

数域练习题及补充题一作业

问题 1 令:

$$F = \left\{ \frac{a_0 + a_1e + \cdots + a_ne^n}{b_0 + b_1e + \cdots + b_me^m} \mid \begin{array}{l} n, m \text{ 为任意非负整数, } a_i, b_j \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m \end{array} \right\} \quad (1)$$

证明 F 是数域, 其中 e 是欧拉常数。

证明 下面证明 F 对加法封闭。设 $f_1 = \frac{\sum_{i=0}^n F_{1i}e^i}{\sum_{i=0}^n f_{1i}e^i}, f_2 = \frac{\sum_{i=0}^m F_{2i}e^i}{\sum_{i=0}^m f_{2i}e^i} \in F$:

$$f_1 + f_2 = \frac{\sum_{i=0}^n F_{1i}e^i \sum_{i=0}^m f_{2i}e^i + \sum_{i=0}^m f_{1i}e^i \sum_{i=0}^n F_{2i}e^i}{\sum_{i=0}^n f_{1i}e^i \sum_{i=0}^m f_{2i}e^i} = \frac{\sum_{\lambda} \sum_{i+j=\lambda} (F_{1i}f_{2j} + f_{1i}F_{2j})e^\lambda}{\sum_{\lambda} \sum_{i+j=\lambda} f_{1i}f_{2j}e^\lambda} \in F \quad (2)$$

这其实是因为整多项式环对乘法与加法封闭。相应的, F 对减法也封闭。下面整 F 对乘法封闭:

$$f_1 \times f_2 = \frac{\sum_{i=0}^n F_{1i}e^i \sum_{i=0}^m F_{2i}e^i}{\sum_{i=0}^n f_{1i}e^i \sum_{i=0}^m f_{2i}e^i} = \frac{\sum_{\lambda} \sum_{i+j=\lambda} F_{1i}F_{2j}e^\lambda}{\sum_{\lambda} \sum_{i+j=\lambda} f_{1i}f_{2j}e^\lambda} \in F \quad (3)$$

F 对取倒数封闭 (复合一次乘法后即对除法封闭):

$$f^{-1} = \frac{\sum_{i=0}^n f_i e^i}{\sum_{i=0}^n F_i e^i} \in F \quad (4)$$

综上, F 对四则运算封闭, F 是数域。 ■

问题 2 解下列线性方程组:

$$\begin{cases} (1+a_1)x_1 + x_2 & +x_3 + \cdots & +x_n = b_1 \\ x_1 + (1+a_2)x_2 & +x_3 + \cdots & +x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 + x_2 & +x_3 + \cdots & +(1+a_n)x_n = b_n \end{cases} \quad (5)$$

其中 $a_i \neq 0, \sum a_i^{-1} \neq -1$.

解答 注意到两个重要关系：

$$\sum_{j=1}^n x_j \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i^{-1} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i} \quad (6)$$

$$\frac{b_i - \sum_{j=1}^n x_j}{a_i} = x_i \quad (7)$$

(6)可由第 i 行同除 $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 再全部求和得到, (7)是原方程每一行的变形, 是显然的。由(6)解出：

$$\sum_{j=1}^n x_j = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i} \left(1 + \sum_{j=1}^n a_j^{-1} \right)^{-1} \quad (8)$$

代入(7)：

$$x_k = \frac{b_k - \left(1 + \sum_{j=1}^n a_j^{-1} \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i}}{a_k} \quad (9)$$