Chapter 1

高等数学引入课

教材：我也弄不清楚在讲数分还是高数
教师：束琳
邮箱：*lshu@math.pku.edu.cn*
注意事项：不要追求满分

先来讲一些历史故事。1609 与 1619 年开普勒发表了其三定律，为后续理论研究提供了实验数据支撑。

笛卡尔 1619（1637）创立了解析几何与坐标系，使得方程与公式得以展现联系与演化。

Je pense, donc je suis.

牛顿在 1661-1666 年初步创立了微积分，在 1679 年与 1687 年出版的书正式创立了微积分。牛顿以万有引力公式：

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1.1}$$

开启了人类对“有形宇宙”的研究。

事实上：

$$m\boldsymbol{a} + G\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r} = 0 \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{a} + G\frac{M}{r^3}\boldsymbol{r} = 0 \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r + G\dfrac{M}{r^2} = 0 \\ \ddot{\theta} r + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

凑微分：

$$r\ddot{\theta}r + 2\dot{r}^2\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\dot{\theta}r^2\right) = 0 \tag{1.5}$$

记 $\dot{\theta}r^2$ 为 l，代入第一式：

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{r^3} + G\frac{M}{r^2} = 0 \tag{1.6}$$

换 $\mathrm{d}t \to \mathrm{d}\theta$，注意到 $\dot{\theta} = lr^{-2}$；换元，$u := 1/r$，$\dot{r} = -\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}u^{-1} = l\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$, $\ddot{r} = -h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$：

$$-l^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} - l^2u^3 = -ku^2 \tag{1.7}$$

即：

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{k}{l^2} \tag{1.8}$$

解得：

$$r = \frac{1}{u} = \frac{\frac{h^2}{k}}{1 + \varepsilon\cos(\theta = \theta_0)} \tag{1.9}$$

其中 ε 是参数，其实际意义为离心率。

自此，“分析学”融入了力学的各个分支。伯努利、莱布尼茨、欧拉、达朗贝尔、高斯、柯西、黎曼等数学家在此基础上继续研究，使得人类对分析学的认知愈发深入。而拉格朗日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、哈密顿、格林、雅可比等科学家亦从另外的角度出发，在应用中促进了分析学的发展。

Chapter 2

函数

定义 1 函数式描述事物演变规律的基本概念之一。函数是两集合（分别称作**定义域**和**值域**）之间的对应关系：

$$f : X \mapsto Y \tag{2.1}$$

♠

六类基本初等函数：

$$\text{常值函数：} f(x) = C \tag{2.2}$$

$$\text{指数函数：} f(x) = a^x = \exp(x \ln a) \tag{2.3}$$

$$\text{对数函数：} f(x) = \log_a(x) \tag{2.4}$$

$$\text{幂函数：} f(x) = x^a \tag{2.5}$$

$$\text{三角函数：} f(x) = \sin(x)\ f(x) = \cos(x)\ f(x) = \tan(x) \cdots \tag{2.6}$$

$$\text{反三角函数：} f(x) = \sin^{-1}(x)\ f(x) = \cos^{-1}(x)\ f(x) = \tan^{-1}(x) \cdots \tag{2.7}$$

有限次初等函数的复合也是初等函数。例如，双曲函数：

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{2.8}$$

$$\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{2.9}$$

$$\operatorname{th} x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{2.10}$$

还有：

$$\text{Shannon 信息熵：} H = -\sum p_k \ln p_k \tag{2.11}$$

$$\text{正态分布：} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \tag{2.12}$$

而极限可以帮我们在此基础上**创造新的函数**。

首先，**延拓**指数函数。我们已经明确了 $f(x) = a^x$ 在 $x \in \mathbb{Z}$ 上的定义，现在我们将 x 延拓到整个 $\mathbb{R}$。

在此之前，我们必须明确实数集的定义：

定义 2 有限集：

$$\exists n \in \mathbb{N},\, s.t.\, A \longleftrightarrow \mathbb{N}_n \tag{2.13}$$

其中 $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \cdots, n\}$ ♠

定义 3 戴德金分隔：对于给定的全序集 A 及其中某个元素 x 而言，将 A 分拆为两个非空集合 A_- 与 A_+，使得 $\forall x \in A_-, y \in A_+, x < y$. 这样的一组非空集合 A_- 与 A_+ 被称作集合 A 的一个戴德金分隔。 ♠

定义 4 数域：当一数集 A 与一种封闭运算 $\oplus : A \times A \mapsto A$ 构成数域。 ♠

定义 5 实数集是对有理数集全体戴德金分隔的集合。或者说，实数集是对极限运算封闭的数域。 ♠

定义 6 上确界 sup 即最小上界；下确界 inf 即最大下界。以上确界为例：

1. M 为 E 的上界.
2. $\forall M' < M, \exists x \in E \quad s.t. \quad M' < x \leq M$

则 M 为 E 的上确界。 ♠

重新定义四则运算：

$$a + b := \sup\{\alpha + \beta \,|\, \alpha \leq a, \beta \leq b,\, \alpha, \beta \in Q\} \tag{2.14}$$

$$a - b = a + (-b) \tag{2.15}$$

$$a \cdot b = \sup_{e.g.in\,\mathbb{R}^+} \{\alpha\beta \,|\, 0 < \alpha \leq a, 0 < \beta \leq b,\, \alpha, \beta \in Q\} \tag{2.16}$$

$$\frac{1}{b} := \inf_{e.g.b>0} \left\{\frac{1}{\beta} \,|\, 0 < \beta \leq b,\, \beta \in Q\right\} \tag{2.17}$$

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \tag{2.18}$$

定义 7 聚点：A 是数列 $\{a_n\}$ 的聚点当且仅当其任意邻域内均有无穷多 $\{a_n\}$ 中的项。♠

实数具有完备性、连续性。完备性的等价描述：

1. 上下确界原理：$\mathbb{R}$ 中任何一个非空有上界集合都具有上确界，任何一个非空有下界集合都具有下确界。
2. 单调收敛原理：$\mathbb{R}$ 中单调有界数列必收敛。
3. 闭区间套定理：设有一系列满足以下两个条件的闭区间：
   (a) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$
   (b) $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N\, s.t. \forall n > N, |a_n - b_n| < \varepsilon$

   则存在唯一实数 $\xi \in [a_n, b_n]$，并且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$
4. 有限覆盖原理：闭区间上的任意一个开覆盖[1]$\{O_a\}$，必可从中取出有限个开区间来覆盖这个闭区间。
5. 列紧性定理：有界数列必有收敛子列。
6. 聚点原理：有界无穷点集至少有一个聚点。

问题 1 用反证法证明实数集不可数。 ♠

证明 (Cantor's diagonal argument) 假设实数集可数，则其子区间 $(0, 1)$ 必可数。下面我们构建一个二进制实数序列，由假设可知，这个序列包含了上述区间内的所有实数：

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.000\cdots \\ r_2 &= 0.100\cdots \\ &\vdots \\ r_n &= 0.\overline{a_1 a_2 \cdots} \end{aligned} \tag{2.19}$$

其中：$a_i \in \{0, 1\}$，记 r_i 的第 j 位小数为 r_{ij}，取实数 x，使得 $x_j = 1 - r_{jj}$。则 x 不属于 $\{r_i\}$。这与假设矛盾。

故 $(0, 1)$ 中的实数不可数，实数集非可数集。 ■

[1]集合 A 的开覆盖被定义为一系列开区间 O_a，满足 $A \subseteq \bigcup_a O_a$