Transporte

Prof. Dr. Daniel Rodrigues da Silva

Problema do transporte

O problema do transporte tem como objetivo determinar as quantidades de produtos a serem transportadas de um conjunto de fornecedores para um conjunto de consumidores, de modo a minimizar os custos totais de transporte

Cada fornecedor fabrica um número fixo de produtos, e cada consumidor tem uma demanda conhecida que será atendida.

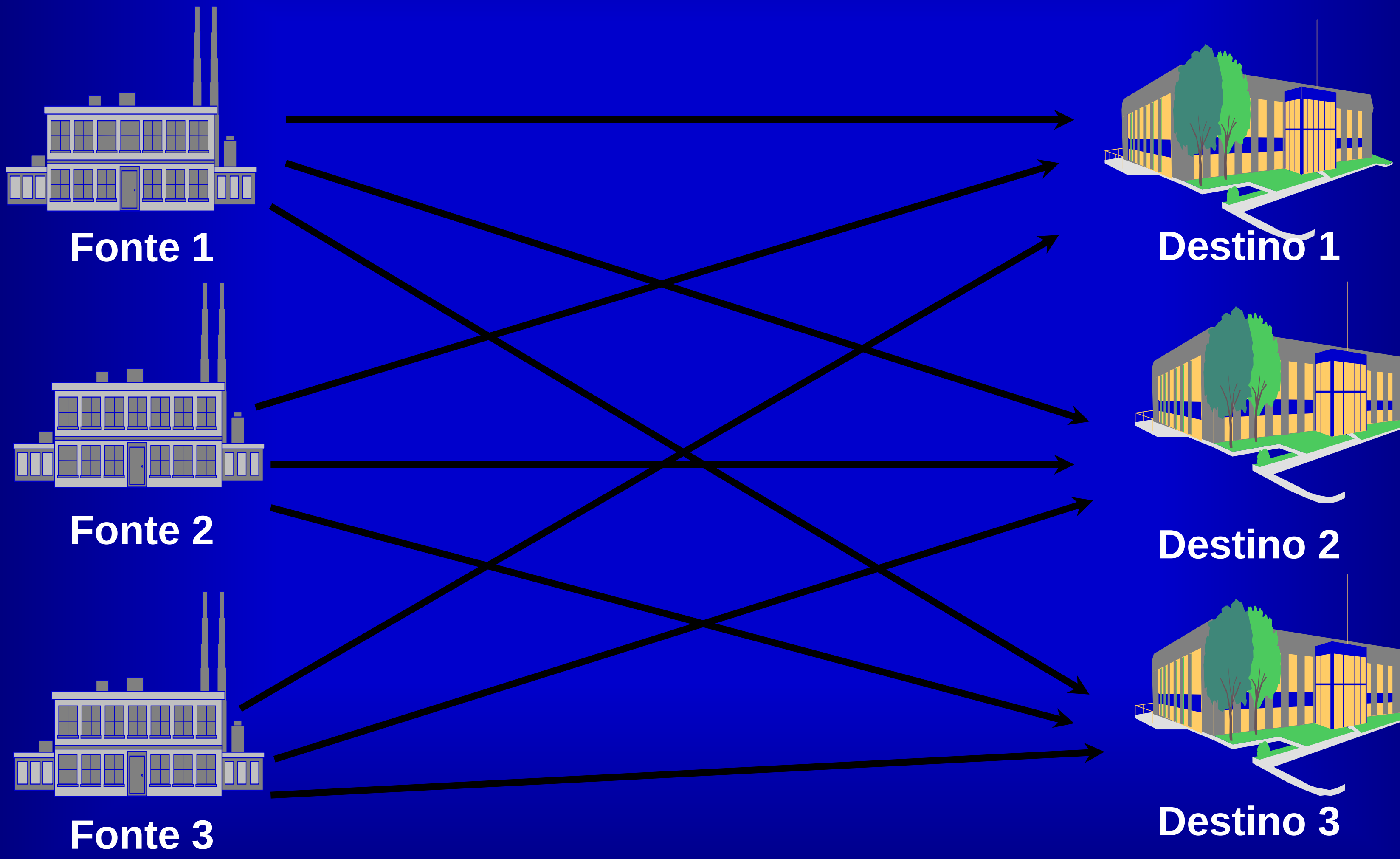
O problema é modelado a partir de dois elos da cadeia de suprimentos, ou seja, inicialmente, não serão consideradas facilidades intermediárias, tais como: centros de distribuição, terminal, porto marítimo ou fábrica.

Problema do transporte

Considere a situação a seguir: precisamos transportar produtos de várias origens distintas onde estão estocados para vários destinos onde eles serão necessários.

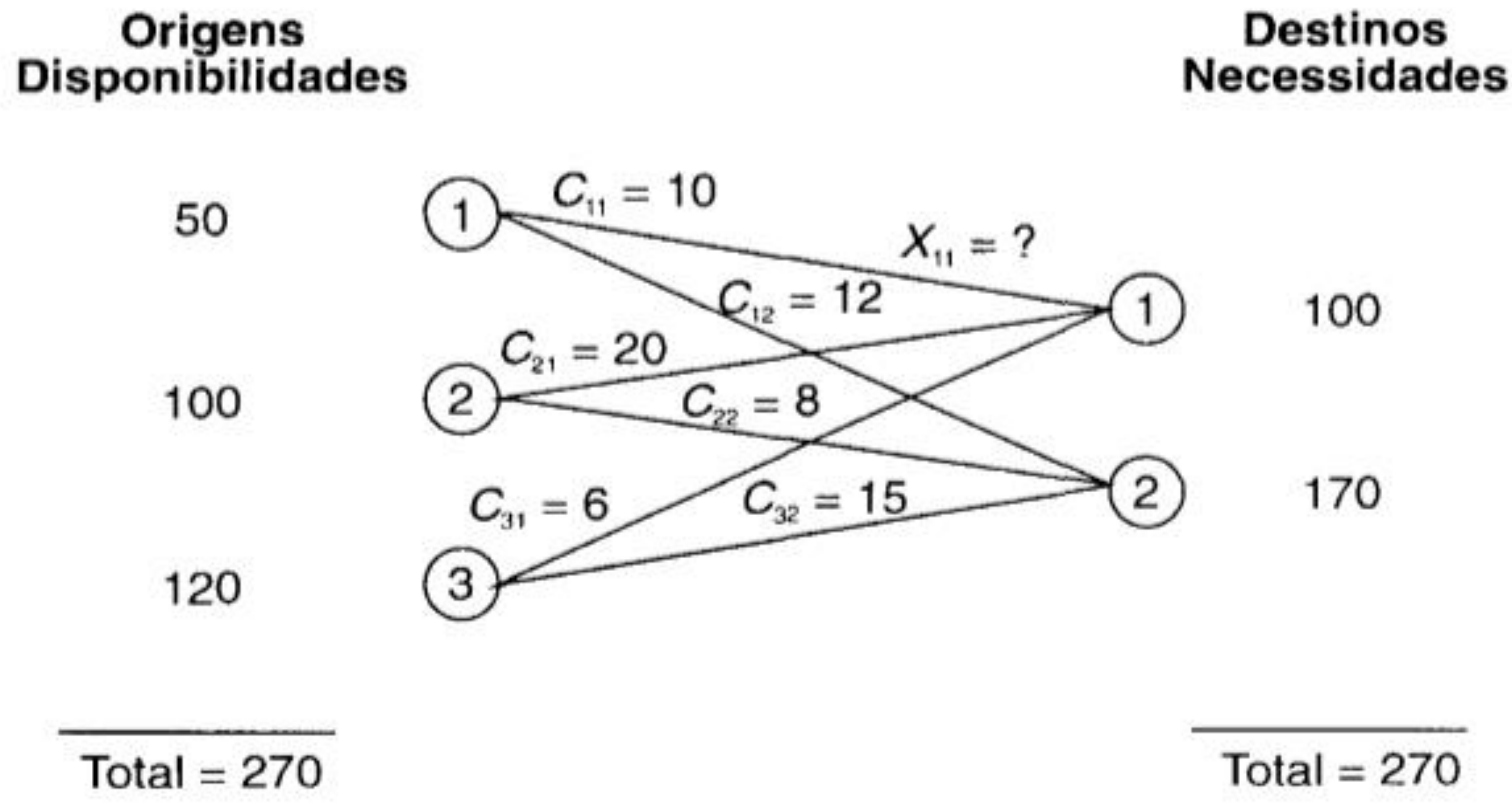
Conhecendo os custos unitários de transporte de cada origem para cada destino (C_{ij} - custo unitário de transporte da origem i para o destino j), devemos decidir quanto transportar de cada origem para cada destino (X_{ij} - quantidade a ser transportada da origem i para o destino j) a fim de minimizar os custos do transportes

EXEMPLO DE REDE DE TRANSPORTE



Exemplo Prático: Nosso objetivo é efetuar a transferência dos produtos com o menor custo possível.

A princípio, vamos supor que a quantidade disponível nas origens seja exatamente igual ao total das necessidades nos destinos.



Essa situação pode ser representada de maneira simples em uma tabela:

Destinos

Origens

	D1	D2	Disponibilidades
O1	**10**	**12**	**50**
O2	**20**	**8**	**100**
O3	**6**	**15**	**120**
Necessidades	**100**	**170**	**270** / **270**

Onde se lê:

as disponibilidades nas origens;

as necessidades nos destinos;

os custos unitários de transporte das origens para cada destino.

O MODELO LINEAR DO TRANSPORTE

Variáveis de decisão: X_{ij} - Quantidade a ser transportada da origem *i* para o destino *j*.

Objetivo: minimizar o custo do transporte.

Min. $C = 10X_{11} + 12X_{12} + 20X_{21} + 8X_{22} + 6X_{31} + 15X_{32}$

Onde:
$10X_{11}$ = custo unitário de transporte da origem 1 para o destino 1 **vezes** quantidade a ser transportada da origem 1 para o destino 1

Restrições:

As quantidades retiradas das origens devem ser a disponibilidade em cada uma:

Origem 1 : retiradas: $X_{11} + X_{12} = 50$: Disponibilidade O_1

Origem 2 : retiradas: $X_{21} + X_{22} = 100$: Disponibilidade O_2

Origem 3 : retiradas: $X_{31} + X_{32} = 120$: Disponibilidade O_3

As quantidades transportadas para cada destino devem ser a necessidade em cada um deles:

Destino1 : Chegadas: $X_{11} + X_{21} + X_{31} = 100 \ : \ Necessidade\ D_1$

Destino2 : Chegadas: $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 170 \ : \ Necessidade\ D_2$

Então, temos o seguinte problema de PL:

Min. $C = 10X_{11} + 12X_{12} + 20X_{21} + 8X_{22} + 6X_{31} + 15X_{32}$

S.a:
$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} = 50 \\ X_{21} + X_{22} = 100 \\ X_{31} + X_{32} = 120 \\ X_{11} + X_{21} + X_{31} = 100 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = 170 \\ X_{ij} \geq 0 \quad para\; i = 1,2,3 \quad e \quad j = 1,2 \end{cases}$$

O CASO DE SISTEMAS NÃO EQUILIBRADOS

O modelo descrito anteriormente pode representar também sistemas de transporte que não obedeçam à condição de equilíbrio entre oferta (disponibilidade nas origens) e demanda (necessidade de destinos).

O enquadramento no modelo se faz com a criação de origens ou destinos auxiliares para receber a diferença entre oferta e demanda.

Os custos unitários para origens ou destinos auxiliares é **zero**. Na solução do modelo, as quantidades que eventualmente sejam transportadas de origens auxiliares ficam faltando nos destinos. As quantidades que são transportadas para destinos auxiliares, na verdade ficam depositadas nas origens.

Exemplo: O modelo representado no quadro está desequilibrado

	D_1	D_2	D_2	
O_1	10	12	9	20
O_2	4	9	8	30
O_3	6	12	10	10
	25	36	5	66 / 60

Criando-se uma origem auxiliar para receber a diferença 66 – 60 = 6, teremos o sistema equilibrado:

	D1	D2	D3	
O1	10	12	9	20
O2	4	9	8	30
O3	6	12	10	10
A	0	0	0	6
	25	36	5	66 / 66

Uma solução possível para o problema é mostrada no quadro, onde o valor das células representa as quantidades transportadas de cada origem para cada destino.

	D1	D2	D3	
O1	20	0	0	20
O2	5	25	0	30
O3	0	10	0	10
A	0	1	5	6
	25	36	5	66 / 66

As quantidades $X_{A2} = 1$ e $X_{A3} = 5$ transportadas a partir da origem auxiliar A, na verdade, ficam faltando nos destinos, isto é, o destino D_2, recebe apenas 35 unidades. O destino D_3 não recebe nenhuma mercadoria.

O Algoritmo dos Transportes

A solução do problema do transporte, como todo problema representado por um modelo de programação linear, pode ser obtida pelo método Simplex. Entretanto, devido às suas características especiais, podemos descrever um método que, embora mantenha fases e critérios do Simplex, tem os cálculos simplificados.

1 ª Parte – Cálculo da solução básica incial

Uma solução básica para o problema de transporte é um conjunto de valores a transportar que obedecem às condições:

- Satisfazem as restrições de origem e destino;

- Contem (n + m – 1) variáveis básicas; e

- Não apresentam circuitos entre as variáveis básicas. Por circuitos devemos entender uma poligonal fechada construída no sentido das linhas ou colunas, ligando variáveis básicas.

20	10	0	30
0	6	0	6
12	9	7	28
32	25	7	

Caso 1. Fornecimento Total Maior do que Demanda Total: A empresa Caramelos & Confetes atua no ramo doceiro desde 1990 e possui três lojas localizadas na Grande São Paulo. Seus principais clientes estão localizados na Capital Paulista, Baixada Santista e Vale do Paraíba, conforme mostra a Figura abaixo. A capacidade de produção das lojas, a demanda dos clientes e os custos por unidade distribuída de cada loja para cada cliente estão ilustrados na Tabela a seguir. A fim de minimizar o custo total de transporte, a empresa quer determinar quanto distribuir de cada loja para os respectivos consumidores, respeitando a capacidade de produção e garantindo que as demandas serão atendidas. Formule o problema de transporte da empresa Caramelos & Confetes.

Dados de transporte da empresa Caramelos & Confetes

		Custo unitário de transporte			
		Consumidor			
		São Paulo	Baixada Santista	Vale do Paraíba	Capacidade
Fornecedor	Loja 1	8	12	10	50
	Loja 2	4	10	6	100
	Loja 3	6	15	12	40
Demanda		60	70	30	

Pode-se facilmente verificar que o problema de transporte da empresa Caramelos & Confetes está desbalanceado, já que a capacidade total de fornecimento (190) é maior que a demanda total consumida (160).

Uma maneira de representar o modelo matemático da empresa Caramelos & Confetes. Nesse modelo, têm-se as seguintes variáveis de decisão, para: $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$.

x_{ij} = quantidade de doces transportados da loja i para o consumidor j.

Assim, tem-se que:
x_{11} = doces transportados da loja 1 para o consumidor de São Paulo (SP).

x_{12} = doces transportados da loja 1 para o consumidor da Baixada Santista (BS).

x_{13} = doces transportados da loja 1 para o consumidor do Vale do Paraíba (VP).

$\vdots$

x_{33} = doces transportados da loja 3 para o consumidor do Vale do Paraíba (VP).

A função objetivo busca minimizar o custo total de transporte:

$$\min z = 8x_{11} + 12x_{12} + 10x_{13} + 4x_{21} + 0x_{22} + 6x_{23} + 6x_{31} + 15x_{32} + 12x_{33}$$

As restrições do modelo estão especificadas a seguir:

1. A capacidade de produção de cada loja deve ser respeitada:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 50$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 100$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 40$$

2. A demanda de cada consumidor deve ser atendida:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 60$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 70$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 30$$

3. As variáveis de decisão do modelo são não negativas:

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3$$

A solução ótima desse modelo, obtida pelo Solver do Excel, é:

$x_{11} = 0\,; x_{12} = 50\,; x_{13} = 0\,; x_{21} = 50\,; x_{22} = 20\,; x_{23} = 30\,,$

$x_{31} = 10\,; x_{32} = 0\,; x_{33} = 0 \;\; e \;\; z = 1240$

Verifica-se, por meio desse resultado, que a loja 3 não utilizou sua capacidade máxima de 40 unidades, mas apenas 10 unidades.

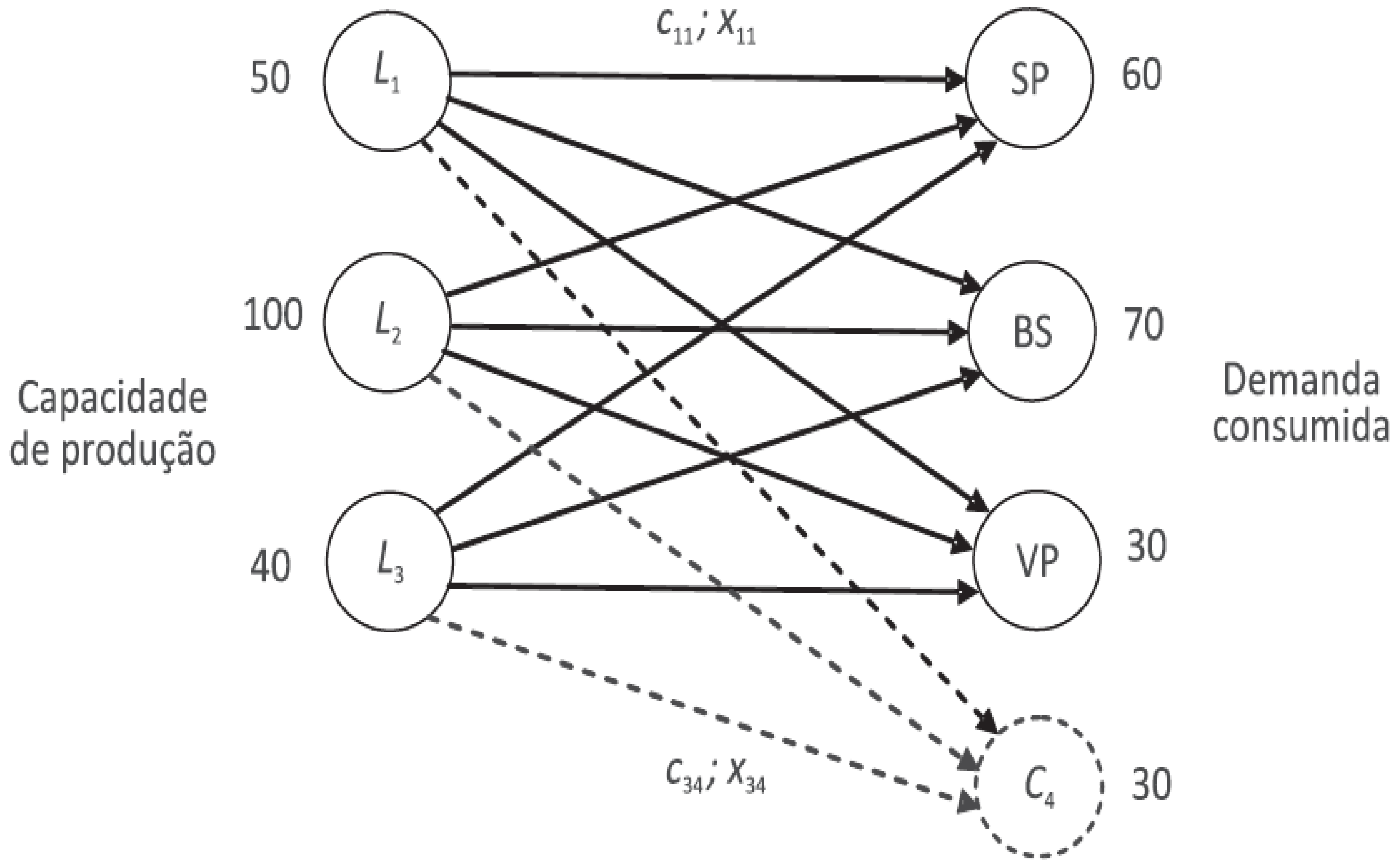
PUC-SP

Solução (b)

Para que o algoritmo de transporte que será apresentado possa ser aplicado, devemos estar diante de um problema de transporte balanceado, de forma que a capacidade total de fornecimento seja igual à demanda total.

Para restaurar o balanceamento do problema da empresa Caramelos & Confetes, deve-se criar um consumidor fantasma (*dummy*) que absorverá o excesso de oferta de 30 unidades.

A modelagem do problema balanceado está ilustrada na Figura abaixo:



c_{11}; X_{11}
50
L_1
SP
60
100
L_2
BS
70
Capacidade de produção
Demanda consumida
40
L_3
VP
30
c_{34}; X_{34}
C_4
30

A formulação matemática do problema da empresa Caramelos & Confetes balanceado é descrita a seguir.

Como foi adicionado um novo consumidor, x_{ij} pode ser reescrita como:

x_{ij} = quantidade de doces transportados da loja i para o consumidor j, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$.

As novas variáveis de decisão são:

x_{14} = doces transportados da loja 1 para o novo consumidor fantasma (*dummy*).

x_{24} = doces transportados da loja 2 para o novo consumidor fantasma (*dummy*).

x_{34} = doces transportados da loja 3 para o novo consumidor fantasma (*dummy*).

Como o custo unitário de transporte de qualquer fornecedor para o novo consumidor é nulo, a função objetivo não se altera e o problema balanceado, fica:

As restrições de capacidade de fornecimento e de demanda consumida são alteradas:

1. Restrições de fornecimento das lojas:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 100$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 40$$

2. Restrições de demanda:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 60$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30$$

3. Restrições de não negatividade:

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$$

Por meio da solução (*a*), já sabemos que a capacidade não utilizada de 30 unidades advém apenas da loja 3. Como o novo consumidor fantasma foi criado para absorver esse excesso de oferta, podemos afirmar que: $x_{34} = 30$

Logo, a solução ótima do modelo balanceado é

$x_{11} = 0\,; x_{12} = 50\,; x_{13} = 0\,; x_{21} = 50\,; x_{22} = 20\,;$

$x_{23} = 30\ \ ; x_{24} = 0\,;\ x_{31} = 10\,; x_{32} = 0\,; x_{33} = 0\ \ ;$

$x_{34} = 30\ \ e\ \ z = 1240$

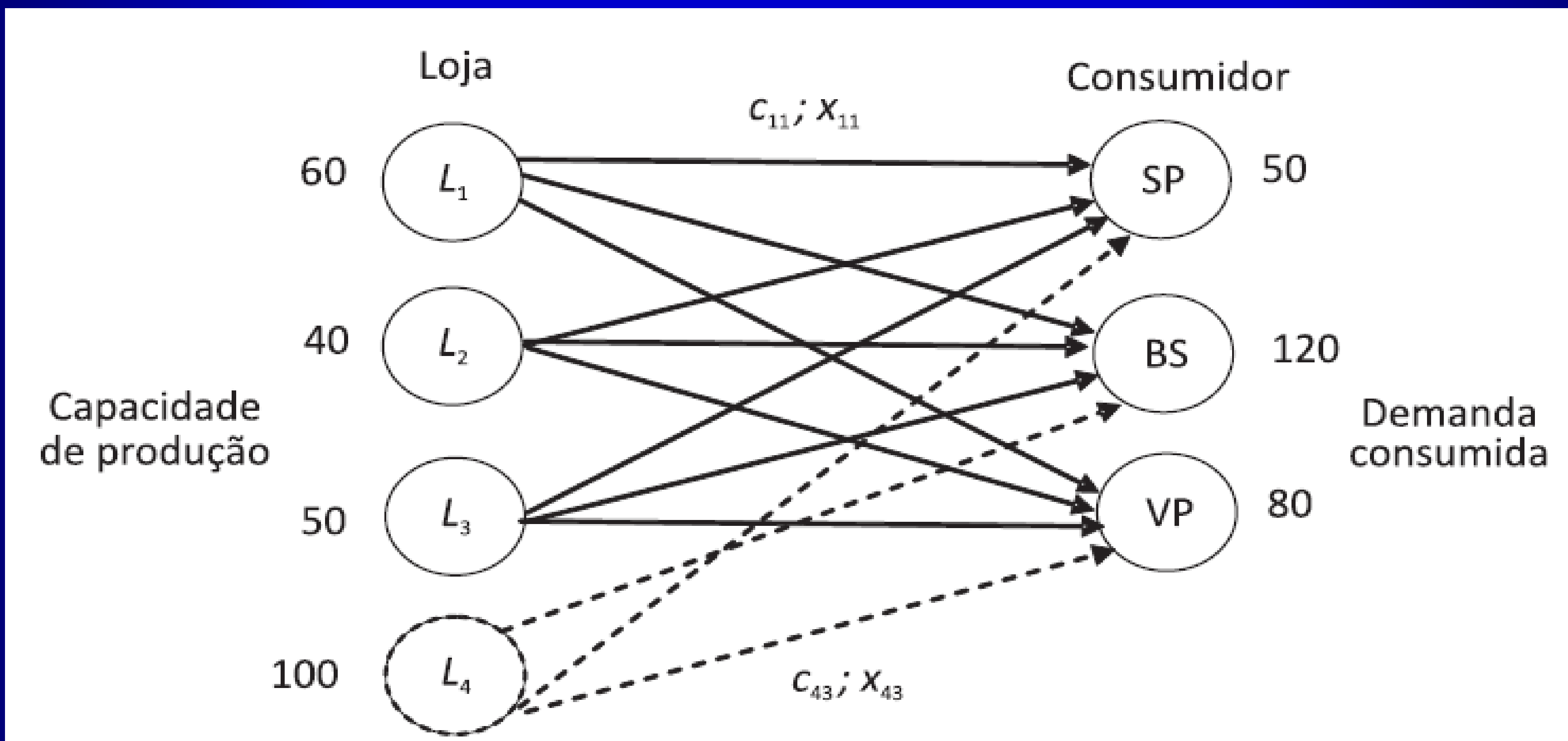
Caso 2. Capacidade Total de Fornecimento é Menor do que Demanda Total Consumida:

Considere um problema de transporte desbalanceado cuja capacidade total de fornecimento seja menor que a demanda total consumida. Para restaurar o balanceamento, deve-se criar um fornecedor fantasma (*dummy*) que atenderá a demanda remanescente. Assim, a quantidade ofertada a partir desse novo fornecedor corresponderá à diferença entre a demanda total consumida e a capacidade total de fornecimento, indicando a demanda não atendida. O custo unitário de transporte do fornecedor fantasma criado para qualquer consumidor será nulo, já que o mesmo não é real. Analogamente ao Caso 1, a equação de balanceamento entre oferta e demanda garante que uma solução básica factível seja encontrada.

Exemplo da empresa Caramelos & Confetes, porém, com capacidades de produção das lojas e demanda dos clientes distintas, conforme mostra a Tabela abaixo. Formule o novo problema de transporte da empresa Caramelos & Confetes.

		Custo unitário de transporte			
		Consumidor			
		São Paulo	Baixada Santista	Vale do Paraíba	Capacidade
	Loja 1	8	12	10	60
Fornecedor	Loja 2	4	10	6	40
	Loja 3	6	15	12	50
Demanda		50	120	80	

Analogamente ao Exemplo anterior, para que o algoritmo de transporte que será apresentado possa ser aplicado, precisamos de um problema de transporte balanceado. Para restaurar o balanceamento, deve-se criar um fornecedor fantasma (*dummy*) que suprirá a demanda não atendida de 100 unidades.



Analogamente ao Exemplo anterior, para que o algoritm transporte que será apresentado possa ser aplicado, precisamos um problema de transporte balanceado. Para restaurar o balanceamento, deve-se criar um fornecedor fantasma (*dummy*) que suprirá a demanda não atendida de 100 unidades.

As novas variáveis de decisão são:

x_{41} = doces transportados da nova loja fantasma (*dummy*) para o consumidor 1

x_{42} = doces transportados da nova loja fantasma (*dummy*) para o consumidor 2

x_{43} = doces transportados da nova loja fantasma (*dummy*) para o consumidor 3

$$\min z = 8x_{11} + 12x_{12} + 10x_{13} + 4x_{21} + 0x_{22} + 6x_{23} + 6x_{31} + 15x_{32} + 12x_{33}$$

PUC-SP

1. Restrições de fornecimento das lojas:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 60$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 100$$

2. Restrições de demanda:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 50$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 120$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 80$$

3. Restrições de não negatividade:

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4$$

Como o novo fornecedor fantasma foi criado para atender essa demanda remanescente, podemos afirmar que $x_{42} = 100$.

Logo, a solução ótima do modelo é:

$x_{11} = 0$; $x_{12} = 20$; $x_{11} = 0$; $x_{12} = 20$; $x_{13} = 40$;

$x_{21} = 0$; $x_{22} = 0$; $x_{23} = 40$; $x_{31} = 50$; $x_{32} = 0$;

$x_{33} = 0$;

$x_{41} = 0$; $x_{42} = 100$; $x_{43} = 0$ e

$z = 1180$

O Algoritmo de Transporte: A fim de facilitar a resolução do problema clássico de transporte por meio dos métodos que serão apresentados, o mesmo deve ser representado na forma tabular. A Tabela abaixo apresenta a forma tabular do modelo geral de transporte balanceado.

		Consumidor				
		1	2	...	n	Capacidade
Fornecedor	1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	Cf_1
	2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	Cf_2
	$\vdots$	...	...	...	...	$\vdots$
	m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	Cf_m
Demanda		d_1	d_2	...	d_n	

O algoritmo de transporte segue a mesma lógica do método Simplex, com algumas simplificações em função das peculiaridades do problema de transporte.

– **1ª** parte: cálculo da solução básica inicial:

Veremos dois métodos: Métodos do Canto Noroeste e o Método do Custo Mínimo

– 2ª parte: critério de otimalidade: Verificar se a solução é ótima ou não

1ª parte: cálculo da solução básica inicial:

As operações elementares utilizadas no método Simplex para recalcular os valores da nova solução básica adjacente não são necessárias aqui, já que a nova solução pode ser obtida facilmente a partir da forma tabular do problema de transporte.

Cada um dos passos do algoritmo de transporte apresentado será detalhado e posteriormente aplicado para a resolução do problema de transporte.

Exemplo: Considere o problema de transporte dado pela tabela abaixo:

		Consumidor 1	Consumidor 2	Consumidor 3	Capacidade
Fornecedor	1	12 X_{11}	22 X_{12}	30 X_{13}	100
	2	18 X_{21}	24 X_{22}	32 X_{23}	140
	3	22 X_{31}	15 X_{32}	34 X_{33}	160
Demanda		120	130	150	

O problema clássico de transporte considera um conjunto de m fornecedores e n consumidores, Aqui, temos $m = 3$ e $n = 3$

Veremos, primeiramente, como encontrar uma SBF inicial pelo **Método do Canto Noroeste** e depois pelo **Método do Custo Mínimo.**

Método do Canto Noroeste: **Para iniciar,** representamos o problema de transporte na forma tabular inicial. Nesse método, os custos de transporte não precisam estar especificados, já que os mesmos não são utilizados no algoritmo.

Passo 1**:** Selecione a célula localizada no canto superior esquerdo (noroeste), dentre as células ainda não alocadas no Passo 2 e as células ainda não bloqueadas no Passo 3. Logo, x_{11} será sempre a primeira variável selecionada.

Passo 2**:** Aloque a maior quantidade possível de produto a essa célula, de forma que a soma das células correspondentes na mesma linha e na mesma coluna não ultrapasse a capacidade de fornecimento total e de demanda total, respectivamente.

Passo 3**:** A partir da célula selecionada no passo anterior, bloqueie (indicando com um *x*) as células correspondentes à mesma linha ou coluna que atingiu o limite máximo de fornecimento ou demanda, respectivamente, já que nenhum outro valor diferente de zero poderá ser atribuído a essas células. No caso de utilização do limite máximo, tanto na linha como na coluna, bloqueie apenas uma delas. Essa condição garante que haverá variáveis básicas com valores nulos. O algoritmo finaliza quando todas as células foram alocadas ou bloqueadas. Caso contrário, volte para o Passo 1.

Consumidor

		1	2	3	Capacidade
	1	12 x_{11}	22 x_{12}	30 x_{13}	100
Fornecedor	2	18 x_{21}	24 x_{22}	32 x_{23}	140
	3	22 x_{31}	15 x_{32}	34 x_{33}	160
Demanda		120	130	150	

Consumidor

		1	2	3	Capacidade
	1				100
Fornecedor	2				140
	3				160
Demanda		120	130	150	

***Passo 1*:** Selecione a célula x_{11}, localizada no canto superior esquerdo (noroeste).

***Passo 2*:** Verifica-se, por meio da Tabela , que a capacidade total do fornecedor 1 (Osasco) é 100. Já a demanda do consumidor 1 (São Paulo) é 120, de forma que o valor máximo a ser alocado nessa célula é o mínimo entre esses dois valores.

***Passo 3*:** O limite máximo de capacidade do fornecedor 1 foi atingido, de forma que as células
correspondentes à mesma linha ($x12$ e $x13$) devem ser bloqueadas.

		Consumidor			
		1	2	3	Capacidade
Fornecedor	1	X_{11} (12)	X_{12} (22)	X_{13} (30)	100
	2	X_{21} (18)	X_{22} (24)	X_{23} (32)	140
	3	X_{31} (22)	X_{32} (15)	X_{33} (34)	160
Demanda		120	130	150	

Consumidor			
1	2	3	Capacidade
100	**x**	**x**	100
			140
			160
120	130	150	

Consumidor

		1	2	3	Capacidade
	1	X_{11} [12]	X_{12} [22]	X_{13} [30]	100
Fornecedor	2	X_{21} [18]	X_{22} [24]	X_{23} [32]	140
	3	X_{31} [22]	X_{32} [15]	X_{33} [34]	160
Demanda		120	130	150	

Consumidor

1	2	3	Capacidade
100	x	x	100
20			140
x			160
120	130	150	

Consumidor

1	2	3	Capacidade
100	x	x	100
20	120	x	140
x			160
120	130	150	

	Consumidor		
1	2	3	Capacidade
100	**0**	**0**	100
20	**120**	**0**	140
0	**10**	**150**	160
120	130	150	

A solução básica é:

$Variáveis\ básicas$: $x_{11} = 100$; $x_{21} = 20$; $x_{22} = 120$; $x_{32} = 10$; $x_{33} = 150$ e $z = 9690$

Variáveis não básicas: $x_{12} = x_{13} = x_{23} = x_{31} = 0$

Método do Custo Mínimo: Esse método é uma adaptação do método do canto noroeste, porém em vez de selecionar a célula mais próxima do canto noroeste, seleciona-se aquela com menor custo. O algoritmo completo do custo mínimo:

Passo 1**:** Selecione a célula com menor custo possível, dentre as células ainda não alocadas no Passo 2 e as células ainda não bloqueadas no Passo 3.

Passo 2**:** Aloque a maior quantidade possível de produto a essa célula, de forma que a soma das células correspondentes na mesma linha e na mesma coluna não ultrapasse a capacidade de fornecimento total e de demanda total, respectivamente.

Passo 3**:** A partir da célula selecionada no passo anterior, bloqueie (indicando com um *x*) as células correspondentes à mesma linha ou coluna que atingiu o limite máximo de fornecimento ou demanda, respectivamente. Analogamente ao método do canto do noroeste, no caso de utilização do limite máximo, tanto na linha como na coluna, bloqueie apenas uma delas. O algoritmo finaliza quando todas as células foram alocadas ou bloqueadas. Caso contrário, volte para o Passo 1.

Exemplo: Custo Mínimo

		Consumidor 1	Consumidor 2	Consumidor 3	Capacidade
Fornecedor	1	x_{11} (12)	x_{12} (22)	x_{13} (30)	100
	2	x_{21} (18)	x_{22} (24)	x_{23} (32)	140
	3	x_{31} (22)	x_{32} (15)	x_{33} (34)	160
Demanda		120	130	150	

Exemplo:

		Consumidor 1	Consumidor 2	Consumidor 3	Capacidade
Fornecedor	1	x_{11} (12)	x_{12} (22)	x_{13} (30)	100
	2	x_{21} (18)	x_{22} (24)	x_{23} (32)	140
	3	x_{31} (22)	x_{32} (15)	x_{33} (34)	160
Demanda		120	130	150	

Consumidor 1	Consumidor 2	Consumidor 3	Capacidade
100 (12)	x (22)	x (30)	100
(18)	(24)	(32)	140
(22)	(15)	(34)	160
120	130	150	

PUC-SP

Consumidor

		1	2	3	Capacidade
	1	12 X_{11}	22 X_{12}	30 X_{13}	100
Fornecedor	2	18 X_{21}	24 X_{22}	32 X_{23}	140
	3	22 X_{31}	15 X_{32}	34 X_{33}	160
Demanda		120	130	150	

Consumidor

1	2	3	Capacidade
12 **100**	22 **x**	30 **x**	100
18	24	32	140
22	15	34	160
120	130	150	

Consumidor

		1	2	3	Capacidade
	1	12 **100**	22 **x**	30 **x**	100
Fornecedor	2	18	24 **x**	32	140
	3	22	15 **130**	34	160
Demanda		120	130	150	

Consumidor

1	2	3	Capacidade
12 **100**	22 **x**	30 **x**	100
18 **20**	24 **x**	32	140
22 **x**	15 **130**	34	160
120	130	150	

		Consumidor			
		1	2	3	Capacidade
	1	(12) **100**	(22) **0**	(30) **0**	100
Fornecedor	2	(18) **20**	(24) **0**	(32) **120**	140
	3	(22) **0**	(15) **130**	(34) **30**	160
Demanda		120	130	150	

A solução básica é, portanto: $x_{11} = 100$, $x_{21} = 20$, $x_{23} = 120$, $x_{32} = 130$ e $x_{33} = 30$ com $z = 8.370$.
Variáveis não básicas: $x_{12} = 0$, $x_{13} = 0$, $x_{22} = 0$ e $x_{31} = 0$.

Note que o Método do Custo Mínimo gerou uma solução básica melhor do que o Método do Canto Noroeste!

Exemplo 2: Determine uma SBV inicial pelo **Método do Canto Noroeste** e pelo **Método do Custo Mínimo**

PUC-SP

DESTINO

FONTE		1	2	3	4	FORNECIMENTO
	1	8 X_{11}	2 X_{12}	18 X_{13}	10 X_{14}	200
	2	11 X_{21}	5 X_{22}	7 X_{23}	16 X_{24}	320
	3	2 X_{31}	12 X_{32}	15 X_{33}	16 X_{34}	80
DEMANDA		80	200	200	120	

2ª parte: Critério de Otimalidade:

Para verificar se a solução encontrada é ótima, utiliza-se o **método dos multiplicadores**. Assim, associam-se a cada linha *i* e a cada coluna *j* os multiplicadores u_i *e* v_j, respectivamente. Os coeficientes da função objetivo (custos reduzidos) da variável x_{ij} (c_{ij}) são dados pela fórmula:

$$\overline{c_{ij}} = u_i + v_j - c_{ij}$$

Como os custos reduzidos das variáveis básicas são nulos, a fórmula acima resume-se a:

$$\boldsymbol{u_i + v_j = c_{ij}}$$

para cada **Variável Básica $\boldsymbol{x_{ij}}$**

Como o modelo contém $m + n - 1$ equações independentes e, consequentemente, $m + n - 1$ variáveis básicas, para resolver o sistema de equações com $m + n$ incógnitas, deve-se atribuir, arbitrariamente, o valor zero a um dos multiplicadores, por exemplo, $u_1 = 0$. Calculados os multiplicadores, pode-se determinar os custos reduzidos das variáveis não básicas por

meio da fórmula dada. Para o problema de transporte (problema de minimização), *a solução atual é ótima* se, e somente se, os custos reduzidos de todas as variáveis não básicas forem não positivos:

$$\boxed{\boldsymbol{u_i + v_j - c_{ij} \leq 0}}$$

para cada **Variável Não Básica $\boldsymbol{x_{ij}}$**

Enquanto existir pelo menos uma variável não básica com custo reduzido positivo, há uma solução básica factível (SBV) adjacente melhor.

Para encontrar uma nova solução básica factível, três passos devem ser tomados:

1. Determinar a variável não básica que entrará na base, utilizando o **método dos multiplicadores**.
A variável não básica x_{ij} selecionada é aquela com maior custo reduzido (maior valor de $u_i + v_j - c_{ij}$).

2. Escolher a variável básica que sairá da base (ver explicação adiante).

3. Recalcular a nova solução básica. Diferentemente do método Simplex, esse cálculo pode ser feito diretamente na forma tabular do problema de transporte.

A escolha da variável que sai da base e o cálculo da nova solução básica podem ser obtidos por meio da construção de um ciclo fechado que inicia e finaliza na variável não básica escolhida para entrar na base (Passo 1).

O ciclo consiste em uma sequência de segmentos horizontais e verticais conectados entre si (movimentos na diagonal não são permitidos), em que **cada esquina está associada a uma variável básica**, com exceção da variável não básica selecionada. **Existe somente um ciclo fechado que pode ser construído nessas condições**. Construído o ciclo fechado, o passo seguinte consiste em determinar a *variável que sairá da base*.

Assim, dentre as **esquinas vizinhas à variável não básica x_{ij}** (horizontal ou verticalmente), escolhe-se a variável básica com *menor valor*, já que as restrições de capacidade do fornecedor *i* e de demanda do consumidor *j* devem ser respeitadas. Em caso de empate, escolhe-se uma delas, aleatoriamente.

Finalmente, *recalcula-se a nova solução básica*. Primeiramente, atribui-se o valor correspondente à variável básica escolhida para sair da base à nova variável básica x_{ij} *A variável que sai da base assume, portanto, o valor zero*. Os novos valores das variáveis básicas do ciclo fechado também devem ser recalculados, de forma que as capacidades de fornecimento e as demandas requeridas continuem sendo satisfeitas.

Exemplo : A partir da solução básica inicial obtida pelo método do canto noroeste para o problema abaixo, determine a solução ótima utilizando o algoritmo de transporte.

SBF inicial do método do canto noroeste, incluindo os custos unitários de transporte

Consumidor

Fornecedor	1	2	3	Capacidade
1	12 **100**	22 **0**	30 **0**	100
2	18 **20**	24 **120**	32 **0**	140
3	22 **0**	15 **10**	34 **150**	160
Demanda	120	130	150	

A solução básica é:

$x_{11} = 100\ ;\ x_{21} = 20\ ; x_{22} = 120\ ; x_{32} = 10\ ;\ x_{33} = 150\quad e\ \ z = 9690$

$x_{12} = x_{13} = x_{23} = x_{31} = 0$

Teste de otimalidade: Para cada variável básica x_{ij}, descrever a equação: $\boldsymbol{u_i + v_j = c_{ij}}$:

	1	2	3	
1	[12] 100	[22] 0	[30] 0	100
2	[18] 20	[24] 120	[32] 0	140
3	[22] 0	[15] 10	[34] 150	160
	120	130	150	

para x_{11}: $u_1 + v_1 = 12$
para x_{21}: $u_2 + v_1 = 18$
para x_{22}: $u_2 + v_2 = 24$
para x_{32}: $u_3 + v_2 = 15$
para x_{33}: $u_3 + v_3 = 34$

Fazendo $u_1 = 0$, obtêm-se os seguintes resultados:

$v_1 = 12$, $u_2 = 6$, $v_2 = 18$, $u_3 = -3$ e $v_3 = 37$

$$v_1 = 12,\ u_2 = 6,\ v_2 = 18,\ u_3 = -3 \text{ e } v_3 = 37$$

A partir desses multiplicadores, determinam-se os custos reduzidos das variáveis não básicas por meio da fórmula:

$$\overline{c_{ij}} = u_i + v_j - c_{ij}$$

$$\overline{c}_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 18 - 22 = -4$$
$$\overline{c}_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 37 - 30 = 7$$
$$\overline{c}_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 6 + 37 - 32 = 11$$
$$\overline{c}_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -3 + 12 - 22 = -13$$

Como os custos reduzidos das variáveis não básicas x_{13} e x_{23} são positivos, há uma solução básica viável (SBV) adjacente melhor. A variável não básica que vai entrar na base é x_{23}, pois tem o maior custo reduzido.

Iteração 1: Determinar uma SBF adjacente melhor.

Um ciclo fechado deve ser construído para determinar a variável que sairá da base e para calcular a nova solução básica. Esse ciclo fechado deve satisfazer as seguintes condições:

a) Iniciar e finalizar em x_{23}

b) Ser formado por uma sequência de segmentos horizontais e verticais conectados entre si

c) Cada esquina deve estar associada a uma variável básica, com exceção da variável x_{23}. A Tabela a seguir apresenta o ciclo fechado que satisfaz essas condições.

	1	2	3	
1	12 / 100	22 / 0	30 / 0	100
2	18 / 20	24 / 120	32 / 0	140
3	22 / 0	15 / 10	34 / 150	160
	120	130	150	

Construído o ciclo fechado, o passo seguinte consiste em determinar a *variável que sairá da base*.

Assim, dentre as esquinas vizinhas à variável não básica x_{23} (horizontal ou verticalmente), escolhe-se a variável básica x_{22} , que possui o menor valor (120 < 150), já que a restrição de capacidade do fornecedor 2 deve ser respeitada.

Cons

Finalmente, *recalcula-se a nova solução básica*.
Primeiramente, atribui-se o valor de 120 da variável básica de saída x_{22} à nova variável básica x_{23}.
A variável x_{22} que sai da base assume, portanto, o valor zero.

Para restaurar o balanceamento do ciclo fechado, calculam-se os novos valores das variáveis básicas x_{32} e x_{33} (130 e 30, respectivamente). A Tabela ilustra a nova SBV adjacente.
Z = 8370

		Consumidor			
		1	2	3	Capacidade
Fornecedor	1	custo 12 **100**	custo 22 **0**	custo 30 **0**	100
	2	custo 18 **20**	custo 24 **0**	custo 32 **120**	140
	3	custo 22 **0**	custo 15 **130**	custo 34 **30**	160
Demanda		120	130	150	

Novo Teste de otimalidade: Para cada variável básica x_{ij}, descrever a equação: $u_i + v_j = c_{ij}$:

Para x_{11}: $u_1 + v_1 = 12$

Para x_{21}: $u_2 + v_1 = 18$

Para x_{23}: $u_2 + v_3 = 32$

Para x_{32}: $u_3 + v_2 = 15$

Para x_{33}: $u_3 + v_3 = 34$

Fazendo $u_1 = 0$, obtêm-se os seguintes resultados:

$v_1 = 12$, $u_2 = 6$, $v_3 = 26$, $u_3 = 8$ e $v_2 = 7$

A partir desses multiplicadores, determinam-se os custos reduzidos das variáveis não básicas por meio da fórmula:

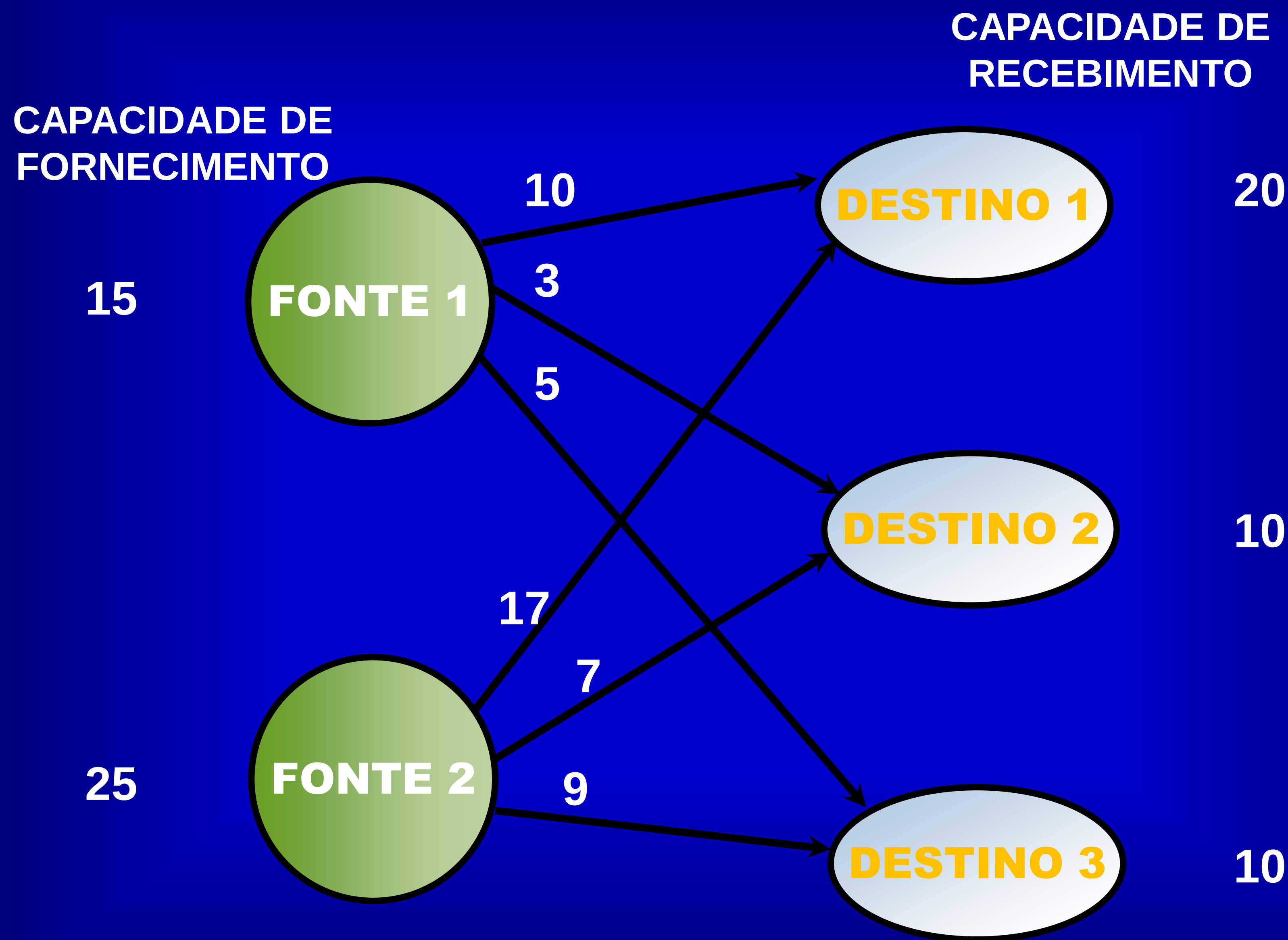
$$\bar{c}_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -3 + 12 - 22 = -13$$
$$\bar{c}_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 26 - 30 = -4$$
$$\bar{c}_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 6 + 7 - 24 = -11$$
$$\bar{c}_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 8 + 12 - 22 = -2$$

Como os custos reduzidos de todas as variáveis não básicas são não positivos, a solução atual é ótima. A solução ótima é, portanto:

Solução básica: $x_{11} = 100$, $x_{21} = 20$, $x_{23} = 120$, $x_{32} = 130$ e $x_{33} = 30$ com z = 8.370.

Variáveis não básicas: $x_{12} = 0$, $x_{13} = 0$, $x_{22} = 0$ e $x_{31} = 0$.

Note que essa solução é semelhante à solução inicial obtida pelos métodos do custo mínimo. Ou seja, o **Mètodo do Custo Mínimo** deu a solução ótima já na SBV inicial.


CAPACIDADE DE FORNECIMENTO
CAPACIDADE DE RECEBIMENTO
15
FONTE 1
25
FONTE 2
10
3
5
17
7
9
DESTINO 1
DESTINO 2
DESTINO 3
20
10
10

MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

PUC-SP

Minimizar $Z = 10 \,.\, x_{11} + 3 \,.\, x_{12} + 5 \,.\, x_{13} + 17 \,.\, x_{21} + 7 \,.\, x_{22} + 9 \,.\, x_{23}$

Sujeito às restrições:

De capacidade das fontes:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 15$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 25$$

De absorção pelos destinos:

$$x_{11} + x_{21} = 20$$

$$x_{12} + x_{22} = 10$$

$$x_{13} + x_{23} = 10$$

Com x_{11} , x_{12} , x_{13} , x_{21} , x_{22} e $x_{23} \geq 0$

DESTINO

		1	2	3	FORNECIMENTO
FONTE	1	10 X_{11}	3 X_{12}	5 X_{13}	15
	2	1 7 X_{21}	7 X_{22}	9 X_{23}	25
DEMANDA		20	10	10	

Exemplos:

DESTINO

FONTE		1	2	3	4	FORNECI-MENTO
	1	8 X_{11}	2 X_{12}	18 X_{13}	10 X_{14}	200
	2	11 X_{21}	5 X_{22}	7 X_{23}	16 X_{24}	320
	3	2 X_{31}	12 X_{32}	15 X_{33}	16 X_{34}	80
DEMANDA		80	200	200	120	

PUC-SP

PUC-SP

Passo 1: Determinação da Solução Básica Inicial

Método do Canto Noroeste

1) Alocar a maior quantidade possível (respeitando capacidade fonte e destino) à variável X_{11} no canto superior esquerdo (noroeste).

   Em nosso caso, devemos fazer $X_{11} = 80$ e, assim, devemos bloquear a primeira coluna.

2) A próxima célula adjacente, em uma linha ou coluna não bloqueada, é X_{12} para a qual vamos atribuir o valor 120. Como esgotamos o fornecimento da Fonte 1, vamos bloquear também a primeira linha.

DESTINO

		1	2	3	4	FORNECIMENTO
FONTE	1	8 80 X_{11}	2 120 X_{12}	18 bloqueadas X_{13}	10 X_{14}	200
	2	11 bloqueadas X_{21}	5 X_{22}	7 X_{23}	16 X_{24}	320
	3	2 X_{31}	12 X_{32}	15 X_{33}	16 X_{34}	80
DEMANDA		80	200	200	120	

Fig. 5.15 Solução parcial com bloqueio de uma linha e uma coluna

Continuação do processo de obtenção da solução inicial

3) Alocamos 80 na variável X_{22} e bloqueamos a coluna 2.
4) Alocamos 200 na variável X_{23} e bloqueamos a coluna 3.
5) Alocamos 40 na variável X_{24} e bloqueamos a linha 2.
6) Alocamos 80 na variável X_{34} e podemos bloquear a linha 3 ou a coluna 4 (somente uma). Vamos bloquear a linha 3.Como somente a coluna 4 ficou sem bloquear, o processo se encerra. A Fig. 5.16 mostra a solução básica inicial obtida.

DESTINO

FONTE	1	2	3	4	FORNECI-MENTO
1	8 80 X_{11}	2 120 X_{12}	18 bloqueadas X_{13}	10 X_{14}	200
2	11 bloqueadas X_{21}	5 80 X_{22}	7 200 X_{23}	16 40 X_{24}	320
3	2 X_{31}	12 X_{32}	15 X_{33}	16 80 X_{34}	80
DEMANDA	80	200	200	120	

Fig. 5.16 Solução básica inicial

Variáveis básicas encontradas: $X_{11} = 80$, $X_{12} = 120$, $X_{22} = 80$, $X_{23} = 200$, $X_{24} = 40$ e $X_{34} = 80$.
Variáveis não-básicas: $X_{13} = X_{14} = X_{21} = X_{31} = X_{32} = X_{33} = 0$.
Custo total inicial: Z = 4.600

Planilha do Excel

PLANILHA DE SOLUÇÃO

MATRIZ DE VARIÁVEIS

FONTES	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3	Mercado 4	Utilização	Capacidade
Fonte 1	0	80	0	120	200	200
Fonte 2	0	120	200	0	320	320
Fonte 3	80	0	0	0	80	80
Recebimento	80	200	200	120		
Demanda	80	200	200	120		

CUSTOS UNITÁRIOS DE TRANSPORTE

	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3	Mercado 4
Fonte 1	8	2	18	10
Fonte 2	11	5	7	16
Fonte 3	2	12	15	16

CUSTO TOTAL
3520

Fig. 5.21: Planilha Excel utilizada para solução

A tabela a seguir contém os dados de uma problema de transporte. Os custos e demandas são dados por tonelada.

	Depósitos			
Pedreiras	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	30	13	21	433
2	12	40	26	215
3	27	15	35	782
4	37	25	19	300
demanda	697	421	612	

Se x_{ij} é a quantidade (em toneladas) da pedreira i para o depósito j, pode-se formular o problema como:

$$\begin{aligned} \min C = {} & 30x_{11} + 13x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 40x_{22} + 26x_{23} \\ & + 27x_{31} + 15x_{32} + 35x_{33} + 37x_{41} + 25x_{42} + 19x_{43} \end{aligned}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 433 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 215 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 782 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} &\leq 300 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 697 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 421 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 612 \\ x_{11} \geq 0,\ x_{12} \geq 0,\ \ldots,\ x_{43} &\geq 0 \end{aligned}$$

Exercício 2. Uma empresa fabrica um determinado produto em três cidades P_1, P_2 e P_3; o produto destina-se a quatro centros de consumo C_1, C_2, C_3 e C_4. O custo estimado de transportar o produto das fábricas para os centros consumidores, assim como a demanda de cada centro e a oferta de cada fábrica é dado na tabela a seguir:

	Destino				
Origem	C_1	C_2	C_3	C_4	**Oferta**
P_1	10	7	6	5	9
P_2	2	8	9	1	10
P_3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

Formule o modelo de transporte e resolva com o Solver

Se $x_{ij} \geq 0$ é a quantidade de produtos transportados da unidade $i = 1, \ldots, 3$ para o centro $j = 1, \ldots, 4$, têm-se:

$$\min C = 10x_{11} + 7x_{12} + 6x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + 8x_{22} + 9x_{23} + x_{24} + 11x_{31} + 12x_{32} + 8x_{33} + 4x_{34}$$

sujeito a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 9$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 10$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 8$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 7$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 10$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 4$$
$$x_{11} \geq 0,\ x_{12} \geq 0,\ \ldots,\ x_{34} \geq 0$$

Exercício 3. Uma rede de depósitos de material de construção tem 4 lojas que devem ser abastecidas com 50 m^3 (L1), 80 m^3 (L2), 40 m^3 (L3), 100 n^3 (L4) de areia grossa. Essa areia pode ser carregada em 3 portos P_1 , P_2 *e* P_3 , cujas distâncias às lojas estão no quadro (em km):

	L1	L2	L3	L4
P1	30	20	24	18
P2	12	36	30	24
P3	8	15	25	20

O caminhão pode transportar 10 m^3 por viagem. Os portos tem areia para suprir qualquer demanda.

Estabelecer um plano de transporte que minimize a distância total percorrida entre os portos e as lojas e supra as necessidades das lojas. Construa o modelo linear do problema.

Exercício 4. A prefeitura de uma cidade está fazendo obras em três bairros. O material para essas obras é transportado de três depósitos O1, O2 e O3 de onde são retiradas 57, 76 e 93 toneladas de material, respectivamente. As obras são destinadas para os bairros D1, D2 e D3, que necessitam diariamente de 41, 80 e 105 toneladas, respectivamente. Os custos unitários para o transporte desse material estão na tabela a seguir.

	Destino 01	Destino 03	Destino 03
Depósito 01	7	8	4
Depósito 02	5	6	3
Depósito 03	6	5	4

Formule o problema e resolva com o Solver

Minimizar $C = 7X11 + 8X12 + 4X13 + 5X21 + 6X21$

$+ 3X23 + 6X31 + 5X32 + 4X33$

S.a

$X11 + X12 + X13 \leq 57$

$X21 + X22 + X23 \leq 76$

$X31 + X32 + X33 \leq 93$

$X11 + X21 + X31 = 40$

$X12 + X22 + X32 = 80$

$X13 + X23 + X33 = 105$

$X11, X12, \ldots, X32, X33 \geq 0$

Exercícios: Resolva os problemas de transporte

Min $C = 10x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 12x_{21} + 7x_{22} + 9x_{23}$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 15 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 25 \\ x_{11} + x_{21} \qquad\qquad = 20 \\ x_{12} + x_{22} \qquad\qquad = 10 \\ x_{13} + x_{23} \qquad\qquad = 10 \\ x_{ij} \geq 0 \ , \qquad para\ i = \{1\,,2\}\ \ e\ \ j = \{1\,,2\,,3\} \end{cases}$$