# 组合数学

Quaternijkon

组合数学课程笔记

September 12, 2024

# 目录

1. 鸽巢原理 ........ 4
1.1. 鸽巢原理简单形式 ........ 4
1.2. 鸽巢原理加强版 ........ 4
1.3. 课后习题 ........ 5
2. 课后习题 ........ 6
2.1. 第 1 章：鸽巢原理 ........ 6
2.1.1. $P_{22}, 6.$ ........ 6
2.1.2. $P_{23}, 15.$ ........ 6
2.1.3. $P_{23}, 26.$ ........ 7

# 1. 鸽巢原理

## 1.1. 鸽巢原理简单形式

如果要把 n+1 个物体放进 n 个盒子，那么至少有一个盒子包含两个或更多的物体。

中国剩余定理

设 m 和 n 是互素的正整数，并设 a 和 b 为整数，其中$0 \leq a \leq m-1$以及 $0 \leq b \leq n-1$。于是，存在正整数 x，使得 x 除以 m 的余数为 a，并且 x 除以 n 的余数为 b;即 x 可以写成$x = p * m + a$的同时又可写成$x = q * n + b$ 的形式，这里，p 和 q 是两个整数。

## 1.2. 鸽巢原理加强版

设 $q_1, q_2$，是正整数。如果将$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots\ldots + q_n - n + 1$个物体放入 n 个盒子内，那么或者第一个盒子至少含有$q_1$个物体，或者第二个盒子至少含有$q_2$个物体，...，或者第 n 个盒子至少含有$q_n$个物体。

推论

设 n 和 r 都是正整数。如果把$n(r-1)+1$个物体分配到 n 个盒子中，那么至少有一个盒子含有 r 个或更多的物体。

可以用另一种方法陈述这一推论中的结论，即平均原理: 如果 n 个非负整数$m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$的平均数大于$r-1$，即

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{n} \geq r - 1 \quad (1)$$

那么至少有一个整数大于或等于 r。

一个不同的平均定理

如果 n 个非负整数$m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$的平均数小于 r+1，即

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{n} \leq r - 1 \quad (2)$$

那么其中至少有一个整数小于 r+1。

另外一个平均定理

如果 n 个非负整数$m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$的平均数至少等于 r，那么这 n 个整数$m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$至少有一个满足$m_i \geq r$

## 1.3. 课后习题

课后习题

小节 2.1

# 2. 课后习题

## 2.1. 第 1 章：鸽巢原理

### 2.1.1. $P_{22}, 6.$

**证明：从 1,2,...,200 中任取 100 个整数，其中之一小于 16,那么必有两个数，一个能被另一个整除。**

首先，将整数 1 至 200 按照$1 * 2^n, 3 * 2^n, 5 * 2^n, ..., 197, 199$的形式分成 100 个抽屉，从 1 到 200 中任取 100 个，其中有一数 a 小于 16，假设没有两个构成整除关系，首先按抽屉原理，这 100 个数必须为每个抽屉中仅取且必取 1 个数，否则假设不成立，所以：

- 当 a 为小于 16 的奇数时（比如 15），显然有数与其构成整数关系（比如抽屉 15*11=165）结论成立；
- 当此数为$1 * 2^n$时，显然$n \leq 3$,考虑抽屉$3 * 2^{n_1}, 9 * 2^{n_2}, 27 * 2^{n_3}, 81 * 2^{n_4}$，显然若不存在整除关系，则$n_4 < n_3 < n_2 < n_1 < 3$，即四个数只能在 0、1、2 三个数中选择，此时产生矛盾，必存在两数整除关系；
- 更一般的，当此数为非 2 的幂的偶数时，可写成$b * 2^n$，b 为奇数，且$1 < b \leq 7, n \leq 2$，考虑抽屉$3b * 2^{n_1}, 9b * 2^{n_2}, 27b * 2^{n_3}$(因$b \leq 7, 27b < 200$), $n_3 < n_2 < n_1 < 2$，即三个数只能在 0、1 两个数中选择，此时产生矛盾。

综上，假设不成立，必存在两数整除关系。

### 2.1.2. $P_{23}, 15.$

**证明：从 1,2,... ,2n 中任选 n +1 个整数，则其中必有两个数，它们的最大公因子 为 1**

1. 构造配对

   将集合$\{1, 2, 3, ..., 2n\}$中的数两两配对，形成 n 对：

   $$(1, 2), (3, 4), ..., (2n - 1, 2n) \tag{3}$$

   每一对中的两个数都是连续的奇数和偶数。

2. 应用鸽巢原理

   - 我们有 n 对，每对包含两个数。
   - 任取 n + 1 个数，根据鸽巢原理，至少有一对中的两个数被选中。

3. 分析被选中的两数

   - 设这对被选中的数为 $(2k - 1, 2k)$，其中 k 为正整数， $1 \leq k \leq n$ 。
   - 这两个数是连续的奇数和偶数，即 2k - 1 和 2k 。
   - 由于 2k - 1 是奇数， 2k 是偶数，它们的最大公因子为：

   $$\gcd(2k - 1, 2k) = \gcd(2k - 1, 2k - (2k - 1)) = \gcd(2k - 1, 1) = 1 \tag{4}$$

   因此，这两个数互质。

根据上述分析，无论从 $1, 2, ......, 2n$ 中选取哪 $n + 1$ 个数，必定存在至少一对连续的奇数和偶数，这对数的最大公因子为 1。因此，在所选的 $n + 1$ 个数中，必有两个数互质。

综上所述， 从集合 $1, 2, ......, 2n$ 中任取 n + 1 个整数，必存在两个数的最大公因子为 1。

**2.1.3.** $P_{23}, 26.$

**证明：在任意给出的 n+1(n≥2)个正整数中必有两个数，它们的差能被 n 整除.**

1. 考虑数的模 n 余数

   任何一个正整数 a 都可以表示为：

   $a = q * n + r$

   其中， q 是商， r 是余数，且 $0 \leq r < n$ 。

   因此，每个正整数在除以 n 后，其余数 r 只能取 $0, 1, 2, ......, n - 1$ 这 n 个可能的值。

2. 应用鸽巢原理

   - 我们有 n + 1 个正整数，每个数在除以 n 后有 n 种可能的余数。
   - 根据鸽巢原理，当我们有 n + 1 个“鸽子”放入 n 个“鸽巢”中时，至少有一个“鸽巢”中有至少两只“鸽子”。

   在这里，“鸽子”代表 n + 1 个正整数，“鸽巢”代表余数 $0, 1, 2, ......, n - 1$ 。

3. 得出结论

   根据鸽巢原理，至少存在两个不同的正整数 a 和 b ，使得它们在除以 n 后的余数相同。即：$a \equiv b (\bmod n)$

   这意味着：$a - b \equiv 0 (\bmod n) \Rightarrow$ n 整除 （a-b）

   因此，这两个数的差 a - b 能被 n 整除。

综上所述， 该命题得证。