常见的递推种类

first-order	
linear	$a_n = na_{n-1} - 1$
nonlinear	$a_n = 1/(1 + a_{n-1})$
second-order	
linear	$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$
nonlinear	$a_n = a_{n-1}a_{n-2} + \sqrt{a_{n-2}}$
variable coefficients	$a_n = na_{n-1} + (n-1)a_{n-2} + 1$
tth order	$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-t})$
full-history	$a_n = n + a_{n-1} + a_{n-2} \ldots + a_1$
divide-and-conquer	$a_n = a_{\lfloor n/2 \rfloor} + a_{\lceil n/2 \rceil} + n$

本文着重记录一阶、二阶线性递推和递归算法中常常涉及到的分治（divide-and-conquer）递推的通项公式。

1.一般的线性递推通项公式

1）一阶线性递推：

对于$a_n = x_n * a_{n-1} + y_n \ (a_0 = 0)$

$$
\begin{aligned}
a_n &= x_n x_{n-1}(a_{n-2} + y_{n-1}) + y_n \\
&= y_n + \sum_{1<=j<n} y_j x_{j+1} \ldots x_n
\end{aligned}
$$

对于 $a_n = x_n \cdot a_{n-1} + y_n \ (a_0=0)$

设：$\prod = x_n \cdot x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdots x_1$

等式两边同除 $\prod$ 得：

$$\frac{a_n}{x_n \cdot x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdots x_1} = \frac{x_n a_{n-1}}{x_n \cdot x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdots x_1} + \frac{y_n}{x_n \cdot x_{n-1} \cdots x_1}$$

此时若设 $S_n = \dfrac{a_n}{x_n \cdot x_{n-1} \cdots x_1}$

则 $S_n = S_{n-1} + \dfrac{y_n}{x_n x_{n-1} \cdots x_1}$

$$= S_{n-2} + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1} \cdots x_1} + \frac{y_n}{x_n x_{n-1} \cdots x_1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{x_j \cdots x_1}$$

那么 $a_n = x_n \cdot x_{n-1} \cdots x_1 \cdot S_n$

上下约分后 $= y_n + \sum_{j=1}^{n-1} y_j \cdot x_{j+1} \cdot x_{j+2} \cdots x_n$

几个例题.

1.1 $na_n=(n-2)a_{n-1}+2 \quad (n>1 \quad a_1=1)$

解: $a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}+\frac{2}{n}$ ①

有 $x_n=\frac{n-2}{n}$ $\prod=x_1\cdot x_2\cdots x_n=\frac{(n-2)(n-3)\cdots 1}{n(n-1)(n-2)\cdots 3}=\frac{2}{n(n-1)}$

①式两边同乘 $\frac{n(n-1)}{2}$

$$\frac{n(n-1)}{2}a_n=\frac{(n-2)(n-1)}{2}a_{n-1}+(n-1)$$

$$\underline{n(n-1)a_n}=\underline{(n-2)(n-1)a_{n-1}}+2(n-1)$$

将 $n(n-1)a_n$ 看作新数列 S_n $(S_1=0)$

$$S_n=S_{n-1}+2(n-1)$$
$$=\underline{2(n+n-1+n-2+\cdots+1)}+\underline{\underline{S_1}}^{\times}$$
$$=n(n-1)$$

1.2 $a_n=2a_{n-1}+1 \quad (a_1=1 \quad n>1)$

解: 不难发现 $x_n=2$ $\prod=2^n$

∴两边同除

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}$$
$$=a_1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$
$$=a_1+1-\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}$$

$\therefore a_n=2^{n+1}-1$

代回验证:

$a_n=2^{n+1}-1$

$2a_{n-1}+1=2\cdot(2^n-1)+1$

$=2^{n+1}-2+1$

$=2^{n+1}-1$

1.3 $a_n = \frac{n-3}{n} a_{n-1} + 1$ $\quad a_0 = a_1 = a_2 = 0$

求 $a_{999} = ?$

$x_n = \frac{n-3}{n}$ $\quad \prod = \frac{n-3}{n} \frac{(n-4)\cdots 3\times 2\times 1}{(n-1)(n-2)\cdots\times 4} = \frac{3\times 2\times 1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{6}{n(n-1)(n-2)}$

两边同乘：$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 得

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{\cancel{6}} a_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{\cancel{6}} a_{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{\cancel{6}}$$

若设 $S_n = n(n-1)(n-2)a_n$ $\quad (S_2 = S_1 = S_0 = 0)$

$$S_n = S_{n-1} + n(n-1)(n-2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \because\ & n(n-1)(n-2) \\ =\ & n(n^2-3n+2) \\ =\ & n^3-3n^2+2n \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum n^3 - \sum 3n^2 + \sum 2n \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 3\frac{(n+1)(2n+1)n}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1) \\
&= n(n+1)\left[\frac{n(n+1)}{4} - \frac{2n+1}{2} + 1\right] \\
&= n(n+1)\left[\frac{n^2+n-4n-2+4}{4}\right] \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{4}
\end{aligned}$$

$\therefore$ $a_n = \frac{S_n}{n(n-1)(n-2)} = \frac{n+1}{4}$

$a_{999} = \frac{1000}{4} = 250$

2) 二阶线性递推

对于 $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$
我们不妨假设a_n可以写成x^n的形式：
那么$x^n = \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2}$
两边同时除以 x^{n-2}
可以得到特征方程：
$x^2 = \alpha x + \beta$
只需求解该一元二次方程 得到解x_1, x_2
那么原递推式可以写成$c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$的形式
常数项可以通过已知项代入法求得

例：斐波那契数列通项公式.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad a_0 = 0 \quad a_1 = 1$$

解: $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$

$$x^2 = x + 1$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$a_0 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 C_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 C_2 = 0$$
$$a_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) C_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) C_2 = 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ C_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

2.算法常见的分治递推

先看例子：

eg: Binary Search 二分查找的复杂度

$$B_n = B_{[n/2]} + 1 \text{ with } B_1 = 1$$

不妨设：

$$An = B_{2^n}$$

则得到了

$$A_n = A_{n-1} + 1 \text{ with } A_0 = 1$$

易知：

$$An = n$$

那么对于所有是2的指数幂的N：

$$B_n = lgN \text{ when N is a power of 2}$$

而其他在2^{N-1}和2^N之间的整数，我们则考虑Bn为其二进制的位数，可以知道Bn=lgN向下取整后+1 满足原有递推条件。

更一般的结论：

Theorem 2.5 (Divide-and-conquer functions). If the function $a(x)$ satisfies the recurrence

$$a(x) = \alpha a(x/\beta) + x \qquad \text{for } x > 1 \text{ with } a(x) = 0 \text{ for } x \le 1$$

then

$$\begin{aligned} &\text{if } \alpha < \beta \qquad a(x) \sim \frac{\beta}{\beta - \alpha} x \\ &\text{if } \alpha = \beta \qquad a(x) \sim x \log_\beta x \\ &\text{if } \alpha > \beta \qquad a(x) \sim \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{\{\log_\beta \alpha\}} x^{\log_\beta \alpha}. \end{aligned}$$

证明：

将a_x展开得：

$$a_x = x + \alpha \frac{x}{\beta} + .. + \alpha^t \frac{x}{\beta^t}$$

考虑α和β的关系：

1）α<β: 趋近于$\frac{\beta}{\beta-\alpha}$ 式子和x线性关系 由x主导

2）α=β：取决于t的大小，是其在β进制中的位数 式子由β主导

3）α>β：式子变为由α主导 分治的效用不再突出 面临指数级别的增长

$$x\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^t = x\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^{\log_\beta x}\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^{-\{\log_\beta x\}} = x^{\log_\beta \alpha}\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{\{\log_\beta x\}},$$

下图可以直观表达一些出程序调用次数和α β之间的关系的联系：

1）想象一个问题每次被分解成两个子问题，但每个问题只有上层的1/3的计算量，那么这个问题的总计算量依然由最顶层主导 呈现倒三角

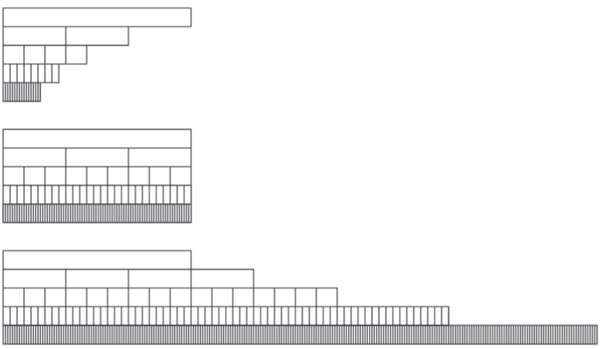

Figure 2.6 Divide-and-conquer for $\beta = 3$ and $\alpha = 2, 3, 4$

2）想象一个问题每次被分解成三个子问题，每个又正好是上层1/3的计算量，那么总计算量就是$xlog_\beta x$（图示中的长方形面积）

3）如果 每次调用1/3的计算量的子问题四次，那么下层展开的子问题的计算量就会呈指数的增加。

递推常用求和展开附表：

geometric series	$\sum_{0\le k<n} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$
arithmetic series	$\sum_{0\le k<n} k = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$
binomial coefficients	$\sum_{0\le k\le n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$
binomial theorem	$\sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$
harmonic numbers	$\sum_{1\le k\le n} \frac{1}{k} = H_n$
sum of harmonic numbers	$\sum_{1\le k<n} H_k = nH_n - n$
Vandermonde convolution	$\sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k}\binom{m}{t-k} = \binom{n+m}{t}$