第四节 分段低次插值

我们已经知道插值有多种方法：**Lagrange** 插值、**Newton**插值、**Hermite** 插值等多种方式。插值的目的就是数值逼近的一种手段，而数值逼近是为得到一个数学问题的精确解或足够精确的解。那么，是否插值多项式的次数越高，越能够达到这个目的呢？现在我们来讨论一下这个问题。

我们已经知道：$f(x)$在$n+1$个节点x_i ($i=0, 1, 2, \ldots, n$)上的n次插值多项式$P_n(x)$的余项

$$R(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

设想当节点数增多时会出现什么情况。由插值余项可知，当$f(x)$充分光滑时，若余项随n增大而趋于0时，这说明可用增加节点的方法达到这个目的，那么实际是这样吗？

是否有$\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)$，即要讨论收敛性问题。

龙格(Runge)现象

插值节点的增多,尽管使插值多项式在更多的插值节点上与函数 $f(x)$ 的值相等,但在两个节点之间 $P_n(x)$不一定能很好地逼近 $f(x)$, 有时误差会大得惊人, 著名的龙格(Runge)现象证实了这个观点.

例:1901年龙格(Runge) 给出一个例子:

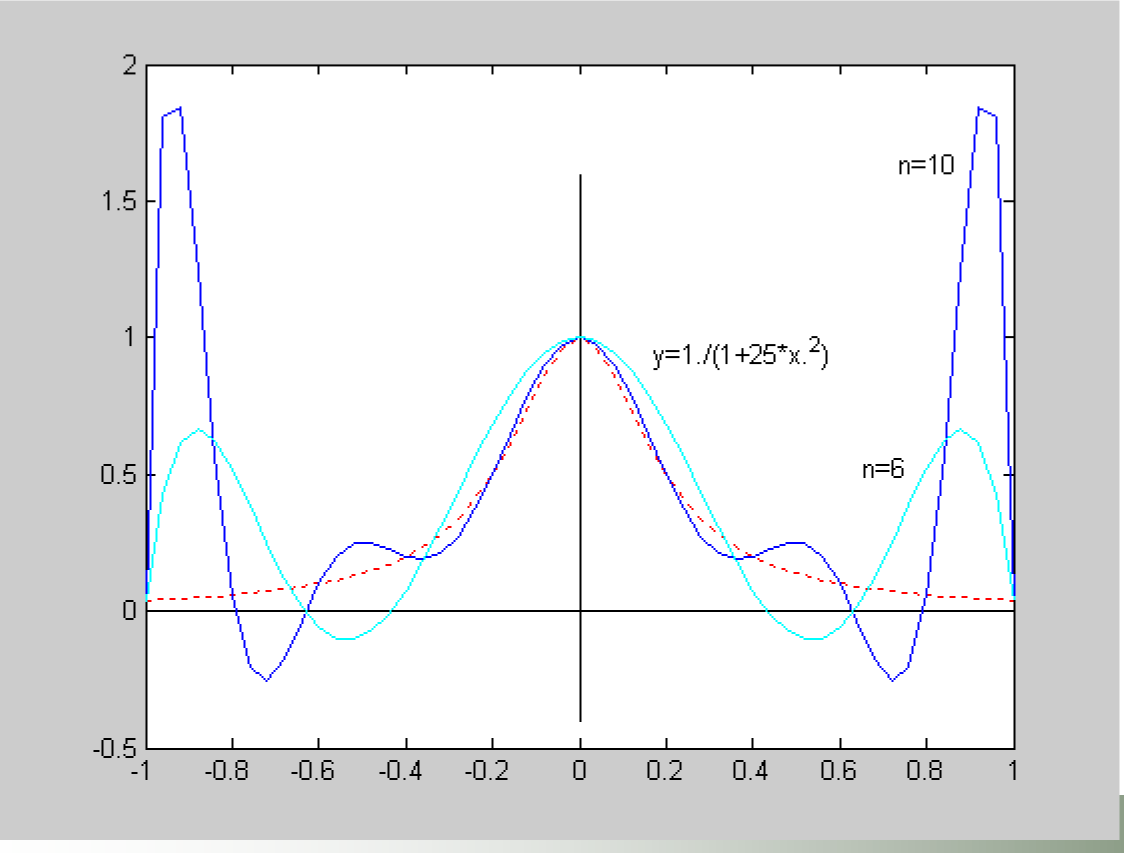
对于函数$f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}\ (-1\le x\le 1)$,取等距节点

$x_k=-1+\dfrac{k}{n}$(即将区间[-1,1]进行n等分),得到

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{n} l_j(x)y_j$$

插值多项式情况，见图:取$n=6$和$n=10$

从图中可见， $P_{10}(x)$仅在区间[-0.2,0.2]内能较好地逼近$f(x)$,而在其余位置, $P_{10}(x)$与$f(x)$的值相差很大,越靠近 端点,近似的效果越差.对于等距节点,高次多项式插值发生的这种现象称为龙格现象.



如

$P_6(0.96)=0.4233$

$P_{10}(0.96)=1.80438$

$f(0.96)=0.0416$

数值稳定性

从计算的数值运算误差看,对于等距节点的差分形式,由于高阶差分的误差传播,函数值的微小变化都将使插值产生很大的误差.

龙格(Runge)现象表明插值多项式序列不收敛，实际上，严格的理论分析可知插值多项式序列确是不收敛的，而且高阶插值还是不稳定的。

因此，实践上作插值时一般只用一次、二次最多用三次插值多项式。

那么如何提高插值精度呢？

因此实际应用中常采用分段低次插值。

（1）分段线性插值

（2）分段二次插值与分段三次插值

（3）分段**Hermite**插值

（4） 分段三次样条插值

一、分段线性插值多项式

1.问题的提法

定义 设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的函数，在节点

$$a= x_0< x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b,$$

的函数值为$y_0, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, y_n$,若函数$\varphi(x)$满足条件

(1) $\varphi(x)$在每个子区间$[x_i, x_{i+1}](i=0,1,2,\cdots,n-1)$上是线性插值多项式;

(2) $\varphi(x_i)= y_i$, $i=0,1,2,\ldots,n$

(3) $\varphi(x)$在区间$[a, b]$上连续;

则称$\varphi(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的分段线性插值多项式。

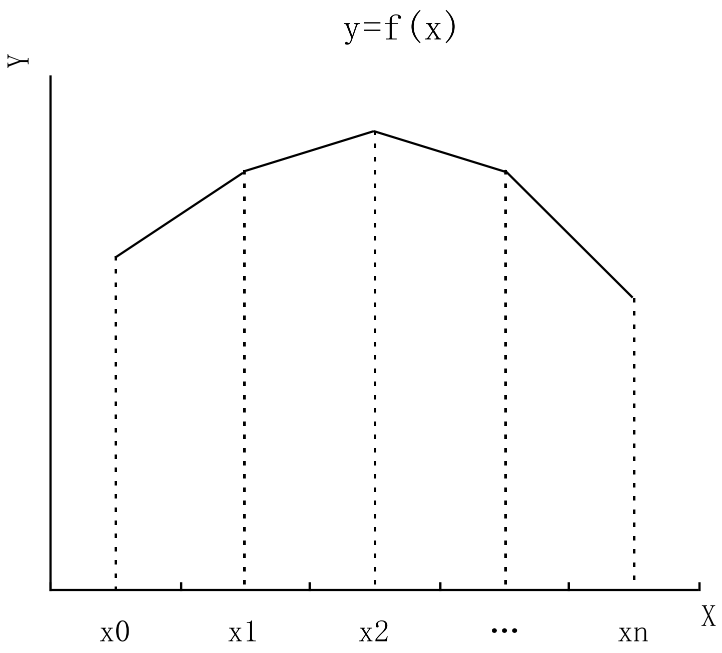
分段线性插值问题的解存在唯一.

2.分段线性插值函数的表达式

由定义， $\varphi(x)$在每个子区间$[x_i,x_{i+1}](i=0,1,2,\cdots,n-1)$上是一次插值多项式;

$$\varphi(x)=L_1(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}y_i+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}y_{i+1}\qquad x_i\le x\le x_{i+1}$$

分段线性插值曲线图:



n次Lagrange插值多项式为

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} l_j(x)y_j$$

将分段线性插值函数记为$L_1^h(x)$,将$L_1^h(x)$表为

$$L_1^h(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i^h(x)y_i$$

其中$l_i^h(x)$为分段线性插值基函数.

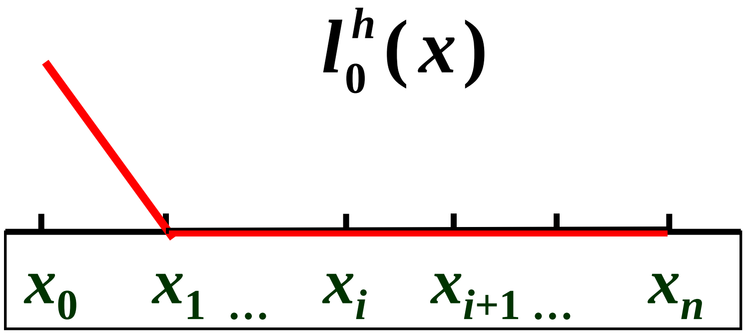
分段线性插值基函数$l_i^h(x)$应满足

(1) $l_i^h(x)$为分段线性函数,

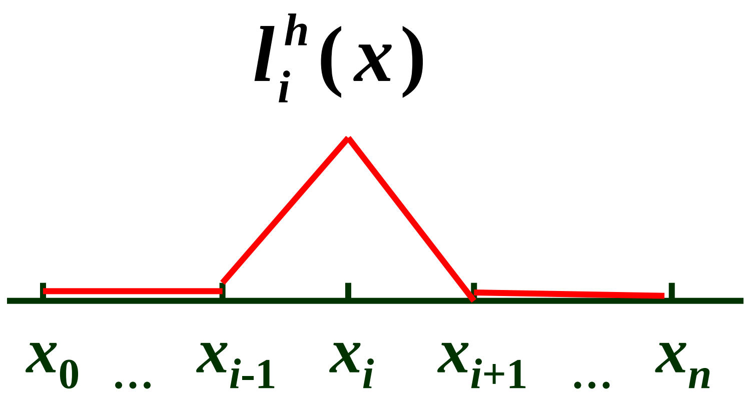
(2) $l_i^h(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

分段线性插值基函数$l_i^h(x)$的具体形式为

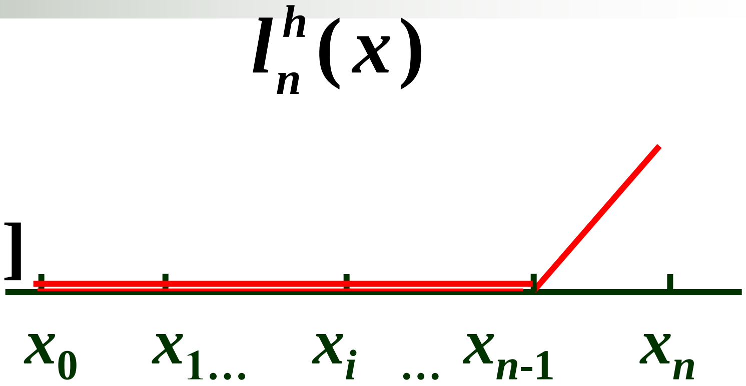
$$l_0^h(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1} & x\in[x_0,x_1]\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$$



$$l_i^h(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x\in[x_{i-1},x_i]\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & x\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0 & \text{其余}\end{cases}\qquad i=1,2,\dots,n-1$$

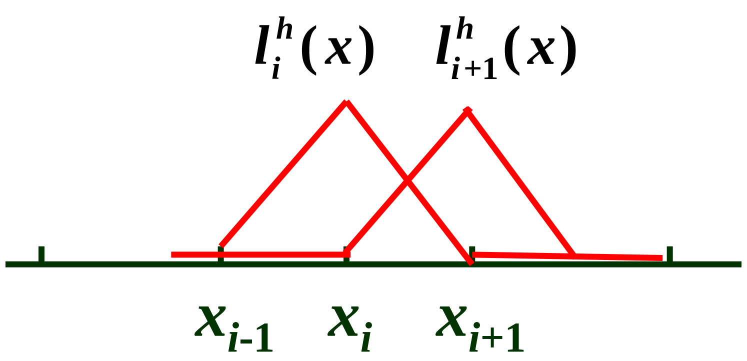


$$l_n^h(x)=\begin{cases}0 & \text{其余}\\ \dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} & x\in[x_{n-1},x_n]\end{cases}$$



分段线性插值函数可分段表示为：对$x\in[x_i,x_{i+1}]$,

$$L_1^h(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i^h(x)y_i = l_i^h(x)y_i + l_{i+1}^h(x)y_{i+1}\text{，}\quad i=0,1,2,\dots,n-1$$



3.分段线性插值函数的余项

定理：设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶连续导数$f''(x)$，且$|f''(x)| \le m_2$, 记： $h = max\ |x_{i+1}-x_i|$,就有估计：

$|R(x)| = |f(x)- \varphi(x)| \le m_2 h^2/ 8\ ,\ x \in [a, b]$。

注意：h随分段增多而减少，因此用分段插值高精度是很好的途径.

例：考虑构造一个函数$f(x)=\cos x$的等距节点函数表，要使分段线性插值的误差不大于$\frac{1}{2}\times10^{-4}$，最大步长h应取多大？

解：$|R|\le\frac{h^2}{8}\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$

$f''(x)=-\cos x,\qquad |f''(x)|\le 1$

$|R|\le\frac{h^2}{8}\le\frac{1}{2}\times10^{-4}\qquad h\le 2\times10^{-2}$

最大步长h应取0.02.

二.分段二次插值与分段三次插值

例：已知等距节点数据表

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

用分段三次插值求$f(x_t)$的近似值。

解：设$x_3 < x_t < x_4$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\cdots$	x_n
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\cdots$	y_n

x_t

取四点 $x_2, x_3, x_4,$ x_5构造$L_3(x)$

$$f(x_t) \approx L_3(x_t)$$

误差$|R(x_t)| = |f(x_t) - L_3(x_t)| \le \dfrac{9}{16}\dfrac{M_4}{4!}h^4$

例: 已知等距节点数据表

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

用分段二次插值求$f(x_t)$的近似值。

解: 设$x_3 < x_t < x_4$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\cdots$	x_n
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\cdots$	y_n

取三点, x_t

$$\left.\begin{array}{l} \text{当}\left|x_t - x_3\right| < \dfrac{\left|x_4 - x_3\right|}{2}\text{时，取}x_2, x_3, x_4 \\ \text{当}\left|x_t - x_3\right| > \dfrac{\left|x_4 - x_3\right|}{2}\text{时，取}x_3, x_4, x_5 \end{array}\right\rangle \Rightarrow L_2(x)$$

$$f(x_t) \approx L_2(x_t)$$

误差 $|R(x_t)| = |f(x_t) - L_2(x_t)| \le \dfrac{\sqrt{3}}{27} M_3 h^3$

例：在[−4, 4]上给出等距节点函数表，若用分段二次插值计算e^x的近似值，要使截断误差不超过10^{-6}，问使用函数表的步长h 应为多少?

解：设 $x_{i-1}\le x\le x_{i+1}$，　则有

$x_{i-1}=x_i-h$,　$x_{i+1}=x_i+h$,　$x=x_i+th$　$(-1\le t\le 1)$

过三点 x_{i-1}，x_i，x_{i+1}的二次插值误差为：

$$|R_2(x)|=|e^x-p_2(x)|=\frac{e^{\xi}}{6}|(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})|$$

$$=\frac{e^{\xi}}{6}|t(t^2-1)|h^3\le\frac{\max\limits_{-4\le x\le 4}e^x}{6}\max_{-1\le t\le 1}|t(t^2-1)|h^3$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{e^4}{6}\times\frac{2\sqrt{3}}{9}h^3$$

$$|R_2(x)|\le 10^{-6}\quad\Rightarrow\quad h\le 10^{-2}\times\frac{3}{e}\times\frac{1}{\sqrt[3]{e}\times\sqrt[6]{3}}\approx 0.0065$$

三.分段三次Hermite插值

1.问题的提法

定义:设$n+1$个插值节点x_0，$x_1,\cdots x_n$。已知在节点上的函数值$y_i=f(x_i)$和导数值$y_i'=f'(x_i)$，$i=0,1,\cdots,n.$

分段三次*Hermite*插值多项式$H_3^h(x)$应满足条件:

(1) $H_3^h(x)\in C'[a,b]$;

(2) 在局部的每个小区间$[x_i,x_{i+1}]$上是三次多项式;

(3) $H_3^h(x_i)=y_i,(H_3^h(x_i))'=y_i'(i=0,1,\cdots,n).$

分段三次Hermite插值多项式存在唯一

2.分段三次Hermite插值的表达式

分段三次**Hermite**插值多项式的一般形式

$$H_3^h(x)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(x)y_i+\sum_{i=0}^{n}\beta_i(x)y'_i$$

$\alpha_i(x)$是对应于第i个节点函数的基函数,

$\beta_i(x)$是对应于第i个节点导数的基函数,

$\alpha_i(x)$应满足:

(1) 分段三次多项式,

(2) $\alpha_i(x_j)=\delta_{ij},\alpha'_i(x_j)=0,$

$(i,j=0,1,2,\cdots,n)$

$\beta_i(x)$应满足:

(1) 分段三次多项式,

(2) $\beta_i(x_j)=0,\beta'_i(x_j)=\delta_{ij},$

$(i,j=0,1,2,\cdots,n)$

具体形式如下：

$$\alpha_0(x)=\begin{cases}(1+2\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0})(\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1})^2 & x\in[x_0,x_1]\\ 0 & x\in[x_1,x_n]\end{cases}$$

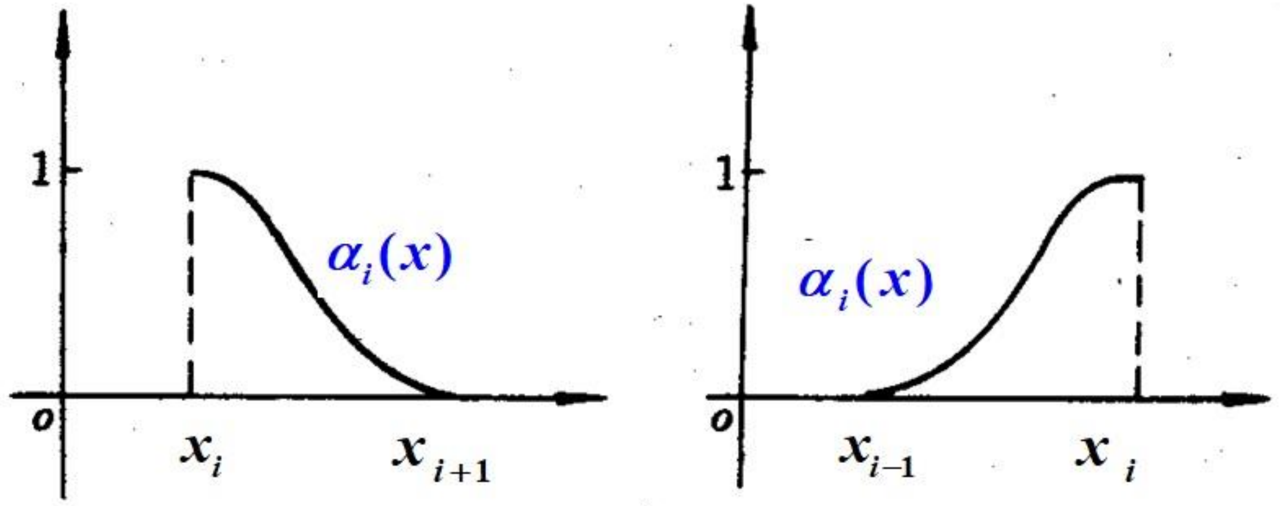
$i=1,2,\cdots,(n-1)$时；

$$a_i(x)=\begin{cases}(1+2\dfrac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i})(\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}})^2 & x\in[x_{i-1},x_i]\\ (1+2\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i})(\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}})^2 & x\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\end{cases}$$

$$a_n(x)=\begin{cases}0 & x\in[x_0,x_{n-1}]\\ (1+2\dfrac{x-x_n}{x_{n-1}-x_n})\quad(\dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}})^2 & x\in[x_{n-1},x_n]\end{cases}$$

$i=1,2,\cdots,(n-1)$时；

$$
a_i(x)=\begin{cases}
(1+2\dfrac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i})(\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}})^2 & x\in[x_{i-1},x_i] \\
(1+2\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i})(\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}})^2 & x\in[x_i,x_{i+1}] \\
0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]
\end{cases}
$$



$$\beta_0(x)=\begin{cases}(x-x_0)\quad(\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1})^2 & x\in[x_0,x_1]\\ 0 & x\in[x_1,x_n]\end{cases}$$

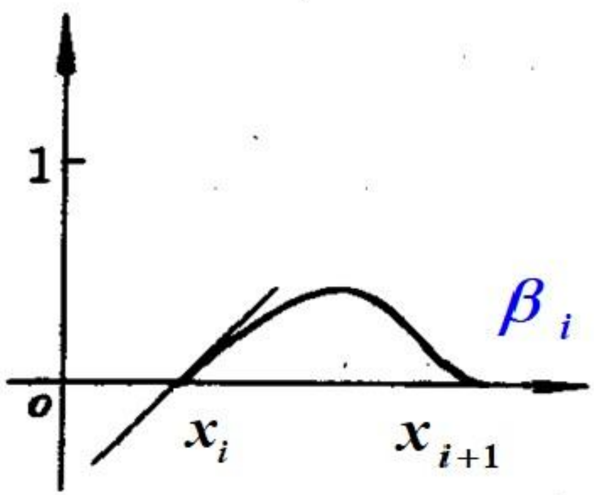
$i=1,2,\cdots,(n-1)$时；

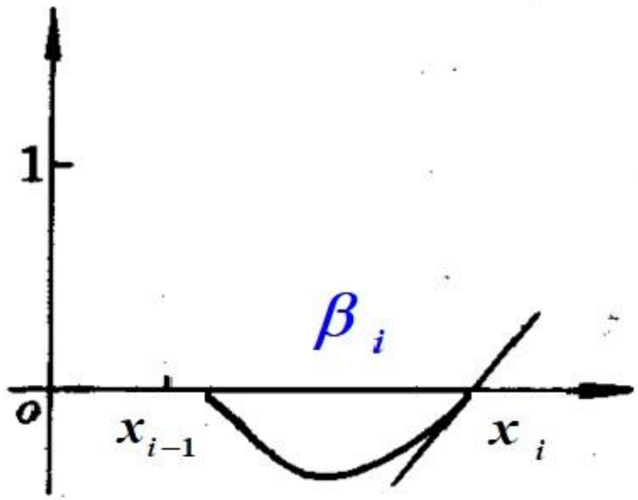
$$\beta_i(x)=\begin{cases}(x-x_i)(\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}})^2 & x\in[x_{i-1},x_i]\\ (x-x_i)(\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}})^2 & x\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\end{cases}$$

$$\beta_n(x)=\begin{cases}0 & x\in[x_0,x_{n-1}]\\ (x-x_n)\quad(\dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}})^2 & x\in[x_{n-1},x_n]\end{cases}$$

$i=1,2,\cdots,(n-1)$时；

$$\beta_i(x)=\begin{cases}(x-x_i)(\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}})^2 & x\in[x_{i-1},x_i]\\ (x-x_i)(\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}})^2 & x\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\end{cases}$$





在$x\in[x_i,x_{i+1}]$上的表达式

$$H_3^h(x)=\alpha_i(x)y_i+\alpha_{i+1}(x)y_{i+1}+\beta_i(x)y'_i+\beta_{i+1}(x)y'_{i+1}$$

3.分段三次Hermite插值的余项

定理：设$f(x)$在$[a,b]$上有四阶连续导数$f^{(4)}(x)$，

且$|f^{(4)}(x)|\le m_4$, 记： $h=max\,|x_{i+1}-x_i|$,就有估计：

$$|R_h(x)|=\left|f(x)-H_3^h(x)\right|\le\frac{h^4}{4!2^4}\max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(\xi)|$$

例：考虑构造一个函数$f(x)=\cos x$的等距节点函数表，要使分段三次*Hermite*插值的误差不大于$\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，最大步长$h$应取多大？

解：$|R_h(x)| \le \frac{h^4}{4!2^4}\max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(\xi)|$

$$f^{(4)}(x)=\cos x, \qquad |f^{(4)}(x)| \le 1$$

$$|R_h(x)| \le \frac{h^4}{4!2^4} \le \frac{1}{2}\times 10^{-4} \qquad h^4 \le 12\times 2^4\times 10^{-4}$$

$$h \le 3.8\times 10^{-1}$$

最大步长h应取0.38.

四、分段低次插值的收敛性

(1)分段线性插值的误差

$$|R(x)|=\left|f(x)-L_1^h(x)\right|\le \frac{1}{8}M_2h^2,\qquad x\in[a,b]$$

$$h=\max_{0\le i\le n-1} h_i,\qquad M_2=\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

(2)分段*Hermite*插值的误差

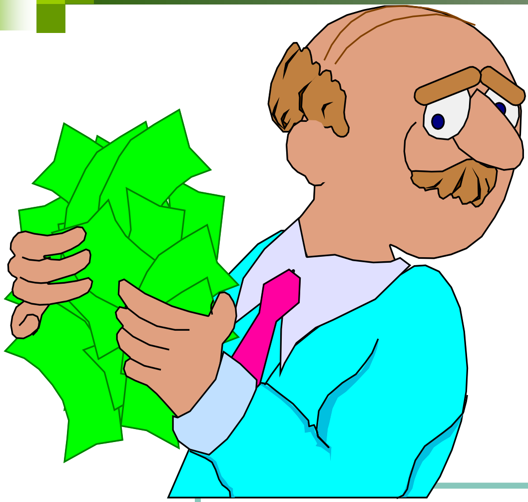
$$|R(x)|=|f(x)-H_3^h(x)|\le \frac{1}{4!2^4}M_4h^4$$

$$h=\max_{0\le i\le n-1} h_i,\qquad M_4=\max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|$$

当$h\to 0$时，$R(x)\to 0$，但分段低次插值整体光滑性低，

$L_1^h(x)\in C^0[a,b]$,整体连续，但一阶导数不连续，

$H_3^h(x)\in C^1[a,b]$,整体一阶导数连续，但二阶导数不连续.



上面介绍的分段低次插值，虽然具有计算简便，收敛性有保证，数值稳定性又好且易在计算机上实现等优点，但它却不能保证整条曲线的光滑性，从而不能满足某些工程技术上的要求，从六十年代开始，首先由于航空、造船等工程设计的需要而发展起来的样条插值（spline)方法，既保留了分段低次插值的各种优点，又提高了插值函数的光滑性，在许多领域有越来越广泛的应用。