# Otimização e Simulação

# Modelagem

Prof. Dr. Daniel Rodrigues da Silva

# Modelagem em PL

PUC-SP

**Formulação de modelos:** Para a formulação do modelo matemático, três características devem ser observadas:

1º - Identificar as variáveis de decisão

2º - Identificar a função objetivo

3º - Identificar o conjunto de restrições.

**Exemplo 1: MARCENARIA**

Uma marcenaria produz dois produtos: mesa e armário. Para produzir uma mesa são gastos 2 $m^2$ de madeira e 2 horas de mão de obra e para produzir um armário são gastos 3 $m^2$ de madeira e 1 hora de mão-de-obra. Sabendo que a disponibilidade de madeira é de 12 $m^2$ e a disponibilidade de mão de obra é de 8h, determinar quanto deve ser produzido de cada um dos produtos para maximizar a margem de contribuição total (lucro) da empresa, sabendo que cada mesa vendida a margem é de R$ 4,00 e que cada armário vendido fornece uma margem de R$ 1,00.

Resolução: Modelagem matemática do problema:

**Variáveis de decisão:**

- Quantidade de mesas a serem produzidas: $x_1$
- Quantidade de armários a serem produzidos: $x_2$

**Função Objetivo:**

- Cada mesa dá um lucro unitário de 4 reais e cada armário dá um lucro de 1 real. Logo o lucro total obtido em reais, será:

$$\boldsymbol{z = f(x_1 \,, x_2) = 4x_1 + 1x_2}$$

- Nesse caso, queremos maximizar a função objetivo, pois é o lucro total.

**Restrições do problema:**

Cada mesa produzida, utiliza 2 $m^2$ de madeira e cada armário produzido utiliza 3 $m^2$ de madeira. Logo, a quantidade total de madeira que será utilizada, é dada por:

$$2x_1 + 3x_2$$

Semelhantemente, cada mesa produzida utiliza 2 horas de mão de obra e cada armário produzido utiliza 1 hora de mão de obra. Logo, a quantidade total de mão de obra utilizada, será dada por:

$$\mathbf{2x_1 + 1x_2}$$

**Mas sabemos pelo enunciado que o fabricante pode usar, no máximo, 12 $m^2$ de madeira e 8 horas de mão de obra. Logo temos as seguintes restrições:**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq \mathbf{12} \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 8 \end{cases}$$

Ainda temos as restrições de não negatividade, ou seja, cada variável $x_1$ $e$ $x_2$ precisam ser maiores ou iguais a zero:

$$x_1 \geq 0 \;\; e \;\; x_2 \geq 0$$

## Exemplo 1:

O Problema Modelado Matematicamente, fica:

$$Max.: \; z = 4x_1 + x_2$$

$$S.a. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \; e \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

## Ex. 2: FÁBRICA DE SAPATOS E BOTINAS

Uma fábrica produz sapatos e botinas, através da tabela abaixo. Formule um modelo que maximize o lucro da fábrica.

| | Produtos | | |
|---|---|---|---|
| **Matéria Prima** | **Sapatos** | **Botinas** | **Disponibilidade** |
| **Couro** | 2 | 1 | 8 |
| **Borracha** | 1 | 2 | 7 |
| **Cola** | 0 | 1 | 3 |
| **Lucro/Unidade** | R$ 1,00 | R$ 1,00 | |

# Exemplo 2: FÁBRICA DE SAPATOS E BOTINAS

***Variáveis***:

$x_1 = Sapatos \quad e \quad x_2 = Botinas$

***Função Objetivo***: $z = x_1 + x_2$

***Restrições***:

$2x_1 + x_2 \leq 8$

$x_1 + 2x_2 \leq 7$

$+ x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0 \;\; e \;\; x_2 \geq$

**EXEMPLO 3: Lucro de Vendas**

Um fabricante de bombons tem estocado bombons de chocolate, sendo 130 kg com recheio de cerejas e 170 kg com recheio de menta. Ele decide vender o estoque na forma de dois pacotes sortidos diferentes. Um pacote contém uma mistura com metade do peso em bombons de cereja e metade em menta e vende por R$ 20,00 por kg. O outro pacote contém uma mistura de um terço de bombons de cereja e dois terços de menta e vende por R$ 12,50 por kg. O vendedor deveria preparar quantos quilos de cada mistura a fim de maximizar o seu lucro de vendas?

Resolução: Vamos chamar de A a mistura com metade cereja e metade menta e a quantidade de quilos que será preparada dessa mistura, será $x_1$

Vamos chamar de B a mistura com 1 terço de cereja e 2 terços de menta e a quantidade de quilos que será preparada com essa mistura, será $x_2$. Assim teremos:

**Variáveis de decisão:**

$x_1$ é a quantidade de quilos preparada da mistura A

$x_2$ é a quantidade de quilos preparada da mistura B

**Função Objetivo**:

Mistura A é vendida por 20 reais e a mistura B, por 12,50. Então, teremos:

$$Z = 20x_1 + 12{,}5x_2$$

E essa função deverá ser maximizada.

**Restrições**: Cada quilo da mistura A tem meio quilo de bombom de cereja e cada quilo da mistura B tem 1 terço de bombom de cereja. Logo, temos o total de bombons de cereja será:

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3}$$

Cada quilo da mistura A tem meio quilo de bombom de menta e cada quilo da mistura B tem 2 terços de bombom de menta. Logo, temos o total de bombons de menta será:

$$\frac{x_1}{2} + \frac{2x_2}{3}$$

Mas sabemos que o fabricante pode usar, no máximo, quilos de bombons de cereja e 170 quilos de bombons de menta. Portanto, temos as seguintes restrições:

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} \leq 130$$

$$\frac{x_1}{2} + \frac{2x_2}{3} \leq 170$$

E além disso, temos: $x_1 \geq 0 \;\; e \;\; x_2 \geq 0$

Problema modelado matematicamente:

$$\text{Max. } Z = 20x_1 + 12{,}5x_2$$

$$S.a.\ \begin{cases} \dfrac{x_1}{2} + \dfrac{x_2}{3} \leq 130 \\ \dfrac{x_1}{2} + \dfrac{2x_2}{3} \leq 170 \\ x_1 \geq 0 \ \ e \ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

## EXEMPLO 4: Maximizando o Rendimento Anual

Uma mulher tem R$ 10000 para investir e seu corretor sugere investir em dois títulos, A e B. O título A é bastante arriscado, com lucro anual de 10% e o título B é bastante seguro, com um lucro anual de 7%. Depois de algumas considerações, resolve investir no máximo R$ 6000 no título A, no mínimo, R$ 2000 no título B e investir pelo menos o valor investido no título B, no título A. Como ela deverá investir seu R 10000 a fim de maximizar o rendimento anual?

**Solução:**

**Variáveis de decisão:**

$x_1$: a quantia (em R$) investida no título A

$x_2$: a quantia (em R$) investida no título B.

**Função objetivo:** Como cada real investido no título A rende R$ 0,10 por ano e cada real investido no B rende R$ 0,07 por ano, o total do rendimento anual L (em reais) de ambos os títulos é dado por:

$$L = 0{,}10x_1 + 0{,}07x_2$$

E a função objetivo deve ser maximizada

**Restrições**

As restrições impostos podem ser formulados como segue:

Investir no máximo R$ 10.000: $x_1 + x_2 \leq 10000$

Investir no máximo R$ 6000 em A: $x_1 \leq 6000$

Investir no mínimo R$ 2000 em B: $x_2 \geq 2000$

Investir pelo menos o valor investido B, no A: $x_1 \geq x_2$

Além disso, estamos supondo implicitamente que:

$x_1 \geq 0 \;\; e \;\; x_2 \geq 0$

## Modelo Matemático

**Variáveis de decisão:**

$x_1$: a quantia (em R$) investida no título A

$x_2$: a quantia (em R$) investida no título B.

**Função objetivo:** $L = 0{,}10x_1 + 0{,}07x_2$

$$\mathbf{S.a.}\quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10000 \\ x_1 \leq 6000 \\ x_2 \geq 2000 \\ x_1 \geq x_2 \\ x_1 \geq \mathbf{0} \\ x_2 \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

**EXEMPLO 11:** Um fazendeiro está estudando a divisão de sua propriedade nas seguintes atividades produtivas: ▪ A (arrendamento destinar certa quantidade de alqueires para a plantação de cana-de-açúcar, a uma usina local, que se encarrega da atividade e paga pelo aluguel da terra 300 u.m. por alqueire por ano.

▪ P (pecuária): criação de gado de corte. A recuperação das pastagens requer adubação (100 kg/Alq) e irrigação (100.000 l de água/Alq) por ano. O lucro estimado nessa atividade é de 400 u.m. por alqueire por ano.

▪ S (plantio de soja): essa cultura requer 200 kg por alqueire de adubos e 200.000 l de água /Alq para irrigação por ano. O lucro estimado nessa atividade é de 500 u.m./alqueire no ano.

Disponibilidade de recursos por ano:

12.750.000 l de água

14.000 kg de adubo

100 alqueires de terra

Quantos alqueires deverá destinar a cada atividade para proporcionar o melhor retorno?

Solução: Max L = $300x_1 + 400x_2 + 500x_3$

$$\text{s.a.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \\ 100x_2 + 200x_3 \leq 14000 \\ 100000x_2 + 200000x_3 \leq 12750000 \\ x_1\,;\, x_2;\, x_3 \geq 0 \end{cases}$$