

极限作业

1 习题 1.3

问题 1 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |l|$ 。

证明

$$\exists N > 0, s.t. \quad ||a_n| - |l|| \leq |a_n - l| < \varepsilon \quad (1)$$

■

问题 2 设 $\{a_n\}$ 有极限 l , 证明:

1. 存在 $N \in \mathbb{N}, s.t. \quad \forall n > N, \quad |a_n| < |l| + 1$;
2. $\{a_n\}$ 是有界序列, 存在常数 $M, s.t. \quad |a_n| \leq M$ 。

证明 由于存在极限:

1.

$$\exists N > 0, s.t. \quad \forall n > N \quad |a_n - l| < 1 := \varepsilon \quad (2)$$

2. 设 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, s.t. \quad \forall n > N \in \mathbb{N}, \quad |a_n - l| < \varepsilon$, 设 $M = \max(a_1, \dots, a_{N-1}, l + 1)$, 得证。 ■

问题 3 证明极限:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-3} = \frac{3}{2}$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} \sin n}{n+1} = 0$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 q^n = 0 (|q| < 1)$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$;
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1$;

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^{3/2}} + \cdots + \frac{1}{(2n)^{3/2}}$$

解答 1.

$$\frac{3n+1}{2n-3} = \frac{3}{2} + \frac{11}{2(2n-3)} \quad (3)$$

$$a_n - \frac{3}{2} < \varepsilon \quad (4)$$

$$n > \frac{11}{4\varepsilon} + \frac{3}{2} \quad (5)$$

N 取右侧式子取证加一即可。

2.

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \right| < \frac{1}{\frac{1}{n^3}} < \varepsilon \quad (6)$$

取 $N = \lceil \varepsilon^{-3} \rceil + 1$ 即可。

3.

$$n^2 q^n := \frac{n^2}{(1+a)^n} \quad (7)$$

$$= \frac{n^2}{1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3 + \cdots} \quad (8)$$

$$< \frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)a^3} \quad (9)$$

$$< \frac{18}{a^2 n} < \varepsilon \quad (10)$$

$$n > \max \left\{ 3, \frac{18}{a^3 \varepsilon} \right\} \quad (11)$$

取 N 为不等式右侧向下取整再加一即可。

4.

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} \quad (12)$$

取 $N = \lceil \varepsilon^{-1} \rceil + 1$ 即可。

5.

$$\sum \frac{1}{n(n-1)} = \sum \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \quad (13)$$

取 $N = \lceil \varepsilon^{-1} \rceil + 1$ 即可。

6.

$$\sum \frac{1}{(n+i)^{3/2}} < \frac{n}{(n+1)^{3/2}} < \frac{1}{n^{1/2}} \quad (14)$$

取 $N = [\varepsilon^{-2}] + 1$ 即可。

问题 4 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 又设 $\{b_n\}$ 是有界序列, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

证明 由题意, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \quad \forall n > N, |a_n| < \varepsilon$. 设 $|b_n|$ 的上界为 M , 对于相同的 N , 取 $\varepsilon' = M\varepsilon$ 即可证明待证命题。 ■

问题 5 证明极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad (15)$$

证明 在课堂上我们已有三种不同的证法, 分别是定义法和两种不同的不等式法。下面再尝试利用别的方法证明: 对两侧同时取对数。因为初等函数 $\ln x$ 在 $(-1, +\infty)$ 连续, 从而有:

$$\ln \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \quad (16)$$

利用 *Stolz* 定理:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{n} = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 0 \quad (17)$$

从而原命题得证。 ■

问题 6 求下列各极限的值:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n};$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 100}{4n^3 - n + 2};$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n};$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n;$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2};$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$

解答 1. 化为分式, 0.

2. 略去小量, $\frac{1}{4}.$

3. 幂的运算, e^{-2} .
4. 变量代换, e^{-1} .
5. 幂的运算, $\prod_{i=1}^n e^{-1} \rightarrow 0$.
6. 幂的运算, $e^{-\frac{1}{n}} \rightarrow 1$

问题 7 用单调有界序列收敛证明下列序列极限存在:

1. $x_n = \sum_{i=1}^n i^{-2}$;
2. $x_n = \sum_{i=1}^n (n+i)^{-1}$.

证明 作为正项级数, 显然单调. 下面分别证明有界:

1. 放缩:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} < 1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i(i-1)} = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2 \quad (18)$$

有界, 证毕;

2. 放缩:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} < \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1 \quad (19)$$

有界, 证毕。 ■

问题 8 证明极限:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \quad (20)$$

证明 课堂上已经完成过证明. 现在进行复习:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{1-j}{n}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \quad (21)$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+k} > \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad (22)$$

$$e \geq \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \quad (23)$$

■

2 习题 1.4

问题 9 直接用 $\varepsilon - \delta$ 语言证明下列各极限:

1. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$;
2. $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$.
3. 这里有同学问我如何证明 e^x 也连续, 故补充。

证明 1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \dot{U}(a, \delta), |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left| \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| < \left| \frac{\delta}{\sqrt{a-\delta} + \sqrt{a}} \right|$, 则定义 $\varepsilon = \sqrt{a} - \sqrt{a-\delta}$ 即可。

2. $|\cos x - \cos a| = \left| 2 \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2} \right| < 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| < |x-a|$, 定义 $\varepsilon = \delta$ 即可。

3. $|e^x - e^a| = e^a |e^{x-a} - 1| < e^a |e^\delta - 1| \leq \varepsilon$, 解不等式:

$$e^\delta < \varepsilon e^{-a} + 1 \quad (24)$$

$$\text{取 } \delta = \ln(1 + \varepsilon e^{-a}) \quad (25)$$

■

问题 10 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, 证明: 存在 a 的一个空心邻域 $\dot{U}(a, \delta)$, 使得函数 $y = f(x)$ 在该邻域内为有界函数。

解答 由极限定义, 令 $\varepsilon = 1, \exists \delta, s.t. \forall x \in \dot{U}(a, \delta), |f(x) - f(a)| < 1$, 则显然 $|f(x)| < l + 1$ 为有界函数。

问题 11 求下列各极限的值:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 2x - 3}$;
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{10}}{(2x+1)^{30}}$;
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$;
5. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right)$;
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} (n \in \mathbb{N})$;

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} \cdots + b_n};$$

$$8. \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^3 - a^3}}.$$

解答 1. 化简 $\frac{x}{x(\sqrt{x+a} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$

2. 定义域上的连续函数, 直接代入, 0.

$$3. \text{舍小量, } \frac{2^{20} 3^{10}}{2^{30}} = 1.5^1 0.$$

$$4. \text{化简 } \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$5. \text{通分 } \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1} = \frac{x-2}{x^2 - x + 1} = \frac{-3}{3} = -1.$$

6. 注意到 $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \cdots + 1)$, 消除 $x-1$ 再代入 $x=1$ 后得 n .

$$7. \frac{a_m}{b_n}, \text{ 当 } b_n \neq 0; \infty, \text{ 当 } b_n = 0.$$

8. (似乎红皮书第二版第三版本题不太一样, 我在这里先按照第二版做) 拆开:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^3 - a^3}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^3 - a^3}} + \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^3 - a^3}} \quad (26)$$

$$= \frac{x-a}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x^3 - a^3}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + ax + a^2}} \quad (27)$$

$$= \frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x^2 + ax + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + ax + a^2}} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^3 - a^3}} = \frac{1}{\sqrt{3a}} \quad (29)$$

8' 第三版:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x+a}} + \frac{1}{\sqrt{x+a}} \quad (30)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}} \quad (31)$$

问题 12 利用两个重要极限证明:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\tan \beta x};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x - \sin 2x}{\sin 5x};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a};$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{-x};$$

$$7. \lim_{y \rightarrow 0} (1 - 5y)^{\frac{1}{y}};$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+100}.$$

解答 1. $\frac{\sin \alpha x}{\tan \beta x} = \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} \cos \beta x = \frac{\alpha}{\beta} (x \rightarrow 0).$

$$2. \frac{2x^2}{3x} \rightarrow 0.$$

$$3. \frac{3x - 2x}{5} \rightarrow \frac{1}{5}.$$

$$4. \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}} \rightarrow \sqrt{2}.$$

$$5. \frac{\cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \rightarrow \cos a.$$

$$6. e^{-k}.$$

$$7. e^{-5}.$$

$$8. e.$$

问题 13 给出:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{及} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (32)$$

的严格定义。

解答 1. $\forall M > 0, \exists \delta(\delta) > 0, s.t. \quad \forall x \in \mathring{U}(a, \delta), f(x) > M;$

$$2. \forall M > 0, \exists N > 0, s.t. \quad \forall x < -N, f(x) < -M.$$