第五节　三次样条插值

样条是绘图员用于描绘光滑曲线的一种机械器件,它是一些易弯曲材料制成的窄条或棒条.在绘制需要通过某点的光滑曲线时,对它在这些点的位置上“压铁”,它就被强制通过或接近图表上确定的描绘点.“**样条函数**”这个术语意在点出这种函数的图象与机械样条画出的曲线很象.

(一)、三次样条插值函数的提法

1. 定义 若函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，对于区间$[a,b]$上的一个分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

给定节点上函数值 $f(x_i)$，$i=0,1,2,\cdots,n.$

若函数$S(x)$满足

(1)$S(x_i)=y_i \quad i=0,1,\cdots n;$

(2)$S(x)\in C^2[a,b]$，即在整体上是二阶连续的；

(3)$S(x)$在每一个小区间$[x_i,x_{i+1}](i=0,1,\cdots n-1)$

是三次多项式；

则称$S(x)$为三次样条函数。$x_1,\ldots,x_{n-1}$称为内节点，x_0,x_n称为外节点.

2、插值条件分析

由（3）$S(x)$在每个$[x_i, x_{i+1}]$上表达式不同，故应分段构造：

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x) & x\in[x_0,x_1]; \\ S_1(x) & x\in[x_1,x_2]; \\ & \vdots \\ S_{n-1}(x) & x\in[x_{n-1},x_n]; \end{cases}$$

故构造$S(x)$需要$4n$个条件

由（1）已知节点上函数值 $y_i, i=0,1,2,\dots,n.$这是$n+1$个条件

由（2）$S(x)\in C^2[a,b]$,隐含着在内节点上应有

$$S_{i-1}(x_i)=S_i(x_i),\quad S'_{i-1}(x_i)=S'_i(x_i),$$

$$S''_{i-1}(x_i)=S''_i(x_i),\quad i=1,2,\dots,n-1 \qquad 3(n-1)\text{个条件}$$

共有$(n+1)+3(n-1)=4n-2$个条件,

缺两个条件，由边界条件给出。

3.边界条件

常见的边界条件有以下三种：

（1）给定端点一阶导数值

$$S'(x_0)=f'(x_0), S'(x_n)=f'(x_n)$$

称为固支边界条件。

（2）给定端点二阶导数值

$$S''(x_0)=f''(x_0),\quad S''(x_n)=f''(x_n)$$

特别，当$S''(x_0)=0$和$S''(x_n)=0$

称为自然边界条件。

（3）周期边界条件

$$S(x_0+0)=S(x_n-0),$$

$$\begin{cases} S'(x_0+0)=S'(x_n-0) \\ S''(x_0+0)=S''(x_n-0) \end{cases}$$

4.构造三次样条插值函数$S(x)$的基本方法

(1) 三弯矩插值法　　　(2) 三转角插值法

(二)、三弯矩插值法

以下面问题为例介绍三弯矩插值法.

问题　对于分划Δ,已给相应的函数值

$$y_i = f(x_i)(i = 0, 1, ..., n)$$

以及边界点上的一阶导数值$f'(x_0), f'(x_n)$.

求一个三次样条函数$S(x)$使之满足

$$S(x_i) = y_i \qquad (i = 1, 2, ..., n-1)$$

$$S(x_j) = y_j, S'(x_j) = f'(x_j) \qquad (j = 0, n)$$

1、三弯矩插值法的基本思想

(1)$y_i'' = f''(x_i)$未知，但可设$S''(x_i) = M_i$,

$(M_i \neq y_i''$,只是$M_i \approx y_i'')$

(2)如能求出M_i，则可由M_i和y_i构造$S(x)$.

(3)如何求M_i?

可利用在节点上一阶导数连续条件

由 $S_{i-1}'(x_i) = S_i'(x_i)$， $i = 1, 2, \ldots, n-1$

导出三弯矩方程（$n-1$个方程要解$n+1$个未知数）

(4)再由三弯矩方程＋边界条件（补充两个方程）

$\Rightarrow$封闭的方程组，可求出M_i, $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$

2、三弯矩方程（加边界条件）

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & & & \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

系数矩阵是对称三对角阵，且是严格对角占优的矩阵，是非奇异的，所以三弯矩方程解是存在唯一的。

3、 三次样条插值函数$S(x)$

由M_i计算a_i,b_i,c_i,d_i，就可得到分段三次样条插值函数是$S(x)$:

$$\begin{cases} S_0(x)=a_0(x-x_0)^3+b_0(x-x_0)^2+c_0(x-x_0)\ +d_{0,}\ x\in[x_0,x_1]; \\ S_1(x)=a_1(x-x_1)^3+b_1(x-x_1)^2+c_1(x-x_1)\ +d_{1,}\ x\in[x_1,x_2]; \\ \qquad\vdots \\ S_{n-1}(x)=a_{n-1}(x-x_{n-1})^3+b_{n-1}(x-x_{n-1})^2+c_{n-1}(x-x_{n-1})\ +d_{n-1,} \\ \qquad x\in[x_{n-1},x_n]; \end{cases}$$

三、三转角插值法

以下面问题为例介绍三转角插值法.

问题　对于分划Δ,已给相应的函数值

$$y_i = f(x_i)(i = 0,1,\dots,n)$$

以及边界点上的一阶导数值$f'(x_0), f'(x_n)$.

求一个三次样条函数$S(x)$使之满足

$$S(x_i) = y_i \qquad (i = 1,2,\dots,n-1)$$

$$S(x_j) = y_j, S'(x_j) = f'(x_j) \qquad (j = 0,n)$$

三转角插值法的基本思想

(1) $y_i' = f'(x_i)$未知，但可设$S'(x_i) = m_i$,

$(m_i \neq y_i'$,只是$m_i \approx y_i')$

(2) 如能求出m_i，则可在$[x_i, x_{i+1}]$上构造三次$Hermite$插值函数

$$\boxed{S_i(x) = h_i(x)y_i + h_{i+1}(x)y_{i+1} + \bar{h}_i(x)m_i + \bar{h}_{i+1}(x)m_{i+1}}$$

共有$n+1$个m_i待求.

(3)如何求m_i?

利用在节点上二阶导数连续的条件

由 $S_{i-1}''(x_i) = S_i''(x_i)$, $i = 1, 2, ..., n-1$

导出三转角方程（$n-1$个方程要解$n+1$个未知数）

(4) 再由三转角方程+边界条件（补充两个方程）

$\Rightarrow$封闭的方程组，可求出m_i,$(i = 0, 1, 2, ..., n)$

三转角方程（加边界条件）

$$
\begin{bmatrix}
2 & \mu_1 & & & & \\
\lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\
 & & & \lambda_{n-1} & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \\ m_{n-2} \\ m_{n-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
3(\lambda_1 f[x_0,x_1]+\mu_1 f[x_1,x_2])-\lambda_1 y_0' \\
3(\lambda_2 f[x_1,x_2]+\mu_2 f[x_2,x_3]) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
3(\lambda_{n-2} f[x_{n-3},x_{n-2}]+\mu_{n-2} f[x_{n-2},x_{n-1}]) \\
3(\lambda_{n-1} f[x_{n-2},x_{n-1}]+\mu_{n-1} f[x_{n-1},x_n])-\mu_{n-1} y_n'
\end{bmatrix}
$$

$$S_i(x) = h_i(x)\,y_i + h_{i+1}(x)\,y_{i+1} + \bar{h}_i(x)\,m_i + \bar{h}_{i+1}(x)\,m_{i+1}$$

用三转角方程求出$m_0, m_1, \cdots, m_n$就是函数$f(x)$在节点处一阶导数的近似值。

用三弯矩方程求出$M_0, M_1, \cdots, M_n$就是函数$f(x)$在节点处二阶导数的近似值。

四、样条插值的收敛性

定理 设被插值函数 $f(x) \in C^4[a,b]$，插值区间 $[a,b]$ 的一个剖分是 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，

S(x)是满足第一类或第二类边界条件的三次样条插值，则在插值区间上有估计式

$$\left| f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x) \right| \le c_k h^{4-k} \left\| f^{(4)}(x) \right\|_\infty$$

$$(k = 0, 1, 2)$$

其中 $h = \max\limits_{0 \le i \le n-1} (x_{i+1} - x_i).$

例：若

$$S(x)=\begin{cases} x^3-1 & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

是三次样条函数，则*a*=______, *b*=_____, *c*=_____.

由$S(x)\in C^2[a,b]$,隐含着在内节点上应有

$$S_{i-1}(x_i)=S_i(x_i),\quad S_{i-1}^{'}(x_i)=S_i^{'}(x_i),$$

$$S_{i-1}^{''}(x_i)=S_i^{''}(x_i),\quad i=1,2,\ldots,n-1$$

答案：*a*= 3 , *b*= 3 , *c*= 0 .