Problema de Programação Linear

Objetivo: Maximizar a função objetivo.

Função objetivo:

$$\text{Max } Z = x_1 + 5x_2$$

Restrições:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Passo 1: Converter as Desigualdades em Igualdades para Traçar as Retas

1. $ x_1 + x_2 = 5 $
   - Se $ x_1 = 0 $, então $ x_2 = 5 $
   - Se $ x_2 = 0 $, então $ x_1 = 5 $
2. $ x_1 + 2x_2 = 6 $
   - Se $ x_1 = 0 $, então $ 2x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 3 $
   - Se $ x_2 = 0 $, então $ x_1 = 6 $
3. $ 2x_1 + x_2 = 7 $
   - Se $ x_1 = 0 $, então $ x_2 = 7 $
   - Se $ x_2 = 0 $, então $ 2x_1 = 7 \Rightarrow x_1 = 3,5 $

Passo 2: Desenhar as Retas no Plano Cartesiano

1. Trace as retas no plano $ (x_1, x_2) $.

2. Identifique a região viável, que é a área delimitada pelas retas e pelos eixos $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$.

Passo 3: Determinar os Vértices da Região Viável

Os vértices são os pontos de interseção das retas. Vamos calcular:

1. Interseção entre $x_1 + x_2 = 5$ e $x_1 + 2x_2 = 6$:
    - Subtraindo a primeira equação da segunda:
      $(x_1 + 2x_2) - (x_1 + x_2) = 6 - 5$
      $x_2 = 1$
    - Substituindo $x_2 = 1$ na primeira equação:
      $x_1 + 1 = 5 \Rightarrow x_1 = 4$
    - Ponto: $(4, 1)$
2. Interseção entre $x_1 + x_2 = 5$ e $2x_1 + x_2 = 7$:
    - Subtraindo a primeira equação da segunda:
      $(2x_1 + x_2) - (x_1 + x_2) = 7 - 5$
      $x_1 = 2$
    - Substituindo $x_1 = 2$ na primeira equação:
      $2 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 3$
    - Ponto: $(2, 3)$
3. Interseção entre $x_1 + 2x_2 = 6$ e $2x_1 + x_2 = 7$:
    - Multiplicando a primeira equação por 2:
      $2x_1 + 4x_2 = 12$
    - Subtraindo a segunda equação da resultante:
      $(2x_1 + 4x_2) - (2x_1 + x_2) = 12 - 7$
      $3x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{3}$
    - Substituindo $x_2 = \frac{5}{3}$ na primeira equação:
      $x_1 + 2\left(\frac{5}{3}\right) = 6$
      $x_1 = 6 - \frac{10}{3} = \frac{18 - 10}{3} = \frac{8}{3}$

    - Ponto: $\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right) \approx (2.67, 1.67)$

4. Interseção com os eixos:
    - $(0, 0)$
    - $(3.5, 0)$
    - $(0, 3)$

Passo 4: Avaliar a Função Objetivo nos Vértices

1. $(0, 0) \Rightarrow Z = 0 + 5(0) = 0$
2. $(3.5, 0) \Rightarrow Z = 3.5 + 5(0) = 3.5$
3. $(0, 3) \Rightarrow Z = 0 + 5(3) = 15$
4. $(4, 1) \Rightarrow Z = 4 + 5(1) = 9$
5. $(2, 3) \Rightarrow Z = 2 + 5(3) = 17$
6. $\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right) \Rightarrow Z = \frac{8}{3} + 5\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{8}{3} + \frac{25}{3} = \frac{33}{3} = 11$

Passo 5: Identificar a Solução Ótima

O maior valor de Z é 17, que ocorre no ponto $(2, 3)$.

Resposta Final

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ Z_{\text{máximo}} = 17$$

Portanto, a solução ótima é $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, e o valor máximo da função objetivo é 17.