Otimização e Simulação

Prof. Dr. Daniel Rodrigues da Silva

A história da Pesquisa Operacional

A Pesquisa Operacional, ou simplesmente PO, surgiu na Inglaterra durante a Segunda Guerra Mundial (1939-1945) para a solução de problemas de natureza logística, tática e de estratégia militar, quando um grupo de cientistas foi convocado para decidir sobre a utilização mais eficaz dos recursos militares limitados, marcando a primeira atividade formal desse campo de estudo.

Dentre os problemas estudados, destacam-se:

Projeto, manutenção e inspeção de aviões; projeto de explosivos, tanques e motores; melhoria da utilização de radar, canhões antiaéreos e táticas de bombardeios a submarino; dimensionamento de frota, entre outros.

PUC-SP

Os resultados positivos alcançados pelo grupo de cientistas ingleses fizeram com que a Pesquisa Operacional fosse disseminada nos Estados Unidos e, em 1947, a equipe liderada por George B. Dantzig criou o denominado **Método Simplex** para resolução de problemas de programação linear.

Desde então, esse conhecimento vem sendo aplicado, com sucesso, para a otimização de recursos em diversos segmentos industriais e comerciais de várias áreas de negócio, tais como: estratégia, marketing, finanças, microeconomia, operações e logística, recursos humanos, entre outras.

O grande avanço da Pesquisa Operacional tornou-se possível graças ao aumento da velocidade de processamento e à quantidade de memória de computadores nos últimos anos, tornando possível a solução de problemas complexos.

Existem atualmente diversas sociedades de PO no Brasil e no exterior com o objetivo de promover, por meio de reuniões, seminários, congressos, conferências, cursos, prêmios e publicações entre profissionais, estudantes e instituições.

Entre as principais sociedades, destacam-se a SOBRAPO (Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional), INFORMS (Institute for Operations Research and Management Science), EURO (The Association of European Operational Research Societies), APDIO (Associação Portuguesa de Investigação Operacional), IFORS (International Federation of Operacional Research Societies) e ALIO (Associación Latino-Ibero-Americana de Investigación Operativa).

Introdução

Em termos gerais, então podemos dizer que:

A Pesquisa Operacional consiste na utilização de um método científico (modelos matemáticos, estatísticos e algoritmos computacionais) para a tomada de decisão.

Assim sendo, a PO é uma disciplina multidisciplinar, envolvendo áreas de engenharia de produção, matemática aplicada, ciência da computação e gestão de negócios

Introdução

Os ramos mais importantes desenvolvidos na Pesquisa Operacional são:

Programação Linear (PL)

A Programação linear consiste na resolução de problemas de maximização (como lucro) ou minimização (como custo) de algum objetivo (função objetivo), atendendo a um conjunto de restrições.

Inicialmente um modelo matemático é definido e após esta formulação, busca-se a solução ótima para o problema. As variáveis de decisão são reais, isto é, não são necessariamente inteiras.

Introdução

Exemplos de problemas que podem ser formulados matematicamente como problemas de programação linear:

- Problemas de distribuição de recursos, pessoal, etc.
- Problemas de transporte, de transbordo, etc.
- Problemas de planejamento da produção, etc.

Introdução

PUC-SP

Programação Não Linear (PNL)

Expande o alcance da programação linear, permitindo que se trate de problemas onde a função objetivo e as restrições sejam equações não-lineares.

Introdução

Programação Dinâmica (PD)

Técnica de análise de possibilidades de problemas decisórios, onde o processo de decisão envolve etapas sucessivas de decisão correlacionadas, isto é, quando a decisão de uma etapa influencia a etapa seguinte.

PUC-SP

Introdução

Programação Inteira e Mista

Permite que algumas (ou todas as) variáveis do modelo sejam números inteiros, este é o caso do planejamento de produção quando na indústria, os produtos tenham que ser produzidos em quantidades inteiras de peças.

Introdução

PUC-SP

Outros Ramos da Pesquisa Operacional

- Análise Estatística
- Teoria dos Jogos
- Teoria das filas
  - Organização do tráfego aéreo
  - Congestão do tráfego
- Simulação

Características do Processo de Tomada de Decisão

- O processo de tomada de decisão é sequencial
- É um processo complexo
- Implica valores subjetivos
- É desenvolvido em ambiente institucional com regras mais ou menos bem definidas

Tomada de Decisão

PUC-SP

Segundo Liczbinski (2002), a tomada de decisão é um processo complexo e envolve diversos fatores internos e externos ligados à organização. Entre eles, destacam-se:

- Ambiente.
- Risco e incerteza.
- Custo e qualidade requerida pelo produto ou serviço.
- Agentes tomadores de decisão.
- Cultura organizacional.
- O próprio mercado.

Processo de Tomada de Decisão

PUC-SP

Um modelo é a representação simplificada de um sistema real, podendo ser um projeto já existente ou um projeto futuro.

No primeiro caso, pretende-se reproduzir o funcionamento do sistema real existente, de forma a aumentar a produtividade, enquanto no segundo caso o objetivo é definir a estrutura ideal do futuro sistema.

O comportamento de um sistema real é influenciado por diversas variáveis envolvidas no processo de tomada de decisão. Devido à grande complexidade desse sistema, torna-se necessária a sua simplificação, a partir de um modelo, de forma que as principais variáveis envolvidas no sistema ou projeto que se pretende entender ou controlar sejam consideradas na sua construção, conforme mostra a Figura abaixo:

Fonte: Andrade (2009).

Modelagem

Um modelo é composto por três elementos principais:

a) Variáveis de decisão e parâmetros;

b) Função objetivo;

c) Restrições.

V**ariáveis de decisão:** são as incógnitas, ou valores desconhecidos, que serão determinados pela solução do modelo.

As variáveis podem ser classificadas de acordo com as seguintes escalas de mensuração: Variáveis **Contínuas**, **Discretas** ou **Binárias**.

As variáveis de decisão devem assumir **valores não negativos.**

As Variáveis Contínuas podem assumir quaisquer valores em um intervalo de números reais. Como exemplos de variáveis de decisão contínuas, podemos citar:

a) Quantidade ótima a ser produzida (em litros) de cada tipo de refrigerante em uma empresa de bebidas;

b) Quantidade ótima a fabricar (em kg) de cada tipo de cereal em uma empresa alimentícia;

c) Porcentagens ótimas de cada ativo a ser alocado na carteira de investimento.

As Variáveis Discretas podem assumir valores dentro de um conjunto finito ou uma quantidade enumerável de valores, sendo aquelas provenientes de determinada contagem. Como exemplos de variáveis discretas, podemos listar:

a) Número ideal de funcionários por turno de trabalho;

b) Unidades a fabricar de cada tipo de automóveis em uma indústria automobilística.

As Variáveis Binárias podem assumir dois possíveis valores:

1 (quando a característica de interesse está presente na variável) ou

0 (caso contrário).

Como exemplos de variáveis de decisão binárias, podemos mencionar:

a) Fabricar ou não determinado produto;

b) Abrir ou não uma nova localidade;

c) Percorrer ou não determinado roteiro.

Os **Parâmetros** são os valores fixos previamente conhecidos do problema. Como exemplos de parâmetros contidos em um modelo matemático, podemos citar:

a) demanda de cada produto para um problema de *mix* de produção;

b) custo variável para produzir determinado tipo de móvel;

c) lucro ou custo por unidade de produto fabricado;

d) custo por funcionário contratado;

Função Objetivo: é uma função matemática que determina o valor-alvo que se pretende alcançar ou a qualidade da solução, em função das variáveis de decisão e dos parâmetros, podendo ser uma função de maximização (lucro, receita, utilidade, nível de serviço, riqueza, expectativa de vida, entre outros atributos) ou de minimização (custo, risco, erro, entre outros). Como exemplos, podemos citar:

a) Minimização do custo total de produção de diversos tipos de chocolates;

b) Minimização do risco de crédito de uma carteira de clientes;

c) Minimização do número de funcionários envolvidos em determinado serviço;

d) Maximização do retorno sobre o investimento em fundos de ações e de renda fixa;

Restrições: podem ser definidas como um conjunto de equações ou inequações que as variáveis de decisão do modelo devem satisfazer. As restrições são adicionadas ao modelo de forma a considerar as limitações físicas do sistema, e afetam diretamente os valores das variáveis de decisão. Como exemplos de restrições a serem consideradas, podemos citar:

a) capacidade máxima de produção;

b) risco máximo a que determinado investidor está disposto a se submeter;

c) número máximo de veículos disponíveis;

d) demanda mínima aceitável de um produto.

A modelagem de um processo para tomada de decisões apresenta a vantagem de fazer com que os tomadores de decisão definam claramente os seus objetivos.

Além disso, facilita a identificação e o armazenamento das diferentes decisões que influenciam os objetivos, propicia a definição das principais variáveis envolvidas no processo de tomada de decisão e as próprias limitações do sistema, além de permitir maior interação entre o grupo de trabalho.

Problemas comuns em tomada de decisão

1. Escolha do problema certo a resolver

Os problemas manifestam-se por meio de SINTOMAS

Precisamos identificar as CAUSAS REAIS

Problemas comuns em tomada de decisão

2. Conhecimento insuficiente

Informações incompletas ou parciais

Pouca informação pode ser tão prejudicial quanto informação em excesso.

Os modelos

PUC-SP

- O modelo é uma idealização, ou uma visão simplificada da realidade.

- O modelo emprega símbolos matemáticos para representar as variáveis de decisão do sistema real.

Processo de Modelagem e Resolução de Problemas

A Pesquisa Operacional auxilia o processo de tomada de decisão com a utilização de modelos que possam representar o sistema real.

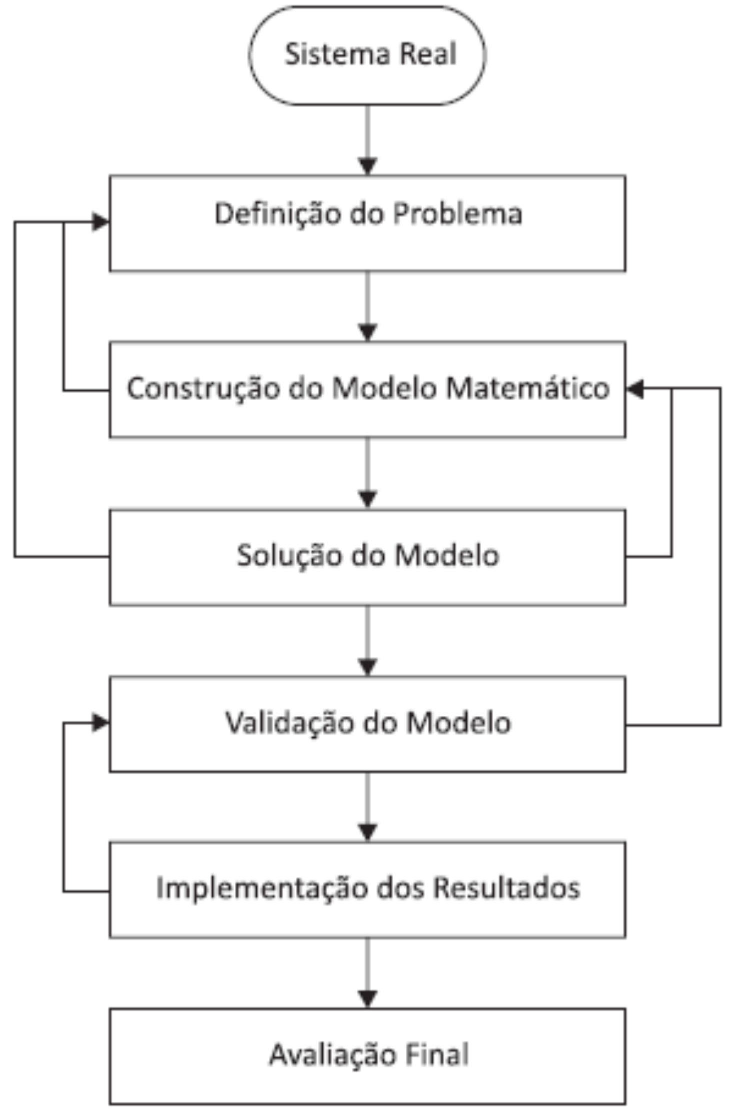
Uma vez construído o modelo, a próxima fase consiste na solução do mesmo por meio de técnicas de Pesquisa Operacional que serão estudadas ao longo da disciplina.

A solução obtida precisa ser validada de forma que o objetivo em questão seja atingido.

Porém, muitas vezes, é necessária a revisão de uma das fases anteriores até que as conclusões extraídas do modelo sejam validadas.

PUC-SP

Fases do estudo da Pesquisa Operacional.



a) Definição do Problema: Nessa fase, definem-se claramente os objetivos a serem alcançados e os possíveis caminhos para a solução do modelo. Essa fase também inclui a definição das limitações técnicas do sistema, além das relações desse sistema com outros da empresa ou do ambiente externo.

b) Construção do Modelo Matemático: Um modelo matemático em Pesquisa Operacional consiste em um conjunto de equações (função objetivo e restrições de igualdade) e inequações (restrições de desigualdade) que tem como objetivo otimizar a eficiência do sistema e oferecer subsídios para que o tomador de decisão identifique as limitações do mesmo.

PUC-SP

c) Solução do Modelo: Essa fase utiliza diversas técnicas de Pesquisa Operacional para a solução do modelo proposto na fase anterior. O método Simplex, por exemplo, é um algoritmo bastante popular na resolução de modelos de programação linear e também pode ser utilizado na resolução de problemas de programação em redes. Outros métodos de solução serão listados e discutidos ao longo do livro.

d) Validação do Modelo: Um modelo pode ser considerado válido se conseguir representar ou prever, com precisão aceitável, o comportamento do sistema real em estudo.

e) Implementação dos Resultados: Validado o modelo, a próxima fase consiste na implementação dos resultados que deve ser controlada e acompanhada por uma equipe responsável, de forma a detectar e corrigir possíveis mudanças nos valores da nova solução, o que pode fazer com que algumas partes do modelo sejam reformuladas.

f) Avaliação Final: A última fase consiste em verificar se o objetivo final foi alcançado.

Programação Linear:

Conforme dito anteriormente, a Pesquisa Operacional vem sendo aplicada em diversos segmentos industriais e comerciais (estratégia, marketing, finanças, operações e logística, recursos humanos, entre outros), a fim de decidir sobre a utilização mais eficaz de recursos.

A **programação linear (PL)** é uma das principais ferramentas da PO, e sua aplicação está cada vez mais difundida.

Em um problema de programação linear, *a função objetivo e todas as restrições do modelo são representadas por funções lineares. Adicionalmente, as variáveis de decisão devem ser todas* **contínuas**.

Modelagem em PL

Os modelos de **programação linear** são identificados pelas seguintes características:

I. Um critério de escolha das variáveis de decisão constituído por uma função linear das variáveis.

Esta função é denominada **função objetivo** e seu valor deve ser otimizado (maximizado ou minimizado).

Modelagem em PL

II. As relações de interdependência entre as variáveis de decisão se expressam por um conjunto de equações (e/ou) inequações lineares. Estas relações são denominadas restrições. Estas restrições são os fatores restritivos.

III. As variáveis de decisão do modelo são não-negativas, ou seja, positivas ou nulas. As variáveis de decisão devem ser claramente definidas.

Forma Geral de um problema de PL:

$$Max\ ou\ Min: \ z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Sujeito a:

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ (\leq \ ou \ = \ ou \ \geq) \ b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ (\leq \ ou \ = \ ou \ \geq) \ b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \ (\leq \ ou \ = \ ou \ \geq) \ b_3 \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ (\leq \ ou = \ ou \geq) \ b_m \\
x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0
\end{array}$$

Sendo $i = 1,2, \cdots, m \ e \ j = 1,2, \cdots, n$. Temos que:

z é a função objetivo;

x_j são as variáveis de decisão;

a_{ij} é a constante ou coeficiente da *i*-ésima restrição da *j*-ésima variável;

b_i é o termo independente ou quantidade de recursos disponíveis;

c_j é o coeficiente da *j*-ésima variável da função objetivo;

Forma Padrão de um problema de PL:

Para resolver um problema de programação linear, seja pelo método analítico, seja pelo algoritmo Simplex, a formulação do modelo deve estar na **forma padrão**, isto é, deve atender aos seguintes requisitos:

$$Max\ ou\ Min:\ \ z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Sujeito a:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1\,, x_2\,, \cdots, x_n \geq 0 \end{array}$$

Forma Padrão de um problema de PL na forma matricial

$$Max\ ou\ Min:\ \ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{cx}$$

Sujeito a:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

Onde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a\_22 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\ ;\ \ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}\ ;$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\ \ ;\ \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}\ \ e\ \ \boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que um problema de programação linear apresente uma das formas apresentadas, algumas operações elementares podem ser efetuadas a partir de uma formulação geral, conforme descrito a seguir.

1. Um problema padrão de maximização pode ser transformado em um problema de minimização de programação linear:

$$Max \;\; z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \Leftrightarrow \quad Min \;\; -z = -f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

2. Um problema padrão de minimização pode ser transformado em um problema de maximização de programação linear:

$$Min \;\; z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \Leftrightarrow \quad Max \;\; -z = -f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Hipóteses do Modelo de Programação Linear

PUC-SP

Em um problema de programação linear, a função objetivo e as restrições do modelo devem ser lineares, as variáveis de decisão devem ser contínuas (divisíveis, podendo assumir valores fracionários) e não negativas, e os parâmetros do modelo determinísticos, de forma a satisfazer as seguintes hipóteses:

- **Proporcionalidade**
- **Aditividade**
- **Divisibilidade e não negatividade**
- **Certeza**

Proporcionalidade: A hipótese de proporcionalidade requer que, para cada variável de decisão considerada no modelo, a sua contribuição em relação à função objetivo e às restrições do modelo seja diretamente proporcional ao valor da variável de decisão.

Aditividade: A hipótese de aditividade afirma que o valor total da função objetivo ou de cada função de restrição de um modelo de programação linear é expresso pela soma das contribuições individuais de cada variável de decisão. Assim, a contribuição de cada variável de decisão independe da contribuição das demais variáveis, de forma que não haja a existência de termos cruzados, tanto na função objetivo quanto nas restrições do modelo

Divisibilidade e não negatividade: Cada uma das variáveis de decisão consideradas no modelo pode assumir quaisquer valores não negativos dentro de um intervalo, incluindo valores fracionários, desde que satisfaça as restrições do modelo. Quando as variáveis em estudo podem assumir apenas valores inteiros, o modelo é chamado de programação (linear) inteira (PLI ou simplesmente PI).

Certeza: Essa hipótese afirma que os coeficientes da função objetivo, os coeficientes das restrições e os termos independentes de um modelo de programação linear são determinísticos (constantes e conhecidos com certeza).

PUC-SP