Otimização e Simulação

Problema do Caminho Mínimo

Prof. Dr. Daniel Rodrigues da Silva

Problema do Caminho mais Curto

O problema do caminho mais curto, também conhecido como **problema do caminho mínimo**, busca encontrar o menor caminho entre dois nós de uma rede. Em vez de minimizar a distância total percorrida, pode-se minimizar também o custo total ou o tempo total de viagem.

O problema considera apenas um nó de oferta que corresponde ao ponto de origem da rede e apenas um nó de demanda que corresponde ao ponto de destino da rede. A capacidade de fornecimento do nó de oferta e a demanda do nó de destino da rede correspondem a uma unidade. Já todos os outros nós intermediários ou de transbordo terão oferta e demanda iguais a zero.

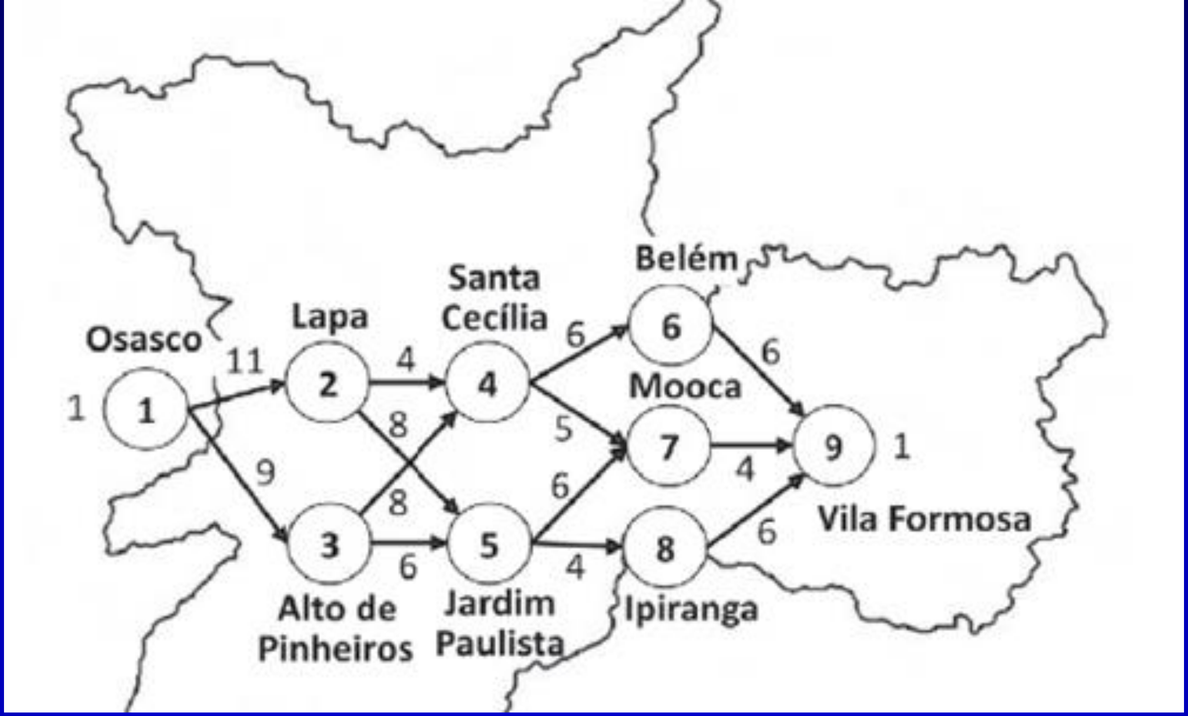
Formulação Matemática do Problema do Caminho mais Curto

Parâmetros do modelo:

c_{ij} = distância do nó i ao nó j,

Variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \;, & \text{se o arco (i , j) estiver contido no caminho mais curto} \\ 0 \;, & \textit{caso contrário} \end{cases}$$



Exemplo: Um fornecedor de alimentos localizado em Osasco entrega salgados e doces diariamente para uma padaria localizada na região da Vila Formosa, em São Paulo. Para isso, o motorista pode percorrer mais de um caminho, passando por diferentes bairros em São Paulo. A figura ao lado mostra possíveis caminhos a percorrer de Osasco à Vila Formosa, e as distâncias em quilômetros entre os nós ou bairros. Formular o problema do caminho mais curto.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \ , & \text{se (i , j) estiver contido no caminho mais curto} \\ 0 \ , & caso\ contrário \end{cases}$$

$x_{12} = 1$ se a rota (1, 2) está no caminho mais curto; 0 caso contrário.
$x_{13} = 1$ se a rota (1, 3) está no caminho mais curto; 0 caso contrário.
$x_{24} = 1$ se a rota (2, 4) está no caminho mais curto; 0 caso contrário.
$x_{25} = 1$ se a rota (2, 5) está no caminho mais curto; 0 caso contrário.
$x_{34} = 1$ se a rota (3, 4) está no caminho mais curto; 0 caso contrário.
$x_{35} = 1$ se a rota (3, 5) está no caminho mais curto; 0 caso contrário.
$x_{46} = 1$ se a rota (4, 6) está no caminho mais curto; 0 caso contrário.
$x_{47} = 1$ se a rota (4, 7) está no caminho mais curto; 0 caso contrário.
$x_{57} = 1$ se a rota (5, 7) está no caminho mais curto; 0 caso contrário.
$x_{58} = 1$ se a rota (5, 8) está no caminho mais curto; 0 caso contrário.
$x_{69} = 1$ se a rota (6, 9) está no caminho mais curto; 0 caso contrário.
$x_{79} = 1$ se a rota (7, 9) está no caminho mais curto; 0 caso contrário.
$x_{89} = 1$ se a rota (8, 9) está no caminho mais curto; 0 caso contrário.

PUC-SP

A função objetivo busca o menor caminho entre o nó de oferta e o nó de demanda da rede:

$$\min z = 11x_{12} + 9x_{13} + 4x_{24} + 8x_{25} + 8x_{34} + 6x_{35} + 6x_{46} + \\ + 5x_{47} + 6x_{57} + 4x_{58} + 6x_{69} + 4x_{79} + 6x_{89}$$

As restrições do modelo estão especificadas a seguir:

As restrições do modelo estão especificadas a seguir:

1. Nó de oferta:

$x_{12} + x_{13} = 1$ (nó 1 – Osasco)

2. Nó de demanda:

$x_{69} + x_{79} + x_{89} = 1$ (nó 9 – Vila Formosa)

3. Nós intermediários ou de transbordo:

$x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0$ (nó 2 – Lapa)

$x_{13} - x_{34} - x_{35} = 0$ (nó 3 – Alto de Pinheiros)

$x_{24} + x_{34} - x_{46} - x_{47} = 0$ (nó 4 – Sta. Cecília)

$x_{25} + x_{35} - x_{57} - x_{58} = 0$ (nó 5 – Jd. Paulista)

$x_{46} - x_{69} = 0$ (nó 6 – Belém)

$x_{47} + x_{57} - x_{79} = 0$ (nó 7 – Mooca)

$x_{58} - x_{89} = 0$ (nó 8 – Ipiranga)

4. As variáveis de decisão são binárias:

$x_{12}, x_{13}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{46}, x_{47}, x_{57}, x_{58}, x_{69}, x_{79}, x_{89} \in \{0, 1\}$

O problema do caminho mais curto será resolvido de duas formas: pelo algoritmo de Dijkstra e pelo Solver do Excel.

O Algoritmo de Dijkstra: O algoritmo de Dijkstra determina o menor caminho entre o nó fonte e o nó destino de uma rede, assumindo que os custos de todos os arcos são não negativos, garantindo assim que a solução ótima seja encontrada. Trata-se de um algoritmo eficiente que define um nó k como rotulado ou fechado quando se encontra o menor caminho do nó fonte até este nó. Já os nós cujos caminhos mínimos ainda não foram encontrados são chamados não rotulados ou abertos. Considere R o conjunto de nós rotulados e NR o conjunto de nós não rotulados. Assim, inicialmente, o conjunto R é vazio, enquanto o conjunto NR contém todos os elementos da rede. O algoritmo de Dijkstra é descrito a seguir.

Início.

$R = \{ \emptyset \}$

$NR = \{ 1, 2 , 3 , ... , n \}$

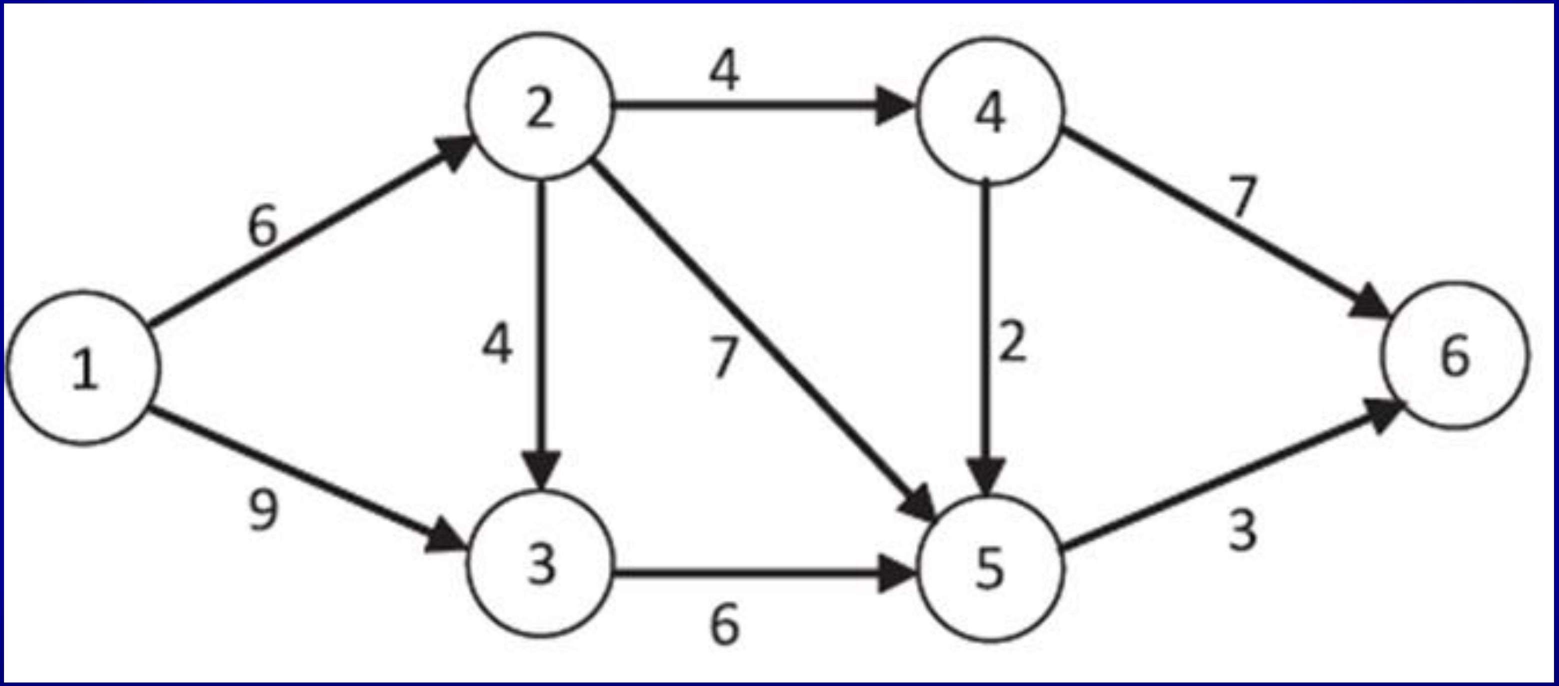
Passo 1. Atribua valor 0 ao nó fonte e ∞ aos demais nós.

Passo 2. **Enquanto** o conjunto de nós não rotulados for não vazio ($NR \neq \{\emptyset \}$) , **faça** o seguinte:

- Selecione o nó ainda não rotulado com menor valor (nó k)
- Passe o nó *k* para o conjunto de nós rotulados
- Para todo nó *j* ainda não rotulado que seja sucessor de *k*, faça:
- Some o valor do nó *k* com o custo do arco que une os nós *k* e *j*, e atribua esse novo valor ao nó *j*, em caso de melhoria.

  Nesse caso, define-se o nó *k* como precedente de *j* (só se houver melhoria).

Exemplo 1: Uma empresa transportadora norte americana entrega diariamente encomendas na cidade de Nova York do ponto de origem 1 (Queens) para o ponto de destino 6 (Manhattan), podendo percorrer diferentes roteiros, como e mostrado a seguir. O fluxo nos arcos representa o custo para transportar a demanda necessaria entre os respectivos bairros. Determine o melhor roteiro utilizando o algoritmo de Dijkstra.

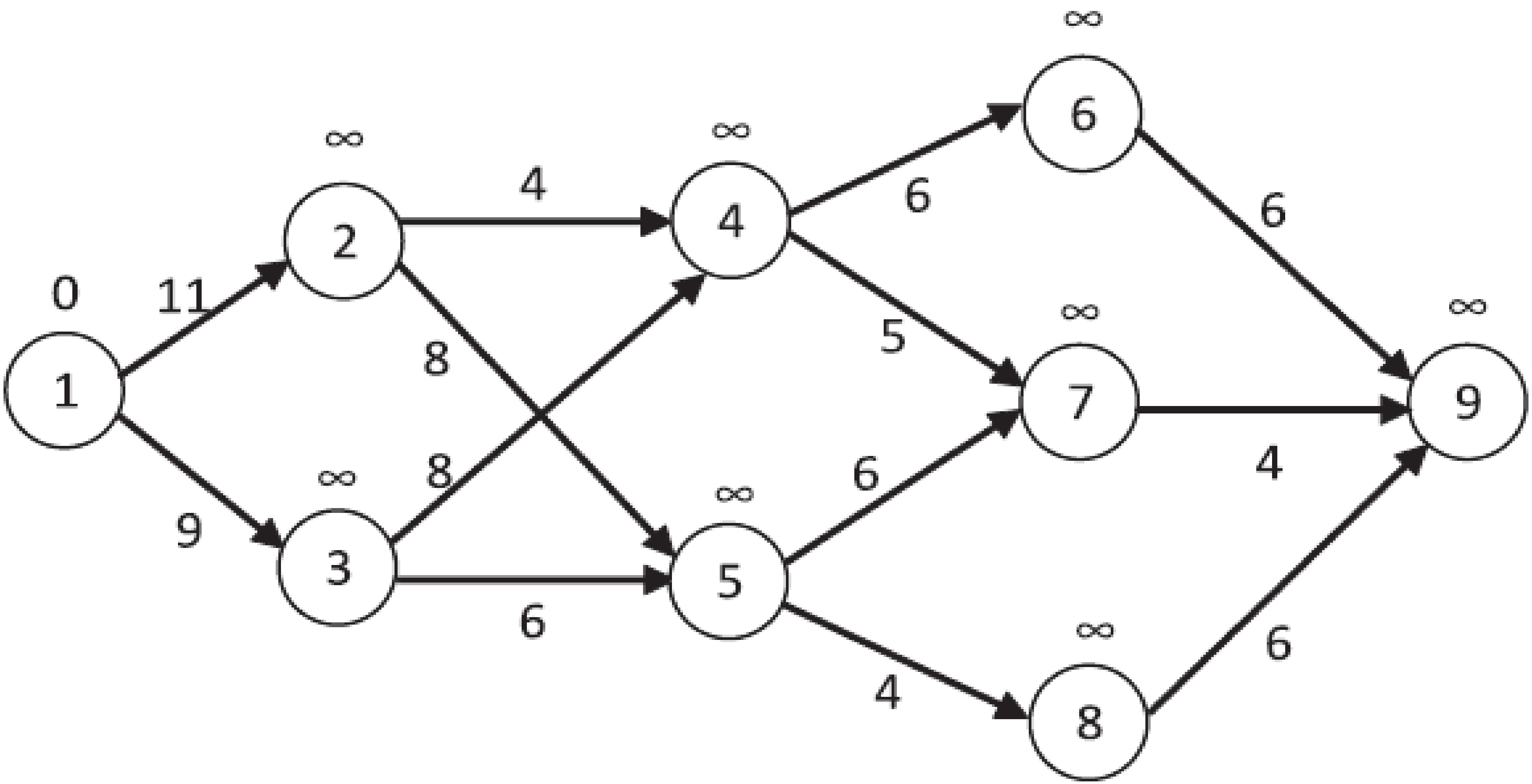


1 *	2 *	3 *	4 *	5 *	6*
0	∞	∞	∞	∞	∞
-	**(1 , 6)**	(1 , 9)	∞	∞	∞
-	-	**(1 , 9)**	(2 , 10)	(2 , 13)	∞
-	-	-	**(2 , 10)**	(2 , 13)	∞
-	-	-	-	**(4 , 12)**	(4 , 17)
-	-	-	-	-	**(5 , 15)**

Caminho Mínimo: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 = 15$

Exemplo 2: Aplique o algoritmo de Dijkstra para o problema do caminho mais curto descrito no grafo abaixo.

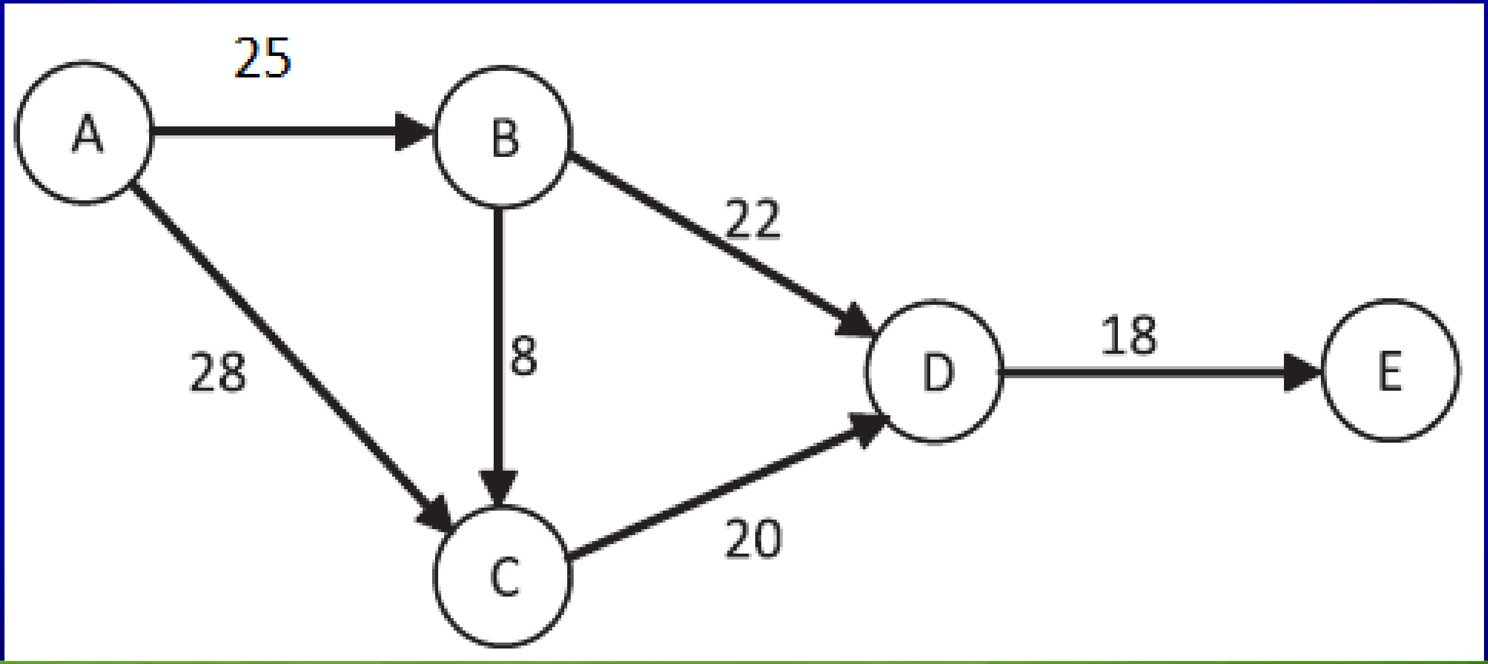
Passo 1. Atribuindo o valor 0 ao nó fonte (1) e ∞ aos demais nós, obtém-se o grafo: abaixo.



1 *	2*	3 *	4*	5*	6	7*	8*	9*
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	(1 , 11)	**(1 , 9)**	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	**(1 , 11)**	-	(3 , 17)	(3 , 15)	∞	∞	∞	∞
-	-	-	**(2 , 15)**	(3 , 15)	∞	∞	∞	∞
-	-	-	-	**(3 , 15)**	(4 , 21)	(4 , 20)		
-	-	-	-	-	(4 , 21)	(4 , 20)	**(5 , 19)**	
-	-	-	-	-	(4 , 21)	**(4 , 20)**	-	(8 , 25)
					(4 , 21)	-	-	**(7 , 24)**

Caminho Mínimo: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 9 = 24$

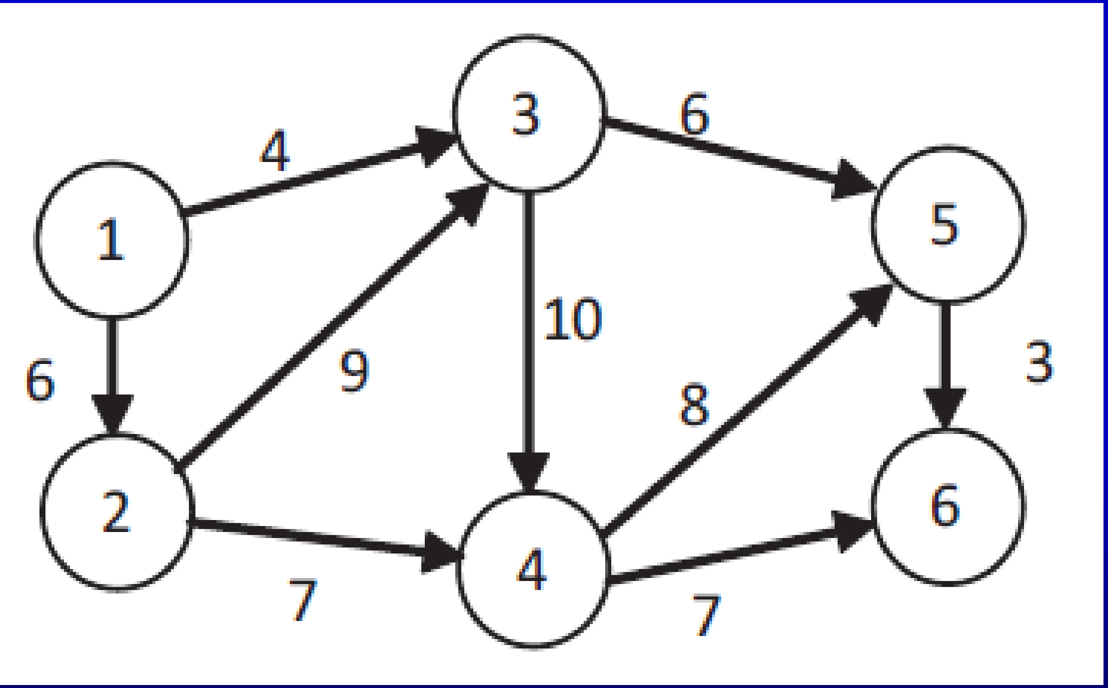
Exemplo 3: Uma empresa do setor petrolífero está analisando o escoamento de seus produtos em uma malha logística que tem como ponto de origem o nó A e como ponto de destino o nó E, passando pelos nós intermediários B, C e D. O fluxo nos arcos representa o tempo de escoamento entre os respectivos nós, em segundos. Determine o caminho mais rápido a ser percorrido, utilizando o algoritmo de Dijkstra



A *	B *	C *	D *	E
0	∞	∞	∞	∞
-	**(A , 25)**	(A , 28)	∞	∞
-	-	**(A , 28)**	(B , 47)	∞
-	-	-	**(B , 47)**	**(D , 65)**

Caminho: $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E = 65$

Exemplo 4: A empresa WTLogistica & Solucoes deseja determinar o caminho mais econômico para distribuir seu produto que pode ser transportado do porto de Suape (1) para o porto de Santos (6). Os demais nós representam os portos intermediários a serem visitados na rede logística. O fluxo nos arcos representa a quantidade máxima que pode ser transportada (em milhoes de toneladas) entre os respectivos portos. Resolva o problema.



1 *	2 *	3 *	4	5 *	6 *
0	∞	∞	∞	∞	∞
-	(1 , 6)	**(1 , 4)**	∞	∞	∞
-	**(1 , 6)**	-	(3 , 14)	(3 , 10)	∞
-	-	-	(2 , 13)	**(3 , 10)**	∞
-	-	-	(2 , 13)	-	(5 , 13)

Caminho: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 = 13$

Exemplo 5. Determine o menor caminho entre o vértice 1 e o vértice 9