Método Simplex

Como visto anteriormente, a solução gráfica pode ser aplicada para a resolução de problemas de programação linear com duas variáveis de decisão.

Para problemas com mais variáveis, o método Simplex pode ser aplicado para a resolução de qualquer problema de PL.

A origem do método Simplex para resolução de problemas de programação linear deu-se em 1947 com a disseminação da Pesquisa Operacional nos Estados Unidos depois da Segunda Guerra Mundial, por uma equipe liderada por George B. Dantzig.

O algoritmo Simplex é um método algébrico iterativo que parte de uma solução básica factível inicial e busca, a cada iteração, uma nova solução básica factível, chamada solução básica factível adjacente, com melhor valor na função objetivo, até que o valor ótimo seja atingido.

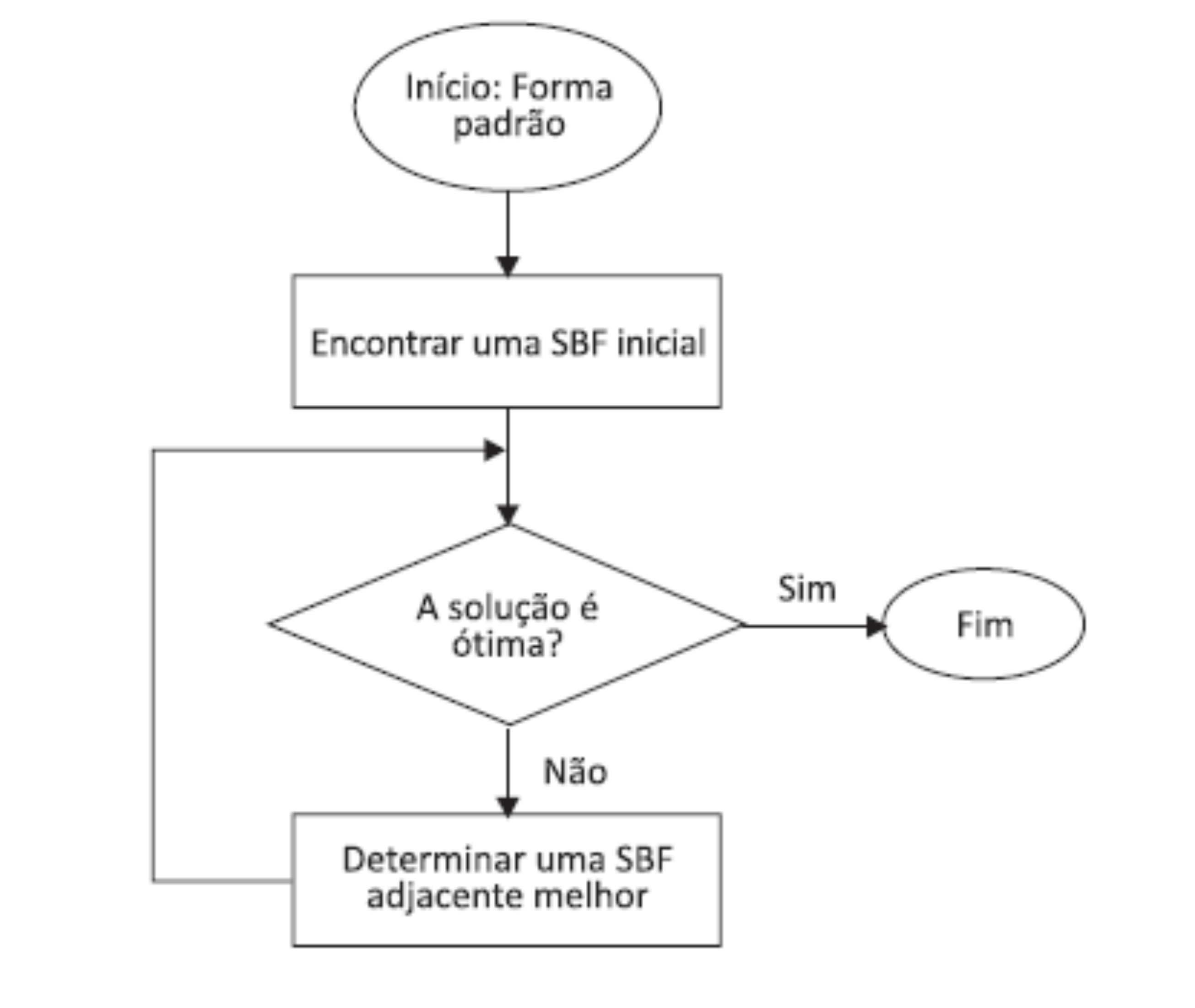
A partir de uma solução básica atual, uma variável não básica entra na base no lugar de outra variável básica que passa a ser não básica, gerando uma nova solução chamada **solução básica adjacente**.

Se a solução básica adjacente atende as restrições de não negatividade, ela é chamada **solução básica factível adjacente** (**SBF adjacente**).

De acordo com o Teorema visto, toda solução básica factível é um ponto extremo (vértice) da região factível.

Dessa forma, dois vértices são adjacentes se estão ligados por um segmento de reta chamado aresta.

O algoritmo pode ser descrito por meio de um fluxograma, conforme mostra a Figura:



Teorema: Se a função objetivo possui um máximo (mínimo) finito, então pelo menos uma **solução ótima é um ponto extremo** do conjunto das soluções (viáveis).

Examine uma seqüência de soluções básicas viáveis com o aumento dos valores da função objetivo até que uma solução ideal seja atingida ou seja provado que o PL é ilimitado.

(G. Dantzig, 1947).

Algoritmo de solução pelo Simplex:

Passo 0: Achar uma solução factível básica inicial.

Passo 1: Verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare.

Passo 2: Determinar a variável não-básica que deve entrar na base.

Passo 3: Determinar a variável básica que deve sair da base.

Passo 4: Achar a nova solução viável básica, e voltar ao **Passo 1**

Forma Tabular do Simplex para PL na forma padrão:

PUC-SP

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad & \ \ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m & \end{aligned}$$

Modelo geral de programação linear na forma tabular

nº da equação	Coeficientes					Constante
	z	x_1	x_2	...	x_n	
0	1	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0
1	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2	0	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
m	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

Exemplo 1: Resolva pelo Simplex:

$$Max\ z = 3x_1 + 2x_2$$

$$S.a. \begin{cases} x_1 + \quad x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1\,, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Colocar o PL na forma padrão acrescentando as variáveis de folga:

$$Max\ z = 3x_1 + 2x_2$$

$$S.a. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

O resultado completo da solução inicial é:

VNB = $\{x_1 , x_2\}$ e VB = $\{x_3, x_4\}$

Solução não básica: $x_1 = 0 \;\; e \;\; x_2 = 0$

Solução básica factível: $x_3 = 6 \;\; e \;\; x_4 = 20$

Solução: $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{\ 0 , 0 , 6 , 20\ \}$

Função objetivo: $z = 0$

$$Max\ z = 3x_1 + 2x_2$$

$$S.a. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Forma tabular inicial do Exemplo

Variável básica	nº da equação	Coeficientes					Constante
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	0	1	–3	–2	0	0	0
x_3	1	0	1	1	1	0	6
x_4	2	0	5	2	0	1	20

Determinação da variável que entra e sai da base na primeira iteração

Entra

Variável básica	nº da equação	Coeficientes					Constante	
		z	x_1	x_2	x_3	x_4		
z	0	1	–3	–2	0	0	0	
x_3	1	0	1	1	1	0	6	6/1 = 6
x_4	2	0	5	2	0	1	20	20/5 = 4 → Sai

coluna pivô

Nova linha pivô (Iteração 1)

Variável básica	nº da equação	Coeficientes					Constante
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	0	1	–3	–2	0	0	0
x_3	1	0	1	1	1	0	6
x_1	2	0	1	2/5	0	1/5	4

PUC-SP

' Nova forma tabular após o método de eliminação de Gauss-Jordan (Iteração 1)

Variável básica	nº da equação	Coeficientes					Constante
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	0	1	0	–4/5	0	3/5	12
x_3	1	0	0	3/5	1	–1/5	2
x_1	2	0	1	2/5	0	1/5	4

Nova solução = {$x1$, $x2$, $x3$, $x4$} = {4, 0, 2, 0}

Determinação da variável que entra e sai da base na segunda iteração

Entra

Variável básica	nº da equação	Coeficientes					Constante	
		z	x_1	x_2	x_3	x_4		
z	0	1	0	–4/5	0	3/5	12	
x_3	1	0	0	$\boxed{3/5}$	1	–1/5	2	$2/_{3/5} = 10/3$ → Sai
x_1	2	0	1	$\boxed{2/5}$	0	1/5	4	$4/_{2/5} = 10$

coluna pivô

Nova forma tabular após o método de eliminação de Gauss-Jordan (Iteração 2)

Variável básica	nº da equação	Coeficientes					Constante
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	0	1	0	0	4/3	1/3	44/3
x_2	1	0	0	1	5/3	–1/3	10/3
x_1	2	0	1	0	–2/3	1/3	8/3

nova SBF é $x_1 = \frac{8}{3}$ e $x_2 = \frac{10}{3}$, com $z = \frac{44}{3}$

A nova solução é $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \left\{\frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 0, 0\right\}$

Passo 2: Teste de otimalidade: A SBF atual é a ótima, pois os coeficientes das variáveis não básicas x_3 *e* x_4 na equação 0 da Tabela são positivos.

Exemplo 2: Resolva pelo Simplex:

$$\max\ Z = 2x_1 + x_2$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 6$$

S.a. $$6x_1 + 1x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} &3x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad = 6 \\ \text{S.a.} \qquad &6x_1 + 1x_2 + \qquad x_4 = 3 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Base	x1	x2	x3	x4	b
z	-2	-1	0	0	0
x3	3	4	1	0	6
x4	6	1	0	1	3

Base	x1	x2	x3	x4	b
z	-2	-1	0	0	0
x3	3	4	1	0	6
x4	6	1	0	1	3

Escolher: $\min\left\{\frac{6}{3}\,;\frac{3}{6}\right\} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad entra\ x_1 \quad e \quad sai\ x_4$

Base	x1	x2	x3	x4	b
z	-2	-1	0	0	0
x3	3	4	1	0	6
x1	1	1/6	0	1/6	1/2

Base	x1	x2	x3	x4	b
z	0	-2/3	0	1/3	1
x3	0	7/2	1	-1/2	9/2
x1	1	1/6	0	1/6	1/2

PUC-SP

Como ainda temos coeficiente negativo na linha da função objetivo, então é possível melhorar o valor:

Base	x1	x2	x3	x4	b
z	0	-2/3	0	1/3	1
x3	0	7/2	1	-1/2	9/2
x1	1	1/6	0	1/6	1/2

Base	x1	x2	x3	x4	b
z	0	-2/3	0	1/3	1
x3	0	7/2	1	-1/2	9/2
x1	1	1/6	0	1/6	1/2

Escolher: $\min\left\{\frac{9}{2}\ \frac{2}{7} = \frac{9}{7}\ \ ;\ \frac{1}{2}\ \frac{6}{1} = 3\right\} = \frac{9}{7} \quad \Rightarrow \quad entra\ x_2 \quad e \quad sai\ x_3$

Base	x1	x2	x3	x4	b
z	0	-2/3	0	1/3	1
x2	0	7/2	1	-1/2	9/2
x1	1	1/6	0	1/6	1/2

Base	x1	x2	x3	x4	b
z	0	-2/3	0	1/3	1
x2	0	1	2/7	-1/7	9/7
x1	1	1/6	0	1/6	1/2

Base	x1	x2	x3	x4	b
z	0	0	4/21	5/21	13/7
x2	0	1	2/7	-1/7	9/7
x1	1	0	-1/21	4/21	2/7

Como não há valores negativos na linha da função objetivo, atingimos o ótimo, ou seja:

Solução ótima: $\left(\frac{2}{7}, \frac{9}{7}, 0, 0\right)$

Valor ótimo: $z = \frac{13}{7}$

Exemplo 3: Problema de minimização:

Min $z = x_1 - 2x_2$

S.a.

$$2x_1 + x_2 \leq 40$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Base	x1	x2	x3	x4	b
-z	1	-2	0	0	0
x3	2	1	1	0	40
x4	1	3	0	1	60

Base	x1	x2	x3	x4	b
-z	5/3	0	0	2/3	40
X1	5/3	0	1	-1/3	20
x2	1/3	1	0	1/3	20

Solução ótima: $(0\ ,\ 20)$ $\Rightarrow$ Valor ótimo: $z = 40$

Exemplo 4: Problema com solução única:

Max $z = x_1 + 2x_2$

$$
\text{S.a.} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 40 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}
$$

Base	x1	x2	x3	x4	b
z	-1	-2	0	0	0
x3	2	1	1	0	40
x2	1	3	0	1	60

Base	x1	x2	x3	x4	b
z	-1/3	0	0	2/3	40
x1	5/3	0	1	-1/3	20
x2	1/3	1	0	1/3	20

Base	x1	x2	x3	x4	b
z	0	0	1/5	3/5	44
x3	1	0	3/5	-1/5	12
x4	0	1	-1/5	2/5	16

Solução ótima: $(x_1, x_2) = (12\ , 16)$

Valor ótimo: $z = 44$