B. Maximum of Maximums of Minimums

Анализ на алгоритъма за решаване на задачата

Нека направим нещо като идукция по входната променлива k, която съхранява броя на подсегментите или както ще наричаме долу - парчетата, на които ще разделим входния масив.

1) За $k = 1$ единственото парче на което може да разделим масива е целия масив. Тоест отговора ще бъде минималния елемент от масива, тъй като масива ще бъде единствения подсегмент.
2) За $k = 2$ искаме да разделим масива на 2 парчета и да вземем максималния минимум от двете части. По колко начина може да разделим масива на две парчета? Ако масива е от n елемента, то начините, по които може да го разделим на две парчета са точно $n - 1$. Нека кръстим парчертата *ляво* и *дясно*. За всяко ляво парче ще знаем че започва от първия елемент на масива, а за всяко дясно - че завършва на последния елемент от масива. Ако края на ляво парче е a_x, $x \in \overline{1, n-1}$ то началото на съответстващото му дясно парче ще е a_{x+1}.

   Може да построим разредена таблица (*sparse table*), която ще ни подсигури преизчисляването на минимума на всеки такъв създаден интервал за константно време. Времето необходимо за построяването на такава таблица ще е $O(n \times log(n))$, но забележете, че то ще е необходимо само в случая когато $k = 2$.
3) За $k = 3$ винаги ще може да отделим максималния елемент от масива в отделен интервал. По-този начин максималния елемент от масива ще е желания отговор.

Нека разгледаме по-подробно случая в който $k = 2$. Може ли да докажем, че при $k = 2$, отговора ще е винаги a_1 или a_n $\left(\, max\{a[0], a[n-1]\} \, \right)$ в зависимост от това кой елемент е по-голям (максималния от първия и последния елемент на масива)?

Искаме да разделим масива на две части, така че минимума от двете части да е максимален. Имаме $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$.

Нека a_1 е максималния елемент на масива, тогава може да разделим масива по следния начин: $\{a_1\}$, $\{a_2, \ldots, a_n\}$ и аналогично ако a_n е максималния елемент на масива, то делението на две части, което що доведе до искания отговор ще бъде $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, $\{a_n\}$.

Да допуснем, че максималния елемент е някъде измежду елементите $\{a_2, \ldots, a_{n-1}\}$, т.е. не е нито a_1, нито a_n. Тогава както и да разцепим масива, този максимален елемент ще бъде без значение, тъй като ще вземем по-малкия при разделянето на парчетата в случая a_1 или a_n. А пък ако някъде по пътя между крайните елементи и максималния елемент има по-малък елемент от съответния краен, то при разделянето на интервалите може да спрем непосредствено преди него и по-този начин да максимизираме минимума.

Така доказахме, че при $k = 2$ отговора ще е $max\{a_1, a_n\}$.

github.com/andy489