第四节 高斯(Gauss)求积公式

前面介绍的 $n+1$个节点的 Newton -Cotes求积公式，其特征是节点是等距的。这种特点使得求积公式便于构造，复化求积公式易于形成。但同时也限制了公式的精度。 n是偶数时，代数精度为$n+1$， n是奇数时，代数精度为n 。

我们知道 $n+1$个节点的插值型求积公式的代数精确度不低于n 。设想：能不能在区间$[a,b]$上适当选择$n+1$个节点$x_0,x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n$,使插值求积公式的代数精度高于$n$?

答案是肯定的，适当选择节点，可使公式的精度最高达到$2n+1$，这就是本节所要介绍的**高斯求积公式**。

一、构造高斯型求积公式的基本原理和方法

考虑更一般形式的数值积分问题

$$I(f)=\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

定义： 若求积公式 $\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 对 $f(x)=1,x,x^2,x^3\ldots x^m$，都等号成立，即 $R(x^i)=0$；而对于 x^{m+1} 等号不成立，则称此公式的代数精度为 m.

定理1： 设节点$x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$，则求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的代数精度最高为$2n+1$次。

证明： 取特殊情形 $\rho(x) = 1,$

分别取 $f(x)=1, x, x^2, \ldots, x^r$ 代入公式，并让其成为

等式，得：

$$A_0 + A_1 + \ldots\ldots + A_n = \int_a^b 1 dx = b-a$$

$$x_0 A_0 + x_1 A_1 + \ldots\ldots + x_n A_n = \int_a^b x dx = (b^2-a^2)/2$$

……

$$x_0^r A_0 + x_1^r A_1 + \ldots\ldots + x_n^r A_n = \int_a^b x^r dx = (b^{r+1}-a^{r+1})/(r+1)$$

上式共有 $r+1$ 个 等式，$2n+2$ 个待定系数(变元),要想如上方程组有唯一解，应有方程的个数等于变元的个数，即 $r+1=2n+2$, 这样导出求积公式的代数精度至少是 $2n+1$,下面证明代数精度只能是 $2n+1$.

事实上,取 $2n+2$ 次多项式 $g(x)=(x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2$ 代入求积公式,这里 $x_0, x_1,\ldots,x_n$ 是节点，有

$$左=\int_a^b \rho(x)g(x)dx>0，\quad 右=\sum_{k=0}^{n} A_k g(x_k)=0$$

左≠右,故等式不成立,求积公式的代数精度最高为 $2n+1$ 次。 证毕.

定义: 使求积公式 $\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

达到最高代数精度2*n*+1的求积公式称为Guass求积公式。

Guass求积公式的节点x_k称为Guass点,系数A_k称为

Guass系数.

因为Guass求积公式也是插值型求积公式,故有

结论: n+1个节点的插值型求积公式的代数精度 d

满足: $n \le d \le 2n+1$。

(1) 用待定系数法构造高斯求积公式

例：选择系数与节点，使求积公式（1）

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \qquad (1)$$

成为Gauss公式。

解：n=1, 由定义，若求积公式具有3次代数精度，则其是Gauss公式。

为此，分别取 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ 代入公式，并让其成为等式，得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \\ c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = 2/3 \\ c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0 \end{cases}$$

求解得：$c_1 = c_2 = 1,$

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

所求Gauss公式为:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

（2）利用正交多项式构造高斯求积公式

设$P_n(x)$，$n=0,1,2,\ldots$,为正交多项式序列， $P_n(x)$具有如下性质：

1）对每一个n ,$P_n(x)$是 n 次多项式。 $n=0,1,\cdots$

2）(正交性) $\int_a^b \rho(x)P_i(x)P_j(x)dx = 0,(i \neq j)$

3）对任意一个次数≤n-1的多项式$P(x)$，有

$$\int_a^b \rho(x)P(x)P_n(x)dx = 0, n \geq 1$$

4）$P_n(x)$在(a,b)内有n个互异零点。

定理2 设$x_0,x_1,\cdots,x_n$是$n+1$次正交多项式$P_{n+1}(x)$的$n+1$个零点,则插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k), \quad A_k = \int_a^b \rho(x)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}dx$$

是Guass型求积公式。

证明: 只要证明求积公式的代数精确度为$2n+1$,即对任意一个次数≤$2n+1$的多项式求积公式都精确成立。

设 $f(x)$为任意一个次数≤$2n+1$的多项式，则有

$f(x)=q(x)P_{n+1}(x)+r(x)$，满足 $f(x_k)=r(x_k)$

这里，$P_{n+1}(x)$是 $n+1$次正交多项式，$q(x)$、$r(x)$均是次数≤n的多项式。

$$\int_a^b \rho(x) f(x)dx = \int_a^b \rho(x)q(x)P_{n+1}(x)dx + \int_a^b \rho(x)r(x)dx$$

由于**n**+1个节点的插值型求积公式的代数精确度不低于**n**，故有

$$\int_a^b \rho(x)r(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k r(x_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \quad (4)$$

由性质3）及(4)式，有

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \int_a^b \rho(x)q(x)P_{n+1}(x)dx + \int_a^b \rho(x)r(x)dx$$

$$= 0 + \int_a^b \rho(x)r(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

即对 $f(x)$为任意一个次数≤2**n**+1的多项式求积公式都精确成立。 证毕

利用正交多项式构造高斯求积公式的基本步骤：

1\. 以$n+1$次正交多项式的零点$x_0, x_1, \cdots x_n$作为积分点（高斯点），

2.用高斯点$x_0, x_1, \cdots x_n$对$f(x)$作$Lagrange$插值多项式

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$$

代入积分式 $\int_a^b \rho(x) f(x)dx \approx \int_a^b \rho(x)(\sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i))dx$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b \rho(x) l_i(x)dx \right) f(x_i)$$

因此，求积系数为

$$A_i = \int_a^b \rho(x) l_i(x)dx \quad (i = 0,1,\cdots n)$$

例 对于积分 $\int_{-1}^{1}(1+x^2)f(x)dx$，试构造两点高斯求积公式

解： 首先在 $[-1,1]$ 上构造带权 $\rho(x)=1+x^2$ 的正交多项式

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x).$$

$$\varphi_0(x)=1$$

$$\varphi_1(x)=(x-\alpha_1)\varphi_0(x)=x$$

$$\alpha_1=\frac{(x\varphi_0(x),\varphi_0(x))}{(\varphi_0(x),\varphi_0(x))}=\frac{\int_{-1}^{1}(1+x^2)x\,dx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx}=0$$

同理求出 $\varphi_2(x)=x^2-\dfrac{2}{5}$

$\varphi_2(x)$ 的零点为 $x_0=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

以$\varphi_2(x)$的零点$x_0=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, x_1=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$作为高斯点。

两点高斯公式$n=1$,应有3次代数精度，求积公式形如

$$\int_{-1}^{1}(1+x^2)f(x)dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$$

将$f(x)=1, x$依次代入上式两端，令其成为等式。

$$\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx = A_0 + A_1$$

$$\int_{-1}^{1}(1+x^2)xdx = A_0(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})+A_1(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$$

联立解出$A_0 = A_1 = \frac{4}{3}$

得到两点高斯求积公式为

$$\boxed{\int_{-1}^{1}(1+x^2)f(x)dx \approx \frac{4}{3}\left[f(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})+f(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})\right]}$$

常用的高斯求积公式

1.Gauss - Legendre 求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad (1)$$

其中高斯点为Legendre多项式的零点

Guass点x_k, Guass系数A_k都有表可以查询.

表 6-3　Gauss－Legendre 公式积分点和求积系数

n	x_i	A_i	n	x_i	A_i
0	0	2		±0.6612093865	0.3607615370
1	±0.5773502692	1		±0.2386191861	0.4679139346
2	±0.7745966692	0.555555556	6	±0.9491079123	0.1294849662
	0	0.8888888889		±0.7415311856	0.2797053915
3	±0.8611363116	0.3478548451		±0.4058451514	0.3818300505
	±0.3399810436	0.6521451549		0	0.4179591837
4	±0.9061798459	0.2369268851	7	±0.9602898565	0.1012285363
	±0.5384693101	0.4786286705		±0.7966664774	0.2223810345
	0	0.5688888889		±0.5255354099	0.3137066459
5	±0.9324695142	0.1713244924		±0.1834346425	0.3626837834

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$$n = 0, \qquad \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0)$$

$$n = 1$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-0.5773502692) + f(0.5773502692)$$

$$n = 2$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 0.5555555556 f(-0.7745966692)$$

$$+0.8888888889 f(0) + 0.5555555556 f(0.7745966692)$$

例：运用三点高斯-勒让德求积公式与辛卜生求积公式计算积分$\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1.5}dx$

解：由三点高斯-勒让德求积公式有

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1.5}dx$$

$$\approx 0.555556(\sqrt{0.725403}+\sqrt{2.274596})+0.888889\sqrt{1.5}$$

$$=2.399709$$

由三点辛卜生求积公式有

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1.5}dx \approx \frac{1}{3}(\sqrt{0.5}+4\sqrt{1.5}+\sqrt{2.5})=2.395742$$

该积分的准确值 $\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1.5}dx=2.399529$

一般区间的Gauss - Legendre 求积公式

如果积分区间是[*a*,*b*]，用线性变换

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$$

将积分区间从[*a*,*b*]变成[-1,1],由定积分的换元积分法有

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2})dt$$

这样就可以用Gauss - Legendre求积公式计算一般区间的积分.

例 对积分$\int_0^1 f(x)dx$,试利用$n=1$的两点$Gauss-Legendre$求积公式构造$Gauss$型求积公式。即确定x_0,x_1和A_0,A_1

使 $$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$$

为$Gauss$型求积公式。

解： 先作变量代换

$$x=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b-a)t=\frac{1}{2}(1+t), \qquad dx=\frac{1}{2}dt$$

于是$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(\frac{1}{2}(1+t))dt \overset{\nabla}{=} \frac{1}{2}\int_{-1}^1 F(t)dt$

由两点$Gauss-Legendre$求积公式 $\int_{-1}^1 F(t)dt \approx F(-0.577)+F(0.577)$
得

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(\frac{1}{2}(1+t))dt \approx \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}(1-0.577))+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}(1+0.577))$$

例 对积分$\int_0^1 f(x)dx$,试利用$n=3$的四点$Gauss-Legendre$求积公式构造$Gauss$型求积公式。即确定x_0,x_1,x_2,x_3和A_0,A_1,A_2,A_3使

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)+A_3 f(x_3)$$

为$Gauss$型求积公式。

解：先作变量代换

$$x=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b-a)t=\frac{1}{2}(1+t), \qquad dx=\frac{1}{2}dt$$

于是$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(\frac{1}{2}(1+t))dt \overset{\nabla}{=} \frac{1}{2}\int_{-1}^1 F(t)dt$

对积分$\int_{-1}^1 F(t)dt$用四点$Gauss-Legendre$求积公式

$$\int_{-1}^1 F(t)dt \approx \overline{A}_0F(t_0)+\overline{A}_1F(t_1)+\overline{A}_2F(t_2)+\overline{A}_3F(t_3)$$

可查表得到t_i和$\overline{A}_i$,$(i=0,1,2,3)$

原积分

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 F(t)dt$$

$$\approx \frac{1}{2}(\overline{A}_0 F(t_0) + \overline{A}_1 F(t_1) + \overline{A}_2 F(t_2) + \overline{A}_3 F(t_3))$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{A}_0 f(\frac{1}{2}(1+t_0)) + \overline{A}_1 f(\frac{1}{2}(1+t_1)) + \overline{A}_2 f(\frac{1}{2}(1+t_2))$$

$$+ \overline{A}_3 f(\frac{1}{2}(1+t_3)))$$

即有 $x_i = \dfrac{1}{2}(1+t_i)$ $A_i = \dfrac{1}{2}\overline{A}_i$ $i=0,1,2,3$

$$x_i = \frac{1}{2}(1+t_i) \qquad A_i = \frac{1}{2}\overline{A}_i \qquad i = 0,1,2,3$$

列表如下：

$i=0$	1	2	3
$t_i = -0.861136$	-0.339981	0.339981	0.861136
$\overline{A}_i = 0.347855$	0.652145	0.652145	0.347855
$x_i = 0.069432$	0.330009	0.669991	0.930568
$A_i = 0.173927$	0.326073	0.326073	0.173927

于是$\int_0^1 f(x)dx \approx 0.173927 f(0.069432)$

$$+0.326073 f(0.330009)$$

$$+0.326073 f(0.669991)$$

$$+0.173927 f(0.930518)$$

例 利用高斯求积公式计算 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

解: 令x=1/2 (1+t), 则

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t}$$

用高斯-Legendre求积公式计算.取n=4

$$I \approx 0.69314719\cdots$$

积分精确值为

I=ln2=0.69314718…

由此可见，高斯公式精确度是很高的.

例:分别用不同方法计算如下积分,并做比较

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

各种做法比较如下：

1、用Newton-Cotes公式

当n=1时，即用梯形公式，I≈0.9207354

当n=2时, 即用Simpson公式,

I ≈ 0.9461359

当n=3时,　I ≈ 0.9461090

当n=4时,　I ≈ 0.9460830

当n=5时,　I ≈ 0.9460830

$I_{准}$=0. 9460831

2:用复化梯形公式

$$T_n = \frac{h}{2}(f(a)+f(b))+h\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$$

令h=1/8=0.125

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx \frac{h}{2}\left\{f(0)+2\left[f(h)+\cdots+f(7h)\right]+f(1)\right\}$$

$$=0.94569086$$

3：用复化辛卜生公式

$I_{准}$=0. 9460831

令h=1/8=0.125

$$S_n = \frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}H_n,\ 其中 H_n = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$$

$$\approx \frac{h}{3}\left\{f(0)+4\left[f(h)+\cdots+f(7h)\right]+2\left[f(2h)+\cdots+f(6h)\right]+f(1)\right\}$$

$$=0.9460833$$

4、用Romberg公式

K	T_n	Sn	Cn	Rn
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9400830	
3	0.9456906	0.9460833	0.9460831	0.9460831

$I_{准}$=0. 9460831

$$T_{m+1}^{(k)} = \frac{4^m T_m^{(k+1)} - T_m^{(k)}}{4^m - 1}$$

$I_{准}=0.9460831$

5、用Gauss公式

解：令$x=(t+1)/2$, $I=\int_{-1}^{1}\frac{\sin(t+1)/2}{t+1}dt$

（1）用2个节点的Gauss公式

$$I\approx\frac{\sin\frac{1}{2}(-0.5773503+1)}{-0.5773503+1}+\frac{\sin\frac{1}{2}(0.5773503+1)}{0.5773503+1}=0.9460411$$

（2）用3个节点的Gauss公式

$$I\approx 0.5555556\times\frac{\sin\frac{1}{2}(0.7745907+1)}{0.7745907+1}+0.8888889\times\frac{\sin\frac{1}{2}}{0+1}$$

$$+0.5555556\times\frac{\sin\frac{1}{2}(-0.7745907+1)}{-0.7745907+1}=0.9460831$$

算法比较

- 此例题的精确值为0.9460831...
- 由例题的各种算法可知：
- 对Newton-cotes公式，当n=1时只有1位有效数字，当n=2时有3位有效数字，当n=5时有6位有效数字。
- 对复化梯形公式有2位有效数字，对复化辛卜生公式有6位有效数字。
- 用复化梯形公式，对积分区间[0，1]二分了11次用2049个函数值，才可得到7位准确数字。
- 用Romberg公式对区间二分3次，用了9个函数值，得到同样的结果。
- 用Gauss公式仅用了3个函数值，就得到结果。

常用的高斯求积公式

2.Gauss-Chebyshev公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

其中$x_i(i=0,1,\cdots n)$是$n+1$阶$Chebychev$多项式的零点

$$x_i^{(0)}=\cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi \quad (i=0,1\cdots,n)$$

求积系数是 $A_i=\dfrac{\pi}{n+1} \quad (i=0,1,\cdots,n)$

权$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x\in[-1,1]$

3.Gauss-Laguerre公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

积分点和求积系数查表6-4，权$\rho(x)=e^{-x}, x\in[0,+\infty)$.

(1) 求某一个无穷区间$[0,+\infty)$上的积分$\int_0^{+\infty} f(x)dx$

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}e^{x} f(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}F(x)dx$$

$$=\sum_{i=0}^{n} A_i F(x_i),\qquad \text{其中} F(x_i)=e^{x} f(x)$$

(2) 对$[a,+\infty)$区间上的积分$\int_a^{+\infty} e^{-x} f(x)dx$,

通过变量代换$x=a+t$，将$x\in[a,+\infty)$变为$t\in[0,+\infty)$,

再用$Gauss-Laguerre$求积公式计算积分

$$\int_a^{+\infty} e^{-x} f(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-(a+t)} f(a+t)dt = e^{-a}\int_0^{+\infty} e^{-t} f(a+t)dt$$

4.Gauss-Hermite公式

同前，求积分$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$

其中，积分点x_i和求积系数$A_i(i=0,1,\cdots,n)$可查表6−5

二、高斯型求积公式的截断误差和稳定性分析

定理3: （1）若$f^{(2n+2)}(x)$在$[a,b]$上连续，则高斯求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的截断误差为：$R(f)=\dfrac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b \rho(x) w_{n+1}^2(x)dx$

其中$\eta \in (a,b), w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

证明: 因为n阶高斯求积公式有$2n+1$次代数精度，

因此，用点$x_0, x_1, \cdots, x_n$对$f(x)$作$Hermite$插值，

得到$2n+1$次插值多项式$H_{2n+1}(x)$,并且满足：

$$H_{2n+1}(x_i)=f(x_i) \qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

$$H_{2n+1}'(x_i)=f'(x_i) \qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

已知Hermite插值误差是

$$f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$$

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx=\int_a^b \rho(x)H_{2n+1}(x)dx+\int_a^b \rho(x)\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2dx$$

因为对2n+1次多项式求积公式准确成立，即

$$\int_a^b \rho(x)H_{2n+1}(x)dx=\sum_{i=0}^{n}A_iH_{2n+1}(x_i)=\sum_{i=0}^{n}A_if(x_i)$$

代入上式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx=\sum_{i=0}^{n}A_if(x_i)+\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b \rho(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2dx$$

即有

$$R(f)=\int_a^b \rho(x)f(x)dx-\sum_{i=0}^{n}A_if(x_i)=\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b \rho(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2dx$$

以下将证明高斯形求积公式的求积系数恒正

即： $A_i = \int_a^b \rho(x) l_i(x) dx > 0$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

在高斯求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

中，取$f(x) = l_i^2(x)$，$l_i^2(x)$为$2n$次多项式，求积公式等式成立,

$$\int_a^b \rho(x) l_i^2(x) dx = \sum_{k=0}^{n} A_k l_i^2(x_k) = A_i$$

$$\therefore \quad A_i = \int_a^b \rho(x) l_i(x) dx = \int_a^b \rho(x) l_i^2(x) dx > 0$$

取$f(x) = 1$，　　有　$\int_a^b \rho(x) dx = \sum_{k=0}^{n} A_k$

在求积公式$I_n=\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)$中，若计算$f(x_i)$有误差，变为$f(x_i)+\delta_i$，则求积公式也有误差，变为

$$\bar{I}_n=\sum_{i=0}^{n}A_i(f(x_i)+\delta_i)$$

$$\boxed{\int_a^b \rho(x)dx=\sum_{k=0}^{n}A_k}$$

$$\left|I_n-\bar{I}_n\right|\le\sum_{i=0}^{n}A_i\left|\delta_i\right| \qquad \text{(利用了}A_i\text{的恒正性质)}$$

$$\le\max_{0\le i\le n}\left|\delta_i\right|\sum_{i=0}^{n}A_i=\max_{0\le i\le n}\left|\delta_i\right|\int_a^b\rho(x)dx$$

记 $\varepsilon=\max_{0\le i\le n}\left|\delta_i\right|$，特别取$\rho(x)=1$，则有

$$\left|I_n-\bar{I}_n\right|\le\varepsilon(b-a)$$

由此说明高斯求积公式的计算误差可以控制，高斯型求积公式是数值稳定的方法。

三、复化Gauss求积公式

复化Gauss求积公式的基本思想：

将积分区间$[a, b]$ n等分，在每个小子区间上使用一个节点数较少的Gauss型求积公式，然后把它们加起来，就得到整个区间上Gauss型求积公式的复化形式。

下面用**Gauss-Legender**求积公式推导复化**Gauss**型求积公式.

将积分区间$[a, b]$ n等分，

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_k = a + kh, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$$

作变换 $x = \dfrac{x_{k+1} - x_k}{2}t + \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$

将小区间$[x_k, x_{k+1}]$变换到标准区间$[-1,1]$.

由于 $x_{k+1} - x_k = h,\ \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2} = a + (k + \dfrac{1}{2})h$

所以 $x = a + (k + \dfrac{1}{2}(1+t))h,\quad dx = \dfrac{h}{2}dt$

从而有 $\int_a^b f(x)dx = \dfrac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-1}^{1} f(a + (k + \dfrac{1}{2}(1+t))h)dt$

再将上式应用Gauss-Legender求积公式就得到了**复化Gauss型求积公式.**

例如,用2点的Gauss-Legender求积公式复化,由表6-3,取n=1,得$A_j=1, x_j=\pm 0.5773502692$代入到上式中,得2点的复化Gauss-Legender求积公式

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(f(a+(k+0.211325)h)+f(a+(k+0.788675)h))$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-1}^{1} f(a+(k+\frac{1}{2}(1+t))h)dt$$