第四节 误差分析和解的精度改进

一、解的误差分析基本问题——解的稳定性

用直接法求解$Ax=b$，得到的是带有误差的计算解（数值解），误差产生的原因主要有两个：

（1）一般原始数据A, b都带有误差$\delta A, \delta b$，因此实际解的方程组是近似方程组

$$(A+\delta A)(x+\delta x)=b+\delta b$$

$\delta A, \delta b$将对解的精度产生影响。

（2）计算过程中，舍入误差的传播和积累将影响解的精度。

数值方法的稳定性:一个算法如果输入数据有扰动（即有误差），而计算过程中舍入误差不增长，则称此算法是数值稳定的，否则称此算法为不稳定的。

数学稳定性:对数学问题而言，如果输入数据有微小扰动，引起输出数据（即数学问题的解）有很大扰动，则称数学问题是**病态问题**，否则称为**良态问题**。

例1 $$\begin{bmatrix} 0.3\times10^{-15} & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left\langle \begin{array}{l} (1)\text{顺序消元}\ \ x=(0,0.333)^T,\ Ax=(1.0,1.667)^T \\ (2)\text{列主元消元}\ \ x=(0.0333,0.333)^T, \\ \qquad Ax=(1.0,2.0)^T \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 0.3\times10^{-15} & 2.999 \\ 10.001 & 4.999 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(3)列主元消元 $x=(0.0333,0.334)^T$,

$Ax=(1.0,2.0)^T$

数值稳定的

例2 $$\begin{bmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{bmatrix}$$

(1)顺序消元 $x=(1.0,-1.0)^T$

$$Ax=(0.217,0.254)^T$$

(2)列主元消元 $x=(1.0,-1.0)^T$

$$Ax=(0.217,0.254)^T$$

$$\begin{bmatrix} 0.7801 & 0.5629 \\ 0.9130 & 0.6591 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{bmatrix}$$

(3)列主元消元 $x=(0.2036,0.1033)^T$

$$Ax=(0.217,0.254)^T$$

病态问题

例2 $\begin{bmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{bmatrix}$

(1)顺序消元 $x = (1.0, -1.0)^T$

$$Ax = (0.217, 0.254)^T$$

(2)列主元消元 $x = (1.0, -1.0)^T$

$$Ax = (0.217, 0.254)^T$$

$$\begin{bmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2172 \\ 0.2541 \end{bmatrix}$$

病态问题

(4)列主元消元 $x = (76.500, -105.60)^T$

$$Ax = (0.2172, 0.2541)^T$$

二、方程组的性态和矩阵的条件数

1.两种误差估计

事后误差估计式

$$\frac{\|e\|}{\|x^*\|} \le \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

$\|A\|\|A^{-1}\|$定量的刻画了方程组对原始误差的敏感程度

先验误差估计：

当$\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$时，解的相对误差估计式为

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x^*\|} \le \frac{\|A\|\|A^{-1}\|\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|}$$

2.矩阵的条件数

定义3-1：对非奇异n阶方阵A，称量$\|A\|\|A^{-1}\|$为矩阵A的条件数记为$cond(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$.

定义3-2：若线性代数方程组的系数矩阵A的条件数$cond(A)$相对很大，称A对求解线性代数方程组$Ax=b$是病态的矩阵，方程组称为病态方程组，反之则称其为良态的.

几点注意：

1. 当$Cond(A) >> 1$, A是病态矩阵, $Ax = b$是病态方程组。

2. 当$Cond(A)$较小时, A是良态矩阵, $Ax = b$是良态方程组。

3. $Cond(A)$与矩阵A本身的结构有关，与其他任何外部因素无关。

4. 条件数$Cond(A)$的大小没有绝对的标准，与方阵的阶数有关。

通常使用的条件数有

①$cond(A)_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$

$cond(A)_1 = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1$

②谱条件数

$$cond(A)_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

当A为非奇异的实对称阵时,因$A^T A = A^2$

$$cond(A)_2 = |\lambda(A)|_{\max} / |\lambda(A)|_{\min}$$

注意:谱条件数在理论上有重要意义.

条件数的性质

①对任何非奇异阵A都有$cond(A)\geq 1$,

$$\because I = AA^{-1}, \therefore 1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|$$

单位阵I的条件数为1, $cond(I)_p = 1, p = 1, 2, \infty$

②矩阵乘非零的常数后条件数不变,

$$\forall k \neq 0, cond(kA) = \|kA\|_p \left\|(kA)^{-1}\right\|_p = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p = cond(A)$$

③对非奇异阵A作正交变换后,谱条件数不变.

即若Q为正交阵,则

$$cond(QA)_2 = cond(AQ)_2 = cond(A)_2$$

$$\because \|QA\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T Q^T QA)} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \|A\|_2$$

④正交阵的谱条件数等于1.

即若Q是正交阵,则$cond(Q)_2 = 1$.

$$\because cond(Q)_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(Q^T Q)}{\lambda_{min}(Q^T Q)}} = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(I)}{\lambda_{min}(I)}} = 1$$

正交变换在数值计算中有很好的数值稳定性。

三、数值稳定性及解的精度改进

1.数值稳定性.

结论：直接法解$Ax=b$，用顺序高斯消元法是不稳定，

而用选主元（列主元）高斯消元法是稳定的。

2.解的精度改进

在良态下，用稳定的数值方法求解$Ax=b$，也总是会有误差的，可用以下方法改进计算解的精度。

(1)双精度改善：

用双精度计算，有效数字增加了，舍入误差自然会减少。

(2)（行）比例增减改善

(3)迭代改善

（2）（行）比例增减改善

前面介绍的列主元法解决了Gauss消元法由于小主元的出现所导致的舍入误差的积累从而出现的失真的问题。但列主元法也有缺点,当方程中出现比例因子时,列主元法就无能为力了.

$$\begin{cases} 10^{-4}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

*Gauss*法求解，失真$x_1 = 1, x_2 = 0$

列主元法求解$x_1=x_2=1$

$$\begin{cases} 10^{3}x_1 + 10^{7}x_2 = 10^{7} \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

列主元法求解，失真$x_1 = 1, x_2 = 0$

按行比例增减的高斯消元法: 将每个方程乘上一个适当的比例因子,使方程组最大系数的绝对值不超过1，然后再做列主元消元。