偏微分方程数值解作业

任桐鑫 118010910088

June 7, 2019

补充习题 9.1

设被插函数

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-5,5]$$

(1) 试用给定程序研究 $f(x)$ 基于等距结点 $\{x_j\}_{j=0}^n$ 的分片线性插值逼近，其中 $n = 1,2,\cdots,8,10,20,30,40$。要求：$(i), n = 1,2,\cdots,8$ 的图形排成 2 行 4 列用 $Latex$ 输出；$(ii), n = 10,20,30,40$ 的图形排 2 行 2 列输出；

(2) 考虑研究分片线性插值收敛阶的数值方法: 给定的被插函数 $f(x)$ 很光滑，其分片线性插值函数 $\mathcal{I}_n f(x)$ 一致收敛于 $f(x)$ 且有收敛阶

$$\frac{\|f-\mathcal{I}_n f\|_\infty}{\|f\|_\infty} \le Ch^2$$

试用表格给出 $n = 2^m, m = 3,4,\cdots,9$ 时，系数 C 的计算结果。

解：(1) 使用课程 PPT 中提供的分段线性插值程序，按照题目要求，得到不同 n 值下分段线性插值的效果图见图 1和 2。从中可以得到如下结论：

1. 当 n 较小时，只有当 n 为偶数时，才会达到比较好的逼近效果，因为此时 $x=0$ 是结点中的一个，其函数值为峰值，对逼近效果影响很大。
2. 当 n 较大时，例如 $n > 10$ 的情况，提高 n 对逼近效果的影响不大。

(2) 表 1给出了不同 m 值时系数 C 的计算结果。为了方便起见，本文同时研究了误差对于 h, h^2, h^3 的收敛情况，结果见图 3，从中可以明显发现，原插值格式的收敛阶一定是二阶。

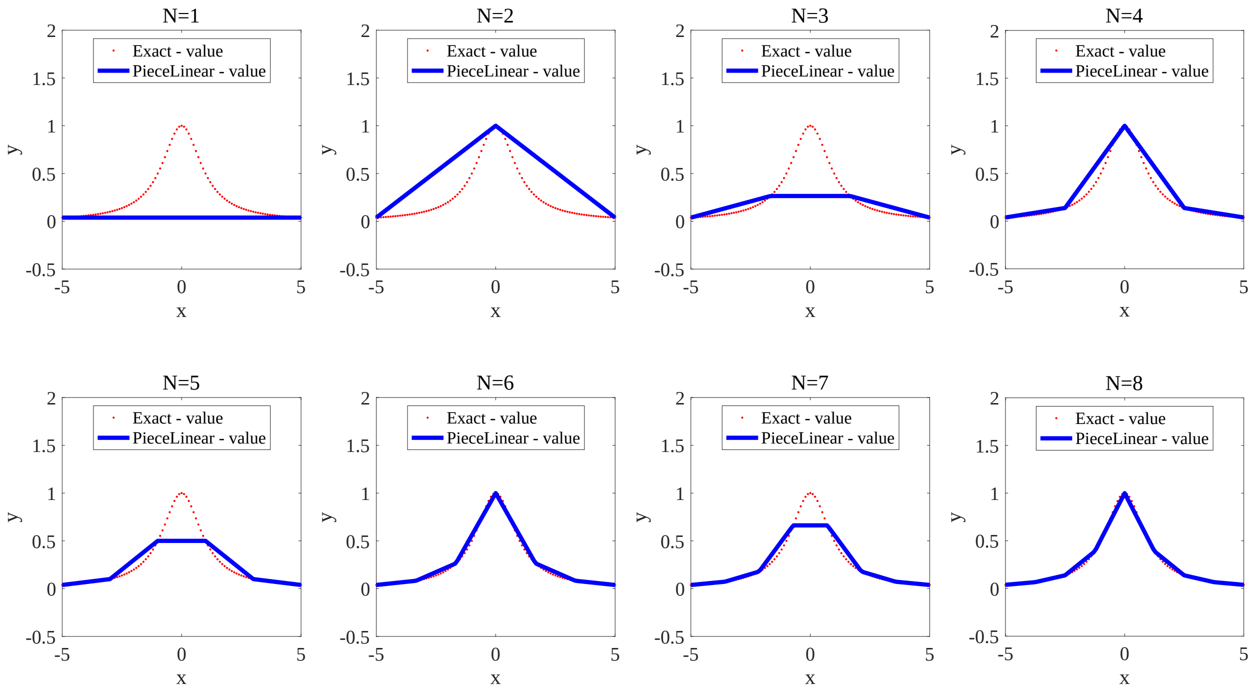

图 1: $N = 1, 2, 3 \cdots 8$ 时的分段线性逼近效果图

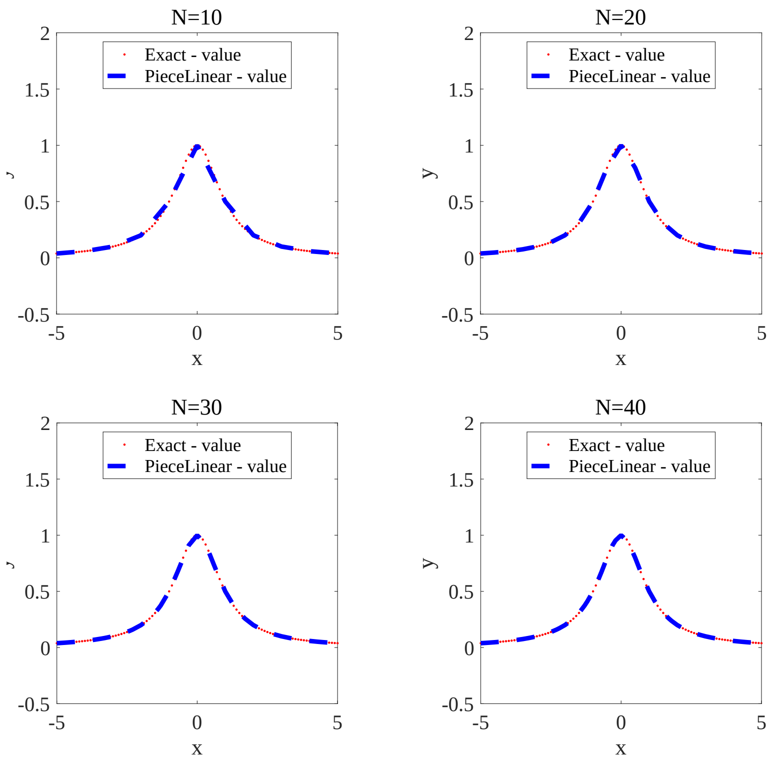

图 2: $N = 10, 20, 30, 40$ 时的分段线性逼近效果图

表 1: 系数 C 计算结果

m	3	4	5	6	7	8	9
error	0.0408	0.1338	0.1901	0.2192	0.1941	0.2323	0.1415

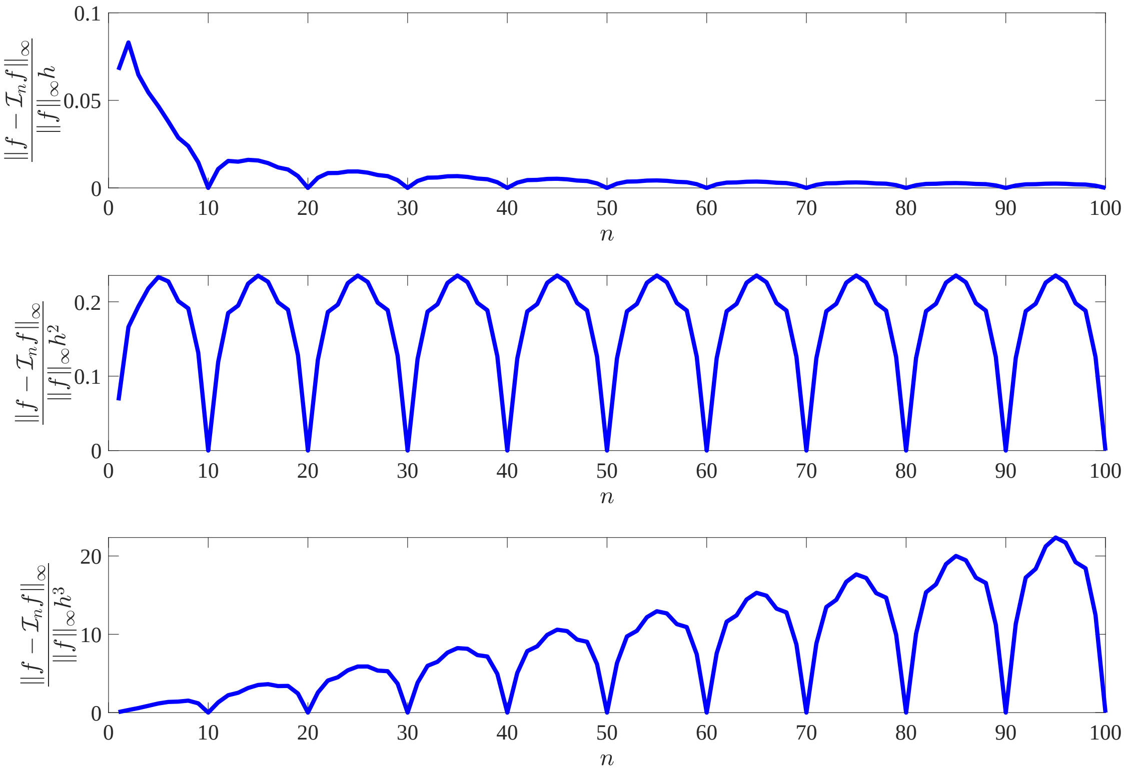

图 3: 使用三种格式得到的数值解对比图

补充习题 9.12

考虑一维对流扩散方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - 0.05\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t}, & (x,t) \in R \times (0,T] \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in R \end{cases}$$

其中初始条件为

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1+x, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ 1-x, & x>0 \end{cases}$$

试用特征差分格式求其数值解 ($x_j = \pm jh, h = 0.1, \tau = 0.05$)。

首先对原方程进行差分离散，因为空间方向是无穷长度，这里我们以 $h=0.1$ 为步长，向 x 轴正向和负向各关心 1000 步。在这个区间的边界引入一阶导数等于 1 的条件，将其化为有限结点的求解。

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{m+1}-\overline{u}_j^m}{\tau}-\mu\dfrac{u_{j+1}^{m+1}-2u_j^{m+1}+u_{j-1}^{m+1}}{h^2}=f_j^{m+1} \\ u_j^0=\varphi_j, \quad m=0,1,\cdots,\pm N \\ \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{-N}=\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{+N}=1 \end{cases}$$

其中，$\overline{u}_j^m$ 使用分片线性插值得到

$$\overline{u}_j^m=a_j r u_{j-1}^m+\left(1-a_j r\right)u_j^m$$

下面我们推导该格式的矩阵形式，首先定义

$$\mathbf{u}_h^m=\begin{bmatrix} u_{-N}^m \\ u_{-N+1}^m \\ \cdots \\ u_{N-1}^m \\ u_N^m \end{bmatrix},\mathbf{u}_h^{m+1}=\begin{bmatrix} u_{-N}^{m+1} \\ u_{-N+1}^{m+1} \\ \cdots \\ u_{N-1}^{m+1} \\ u_N^{m+1} \end{bmatrix},\mathbf{F}^{m+1}=\begin{bmatrix} e^{-(m+1)\tau} \\ e^{-(m+1)\tau} \\ \cdots \\ e^{-(m+1)\tau} \\ e^{-(m+1)\tau} \end{bmatrix}$$

进而，原格式的矩阵形式可以写为

$$A\mathbf{u}_h^m+B\mathbf{u}_h^{m+1}=\mathbf{F}^{m+1}$$

其中，

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{1+ar}{\tau} & \frac{ar}{\tau} & & & & \\ -\frac{ar}{\tau} & \frac{ar-1}{\tau} & & & & \\ & -\frac{ar}{\tau} & \frac{ar-1}{\tau} & & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & & -\frac{ar}{\tau} & \frac{ar-1}{\tau} \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} \frac{1}{\tau} & & & & \\ -\frac{\mu}{h^2} & \frac{1}{\tau}+\frac{2\mu}{h^2} & -\frac{\mu}{h^2} & & \\ & -\frac{\mu}{h^2} & \frac{1}{\tau}+\frac{2\mu}{h^2} & -\frac{\mu}{h^2} & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}$$

因此，在时间方向上的递推公式为

$$\mathbf{u}_h^{m+1}=B^{-1}\left(\mathbf{F}^{m+1}-A\mathbf{u}_h^m\right)$$

初值已经在题目中给出，因此结合上式即可进行原方程的求解。图 4(a) 即为数值解示意图，从中可以发现当对流占优时，波形在时间方向上按照特征线进行传播，衰减很慢。进一步地，本文同时考虑了扩散占优的情况，即二阶导数项的系数远大于非线性项的系数 $(a=0.01,\mu=1)$, 采用上述方法，得到其数值解见图 4(b), 可以发现，此时波形的衰减很快，波形的传播几乎难以观察到。

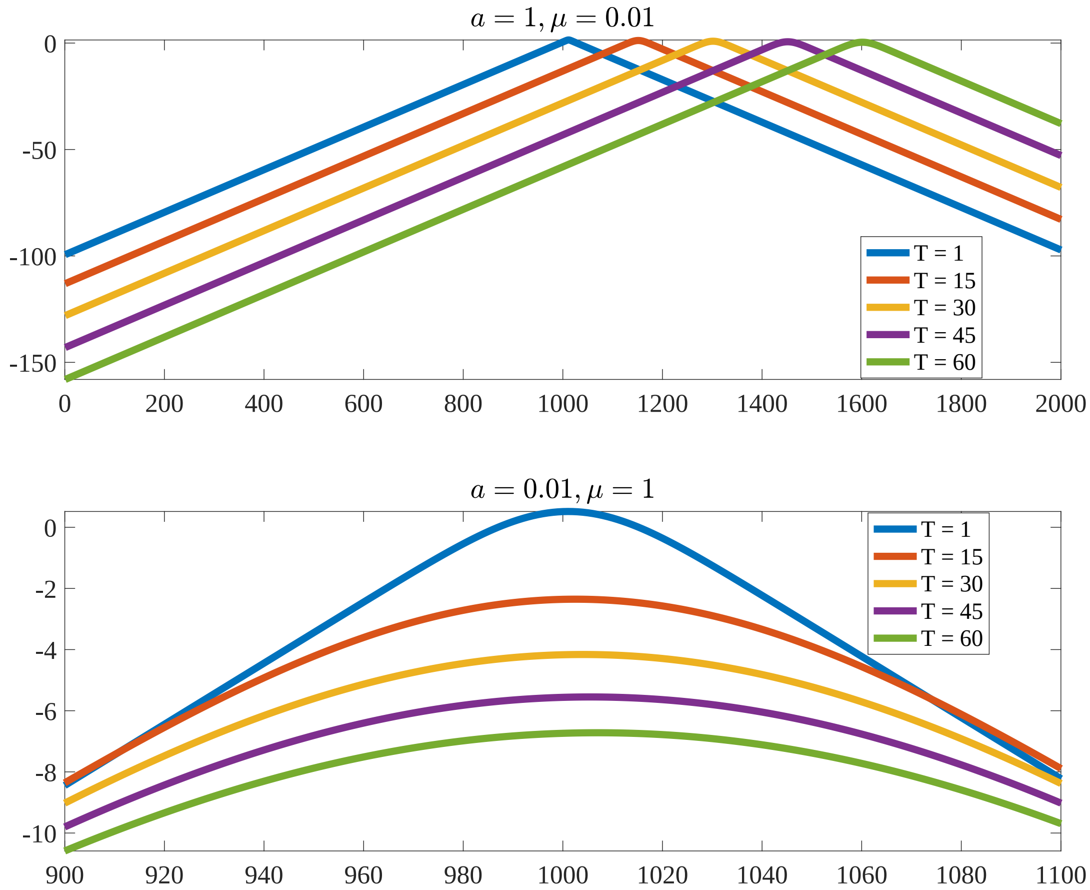

图 4: T=1,15,39,45,60 时的数值结果，其中 (a) 为对流占优的情况 (b) 为扩散占优的情况

```
%% 补充习题9.1 计算程序
clear;close all;
%% 1. 绘制n=1-8的插值结果
figure(1);
n_list1 = [1,2,3,4,5,6,7,8];
for i = 1:length(n_list1)
    n = n_list1(i);
    b = 5; a = -5; N = 100;
    x = zeros(n + 1, 1); y = zeros(n + 1, 1);
    xx = zeros(N + 1, 1); yy = zeros(N + 1, 1);
    yPieceLinear = zeros(N + 1, 1);
    h = (b-a)/n;
    for j = 0 : n
        x(j + 1) = a + j * (b - a)/n; y(j + 1) = 1/(1 + x(j + 1)^2);
    end
    for j = 0 : N
        xx(j + 1) = a + j * (b - a)/N; yy(j + 1) = 1/(1 + xx(j + 1)^2);
```

```
        yPieceLinear(j + 1) = PieceLinear(x, y, xx(j + 1));
    end
    error = norm(yy - yPieceLinear, inf )/(norm(yy, inf ) * h^2);
    subplot(2,4,i)
    labels = {'Exact - value', 'PieceLinear - value'};
    plot(xx, yy,' r.','LineWidth',4);hold on;
    plot(xx, yPieceLinear,' b-','LineWidth', 4);
    axis([-5 5 -0.5 2]);
    axis square;
    titleName = ['N=',num2str(n)];
    title(titleName); ylabel('y'); xlabel('x');
    legend(labels, 'Location', 'North')
    set(gca,'fontname','Times','fontsize',18)
end
%% 2. 绘制n=10,20,30,40的插值结果
figure(2);
n_list2 = [10,20,30,40];
for i = 1:length(n_list2)
    n = n_list2(i);
    b = 5; a = -5; N = 100;
    x = zeros(n + 1, 1); y = zeros(n + 1, 1);
    xx = zeros(N + 1, 1); yy = zeros(N + 1, 1);
    yPieceLinear = zeros(N + 1, 1);
    h = (b-a)/n;
    for j = 0 : n
        x(j + 1) = a + j * (b - a)/n; y(j + 1) = 1/(1 + x(j + 1)^2);
    end
    for j = 0 : N
        xx(j + 1) = a + j * (b - a)/N; yy(j + 1) = 1/(1 + xx(j + 1)^2);
        yPieceLinear(j + 1) = PieceLinear(x, y, xx(j + 1));
    end
    error = norm(yy - yPieceLinear, inf )/(norm(yy, inf ) * h^2);
    subplot(2,2,i)
    labels = {'Exact - value', 'PieceLinear - value'};
    plot(xx, yy,' r.','LineWidth',7);hold on;
    plot(xx, yPieceLinear,' b--','LineWidth', 4);
    axis([-5 5 -0.5 2]);
    axis square;
    titleName = ['N=',num2str(n)];
    title(titleName); ylabel('y'); xlabel('x');
    legend(labels, 'Location', 'North')
    set(gca,'fontname','Times','fontsize',18)
end
```

```
%% 3. 进行误差的收敛阶估计
figure(3);
nm_list =2.^ [3,4,5,6,7,8,9];
%nm_list = 10:10:1000;
error_list = zeros(length(nm_list),1);
for k = 1:3
for i = 1:length(nm_list)
    n = nm_list(i);
    b = 5; a = -5; N = 100;
    x = zeros(n + 1, 1); y = zeros(n + 1, 1);
    xx = zeros(N + 1, 1); yy = zeros(N + 1, 1);
    yPieceLinear = zeros(N + 1, 1);
    h = (b-a)/n;
    for j = 0 : n
        x(j + 1) = a + j * (b - a)/n; y(j + 1) = 1/(1 + x(j + 1)^2);
    end
    for j = 0 : N
        xx(j + 1) = a + j * (b - a)/N; yy(j + 1) = 1/(1 + xx(j + 1)^2);
        yPieceLinear(j + 1) = PieceLinear(x, y, xx(j + 1));
    end
    if k==1
        hh = h;
        ylabelName = '$$\frac{\left\|f-\mathcal{I}_{n} ...
            f\right\|_{\infty}}{\|f\|_{\infty}h}$$';
    elseif k==2
        hh = h^2;
        ylabelName = '$$\frac{\left\|f-\mathcal{I}_{n} ...
            f\right\|_{\infty}}{\|f\|_{\infty}h^2}$$';
    elseif k==3
        hh = h^3;
        ylabelName = '$$\frac{\left\|f-\mathcal{I}_{n} ...
            f\right\|_{\infty}}{\|f\|_{\infty}h^3}$$';
    end
    error_list(i) = norm(yy - yPieceLinear, inf )/(norm(yy, inf ) * hh);
end
subplot(3,1,k)
plot(error_list,'b','linewidth',3.5)
xlabel('$$n$$','Interpreter','latex');
ylabel(ylabelName,'Interpreter','latex')
set(gca,'fontname','Times','fontsize',18)
error_list
end
```

```
%% Piece插值程序
function [youtput] = PieceLinear(x, y, xinput)
n = length(x) - 1;
phi = zeros(n + 1, 1);
for k = 1 : n
if (x(k) ≤ xinput) && (xinput ≤ x(k + 1))
phi(k) = (x(k + 1) - xinput)/(x(k + 1) - x(k));
phi(k + 1) = (xinput - x(k))/(x(k + 1) - x(k));
end
end
youtput = y'* phi;
end
```

```
%% 补充习题9.2计算程序
clc;clear;close all;
tau = 0.05;
h = 0.1;
a_list = [1,0.01];
r = tau/h;
nu_list = [0.01,1];
N = 1000;
T = 60;
recordTime_list = [1,15,30,45,60];
legendName = {}
for i = 1:length(recordTime_list)
    legendName{i} = ['T = ', num2str(recordTime_list(i))]
end
%% 空间结点以外的区域使用一阶导数为零的条件进行补全
for caseNo = 1:2
    a = a_list(caseNo)
    nu = nu_list(caseNo)
    subplot(2,1,caseNo)
A = zeros(2*N+1,2*N+1);%初始化A矩阵
for i = 1:2*N+1
    if i ==1
        A(i,i) = -(1+a*r)/tau;
        A(i,i+1) = a*r/tau;
    else
        A(i,i) = (a*r-1)/tau;
        A(i,i-1) = -a*r/tau;
    end
```

```
end
B = zeros(2*N+1,2*N+1);%初始化B矩阵
for i = 1:2*N+1
    if (i ==1) | (i ==2*N+ 1)
        B(i,i) = 1/tau;
    else
        B(i,i) = 1/tau + 2*nu/(h^2);
        B(i,i-1) = -nu/(h^2);
        B(i,i+1) = -nu/(h^2);
    end
end
invB = inv(B);
%% 给定初值
u0 = zeros(2*N+1,1);
for i = 1:2*N+1
    if i< N+1
        u0(i) = (-(N+1)*h+i*h)+1;
    else
        u0(i) = 1 - (i-(N+1))*h;
    end
end
for time = 0:tau:T
    f = exp(-time)*ones(2*N+1,1);
    if time ==0
        u = invB * (f-A*u0);
    else
        u = invB * (f-A*u);
    end
    if ismember(time,recordTime_list)
        plot(u,'LineWidth',5)
        hold on
    end
end
set(gca,'fontname','Times','fontsize',18)
if caseNo == 1
    xlim([0,2000]);
    title('$$a=1,\mu=0.01$$','Interpreter','latex')
else
    xlim([900,1100]);
    title('$$a=0.01,\mu=1$$','Interpreter','latex')
end
legend(legendName,'Location','east')
end
```