第三节 矩阵的三角分解法

一、矩阵三角分解的基本定理

顺序高斯消元与LU分解的等价性

顺序高斯消元的**基本思想**：将矩阵A的下三角部分消为零，即

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

例3-3　求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&3&2\end{bmatrix}$ 的 LU 分解.

解：

$$L_1=\begin{bmatrix}1&&\\-2&1&\\-1&&1\end{bmatrix}$$

L_1A 完成第一步消元,得：

$$A^{(2)}=L_1A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$L_2=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&1&1\end{bmatrix},\ L_2A^{(2)}=L_2L_1A$$

完成第二步消元,得

$$A^{(3)}=L_2A^{(2)}=L_2L_1A$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

解： $A^{(3)} = L_2 A^{(2)} = L_2 L_1 A$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = U$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} U$$

令：$L = L_1^{-1} L_2^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

L单位下三角

U上三角

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{由} L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_2 L_1 A^{(1)} = A^{(n)} \overset{\nabla}{=} U$$

$$A^{(1)} = A = L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_{n-2}^{-1}L_{n-1}^{-1}A^{(n)}$$

$$\text{令} L = L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1}$$

得到 $\boxed{A = LU}$

对A进行顺序高斯消元等价于对矩阵A的三角分解A=LU

其中

$$L=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ m_{21} & 1 & & & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & 1 & \\ m_{n1} & m_{n2} & & & m_{n.n-1} & 1\end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix}1 & & & & & \\ l_{21} & 1 & & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & 1 & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{n,n-1} & 1\end{bmatrix}$$

$$U=A^{(n)}=\begin{bmatrix}a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn}^{(n)}\end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn}\end{bmatrix}$$

定理3－3（矩阵分解定理） 若n阶方阵$A\in R^{n\times n}$的顺序主子式 $D_k=\det(A_k)\neq 0 \quad (k=1,2,\cdots,n)$

则A可唯一地分解为一个单位下三角阵L和非奇异的上三角阵U的乘积。即$A=LU$.

推论1 $\forall A\in R^{n\times n}$为正定矩阵,则存在唯一的分解式$A=LU$。

推论2 $\forall A\in R^{n\times n}$为严格对角占优,则存在唯一的分解式$A=LU$。

定理3－3（矩阵分解定理）若n阶方阵$A \in R^{n\times n}$的顺序主子式 $D_k = \det(A_k) \neq 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$ 则A可唯一地分解为一个单位下三角阵L和非奇异的上三角阵U的乘积。即$A = LU$.

定理3－4（矩阵LDR分解定理）设A为n阶可逆矩阵，则A可唯一的分解为$A = LDR \Leftrightarrow A$的顺序主子式非零。其中$L, R$分别是单位下、上三角阵，$D$是对角阵，

$$D = diag(u_{11}, u_{22}, \ldots, u_{nn}), u_{kk} \neq 0, (k = 1, 2, \ldots, n)$$

二、利用三角分解求解$Ax=b$

1.利用LU求解$Ax=b$

设已有 $A=LU$ 代入原方程 $Ax=b$ 得

$$LUx=b \Leftrightarrow \begin{cases} LY=b \\ Ux=Y \end{cases}$$

第一步:求解下三角方程组$LY=b$,向前回代求出

$$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$$

$$y_1=b_1$$

$$y_k=b_k-\sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}y_j \quad (k=2,3,\cdots,n)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ l_{21} & 1 & & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & 1 & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

第二步: 求解上三角方程组$Ux=Y$,向后回代求出x

$$x_n = y_n / u_{nn}$$

$$x_k = \left(y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j\right) \Big/ u_{kk}$$

$$(k = n-1, n-2, \cdots, 1)$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

2. 利用列主元LU分解求解$Ax=b$

列主元LU分解

第k步，在$A^{(k)}$的第k列自对角元以下的各元素中寻找强主元，然后换行，再进行消元计算。

即寻找i_k，使$|a_{i_k k}^{(k)}|=\max\limits_{k\le i\le n}|a_{ik}^{(k)}|$

矩阵解释是 $PA=LU$，其中P是一些对换阵的乘积称为排列阵。

$$A^{(k)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & a_{33}^{(3)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & a_{kk}^{(k)} & a_{kk+1}^{(k)} & \cdots & \cdots \\ & & & a_{k+1,k}^{(k)} & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots & \cdots \\ & & i_k \rightarrow & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

例3-4： 设

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求矩阵A的列主元三角分解$PA=LU$,其中为单位下三角阵、为上三角阵、为排列阵。

$$A=\begin{bmatrix}0&1&-1&2\\-1&0&0&1\\2&-1&0&1\\1&3&0&1\end{bmatrix}$$

解：$i_1=3, \quad i_1 \leftrightarrow 1$

$$P_1=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \qquad P_1A=\begin{bmatrix}2&-1&0&1\\-1&0&0&1\\0&1&-1&2\\1&3&0&1\end{bmatrix}$$

$$L_1=\begin{bmatrix}1&&&\\\frac{1}{2}&1&&\\0&&1&\\-\frac{1}{2}&&&1\end{bmatrix} \qquad L_1P_1A=\begin{bmatrix}2&-1&0&1\\&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\&1&-1&2\\&\frac{7}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$i_2 = 4, \qquad i_2 \leftrightarrow 2$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_2 L_1 P_1 A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ & \frac{7}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & 1 & -1 & 2 \\ & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -\frac{2}{7} & 1 & \\ & \frac{1}{7} & & 1 \end{bmatrix} \qquad L_2 P_2 L_1 P_1 A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ & \frac{7}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & 0 & -1 & \frac{13}{7} \\ & 0 & 0 & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = U$$

$$L_2P_2L_1P_1A = U\,,\qquad A = P_1^{-1}L_1^{-1}P_2^{-1}L_2^{-1}U = P_1\,L_1^{-1}P_2\,L_2^{-1}U$$

令$P = P_2P_1$

$$PA = P_2P_1P_1\,L_1^{-1}P_2\,L_2^{-1}U = P_2L_1^{-1}P_2\,L_2^{-1}U\,,\qquad L = P_2L_1^{-1}P_2\,L_2^{-1}$$

$$PA = LU$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = P_2L_1^{-1}P_2L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ 0 & \frac{2}{7} & 1 & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

排列阵P在计算机中用向量表示

$$P=(1\quad 2\quad 3\quad 4)^T,\qquad P_1=(3\quad 2\quad 1\quad 4)^T,$$

$$P_2=(1\quad 4\quad 3\quad 2)^T,\qquad P=(3\quad 4\quad 1\quad 2)^T$$

$$P_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$P=(1\quad 2\quad 3\quad 4)^T\to\qquad P=(3\quad 2\quad 1\quad 4)^T,$$

$$\to P=(3\quad 4\quad 1\quad 2)^T$$

用列主元的三角分解$PA=LU$求解$Ax=b$

$$Ax=b \Leftrightarrow PAx=Pb \Rightarrow LUx=Pb \Leftrightarrow \begin{cases} LY=Pb \\ Ux=Y \end{cases}$$

P为排列阵，在计算机中用向量表示

例 $Ax=b,\quad PA=LU,\quad PAx=Pb,$

$$LUx=Pb=f$$

$$f(i)=b(P(i))$$

$$f(1)=b(P(1))=b(3),\quad f(2)=b(P(2))=b(4)$$

$$f(3)=b(P(3))=b(1),\quad f(4)=b(P(4))=b(2)$$

3. 利用全主元LU分解求解$Ax=b$

全主元LU分解

第k步，在$A^{(k)}$的右下角子阵中找强主元，然后换行、换列，再进行消元计算。

即寻找i_k、j_k，使$|a_{i_k j_k}^{(k)}|=\max\limits_{k\le i,j\le n}|a_{ij}^{(k)}|$

矩阵解释是 $PAQ=LU$，其中P、Q是一些对换阵的乘积。

用全主元的三角分解$PAQ^T=LU$求解$Ax=b$

$$Ax=b \Leftrightarrow PAQ^T(Qx)=Pb \Rightarrow LU(Qx)=Pb$$

三、矩阵的直接三角分解法

1.对称正定阵的Cholesky分解法

定理3－5: 若A为对称正定阵，则A可唯一地分解为$A=\bar{L}\bar{L}^T$，其中$\bar{L}$为下三角阵。

由 $A=LL^T$ 展开式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{nn} \end{bmatrix} \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

Cholesky分解公式

$$
\begin{cases}
l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\
l_{j1} = a_{j1} / l_{11} \quad (j = 2,3,\cdots,n) \\
l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum\limits_{m=1}^{k-1} l_{km}^2} \\
l_{jk} = \dfrac{1}{l_{kk}} (a_{jk} - \sum\limits_{m=1}^{k-1} l_{km} l_{jm}) \qquad (j = k+1,\cdots,n \;\; ; \;\; k = 2,\cdots,n)
\end{cases}
$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\Longrightarrow
\begin{pmatrix}
l_{11} & & & & & \\
l_{21} & l_{22} & & & & \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & & & \\
l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{n4} & \cdots & l_{nn}
\end{pmatrix}
$$

优点:

1、计算量小

2、第k行×第k列: $l_{km}^2 \le a_{kk} \le \max\limits_{1\le k\le n} a_{kk}$

这说明在分解过程中 $|l_{km}|^2$ 的值不会超过A的最大对角元,所以说舍入误差的放大受到控制$\longrightarrow$平方根法稳定,不必选主元。

缺点: 开方运算。$\mathbf{LDL}^T$及其改进分解。

利用Cholesky分解$A=LL^T$求解$Ax=b$

$A\in R^{n\times n}$是对称正定的矩阵，有Cholesky分解式

$A=LL^T$代入原方程 $LL^T x=b$,可分成两步

(1) 求解下三角方程组

$$LY=b$$

$$y_i=(b_i-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_k)/l_{ii}, \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

(2) 求解上三角方程组

$$L^T x=Y$$

$$x_i=(y_i-\sum_{k=i+1}^{n} l_{ki}x_k)/l_{ii}, \quad (i=n,n-1,\cdots,1)$$

2、利用正交分解$A=QR$求解 $Ax=b$

$Ax=b \Leftrightarrow QRx=b \Leftrightarrow Rx=Q^Tb$，于是可分成三步

(1) 正交分解 $A=QR$

(2) 矩阵乘法 $\bar{b}=Q^Tb$

(3) 回代求解上三角方程组 $Rx=\bar{b}$

这种方法没有选主元问题，计算稳定，但计算量略大，消元法的计算量大约为 $\frac{1}{3}n^3$，正交分解法的计算量大约为$\frac{2}{3}n^3$。

3、 三对角方程组的解法

定义1 若n阶矩阵$A=(a_{ij})$的元素满足:对于$1<p,q<n$的正整数p、q,有$j\ge i+p$及$i\ge j+q$时，$a_{ij}=0$，则A称为带状矩阵. 带宽为$w=p+q-1$。

较常见带状矩阵为带宽为3 ($p=q=2,w=3$) 的矩阵。

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

A称为三对角矩阵

系数矩阵为三对角矩阵的线性方程组称为三对角方程组

三对角线性方程组

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

用矩阵表示 $Ax = d$

应用追赶法求解三对角线性方程组。追赶法仍然保持LU分解特性,它是一种特殊的LU分解。充分利用了系数矩阵的特点，而且使之分解更简单,得到对三对角线性方程组的快速解法。

定理: 如果带宽为 $w=p+q-1$ 的n阶带状矩阵A有LU分解:$A=LU$，则L是带宽为p的下三角矩阵，U是带宽为q的上三角矩阵。

例：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & & 0 \\ \vdots & a_{22} & & \ddots & \\ a_{p1} & & \ddots & & a_{n-q+1,n} \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n,n-p+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ \vdots & 1 & & & \\ l_{p1} & & \ddots & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & l_{n,n-p+1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1q} & & 0 \\ & u_{22} & & \ddots & \\ & & \ddots & & u_{n-q+1,n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

当A为三对角阵,且$|b_1|>|c_1|,|b_i|>|c_i|+|a_i|,(i=1,2,\cdots,n-1)$,

$|b_n|>|a_n|$时，A有LU分解展开式

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & r_1 & & & \\ & u_2 & r_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & r_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}$$

$$b_1 = u_1, \quad c_1 = r_1, \quad a_2 = l_2 u_1$$

$$b_2 = l_2 r_1 + u_2 = l_2 c_1 + u_2, \quad c_2 = r_2,$$

$$a_k = l_k u_{k-1}, \qquad k = 2,3,\cdots,n$$

$$b_k = l_k r_{k-1} + u_k = l_k c_{k-1} + u_k, k = 2,3,\cdots,n$$

$$c_k = r_k, \qquad k = 2,3,\cdots,n-1$$

$$b_1 = u_1, \quad c_1 = r_1, \quad a_2 = l_2 u_1$$

$$b_2 = l_2 r_1 + u_2 = l_2 c_1 + u_2, \quad c_2 = r_2,$$

$$a_k = l_k u_{k-1}, \qquad k = 2, 3, \cdots, n$$

$$b_k = l_k r_{k-1} + u_k = l_k c_{k-1} + u_k, k = 2, 3, \cdots, n$$

$$c_k = r_k, \qquad k = 2, 3, \cdots, n-1$$

$u_1 = b_1, r_k = c_k (k = 1, 2, \cdots, n-1)$

对 $k = 2, 3, \cdots, n$

$l_k = a_k / u_{k-1}, u_k = b_k - l_k c_{k-1}$

追赶法的计算过程分为三步

(1) $A = LU$ (2) $LY = d$ (3) $Ux = Y$

求解三对角方程组的追赶法

①计算分解因子阵

$$u_1 = b_1, r_k = c_k (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

对 $k = 2, 3, \cdots, n$

$$l_k = a_k / u_{k-1}, u_k = b_k - l_k c_{k-1}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & l_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & r_1 & & & \\ & u_2 & r_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & r_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}$$

②求解 $LY = d$,

$$y_1 = d_1$$

$$y_k = d_k - l_k y_{k-1} (k = 2, 3, \cdots, n)$$

③求解 $Ux = Y$,

$$x_n = y_n / u_n$$

$$x_k = (y_n - c_k x_{k+1}) / u_k \ (k = n-1, \cdots, 2, 1)$$

例： 求解方程组：

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$$

解： $$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & l_3 & 1 & \\ & & l_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & r_1 & & \\ & u_2 & r_2 & \\ & & u_3 & r_3 \\ & & & u_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1/2 & 1 & & \\ & -2/3 & 1 & \\ & & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ & -3/2 & 0 & \\ & & -2 & 1 \\ & & & -3/2 \end{bmatrix}$$

$u_1 = b_1, r_k = c_k \ (k = 1, 2, \cdots, n-1)$

对$k = 2, 3, \cdots, n$

$l_k = a_k / u_{k-1}, u_k = b_k - l_k c_{k-1}$

求解 Ly=b,

y_1=1, y_2=1.5, y_3=1, y_4=0.5

求解 Ux=y ,

x_4=0.3333, x_3=-0.3333, x_2=-1, x_1=-1