# Simplex Duas Fases

Para que o método Simplex seja iniciado, é necessário que tenhamos uma solução básica factível (SBF) inicial para que o método comece a busca por uma solução ótima.

Nos exemplos que resolvemos até agora com o método Simplex, as restrições eram sempre do tipo $\leq$ e os termos da direita positivos.

O acréscimo das variáveis de folga fornece neste caso uma solução básica factível (SBF) inicial.

Temos, agora o seguinte problema:

1 – Uma ou mais restrições são do tipo $\geq$ : a variável de folga é subtraída e seu valor é negativo, quando zeramos as variáveis de decisão.

2 - Uma ou mais restrições são tipo $=$ : Neste caso, não recebe a variável de folga e acrescentamos em cada uma das restrições do tipo $\geq$ e $=$ variáveis artificiais $A_i$ formando assim, um novo modelo.

Assim, a solução básica inicial do novo modelo é formada pelas variáveis de folga das restrições do tipo $\leq$ e pelas variáveis artificiais $A_i$.

O PL original deve estar na **forma padrão** e Introduziremos uma variável artificial em cada uma das restrições que não possui variável de folga ($\geq \;\; ou \;\; =$) .

A **fase 1** tem como objetivo encontrar uma SBF inicial para o problema original. Para isso, cria-se uma função objetivo de minimização que representa a soma de todas as variáveis artificiais. A solução ótima obtida nessa fase, por meio da aplicação do método Simplex para o problema original adaptado, é utilizada como SBF inicial para a fase 2.

O objetivo da **fase 2** é encontrar uma solução ótima para o problema original, a partir da solução ótima obtida na fase 1. Como as variáveis artificiais não fazem parte do problema original e tinham como objetivo apenas gerar uma SBF inicial para essa fase, elas devem ser eliminadas da fase 2. A função objetivo, nessa fase, é equivalente à função objetivo original.

PUC-SP

**Fase 1:** Cria-se uma nova função objetivo artificial $w$ (sempre de minimização) que corresponde à soma de $k$ variáveis artificiais, $a_{\mathrm{i}}$ , $\mathrm{i} = 1 , 2 , \cdots , k$ :

$$\text{Min } w = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

sujeito às restrições definidas no PL original.

Como as variáveis artificiais serão as variáveis básicas iniciais, elas devem ser eliminadas da linha 0 (função objetivo) na forma tabular inicial. Para que os coeficientes das variáveis artificiais sejam nulos na linha 0, deve-se somar (problemas de minimização) ou subtrair (problemas de maximização) cada uma das equações *i* em que foi introduzida uma variável artificial *ai* à equação 0 atual.
A partir daí, aplica-se o método Simplex para o problema original.

Se pelo menos uma das variáveis artificiais $a_i$ assume valor positivo (nesse caso, $w > 0$) na última iteração dessa fase, então teremos uma **solução infactível** para o problema original (pelo menos uma das restrições não é respeitada). Quando isso ocorrer, o algoritmo finaliza aqui. Esse caso especial ocorre quando não existe solução ótima.

Exemplo 1: Resolva o PL abaixo usando o método das duas fases:

$$Max\ Z = 10x_1 + 6x_2$$

$$s.a.\ \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \geq 24 \\ x_1 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 = 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Aqui, teremos uma variável de excesso, $x_3$, uma de folga, $x_4$, e duas artificiais, $a_1$ e $a_2$.

$$\boldsymbol{Max\ Z = 10x_1 + 6x_2}$$

$$\textbf{s. a.} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + a_1 = 24 \\ x_1 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + a_2 = 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Agora, cria-se uma função objetivo $w$, que é a soma das variáveis artificiais $a_1 \ e \ a_2$, sujeita às mesmas restrições do problema original:

$$\boldsymbol{Mim \ \ w = a_1 + a_2}$$

$$\textbf{s. a.} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + a_1 = 24 \\ x_1 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + a_2 = 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

PUC-SP

Os coeficientes das variáveis artificiais devem ser nulos na linha 0, já que as mesmas serão as variáveis básicas iniciais. Para isso, deve-se somar (problema de minimização) as equações 1 e 3 em que foram introduzidas as variáveis artificiais $a_1$ $e$ $a_2$ à equação 0 atual:

Equação 0: $w - a_1 - a_1 = 0$

Equação 1: $\mathbf{4x_1 + 2x_2 - x_3 + a_1 = 24}$

Equação 2: $\mathbf{x_1 + 2x_2 + a_2 = 12}$

---

Soma (nova equação 0): $w + 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 0a_1 + 0a_2 = 36$

PUC-SP

A solução inicial: $\{x_1, x_2, x_3\ , x_4, a_1, a_2\} = \{0{,}0{,}00{,}8{,}24{,}12\}$ não é ótima, já que os coeficientes das variáveis não básicas $x_1\ \ e\ \ x_2$ na equação 0 são positivos.

Entra

| Variável básica | Eq. | Coeficientes | | | | | | | Constante | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $w$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $a_1$ | $a_2$ | | |
| $w$ | 0 | 1 | 5 | 4 | –1 | 0 | 0 | 0 | 36 | |
| $a_1$ | 1 | 0 | 4 | 2 | –1 | 0 | 1 | 0 | 24 | 6 Sai |
| $x_4$ | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | 8 |
| $a_2$ | 3 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 12 | 12 |

| Variável básica | Eq. | Coeficientes | | | | | | | Constante |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $w$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $a_1$ | $a_2$ | |
| $w$ | 0 | 1 | 0 | 3/2 | 1/4 | 0 | –5/4 | 0 | 6 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 1/2 | –1/4 | 0 | 1/4 | 0 | 6 |
| $x_4$ | 2 | 0 | 0 | –1/2 | 1/4 | 1 | –1/4 | 0 | 2 |
| $a_2$ | 3 | 0 | 0 | 3/2 | 1/4 | 0 | –1/4 | 1 | 6 |

A nova solução é: $\{x_1, x_2, x_3\ , x_4, a_1, a_2\} = \{6\ , 0\ , 0\ , 2\ , 0\ , 6\}$ com $z = 6$. A solução básica obtida não é ótima, pois os coeficientes das variáveis não básicas $x_2$ e $x_3$ na equação 0 são positivos

Entra ($x_2$)

| Variável básica | Eq. | Coeficientes | | | | | | | Cons- tante | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $w$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $a_1$ | $a_2$ | | |
| $w$ | 0 | 1 | 0 | 3/2 | 1/4 | 0 | –5/4 | 0 | 6 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 1/2 | –1/4 | 0 | 1/4 | 0 | 6 | 12 |
| $x_4$ | 2 | 0 | 0 | –1/2 | 1/4 | 1 | –1/4 | 0 | 2 | |
| $a_2$ | 3 | 0 | 0 | 3/2 | 1/4 | 0 | –1/4 | 1 | 6 | 4 → Sai |

| Variável básica | Nº da equação | Coeficientes | | | | | | | Cons- tante |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $w$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $a_1$ | $a_2$ | |
| $w$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | –1 | –1 | 0 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | –1/3 | 0 | 1/3 | –1/3 | 4 |
| $x_4$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 1/3 | 1 | –1/3 | 1/3 | 4 |
| $x_2$ | 3 | 0 | 0 | 1 | 1/6 | 0 | –1/6 | 2/3 | 4 |

De acordo com a Tabela, podemos verificar que a solução básica $x_1 = 4$ , $x_2 = 4$ $e$ $x_4 = 4$ com $w = 0$ é ótima, pois os coeficientes de todas as variáveis não básicas $(x_3, a_1, a_2)$ na equação 0 são não positivos. Portanto, a solução ótima factível é atingida quando todas as variáveis artificiais são não básicas $(a_1 = 0$ , $a_2 = 0)$ $e$ $w = 0$.

Fase 2

Esta fase tem como objetivo determinar a solução ótima do problema original. A fase 2 combina a função objetivo do problema original com as restrições da forma tabular ótima obtida na fase 1. Porém, algumas alterações são necessárias na nova forma tabular antes da aplicação do método Simplex.

Primeiramente, eliminam-se as colunas correspondentes às variáveis artificiais $a_1$ $e$ $a_2$. Como a solução ótima da fase 1 $\{x_1, x_2, x_3\ , x_4, a_1, a_2\} = \{4\ ,4\ ,0\ ,4\ ,0\ ,0\}$ é utilizada como SBF inicial dessa fase, as variáveis básicas $x_1$ $e$ $x_2$ devem ser eliminadas de $z - 10x_1 - 6x_2 = 0$. Para isso, deve-se multiplicar a linha 1 da Tabela ótima (linha da variável básica $x_1$ ) por 10, multiplicar a linha 3 (linha da variável básica $x_2$) por 6 e somá-las à função objetivo do problema original de $(z - 10x_1 - 6x_2 = 0)$:

**Equação 0:** $\mathbf{z - 10x_1 - 6x_2 = 0}$

**Equação 1:** $\mathbf{10x_1 - \frac{10x_3}{3} = 40}$

**Equação 2:** $\mathbf{6x_2 + x_3 = 24}$

---

**Soma (nova equação 0):** $\mathbf{z - \frac{7x_3}{10} = 64}$

A nova forma tabular inicial da fase 2 está abaixo:

| Base | Coeficientes | | | | Constante |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
| z | 0 | 0 | $-\frac{7}{3}$ | 0 | 64 |
| $x_1$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | 4 |
| $x_4$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 1 | 4 |
| $x_2$ | 0 | 1 | $\frac{1}{6}$ | 0 | 4 |

A partir daí, o método Simplex é aplicado para a determinação da solução ótima do problema original.

De acordo com tabela acima, verifica-se que essa solução não é ótima, pois ainda há coeficiente negativo na linha 0.

| Base | Coeficientes | | | | b |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
| z | 0 | 0 | $-\frac{7}{3}$ | 0 | 64 |
| $x_1$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | 4 |
| $x_4$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 1 | 4 |
| $x_2$ | 0 | 1 | $\frac{1}{6}$ | 0 | 4 |

| Base | Coeficientes | | | | b |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
| z | 0 | 0 | $-\frac{7}{3}$ | 0 | 64 |
| $x_1$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | 4 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 1 | 3 | 12 |
| $x_2$ | 0 | 1 | $\frac{1}{6}$ | 0 | 4 |

PUC-SP

| Base | Coeficientes | | | | Constante |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
| z | 0 | 0 | 0 | 7 | 92 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 8 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 3 | 12 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 2 |

Como não há mais valores negativos na linha objetivo, atingimos o ótimo:

$$\boldsymbol{x_1 = 8 \quad ; \quad x_2 = 2 \quad e \quad z = 92}$$

Exemplo 2: Resolva o PL abaixo usando o método das duas fases:

$$Max\ Z = 6x_1 - x_2$$

$$\text{s. a.} \begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 13 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Max\ Z = 6x_1 - x_2$$

$$\text{s. a.} \begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 13 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Aqui, teremos uma variável de folga, $x_3$, uma de excesso, $x_4$, e duas artificiais, $a_1$ e $a_2$.

$$Max\ Z = 6x_1 - x_2$$

$$\text{s. a.} \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 + a_1 = 13 \\ -x_1 + x_2 + a_2 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}$$

Os coeficientes das variáveis artificiais devem ser nulos na linha 0, já que as mesmas serão as variáveis básicas iniciais. Para isso, deve-se somar (problema de minimização) as equações 1 e 2 nas quais foram introduzidas as variáveis artificiais $a_1$ $e$ $a_2$ à equação 0 atual:

Equação 0: $\boldsymbol{w - a_1 - a_1 = 0}$
Equação 1: $\boldsymbol{2x_1 + 3x_2 - x_4 + a_1 = 13}$
Equação 2: $\boldsymbol{-x_1 + x_2 + a_2 = 1}$

---

Nova equação 0: $w = x_1 + 4x_2 - x_4 + 0a_1 + 0a_2 = 14$

A função objetivo artificial fica assim:

$$w = x_1 + 4x_2 - x_4 + 0a_1 + 0a_2 = 14$$

SBF:

$x_1 = x_2 = 0 \quad ;$

$x_3 = 21 \quad ;$

$x_4 = 0 \quad ;$

$a_1 = 13 \quad e$

$a_2 = 1$

Resposta: $x_1 = 4 \;;\; x_2 = 5 \; e \; z = 19$

Exemplo 3: Resolver o problema de programação linear abaixo usando o método das duas fases:

$$\boldsymbol{Max\ L = 2x_1 + x_2}$$

$$\mathbf{s.a.}\quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resposta: $\boldsymbol{x_1 = 2\ ;\ x_2 = 0\ \ e\ \ Z = 4}$

Exemplo 4: Resolver o problema de programação linear abaixo usando o método das duas fases:

$$Max\ L = 2x_1 + 3x_2$$

$$\mathbf{s.a.}\quad \begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \leq 3 \\ x_1 \qquad\ \geq 1 \\ x_1\, , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resposta: $x_1 = 1$ ; $x_2 = 2$ $e$ $Z = 8$

Exemplo 5: Resolver o problema de programação linear abaixo usando o método das duas fases:

$$\boldsymbol{Max\ L = 4x_1 - x_2}$$

$$\textbf{s. a.} \begin{cases} 4x_1 + \ \ x_2 \le 11 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ -x_1 + \ \ x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Resposta: $\boldsymbol{x_1 = 2\ ;\ \ x_2 = 3\ \ e\ \ Z = 5}$