数**。

首先，**延拓**指数函数。我们已经明确了 $f(x) = a^x$ 在 $x \in \mathbb{Z}$ 上的定义，现在我们将 x 延拓到整个 \mathbb{R} 。

在此之前，我们必须明确实数集的定义：

定义 2 有限集：

$$\exists n \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } A \longleftrightarrow \mathbb{N}_n \quad (2.13)$$

其中 $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \dots, n\}$ ♠

定义 3 戴德金分隔：对于给定的全序集 A 及其中某个元素 x 而言，将 A 分拆为两个非空集合 A_- 与 A_+ ，使得 $\forall x \in A_-, y \in A_+, x < y$ 。这样的一组非空集合 A_- 与 A_+ 被称作集合 A 的一个戴德金分隔。 ♠

定义 4 数域：当一数集 A 与一种封闭运算 $\oplus : A \times A \mapsto A$ 构成数域。 ♠

定义 5 实数集是对有理数集全体戴德金分隔的集合。或者说，实数集是对极限运算封闭的数域。 ♠

定义 6 上确界 \sup 即最小上界；下确界 \inf 即最大下界。以上确界为例：

1. M 为 E 的上界.
2. $\forall M' < M, \exists x \in E \text{ s.t. } M' < x \leq M$

则 M 为 E 的上确界。 ♠

重新定义四则运算：

$$a + b := \sup\{\alpha + \beta \mid \alpha \leq a, \beta \leq b, \alpha, \beta \in Q\} \quad (2.14)$$

$$a - b = a + (-b) \quad (2.15)$$

$$a \cdot b = \sup_{\text{e.g. in } \mathbb{R}^+} \{\alpha\beta \mid 0 < \alpha \leq a, 0 < \beta \leq b, \alpha, \beta \in Q\} \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{b} := \inf_{\text{e.g. } b > 0} \left\{ \frac{1}{\beta} \mid 0 < \beta \leq b, \beta \in Q \right\} \quad (2.17)$$

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \quad (2.18)$$

定义 7 聚点： A 是数列 $\{a_n\}$ 的聚点当且仅当其任意邻域内均有无穷多 $\{a_n\}$ 中的项。♠

实数具有完备性、连续性。完备性的等价描述：

1. 上下确界原理: \mathbb{R} 中任何一个非空有上界集合都具有上确界, 任何一个非空有下界集合都具有下确界。
2. 单调收敛原理: \mathbb{R} 中单调有界数列必收敛。
3. 闭区间套定理: 设有一系列满足以下两个条件的闭区间:
 - (a) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$
 - (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ s.t. } \forall n > N, |a_n - b_n| < \varepsilon$
 则存在唯一实数 $\xi \in [a_n, b_n]$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$
4. 有限覆盖原理: 闭区间上的任意一个开覆盖¹ $\{O_a\}$, 必可从中取出有限个开区间来覆盖这个闭区间。
5. 列紧性定理: 有界数列必有收敛子列。
6. 聚点原理: 有界无穷点集至少有一个聚点。

问题 1 用反证法证明实数集不可数。



证明 (Cantor's diagonal argument) 假设实数集可数, 则其子区间 $(0, 1)$ 必可数。下面我们构建一个二进制实数序列, 由假设可知, 这个序列包含了上述区间内的所有实数:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 0.000 \cdots \\
 r_2 &= 0.100 \cdots \\
 &\vdots \\
 r_n &= 0.\overline{a_1 a_2 \cdots}
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

其中: $a_i \in \{0, 1\}$, 记 r_i 的第 j 位小数为 r_{ij} , 取实数 x , 使得 $x_j = 1 - r_{jj}$ 。则 x 不属于 $\{r_i\}$ 。这与假设矛盾。

故 $(0, 1)$ 中的实数不可数, 实数集非可数集。



¹集合 A 的开覆盖被定义为一组开区间 O_a , 满足 $A \subseteq \bigcup_a O_a$