دانشگاه تهران

دانشکده سامانه‌های هوشمند

یادگیری ماشین

تمرین پنجم

استاد درس

دکتر سامان هراتی‌زاده

زمان تحویل: ۱۸ دی

پاییز ۱۴۰۲

یادگیری ماشین

تمرین «۵»

دکتر سامان هراتی‌زاده

دانشگاه تهران - دانشکده سامانه‌های هوشمند

نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

دستیاران آموزشی

کامیار رحمانی

بهناز ریوندی

امیرمحمد کویش‌پور

ددلاین: ساعت ۲۳:۵۹ | ۱۴۰۲/۱۰/۱۸

فهرست

شکل‌ها

یادگیری ماشین

تمرین «۵»

دکتر سامان هراتی‌زاده

دانشگاه تهران - دانشکده سامانه‌های هوشمند

نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

دستیاران آموزشی

کامیار رحمانی

بهناز ریوندی

امیرمحمد کویش‌پور

ددلاین: ساعت ۲۳:۵۹ | ۱۴۰۲/۱۰/۱۸

۱. (۱۰٪) **[نظری-تخمین بیشینه شباهت[1]] توزیع احتمال Pareto در اقتصاد کاربرد زیادی دارد. رابطه این توزیع به صورت زیر است:**

$$P(x) = \frac{\theta b^{\theta}}{x^{\theta+1}}$$

که در رابطه فوق θ و β پارامترهای مدل هستند. فرض کنید نمونه های $D = \{x_1, \dots, x_n\}$ به صورت i.i.d از توزیع احتمال گفته شده آمده باشند.

۱. تابع log-likelihood را تشکیل دهید و تخمین‌گر maximum likelihood را برای پارامتر λ به دست آورید.

۲. توزیع احتمال پیشین زیر را برای پارامتر λ در نظر بگیرید.

$$p(\lambda) = Gamma(\lambda|\alpha, \beta) = c\lambda^{\alpha-1}e^{-\lambda\beta}$$

که در رابطه بالا c یک ضریب ثابت و α, β پارامترهای توزیع گاما هستند. توزیع احتمال پسین را برای پارمترهای θ بدست آورید (راهنمایی: $a^b = e^{b \ln a}$)

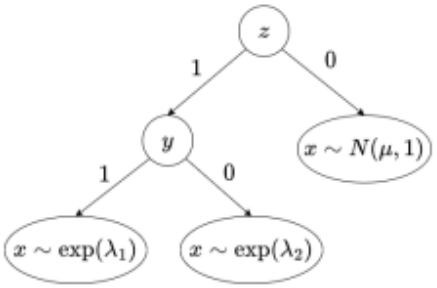
۳. آیا توزیع احتمال پیشین فوق یک conjugate prior برای پارامتر θ است؟ توضیح دهید.

۴. با استفاده از توزیع احتمال پیشین فوق، تخمین گر MAP برای پارامتر θ چیست؟ (راهنمایی: مقدار بیشینه توزیع گاما در نقطه $\theta = \frac{\alpha-1}{\beta}$ رخ می دهد).

۵. آیا اگر $n \to \infty$ آنگاه تخمین گر MAP به تخمین گر ML میل می‌کند؟ چرا؟

---

۲. (۱۵٪) **[نظری-الگوریتم EM]** فرض کنید متغیر تصادفی $x \in R$ مطابق درخت زیر تولید می‌شود:



که در شکل بالا z, y متغیرهای باینری و مستقل از یک دیگر هستند. اگر احتمال ۱ بودن متغیرهای z, y به ترتیب برابر با α, β باشد. آنگاه توزیع احتمال توام هر سه متغیر x, y, z به صورت زیر خواهد بود:

$$P(x,y,z) = \left((1-\alpha)\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right)\right)^{1-z}\left(\alpha\left((1-\beta)\lambda_2\exp(-\lambda_2 x)\right)^{1-y}\left(\beta\lambda_1\exp(-\lambda_1 x)\right)^{y}\right)^{z}$$

فرض کنید مجوعه داده های $D = \{x_1, \dots, x_n\}$ را که به صورت i.i.d هستند، در اختیار داریم. حال می‌خواهیم با استفاده از روش EM، پارامترهای توزیع فوق را تخمین بزنیم.

۱. تابع log-likelihood را تشکیل دهید.

۲. امید ریاضی تابع log-likelihood را نسبت به متغیرهای پنهان (یعنی y_i, z_i) بدست آورید. توجه داشته باشید باید به داده مشاهده شده یعنی x_i این کار را انجام دهید (راهنمایی: $E[y_i z_i | x_i] = P(y_i z_i = 1 | x_i)$).

۳. با استفاده از امید ریاضی بدست آمده از قسمت قبل، مقدار بهینه پارامترهای β, μ, λ_1 را بدست آورید.

---

[1] Maximum Likelihood Estimation

یادگیری ماشین

تمرین «۵»

دکتر سامان هراتی‌زاده

دانشگاه تهران - دانشکده سامانه‌های هوشمند

نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

دستیاران آموزشی

کامیار رحمانی

بهناز ریوندی

امیرمحمد کویش‌پور

ددلاین: ساعت ۲۳:۵۹ | ۱۴۰۲/۱۰/۱۸

۳. (۱۰٪) **[نظری-روش گشتاورها[1]]** فرض کنید $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}\}$ نمونه‌هایی از توزیع زیر باشند:

$$p(x|\theta) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$

۱. تخمین گر maximum likelihood را برای توزیع فوق تشکیل دهید و پارامتر θ را تخمین بزنید.

۲. با استفاده از Method of Moments تخمینی برای پارامتر θ بدست آورید.

---

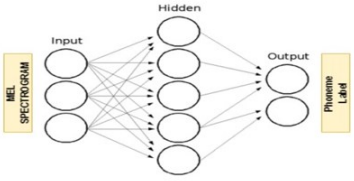
۴. (۴۰٪) **[پیاده سازی-مدل تشخیص گفتار با استفاده از پرسپترون چند لایه]** هدف اصلی این تمرین بررسی شبکه‌های عصبی برای تشخیص گفتار است.

پس از حل این تمرین شما یاد خواهید گرفت: چگونه با استفاده از پرسپترون چند لایه[2] مساله‌های طبقه‌بندی را حل کنید: - نحوه پیاده سازی پرسپترون چند لایه، - نحوه مدیریت داده‌ها، – نحوه آموزش مدل، – نحوه بهینه سازی مدل، و به بررسی فراپارامترها برای بهینه سازی مدل بپردازید: - شناسایی و جدول بندی تمام انتخاب‌های مختلف طراحی/معماری و فراپارامترها، - شناسای راه‌کارهایی برای جستجو در فضای جواب‌ها برای یافتن بهترین جواب ممکن

گفتار برای بشر طبیعی‌ترین و کارآمدترین ابزار مبادله اطلاعات است. تشخیص گفتار زیرشاخه‌ای از زبان‌شناسی محاسباتی می‌باشد . این زیرشاخه با تکنولوژی‌هایی کار می‌کند که داده‌های صوتی (گفتار) را به‌عنوان ورودی دریافت و تجزیه‌وتحلیل می‌کنند. در این رویکرد گفتار به کمک تعدادی واحد آوایی (مانند کلمه ، هجا ، سه واجی یا واج) مدل می‌شود و برای بازشناسی نیز از تشخیص این واحدها و کنار هم قرار دادن آنها، متن متناسب با گفتار تشخیص داده می‌شود. بنابراین سیستم تشخیص گفتار نوعی فناوری است که به یک رایانه این امکان را می‌دهد که گفتار و کلمات گوینده را بازشناسی و خروجی آن را به قالب مورد نظر، مانند «متن»، ارائه کند. داده‌های صوتی یا گفتاری[3] شامل ضبط صدا، از جمله گفتار، موسیقی یا سایر سیگنال‌های صوتی است.

کوچک‌ترین بخش گفتار واج می‌باشد که به کمک آن تکواژ ساخته می‌شود و یک یا چند تکواژ یک واژه را می‌سازند. برای مثال واژه «ما» از دو واجِ /م/ (/m/) و /ا/ (/ɒ/) تشکیل شده است بخش عمده واج، جداسازی واحدهای گفتاری از یکدیگر و ایجاد تمایز بین معانی واحدهای گفتاری است و می‌توان گفت از ترکیب واجها و به‌عبارت دیگر، «از ترکیب واحدها و قالب‌های صوتی با واحدها و قالب‌های معنایی»، سامانه ارتباط یعنی زبان به‌وجود می‌آید.

مجموعه داده ارائه شده در این تمرین شامل داده‌های گفتاری به شکل Mel spectrograms است. (در قسمت بعدی به طور کامل توضیح داده می‌شود) داده‌های آموزشی شامل واج‌های متناظر برای این داده‌ها هستند و ما در این تمرین پرسپترون چندلایه‌ای می‌سازیم که می‌تواند حالت‌های واج را در داده‌های آموزشی تشخیص دهد و برچسب‌گذاری کند. پرسپترون چندلایه نوعی شبکه عصبی است که از چندین لایه پرسپترون تشکیل شده است که ویژگی‌ها و الگوهای داده‌ها را یاد می‌گیرد. پس از تکمیل تمرین شما مهارت کافی برای پیاده سازی شبکه های عصبی و علاوه بر آن، تنظیم و تغییر پارامترها برای رسیدن به جواب بهینه را بدست می‌آورید.



شکل ۱ معماری پرسپترون چند لایه

[1] Method of Moments (MOM)
[2] MLP
[3] Speech

یادگیری ماشین

تمرین «۵»

دکتر سامان هراتی‌زاده

دانشگاه تهران - دانشکده سامانه‌های هوشمند

نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

دستیاران آموزشی

کامیار رحمانی

بهناز ریوندی

امیرمحمد کویش‌پور

ددلاین: ساعت ۲۳:۵۹ | ۱۴۰۲/۱۰/۱۸

۱. مقدمه: طبقه بندی در سطح فریم داده‌های صوتی

در این تمرین از شبکه‌های عصبی در زمینه‌ی ، تشخیص گفتار استفاده می‌کنیم. مجموعه داده‌ای از ضبط‌های صوتی (گفته‌ها) و برچسب‌های حالت واج (فرعی) آنها در اختیار شما قرار می‌گیرد که این داده ها از مقالات منتشر شده در وال استریت ژورنال (WSJ) که به شکل صوت در آمده می‌باشد و با استفاده از متن اصلی برچسب گذاری شده است. اگر قبلاً با داده‌های گفتاری مواجه نشده‌اید یا نام واج‌ها یا طیف‌نگارها را نشنیده‌اید، در قسمت‌های بعدی بیشتر توضیح خواهیم داد.

آشنایی با مجموعه دادگان

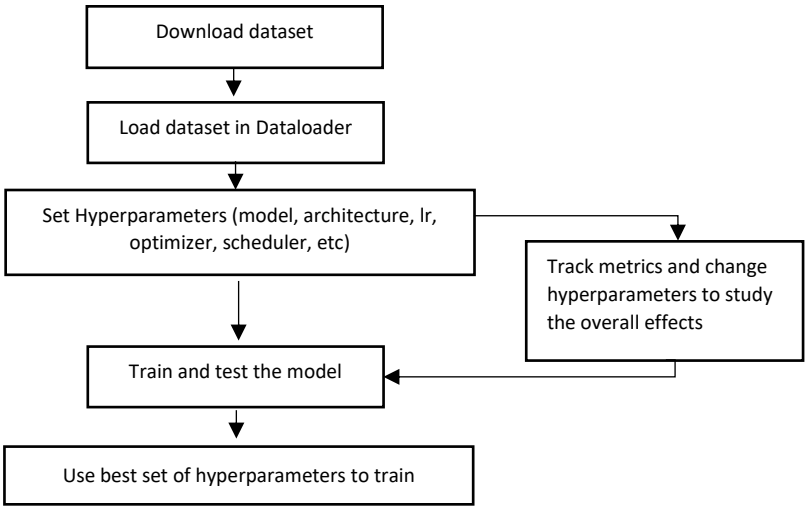
داده‌های آموزشی شامل موارد زیر است: داده‌های صوتی[1] ، برچسب‌های حالت واج برای هر فریم

داده های آزمون شامل موارد زیر است: داده‌های صوتی، برچسب‌های حالت واج داده نشده است

۲. راهنمایی

به همراه صورت سوال یک فایل جوپیتر نوت‌بوک[2] در اختیار شما قرار گرفته است که با توجه به توضیحات داده شده باید آن را تکمیل نمایید. این فایل شامل بلوک‌های اصلی برای آموزش پرسپترون چندلایه‌ای است.

برای اطلاعات بیشتر در مورد روند اجرای این تمرین تصویر زیر را مشاهده کنید.



شکل 2 روند اجرای کد

۳. آشنایی با واج‌ها و حالت‌های واج

همانطور که حروف عناصر تشکیل دهنده زبان نوشتاری می‌باشند واج ها نیز عناصر تشکیل دهنده گفتار هستند. سیستم‌های تشخیص گفتار با بکار گیری روش‌های مختلف طبقه‌بندی و شناسایی الگو قادر به تشخیص واژگان هستند که البته برای افزایش دقت در شناسایی از یک فرهنگ لغات نیز در انتهای سیستم استفاده می‌شود. دو مدل مسلط در این حوزه مدل مخفی مارکوف[3] و مدل شبکه عصبی[4] هستند. این روش‌ها اساساً برای مشخص کردن اطلاعات پنهان از سیستم، از اطلاعاتی که برای سیستم شناخته شده هستند استفاده می‌کنند. مدل

[1] Raw Mel Spectrogram Frames
[2] IPython Notebook (.ipynb)
[3] Hidden Markov Model (HMM)
[4] Neural Network Model (NN)

یادگیری ماشین

تمرین «۵»

دکتر سامان هراتی‌زاده

دانشگاه تهران - دانشکده سامانه‌های هوشمند

نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

دستیاران آموزشی

کامیار رحمانی

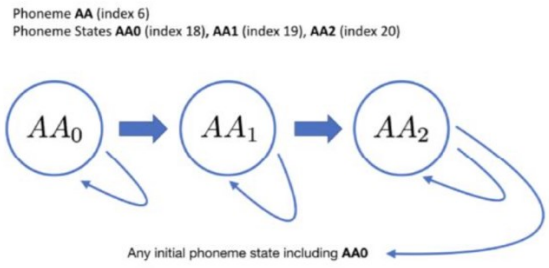
بهناز ریوندی

امیرمحمد کویش‌پور

ددلاین: ساعت ۲۳:۵۹ | ۱۴۰۲/۱۰/۱۸

Hidden Markov رایج‌ترین مدل است که احتمال داده‌های گفتاری مشاهده شده را به حداکثر می‌رساند. در این مدل واج مانند یک پیوند در یک زنجیره است و هنگامی این زنجیره تکمیل می‌شود، یک کلمه بوجود می‌آید.

در این مدل برای هر واج، ۳ حالت واجی مربوطه وجود دارد. نمودار انتقال حالات واج برای یک واج معین به شرح زیر نشان داده شده است:



شکل ۳حالت‌های واج برای واج مشخص

برای این تمرین در مجموع ۴۰ واج برای زبان در نظر خواهیم گرفت.

["+BREATH+", "+COUGH+", "+NOISE+", "+SMACK+", "+UH+", "+UM+", "AA", "AE", "AH", "AO", "AW", "AY", "B", "CH", "D", "DH", "EH", "ER", "EY", "F", "G", "HH", "IH", "IY", "JH", "K", "L", "M", "N", "NG", "OW", "OY", "P", "R", "S", "SH", "SIL", "T", "TH", "UH", "UW", "V", "W", "Y", "Z", "ZH"]

در این تمرین شما با استفاده از شبکه عصبی یک فریم (به‌علاوه بردار زمینه اختیاری) را به عنوان ورودی دریافت می‌کنید و احتمالات کلاس را برای همه ۴۰ حالت خروجی تولید می‌کنید.

۴. استخراج ویژگی‌ها

گام بعدی، استخراج ویژگی‌هایی است که برای آموزش دادن مدل به آن‌ها نیاز است. به طور کلی ویژگی‌های سیگنال صوت (در حوزه سیگنال) می‌توانند در سه دسته‌ی زیر قرار گیرند:

۱. ویژگی‌های حوزه زمان[1]: این ویژگی‌های قابل استخراج از شکل موج در حوزه زمان[2] می‌باشند. برای مثال: amplitude envelope, root-mean square energy, zero crossing rate, ...

بدیهی است که فرکانس نیز تا حد زیادی می‌تواند توصیف کننده سیگنال صوت باشد. بنابراین دسته دیگری از ویژگی‌ها نیز مورد نیاز می‌باشند.

۲. ویژگی‌های حوزه فرکانس[3]: می‌توان با اعمال تبدیل فوریه بر روی سیگنال در حوزه‌ی زمان، سیگنال را در حوزه‌ی فرکانس نمایش داد. در این صورت برخی از ویژگی‌هایی که از این نمایش قابل استخراج می‌باشند عبارتند از: Band energy ratio، Spectral centroid، Spectral flux، ....

همانطور که گفته شد، در هر یک از حوزه‌های بالا، تنها ویژگی‌های مربوط به همان حوزه قابل استخراج است. اما دسته‌ی دیگری از ویژگی‌ها وجود دارند که اطلاعاتی را در هر دو این حوزه‌ها در اختیار ما قرار می‌دهند.

۳. ویژگی‌های حوزه‌ی زمان-فرکانس[4]: برای استخراج اینگونه ویژگی‌ها می‌توان از نمایش‌های حوزه‌ی زمان-فرکانس استفاده نمود: Spectrogram، Constatn-Q transform، Mel-Spectrogram،....

«طیف‌سنج‌ها» (Spectrograms) روش‌های مفیدی برای بصری‌سازی طیف فرکانس‌های یک صدا و چگونگی تغییر آن‌ها در طول یک بازه زمانی هستند. اسپکتروگرام از روی خروجی تبدیل فوریه زمان کوتاه بدست می‌آید. برای بدست آوردن اسپکتروگرام در ابتدا تبدیل

[1] Time domain features
[2] Waveform
[3] Frequency domain features
[4] Time-frequency features

یادگیری ماشین

تمرین «۵»

دکتر سامان هراتی‌زاده

دانشگاه تهران – دانشکده سامانه‌های هوشمند

نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

دستیاران آموزشی

کامیار رحمانی

بهناز ریوندی

امیرمحمد کویش‌پور

ددلاین: ساعت ۲۳:۵۹ | ۱۴۰۲/۱۰/۱۸

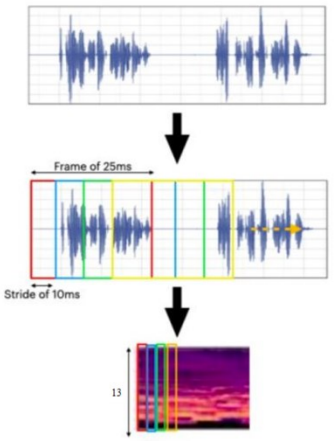
فوریه زمان کوتاه روی سیگنال اعمال می شود، (سیگنال به چندین بازه زمانی تبدیل شده و روی هر کدام یک تبدیل فوریه جدا اعمال می‌شود) و در نتیجه آن به ازای هر بازه زمانی یک طیف فرکانسی بدست می‌آید. سپس ضرایب هر کدام از طیف‌های فرکانسی براساس میزان دامنه ای که دارند به یک کد رنگی تبدیل می‌شوند. که در نتیجه آن ما یک نقشه رنگی برحسب زمان و فرکانس بدست می آید که ما می‌توانیم با تحلیل آن متوجه شویم که طیف فرکانسی سیگنال در طول زمان به چه صورت تغییر می‌کند.

در این تمرین برای هر فایل صوتی در مجموعه داده، یک نمایش melspectrogram استخراج شده و در اختیار شما قرار گرفته است.

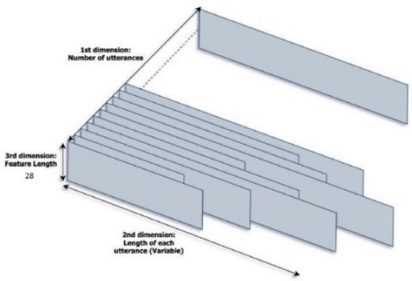
نکته: تبدیل فوریه کوتاه مدت بر روی بخش‌های کوچک شکل موج که فریم نامیده می‌شوند، هر کدام ۲۵ میلی‌ثانیه می‌باشد، انجام شده است. در نتیجه‌ی این تبدیل یک بردار واحد تولید می‌شود. از آنجایی که ما بین هر فریم stride حدود ۱۰ میلی‌ثانیه استفاده می‌کنیم، در نهایت به ۱۰۰ بردار در ثانیه داده می‌رسیم. که هر بردار یک بردار ۲۸ بعدی ویژگی می‌باشد (برای جزئیات دقیق نحوه انجام این کار، به پیوندهای موجود در بخش پیوست مراجعه کنید). برای یک داده صوتی T ثانیه‌ای، ماتریسی با ابعاد (۱۰۰*T، ۲۸) تولید می‌شود.

توجه داشته باشید که در مجموعه داده‌ای که در اختیار شما قرار داده شده است، تمامی این پیش پردازش‌ها انجام شده است و ملسپکتروگرام های شکل نهایی (*، ۲۸) در اختیار شما قرار گرفته است.

جمع بندی :داده های ارائه شده در این بخش شامل این ملسپکتروگرام‌ها و برچسب‌های واجی برای هر بردار ۲۸ بعدی در ملسپکتروگرام است و هدف پیش بینی برچسب بردار ۲۸ بعدی خاص در یک فریم داده صوتی می‌باشد.



شکل ۴ استخراج ویژگی



شکل ۵ نمایش داده

یادگیری ماشین

تمرین «۵»

دکتر سامان هراتی‌زاده

دانشگاه تهران - دانشکده سامانه‌های هوشمند

نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

دستیاران آموزشی

کامیار رحمانی

بهناز ریوندی

امیرمحمد کویش‌پور

ددلاین: ساعت ۲۳:۵۹ | ۱۴۰۲/۱۰/۱۸

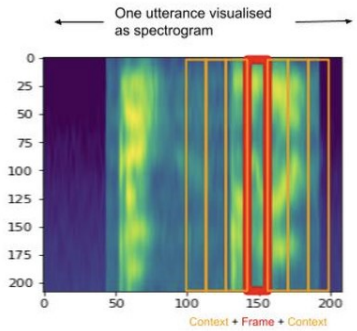
۵. بردار زمینه

با توجه به اینکه هر داده صوتی تنها ۲۵ میلی‌ثانیه را شامل می‌شود و ممکن است این بردار ویژگی به تنهایی کافی نباشد، راه حلی پیشنهاد دهید. (راه حل : راه‌حلی که می‌توانیم استفاده کنیم این است که برداری به نام «بردار زمینه» به اندازه K در اطراف هر بردار اضافه کنیم.) برای مثال، بردار زمینه با اندازه ۵ به این معنی می‌باشد که ما یک ورودی با اندازه (۱۱، ۲۸) به شبکه ارائه می‌دهیم - اندازه ۱۱ ممکن است به صورت زیر توضیح داده شود: بردار برای پیش‌بینی برچسب از اطلاعات ۵ بردار قبل از این بردار، و ۵ بردار بعد از آن می‌تواند استفاده کند.

راه‌های مختلفی برای پیاده‌سازی این کار وجود دارد، راه حلی دیگر شما پیشنهاد دهید

توجه: ممکن است بخواهید برای نتایج بهتر، مقداری padding صفر به هر داده اضافه کنید. به عنوان مثال، اگر یک داده صوتی منفرد با بعد (۱۰۰۰، ۲۸) را در نظر بگیریم و زمینه را ۵ در نظر بگیریم، می‌خواهیم قبل و بعد از این نمونه، padding صفر را اضافه کنیم تا به بعد (۱۰۱۰، ۲۸) تبدیل شود. به همین ترتیب لایه ورودی (۱+۲*اندازه زمینه)*۲۸ گره خواهد داشت.(چرا؟)

بردار زمینه یک فراپارامتر است و مقدار پیشنهادی بردار زمینه برای تنظیم این تمرین بین ۰-۵۰ است. برای اطلاعات بیشتر در مورد بردار زمینه، به پیوست مراجعه کنید



شکل ۶ حرکت طیف از فریم‌های مجاور

۶. تنظیم پارامترهای مدل

در یادگیری عمیق، هایپرپارامترها شامل متغیرهایی هستند که برای تنظیم شبکه عصبی استفاده می‌شوند، در زیر چند تغییر در پارامترها وجود دارد که ممکن است به شما کمک کند.

Hyperparameters	Values
Number of Layers	2-8
Activations	ReLU, LeakyReLU, softplus, tanh, sigmoid
Batch Size	64, 128, 256, 512, 1024, 2048
Architecture	Cylinder, Pyramid, Inverse-Pyramid, Diamond
Dropout	0-0.5, Dropout in alternate layers
LR Scheduler	Fixed, StepLR, ReduceLROnPlateau, Exponential, CosineAnnealing
Weight Initialization	Gaussian, Xavier, Kaiming(Normal and Uniform), Random, Uniform
Context	0-50
Batch-Norm	Before or After Activation, Every layer or Alternate Layer or No Layer
Optimizer	Vanilla SGD, Nesterov's momentum, RMSProp, Adam
Regularization	Weight Decay
LR	0.001, you can experiment with this
Normalization	You can try Cepstral Normalization

معماری اولیه پیشنهادی برای شروع

یادگیری ماشین

تمرین «۵»

دکتر سامان هراتی‌زاده

دانشگاه تهران - دانشکده سامانه‌های هوشمند

نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

دستیاران آموزشی

کامیار رحمانی

بهناز ریوندی

امیرمحمد کویش‌پور

ددلاین: ساعت ۲۳:۵۹ | ۱۴۰۲/۱۰/۱۸

بردار زمینه: ۲۰، تعداد لایه پنهان: ۰ ، تابع فعال سازی: RELU، میزان یادگیری: e-3، بهینه ساز: Adam

برای اطلاعات بیشتر در مورد این سوال، لطفا فایل ضمیمه [appendix] آماده شده را مطالعه کنید.

---

۵. (۱۰٪) **[نظری-خوشه‌بندی]** به سوال‌های پرسیده شده، به طور کامل و در صورت نیاز به تعداد گام خواسته شده الگوریتم‌ها را اجرا کنید.

۱. انتظار دارید در الگوریتم DBSCAN افزایش یا کاهش اندازه شعاع همسایگی ϵ (بدون تغییر مقدار MinPts) چگونه بر تعداد خوشه‌ها و تعداد نمونه‌هایی که نویز تشخیص داده می‌شوند، اثر بگذارد؟ چرا؟

۲. نمونه‌های زیر که توسط یک ویژگی X توصیف شده‌اند را به روش سلسله‌مراتی پایین به بالا (با استفاده از معیار فاصله Single Linkage) به دو خوشه تقسیم کنید و کام‌های خوشه‌بندی را بنویسید و معیار silhouette را برای نقطه x=2 محاسبه کنید.

---

۶. (۱۵٪) **[نظری-خوشه‌بندی K-means]**

۱. ثابت کنید الگوریتم k-means همگرا می‌شود.

۲. برای دادگانی با n داده و k خوشه (k>2)، نصف داده‌ها در ناحیه متمرکز و نصف دیگر در ناحیه‌ای با چگالی کمتر قرار گرفته‌اند و این دو ناحیه تقریبا جدا از هم‌اند، پس از خوشه‌بندی دادگان (با احتساب MSE) آیا در نهایت مرکز خوشه ها به صورت یکنواخت بین دو ناحیه ذکر شده توزیع می‌شوند؟ یا در ناحیه‌ای مراکز تجمیع بیشتری دارند؟ کدام ناحیه؟

۳. الگوریتم برگرفته از k-means را اینگونه در نظر بگیرید که در اولین مرحله انتخاب مرکزها، اولین مرکز به صورت تصادفی انتخاب شود ولی مرکز بعدی نقطه‌ای با بیشترین احتمال به دست آمده از فرمول زیر باشد. مراکز بعدی نیز به همین صورت. در انتخاب مرکز در مراحل بعدی (هنگام به‌روز کردن مرکزها) نیز نقطه با بیشترین احتمال فرمول زیر را به عنوان مرکز جدید بر می‌گزینیم.\

$$\frac{D(x)^2}{\sum_{x \in X} D(x)^2}$$

$D(x)$ طول کوتاهترین فاصله بین داده x تا نزدیک‌ترین مرکزیست که قبلا انتخاب شده است. X نیز مجموعه تمام داده‌ها است. نتیجه خوشه‌بندی این الگوریتم را نسبت به نتیجه k-means مقایسه کنید؟ از لحاظ سرعت همگرایی نیز مقایسه کنید؟

۴. آیا استفاده از معیار فاصله کوسینوسی در k-means برای داده‌های شامل ویژگی زمان (Time Series Data) معیار مناسبی است؟ توضیح دهید؟ و اگر مناسب نیست، چه معیار اندازه‌گیری فاصله‌ای مناسب‌تر است؟