补充定义：

**定义 1** 排列：对自然数对 $(1,2,\cdots,n)$ 重新排序，得到 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$，则称其为 1 到 $n$ 的一种排列。 ♠

**定义 2** 逆序对数量为奇数，则称该排列为**奇排列**；反之，称之为**偶排列**。 ♠

$\tau(\pi)$ 也可以被理解为将排列 $\pi$ 经过一一换序变为 $(1,2,\cdots,n)$ 的最少步骤数。

**定理 1** 对换两个元素，排列奇偶性改变。 ♠

上述定理可以进一步推广为：

**定理 2** 奇（偶）排列经过奇（偶）数次对换变成自然排列 $(1,2,\cdots,n)$。 ♠

**定理 3** 行排列与列排列同时改变。 ♠

这里指出一个排列性质。由于不管从行展开还是按列展开，同一项的系数必须相同：

$$\begin{vmatrix} & a_{12} & & \\ & & a_{23} & \\ a_{31} & & & \\ & & & a_{44} \end{vmatrix} \tag{1}$$

按行，系数为 $\tau(2314)$，按列为 $\tau(3124)$。故必有：

$$\tau(2314)=\tau(3124) \tag{2}$$

**问题 1** 求行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

♠

**解答** 记：

$$A_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

则：

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 & \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = a_{11}A_{n-1} \tag{5}$$

♠

迭代：

$$A_n = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{6}$$

另一个对角矩阵的行列式与此相同：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{7}$$

**问题 2** 求行列式：

$$\begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8}$$

♠

**解答**

$$\det \begin{bmatrix} & & a_{1n} \\ & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} i} \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{9}$$

♠

**定义 3** 转置：

$$A_{ij}^{T} = A^{ij} \tag{10}$$

♠

**定理 4**

$$\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^{T}) \tag{11}$$

从而行的性质都可以对偶地应用在列上。 ♠

**结论** 1. 行公理化定义

2. 列公理化定义

3. 行列式定义 ♠

下面是几个例题：

**问题 3** 设：

$$\boldsymbol{C} = C_{ab} = c_{ij}(e^i)_a(e^j)_b = (a_i 1_j + 1_i b_j)(e^i)_a(e^j)_b \tag{12}$$

其中 $1_i$ 是为凑齐指标而产生的所有元为 1 的向量，计算 $\det \boldsymbol{C}$。[1] ♠

**解答**

$$\begin{cases} \text{当} n \geq 3, \quad 0 \\ \text{当} n = 2, \quad (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \end{cases} \tag{13}$$

注意到当 $n \geq 3$，行列式中必有两行在拆解后相等 ($\boldsymbol{\beta}$ 或 $\mathbf{1}$) 则该结论显然。其中 $\det \boldsymbol{C} = |a_i 1_a + 1_j \beta_a|$，$\beta_a = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$. ♠

[1]这里利用到了抽象指标记号。