

Álgebra Linear Computacional

Lista de exercícios 03

Problema 1: Quais das matrizes S_1, S_2, S_3, S_4 tem dois autovalores positivos? Use um teste, não calcule os λ 's. Encontre também um vetor x tal que $x^T S_i x < 0$, então S_i não é uma matriz definida positiva.

$$S_1 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}, S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 100 \end{bmatrix}, S_4 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{bmatrix}$$

→ usando o teste "Todos os menores principais líderes" temos, para S_1 :

$$\det([5]) = 5, \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\right) = (5)(7) - 36 = -1 < 0,$$

para S_2 :

$$\det([-1]) = -1 < 0, \text{ para } S_3: \det([1]) = 1,$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 100 \end{bmatrix}\right) = 100 - 100 = 0, \text{ para } S_4:$$

$$\det([1]) = 1, \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{bmatrix}\right) = 101 - 100 = 1 > 0,$$

observe que apenas para S_4 todos os menores principais líderes são ~~pe~~ maiores

que zero o que garante também seus autovalores serem positivos, maiores que zero.

Para a segunda parte, temos:

∴

$$S_1 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x^T S_1 x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 + 6x_2 & 6x_1 + 7x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= (5x_1 + 6x_2)x_1 + (6x_1 + 7x_2)x_2 = 5x_1^2 + 6x_2x_1 + 6x_1x_2 + 7x_2^2 =$$

$$= 5x_1^2 + 12x_1x_2 + 7x_2^2, \text{ pela proposta:}$$

$$5x_1^2 + 12x_1x_2 + 7x_2^2 < 0 \quad \text{que pode ser satisfeito}$$

$$\text{para } x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{4}, \quad x = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$