第二节 内积空间与内积空间中的正交系

线性空间 + 赋范数 = 赋范线性空间

线性空间 + 赋内积 = 内积空间

一、内积空间

二、几种线性空间中定义的内积

三、内积范数

四、内积空间中的正交基和标准正交基

五、内积空间中的正交系

一、内积空间

定义：设V是实数域R上的线性空间，如果$\forall \alpha,\beta \in V$都有一个实数记为$(\alpha,\beta)$与其对应，且满足以下条件，则称实数$(\alpha,\beta)$为$\alpha,\beta$的内积.

①对称性$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

②可加性$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

③齐次性$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta),\forall k\in R$;

④正定性$(\alpha,\alpha)\geq 0$，且当且仅当$\alpha=0$时才有$(\alpha,\alpha)=0$

定义了内积的线性空间称为内积空间

内积的基本性质:

$$(1)(\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta)$$

证: $(\alpha, k\beta) = (k\beta, \alpha) = k(\beta, \alpha) = k(\alpha, \beta)$

$$(2)(\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$$

$$(3)(\alpha, 0) = (0, \beta) = 0$$

二、几种线性空间中定义的内积

1. R^n中, $\because \forall x, y \in R^n$,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

定义内积

(1) $$(x, y) = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

满足内积的四个条件，R^n成为一个内积空间(欧氏空间)

内积 $(x,y)=x^TAy=\sum_{i,j=1}^{n}x_ia_{ij}y_j$ A为对称正定阵

证：(1) $(x,y)=x^TAy=\sum_{i,j=1}^{n}x_ia_{ij}y_j$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}x_ja_{ji}y_i=\sum_{i,j=1}^{n}y_ia_{ij}x_j=(y,x)$$

(2) $(x+z,y)=\sum_{i,j=1}^{n}(x_i+z_i)a_{ij}y_j$

$$\sum_{i,j=1}^{n}x_ia_{ij}y_j+\sum_{i,j=1}^{n}z_ia_{ij}y_j=(x,y)+(z,y)$$

(3)显然满足

(4) $(x,x)=x^TAx=\sum_{i,j=1}^{n}x_ia_{ij}x_j\geq 0$

满足内积的四个条件，构成内积空间。说明同一个线性空间，定义不同的内积可以构成不同的内积空间。

2. $R^{n\times n}, \forall A, B\in R^{n\times n}$,定义内积

$$(A,B)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

3. $C[a,b], \forall f(x), g(x)\in C[a,b]$,

对于给定的权函数$\rho(x)>0, x\in[a,b]$

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

称为在$C[a,b]$中带权$\rho(x)$的内积.

若$\rho(x)=1$,则

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

定义　设$[a,b]$是有限或无限区间，$\rho(x)$是定义在$[a,b]$上的非负可积函数，若其满足

$$(1)\int_a^b \rho(x)dx > 0, \qquad (2)\int_a^b x^n\rho(x)dx\text{存在}, n=0,1\ldots$$

则称$\rho(x)$是$[a,b]$上的一个**权函数**.

常见的权函数有：

$$(1)\rho(x)=1 \qquad -1\le x\le 1$$

$$(2)\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1\le x\le 1$$

$$(3)\rho(x)=e^{-x} \qquad 0\le x<+\infty$$

$$(4)\rho(x)=e^{-x^2} \qquad -\infty<x<+\infty$$

三、内积范数

由内积定义的范数称为内积范数：$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$

(1) $x \in R^n, \|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$，

称 $\|x\|$ 为 n 维向量 x 的内积范数.

(2) $x \in R^n$，A 为 n 阶对称正定矩阵，x 的 A 范数定义为

$$\|x\|_A = \sqrt{x^T A x} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j}$$

特别，A 为 n 阶对角阵，x 的 A 范数，定义为

$$\|x\|_A = \sqrt{x^T A x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2}$$

(3) $f(x) \in C[a,b]$,

$$\|f\| = \sqrt{\big(f(x), f(x)\big)} = \left(\int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

称$\|f\|$为$[a,b]$上连续函数$f(x)$的内积范数。

(4) $f(x) \in C[a,b]$,

$$\|f\| = \sqrt{\big(f(x), f(x)\big)} = \left(\int_a^b \rho(x)\big(f(x)\big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

称$\|f\|$为$[a,b]$上连续函数$f(x)$的带权$\rho(x)$的内积范数。

定理：(*Cauchy* – *Schwarz*不等式)

设α,β是内积空间V中任意两个向量，则有

$$(\alpha,\beta)^2 \le (\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$$

等号只有当且仅当α和β是线性相关时才成立.

在不同的空间中，*Cauchy* – *Schwarz*不等式有不同的表达形式.

$$(\alpha,\beta)^2 \le (\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$$

(1) R^n中, $\forall x, y \in R^n$,

$$|(x,y)| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\| \|y\|$$

(2) $C[a,b]$中, $\forall f(x), g(x) \in C[a,b]$

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

思考: $(f,g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx$

$(\alpha,\beta)^2 \le (\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$

用内积范数表示*Schwarz*不等式的形式是

$$|(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\| \ \ \|\beta\|$$

由*Schwarz*不等式可以证明内积范数公理中的三角不等式

例2-5 证明：三角不等式$\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$

证：在内积空间V中,$\forall \alpha,\beta \in V$,有

$$\begin{aligned}\|\alpha+\beta\|^2 &= (\alpha+\beta,\alpha+\beta)\\ &= (\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)\\ &\le \|\alpha\|^2+2\|\alpha\|\|\beta\|+\|\beta\|^2 = (\|\alpha\|+\|\beta\|)^2\end{aligned}$$

所以$\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$

由$Schwarz$不等式，当α,β不是零向量时

$$\frac{|(\alpha,\beta)|}{\|\alpha\|\|\beta\|}\le 1, \qquad 即 \qquad -1\le\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}\le 1$$

定义内积空间V中任意两个向量α和β的夹角φ

$$\varphi=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}, \quad 且\varphi\in[0,\pi]$$

对两个不为零的向量α,β，若$(\alpha,\beta)=0$，则称α和β是正交的，记为$\alpha\perp\beta$.

前述三种空间关系

$$
\begin{tikzcd}
& \text{线性空间} \arrow[dl, shift right, "(\cdot,\cdot)"'] \arrow[dr, shift left, "\|\cdot\|"] & \\
\text{内积 空间} \arrow[ur, shift right] \arrow[rr, "(\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}=\|\cdot\|"'] & & \text{赋范线性空间} \arrow[ul, shift left]
\end{tikzcd}
$$

四、内积空间中的正交基和标准正交基

定义 在内积空间V^n中取一组基$S=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$

若 $$(v_i,v_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \boxed{\neq 0} & i=j\end{cases}\quad (i,j=1,\cdots,n)$$

则称基S是V^n中的正交基.

定义 在内积空间V^n中取一组基$\varepsilon=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$,

若 $$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \boxed{1} & i=j\end{cases}\quad (i,j=1,\cdots,n)$$

则称基ε是V^n中的标准正交基.

$$e_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

内积空间V^n标准正交基不唯一，但必有正交基。

由*Schmidt*正交化过程给出构造性证明.

法正交序列:（亦称为标准正交系或规范化序列）

$$v_1 = u_1, \qquad \varepsilon_1 = v_1 / \|v_1\|$$

$$v_k = u_k - \sum_{j=1}^{k-1} (u_k, \varepsilon_j)\varepsilon_j, \quad \varepsilon_k = v_k / \|v_k\|, \qquad k = 2, 3, \cdots$$

正交序列:（亦称为非规范化序列）

$$v_1 = u_1$$

$$v_k = u_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(u_k, v_j)}{(v_j, v_j)} v_j, \qquad k = 2, 3, \cdots$$

例： 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&2&1\\1&1&6\end{bmatrix}$

试求A的列空间$R(A)$的标准正交基.

解： A的列线性无关,

$u_1=(1,1,1,1)^T, u_2=(1,2$

$S=\{u_1,u_2,u_3\}$是$R(A)$的

$v_1=u_1, \quad \varepsilon_1=v_1/\|v_1\|$

$v_k=u_k-\sum_{j=1}^{k-1}(u_k,\varepsilon_j)\varepsilon_j, \varepsilon_k=v_k/\|v_k\|$

$v_1=u_1=(1,1,1,1)^T, \varepsilon_1=v_1/\|v_1\|=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$

$\|v_1\|=2, u_1=v_1=2\varepsilon_1$

$$v_2 = u_2 - (u_2, \varepsilon_1)\varepsilon_1 = (1,2,2,1)^T - 3(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$$

$$= (-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T$$

$$\|v_2\| = 1, \qquad \varepsilon_2 = v_2 / \|v_2\| = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T$$

$$u_2 = v_2 + 3\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + 3\varepsilon_1$$

$$v_1 = u_1, \qquad \varepsilon_1 = v_1 / \|v_1\|$$

$$v_k = u_k - \sum_{j=1}^{k-1} (u_k, \varepsilon_j)\varepsilon_j, \varepsilon_k = v_k / \|v_k\|$$

$$v_3 = u_3 - (u_3, \varepsilon_1)\varepsilon_1 - (u_3, \varepsilon_2)\varepsilon_2$$

$$= (2,3,1,6)^T - 6(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T - (-2)(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T$$

$$= (-2,1,-1,2)^T$$

$$\|v_3\| = \sqrt{10}, \qquad \varepsilon_3 = v_3 / \|v_3\| = (-\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}})^T$$

$$u_3 = v_3 + 6\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 = \sqrt{10}\varepsilon_3 + 6\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2$$

得到$R(A)$的标准正交基为$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$.

$$\varepsilon_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T,\varepsilon_2=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T,$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{\sqrt{10}}(-2,1,-1,2)^T$$

$$u_1 = v_1 = 2\varepsilon_1$$

$$u_2 = v_2 + 3\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + 3\varepsilon_1$$

$$u_3 = v_3 + 6\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 = \sqrt{10}\varepsilon_3 + 6\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$A = QR$ 称为A的正交分解.

五、内积空间中的正交系

1. 正交多项式的概念和性质

定义2-19 设n次多项式

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
$$(a_n \neq 0), n = 0,1,2,\dots$$

若多项式序列$\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$满足

$$(p_m(x),\ p_n(x)) = \int_a^b \rho(x) p_m(x) p_n(x) dx$$

$$= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \|p_n(x)\|^2 & m = n \end{cases}$$

则称$\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$为区间$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式.

若 $\|p_n(x)\|=1,(n=0,1,2,\ldots)$,则称 $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 为规范化正交多项式.

若 $a_n=1$,则称 $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 为首项系数为1的正交多项式.

一般,规范化正交多项式和首1正交多项式不可能同时具有。

例如: $\varphi_1(x)=x,\ \ \varphi_2(x)=x^2-\dfrac{1}{3},\ \ x\in[-1,1],$

对权 $\rho(x)=1$ 是首1的非规范化正交多项式.

显然 $\int_{-1}^{1}\varphi_1(x)\varphi_2(x)dx=\int_{-1}^{1}x(x^2-\dfrac{1}{3})dx=0,$

但 $\int_{-1}^{1}(\varphi_1(x))^2dx=\dfrac{2}{3}\neq 1,\ \int_{-1}^{1}(\varphi_2(x))^2dx\neq 1$

定理2-8 正交多项式的性质:

性质1 $[a,b]$上带权的正交多项式系$\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$一定是$[a,b]$上的线性无关函数系.

性质2 任何次数不高于n次的多项式$g_n(x)$均可由正交多项式系$\{p_k(x)\}_{k=0}^{n}$线性表出，即

$$g_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k p_k(x)$$

性质3 设$\{p_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$是$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式系，则$p_n(x)$与任何次数不高于$n-1$次的多项式g$(x)$正交, 即

$$(g(x),\ p_n(x))=0 \qquad n=1,2,\ldots$$

特别地有$(x^k,p_n(x))=\int_a^b \rho(x)x^k p_n(x)dx=0 \quad (k=0,1,\ldots n-1)$

性质4 n次正交多项式$p_n(x)$有n个互异实根，且全部落在(a,b)内。

例 设$\{p_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$是区间$[0,1]$上带权$\rho(x)=x$的最高项系数为1的正交多项式系，其中$p_0(x)=1$,求

$$\int_0^1 xp_k(x)dx=?$$

解 由于$p_0(x)=1$,当$k\neq 0$时,$p_k(x)$与$p_0(x)$带权$\rho(x)=x$正交,因此有

$$\int_0^1 xp_k(x)p_0(x)dx=0$$

当$k=0$时,由于 $\int_0^1 xp_0(x)dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$

所以有 $$\int_0^1 xp_k(x)dx=\begin{cases}0 & k\neq 0\\ \frac{1}{2} & k=0\end{cases}$$

2. 在C[a,b]中构造正交多项式

由$\left\{x^n\right\}_{\mathrm{n=1}}^{\infty}=\left\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\right\}$可构造首1的正交多项式

$$\left\{\varphi_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots\right\}$$

由非规范化公式:

$$\boxed{\begin{aligned} &v_1=u_1 \\ &v_k=u_k-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(u_k, v_j)}{(v_j, v_j)}v_j, \qquad k=2,3,\ldots \end{aligned}}$$

$$v_1 \leftrightarrow \varphi_0(x), v_2 \leftrightarrow \varphi_1(x), \ldots, v_k \leftrightarrow \varphi_{k-1}(x)$$

$$u_1 \leftrightarrow 1 \qquad , u_2 \leftrightarrow x \qquad , \ldots, u_k \leftrightarrow x^{k-1}$$

$$\text{得}\begin{cases} \varphi_0(x)=1 \\ \varphi_{k-1}(x)=x^{k-1}-\sum\limits_{i=0}^{k-1}\dfrac{(x^{k-1}, \varphi_i(x))}{(\varphi_i(x), \varphi_i(x))}\varphi_i(x), (k=2, \cdots) \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 \\ \varphi_{k+1}(x) = x^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \dfrac{(x^{k+1}, \varphi_i(x))}{(\varphi_i(x), \varphi_i(x))} \varphi_i(x) \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

以上 $(x^k, \varphi_i(x)) = \int_a^b \rho(x) x^k \varphi_i(x) dx$

故不同的$[a,b]$、$\rho(x)$得到不同的正交多项式.

得到

$$\begin{cases} \varphi_0(x)=1 \\ \varphi_{k+1}(x)=x^{k+1}-\sum_{i=0}^{k}\dfrac{(x^{k+1},\varphi_i(x))}{(\varphi_i(x),\varphi_i(x))}\varphi_i(x) \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

简化的递推公式

$$\begin{cases} \varphi_0(x)=1 \\ \varphi_{k+1}(x)=(x-\alpha_{k+1})\varphi_k(x)-\beta_k\varphi_{k-1}(x) \end{cases}$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha_{k+1}=\dfrac{(x\varphi_k(x),\varphi_k(x))}{(\varphi_k(x),\varphi_k(x))} & (k=0,1,2,\cdots) \\ \beta_0=0,\beta_k=\dfrac{(\varphi_k(x),\varphi_k(x))}{(\varphi_{k-1}(x),\varphi_{k-1}(x))} & (k=1,2,\cdots) \end{cases}$$

公式中内积$(x\varphi_k(x),\varphi_k(x))=\int_a^b\rho(x)x\cdot\varphi_k^2(x)dx$

例： 在$C[-1,1]$上,由$[1, x, x^2]$构造带权$\rho(x)=1+x^2$, $x\in[-1,1]$的首1正交多项式$\varphi_0(x),\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$.

解: 由递推公式得

$$\varphi_0(x)=1, \qquad \varphi_1(x)=(x-\alpha_1)\varphi_0(x)$$

$$\alpha_1=\frac{(x\varphi_0(x),\varphi_0(x))}{(\varphi_0(x),\varphi_0(x))}=\frac{\int_{-1}^{1}(1+x^2)x\cdot dx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx}=0$$

所以 $\varphi_1(x)=x$

$$\varphi_2(x)=(x-\alpha_2)\varphi_1(x)-\beta_1\varphi_0(x)$$

$$\alpha_2=\frac{(x\varphi_1(x),\varphi_1(x))}{(\varphi_1(x),\varphi_1(x))}=\frac{\int_{-1}^{1}(1+x^2)x\cdot x^2\cdot dx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)\cdot x^2\cdot dx}=0$$

$$\beta_1 = \frac{(\varphi_1(x), \varphi_1(x))}{(\varphi_0(x), \varphi_0(x))} = \frac{\int_{-1}^{1}(1+x^2)x^2dx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx} = \frac{2}{5}$$

所以$\varphi_2(x) = x^2 - \dfrac{2}{5}$

首1正交多项式$\varphi_0(x), \varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$.

$$\varphi_0(x) = 1, \qquad \varphi_1(x) = x \qquad \varphi_2(x) = x^2 - \frac{2}{5}$$

3. 关于点集$\{x_0, x_1, \dots x_m\} \subset [a,b]$和带权

$w_i > 0\left(w_i \in R, i = 0,1,\dots,m\right)$的正交函数组

设有$n+1$个线性无关函数$\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{n}$，给出

点集$\{x_0, x_1, \dots x_m\}$和权$w_i > 0\left(i = 0,1,\dots,m\right), m > n$

$$\Phi_j = \begin{pmatrix} \varphi_j(x_0) \\ \varphi_j(x_1) \\ \vdots \\ \varphi_j(x_m) \end{pmatrix} \in R^{m+1}, j = 0,1,\dots,n$$

$H = span\{\Phi_0, \Phi_1, \dots \Phi_n\} \subset R^{m+1}$，$H$为$R^{m+1}$的子空间。

在H空间中定义带权$w_i(i=0,1,\ldots,m)$的内积

$$\left(\Phi_k,\Phi_j\right)=\sum_{i=0}^{m} w_i\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i)$$

则H空间成为内积空间,内积范数

$$\left\|\Phi_j\right\|=\left(\Phi_j,\Phi_j\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=0}^{m} w_i\varphi_j^2(x_i)\right)^{\frac{1}{2}}$$

若在H空间中有 $\left(\Phi_k,\Phi_j\right)=\begin{cases}=0 & j\neq k\\ \neq 0 & j=k\end{cases}$

称函数组$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$是关于点集$\{x_0,x_1,\ldots x_m\}$和带权$w_0,w_1,\ldots,w_m$的正交函数组.

正交函数组$\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{n}$由下面递推公式得到

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=1\\ \varphi_{k+1}(x)=(x-\alpha_{k+1})\varphi_k(x)-\beta_k\varphi_{k-1}(x),\quad (k=0,1,2,\cdots)\end{cases}$$

其中
$$\begin{cases}\alpha_{k+1}=\dfrac{(x\varphi_k(x),\varphi_k(x))}{(\varphi_k(x),\varphi_k(x))} & (k=0,1,2,\cdots)\\[2ex] \beta_0=0,\beta_k=\dfrac{(\varphi_k(x),\varphi_k(x))}{(\varphi_{k-1}(x),\varphi_{k-1}(x))}, & (k=1,2,\cdots)\end{cases}$$

式中内积定义为

$$\left(\varphi_k(x),\varphi_j(x)\right)=\left(\Phi_k,\Phi_j\right)=\sum_{i=0}^{m}w_i\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i)$$

$$\left(x\varphi_k(x),\varphi_k(x)\right)=\sum_{i=0}^{m}w_i x_i\varphi_k^2(x_i)$$

例：给出点集$\{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0\}$和权$w_i = 1$，试构造正交函数组$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$.

解：$\varphi_0(x) = 1$，　　$\varphi_1(x) = (x - \alpha_1)\varphi_0(x)$

$$\alpha_1 = \frac{(x\varphi_0(x), \varphi_0(x))}{(\varphi_0(x), \varphi_0(x))} = \frac{(\Phi_{00}, \Phi_0)}{(\Phi_0, \Phi_0)}$$

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Phi_{00} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0.5 \\ 0.75 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{2.5}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$\varphi_2(x) = (x - \alpha_2)\varphi_1(x) - \beta_1 \varphi_0(x)$$

$$\alpha_2 = \frac{(x\varphi_1(x), \varphi_1(x))}{(\varphi_1(x), \varphi_1(x))} = \frac{(\Phi_{11}, \Phi_1)}{(\Phi_1, \Phi_1)}$$

$$\beta_1 = \frac{(\varphi_1(x), \varphi_1(x))}{(\varphi_0(x), \varphi_0(x))} = \frac{(\Phi_1, \Phi_1)}{(\Phi_0, \Phi_0)}$$

$$\Phi_1 = \left(-0.5, \quad -0.25, \quad 0, \quad 0.25, \quad 0.5\right)^T$$

$$\Phi_{11} = \left(0, \quad -0.0625, \quad 0, \quad 0.1875, \quad 0.5\right)^T$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad \beta_1 = \frac{1}{8}, \qquad \varphi_2(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8}$$

4. 工程中常用的五种重要的正交多项式

(1)*Legendre*(勒让德)多项式

$P_n(x)$,在$[-1,1]$上带权$\rho(x)=1$正交的多项式;

(2)第一类*Chebyshve*(契比雪夫)多项式

$T_n(x)$,在$[-1,1]$上带权$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$正交的多项式;

(3)第二类*Chebyshve*(契比雪夫)多项式

$U_n(x)$,在$[-1,1]$上带权$\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$正交的多项式;

(4)*Laguerre*(拉盖尔)多项式

$L_n(x)$,在$[0,+\infty)$上带权$\rho(x)=e^{-x}$正交的多项式;

(5)*Hermite*(埃尔米特)多项式

$H_n(x)$,在$(-\infty,+\infty)$上带权$\rho(x)=e^{-x^2}$正交的多项式;

正交多项式	定　　义	前两项	权函数	区间
$P_n(x) =$ Legendre 多项式	$\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$ $n = 1,2,\cdots$ $P_0(x) = 1$	$P_0(x) = 1$ $P_1(x) = x$	$\rho(x) = 1$	$[-1,+1]$
$T_n(x) =$ 一类 Chebyshev 多项式	$\cos(n \arccos x), \lvert x \rvert \leqslant 1$ 若令 $x = \cos\theta$, 则 $T_n(x) = \cos n\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ $= \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}$	$T_0(x) = 1$ $T_1(x) = x$	$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1,+1]$

正交关系	递推关系	零　　点	首项系数
$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$	$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ $n = 1,2,\cdots$	除 $n = 2k-1$ 为奇数，$P_{2k-1}(x)$ 有一个零点为"0"外，其余零点均为无理数。 $k = 1,2,\cdots$	$\dfrac{2n!}{2^n(n!)^2}$
$\int_{-1}^{1} \dfrac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n = 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \end{cases}$	$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ $n = 1,2,\cdots$	由 $T_n(x) = \cos n\theta = 0$ 有 n 个互异的实零点。 $x_i^{(0)} = \cos\dfrac{2i-1}{2n}\pi$ $i = 1,2,\cdots,n$	2^{n-1}

$U_n(x) =$ 二类 Chebyshev 多项式	$\dfrac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$	$U_0(x) = 1$ $U_1(x) = 2x$	$\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$	$[-1, +1]$
$L_n(x) =$ Laguerre 多项式	$e^x \dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$	$L_0(x) = 1$ $L_1(x) = 1 - x$	$\rho(x) = e^{-x}$	$[0, +\infty)$
$H_n(x) =$ Hermite 多项式	$(-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$	$H_0(x) = 1$ $H_1(x) = 2x$	$\rho(x) = e^{-x^2}$	$(-\infty, +\infty)$

$\int_{-1}^{1} U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \end{cases}$	$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$ $n = 1,2,\cdots$		2^n
$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} L_m(x)L_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ (n!)^2, & m = n \end{cases}$	$L_{n+1}(x) = (1+2n-x)L_n(x) - n^2L_{n-1}(x)$ $n = 1,2,\cdots$		$(-1)^n$
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, m \neq n \\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m = n \end{cases}$	$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ $n = 1,2,\cdots$		2^n