d-кращих шляхів сформулювати задачу та навести ефективний алгоритм пошуку d-найкращих шляхів для графу-ланцюжка

$Z = \langle T, \tau \subset T^2, K, q: T \times K \to \mathbb{R}, g: \tau \times K^2 \to \mathbb{R} \rangle$

$$\langle k_1^*, \dots, k_d^* \rangle \in \operatorname*{argmind}_{k: T \to K} \left\{ \sum_{t \in T} q_t(k_t) + \sum_{tt' \in \tau} g_{tt'}(k_t, k_{t'}) \right\}$$

$$\operatorname*{argmind}_{x \in X} f(x) = \{ \langle x_1, \dots, x_d \rangle \in X^d : f(x_1) = \min_{x \in X} f(x), f(x_2) = \min_{x \in X \setminus \{x_1\}} f(x), \dots$$

$$\dots, f(x_d) = \min_{x \in X \setminus \{x_1, \dots, x_{d-1}\}} \}$$

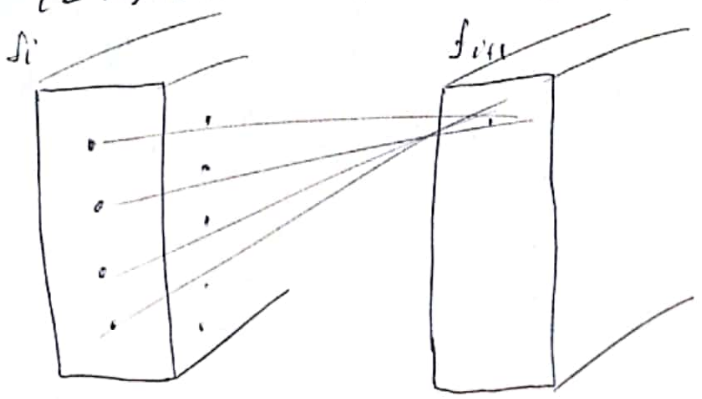
що сортований кортеж

$$f(x_1) \le f(x_2) \le \dots \le f(x_n) \le f(x'), \ \forall x' \in X \setminus \{x_1, \dots, x_d\}.$$

$$x_i \ne x_j, \ i \ne j$$

$$\operatorname*{mind}_{x \in X} f(x) = \langle f(x_1), \dots, f(x_d) \rangle : \langle x_1, \dots, x_d \rangle \in \operatorname*{argmind}_{x \in X} f(x) \rangle.$$

$\tau = \{ \langle t_i, t_{i+1} \rangle : i = \overline{1, |T|-1} \}, \ g_i = g_{t_i t_{i+1}}$



$$f_i(k) = \operatorname*{mind}_{k: \{1, \dots, i-1\} \to K} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} q_j(k_j) + \sum_{j=1}^{i-2} g_j(k_j, k_{j+1}) + g_{i-1}(k_{i-1}, k_i) + q_i(k) \right\}$$

$$G = \bigoplus_{k: T \to K} q'_1(k_1) \otimes \bigotimes_{t=2}^{|T|} \left(g'_{t-1}(k_{t-1}, k_t) \otimes q'_t(k_t) \right)$$

$\oplus = \operatorname{mind}.$

$\langle z_1, \dots, z_d \rangle \otimes \langle z'_1, \dots, z'_d \rangle = \operatorname{mind} \{ z_i + z'_j : i = \overline{1,d}, j = \overline{1,d} \}$

$R = \{ \langle z_1, \dots, z_d \rangle : z_j \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \}.$

$\mathbb{O} = \langle 0, 0, \dots 0 \rangle$ $\quad q'_t(k) = \langle q_t(k), +\infty, \dots, +\infty \rangle$

$\mathbb{1} = \langle +\infty, \dots \rangle$ $\quad g'_t(k, k') = \langle g_t(k, k'), +\infty, \dots, +\infty \rangle$

$$f_i(k) = \left[\bigoplus_{k' \in K} f_{i-1}(k') \otimes g'_{i-1}(k'; k) \right] \otimes g_i(k)$$

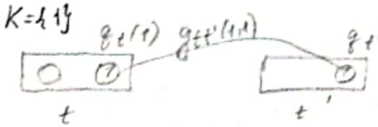
К-в-2 навести спосіб перетворення min-sum задачі розмітки з довільною скінченною множиною міток на задачу з двома мітками; показати, що, якщо початкова задача була субмодулярною, перетворення не пошкодило субмодулярність

к-в-2 відрізняється від Hiroshi-Ishikawa тим, що H-I розрахований на (min(max),+) задачу, а к-в-2 більш універсальний.

Ну і H-I потребує субмодулярність, а к-в-2 ні

Розглянемо такі випадки

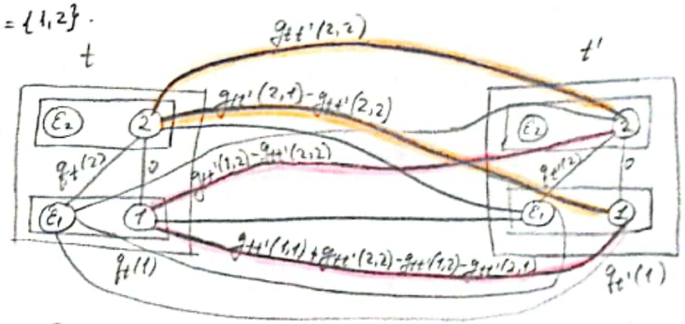
1) $K=\{1\}$



Нам потрібно побудувати задачу, щоб в кожному об'єкті обрати одну мітку

← ми не малюємо дугу, яка має ∞ вагу

2) $K=\{1,2\}$.



Вага обраної розмітки має співпадати з вагою результуючої розмітки, що була в задачі к міток.

ε - „нічна" мітка (пуста мітка).

Ми маємо зробити, щоб при виборі наприклад в t мітки ε_1 ми обов'язково обрали $(2)_t$ і більш того, щоб результуюча вага шляху в ε_1 дорівнювала вазі $(2)_t$ => робимо дугу з $(\varepsilon_1)_t \to (2)_t$ в t з вагою $g_t(2)$. Аналогічно в об'єкті t'.

Ми забороняємо обирати 2 пустих мітки (бо треба щось обрати)

Робимо дугу $(1) \to (2)$ нульовою, бо, якщо ми обираємо (1), то (2) не змогли б обрати.

Навіть з $(2)_t \to (\varepsilon_1)_{t'}$ робимо вагу 0; щоб ми могли обрати (2) в t'

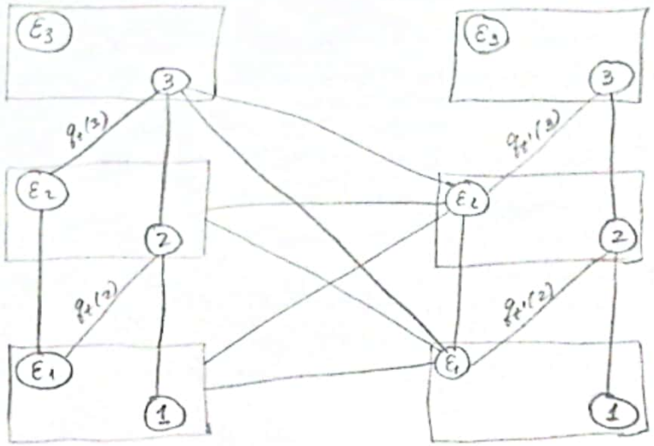
Проводимо з $(2)_t \to (2)_{t'}$ з вагою $g_{tt'}(2,2)$

Проводимо з $(2)_t \to (1)_{t'}$ з вагою $g_{tt'}(2,1) - g_{tt'}(2,2)$, бо цикл так

$(2)_t \to (1)_{t'} \to (2)_{t'} \to (2)_t$ · отримали
вибрали вибрали вибрали вибрали.

Проводимо $(1)_t \to (1)_{t'}$: $g_{tt'}(1,1) + g_{tt'}(2,2) - g_{tt'}(1,2) - g_{tt'}(2,1)$

3) $K = \{1, 2, 3\}$



$$g'_{t_k}(k) = \begin{cases} g_t(1), & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases} ; \quad g'_{t_k}(\mathcal{E}_k) = \begin{cases} +\infty, & k = |K| \\ 0, & k < |K| \end{cases}$$

$$g'_{t_k t_{k+1}}(\mathcal{E}_k, k+1) = g_t(k+1); \quad g'_{t_k t'_{k'}}(\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_{k'}) = \begin{cases} +\infty, & k = |K| \vee k' = |K| \\ 0, & k < |K| \,\&\, k' < |K| \end{cases}$$

$$g'_{t_k t_{k+1}}(k, \mathcal{E}_{k+1}) = +\infty \quad ; \quad g'_{t_k t'_{k'}}(\mathcal{E}_k, k') = \begin{cases} 0, & k < |K| \\ +\infty, & k = |K| \end{cases}$$

$$g'_{t_k t'_{k'}}(k, \mathcal{E}_{k'}) = \begin{cases} 0, & k' < |K| \\ +\infty, & k' = |K| \end{cases}$$

$$g'_{t_{|K|} t'_{k'}}(|K|, k') = \begin{cases} g_{tt'}(|K|, |K|), & k' = |K| \\ g_{tt'}(|K|, k') - g_{tt'}(|K|, k'+1), & k' < |K| \end{cases}$$

$$g'_{t_k t'_{|K|}}(t, |K|) = \begin{cases} g_{tt'}(|K|, |K|), & k = |K| \\ g_{tt'}(k, |K|) - g_{tt'}(k+1, |K|), & k < |K| \end{cases}$$

$$g'_{t_k t'_{k'}}(k, k') = g_{tt'}(k, k') + g_{tt'}(k+1, k+1) - g_{tt'}(k, k'+1) - g_{tt'}(k+1, k') \quad k < |K| \,\&\, k' < |K|$$

Обґрунтування к-в-г

Чнає є група об'єктів $(t,1,\ t,2,\ t,i, \dots\ t,|K|)$ і $(t',1,\ t',2, \dots\ t',j, \dots\ t',|K|)$. Є особливі мітки 0. В кожному об'єкті по дві мітки 0, ●.

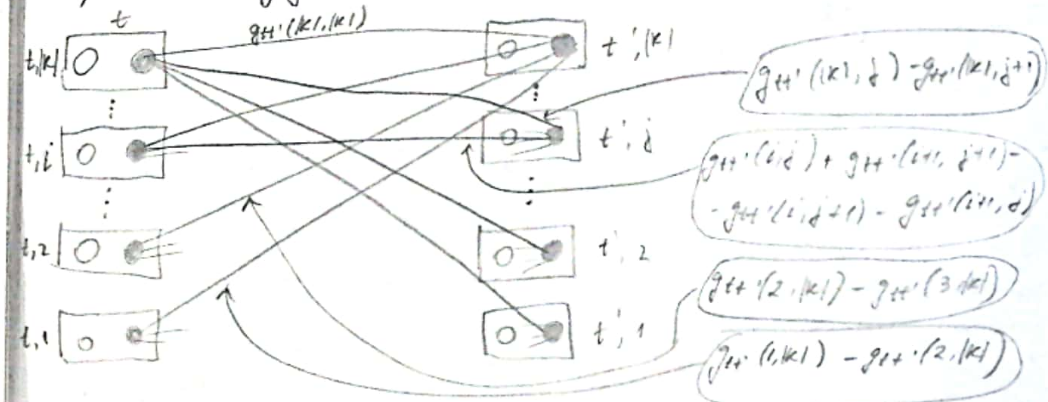
Ми будуємо задачу так: щоб ми обрали якусь мітку в якомусь об'єкті, то ми хочемо, щоб до неї всі мітки були лівими 0, а після неї всі мітки були правими ●. Значить цю гілку ми забороняємо перехід із правої в ліву (∞).

Оскільки вага вершини має міститись лише один раз, то логічно назначити його тому переходу, який при виборі мітки відбувається лише один раз.

Якщо справа стосується першої мітки (найнижчої), то ми вагу позначаємо окремо т.б. $(g_t(1))$, $(g_{t'}(1))$.

Коли ми говоримо про якусь іншу мітку (не першу), то до неї ми обов'язково перейдемо від лівої мітки (буде відбуватись лише один раз).

Як вже згадувалось: при виборі мітки ● ми далі маємо йти по правим, тому з найвищої 0 будуть йти всі дуги ∞.



$g'_{\langle t,i\rangle,\langle t,i+1\rangle}(\bullet, \bullet) = 0$

$g'_{\langle t,1\rangle}(\bullet) = g_t(1)$

$g'_{\langle t,i\rangle,\langle t,i+1\rangle}(0, \bullet) = g_t(i+1)$

$g'_{\langle t,i\rangle\langle t,i+1\rangle}(\bullet, 0) = +\infty$

$g'_{\langle t,|K|-1\rangle,\langle t,|K|\rangle}(0, 0) = +\infty$

$g'_{\langle t,i\rangle,\langle t,i+1\rangle}(0, 0) = 0$

$g'_{\langle t,i\rangle,\langle t',j\rangle}(0, \omega) = g'_{\langle t,i\rangle,\langle t',j\rangle}(\omega, 0) = 0$

$$g'_{<t,|K|>,<t',|K|>}(\bullet,\bullet) = g_{tt'}(|K|,|K|)$$

$$g'_{<t,|K|>,<t',j>}(\bullet,\bullet) = g_{tt'}(|K|,j) - g_{tt'}(|K|,j+1)$$

$$g'_{<t,i>,<t',|K|>}(\bullet,\bullet) = g_{tt'}(i,|K|) - g_{tt'}(i+1,|K|).$$

$$g'_{<t,i>,<t',j>}(\bullet,\bullet) = g_{tt'}(i,j) + g_{tt'}(i+1,j+1) - g_{tt'}(i,j+1) - g_{tt'}(i+1,j)$$

Ось так виглядає перетворення задачі із k міток в задачу з двома.
Для задачі є мітрадна ф-я (для задачі Z)

$$E(z,k) = \sum_{t\in T} g_t(k_t) + \sum_{tt'\in\tau} g_{tt'}(k_t,k_{t'})$$

Ваги вершин $\sum_{t\in T} g_t(k_t)$

Розглянемо групу t із задачі z' (з двома мітками).

Якщо $k'_{<t,1>} = \bullet \Rightarrow g'_{<t,1>}(\bullet) + \sum_{i=2}^{|K|} g'_{<t,i>}(\bullet) + \sum_{i=1}^{|K|-1} g'_{<t,i>,<t,i+1>}(\bullet,\bullet) = g_t(1).$

Якщо $\begin{cases} k'_{<t,i>} = \bullet \\ k'_{<t,i-1>} = 0 \end{cases} \Rightarrow g'_{<t,i-1>,<t,i>}(0,\bullet) + \sum_{\varkappa=1}^{i-1} g'_{<t,\varkappa>}(0) +$

$+ \sum_{\varkappa=1}^{i-1} g'_{<t,\varkappa>,<t,\varkappa+1>}(0,0) + \sum_{\varkappa=i}^{|K|} g'_{<t,\varkappa>}(\bullet) + \sum_{\varkappa=i}^{|K|-1} g'_{<t,\varkappa>,<t,\varkappa+1>}(\bullet,\bullet) = g_t(i)$

Справедливо для $\forall t\in T$.
Значить, сума ваг вершин в задачі z правильно відображені в z'.
Розглянемо будь-яку пару сусідніх об'єктів $tt'\in\tau$.

Якщо $\begin{cases} k'_{<t,|K|>} = \bullet \\ k'_{<t,|K|-1>} = 0 \\ k'_{<t',j>} = \bullet \\ k'_{<t',j-1>} = 0 \end{cases} \Rightarrow g'_{<t,|K|>,<t',|K|>}(\bullet,\bullet) + \sum_{\varkappa'=j}^{|K|-1} g'_{<t,|K|>,<t',\varkappa'>}(\bullet,\bullet)$

$+ \underbrace{\sum_{\varkappa=1}^{|K|-1}\sum_{\varkappa'=j}^{|K|} g'_{<t,\varkappa>,<t',\varkappa'>}(0,\bullet) + \sum_{\varkappa=1}^{|K|-1}\sum_{\varkappa'=1}^{j-1} g'_{<t,\varkappa>,<t',\varkappa'>}(0,0)}_{0}$ $\ominus$

$\ominus\; g_{tt'}(|K|,|K|) + \sum_{\varkappa'=j}^{|K|-1} g_{tt'}(|K|,\varkappa') - \sum_{\varkappa'=j}^{|K|-1} g_{tt'}(|K|,\varkappa'+1) = \left\{ \varkappa'+1 = \hat\varkappa \;\to \sum_{\hat\varkappa=j+1}^{|K|} \right\}$

внесли в суму

$= \sum_{\varkappa'=j}^{|K|} g_{tt'}(|K|,\varkappa') - \sum_{\hat\varkappa=j+1}^{|K|} g_{tt'}(|K|,\hat\varkappa) = g_{tt'}(|K|,j)$

Ситуація $j=1$ працює аналогічно.

Ситуація $\begin{cases} k'_{<t',|K|>} = \bullet \\ k'_{<t',|K|-1>} = 0 \\ k'_{<t,j>} = \bullet \\ k'_{<t,j-1>} = 0 \end{cases}$ симетрична попередній.

Важливий момент!
Якщо початкова задача була субмодулярною, то ми маємо її залишить.
Покажемо, що к-в-2 не визиває суб-ть в min-sum (задачі розмітки).

$E = A_t + A_{t'} + B$

$A_t = \underbrace{\sum_{\varkappa=1}^{i-2} g'_{t_\varkappa t_{\varkappa+1}}(0,0) + \sum_{\varkappa=i}^{|K|-1} g'_{t_\varkappa t_{\varkappa+1}}(\bullet,\bullet)}_{=0} + \underbrace{g'_{t_{i-1} t_i}(0,\bullet)}_{=g_t(i)}$

$A_{t'} = \sum_{\varkappa'=1}^{j-2} g'_{t'_{\varkappa'} t'_{\varkappa'+1}}(0,0) + \sum_{\varkappa'=j}^{|K|-1} g'_{t'_{\varkappa'} t'_{\varkappa'+1}}(\bullet,\bullet) + \underbrace{g'_{t_{\varkappa-1} t'_{i}}(0,\bullet)}_{=g_t(j)}$

$B = \sum_{\varkappa'=j}^{|K|-1} g'_{t_{|K|} t'_{\varkappa'}}(\bullet,\bullet) + g'_{t_{|K|} t'_{|K|}}(\bullet,\bullet) + \sum_{\varkappa=i}^{|K|-1} g'_{t_\varkappa t'_{|K|}}(\bullet,\bullet) +$

$+ \sum_{\varkappa=i}^{|K|-1} \sum_{\varkappa'=j}^{|K|-1} g'_{t_\varkappa t'_{\varkappa'}}(\bullet,\bullet)$

$B = \sum_{\varkappa'=j}^{|K|-1} \left[g_{tt'}(|K|,\varkappa') - g_{tt'}(|K|,\varkappa'+1) \right] + g_{tt'}(|K|,|K|) +$

$+ \sum_{\varkappa=i}^{|K|-1} \left[g_{t't}(|K|,\varkappa) - g_{t't}(|K|,\varkappa+1) \right] +$

$+ \sum_{\varkappa=i}^{|K|-1} \sum_{\varkappa'=j}^{|K|-1} \left[g_{tt'}(\varkappa,\varkappa') + g_{tt'}(\varkappa+1,\varkappa'+1) - g_{tt'}(\varkappa,\varkappa'+1) - g_{tt'}(\varkappa+1,\varkappa') \right]$

Scanned with CamScanner

$$\sum_{x'=j}^{|K|-1}\left[g_{tt'}(|K|,x') - g_{tt'}(|K|,x'+1)\right] = \sum_{x'=j}^{|K|-1} g_{tt'}(|K|,x') - \sum_{x'=j+1}^{|K|} g_{tt'}(|K|,x') = g_{tt'}(|K|,j) - g_{tt'}(|K|,|K|)$$

$$\sum_{x=i}^{|K|-1}\left[g_{tt'}(x,|K|) - g_{tt'}(x+1,|K|)\right] = g_{tt'}(i,|K|) - g_{tt'}(|K|,|K|).$$

$$\sum_{x=i}^{|K|-1}\sum_{x'=j}^{|K|-1}\left[g_{tt'}(x,x') + g_{tt'}(x+1,x'+1) - g_{tt'}(x+1,x') - g_{tt'}(x,x'+1)\right] =$$

$$= \sum_{x=i}^{|K|-1}\sum_{x'=j}^{|K|-1} g_{tt'}(x,x') + \sum_{x=i+1}^{|K|}\sum_{x'=j+1}^{|K|} g_{tt'}(x,x') - \sum_{x=i+1}^{|K|}\sum_{x'=j}^{|K|-1} g_{tt'}(x,x') -$$

$$- \sum_{x=i}^{|K|-1}\sum_{x'=j+1}^{|K|} g_{tt'}(x,x') =$$

$$= \sum_{x'=j}^{|K|-1} g_{tt'}(i,x') - \sum_{x'=j}^{|K|-1} g_{tt'}(|K|,x') + \sum_{x'=j+1}^{|K|} g_{tt'}(|K|,x') - \sum_{x'=j+1}^{|K|} g_{tt'}(i,x') =$$

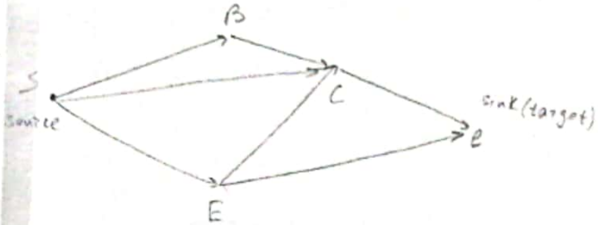
$$= g_{tt'}(i,j) - g_{tt'}(i,|K|) - g_{tt'}(|K|,j) + g_{tt'}(|K|,|K|)$$

$$B = g_{tt'}(i,j)$$

$\Rightarrow$ Будь-яка розмітка після перетворення к-в-г має той ж узле бону, як і відповідна їй розмітка початкового графу.

Задача про максимальний потік та мінімальний розріз графу (Min-Cut - Max-Flow Theorem, Ford-Fulkerson Theorem): навести постановку задачі max-flow та min-cut; показати, що одна є двоїстою до іншої, навести один з методів їх розв'язку.

Нехай дано граф:



Вводимо позначення:

T - множина вузлів

τ - множина направлених дуг.

S - джерело (початок)

e - стік (кінець).

$N_t = \{t' : tt' \in \tau\}$.

$P_t = \{t' : t't \in \tau\}$

f - потік (скільки запускаємо)

c - пропускна здатність

Задача - максимізувати потік

$$\sum_{t \in N_s} f_{st} \to \max_{f: \tau \to \mathbb{R}}.$$

$$\begin{cases} \varphi_{tt'}: & f_{tt'} \le c_{tt'} \quad \forall tt' \in \tau \\ \theta_t: & \sum_{p \in P_t} f_{pt} - \sum_{t' \in N_t} f_{tt'} = 0 \quad \forall t \in T \setminus \{s,e\} \\ & f_{tt'} \ge 0 \quad \forall tt' \in \tau \end{cases}$$

- потік має не перевищувати пропускну здатність для всіх ребер
- сума потоків, що входять у вузол не повинна змінитися на виході
- потік завжди додатній.

Згадаємо задачу лінійного програмування

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \min_{y \in \mathbb{R}^m} \left\{ \sum_{i \in I} x_i a_i - \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} x_i y_j b_{ij} + \sum_{j \in J} y_j c_j \right\} =$$

незалежні

$$= \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{i \in I} x_i a_i + \min_{y \in \mathbb{R}^m} \left[\sum_{j \in J} y_j \left(c_j - \sum_{i \in I} x_i b_{ij} \right) \right] \right\}$$

$$\begin{cases} \sum_{i \in I} x_i b_{ij} = c_j, & y_j \in \mathbb{R}. \\ \sum_{i \in I} x_i b_{ij} \le c_j, & y_j \ge 0. \\ \sum_{i \in I} x_i a_i \to \max \\ x_i \ge 0, & i \in I^+ \end{cases}$$

інакше не мамо в ?

$\longleftarrow$ двоїста до max min

Випишемо двоїсту для minmax

$$\min_{y\in\mathbb{R}^m}\max_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{\sum_{j\in J} y_j c_j - \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} x_i y_j b_{ij} + \sum_{i\in I} x_i a_i\right\}.$$

$$\begin{cases}\sum_{j\in J} y_j b_{ij} = a_i, & x_i\in\mathbb{R}\\ \sum_{j\in J} y_j b_{ij} \geq a_i, & x_i\geq 0\\ \sum_{j\in J} y_j c_j \to \min_{y\in\mathbb{R}^m}\\ y_j\geq 0, & j\in J^+\end{cases}$$

Для нашої основної задачі Min-Cut MaxFlow:

Тут: $x_i = f_{tt'}$.

$a_{tt'} = \mathbb{1}(t=s)$ – те, що перша вершина є початком

$I = J^+ = \Gamma$.

$J = \Gamma \cup (T\setminus\{s,e\})$

$b_{ij} = \mathbb{1}(i=j) + \mathbb{1}(j\in T)\left[\mathbb{1}(i\in\{\langle p,j\rangle \mid p\in P_j\}) - \mathbb{1}(i\in\{\langle j,t'\rangle \mid t'\in N_j\})\right]$

$b_{tt'j} = \mathbb{1}(tt'=j) + \mathbb{1}(j\in T)\left[\mathbb{1}(t\in P_j) - \mathbb{1}(t\in N_j)\right]$ ← теж саме

Запишемо двоїсту:

$$\sum_{tt'\in\Gamma}\varphi_{tt'}c_{tt'} \to \min_{\varphi:\Gamma\to\mathbb{R}}$$

$$\begin{cases}\varphi_{st'} + \theta_{t'} \geq 1, & st'\in\Gamma\\ \varphi_{te} - \theta_t \geq 0, & te\in\Gamma\\ \varphi_{tt'} + \theta_{t'} - \theta_t \geq 0 & tt'\in\Gamma,\ t\neq s,\ t'\neq e\\ \varphi_{tt'}\geq 0\end{cases}$$

Min-Cut задача

Перепишемо це інакше.

$-1 + \theta_{t'} + \varphi_{st'} \geq 0 \quad \forall st'\in\Gamma$

$-\theta_t + 0 + \varphi_{te} \geq 0, \quad \forall te\in\Gamma$

$-\theta_t + \theta_{t'} + \varphi_{tt'} \geq 0, \quad \forall tt'\in\Gamma, \ t\neq s, t'\neq e$

$\varphi_{tt'}\geq 0, \quad \forall tt'\in\Gamma$

θ_t sre s $=1$, а θ_t where $=0$

1

$$\sum_{tt'\in\Gamma}\varphi_{tt'}c_{tt'} \to \min_{\varphi:\Gamma\to\mathbb{R}}$$

$$\begin{cases}\theta_{t'} - \theta_t + \varphi_{tt'} \geq 0, & \forall tt'\in\Gamma\\ \theta_s = 1\\ \theta_e = 0\\ \varphi_{tt'}\geq 0, & \forall tt'\in\Gamma\end{cases}$$

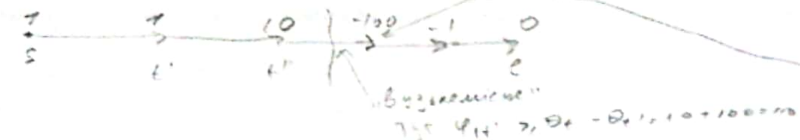
Задача приймає інший вигляд:

$$\sum_{tt'\in \text{Bottleneck}}\varphi_{tt'}c_{tt'}^{\geq 0} \to \min_{\varphi:\Gamma\to}$$

$$\begin{cases}\varphi_{tt'} \geq \theta_t - \theta_{t'}, & tt'\in\text{Bottleneck}\\ \theta_t \leq \theta_{t'}, & tt'\notin\text{Bottleneck}\\ \theta_s = 1\\ \theta_e = 0\end{cases}$$

Теорема про доп. нежорст.! якщо у прямій змінні $>0 \Rightarrow$ то у двоїстій $=0$ і навпаки $>0 \Rightarrow =0$

Нам відомо, що якщо ми не знаходимося у вузькому місці то в нас то куди вода втікає по номеру сегмента має бути не менше то звідки вона витікає



Ми хочемо мінімізувати цю суму.

Всі с вже не від'ємні. Ми хочемо мати φ якомога меншим на θ не накладуються додаткових обмежень.

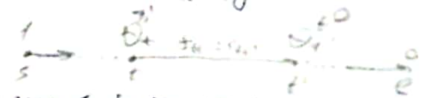
Яке мінімальне φ ми можемо використати?

У нас є остання вершина і ми чітко знаємо, що мітка θ_t не має бути більша ніж мітка в $\theta_{t'}$ і якщо ми не дійшли до насиченої дуги ($t=c$), то у нас воно (φ) може навіть не змінюватись, але якщо воно зменшується то нам це не вигідно. Бо в такому випадку $\varphi = \theta_t - \theta_{t'}$ в переході (Bottleneck)

Там де у нас не повністю насичені труби – там у нас $\varphi = 0$ (випливає з доп. нежорсткості).

Якщо ми з S починаємо $\Rightarrow$ то φ мінімально 1.

Коли ми підходимо до місця змін то що ми знаємо про цю вершину?



θ_t точно не менше ніж 1, бо $\theta_t \leq \theta_{t'}$,

А $\theta_{t'} \leq 0$

Звідси $\theta_t \geq 1,\ \theta_{t'} \leq 0 \Rightarrow \varphi_{tt'} \geq \theta_t - \theta_{t'} \geq 1,\ tt'\in\text{Bottleneck}$

Якщо ми згадаємо, що таке мінімальний зріз, то ми бачимо, що це за задача. У задачі max-flow потрібно максимізувати потік. У нас є двоїста задача (задача про мін. зріз). Нам потрібно знайти Bottleneck цієї системи ⊛, бо не зможе пройти через $\sum_{t' \in N_s} f_{st'}$ більше потоку чим пройде через якусь частину "з вузькими трубами" => відповідно нам потрібно знайти саме це місце.

Bottleneck:
$tt' \in$ Bottleneck $\Leftrightarrow f_{tt'} = c_{tt'}$
$tt' \notin$ Bottleneck $\Leftrightarrow f_{tt'} \le c_{tt'}$

Вже з'ясували θ. Яка їх роль?
Цим змінним θ назначають роль сегментації, тобто ми при min-cut розбиваємо граф на дві частини.
Всі вершини для яких $\theta = 1$ будуть відноситись до однієї частини зрізу, а всі вершини для яких $\theta = 0$ відносяться до іншої частини.

Яка роль φ?
φ – це частина потоку, яку ми проштовхнули через трубу.
Повернемось до задачі лін. програмування.
Виведемо теорему про доповнюючу жорсткість, щоб подивитись наприклад коли труба не достатньо заповнена то ми щось будемо знати про деякі двоїсті змінні.

$$f(x,y) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i a_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j b_{ij} + \sum_{j=1}^{m} y_j c_j \right\}$$

y_j нез. на змінна

винесли суму сюди, бо y_j

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{y \in \mathbb{R}^m} f(x,y) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i a_i - \sum_{j=1}^{m} \max_{y_j \in \mathbb{R}} y_j \left(c_j - \sum_{i=1}^{n} x_i b_{ij} \right) \right\}$$

знаємо max будемо або ми ставимо $y_j = 0$

Для того, щоб це не вилетіло на $+\infty$

$y_j \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i b_{ij} = c_j$

$y_j \ge 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i b_{ij} \ge c_j$

$j \notin$ Bottleneck $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i b_{ij} > c_j \Rightarrow y_j = 0$, бо інакше max < 0, а так виявилось max = 0

⇓

$tt' \in$ Bottleneck $\Rightarrow \varphi_{tt'} = 0$

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x,y) = \max_{y \in \mathbb{R}^m} \left\{ \sum_{j=1}^{m} y_j c_j - \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} x_i \left(a_i - \sum_{j=1}^{m} y_j b_{ij} \right) \right\}$$

$x_i \in \mathbb{R} \quad \sum_{j=1}^{m} y_j b_{ij} = a_i$

$x_i \ge 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} y_j b_{ij} \le a_i$

$x_i > 0 \Rightarrow \sum y_j b_{ij} = a_i$

Які нерівності перетворяться ці для тих дуг, що входять в Bottleneck і для тих, що не входять?

↪ це значить будуть враховуватись ті $c_{tt'}$ які є в Bottleneck

Одними із найбільш відомих алгоритмів, що вирішує задачу максимального потоку є алгоритми Едмондса-Карпа та Форда-Фалкерсона.
Едмондса-Карпа використовує breadth-first search
Форда-Фалкерсона depth-first search.

Алгоритм знаходження Min-Cut - Max-flow

1. Ініціалізація: $F^{maxflow} = 0$; $f^0_{tt'} = 0, \forall tt' \in T$

1. Знаходимо шлях від s до e (Едм.-Карпа або Форд.-Фалк.)
   $t \to t'$ (чи відвідали t' із t?).
   Відвідуємо якщо:
   1) $f^i_{tt'} \ne c_{tt'}$.
   2) $\nexists P^i_{t'} \Rightarrow P^i_{t'} = t$. // запам'ятовуємо вершину
   3) $t' \ne s$

2. Проходимо по знайденому шляху
   Знаходимо $\Delta f^i = \min_{tt' \in \{\text{шлях із } s \text{ в } e\}}$
   Змінюємо потік:
   $f^{i+1}_{tt'} = f^i_{tt'} + \Delta f^i, \forall tt' \in \{\text{шлях із } s \text{ в } e\}$
   Змінюємо maxflow.
   $F^{maxflow\, i+1} = F^{maxflow\, i} + \Delta f^i$.

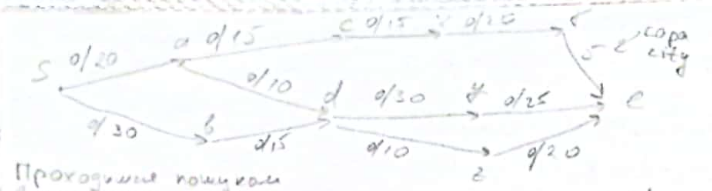
3. Повторюємо кроки від 1-2 поки існує шлях з s в e

Знаходження min-cut

Запускаємо breadth-first search або depth-first search вже з оновленим графом
Поки черга не пуста:
Проходимося по всім обʼєктам:
1) $c_{tt'} > f_{tt'}$
2) $c_{tt'} > 0$
$\Rightarrow \theta_{t'} = 1 \to$ отримуємо розмітку

Ініціалізація: $F^0 = 0$

$f^0_{tt'} = 0$



Проходимо пошуком в ширину:

	S
-a	a b
-d	d c b
-y	y z c b
-e	e z c b

=> шлях <u>sadye</u>

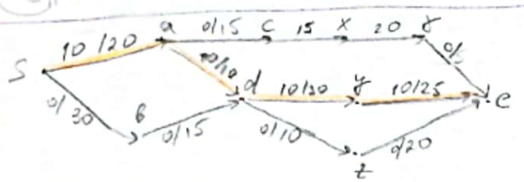
по шляху

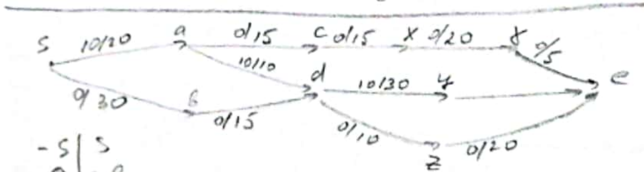
Capacity
sa = 20
ad = 10
dy = 30
ye = 20

=> min = 10.

=> $F^0 = 0 + 10 = 10$

=> Пускаємо скрізь потік 10





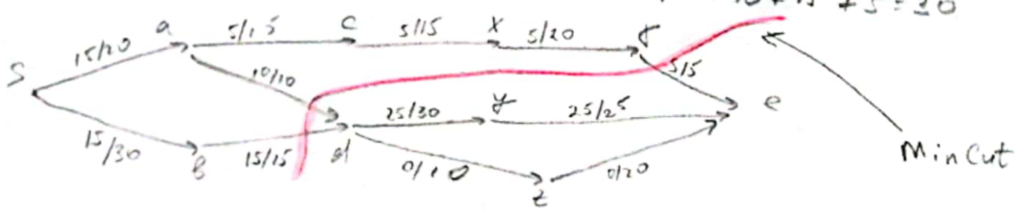
-s	s
-a	a b
-b	b c ← тут d не дозаписали, бо ad - насичена.
-c	c d
-d	d x
-x	x y z
-y	y z γ
-z	z γ e
-γ	γ e
-e	e

=> шлях sbdye => min{30, 15, 20, 15} = 15

Додаємо по шляху +15 до F

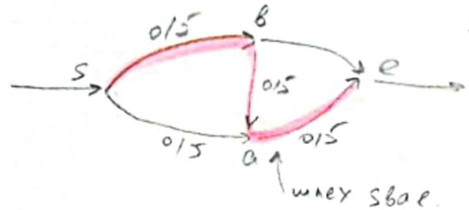
Робимо ще один раз пошуком в ширину => sacxγe => min = 5

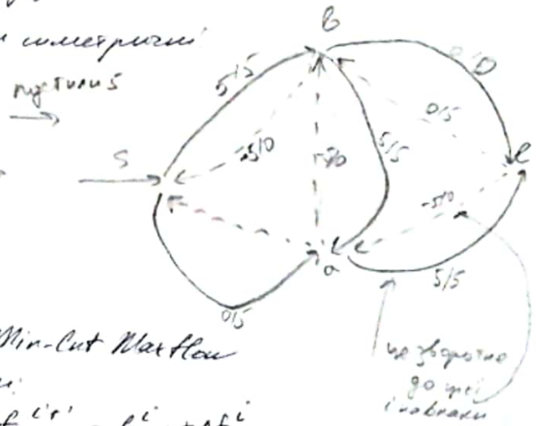
=> F = 10 + 15 + 5 = 30



Вводимо антипаралельні дуги:

$\begin{cases} tt' \in \Gamma \\ t't \in \Gamma \end{cases} \overset{def}{\Longleftrightarrow} tt', t't$ - антисиметричні





Модифікація алгоритму Min-Cut MaxFlow з антипаралельними дугами:

$\underline{f^{i+1}_{t't} = f^{i}_{t't} - \Delta f^{i}}$ після $f^{i+1}_{tt'} = f^{i}_{tt'} + \Delta f^{i}$.

Еквівалентність субмодулярних min-sum задач з двома мітками та min-cut: показати, як зводити min-sum задачу розмітки з двома мітками до задачі min-cut; як зводити задачу min-cut до задачі min-sum; показати, що субмодулярність є необхідною та достатньою умовою для коректності отриманої задачі

$\langle \mathbb{R}^+ \cup \{0, +\infty\}, \min, + \rangle$ – Min-Cut.

$Z = \langle T, \tau \subseteq T^2, K = \{0,1\}, q: T \times K \to \mathbb{R}^+ \cup \{0,+\infty\}, g: \tau \times K^2 \to \mathbb{R}^+ \cup \{0,+\infty\} \rangle$ невпор. дуги

$\langle T, \tau \rangle$ – орієнтований граф без антипаралельних дуг.

$$E(k) = \sum_{t \in T} q_t(k_t) + \sum_{tt' \in \tau} g_{tt'}(k_t, k_{t'}) = \sum_{t \in T} \Big[q_t(k_t) + \sum_{t' \in N_t} g_{tt'}(k_t, k_{t'}) \Big]$$

множина дуг, що виходять.

Задача: знайти $k^* \in \underset{k: T \to K}{\operatorname{argmin}}\, E(k)$

Хочемо звести $\langle \min, + \rangle$ до mincut.

$M = \langle V, \mathcal{E} \subseteq V^2, s \in V, e \in V, c: \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0,+\infty\} \rangle$

$\langle V, \mathcal{E} \rangle$ – орієнтований граф. направлені дуги

Розріз $\langle S, E \rangle$: $S \cap E = \varnothing$, $S \cup E = V$, $s \in S$, $e \in E$

Вага розрізу $G(S, E) = \sum_{\substack{vu \in \tau \\ v \in S \\ u \in E}} c_{vu}$

Мінімальний розріз: $\langle S, E \rangle \in \underset{\langle S, E \rangle \in \{\text{розбиття } T\}}{\operatorname{argmin}} G(S, E)$.

Зведення min-cut → min sum.

Що взагалі означає звести одну задачу до іншої?

Припустимо у нас є дві задачі: M і Z, то звести задачу M до задачі Z означає знайти таку функцію, щоб вхід для задачі M був входом для задачі Z таким чином, щоб $f(x) = y$, $M(x) = Z(y)$ вирішення задачі Z в точності співпадаю для задачі M при аргументах x, y.

Що означає, що одна задача важче вирішувана?

Якщо задача $X \longrightarrow$ (зводиться до) $Y \Rightarrow X$ не важча за Y

$NP\text{-Hard} = \{X : \forall Y \in NP\ \exists g \in P\ \exists f \in P\ \forall y:\ X(f(y)) = g(Y(y))\}$

$NP\text{-Complete} = \{X \in NP : \forall Y \in NP\ \exists g \in P\ \exists f \in P\ \forall y: X(f(y)) = g(Y(y))\}$.

З $M \to Z$.

Ми говоримо, що

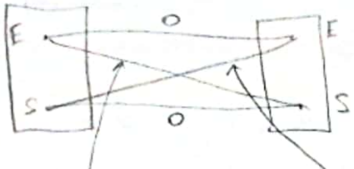
$T = V$, $\tau = \{\{u,v\}: uv \in \mathcal{E}\}$:

$q_s(E) = q_e(S') = +\infty$.

$q_s(S') = q_e(E) = q_t(k) = 0$, $\forall t \in T \setminus \{s,e\}$, $\forall k \in K$.

$$g_{tt'}(k,k') = \begin{cases} 0, & k = k' \\ C_{tt'}, & tt' \in \mathcal{E} \\ +\infty, & tt' \notin \mathcal{E} \end{cases}$$

Заповнимо нулями з EвE та SвS, бо мінімізація відбувається в SвE (нулями не обов'язково, головне константи).



$$\sum_{\substack{tt' \in \mathcal{E} \\ k_s = S \\ k_e = E}} g_{tt'}(k_t, k_{t'}) \to \min_{k: T \to \{S, E\}}$$

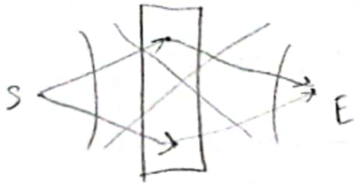
$k_s = S'$, $k_e = E$.

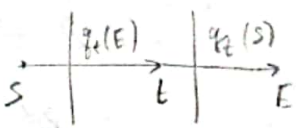
(задача мінімізації)

Про g ми можемо сказати, що вона субмодулярна

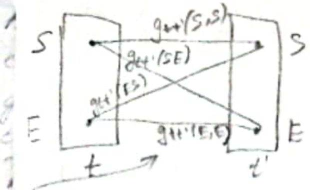
у нас $c > 0$ і може виконуватись $C_{tt'} + C_{t't} \geq 0$.

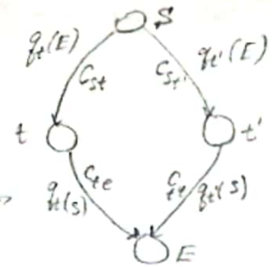
Зведення min-sum до min-cut





4 можливих розрізи, а нам потрібно лише 2!





З двома мітками

Чи можемо ми вибрати такі C, щоб задача стала бути еквівалентною цій?

Запишемо всі розрізи:

$C_{St} + C_{St'} = q_t(E) + q_{t'}(E) + g_{tt'}(E,E)$ (1)

$C_{tE} + C_{t'E} = q_t(S) + q_{t'}(S') + g_{tt'}(S,S)$ (2)

$C_{St'} + C_{tE} = q_{t'}(E) + q_t(S) + g_{tt'}(S,E)$ (3)

$C_{St} + C_{t'E} = q_t(E) + q_{t'}(S) + g_{tt'}(E,S)$ (4)

(1) + (2) має = (3) + (4).

$\Rightarrow g_{tt'}(E,E) + g_{tt'}(S,S) = g_{tt'}(E,S) + g_{tt'}(S,E)$

означає, що задача і супер і суб модулярна

$\Rightarrow$ система не підходить (не має рішень)

Додамо ще дугу

Назвемо розрізи відповідно по рисунку:

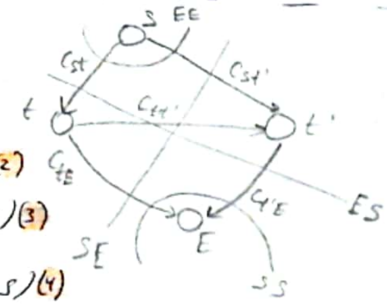
EE: $C_{St} + C_{St'} = q_t(E) + q_{t'}(E) + g_{tt'}(E,E)$ (1)

SE: $C_{St'} + C_{tE} + C_{tt'} = q_{t'}(E) + g_{tt'}(S,E) + q_t(S)$ (2)

ES: $C_{St} + \cancel{C_{tt'}} + C_{t'E} = q_{t'}(S) + q_t(E) + g_{tt'}(ES)$ (3)

бо дуга із T в S не враховується

SS: $C_{tE} + C_{t'E} = q_t(S) + q_{t'}(S) + g_{tt'}(S,S)$ (4)



Провівши алгоритмічні перестановки маємо:

$C_{tE} = q_t(S) + g_{tt'}(SS) - g_{tt'}(ES)$.

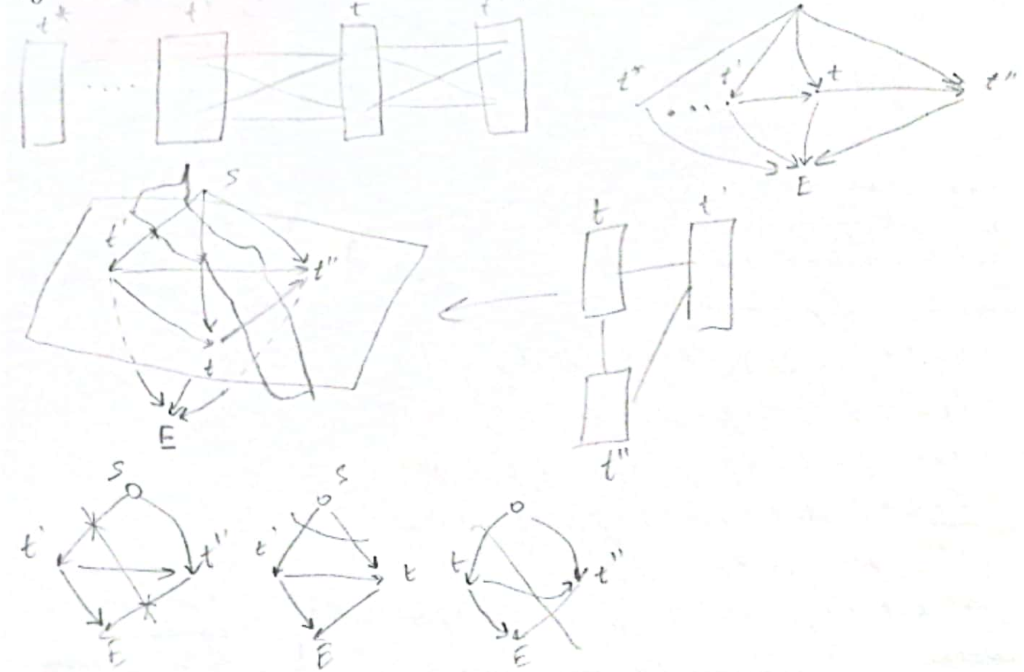
$C_{t'E} = q_{t'}(S) + g_{tt'}(E,S)$

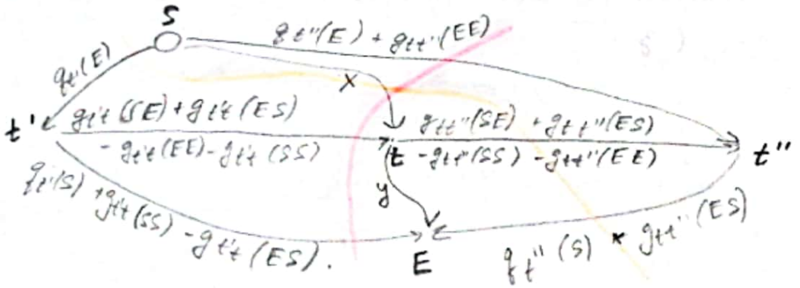
$C_{St} = q_t(E)$

$C_{St'} = q_{t'}(E) + g_{tt'}(EE)$.

$C_{tt'} = g_{tt'}(SE) + g_{tt'}(ES) - g_{tt'}(SS) - g_{tt'}(EE)$.

Що якщо з'єднання більш складна?





Якими мають бути $\underline{x}$ та $\underline{y}$?

Знайдемо x з розрізу

$$g_{t''}(E)+g_{tt''}(EE)+g_{t't}(SE)+g_{t't}(ES)-g_{t't}(EE)-g_{t't}(SS)+g_{t'}(S)+g_{t't}(SS)-g_{t't}(ES)+x = \gamma_{tt't''}(ESE).$$

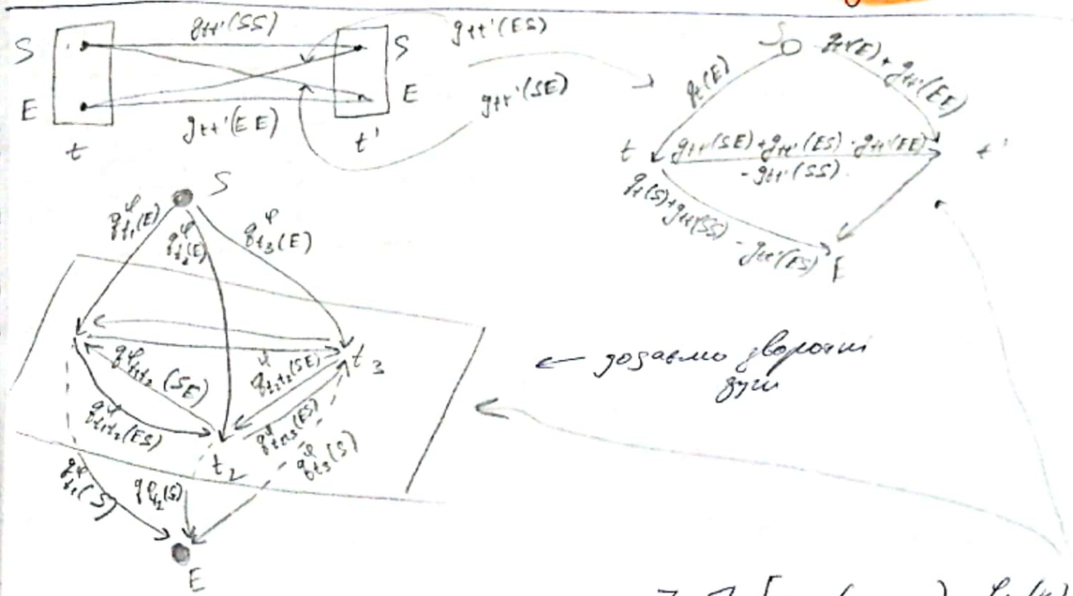
$$\gamma_{tt't''}(ESE) \underset{\text{дуги}}{=_{\max}} g_t(E)+g_{t'}(S)+g_{t't}(SE)+g_{tt''}(EE)$$

$$\Rightarrow x = g_t(E)+g_{t''}(EE)$$

Але для розрізу такий x не підходить

тоді б в x мало же $+\, g_{tt''}(ES)+g_{t''}(S)$

Зведення min-sum → min cut за допомогою репараметризації



$$\gamma(K)=\gamma(K;\varphi)=\sum_{t\in T}\Big[q_t(k_t)+\sum_{t'\in N_t}\varphi_{tt'}(k_t)\Big]+\sum_{tt'\in T}\Big[g_{tt'}(k_t,k_{t'})-\varphi_{tt'}(k_t)-\varphi_{t't}(k_{t'})\Big] \circleddash,\quad \varphi: T\times K\to\mathbb{R}.$$

$K=\{S,E\}$, $|T'|<+\infty$

$$\gamma(K)=\sum_{t\in T} q_t(k_t)+\sum_{tt'\in T} g_{tt'}(k_t,k_{t'})$$

$\circleddash$ {розкриваємо скобки і знаючи, що N_t сусіди і взагалі в зворотню сторону} $=$

$$=\sum_{t\in T} q_t(k_t)+\sum_{tt'\in T} g_{tt'}(k_t,k_{t'})+\sum_{tt'\in T}\Big[\varphi_{tt'}(k_t)+\varphi_{t't}(k_{t'})\Big]-\sum_{tt'\in T}\big(\varphi_{tt'}(k_t)+\varphi_{t't}(k_{t'})\big)$$

Потрібно створити лінійну систему рівнянь і нерівностей:

Хочемо занулити паралельні дуги, щоб спростити задачу і мати менше репараметризовані g^{φ}

Богом не подобається таке нагромадження.

Також ми знаємо, що репараметризовані всі дуги мають бути ≥ 0

$$\begin{cases} g_{tt'}(SS) - \varphi_{tt'}(S) - \varphi_{t't}(S) = 0 \\ g_{tt'}(EE) - \varphi_{tt'}(E) - \varphi_{t't}(E) = 0 \\ g_{tt'}(SE) - \varphi_{tt'}(S) - \varphi_{t't}(E) \geq 0 \\ g_{tt'}(ES) - \varphi_{tt'}(E) - \varphi_{t't}(S) \geq 0 \end{cases}$$

Використовуючи „мат. ухищрення“

$$\varphi_{t't}(S) = g_{tt'}(SS) - \varphi_{tt'}(S)$$

$$\varphi_{t't}(E) = g_{tt'}(EE) - \varphi_{tt'}(E)$$

$$\Rightarrow \varphi_{tt'}(E) \leq g_{tt'}(SE) - g_{tt'}(SS) + \varphi_{tt'}(S)$$

$$\varphi_{tt'}(S) \leq g_{tt'}(ES) - g_{tt'}(EE) - \varphi_{tt'}(E) - g_{tt'}(SS).$$

$\Rightarrow$ Перетворення для φ:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_{tt'}(E) &= 0 \\ \varphi_{tt'}(S) &= g_{tt'}(SS) - g_{tt'}(ES) \\ \varphi_{t't}(S) &= g_{tt'}(ES) \\ \varphi_{t't}(E) &= g_{tt'}(EE) \end{aligned}}$$

Репараметризація в дифузії

$$q'_t(k_t) = q_t(k_t) + \sum_{t' \in N_t} \varphi_{tt'}(k_t)$$

$$g'_{tt'}(k_t, k_{t'}) = g_{tt'}(k_t, k_{t'}) - \varphi_{tt'}(k_t) - \varphi_{t't}(k_{t'}).$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} g'_{tt'} &= 0 \\ g'_{tt'}(ES) &= 0 \\ g'_{tt'}(SE) &= g_{tt'}(SE) - g_{tt'}(SS) + g_{tt'}(ES) - g_{tt'}(EE) \\ g'_{tt'}(SS) &= 0. \end{aligned}}$$

Алгоритми α розширення та α-β обміну (α-expansion, α-β-swap)

Сформулювати алгоритми α розширення та α-β обміну для приблизного розв'язку задачі min-sum з довільною скінченною кількістю міток.

„expansion“ - розширення.

Вирішуємо задачу розмітки

$t = \langle T, \tau \leq T^2, K, q: T \times K \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, g: \tau \times K^2 \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \rangle$

скінченна к-ть міток

Припустимо ми вміємо вирішувати будь-яку її підзадачу на дві мітки.

$k_i \in K$, $k'_i \in K$

Тобто K (множину міток) $\Rightarrow$ перетворюємо в $\{0,1\}$.

$g \to g'$, $q \to q'$

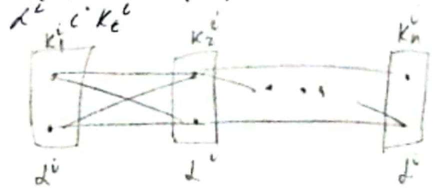
- - - - - - - - - - -

α - expansion

1. $i = 1$, $\alpha = \text{shuffle}(K)$ або по вашому вибору

2. Вибираємо початкову розмітку $k^1: T \to K$ (наприклад, $k^1_t \in \underset{k \in K}{\operatorname{argmin}}\, q_t(k)$

3. Будуємо граф, де в об'єкті t залишаються лише мітки α^i і k^i_t



підграф розмітки k на даній задачі

4. Вирішуємо нову задачу $k^{i+1} \in \underset{k: T \to K}{\operatorname{argmin}}\, g^{\alpha_i}(k)$

5. $i \leftarrow i+1$ і переходимо до кроку 3, якщо $i \leq |K|$, інакше кінець

Повторити 1-5 декілька раз, в
використовуючи кращу розмітку $k^{|T|}$ в якості початкової k^1

α-β swap

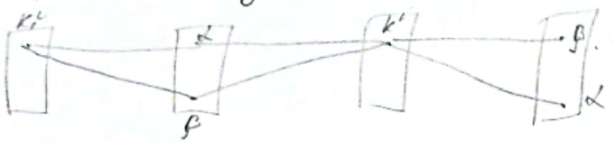
α-exp - для субмод.
α-β swap не тільки!

$i=0,\ k_t^0 \in \arg\min_{k\in K} q_t(k)$

$\forall \langle \alpha,\beta\rangle \in K^2$

В кожному об'єкті t, де $k_t^i \in \{\alpha,\beta\}$, залишаємо мітки α і β

У решті об'єктах залишаємо тільки k_t^i



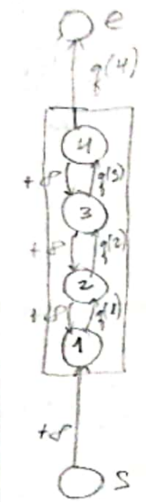
$i = i+1.$

$k^i \in \arg\min_{k\in K^T} f^{i-1}(k)$

Повторити декілька разів, вибираючи $K^{|T|^2}$ в якості входу k^0.

Зведення довільної субмодулярної min-sum задачі до min-cut (Hiroski Ishikawa) навести спосіб перетворення min-sum-задачі розмітки з довільною скінченною множиною міток на min-cut задачу; показати, що, якщо початкова задача була субмодулярною, перетворення не пошкодить субмодулярність.

Один об'єкт



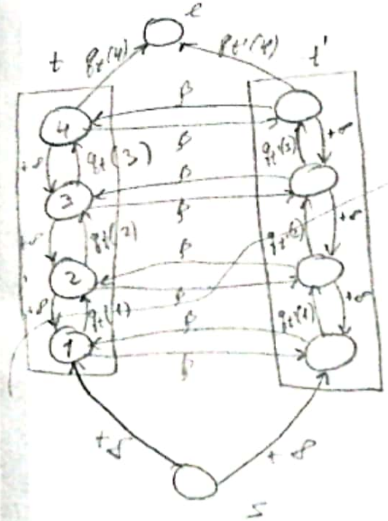
Розглянемо на прикладі одного об'єкту:
Пускаємо дуги між мітками з вагами $q(i)$.
Від останньої мітки пускаємо дугу $q(|K|)$
Зворотні дуги робимо $+\infty$, щоб у нас в min-cut було розбиття саме на 2 множини і ми б не обрали дуги з $+\infty$, оскільки вони не були б мінімальними => зможемо обрати одну мітку.
Ми хочемо знайти мітку в якій вага найменша, тому мітка, яка стане найбільш насиченою (яка буде в Bottleneck).

s не відповідає жодній мітці початкового графу

$$k^* \in \arg\min_{k\in\{1,2,3,4\}} q(k)$$

Задача: $\sum_{\substack{\langle u,v\rangle \in \Gamma \\ u\in S \\ v\in E}} q_{u,v} \to \min_{\substack{S,E:\ S\cup E = V \\ S\cap E = \emptyset \\ s\in S \\ e\in E}}$

Два об'єкта. (Hiroshi Ishikawa)

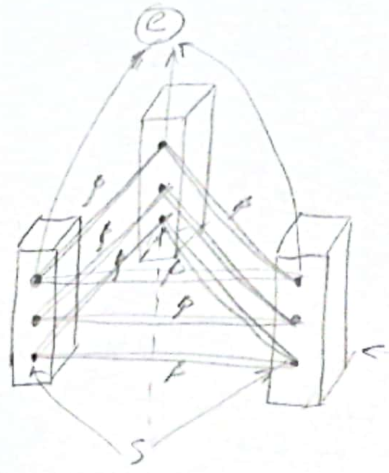


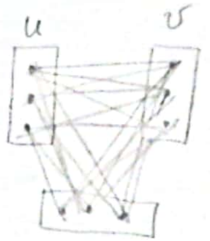
$g(k,k') = \beta|k-k'|$

Такий

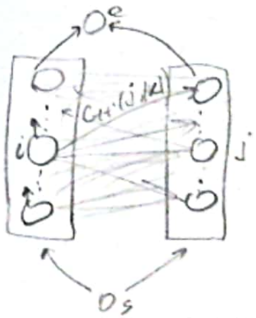
← сума розрізу $q_t(1)+\beta+q_{t'}(2)$

При об... $g^{t+1}(\ldots) = \beta(i, \varkappa+1)$





Якщо у нас дуже інша штрафна ф-я, то такого графу ми не отримаємо.
В такому випадку Хіроші Ішикава запропонував з'єднати всі мітки сусідніх об'єктів кожну з кожною



C - ємність.

Хочемо вирішувати довільну субмодулярну задачу!

g - має бути симетричною (тоді ми не маємо залежати від способу обходу).

Запишемо таку систему

$$\begin{cases} g_{t+1}(i,j) = \sum_{\varkappa=1}^{i} \sum_{\varkappa'=j+1}^{|K|} c_{t+1}(\varkappa,\varkappa') + \sum_{\varkappa=i+1}^{|K|} \sum_{\varkappa'=1}^{j} c_{t't}(\varkappa,\varkappa'). \\ \underbrace{g_{t+1}(i,j) + g_{t+1}(i+1,j+1) - g_{t+1}(i+1,j) - g_{t+1}(i,j+1) \le 0}_{\text{субмодулярність}} \end{cases}$$

В розрізі беруть участь тільки ті дуги, що почин. належать в множині S і приходять в множину E

$$\Rightarrow \sum_{\varkappa=1}^{i} \sum_{\varkappa'=j+1}^{|K|} c_{t+1}(\varkappa,\varkappa') + \sum_{\varkappa=i+1}^{|K|} \sum_{\varkappa'=1}^{j} c_{t't}(\varkappa,\varkappa') + \sum_{\varkappa=1}^{i+1} \sum_{\varkappa'=j+2}^{|K|} c_{t+1}(\varkappa,\varkappa') +$$

$$+ \sum_{\varkappa=i+2}^{|K|} \sum_{\varkappa'=1}^{j+1} c_{t't}(\varkappa,\varkappa') - \sum_{\varkappa=1}^{i+1} \sum_{\varkappa'=j+1}^{|K|} c_{t+1}(\varkappa,\varkappa') - \sum_{\varkappa=i+2}^{|K|} \sum_{\varkappa'=1}^{j} c_{t't}(\varkappa,\varkappa') -$$

$$- \sum_{\varkappa=1}^{i} \sum_{\varkappa'=j+2}^{|K|} c_{t+1}(\varkappa,\varkappa') - \sum_{\varkappa=i+1}^{|K|} \sum_{\varkappa'=1}^{j+1} c_{t't}(\varkappa,\varkappa') \le 0$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{i} c_{t+1}(\varkappa,j+1) + \sum_{\varkappa'=1}^{t} c_{t't}(i+1,\varkappa') - \sum_{\varkappa=1}^{i+1} c_{t+1}(\varkappa,j+1) - \sum_{\varkappa'=1}^{j+1} c_{t't}(i+1,\varkappa') =$$

$$= -c_{t+1}(i+1,j+1) - c_{t't}(i+1,j+1) \le 0$$

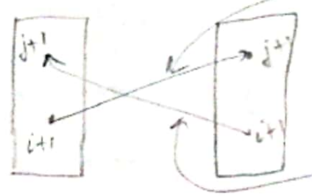
$$c_{t+1}(i+1,j+1) + c_{t't}(i+1,j+1) \ge 0$$

$$\Rightarrow c_{t+1}(i+1,j+1) \ldots$$

$$\Rightarrow 0 \le g_{t+1}(i+1,j) + g_{t+1}(i,j+1) - g_{t+1}(i,j) - g_{t+1}(i+1,j+1) = c_{t+1}(i+1,j+1) + c_{t't}(i+1,j+1)$$

Але ж це тільки сума не від'ємна, а раптом якесь „c" саме по собі від'ємне. Ми хочемо, щоб такого бути не могло.

$$c_{t+1}(i+1,j+1) = c_{t't}(i+1,j+1) = \frac{g_{t+1}(i+1,j) + g_{t+1}(i,j+1) - g_{t+1}(i,j) - g_{t+1}(i+1,j+1)}{2}.$$



Пропускна здатність цієї дуги = = проп. здатності цієї.

Для того, щоб це казати, необхідно щоб g були симетричними.

$g_{t+1}(\varkappa,\varkappa') = g_{t't}(\varkappa',\varkappa) \rightarrow$ відомо $\Rightarrow$

$g_{t+1}(\varkappa,\varkappa') = g_{t't}(\varkappa,\varkappa') \rightarrow$ потрібно

$\Rightarrow$ означає $g_{t+1}(\varkappa,\varkappa') = g_{t+1}(\varkappa',\varkappa)$

Покажемо це для c.

$$0 \le g_{t+1}(i+1,j) + g_{t+1}(i,j+1) - g_{t+1}(i,j) - g_{t+1}(i+1,j+1) =$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{i+1} \sum_{\varkappa'=j+1}^{|K|+1} c_{t+1}(\varkappa,\varkappa') + \sum_{\varkappa=i+2}^{|K|+1} \sum_{\varkappa'=1}^{j} c_{t't}(\varkappa',\varkappa) + \sum_{\varkappa=1}^{i} \sum_{\varkappa'=j+2}^{|K|+1} c_{t+1}(\varkappa,\varkappa') +$$

$$+ \sum_{\varkappa=i+1}^{|K|+1} \sum_{\varkappa'=1}^{j+1} c_{t't}(\varkappa',\varkappa) - \sum_{\varkappa=1}^{i} \sum_{\varkappa'=j+1}^{|K|+1} c_{t+1}(\varkappa,\varkappa') - \sum_{\varkappa=i+1}^{|K|+1} \sum_{\varkappa'=1}^{j} c_{t't}(\varkappa',\varkappa) -$$

$$- \sum_{\varkappa=1}^{i+1} \sum_{\varkappa'=j+2}^{|K|+1} c_{t+1}(\varkappa,\varkappa') - \sum_{\varkappa=i+2}^{|K|+1} \sum_{\varkappa'=1}^{j+1} c_{t't}(\varkappa',\varkappa) =$$

$$= \sum_{\varkappa'=j+1}^{|K|+1} c_{t+1}(i+1,\varkappa') + \sum_{\varkappa=i+1}^{|K|+1} c_{t't}(j+1,\varkappa) - \sum_{\varkappa'=j+2}^{|K|+1} c_{t+1}(i+1,\varkappa) - \sum_{\varkappa=i+1}^{|K|+1} c_{t't}(j+1,\varkappa) = c_{t+1}(i+1,j+1) + c_{t't}(j+1,i+1).$$

$$0 < c_{tt'}(i+1, j+1) = c_{t't}(j+1, i+1) = \frac{g_{tt'}(i+1, j) + g_{tt'}(i, j+1) - g_{tt'}(i,j) - g_{tt'}(i+1, j+1)}{2}.$$

Підставимо всі вирази $g_{tt'}(i,j)$

$$g_{tt'}(i,j) = \sum_{x=0}^{i-1} \sum_{x'=j}^{|K|} c_{tt'}(x+1, x'+1) + \sum_{x=i}^{|K|} \sum_{x'=0}^{j-1} c_{tt'}(x+1, x'+1) =$$

$$= \sum_{x=0}^{i-1} \sum_{x'=j}^{|K|} \frac{g_{tt'}(x+1, x') + g_{tt'}(x, x'+1) - g_{tt'}(x, x') - g_{tt'}(x+1, x'+1)}{2} +$$

$$+ \sum_{x=i}^{|K|} \sum_{x'=0}^{j-1} \frac{g_{tt'}(x+1, x') + g_{tt'}(x, x'+1) - g_{tt'}(x, x') - g_{tt'}(x+1, x'+1)}{2} = \left\{ \begin{matrix} \text{залишились} \\ \text{крайні} \\ \text{дуги} \end{matrix} \right\}$$

$$= \frac{g_{tt'}(i,j) + g_{tt'}(0, |K|+1) - g_{tt'}(0,j) - g_{tt'}(i, |K|+1)}{2} +$$

$$+ \frac{g_{tt'}(i,j) + g_{tt'}(|K|+1, 0) - g_{tt'}(i,0) - g_{tt'}(|K|+1, j)}{2} = g_{tt'}(i,j)$$

То, що де крайніх дуг вик. суб-ть є додатковою умовою, що все задача суб-на

$$g_{tt'}(0, |K|+1) + g_{tt'}(|K|+1, 0) = g_{tt'}(0,j) + g_{tt'}(i, |K|+1) + g_{tt'}(i,0) + g_{tt'}(|K|+1, j)$$

$$\begin{cases} g_{tt'}(0, |K|+1) = g_{tt'}(0,j) + g_{tt'}(|K|+1, j) \\ g_{tt'}(|K|+1, 0) = g_{tt'}(i,0) + g_{tt'}(i, |K|+1) \end{cases} \xRightarrow[i=|K|+1]{j=|K|+1} \begin{cases} 0 = g_{tt'}(|K|+1, |K|+1) \\ 0 = g_{tt'}(|K|+1, |K|+1) \end{cases}$$

$$g_{tt'}(0,j) = \sum_{x=0}^{|K|} \sum_{x'=0}^{j-1} c_{tt'}(x'+1, x+1) = \frac{g_{tt'}(0,j) + g_{tt'}(|K|+1, 0) - g_{tt'}(0,0) - g_{tt'}(|K|+1, j)}{2}$$

$$g_{tt'}(i,0) = \sum_{x=0}^{i-1} \sum_{x'=0}^{|K|} c_{tt'}(x+1, x'+1) = \frac{g_{tt'}(i,0) + g_{tt'}(0, |K|+1) - g_{tt'}(0,0) - g_{tt'}(i, |K|+1)}{2}$$

$$\begin{cases} g_{tt'}(0,j) = g_{tt'}(|K|+1, 0) - g_{tt'}(|K|+1, j) \\ g_{tt'}(i,0) = g_{tt'}(0, |K|+1) - g_{tt'}(i, |K|+1) \end{cases} \xRightarrow[i=|K|+1]{j=|K|+1} \begin{cases} g_{tt'}(0, |K|+1) = g_{tt'}(|K|+1, 0) \\ g_{tt'}(|K|+1, 0) = g_{tt'}(0, |K|+1) \end{cases}$$

$\forall t \in T: g_t(0) = g_t(|K|+1) = \infty$

$\forall tt' \in T: g_{tt'}(0,j) = g_{tt'}(i,0) = g_{tt'}(|K|+1, j) = g_{tt'}(i, |K|+1) = 0$

Ми додали мітки 0, та $|K|+1$ і додали нульові дуги (щоб не впливали на весь розв'язок)

Виберемо вагою c.

Задача Чоу (Chow-Liu tree)

Постановка:

T - множина об'єктів графу; $\tau \subset T^2$ - невідоме дерево, K - мно-на міток;

$t^* \in T$ - особливий елемент - це невідомий корінь дерева τ;

Хочемо знайти τ, t^* та $p_{t^*}(k)$, $p_{tt'}(k/k')$

$k^T \ni k^i, i = \overline{1,m}$ - навчальна вибірка.

За допомогою дерев можна вирішувати велику кількість задач.

Задача Чоу полягає у знаходженні пари $<p^*, \tau^*, t^*>$ що максимізує правдоподібність навч. вибірки:

$$<p^*, \tau^*, t^*> \in \underset{\tau, p, t^*}{\operatorname{argmax}}\, p(k^i: i = \overline{1,m}; \tau)$$

$$\ln p(k^i: i = \overline{1,m}; \tau) = \ln \prod_{i=1}^{m} p(k^i; \tau) = \sum_{i=1}^{m} \ln p_{t^*}(k^i_{t^*}) \cdot \prod_{tt' \in \tau} p_{tt'}(k^i_t / k^i_{t'}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left\{ \ln p_{t^*}(k^i_{t^*}) + \sum_{tt' \in \tau} \ln p_{tt'}(k^i_t / k^i_{t'}) \right\}$$

Оптимізаційна задача

$$\sum_{i=1}^{m} \left\{ \ln p_{t^*}(k^i_{t^*}) + \sum_{tt' \in \tau} \ln p_{tt'}(k^i_t / k^i_{t'}) \right\} \to \max_{p, \tau, t^*}$$

$$\begin{cases} \sum_{x \in K} p_{t^*}(x) = 1 \\ \sum_{x \in K} p_{tt'}(x / x') = 1 \quad \forall x' \in K, \forall tt' \in \tau \end{cases}$$

Будем використовувати метод множників Лагранжа

$$\Phi(p, \lambda) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \ln p_{t^*}(k^i_{t^*}) + \sum_{tt' \in \tau} \ln p_{tt'}(k^i_t / k^i_{t'}) \right\} -$$

$$- \lambda^{t^*} \left\{ \sum_{x \in K} p_{t^*}(x) - 1 \right\} - \sum_{tt' \in \tau} \sum_{x' \in K} \lambda^{x'}_{tt'} \left\{ \sum_{x \in K} p_{tt'}(x / x') - 1 \right\}$$

Якщо ми візьмемо похідні і $= 0$ по $\lambda^{x'}_{tt'}$ або λ^{t^*} отримаємо обмеження.

Але це не корисно.

Єдиний варіант залишається взяти похідну по p_{t^*}

$$\frac{\partial \Phi(p,\lambda)}{\partial p_{t^*}(\varkappa)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathbb{1}(\varkappa = k_{t^*}^i)}{p_{t^*}(\varkappa)} - \lambda_{t^*} \leftarrow \forall \varkappa \in K \quad (1)$$

не залежить від t

$$\frac{\partial \Phi(p,\lambda)}{\partial p_{tt'}(\varkappa|\varkappa')} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathbb{1}(\varkappa = k_t^i)\mathbb{1}(\varkappa' = k_{t'}^i)}{p_{tt'}(\varkappa|\varkappa')} - \lambda_{tt'}^{\varkappa'} \leftarrow \forall \varkappa, \varkappa' \in K \quad (2)$$

не залежить від t

$(1)=0$; $\Rightarrow p_{t^*}(\varkappa) = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_{t^*}^i)}{\lambda_{t^*}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{\varkappa \in K} p_{t^*}(\varkappa) = \frac{1}{\lambda_{t^*}} \sum_{\varkappa \in K} \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_{t^*}^i)$$

$$\Rightarrow \lambda_{t^*} = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\sum_{\varkappa \in K} \mathbb{1}(\varkappa = k_{t^*}^i)}_{1} = m$$

"1, так. як $k_{t^*}^i$ обов'язково прийме якесь значення $\varkappa$, і тільки одне (сума із m одиниць).

$(2)=0 \Rightarrow p_{tt'}(\varkappa|\varkappa') = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i)\mathbb{1}(\varkappa' = k_{t'}^i)}{\lambda_{tt'}^{\varkappa'}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{\varkappa \in K} p_{tt'}(\varkappa|\varkappa') = \frac{1}{\lambda_{tt'}^{\varkappa'}} \sum_{\varkappa \in K} \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) \cdot \mathbb{1}(\varkappa' = k_{t'}^i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{tt'}^{\varkappa'} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa' = k_{t'}^i)}_{\text{скільки разів в } t' \text{ зустрівся } \varkappa'} \sum_{\varkappa \in K} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa' = k_{t'}^i)$$

$$p_{t^*}(\varkappa) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(k_{t^*}^i = \varkappa)}{m} = \tilde{p}_{t^*}(\varkappa)$$

← вибіркова хар-ка (частота)

$$p_{tt'}(\varkappa|\varkappa') = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(k_t^i = \varkappa)\, \mathbb{1}(k_{t'}^i = \varkappa')}{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(k_{t'}^i = \varkappa')} = \frac{\tilde{p}_{tt'}(\varkappa, \varkappa')}{\tilde{p}_{t'}(\varkappa')} = \tilde{p}_{tt'}(\varkappa|\varkappa')$$

домножили на $\frac{m}{m}$ і маємо

При відомій структурі сусідства T і корені t^* ймов-ті обчислюються по ф-лам

Потрібно знайти структуру сусідства T

Зараз проблема: t^* не відоме і одночасно T і t^* будемо шукати

$$\sum_{i=1}^{m} \left\{ \ln p_{t^*}(k_{t^*}^i) + \sum_{tt' \in T} \ln p_{tt'}(k_t^i / k_{t'}^i) \right\} =$$

Скільки раз зустрінеться $\varkappa$ в сумі?

$$\sum_{i=1}^{m} \ln p_{t^*}(k_{t^*}^i) \Rightarrow \text{замінимо на індикатор} \Big\} = \sum_{\varkappa \in K} \ln p_{t^*}(\varkappa) \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(k_{t^*}^i = \varkappa)$$

і те ж саме робимо з іншою сумою

$$+ \sum_{tt' \in T} \sum_{\substack{\varkappa \in K \\ \varkappa' \in K}} \ln p_{tt'}(k_t^i / k_{t'}^i) \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(k_t = \varkappa)\mathbb{1}(k_{t'} = \varkappa') =$$

скільки разів в об'єкті t зустрілася мітка $\varkappa$, і в її сусіді t' мітка $\varkappa'$

$$= \overbrace{\sum_{\varkappa \in K} \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(k_{t^*}^i = \varkappa) \ln \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(k_{t^*}^i = \varkappa)}{m}}^{1} + \overbrace{\sum_{tt' \in T} \sum_{\substack{\varkappa \in K \\ \varkappa' \in K}} \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(k_t = \varkappa) \cdot \mathbb{1}(k_{t'} = \varkappa') \cdot \ln \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(k_t^i = \varkappa) \cdot \mathbb{1}(k_{t'}^i = \varkappa')}{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(k_{t'}^i = \varkappa')}}^{2} \longrightarrow \max_{T}$$

$$+ 0 = \sum_{tt' \in T} \sum_{\substack{\varkappa \in K \\ \varkappa' \in K}} \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i)\, \mathbb{1}(\varkappa' = k_{t'}^i) \right) \cdot \left(\ln \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) - \ln \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) \right)$$

$$\sum a_j \ln b_j + \sum_j a_j (\ln c_j - \ln c_j) = \sum_j a_j \ln \frac{b_j}{c_j} + \sum_j a_j \ln c_j$$

$$2 = \sum_{tt' \in T} \sum_{\substack{\varkappa \in K \\ \varkappa' \in K}} \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i)\, \mathbb{1}(\varkappa' = k_{t'}^i) \right) \cdot \ln \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i)\, \mathbb{1}(\varkappa' = k_{t'}^i)}{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) \cdot \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa' = k_{t'}^i)}$$

$$1 = \sum_{\varkappa \in K} \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_{t^*}^i) \right) \ln \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathbb{1}(\varkappa = k_{t^*}^i)}{m} + \sum_{tt' \in T} \sum_{\varkappa \in K} \sum_{\varkappa' \in K} \Bigg($$

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) \cdot \mathbb{1}(\varkappa' = k_{t'}^i) \Bigg) \ln \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i)$$

не залежить від $\varkappa'$

не залежить від $\varkappa$

$$① = \sum_{\varkappa \in K} \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_{t^*}^i) \right) \ln \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_{t^*}^i)}{m} + \sum_{tt' \in \tau} \sum_{\varkappa \in K} \Big[$$

$$\ln \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) \qquad \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) \cdot \underbrace{\sum_{\varkappa' \in K} \mathbb{1}(\varkappa' = k_{t'}^i)}_{=1} \Big]$$

Бо логічно, що таке $\varkappa'$ буде

$$\| \sum_{tt' \in \tau} \sum_{\varkappa \in K} \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) \right) \ln \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i)$$

нащадок, предок

І кожне t використовується по одному разу. Ми беремо впорядковані пари $tt' \in \tau$. Один сусід - предок. $|N_t| = t$!

$$\sum_{t \in T} \quad \cancel{\sum_{t' \in N_t}}$$

; Для t^* предка не буде!

розписали $\ln$ $\Rightarrow * + \sum_{\varkappa} \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_{t^*}^i) \cdot \ln\left(\frac{1}{m}\right)$

$$\Rightarrow \sum_{t \in T \setminus \{t^*\}} \sum_{\varkappa \in K} \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) \right) \cdot \ln \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) =$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\varkappa} \mathbb{1}(\varkappa = k_{t^*}^i) \right) \ln m = - m \ln m.$$

$① + ② =$

$$= \sum_{\varkappa \in K} \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_{t^*}^i) \cdot \ln \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_{t^*}^i) - m \ln m + \sum_{t \in T \setminus \{t^*\}} \sum_{\varkappa \in K} \Big(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) \Big) \cdot \ln \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) + \sum_{tt' \in \tau} \sum_{\substack{\varkappa \in K \\ \varkappa' \in K}} \Big[\Big(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) \cdot \mathbb{1}(\varkappa' = k_{t'}^i) \Big) \cdot \ln \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) \mathbb{1}(\varkappa' = k_{t'}^i)}{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa' = k_{t'}^i)} \Big] =$$

Додамо $\Rightarrow$ $\boxed{\sum_{i=i^*} \sum_{j} a_{ij} + \sum_{i \neq i^*} \sum_{j} a_{ij} = \sum_{i} \sum_{j} a_{ij}}$

$$= \sum_{t \in T} \sum_{\varkappa \in K} \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t) \right) \cdot \ln \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) - n \ln m +$$

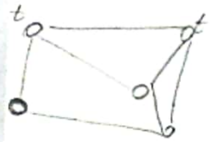
$\to$ не залежить від τ

$$+ \sum_{tt' \in \tau} \left[\sum_{i=1}^{m} \ln \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) \mathbb{1}(\varkappa' = k_{t'}^i)}{\sum_{i=1}^{m} \left(\mathbb{1}(\varkappa = k_t^i) \right) \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(\varkappa' = k_{t'}^i)} \right] \to \max_{\tau}$$

Алгоритм Борувки:

На вході граф (в нашому випадку повнозв'язний). Потрібно побудувати правильну структуру сусідства.

$$T, w: T^2 \to \mathbb{R} \mapsto \tau: \sum_{tt' \in \tau} w_{tt'} \to \max_{\tau} \text{ без циклів}$$



потрібно побудувати граф без циклів і max сумою всіх ребер

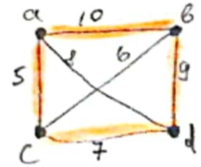
1) $\tau^0 = \emptyset$, $i \leftarrow 0$
2) $\forall t \in T\ \exists t' \in T: tt' \in \tau^i \cup (\tau^i)^{-1}$, відповідь τ^i, інакше переходимо до кроку ③
3) $\tau^{i+1} = \tau^i \cup \{tt'\}$, $tt' \in \arg\max_{tt' \in A(\tau^i)} w_{tt'}$ — сортуємо віддра по вагам quicksort $O(T^2 \log |T|^2)$

$A(\tau^i) = \{ tt' \in T^2 : tt' \notin \tau^i \cup (\tau^i)^{-1}; \tau^i \cup \{tt'\}$ не містить циклів$\}$.

4) $i \leftarrow i+1$, переходимо до кроку ②

Якщо використовувать пошук в глибину, алгоритм має складність $O(|T|^4)$

Приклад!

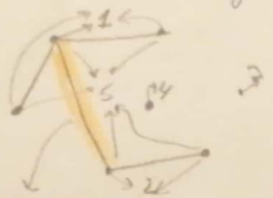


1) τ - пусте
2) можемо вибрать ще дугу? $\Rightarrow$ так
3) обираємо max $a \to b$, додаємо в τ
4) чи утворюється цикл в τ? $\Rightarrow$ ні

Далі додаємо bd, далі не додаємо ad, бо
$\Rightarrow$ тоді в τ буде цикл
$\Rightarrow$ додаємо cd $\Rightarrow$ додаємо ac
$\Rightarrow$ більше не можемо нічого додати
$\Rightarrow$ кінець.

Система неперетинаючих множин.

У нас є множина T' і коли додаємо в T' і вершини, то ми можемо слідкувати в яку групу потрапила нова вершина



поєднали вершини з 1 класу до 2-го => створюємо новий клас 5 (або до одного з класів)

=> маємо $O(T^3 \log|T|^2)$

```
struct Group
{
  int id;
  Group * parent;
};
t.group = g.

Group group = t.group
for (; group.parent; group =
                 = group -> parent
```