__/__/__

Álgebra Linear Computacional
Lista de Exercícios 02

Problema 1: Encontre o espaço coluna $C(A)$, o espaço linha $R(A)$ e o espaço nulo $N(A)$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$C(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R(A) = C(A^T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$N(A)$:

$$Ax = 0, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
, logo, $N(A) = x = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \forall a \in \mathbb{R}.$

Problema 2: Existem quatro possibilidades para rank r e o tamanho m, n da matriz A que são equivalentes às quatro possibilidades para o sistema $Ax = b$. Encontre quatro matrizes de A_1 até A_4 que mostrem essas possibilidades.

$r = m = n$ $A_1 x = b$ possui uma solução para todo b
$r = m < n$ $A_2 x = b$ possui ∞ soluções ou uma solução
$r = n < m$ $A_3 x = b$ possui nenhuma ou uma solução
$r < m, r < n$ $A_4 x = b$ possui nenhuma ou ∞ soluções

$r = m = n = 2$ (observe que desde que essa condição seja mantida, pode ser escolhido outros valores para m, n e r, o valor escolhido aqui é pela simplicidade. seja:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$, novamente, $C(A_1) = 2$
$r = 2 = m = n$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2\times 1} , \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$, logo:

$$Ax = b \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ a_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 = b_1 \\ a_3 x_1 + a_4 x_2 = b_2 \end{cases}$$, temos:

__/__/__

$x_1 = \frac{b_1 - a_2 x_2}{a_1}$, $a_3\left(\frac{b_1 - a_2 x_2}{a_1}\right) + a_4 x_2 = b_2 \Rightarrow$

$\frac{a_3 b_1}{a_1} - \frac{a_3 \cdot a_2 \cdot x_2}{a_1} + a_4 x_2 = b_2 \Rightarrow$

$\frac{a_3 b_1}{a_1} - x_2\left(\frac{a_3 \cdot a_2}{a_1} + a_4\right) = b_2 \Rightarrow$

$x_2 = \frac{\left(\frac{a_3 b_1}{a_1} - b_2\right)}{\left[\frac{a_3 \cdot a_2}{a_1} + a_4\right]}$ $\rightarrow$ observe então que desde que $r = 2 = m = n$ $(C(A_1) = 2)$, uma vez definido b, para todo b definido, ~~existe~~ (e também A_1), existe uma solução X. (uma vez definindo A_1 e b, o X fica definido).

Exemplo para $A_1 : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

~~Para~~ ~~$r = 1 = m < n = 2$~~

~~$A_2 = [a_1 \;\; a_2]$, $A_2 X = \underset{1\times 2}{[a_1 \;\; a_2]} \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = b_1$~~

~~$\Rightarrow a_1 x_1 + a_2 x_2 = b_1$~~

~~Observe que mesmo escolhendo A_2 e b_1 existem ainda infinitas soluções para x.~~

Para $r = 2 = m < n = 3$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix}_{2\times3}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T_{3\times1}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{2\times1}$$

Observe que temos:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b_1 \\ a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6 x_3 = b_2 \end{cases}$$ lembrando que $c(A_2) = 2$

Um exemplo seria $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

→ Observe pelo sistema mostrado que A_2 possui infinitas soluções.

Da mesma maneira podemos fazer para A_3,

$r = n = 2 < m = 3$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e para A_4, $r < m = 2$, $r < n = 2$,

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

__/__/__

Problema 3: Encontre os autovalores de A, B, AB e BA.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

(a) Os autovalores de AB são iguais aos autovalores de A multiplicados pelos autovalores de B?

(b) Os autovalores de AB são iguais aos autovalores de BA?

→ autovalor

$$AX = \lambda X, \quad Ax - \lambda x = 0, \quad \underbrace{(A - \lambda I)}_{B'} x = 0,$$

autovetor

$B'x = 0$ (observe que B é não invertível $B'^{-1}B'x = B'^{-1}0$
$\Rightarrow Ix = 0$ o que não é possível para $x = 0$.)

B' não invertível, também chamado de singular, logo $\det B' = 0$.

$$B' = A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix},$$

$$\det B' = (1-\lambda)(1-\lambda) - 0 = 0, \quad (1-\lambda)^2 = 0, \quad \boxed{\lambda = 1}$$

→ Para B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}, \quad \det(B - \lambda I) = (1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)^2 = 0, \quad \boxed{\lambda = 1}$$

$\Rightarrow$ Para AB

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}, \det(AB - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$.

resolvendo temos:

$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$

$\rightarrow$ Para BA

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}, \det(BA - \lambda I) = (3-\lambda)(1-\lambda) - 2 = 0$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow 3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$,

resolvendo temos:

$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$

(a) Não

(b) Sim

__/__/__

Problema 4: Seja A uma matriz quadrada e λ uma constante qualquer. Explique por que $\det(A-\lambda I)=\det(A^T-\lambda I)$

Por questão de simplicidade vamos considerar uma matriz $m=n=2$.

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad A^T=\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix}$$, observe que:

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 \\ a_3 & a_4-\lambda \end{vmatrix}=(a_1-\lambda)(a_4-\lambda)-a_2\cdot a_3,$$

agora considerando a transposta, temos:

$$\det(A^T-\lambda I)=\det\begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_3 \\ a_2 & a_4-\lambda \end{vmatrix}=(a_1-\lambda)(a_4-\lambda)-a_3\cdot a_2,$$

Observe que para uma matriz quadrada a diagonal de A e A^T são iguais, diagonal principal, e a diagonal secundária é invertida o que não afeta o cálculo do determinante, uma vez que a multiplicação real comum possui a ~~pro~~ propriedade comutativa.