Otimização e Simulação

Solução Gráfica

Solução Gráfica

PUC-SP

Um problema simples de programação linear que envolve duas variáveis de decisão pode ser facilmente resolvido de forma gráfica.

Uma dada solução é dita uma **solução viável** se tal solução satisfaz todas as restrições do problema.

O passo seguinte consiste em determinar a solução
ótima do modelo, isto é, a solução viável que apresente o melhor valor da função objetivo.

Para um problema de maximização, determinado o conjunto de soluções viáveis, a solução ótima é aquela que fornece o maior valor à função objetivo dentro desse conjunto.

Já para um problema de minimização, a solução ótima é aquela que minimiza a função objetivo.

Solução Gráfica

O objetivo é achar uma solução viável que maximize ou minimize a função objetivo. Tal solução é chamada ***solução ótima***.

O conjunto de todas as soluções viáveis determina um subconjunto do plano chamado ***região viável*** ou **região factível**.

Solução Gráfica

Para esboçar a região viável de um problema de PL, observamos que cada restrição do tipo:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

define uma reta no plano, enquanto cada restrição da forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \quad \text{ou} \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

define um semiplano que inclui a reta da fronteira $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$.

Solução Gráfica

Assim, a região viável é sempre uma intersecção de uma quantidade finita de retas e planos representada em muitos casos por um **polígono convexo**.

Se a região viável for vazia (ou seja, não contém pontos), então as restrições são inconsistentes e o problema de programação linear não possui solução.

Solução Gráfica

PUC-SP

Os pontos de fronteira de uma região viável que são intersecções de dois segmentos de retas de fronteira, são chamados ***pontos extremos***, também chamados de **vértices**.

A solução ótima de um PL está sempre num ponto extremo (vértice) do polígono, conforme teorema a seguir:

TEOREMA: Valores Máximos e Mínimos

Se a região viável de um problema de programação linear é não-vazia e limitada, então a função objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo e estes ocorrem em pontos extremos da região viável.

Se a região viável for ilimitada, então a função pode ou não atingir valor máximo ou mínimo; contudo, se atingir, um valor máximo ou mínimo, este ocorrerá sempre em pontos extremos.

Observações

1. Cada restrição do problema de PL é desenhada no gráfico como uma reta.

2. Cada desigualdade é indicada por uma seta que representa os valores viáveis para x_1 e x_2.

3. Como $x_1 \geq 0 \;\; e \;\; x_2 \geq 0$, a região viável estará sempre no primeiro quadrante do plano cartesiano.

4. O polígono convexo hachurado representa a região de valores de $x_1 \; e \; x_2$ que satisfazem as restrições chamada região viável.

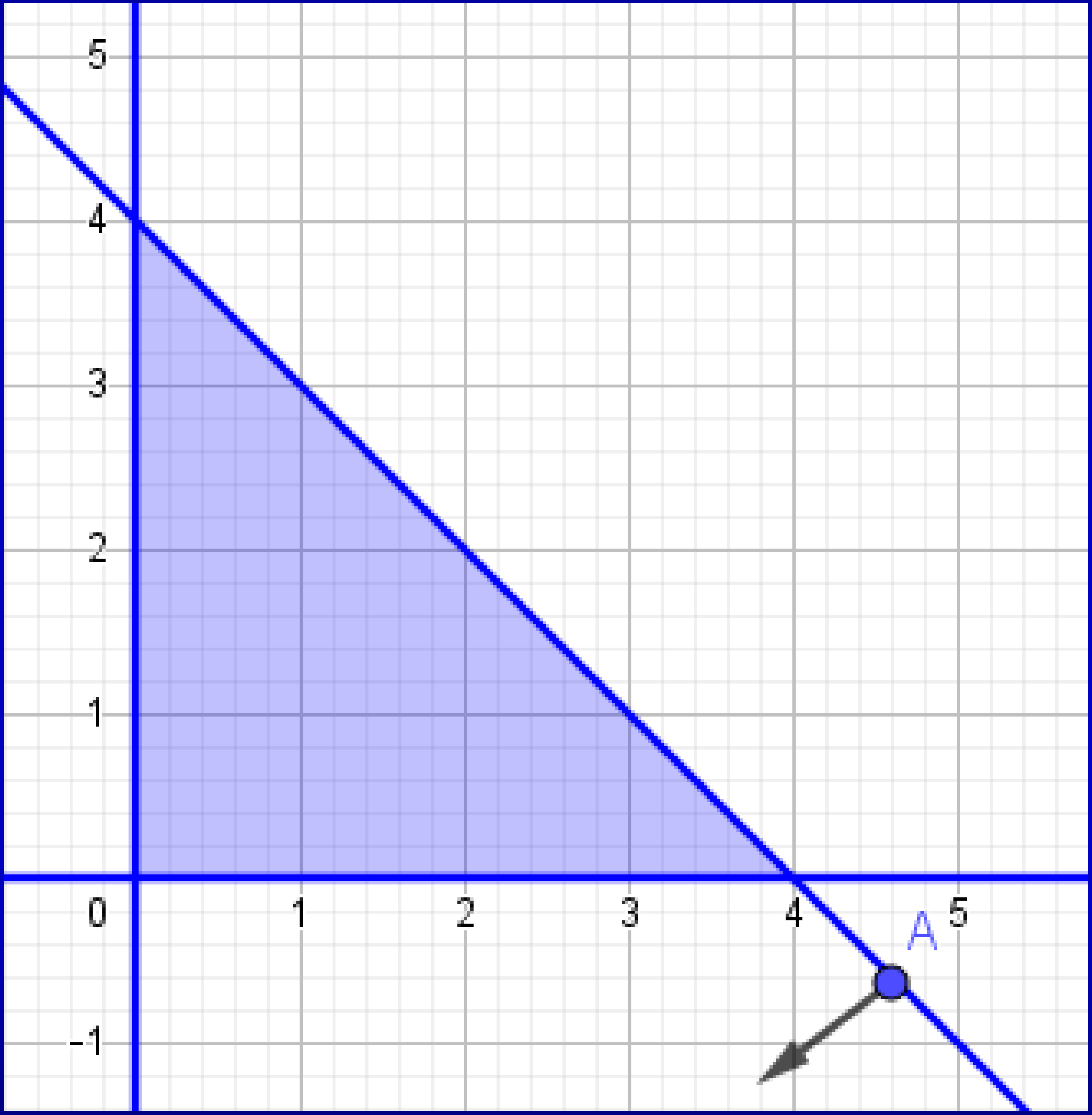
5. A solução ótima de um PL, se existir, está sempre em um dos vértices do polígono.

Exemplo 1:

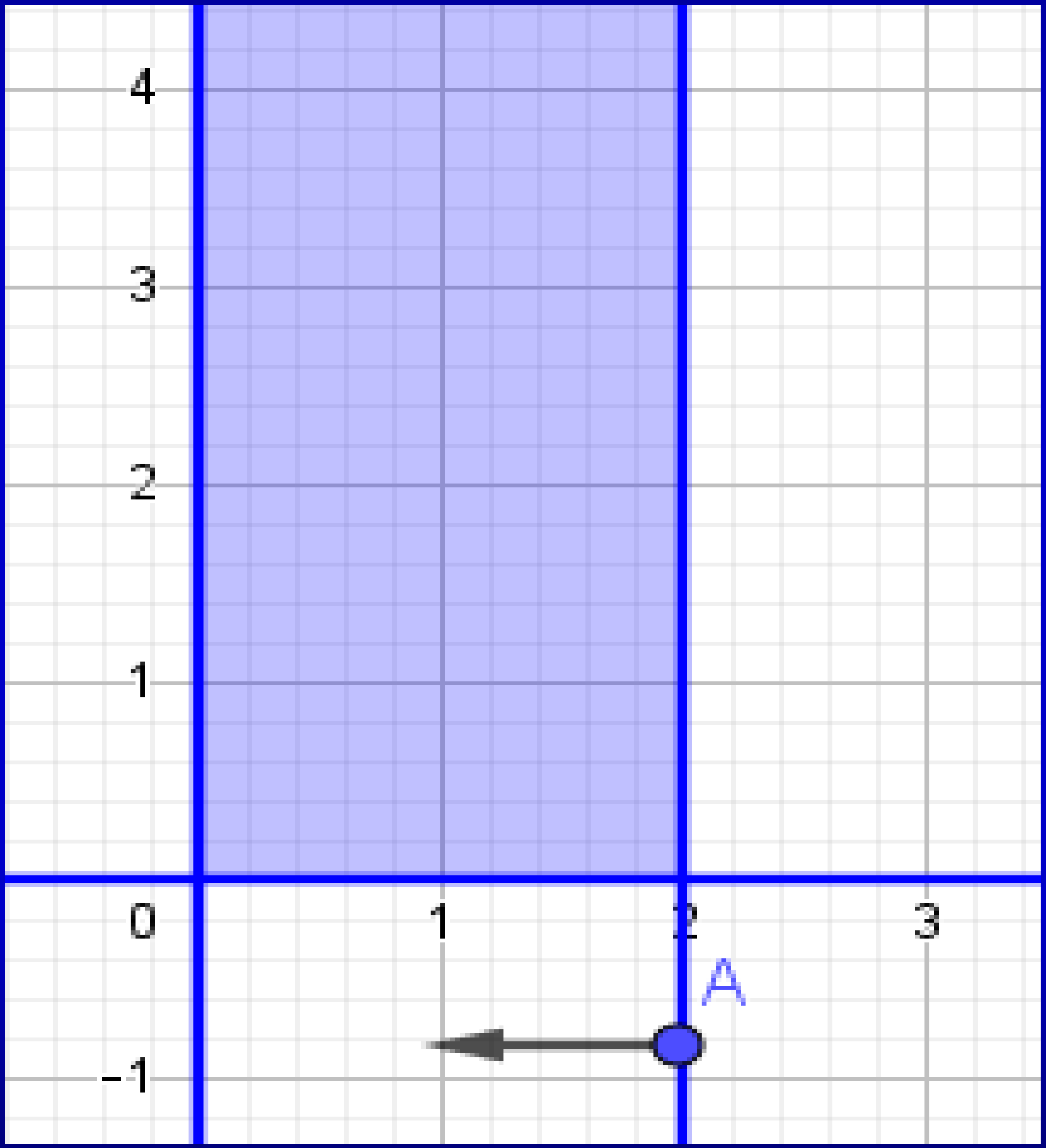
$$\text{Max. } z = x_1 + 2x_2$$

$$S.a \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \qquad\;\; \leq 2 \\ \qquad\; x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \;\; e \;\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

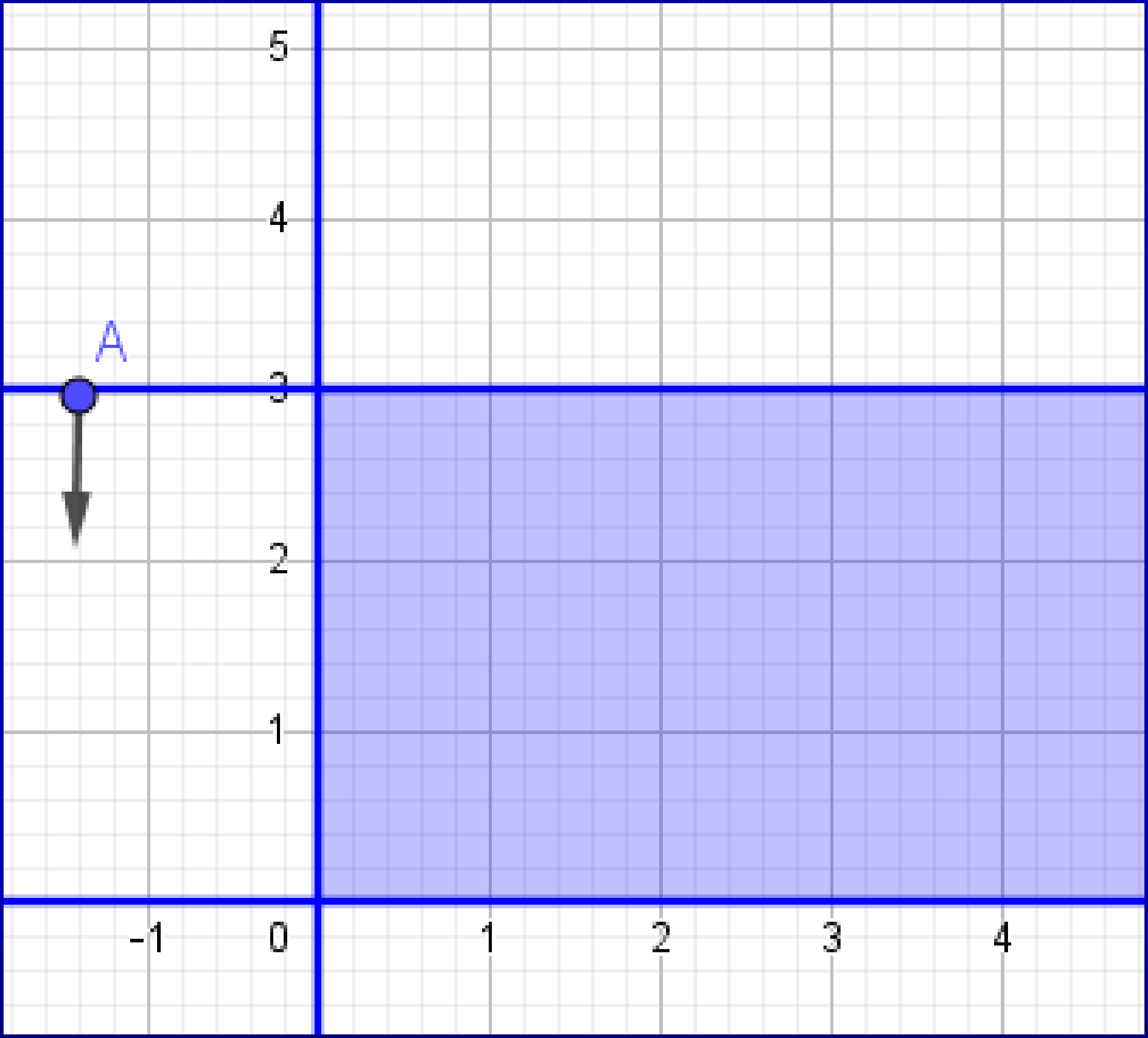
Restrição: $x_1 + x_2 \leq 4$



Restrição: $x_1 \leq 2$



Restrição: $x_2 \leq 3$



Candidatos a máximos: Pontos extremos (vértices):
(0,0) ; (0,3) ; (1,3) ; (2,2) e (2,0)

Função objetivo: $z = x_1 + 2x_2$

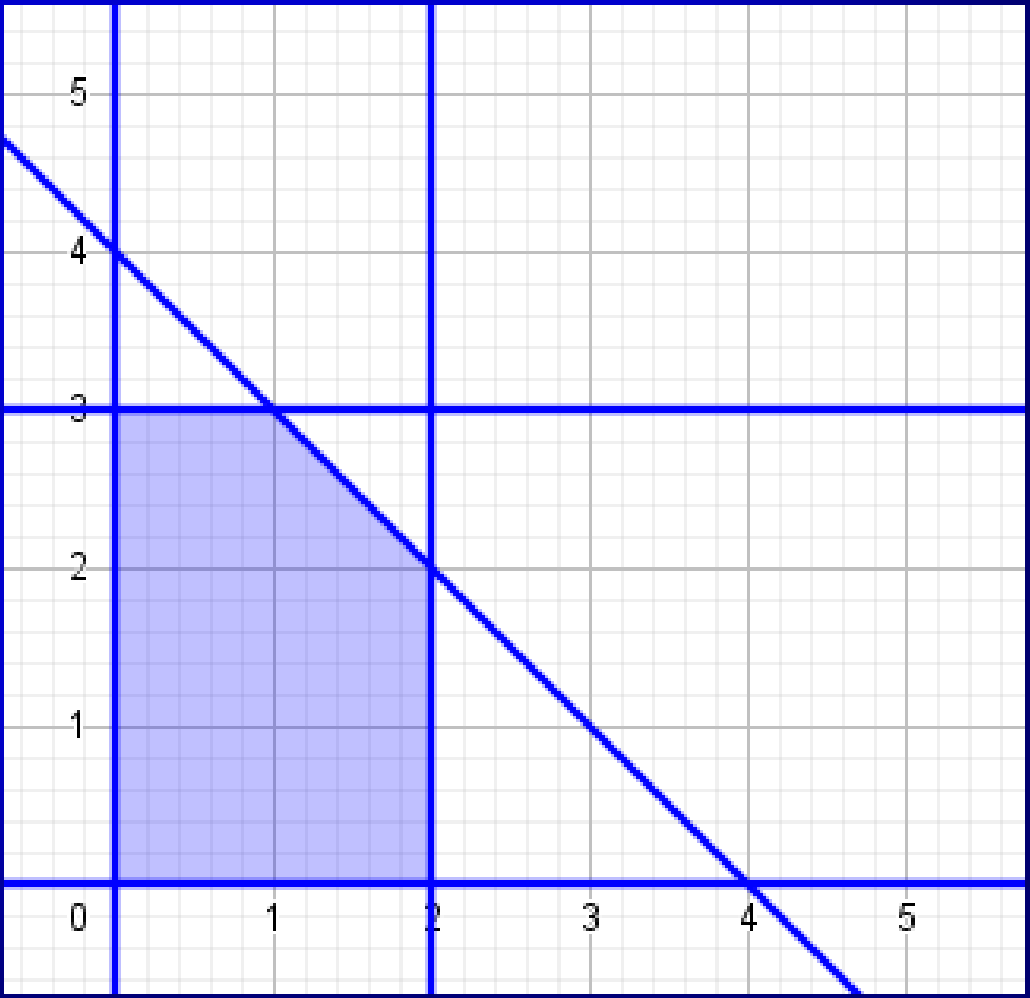
$(0,0) \Rightarrow z = 0$

$(0,3) \Rightarrow z = 6$

$(1,3) \Rightarrow z = 7$

$(2,2) \Rightarrow z = 6$

$(2,0) \Rightarrow z = 2$



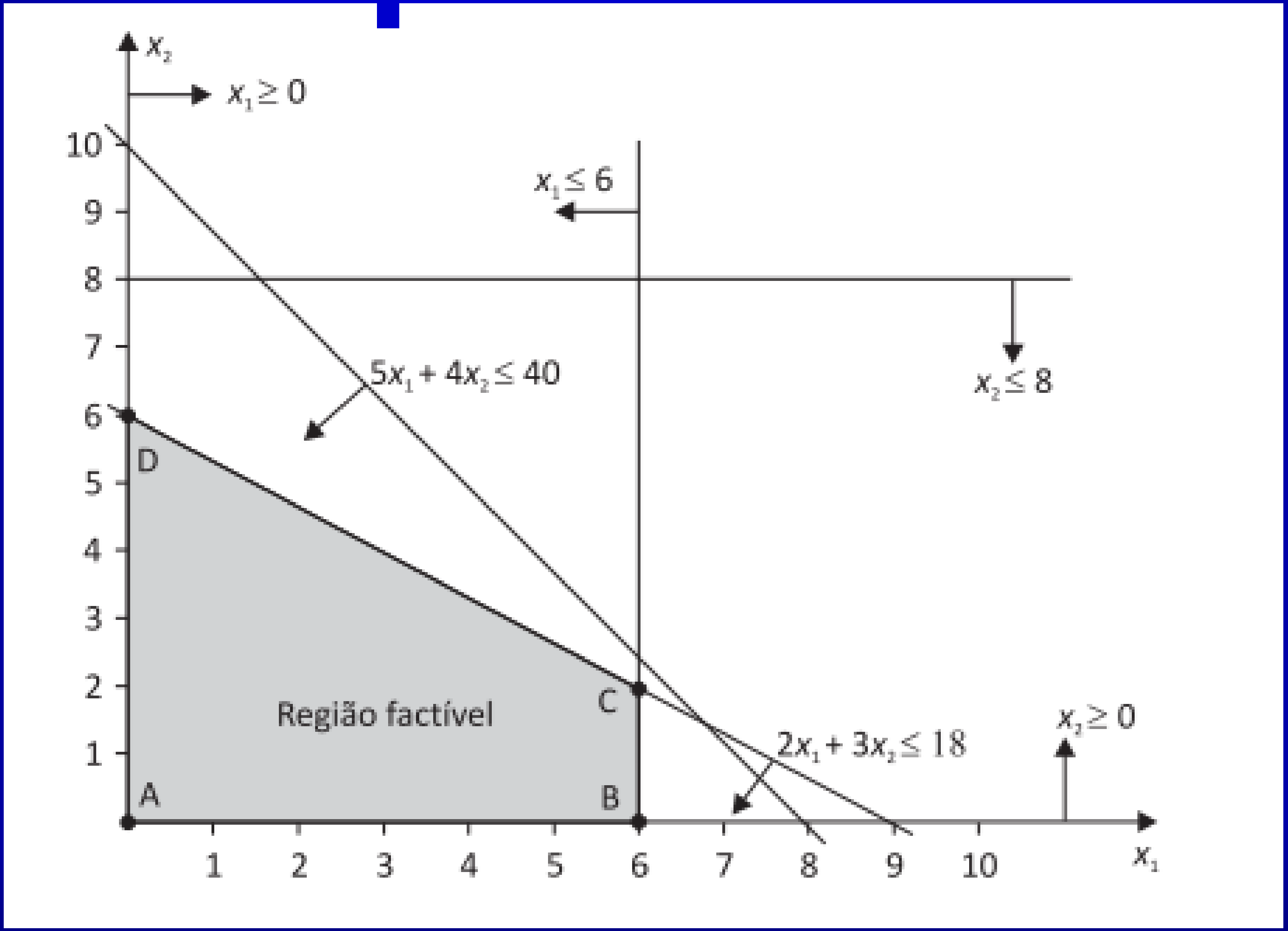
Ponto ótimo: $(1, 3)$
valor ótimo é: $z = 7$

Exemplo 2:

$$Max. \quad z = 6x_1 + 4x_2$$

$$S.a. \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \;\; e \;\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ilustração da solução gráfica para um problema de maximização e minimização de programação linear:

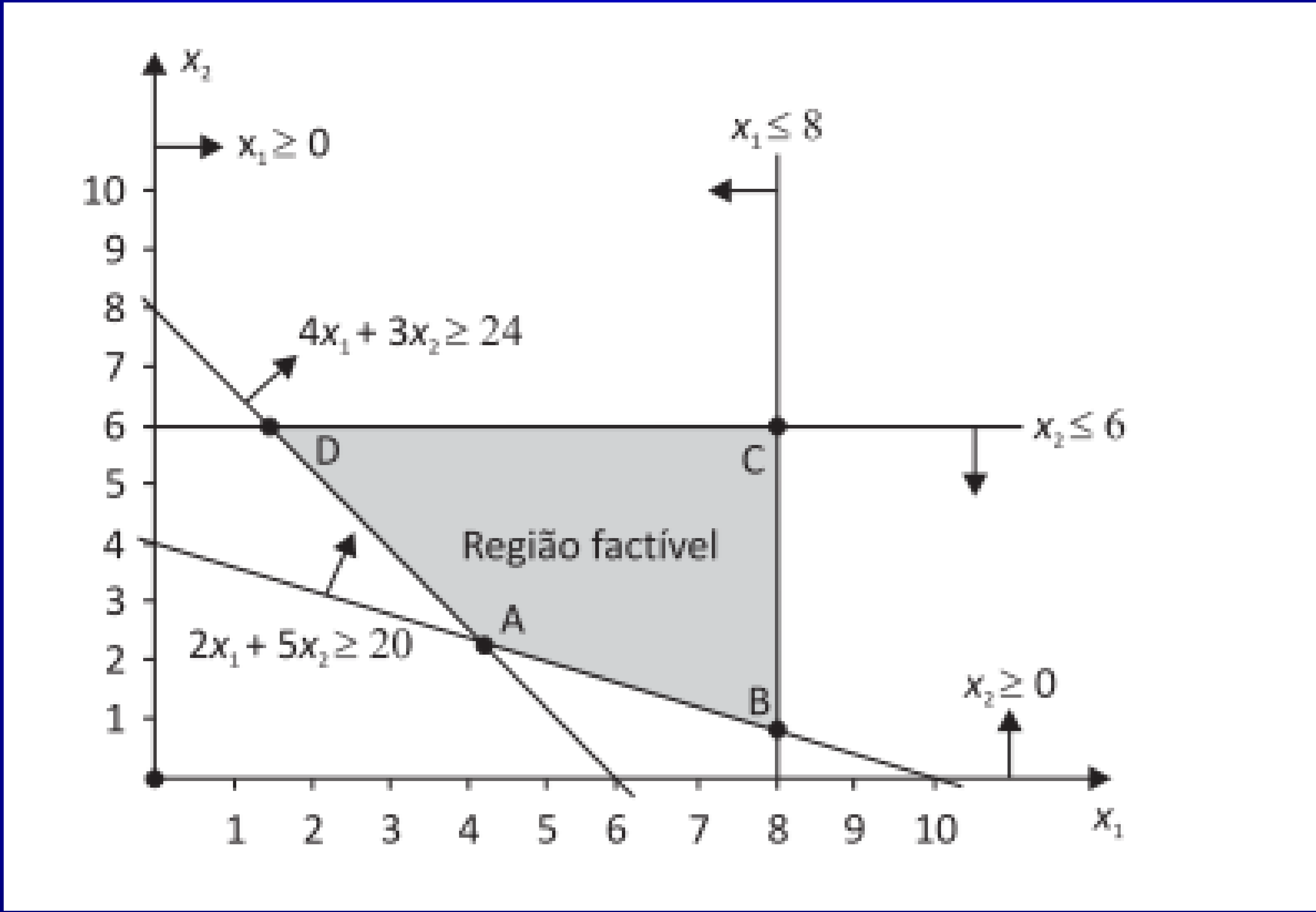


Exemplo 3:

$$Max.\ \ z = 10x_1 + 6x_2$$

$$S.a.\ \ \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ \ \ x_1 \qquad\qquad \leq 8 \\ \qquad\qquad\quad x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0\ \ e\ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ilustração da solução gráfica para um problema de maximização e minimização de programação linear:



Solução Gráfica

Exemplo 4: Vamos resolver graficamente o problema da fábrica de sapatos e botinas.

$$Max. \quad z = x_1 + x_2$$

$$S.a. \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \;\; e \;\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solução Gráfica

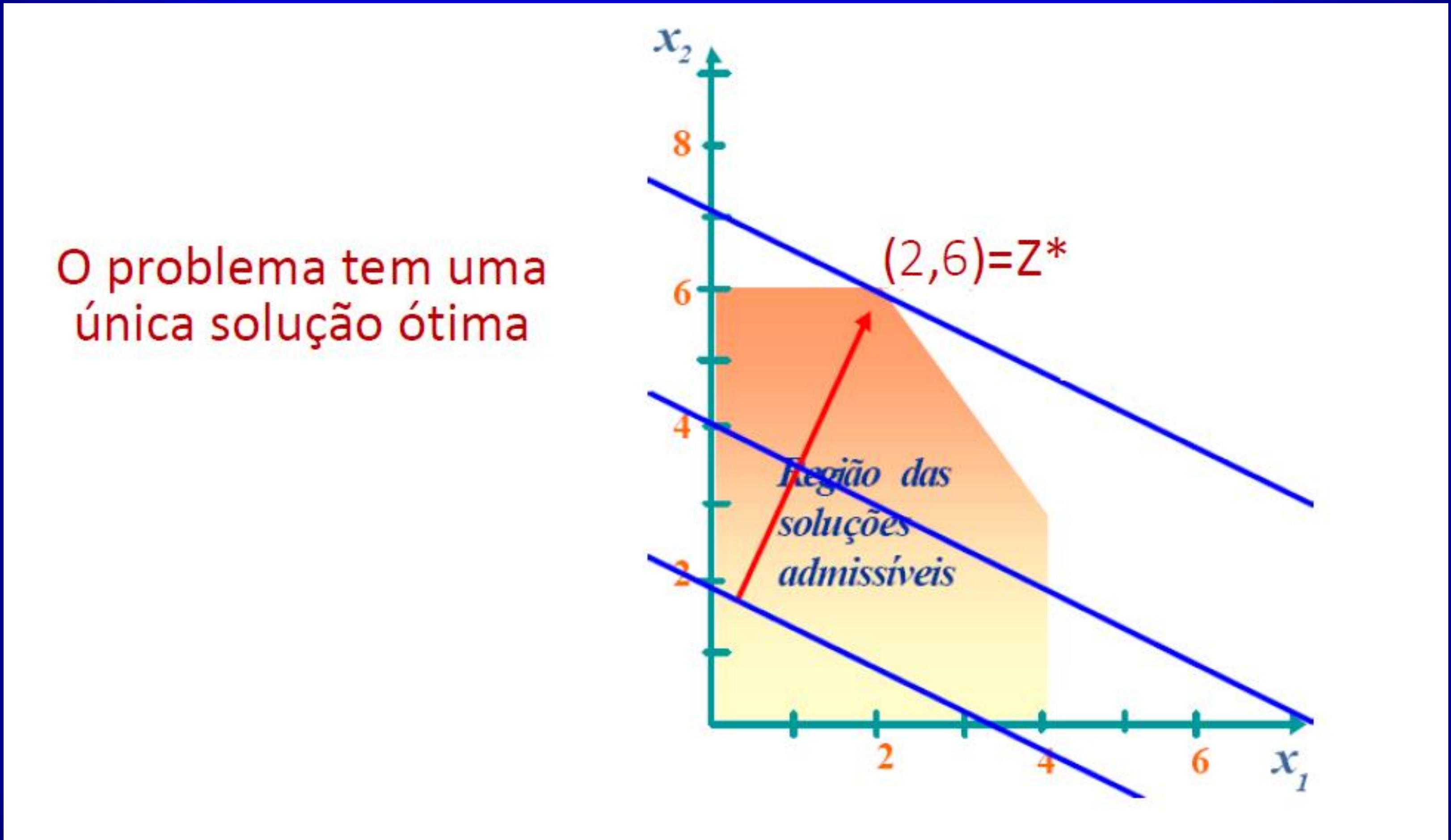
Exemplo 5: Vamos resolver graficamente o problema da marcenaria.

$$Max.: \ z = 4x_1 + x_2$$

$$S.a. \ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq \ 8 \\ x_1 \geq 0 \ e \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

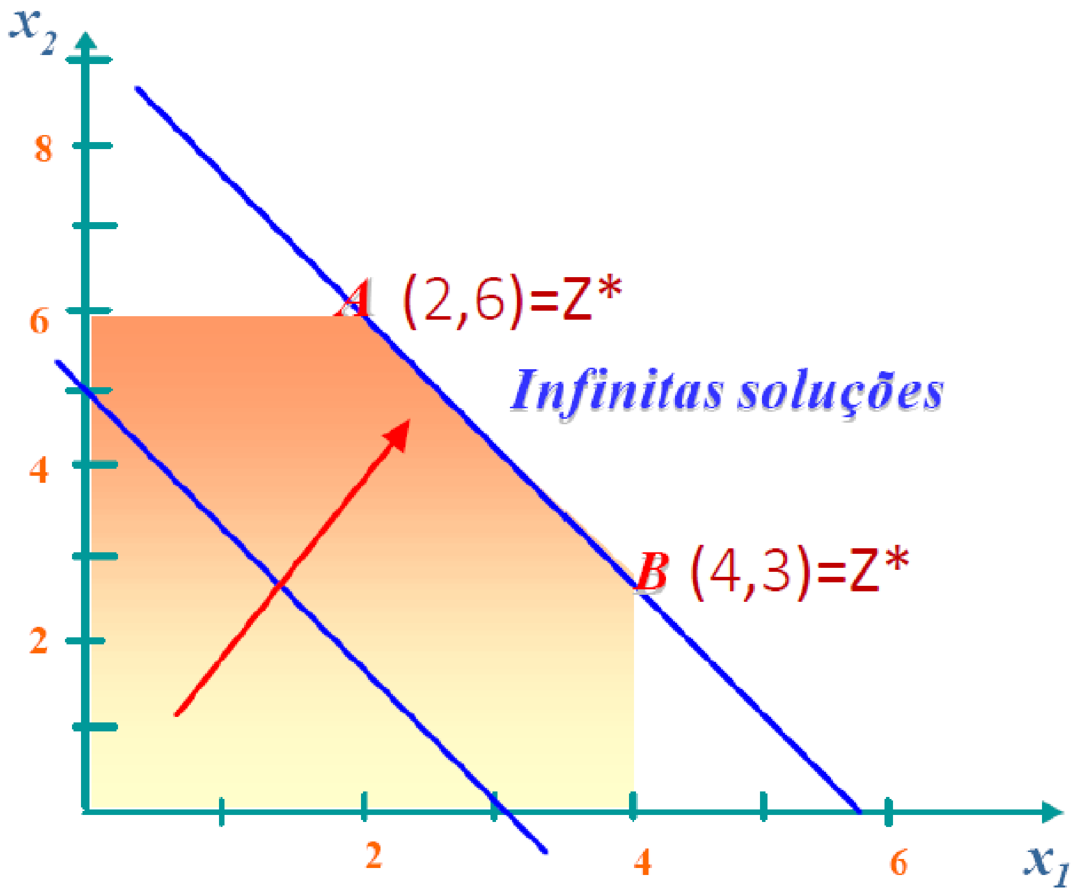
Solução Gráfica

Ao resolver um problema de PL graficamente pode ocorrer uma das seguintes situações:



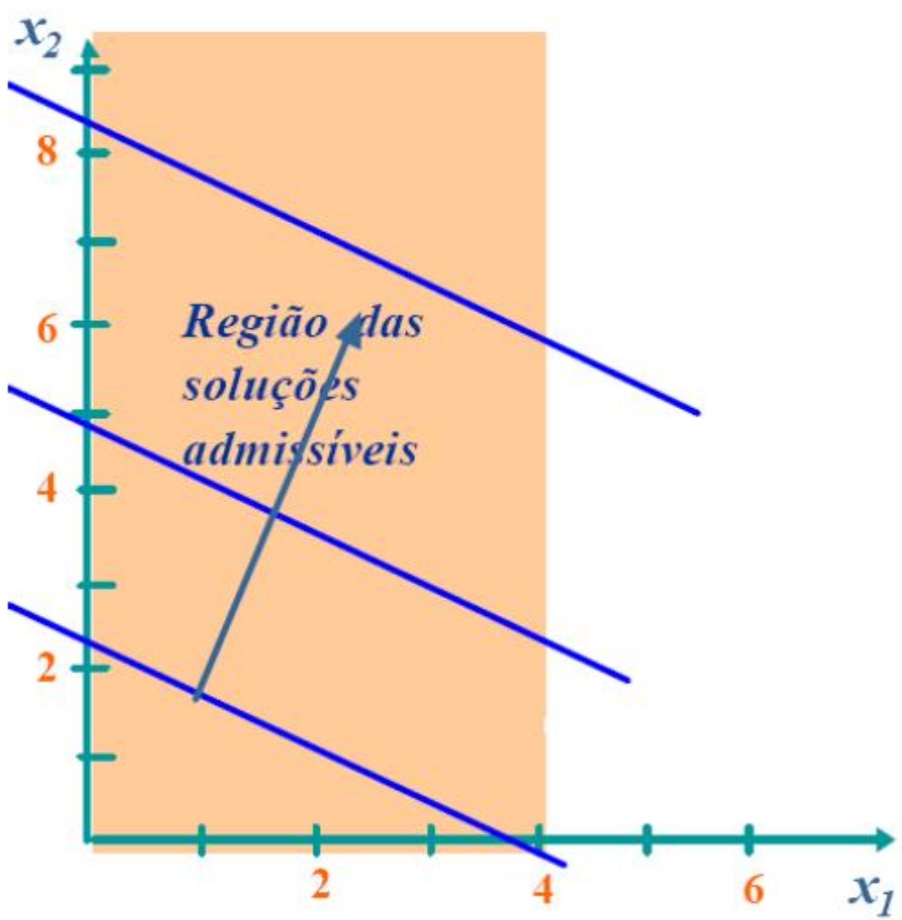
Solução Gráfica

O problema tem múltiplas soluções (uma infinidade)



Solução Gráfica

O problema não tem ótimo finito



Solução Gráfica

PUC-SP

Exemplo 6: Encontre a solução ótima do PL

$$Min\ z = 6x_1 + 10x_2$$

$$Sujeito\ a: \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solução Gráfica

PUC-SP

Exemplo 7: Encontre a solução ótima do PL

$$Max\ z = x_1 + x_2$$

$$Sujeito\ a: \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$