__/__/__

Álgebra Linear Computacional
Lista de Exercícios 01

Problema 1: Os vetores $a_1, a_2, \dots, a_n$ estão em um espaço m-dimensional $\mathbb{R}^m$, e uma combinação $c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$ é um vetor nulo. Esta afirmação é a nível de vetor.

$$A = \begin{bmatrix} — a_1^T — \\ — a_2^T — \\ \vdots \\ — a_m^T — \end{bmatrix}$$

(1.1) Reescreva esta afirmação usando matriz. Use a matriz A com os a's nas colunas e use o vetor coluna $c = (c_1, \dots, c_n)$.

$$\vec{a}_K = [a_1\ a_2 \dots a_m]^T, \quad \vec{a}_1 = \vec{a}_{K=1}$$

$$A = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \dots \vec{a}_m], \quad C = [c_1\ c_2 \dots c_m]^T$$

$$AC = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \dots \vec{a}_m][c_1\ c_2 \dots c_m]^T =$$

$$= c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_m\vec{a}_m = 0$$

(1.2) Reescreva esta afirmação usando escalares. Use subscritos e a notação sigma (somatório) para adicionar números. O vetor coluna a_j tem componentes $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{2j} & a_{22} & & a_{2j} \\ a_{31} & a_{32} & & a_{3j} \end{bmatrix}_{m \times k}, \quad C = [c_1 \; c_2 \; \cdots \; c_k]^T$$

$$AC = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot a_{ij} = 0$$

Problema 2°: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(a) Encontre as matrizes C_1 e C_2 contendo colunas independentes de A_1 e A_2.

$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, observe que: $3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$ e $-2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}$,

logo, as colunas 2 e 3 de A_1 são L.I.

$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, observe que: $(-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$, logo,
a coluna 3 de C_2 é L.I.

__/__/__

Os coeficiente $c_1 = (-1)$ e $c_2 = (2)$, podem ser encontrados resolvendo:

$\boxed{Bx = v}$, em que: $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, $x = [x_1 \ x_2]$, $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$.

(b) Estas colunas formam a base para os espaços colunas A_1 e A_2. Quais são as dimensões desses espaços colunas?

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$, então $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, dimensão $= 1$

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, então $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, dimensão $= 2$

(c) Quais são os postos de A_1 e A_2?

Lembrando que o posto ou "matrix rank" corresponde ao número de linhas ou colunas linearmente independentes da matriz e que "the rank of a matrix is ~~to~~ the dimension of its columns space", temos:

rank $A_1 = 1$
rank $A_2 = 2$

$c_{ij} = (\text{row } i \text{ of } A)^T \times (\text{col } j \text{ of } B) = \sum_{k=1}^{m} c_{ik} \cdot b_{kj}$

(d) Quantas são as linhas independentes em A_1 e A_2?

Lembrando que:

"The number of independent colums equals the number of independent rows".

rank $A_1 = 1$, rank $A_2 = 2$

Problema 3: Para as seguintes matrizes com blocos quadrados, encontre $A = CR$. Quais os postos?

$$A_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \text{zeros} & \text{ones} \\ \text{ones} & \text{ones} \end{bmatrix}}_{4\times4}, \quad A_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_1 \end{bmatrix}}_{8\times4}, \quad A_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & A_1 \\ A_1 & A_1 \end{bmatrix}}_{8\times8}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{column space } A = C(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = CR = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{4\times2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{2\times4}.$$

* Os postos são C e R.

Para A_2,

$$A_2 = \underset{8\times 4}{\begin{bmatrix} 0&0&1&1\\ 0&0&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix}}, \quad C(A_2) = \underset{8\times 2}{\begin{bmatrix} 0&1\\ 0&1\\ 1&1\\ 1&1\\ 0&1\\ 0&1\\ 1&1\\ 1&1 \end{bmatrix}}, \quad A_2 = CR = \underset{8\times 2}{\begin{bmatrix} 0&1\\ 0&1\\ 1&1\\ 1&1\\ 0&1\\ 0&1\\ 1&1\\ 1&1 \end{bmatrix}} \underset{2\times 4}{\begin{bmatrix} 1&1&0&0\\ 0&0&1&1 \end{bmatrix}}$$

* Os postos são novamente C e R.

Para A_3 temos: $C(A_3) = C(A_2)$, $A_3 = CR = \underset{\cancel{8\times 8}}{\begin{bmatrix} A_1 & A_1\\ A_1 & A_1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1&1&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&1&1 \end{bmatrix}$

$$\underset{8\times 8}{A_3} = CR = \underset{8\times 2}{C(A_2)} \cdot \underset{2\times 8}{\begin{bmatrix} 1&1&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&1&1 \end{bmatrix}}$$

Problema 4: Para calcular $C = AB$, onde A é (m,n) e B é (n,p) usando uma soma de produtos externos (colunas vezes linhas), [...].

```
For i=1 to m
    For j=1 ton p
        For K=1 ton

            C(i,j)= C(i,j)+A(i,K)*B(K,j)
```