第八章 非线性方程(组)的数值解法

在科学研究的数学问题中更多的是非线性问题，它们又常常归结为非线性方程或非线性方程组的求解问题。

第一节 预备知识

第二节 非线性方程求根的迭代法

第三节 非线性方程组的简单迭代法

第四节 非线性方程组的Newton型迭代法

第五节 无约束优化算法

第一节 预备知识

非线性方程的一般形式 $f(x)=0$ (1)

这里$f(x)$是单变量x 的函数，它可以是代数多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n \qquad (a_n\neq 0)$$

也可以是超越函数，即不能表示为上述形式的函数。

满足方程(1)的x值通常叫做方程的根或解，

也叫函数$f(x)=0$的零点。

非线性方程求根的基本问题包括：根的存在性、根的隔离和根的精确化

根的存在定理(零点定理)：

$f(x)$为$[a,b]$上的连续函数，若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则$[a,b]$中至少有一个实根。如果$f(x)$在$[a,b]$上还是单调递增或递减的，则$f(x)=0$仅有一个实根。

在用近似方法时，需要知道方程的根所在区间。若区间$[a,b]$含有方程$f(x)=0$的根，则称$[a,b]$为$f(x)=0$的**有根区间**；若区间$[a,b]$仅含方程$f(x)= 0$的一个根，则称$[a,b]$为$f(x)= 0$的一个**隔根区间**。

求隔根区间有两种方法:

(1)描图法

画出$y=f(x)$的略图，从而看出曲线与x轴交点的大致位置。也可将$f(x)=0$等价变形为$g_1(x)=g_2(x)$的形式，$y=g_1(x)$与$y=g_2(x)$两曲线交点的横坐标所在的子区间即为含根区间。

例如，求方程$3x-1-\cos x=0$的隔根区间。

将方程等价变形为$3x-1=\cos x$，易见$y=3x-1$与$y=\cos x$的图像只有一个交点位于[0.5，1]内。

(2)逐步搜索法

运用零点定理可以得到如下逐步搜索法：

先确定方程$f(x)=0$的所有实根所在的区间为$[a,b]$,从$x_0=a$ 出发,以步长

$$h=(b-a)/n$$

其中n是正整数，在$[a,b]$内取定节点：

$$x_i=x_0+ih \quad (i=0,1,2,\cdots\cdots,n)$$

计算$f(x_i)$的值,依据函数值异号及实根的个数确定隔根区间,通过调整步长，总可找到所有隔根区间。

对于m次代数方程 $f(x)=x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$其根的模的上下界有如下结论：

(1)若$\mu=\max\{|a_{m-1}|,\cdots\cdots,|a_1|,|a_0|\}$，则方程根的模小于$\mu+1$

(2)若$\nu=\dfrac{1}{|a_0|}\max\{1,\ |a_{m-1}|,\cdots\cdots,|a_1|\}$,则方程根的模大于 $\dfrac{1}{\nu+1}$

例2.2 求方程 $x^3-3.2x^2+1.9x+0.8=0$的隔根区间。

解：设方程的根为α，

$$\mu=\max\{|-3.2|,|1.9|,|0.8|\}=3.2$$

$$\nu=\frac{1}{0.8}\max\{1,\ |-3.2|,\ |1.9|\}=4$$

故 $0.2<|\alpha|<4.2$,即有根区间为(-4.2,-0.2)和(0.2,4.2)

h=1

-1.377160000000e+002
-70.816000000000002
-29.516000000000001
-7.816000000000000
0.284000000000000
1.060000000000000
0.200000000000000
0.140000000000000
6.880000000000000
26.420000000000000

h=0.8

-1.377160000000e+002
-81.956000000000002
-43.348000000000001
-18.819999999999999
-5.300000000000000
0.284000000000000
1.060000000000000
0.500000000000000
-0.316000000000000
1.684000000000000
9.572000000000000
26.420000000000000

有根区间 (-1.2,-0.2)

有根区间 (-1,-0.2)和(1.0,1.8)

定义1 若有x^*满足 $f(x^*)=0$， 则称x^*为方程的根或函数$f(x)$的零点，特别地，如果函数$f(x)$可分解为 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$ 且 $g(x^*)\neq 0$,
则称x^*是$f(x)$的m重零点或$f(x)=0$的m重根。

当$m=1$时，称x^*是$f(x)$的单根或单零点。

定理1 设函数 $f(x)\in C^m[a,b]$, 则点$p\in(a,b)$是$f(x)$的**m重零点**，当且仅当

$$f(p)=f'(p)=f''(p)=\cdots=f^{(m-1)}(p)=0,\ 但\ f^{(m)}(p)\neq 0$$

证明:(充分性)将$f(x)$在点p作m-1阶Taylor展开

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\cdots+\frac{f^{(m-1)}(p)}{(m-1)!}(x-p)^{m-1}+\frac{f^{(m)}(\xi_x)}{m!}(x-p)^m$$

ξ_x位于 x 与 p 之间。

由假设 $f(x)=\dfrac{f^{(m)}(\xi_x)}{m!}(x-p)^m=(x-p)^m g(x)$

这里，$g(p)=\dfrac{f^{(m)}(p)}{m!}\neq 0$ $\left(g(x)=\dfrac{f^{(m)}(\xi_x)}{m!}\right)$

由定义 1，p是 $f(x)$的 m 重零点.

证毕

例： 给定方程： $x-\sin x=0$,问$x^*=0$是几重零点.

解： 设 $f(x)=x-\sin x$,则 $f(0)=0$;

$f'(x)=1-\cos x$, $f'(0)=0$;

$f''(x)=\sin x$, $f''(0)=0$;

$f^{(3)}(x)=\cos x$, $f^{(3)}(0)=1$;

由定理1, $x^*=0$是3重零点.

第二节 非线性方程求根的迭代法

一、简单迭代法

简单迭代法又称为**不动点迭代法**，基本思想是首先构造不动点方程 $x=\varphi(x)$，即由方程 $f(x)=0$变换为等价形式 $x=\varphi(x)$, 式中$\varphi(x)$称为迭代函数。然后建立迭代格式：$x_{k+1}=\varphi(x_k)$称为不动点迭代格式

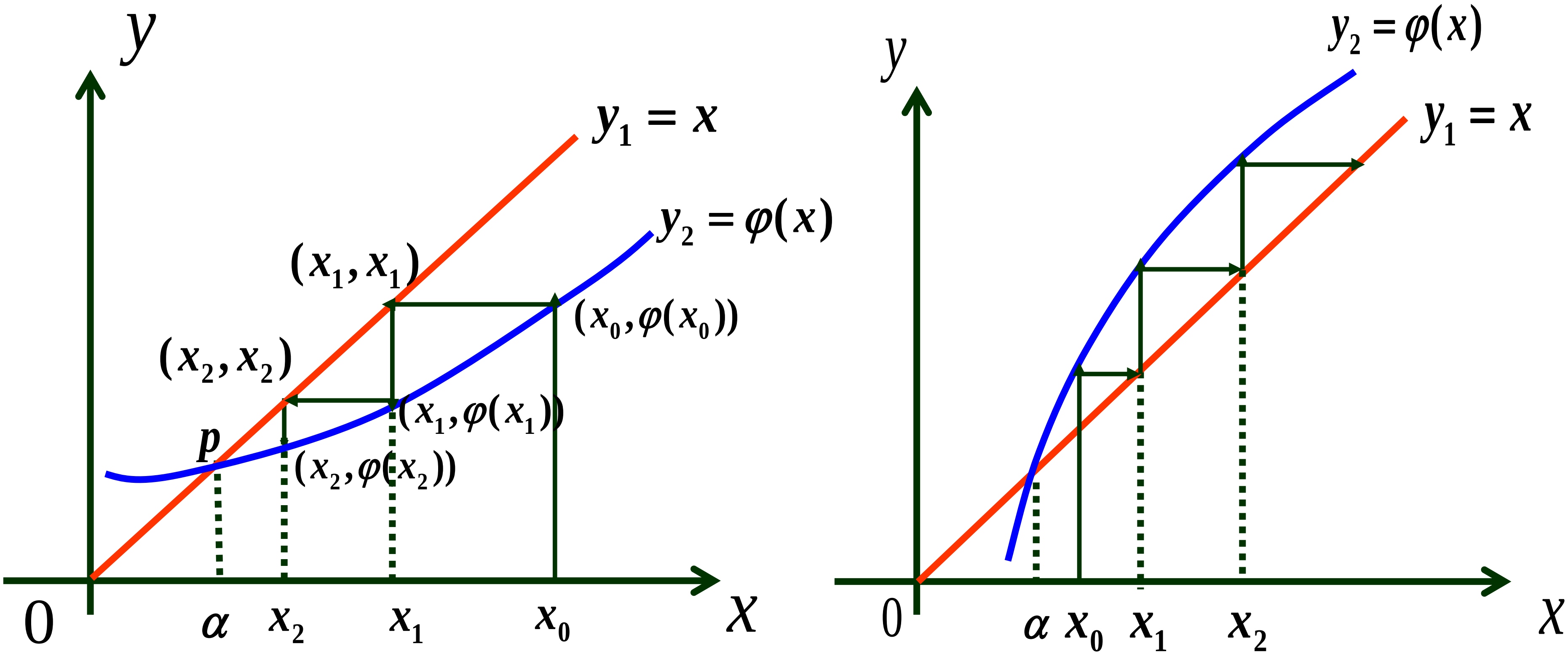
当给定初值x_0 后, 由迭代格式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$可求得数列$\{x_k\}$。如果$\{x_k\}$收敛于α，且$\varphi(x)$在α连续，**则α就是不动点方程的根**。因为：

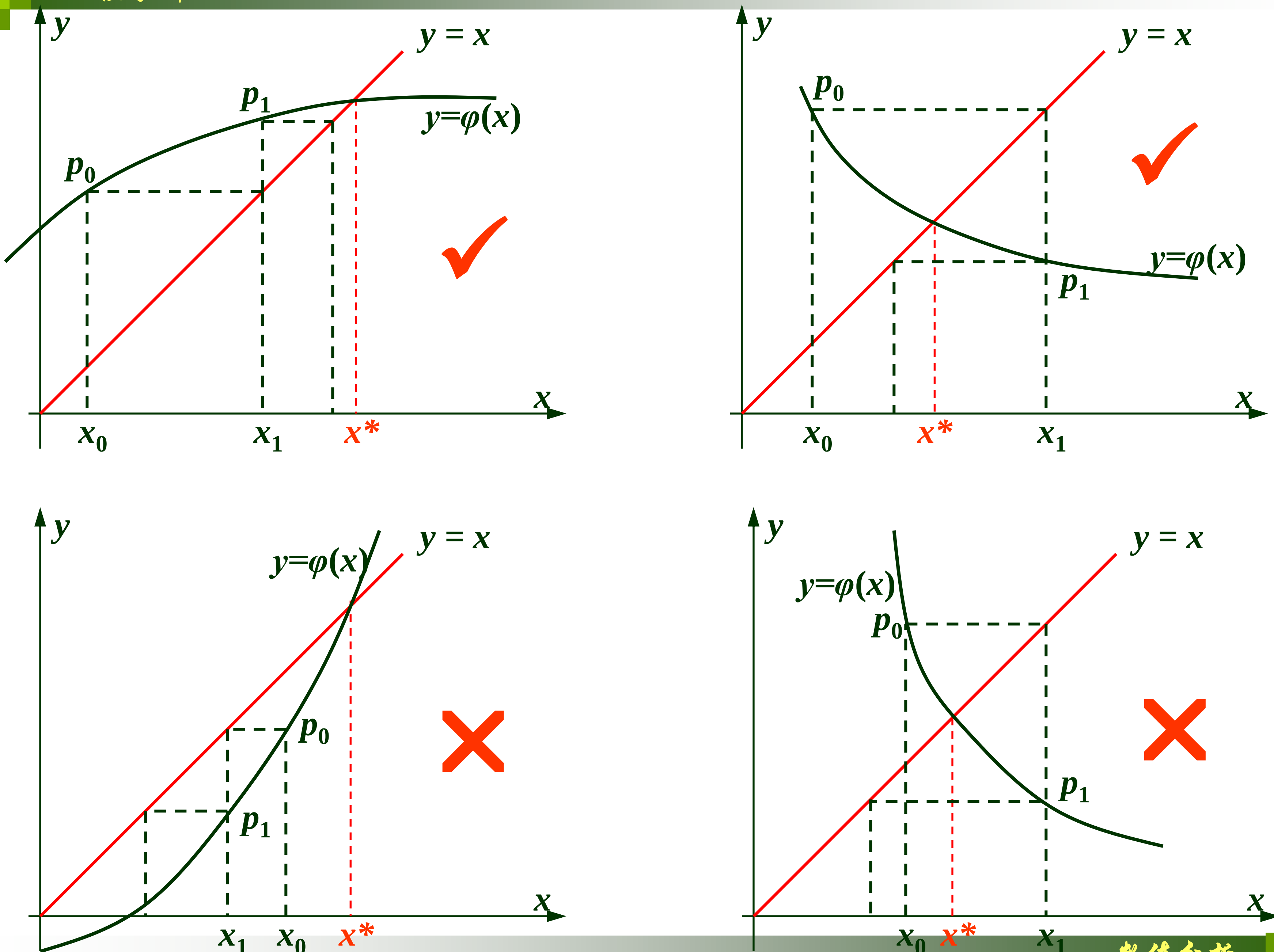
$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1}=\lim_{k\to\infty}\varphi(x_k)=\varphi(\lim_{k\to\infty} x_k)$$

知$\alpha=\varphi(\alpha)$，即$\{x_k\}$收敛于方程的根 α 。

迭代法的几何意义

记y_1=x , y_2=$\varphi(x)$, 它们交点的横坐标α即为方程的根




y
y = x
p1
y=φ(x)
p0
✓
x
x0
x1
x*
y
y = x
p0
✓
y=φ(x)
p1
x
x0
x*
x1
y
y = x
y=φ(x)
p0
p1
✗
x
x1
x0
x*
y
y = x
y=φ(x)
p0
✗
p1
x
x0
x*
x1

对于迭代法需要讨论的基本问题是，迭代函数的构造，迭代序列的收敛性和收敛速度以及误差估计。

问题：$\varphi(x)$的形式不唯一，如：

$$x-10^x+2=0 \Leftrightarrow x=10^x-2 \qquad x_{n+1}=10^{x_n}-2$$

$$\Leftrightarrow x=\lg(x+2) \qquad x_{n+1}=\lg(x_n+2)$$

取初始值$x_0=0.3$，计算结果如下：

	$x_{n+1}=10^{x_n}-2$	$x_{n+1}=\lg(x_n+2)$
x_0	0.3	0.3
x_1	-0.0047	0.3617
x_2	-1.0108	0.3732
x_3		0.3753
x_4		0.3757

若从任何可取的初值出发都能保证收敛，则称它为**大范围收敛**。如若为了保证收敛性必须选取初值充分接近于所要求的根，则称它为**局部收敛**。

通常局部收敛方法比大范围收敛方法收敛得快。因此，一个**合理的算法**是**先用**一种大范围收敛方法求得接近于根的近似值（如对分法），**再以**其作为新的初值使用局部收敛法（如迭代法）

这里讨论迭代法的收敛性时，均指的是局部收敛性。

定理2（收敛定理）

考虑方程 $x = \varphi(x)$，$\varphi(x)\in C[a, b]$，若

(Ⅰ) 当 $x\in[a, b]$ 时，$\varphi(x)\in[a, b]$；

(Ⅱ) 对 $\forall\ x\in[a, b]$，有 $|\varphi'(x)| \le L < 1$ 成立。

则任取 $x_0\in[a, b]$，由 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 得到的序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于$\varphi(x)$ 在$[a, b]$上的**唯一不动点**。并且有误差估计式：

$$①\ |x^*-x_k| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

$$②\ |x^*-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

且存在极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k} = \varphi'(x^*)$

证明：① $\varphi(x)$ 在$[a, b]$上存在不动点？

令 $f(x)=\varphi(x)-x$ $\because$ $a \le \varphi(x) \le b$

$\therefore$ $f(a)=\varphi(a)-a \ge 0$， $f(b)=\varphi(b)-b \le 0$

$\Rightarrow f(x)$ 有根

② 不动点唯一？

反证：若不然，设还有 $\tilde{x}=\varphi(\tilde{x})$，则

$x^*-\tilde{x}=\varphi(x^*)-\varphi(\tilde{x})=\varphi'(\xi)(x^*-\tilde{x})$，$\xi$ 在 x^* 和 $\tilde{x}$ 之间

$\Rightarrow$ $(x^*-\tilde{x})(1-\varphi'(\xi))=0$ 而 $|\varphi'(\xi)|<1$ $\therefore$ $x^*=\tilde{x}$

③ 当$k \to \infty$ 时， x_k 收敛到 x^* ？

$$|x^*-x_k| = |\varphi(x^*)-\varphi(x_{k-1})| = |\varphi'(\xi_{k-1})| \cdot |x^*-x_{k-1}|$$

$$\le L|x^*-x_{k-1}| \le \ldots\ldots \le L^k |x^*-x_0| \to 0$$

④ $|x^*-x_k| \le \dfrac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$?

$$|x_{k+1}-x_k| = |\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})| = |\varphi'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})|$$

$$\le |\varphi'(\xi_k)||(x_k-x_{k-1})| \le L|x_k-x_{k-1}|$$

$$|x_{k+1}-x_k| \ge |x^*-x_k| - |x^*-x_{k+1}| \ge |x^*-x_k| - L|x^*-x_k|$$

$$|x^*-x_k| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k| \le \frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$$

⑤ $|x^*-x_k| \le \dfrac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$?

$$|x_{k+1}-x_k| \le L|x_k-x_{k-1}| \le \ldots\ldots \le L^k|x_1-x_0|$$

⑥ $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k} = \varphi'(x^*)$?

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\varphi'(\xi_k)(x^*-x_k)}{x^*-x_k} = \varphi'(x^*)$$

控制误差ε 的方法:

(1) 先计算满足误差要求的迭代次数n，再迭代。由

$$|x_n-\alpha|\le\frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|\le\varepsilon$$

可得

$$n\ge\frac{\ln\dfrac{\varepsilon(1-L)}{|x_1-x_0|}}{\ln L}$$

(2) 事后误差估计法。由于

$$|x_n-\alpha|\le\frac{L}{1-L}|x_n-x_{n-1}|$$

因而可用$|x_n$-$x_{n-1}|\le\varepsilon$ 来控制迭代过程。

注：定理条件非必要条件，可将$[a, b]$缩小，定义**局部收敛性**：若在 x^* 的某δ领域 $B_\delta = \{ x \mid |x - x^*| \le \delta \}$ 有 $\varphi \in C^1[a, b]$ 且 $|\varphi'(x^*)| < 1$，则由$\forall x_0 \in B_\delta$开始的迭代收敛。即**调整初值可得到收敛的结果**。

定理3 （迭代法的局部收敛定理）

设α是方程$x=\varphi(x)$的根，如果

(1)迭代函数$\varphi(x)$在α的邻域可导；

(2)在α的某个邻域$S=\{x:|x-\alpha|\le\delta\}$,对于任意的 $x\in S$ 有

$$|\varphi'(x)|\le L<1$$

则对于任意的初值 $x_0\in S$ ，迭代公式$x_{n+1}=\varphi(x_n)$

产生的数列$\{x_n\}$，收敛于方程的根α 。

定理3'（迭代法的局部收敛定理）

设α是方程$x=\varphi(x)$的根，如果

(1)迭代函数$\varphi(x)$在α的邻域一阶导数连续；

(2)$|\varphi'(\alpha)|<1$

则存在α的某个邻域$S=\{x:|x-\alpha|\le\delta\}$及正数L<1，使对于任意的$x\in S$有 $|\varphi'(x)|\le L<1$

取任意的初值$x_0\in S$，迭代公式$x_{n+1}=\varphi(x_n)$

产生的数列$\{x_n\}$，收敛于方程的根α。

例:证明对任何初值 $x_0 \in R$ ，由迭代公式

$$x_{k+1} = \cos x_k , \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

所产生的序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$,都收敛于方程 $x = \cos x$ 的根。

证：记 $\varphi(x) = \cos x$, 则 $\varphi'(x) = -\sin x$

（1）先考虑区间[−1, 1]，当 $x \in [-1,1]$ 时,

$$\varphi(x) = \cos x \in [-1,1], \quad |\varphi'(x)| \le |\varphi'(1)| = \sin 1 < 1$$

对任何初值 $x_0 \in [-1,1]$，由迭代公式

$$x_{k+1} = \cos x_k , \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

所产生的序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$,都收敛于方程 $x = \cos x$ 的根。

（2）对任何初值 $x_0 \in R$ ，有 $x_1 = \cos x_0 \in [-1,1]$,

将此 x_1 看成新的迭代初值，则由（1）可知，由迭代公式

$$x_{k+1} = \cos x_k, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

所产生的序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$,都收敛于方程 $x = \cos x$ 的根。

例： 求解方程 $x^2-5=0$，可以构造一个迭代格式

$$x_{k+1}=x_k+c(x_k^2-5),\qquad k=0,1,2,\ldots$$

其中c为非零的常数，

(1) 当c取何值时，由

$$x_{k+1}=x_k+c(x_k^2-5),\qquad k=0,1,2,\ldots$$

产生的迭代序列收敛到$\sqrt{5}$.

(2) c取何值时收敛最快？

解：迭代函数为 $\varphi(x)=x+c(x^2-5)$,

(1)$\left|\varphi'(x^*)\right|<1$,即$\left|1+2cx^*\right|<1, x^*=\sqrt{5}\Rightarrow$当$c\in(-\dfrac{1}{\sqrt{5}},0)$时

迭代收敛。

(2)$\varphi'(x^*)=1+2cx^*=0$，$c=-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$，　c取$-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$时收敛最快

迭代法收敛阶

定义 设数列$\{x_n\}$收敛于α，令误差$e_n = x_n - \alpha$，如果存在某个实数 $p \ge 1$ 及正常数C ，使

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C$$

则称数列$\{x_n\}$为p 阶收敛，也称相应的迭代法为 p 阶方法。当$p = 1$且$0 < C < 1$时，称数列$\{x_n\}$为线性收敛.
当 $p = 2$ 时，称数列$\{x_n\}$平方收敛（或二阶收敛）.
当 $p > 1$ 时，称数列$\{x_n\}$为超线性收敛。

显然 p越大，数列收敛的越快。所以迭代法的收敛阶是对迭代法收敛速度的一种度量。

定理 对于迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，如果 $\varphi^{(p)}(x)$ 在所求根 x^* 的邻近连续，并且 $\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$ (*)

$\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$ 则该迭代过程在点 x^* 邻近是**P**阶收敛的。

证明： 由于 $\varphi'(x^*)=0$ 。据上定理，立即可以断定迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 具有局部收敛性。再将 $\varphi(x_k)$ 在根 x^* 处展开，利用条件(*)，则有

$$\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\frac{\varphi^{(p)}(\zeta)}{p!}(x_k-x^*)^p$$

注意到 $\varphi(x_k)=x_{k+1}$ $\varphi(x^*)=x^*$ ，由上式得

$$x_{k+1}-x^*=\frac{\varphi^{(p)}(\zeta)}{p!}(x_k-x^*)^p$$

因此对迭代误差有：$\dfrac{e_{k+1}}{e_k^p}\to\dfrac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$ 。这表明迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 确实为**P**阶收敛，证毕。

例 用迭代法求$x^3-x^2-1=0$在隔根区间[1.4,1.5]内的根，要求准确到小数点后第4位.

解：(1)由方程的等价形式

$$x=\sqrt[3]{x^2+1}=\varphi(x)$$

构造迭代公式

$$x_{n+1}=\sqrt[3]{x_n^{\ 2}+1}$$

由 $$\varphi'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

知$\varphi(x)$在（1.4,1.5)可导，且 $|\varphi'(x)|\leq 0.5<1$

故迭代法收敛。

```
function y=diedai(fname,x0,e,N)
%用途: 迭代法求解非线性方程f(x)=0
y=x0;
x0=y+2*e;
k=0;
while abs(x0-y)>e&k<N
    k=k+1;
    x0=y;
    y=fname(x0);
    disp(y)
end
if k==N
    disp('warning')
end
```

```
f=inline('(x^2+1)^(1/3)');
y=diedai(f,1.5,10^(-4),500);
```

1.4812

1.4727

1.4688

1.4670

1.4662

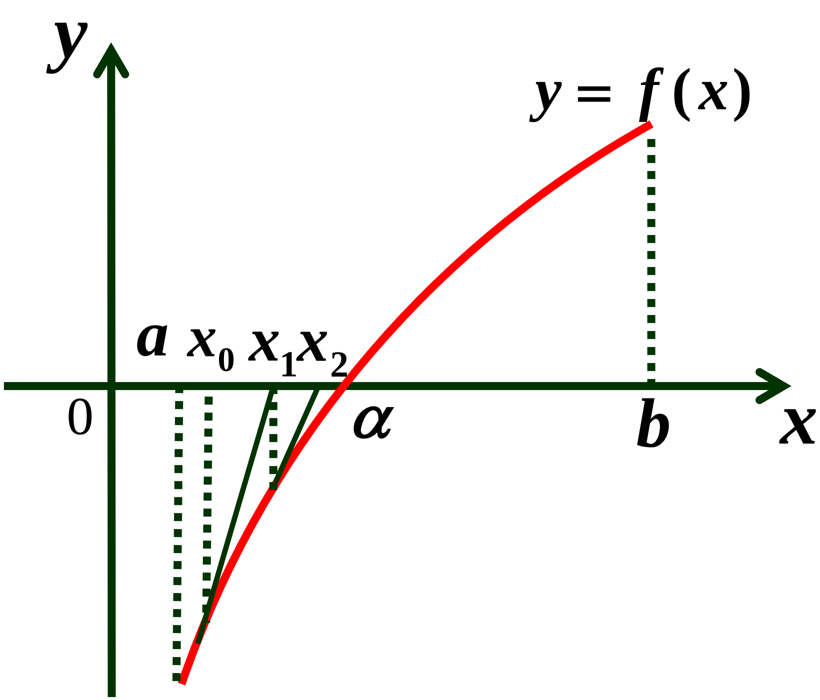
1.4659

1.4657

1.4656

二、牛顿迭代法

用切线代替曲线，用线性函数的零点作为f(x)的零点的近似值。



任取初始值 $x_0 \in [a,b]$,$y = f(x)$ 上过点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线方程为：$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

与 x 轴交于点 x_1

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

过点$(x_1, f(x_1))$ 的切线方程为

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

与 x 轴交于点 x_2

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \cdots\cdots$$

如此下去得牛顿迭代公式:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

定理4（收敛的充分条件） 设 $f \in C^2[a, b]$，若

(1) $f(a)f(b) < 0$;

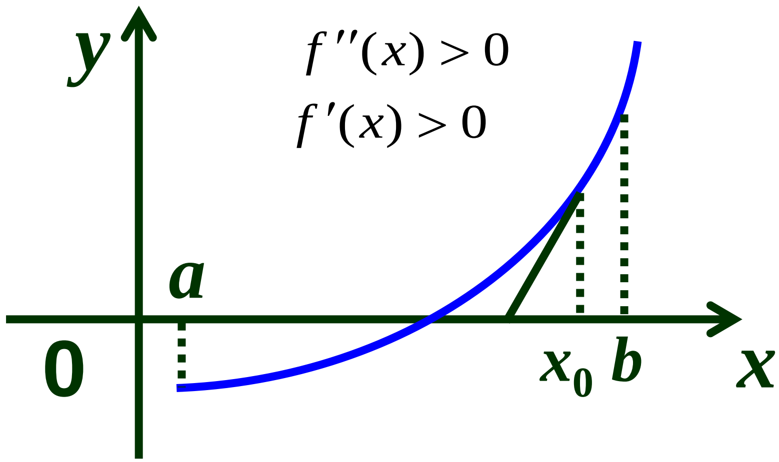
根唯一

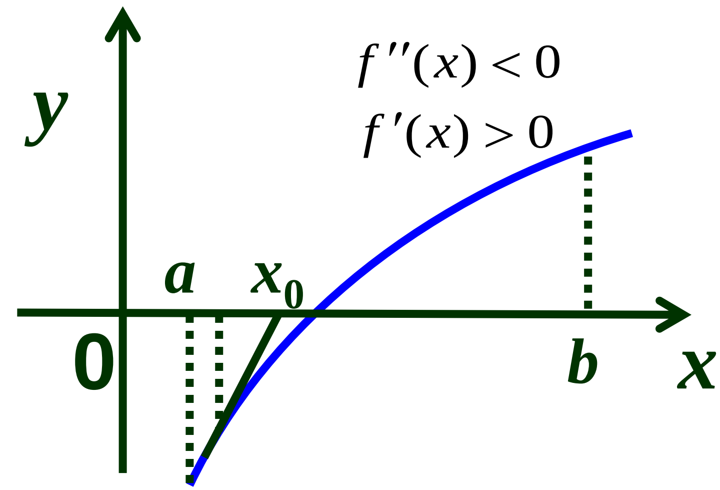
(2) 在整个$[a, b]$上 f''不变号且 $f'(x) \neq 0$;

(3) 选取 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0)f''(x_0) > 0$;

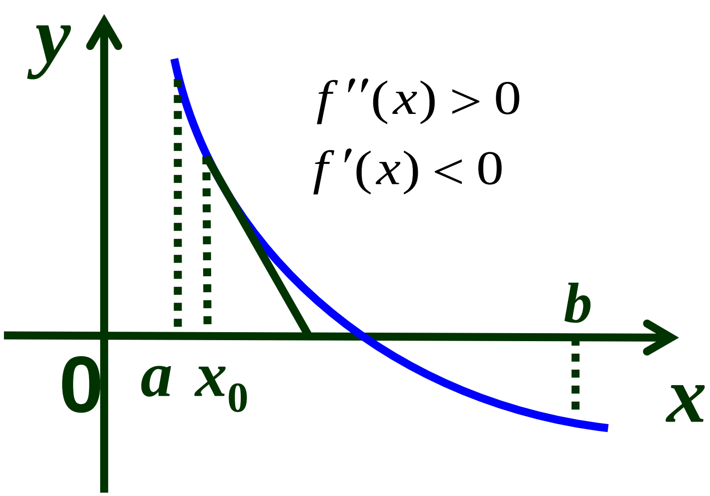
则Newton's Method产生的序列$\{x_k\}$收敛到$f(x)$在 $[a, b]$ 的唯一根。

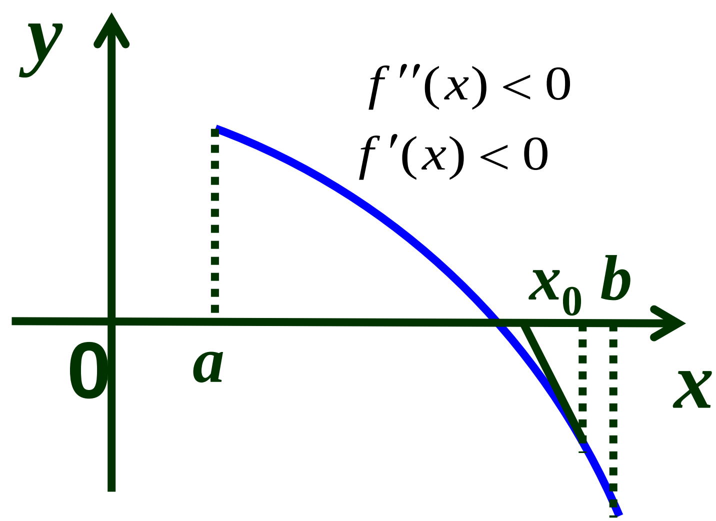
产生的序列单调有界，保证收敛。


$f''(x) > 0$
$f'(x) > 0$
y
a
0
x_0 b
x


$f''(x) < 0$
$f'(x) > 0$
y
a x_0
0
b
x

$$f(x_0)\, f''(x_0) > 0$$


y
$f''(x) > 0$
$f'(x) < 0$
b
0 a x_0
x


y
$f''(x) < 0$
$f'(x) < 0$
x_0 b
0
a
x

例 用迭代法求 x^3-x^2 在隔根区间[1.4,1.5]内的根，要求准确到小数点后第4位。

解： (1) 牛顿迭代公式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^3-x_n^2-1}{3x_n^2-2x_n}=\frac{2x_n^3-x_n^2+1}{3x_n^2-2x_n}$$

(2) $f(1.4)\approx-0.2 \qquad f(1.5)\approx 0.2$

当 $x\in[1.4,1.5]$ 时有，

$$f'(x)=3x^2-2x>0 \qquad f''(x)=6x-2>0$$

因 $f(1.5)f''(1.5)>0$ ，故取 $x_0=1.5$，牛顿迭代法收敛。

```
function y=newton(fname,dfname,x0,e,N)
y=x0;
x0=y+2*e;
k=0;
while abs(x0-y)>e&k<N
    k=k+1;
    x0=y;
    y=x0-fname(x0)/dfname(x0);
    disp(y)
end
if k==N
    disp('warning')
end
```

1.4667

1.4656

1.4656

```
f=inline('x^3-x^2-1');
df=inline('3*x^2-2*x');
y=newton(f,df,1.5,10^(-4),500);
```

定理5 （局部收敛性） 设 $f\in C^2[a,b]$，若 x^* 为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的根，且 $f'(x^*)\neq 0$，则存在 x^* 的邻域 $B_\delta(x^*)$使得任取初值 $x_0\in B_\delta(x^*)$，Newton’s Method产生的序列$\{x_k\}$收敛到x^*，且满足

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{(x^*-x_k)^2}=-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

证明： Newton’s Method 事实上是一种特殊的不动点迭代

其中 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ 则

$$|\varphi'(x^*)|=\left|\frac{f''(x^*)f(x^*)}{f'^2(x^*)}\right|=0<1 \quad \Rightarrow \text{收敛}$$

由 Taylor 展开：

$$0=f(x^*)=f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2!}(x^*-x_k)^2$$

由 Taylor 展开：

$$0=f(x^*)=f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2!}(x^*-x_k)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^*=\underbrace{x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{x_{k+1}}-\frac{f''(\xi_k)}{2!\,f'(x_k)}(x^*-x_k)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^*-x_{k+1}}{(x^*-x_k)^2}=-\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}$$

只要 $f'(x^*)\neq 0$，则令 $k\to\infty$ 可得结论。

注：在单根附近收敛快，是平方收敛的.

例: 若方程$f(x)=0$有m重根$a(m\in Z)$,试证明牛顿迭代法是线性收敛的,而改用修改的格式

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad(k\geq 0)$$

才是局部平方收敛的.

证明: (1)对牛顿格式, 迭代函数$\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

因$f(x)=0$有m重根, 故有

$$f(x)=(x-a)^m h(x),\ \text{且}h(a)\neq 0.$$

$$f'(x)=m(x-a)^{m-1}h(x)+(x-a)^m h'(x)$$

代入迭代函数式

$$\varphi(x)=x-\frac{(x-a)h(x)}{mh(x)+(x-a)\ h'(x)}$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{h(x)}{mh(x) + (x-a)h'(x)}$$

$$-(x-a)\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{mh(x) + (x-a)h'(x)}\right)$$

代入$x = a$,有$\varphi'(a) = 1 - \frac{1}{m} \neq 0.$

于是,由

$$a - x_{k+1} = \varphi(a) - \varphi(x_k) = -(\varphi(x_k) - \varphi(a))$$
$$= -\varphi'(a)(x_k - a) + o(x_k - a)$$

得到

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a - x_{k+1}|}{|a - x_k|} = C = \varphi'(a) = 1 - \frac{1}{m} \neq 0$$

故这种牛顿迭代法只有线性收敛速度.

(2)对修改的牛顿格式，迭代函数$\varphi(x)=x-m\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$\varphi(x)=x-m\frac{(x-a)h(x)}{mh(x)+(x-a)h'(x)}$$

$$\varphi'(x)=1-\frac{mh(x)}{mh(x)+(x-a)h'(x)}$$
$$-m(x-a)\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{mh(x)+(x-a)h'(x)}\right)$$

此时，$\varphi'(a)=0$

再由$a-x_{k+1}=-\varphi'(a)(x_k-a)-\dfrac{1}{2}(x_k-a)^2\varphi''(\xi_k)$

$$=-\frac{1}{2}(a-x_k)^2\varphi''(\xi_k)$$

再由$a-x_{k+1}=-\varphi'(a)\left(x_k-a\right)-\frac{1}{2}\left(x_k-a\right)^2\varphi''(\xi_k)$

$$=-\frac{1}{2}\left(a-x_k\right)^2\varphi''(\xi_k)$$

得到

$$\frac{|a-x_{k+1}|}{|a-x_k|^2}=\frac{1}{2}|\varphi''(\xi_k)|\to C=\frac{1}{2}|\varphi''(a)|\neq 0$$

因此修改后的牛顿格式是平方收敛的.

例8-8： 用牛顿迭代法和修改的牛顿迭代法求解方程

$$e^x - x - 1 = 0.$$

解：令 $f(x) = e^x - x - 1$ 那么x^*=0是 2 重根.

用牛顿迭代法

y = 4.3399e-005

k = 15

用修改的牛顿迭代法

y = 1.0872e-011

k = 4

牛顿迭代法的优缺点

1、**优点：**牛顿迭代法具有**平方收敛**的速度，所以在迭代过程中只要迭代几次就会得到很精确的解。这是牛顿迭代法比简单迭代法优越的地方。

2、**缺点：**选定的**初值**要接近方程的解，否则有可能得不到收敛的结果。再者，牛顿迭代法**计算量比较大**。因每次迭代除计算函数值外还要计算微商值。

牛顿法主要有两个缺点：局部收敛，计算量大。

(1)简易Newton法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{M} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

(2)割线法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

(3)牛顿下山法

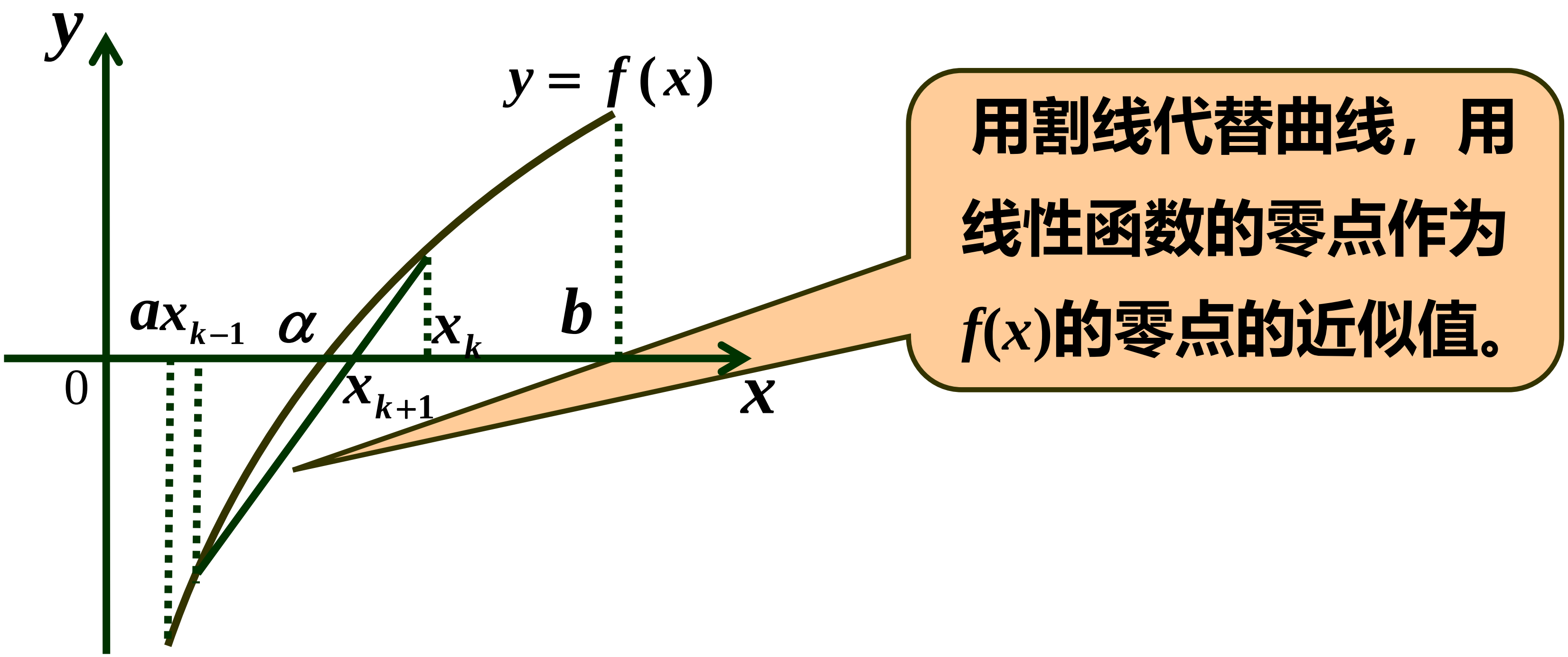
$$x_{k+1} = x_k - \omega \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

可引入一个下山因子$\omega (0 < \omega \leq 1)$,

使每一步有$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$

从ω=1开始逐步减半进行计算，以确保迭代收敛。

割线法的几何意义



割线法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

收敛阶为 P=1.618

例8-9　应用牛顿法求解方程

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x^2-x\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x=0$$

解　建立牛顿迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{0.5+0.25x_k^{\,2}-x_k\sin x_k-\frac{1}{2}\cos 2x_k}{0.5x_k-\sin x_k-x_k\cos x_k+\sin 2x_k}$$

初值: p_0	计算结果	迭代次数
9.5π	1.8955	21
－9.5π	－1.8955	21
10π	－1.8955	13052

取 tol=10^{-5}，N=20000

例8-9　取x_0= 10π，应用牛顿下山法求解方程

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x^2-x\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x=0$$

解　建立牛顿下山迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\lambda\frac{0.5+0.25x_k^{\ 2}-x_k\sin x_k-\frac{1}{2}\cos 2x_k}{0.5x_k-\sin x_k-x_k\cos x_k+\sin 2x_k}$$

取 tol=10^{-5}，e=10^{-8}，N=2000，应用**牛顿下山法**求得 $x^*\approx-1.8955$,　k=18．在算x_1，x_2，x_3，x_4时，λ分别二分4、11、7、3次，x_5以后，λ均取值为1.

显然，对于较差初值，牛顿下山法优于牛顿法，在一般情况下，牛顿下山法比牛顿法收敛得慢.

例题： 设 $f(x)=(x^3-a)^2,\ (a\neq 0)$

（1）写出解 $f(x)=0$ 的 *Newton* 迭代格式；

（2）证明此迭代格式是线性收敛的。

解：（1）因 $f(x)=(x^3-a)^2$，故 $f'(x)=6x^2(x^3-a)$

由Newton迭代公式：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\qquad k=0,1,2,\cdots$$

得

$$\boxed{x_{k+1}=x_k-\frac{(x_k^3-a)^2}{6x_k^2(x_k^3-a)}=\frac{5}{6}x_k+\frac{a}{6x_k^2},\qquad k=0,1,2,\cdots}$$

Newton迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(x_k^3-a)^2}{6x_k^2(x_k^3-a)}=\frac{5}{6}x_k+\frac{a}{6x_k^2},\quad k=0,1,2,\cdots$$

（2）上述迭代格式对应的迭代函数为 $\varphi(x)=\frac{5}{6}x+\frac{a}{6x^2}$

于是 $\varphi'(x)=\frac{5}{6}-\frac{a}{3}x^{-3}$ 又 $x^*=\sqrt[3]{a}$

则有 $\varphi'(x^*)=\frac{5}{6}-\frac{a}{3}(\sqrt[3]{a})^{-3}=\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}<1$ 且 $\neq 0$

故此迭代格式是线性收敛的。