第七章 函数逼近

第一节 函数逼近的基本问题

连续函数最佳逼近的一般提法

设$f(x)\in X=C[a,b],\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$在$[a,b]$上线性无关，$H=span\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\}$是逼近$f(x)$的函数类，求 $s(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x)\in H$

使得 $\rho(f(x),s(x))=\min$（即逼近误差最小）

已知函数 $y=f(x)\in C[a,b]$ 称为被逼近函数

构造函数 $s(x)\in H\subset C[a,b]$ 称为逼近函数

$\rho(f(x),s(x))=\min$ 称为逼近条件

要解决的两个问题：

1. 确定函数类：由某一组确定的基张成的函数空间。

例：$H = span\{x, \sin x\},$

$\forall \varphi(x) \in H,\ \varphi(x) = ax + b\sin x$

2. 逼近条件的度量标准：

要求整体均匀逼近（最佳逼近思想）。

*Taylor*展开

$$f(x) = P_n(x) + O(h^{n+1}) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

$$+ \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + O(h^{n+1})$$

按逼近误差的度量有两种逼近问题

（即两种最佳逼近）

1. 赋范线性空间中的最佳一致逼近

（契比雪夫意义下的逼近）

$$\rho(f(x), s(x)) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - s(x)| = \|f(x) - s(x)\|_\infty$$

2. 内积空间的最佳平方逼近

$$\rho(f(x), s(x)) = \|f(x) - s(x)\|_2$$

第二节 连续函数的最佳平方逼近

在$C[a,b]$中，定义带权$\rho(x)$内积

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

及内积范数 $\|f\|_2=\sqrt{\big(f(x),f(x)\big)}=\left(\int_a^b \rho(x)\big(f(x)\big)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$

$C[a,b]$构成内积空间。

在内积空间$C[a,b]$中，取$n+1$个线性无关函数 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$张成$C[a,b]$的子空间

$$H=span\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\}\subset C[a,b]$$

连续函数最佳平方问题的一般提法

在内积空间$C[a,b]$中，设$f(x)\in C[a,b]$，但$f(x)\notin H$，

在H中寻找一个函数$s(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x)\in H$

使得 $$\|f(x)-s(x)\|_2^2=\min_{\varphi(x)\in H}\|f(x)-\varphi(x)\|_2^2$$

若s(x)存在，则称其为$f(x)$在$[a,b]$上的最佳平方逼近函数。

需要解决几个重要问题：

1. H中$s(x)$的存在唯一性；
2. 构造$s(x)$的具体方法；
3. 误差$\|\delta\|^2=\|f(x)-s(x)\|^2$。

例：选取常数a,b使$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[ax+b-\sin x]^2dx$达到最小

解：设$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[ax+b-\sin x]^2dx$

确定a,b使$I(a,b)$达到最小，必须满足

$$\frac{\partial I}{\partial a}=0,\qquad \frac{\partial I}{\partial b}=0$$

$$I(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,y)dx$$

即 $$\begin{cases}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[ax+b-\sin x]\ xdx=0\\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[ax+b-\sin x]\ dx=0\end{cases}$$

$$I'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f'_y(x,y)dx+\beta'(y)\cdot f(\beta(y),y)-\alpha'(y)\cdot f(\alpha(y),y)$$

$$\begin{cases} a\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx + b\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx \\ a\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ dx + b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\pi^3}{24} a + \dfrac{\pi^2}{8} b = 1 \\ \dfrac{\pi^2}{8} a + \dfrac{\pi}{2} b = 1 \end{cases}$$

解得$a \approx 0.6644389, b \approx 0.1147707$

一、H中最佳平方逼近函数的存在性

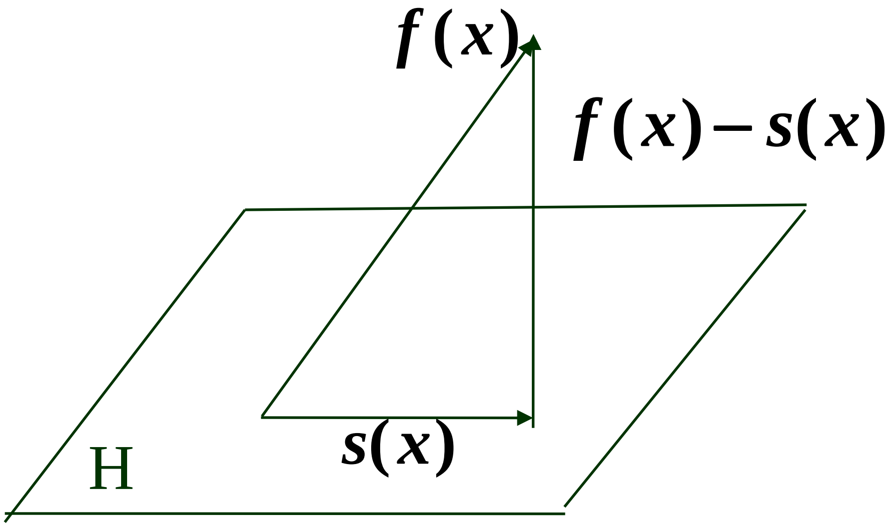
定理1 设内积空间$X=C[a,b]$中的子空间

$$H=span\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)\}\subset X,$$

函数$s(x)\in H$是对$f(x)\in X$的最佳平方逼近函数的充分必要条件是$f(x)-s(x)$与所有的$\varphi_j(x)$(j=0, 1, . . . , n)正交，即满足

$$\boxed{(f(x)-s(x),\varphi_j(x))=0,}\qquad (j=0,1,...,n)$$

几何解释：



证：必要性：

$$记g(c_0,c_1,\ldots,c_n)=\|f(x)-s(x)\|_2^2=\int_a^b \rho(x)\left(f(x)-\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x)\right)^2dx$$

$$求解s(x)\in H,使\|f(x)-s(x)\|_2^2=\min$$

$$\Leftrightarrow 求多元函数g(c_0,c_1,\ldots,c_n)的极小值。$$

由多元函数取极值的必要条件，g的极小点$(c_0,c_1,\ldots,c_n)$应满足方程组

$$\frac{\partial g}{\partial c_k}=-2\int_a^b \rho(x)[f(x)-\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x)]\varphi_k(x)dx$$

$$=-2(f(x)-s(x),\ \varphi_k(x))=0 \qquad k=0,1,2,\ldots,n$$

故$s(x)$的系数$c_0, c_1, ..., c_n$是如下方程组的解

$$(f(x)-s(x), \varphi_k(x))=0, \qquad k=0,1,2,...,n \qquad (1)$$

或 $$\sum_{j=0}^{n} c_j(\varphi_j, \varphi_k)=(f, \varphi_k), \quad (k=0,1,...,n) \qquad (2)$$

方程组（1）、（2）称为**法方程**。

充分性：设$s(x)=\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j(x)$，其中$c_0, c_1, ..., c_n$是(2)的解，

即 $$(f(x)-s(x), \varphi_k(x))=0, \qquad k=0,1,...,n$$

要证对于任意$\varphi(x)\in H$有 $\|f(x)-s(x)\|\le\|f(x)-\varphi(x)\|$

对于任意$\varphi(x)\in H$，$\varphi(x)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\varphi_j(x)$, 必有

$$(f(x)-s(x),\varphi(x))=0$$

因为

$$\|f(x)-\varphi(x)\|^2=\|f(x)-s(x)+s(x)-\varphi(x)\|^2$$

$$=\|f(x)-s(x)\|^2+2(f(x)-s(x),s(x)-\varphi(x))+\|s(x)-\varphi(x)\|^2$$

$$=\|f(x)-s(x)\|^2+\|s(x)-\varphi(x)\|^2\ge\|f(x)-s(x)\|^2$$

所以，$s(x)$是H中对$f(x)$的最佳平方逼近函数。

二、构造s(x)的具体方法

设在H中，对$f(x)\in X$的最佳平方逼近函数为

$$s(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x)$$

由$(f(x)-s(x),\varphi_k(x))$

$$=(f(x)-\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x),\varphi_k(x))=0,\quad (k=0,1,\ldots,n)$$

得
$$\begin{cases}(\varphi_0,\varphi_0)c_0+(\varphi_1,\varphi_0)c_1+\cdots+(\varphi_n,\varphi_0)c_n=(f,\varphi_0)\\(\varphi_0,\varphi_1)c_0+(\varphi_1,\varphi_1)c_1+\cdots+(\varphi_n,\varphi_1)c_n=(f,\varphi_1)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\varphi_0,\varphi_n)c_0+(\varphi_1,\varphi_n)c_1+\cdots+(\varphi_n,\varphi_n)c_n=(f,\varphi_n)\end{cases}$$

若记向量$C=(c_0,c_1,\ldots c_n)^T\in R^{n+1}$ 用矩阵形式表示为$GC=F$

称 $GC=F$ 为法方程

其中 $$G=\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_0)\cdots(\varphi_n,\varphi_0) \\ (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1)\ldots(\varphi_n,\varphi_1) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\varphi_0,\varphi_n) & (\varphi_1,\varphi_n)\cdots(\varphi_n,\varphi_n)\end{bmatrix}\in R^{(n+1)\times(n+1)}$$

$$F=((f,\varphi_0),(f,\varphi_1),\ldots,(f,\varphi_n))^T\in R^{n+1}$$

矩阵G称为关于$\varphi_0(x)$，$\varphi_1(x),\ldots$，$\varphi_n(x)$的$Gram$矩阵，也常记为$G(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$，是对称正定的。

定理2 设$\varphi_j(x)(x=0,1,\cdots,n)$是内积空间$H$中的元素，则其Gram矩阵$G$非奇异的充分必要条件是$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$线性无关。

定理3 法方程的解是存在且唯一的。

解法方程 GC=F 求出 C 以后，就可得到最佳平方逼近函数

$$\boxed{s(x)=\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j(x)}$$

三、逼近误差

记$\delta = f(x) - s(x)$

$$\|\delta\|_2^2 = \|f - s\|^2 = (f - s, f - s)$$
$$= (f, f) - (s, f) - (f - s, s)$$
$$= (f, f) - (\sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j, f)$$
$$= (f, f) - \sum_{j=0}^{n} c_j (\varphi_j, f)$$

称$\|\delta\|_2^2$为最佳平方逼近误差，简称平方误差。

最大误差为$\|\delta\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x) - s(x)|$

四、用多项式空间作为逼近函数类

选取H为多项式空间

$$H = span\{1, x, x^2, ..., x^n\},\text{即取}\varphi_j(x) = x^j, j = 0,1,...,n$$

取权$\rho(x)=1$，则法方程（2）中的元素由下式定义

$$(\varphi_j(x),\ \varphi_k(x)) = \int_a^b x^{j+k}dx = \frac{b^{j+k+1}-a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$j = k, k+1, ..., n, k = 0,1,...,n$$

$$(f,\varphi_k) = \int_a^b f(x)x^k dx, \qquad k = 0,1,...,n$$

求解法方程组GC=F，设所得解为$c_0, c_1, ..., c_n$，

则得$f(x)$的最佳平方逼近多项式$s(x)$：

$$s(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n$$

例：给定$f(x)=\sqrt{1+x^2}, 0\le x\le 1$，取逼近空间$H=span\{1,x\}$，在$H$中求其最佳平方逼近函数。

解：取$\mathrm{H}=span\{1,x\}$，　　$\rho(x)=1$

由$(\varphi_j,\ \varphi_k)=\int_a^b x^{j+k}dx=\dfrac{b^{j+k+1}-a^{j+k+1}}{j+k+1}$，得

$$(\varphi_0,\ \varphi_0)=\int_0^1 dx=1,(\varphi_1,\ \varphi_0)=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},(\varphi_1,\ \varphi_1)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

$$(\varphi_0,\ f)=\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx=1.147,(\varphi_1,\ f)=\int_0^1\sqrt{1+x^2}xdx=0.609$$

法方程为$\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.147\\ 0.609\end{bmatrix}$

解得$c_0=0.934, c_1=0.426$，所求最佳平方逼近函数为

$$s(x)=0.936+0.426x$$

平方误差为

$$\|\delta\|_2^2=(f,f)-(s,f)$$
$$=(f,f)-(c_0\varphi_0+c_1\varphi_1,f)$$
$$=\int_0^1(1+x^2)dx-c_0(\varphi_0,f)-c_1(\varphi_1,f)$$
$$=\frac{2}{3}-0.934\times1.147-0.426\times0.906=0.0026$$

最大误差为$\|\delta\|_\infty=\max\limits_{0\le x\le1}\left|\sqrt{1+x^2}-s(x)\right|=0.066$

在$[0,1]$上由$\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$构造最佳平方逼近多项式时，法方程的系数矩阵是Hilbert矩阵，形如

$$H=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}$$

Hilbert矩阵是一种典型的病态矩阵，随着n越大，病态越严重。因此法方程是病态方程组，数值计算结果是不稳定的。因此要改用正交多项式构造最佳平方逼近多项式。

五、基于正交多项式的逼近函数类

设$\{\varphi_j(x)\}(j=0,1,\ldots,n)$是区间$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式组，取$H$为

$$H=span\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\}$$

则法方程（2）为

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & & & \\ & (\varphi_1,\varphi_1) & & \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & & & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{bmatrix}$$

解方程组，得 $c_j=\dfrac{(\varphi_j,f)}{(\varphi_j,\varphi_j)}$， $j=0,1,\dots,n$

因此得最佳平方逼近多项式

$$s(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(\varphi_j,f)}{(\varphi_j,\varphi_j)}\varphi_j(x)$$

平方误差为

$$\|\delta\|_2^2=(f,f)-(s,f)=(f,f)-(\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j,f)$$

$$=(f,f)-\sum_{j=0}^{n}c_j(\varphi_j,f)$$

$$=(f,f)-\sum_{j=0}^{n}c_j^2(\varphi_j,\varphi_j)$$

复习：由线性无关序列$\{x^n\}_{n=0}^{\infty}=\{1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots\}$可构成首1的正交多项式$\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots\}$

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=1\\ \varphi_{k+1}(x)=(x-a_{k+1})\varphi_k(x)-\beta_k\varphi_{k-1}(x) & (k=0,1,2,\cdots)\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}a_{k+1}=\dfrac{(x\varphi_k(x)\ ,\varphi_k(x)\ )}{(\varphi_k(x)\ ,\varphi_k(x)\ )} & (k=0,1,2\ldots)\\ \beta_0=0,\beta_k=\dfrac{(\varphi_k(x)\ ,\varphi_k(x)\ )}{(\varphi_{k-1}(x)\ ,\varphi_{k-1}(x)\ )} & (k=0,1,2\ldots)\end{cases}$$

公式中的内积$(x\varphi_k(x)\ ,\varphi_k(x)\ )=\int_a^b\rho(x)x\cdot\varphi_k^2(x)dx$。

工程中常用的五种重要的正交多项式

(1)*Legendre*(勒让德）多项式

$P_n(x)$，在$\left[-1,1\right]$上带权$\rho(x)=1$正交多项式；

(2)第一类*Chebyshev*（契比雪夫）多项式

$T_n(x)$，在$[-1,1]$上带权$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$正交多项式；

(3)第二类*Chebyshev*（契比雪夫）多项式

$U_n(x)$，在$[-1,1]$上带权$\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$正交多项式；

(4)*Laguerre*（拉盖尔）多项式

$L_n(x)$，在$[0,+\infty]$上带权$\rho(x)=e^{-x}$正交多项式；

(5)*Hermite*（埃尔米特）多项式

$H_n(x)$，在$(-\infty,+\infty)$上带权$\rho(x)=e^{-x^2}$正交多项式。

正交关系

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

前几项

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

1. 利用*Legendre*多项式，求最佳平方逼近多项式

取 $[a,b]=[-1,1], \rho(x)=1$

$\varphi_j(x)=P_j(x),(j=0,1,\ldots,n)$

则 $$c_j=\frac{(P_j,f)}{(P_j,P_j)}=\frac{2j+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_j(x)dx,\quad (j=0,1,\ldots,n)$$

因此得*Legendre*最佳平方逼近多项式

$$s(x)=\sum_{j=0}^{n}c_jP_j(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(P_j,f)}{(P_j,P_j)}P_j(x)$$

平方误差为 $\|\delta\|_2^2=(f,f)-\sum_{j=0}^{n}c_j^2(P_j,P_j)=(f,f)-\sum_{j=0}^{n}\frac{2}{2j+1}c_j^2$

正交关系

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

前几项

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

例：求$f(x)=x^4$在区间$[-1,1]$上的二次最佳平方逼近多项式。

解：取$\varphi_j(x)=P_j(x), j=0,1,2.$

则有$\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x, \varphi_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

则$c_j=\frac{(P_j,f)}{(P_j,P_j)}=\frac{2j+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_j(x)dx$，$(j=0,1,\ldots,n)$

$$c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{1}{5}, c_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^5dx=0,\quad c_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^4(3x^2-1)dx=\frac{4}{7}$$

故$f(x)=x^4$在$[-1,1]$上的最佳平方逼近多项式为

$$s(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x)=\frac{1}{5}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)=\frac{6}{7}x^2-\frac{3}{35}$$

$$平方误差为\|\delta\|_2^2=(f,f)-\sum_{j=0}^{n}c_j^2(P_j,P_j)=(f,f)-\sum_{j=0}^{n}\frac{2}{2j+1}c_j^2$$

$$平方误差为\|\delta\|_2^2=(f,f)-\sum_{j=0}^{n}\frac{2}{2j+1}c_j^2$$

$$=\int_{-1}^{1}x^8dx-\left[2\times(\frac{1}{5})^2+\frac{2}{5}\times(\frac{4}{7})^2\right]\approx 0.011609977$$

例　设$f(x)=|x|, x\in[-1,1]$,用Legendre多项式在$span\{1,x^2,x^4\}$中求最佳平方逼近多项式。

解：函数$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & x\in[-1,0]\\ x & x\in[0,1]\end{cases}$

最佳平方逼近多项式$S(x)=c_0p_0(x)+c_2p_2(x)+c_4p_4(x)$

$$c_0=\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}-xp_0(x)dx+\int_{0}^{1}xp_0(x)dx\right)=0.5$$

$$c_2=\frac{5}{2}\left(\int_{-1}^{0}-xp_2(x)dx+\int_{0}^{1}xp_2(x)dx\right)=0.625$$

$$c_4=\frac{9}{2}\left(2\int_{0}^{1}xp_4(x)dx\right)=-0.1875$$

求得最佳平方逼近多项式为

$$S(x)=0.5+0.3125(3x^2-1)-0.02344(35x^4-30x^2+3)$$

2、Chebyshev多项式

正交关系 $$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n=0\\ \dfrac{\pi}{2}, & m=n\neq 0\end{cases}$$

前几项

$$T_0(x)=1,$$

$$T_1(x)=x,$$

$$T_2(x)=2x^2-1,$$

$$T_3(x)=4x^3-3x,$$

$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1,$$

$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x,$$

$$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1,$$

2. 利用*Chebyshev*多项式，求最佳平方逼近多项式

取 $[a,b]=[-1,1],\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\varphi_j(x)=T_j(x),(j=0,1,\ldots,n)$

则 $c_j=\dfrac{(T_j,f)}{(T_j,T_j)}=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$，$(j=0,1,\ldots,n)$

*Chebyshev*最佳平方逼近多项式为

$$s(x)=\frac{c_0}{2}+\sum_{j=1}^{n}c_jT_j(x)$$

平方误差为$\|\delta\|_2^2=(f,f)-\displaystyle\sum_{j=0}^{n}c_j^2(T_j,T_j)=(f,f)-\sum_{j=0}^{n}\frac{\pi}{2}c_j^2$

正交关系 $\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n=0\\ \frac{\pi}{2}, & m=n\neq 0\end{cases}$

前几项

$T_0(x)=1,$

$T_1(x)=x,$

$T_2(x)=2x^2-1,$

$T_3(x)=4x^3-3x,$

$T_4(x)=8x^4-8x^2+1,$

$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x,$

$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1,$

例：求$f(x)=x^4, x\in[-1,1]$，在$M=span\{T_0(x),T_1(x),T_2(x)\}$中的最佳平方逼近多项式。

解：$T_0(x)=1, T_1(x)=x, T_2(x)=2x^2-1$

$$c_0=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{3}{4},\qquad c_1=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx=0,$$

$$c_2=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^4(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}$$

于是所求最佳平方逼近多项式为

$$s(x)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}(2x^2-1)=x^2-\frac{1}{8},\qquad -1\le x\le 1$$

其最大误差为$\max\limits_{-1\le x\le 1}|f(x)-s(x)|=\max\limits_{-1\le x\le 1}\left|x^4-x^2+\frac{1}{8}\right|=0.125$

3、利用*Legndre*多项式和*Chebyshev*多项式，求函数$f(x)$在任意有限区间$[a,b]$上的最佳平方逼近函数。

作变量代换将区间$[a,b]$变为$[-1,1]$

$$x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2},\quad t=\frac{1}{b-a}(2x-a-b)$$

$$f(x)=f(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2})=F(t)$$

对$F(t),t\in[-1,1]$按$P_n(t)$或$T_n(t)$求最佳平方逼近多项式$S(t)$

最后换回原变量x

$$s(t)\rightarrow s(\frac{1}{b-a}(2x-a-b))$$

例　求函数$y=\arctan x$在[0,1]上的一次最佳平方逼近多项式。

解：　解法1，作变量替换$x=\dfrac{1}{2}(t+1)$，将[0,1]变换到[−1,1]，

函数$y=\arctan x$，$x\in[0,1]$变为$y=\arctan\dfrac{t+1}{2}$，$t\in[-1,1]$。

利用多项式$P_0(t)=1, P_1(t)=t$,，求$y=\arctan\dfrac{t+1}{2}$在[−1,1]上的一次最佳平方逼近多项式。

$$(P_0(t),\ y)=\int_{-1}^{1}\arctan\frac{t+1}{2}dt=\frac{\pi}{2}-\ln 2,$$

$$(P_1(t),y)=\int_{-1}^{1}t\arctan\frac{t+1}{2}dt=\frac{\pi}{2}-2+\ln 2,$$

$$c_0 = \frac{1}{2}(P_0(t),\ y) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2,$$

$$c_1 = \frac{3}{2}(P_1(t), y) = \frac{3}{2}(\frac{\pi}{2} - 2 + \ln 2),$$

所求的一次最佳平方逼近多项式为

$$\tilde{s}(t) = c_0 P_0(t) + c_1 P_1(t) = (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2) + \frac{3}{2}(\frac{\pi}{2} - 2 + \ln 2)t$$

即：$s(x) = (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2) + \frac{3}{2}(\frac{\pi}{2} - 2 + \ln 2)(2x - 1)$

$$\approx 0.042909 + 0.791831x$$

例 求函数$y=\arctan x$在[0,1]上的一次最佳平方逼近多项式。

解2: 直接在[0,1]上构造正交多项式

$$\varphi_0(x)=1,\quad \varphi_1(x)=x-\frac{1}{2}$$

$$(\varphi_0(x),\ \varphi_0(x))=\int_0^1 1dx=1,$$

$$(\varphi_1(x),\ \varphi_1(x))=\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2dx=\frac{1}{12}$$

$$(\varphi_0(x),\ y)=\int_0^1 \arctan x dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2,$$

$$(\varphi_1(x),y)=\int_0^1 (x-\frac{1}{2})\arctan x dx=\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4}-2+\ln 2),$$

$$c_0=\frac{(\varphi_0(x),\ y)}{(\varphi_0(x),\ \varphi_0(x))}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

$$c_1=\frac{(\varphi_1(x),\ y)}{(\varphi_1(x),\ \varphi_1(x))}=3(\frac{\pi}{2}-2+\ln 2)$$

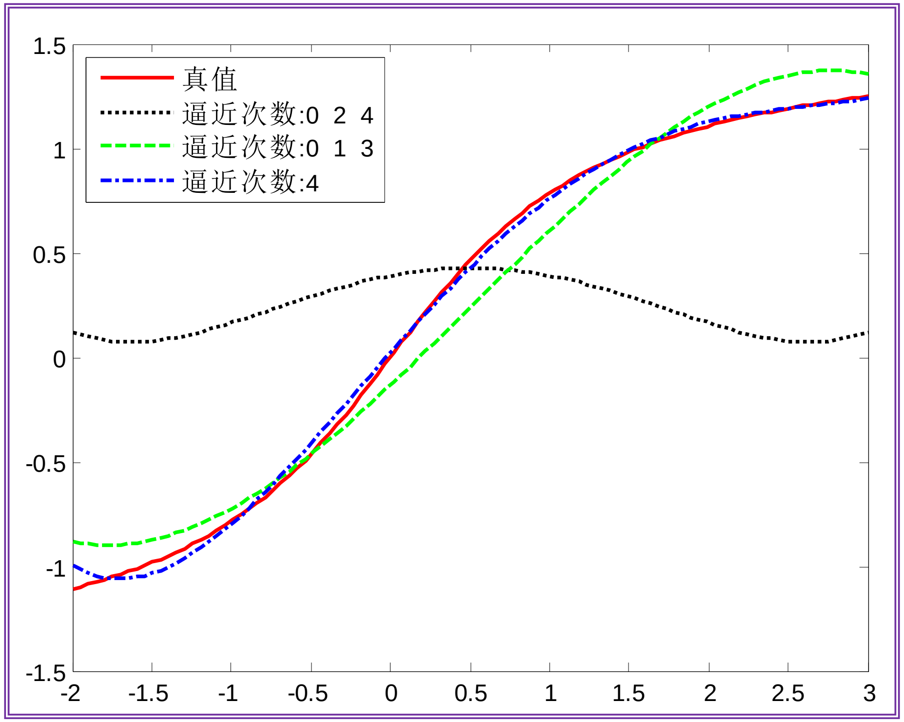
所求的一次最佳平方逼近多项式为

$$s(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)$$

$$=(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2)+3(\frac{\pi}{2}-2+\ln 2)(x-\frac{1}{2})$$

$$\approx 0.042909+0.791831x$$

实例： 设$f(x)=\arctan(x)$。试用*Legendre*多项式分别在$\Phi_1=span\{p_0,p_2,p_4\}$，$\Phi_2=span\{p_0,p_1,p_3\}$，$\Phi_3=span\{p_0,p_1,p_2,p_3,p_4\}$中于区间$[-2,3]$上求其最佳平方逼近多项式。



结论： 选择不同的逼近空间逼近效果可能相差很远，由于被逼近函数$f(x)$为奇函数，故用Φ_1逼近时效果很差，Φ_2则相对较好，Φ_3逼近效果最佳。