第三节　初等变换阵与特殊矩阵

一、初等变换阵

二、高斯变换阵

三、Householder变换阵

四、几种特殊矩阵

一、初等变换阵

1、初等变换阵的一般定义

定义 设$U,V \in R^n, \alpha \in R$是实常数,

I是n阶单位阵,形如

$$E(U,V;\alpha) = I - \alpha UV^T$$

称为初等变换阵(初等矩阵).

（单位阵和一个秩　的矩阵之差）

2、初等变换矩阵的性质

$$(1)\quad \det(E(U,V;\alpha)) = 1 - \alpha V^T U$$

$$(2)\quad E(U,V;\alpha)E(U,V;\beta) = E(U,V;\alpha+\beta-\alpha\beta V^T U)$$

且 $E^{-1}(U,V;\alpha) = E(U,V;\beta)$，其中 $\beta = \dfrac{-\alpha}{1-(\alpha V^T U)}$

初等方阵都是初等变换阵

二、Gauss变换阵

设向量 $\bar{l}_j=\left(0,\dots0,l_{j+1,j},l_{j+2,j},\dots,l_{n,j}\right)^T\in R^n$

$$e_j=(0,\dots0,\underset{(j)}{1},0,\dots,0)^T\in R^n$$

定义Gauss变换阵为

$$\boldsymbol{L}_j=\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{l}}_j\boldsymbol{e}_j^T=\boldsymbol{I}-\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \vdots\\ \mathbf{0}\\ \boldsymbol{l}_{j+1\ j}\\ \vdots\\ \boldsymbol{l}_{n\ j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

$$L_j = I - \bar{l}_j e_j^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & -l_{j+1\ j} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -l_{n\ j} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -l_{3,2} & 1 & \\ & -l_{4,2} & & 1 \end{bmatrix} = I - \bar{l}_2 e_2^T$$

Gauss变换阵的性质:

1. $L_j^{-1} = I + \bar{l}_j e_j^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & l_{j+1,j} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & l_{n,j} & & & 1 \end{bmatrix}$

证: $L_j L_j^{-1} = (I - \bar{l}_j e_j^T)(I + \bar{l}_j e_j^T)$

$= I - \bar{l}_j e_j^T + \bar{l}_j e_j^T - \bar{l}_j e_j^T \bar{l}_j e_j^T = I = L_j^{-1} L_j$

2. $L_1 L_2 \dots L_{n-1}$

$$= (I - \bar{l}_1 e_1^T)(I - \bar{l}_2 e_2^T)\dots(I - \bar{l}_{n-1} e_{n-1}^T)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -l_{21} & 1 & & & & \\ -l_{31} & -l_{32} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & 1 & \\ -l_{n1} & -l_{n2} & -l_{n3} & \cdots & -l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

3. $L_1^{-1}L_2^{-1}\ldots L_{n-1}^{-1}$

$$= (I+\bar{l}_1 e_1^T)(I+\bar{l}_2 e_2^T)\ldots(I+\bar{l}_{n-1} e_{n-1}^T)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ l_{21} & 1 & & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & 1 & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1L_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\-l_{21}&1&0\\-l_{31}&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-l_{32}&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\-l_{21}&1&0\\-l_{31}&-l_{32}&1\end{bmatrix}$$

$$\neq L_2L_1$$

Gauss变换阵的作用：

1. $\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_j,x_{j+1},\dots,x_n)^T\neq 0$，且$x_j\neq 0$

定义消元乘数 $m_{ij}=x_i/x_j$，$(i=j+1,j+2,\dots,n)$

$$L_j=I-\bar{l}_j e_j^T=\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & -m_{j+1,j} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -m_{n,j} & & & 1\end{bmatrix}$$

其中 $\bar{l}_j=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ m_{j+1,j}\\ \vdots\\ m_{n,j}\end{pmatrix}$

于是有 $L_jx=y=(x_1,x_2,\dots,x_j,0,\dots,0)^T$

例： $x=(x_1,x_2,x_3)^T$， $x_1\neq 0$

$$L_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -m_{2,1} & 1 & 0\\ -m_{3,1} & 0 & 1\end{bmatrix},\quad m_{i1}=x_i/x_1,(i=2,3)$$

$$L_1x=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -x_2/x_1 & 1 & 0\\ -x_3/x_1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

2. 用L_j左乘矩阵A， L_jA相当于对A的第j行以下各行进行初等行变换。

3. 用L_j右乘矩阵A，只改变A的第j列

例：
$$AL_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a_{11}-a_{12}m_{21}-a_{13}m_{31} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{22}m_{21}-a_{23}m_{31} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}-a_{32}m_{21}-a_{33}m_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

例： 设 $x=(1,3,-6,9)^T$，求一Gauss变换阵L_2使

$$L_2x=(1,3,0,0)^T.$$

解：

$$L_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&&1&0\\0&&0&1\end{bmatrix}$$

$m_{i2}=x_i/x_2\ (i=3,4)$

$-m_{32}=-x_3/x_2=2$

$-m_{42}=-x_4/x_2=-3$

$$L_2x=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&1&0\\0&-3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\-6\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\\0\end{bmatrix}$$

三、初等反射阵(Householder变换阵)

定义 设非零向量$W \in R^n, W=(w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$，且满足条件$\|W\|_2=1$，形如

$$H=E(W,W,2)=I-2WW^T$$

的n阶方阵称为初等反射阵，或称为***Householder***变换阵.

$$H=\begin{bmatrix} 1-2w_1^2 & -2w_1w_2 & \cdots & -2w_1w_n \\ -2w_2w_1 & 1-2w_2^2 & \cdots & -2w_2w_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -2w_nw_1 & -2w_nw_2 & \cdots & 1-2w_n^2 \end{bmatrix}$$

例：$W=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^T\in R^3, \|W\|_2=1$

$$H=I-2WW^T=I-2\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

定理：Householder矩阵的性质：

（1）非奇异　　$\det(H) = 1 - 2W^T W =$

（2）对称正交

$$H = H^T$$

$$HH^T = H^2 = (I - 2WW^T)(I - 2WW^T)$$

$$= I - 4WW^T + 4W\boxed{W^T W}W^T = I$$

$$H = \begin{bmatrix} 1-2w_1^2 & -2w_1w_2 & \cdots & -2w_1w_n \\ -2w_2w_1 & 1-2w_2^2 & \cdots & -2w_2w_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -2w_nw_1 & -2w_nw_2 & \cdots & 1-2w_n^2 \end{bmatrix}$$

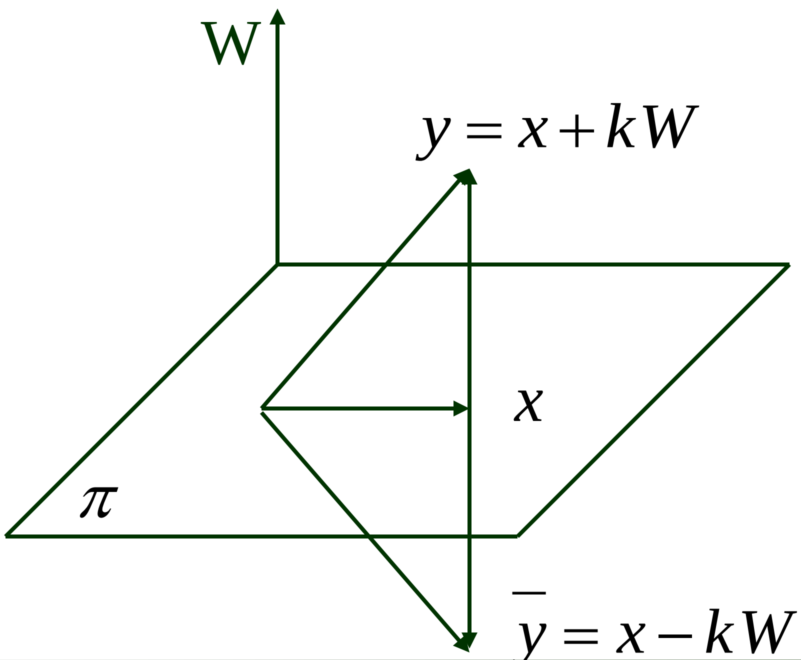
(3) 镜映射－几何意义

平面π 方程 $W^T x = 0 \quad \forall x \in \pi$

若 $x \in \pi$ ，$Hx = (I - 2WW^T)x = x - 2WW^T x$

若 $y \notin \pi$ ，$Hy = H(x + kW) = x + k(I - 2WW^T)W$

$$= x + kW - 2kW\boxed{W^T W} = x - kW = \overline{y}$$

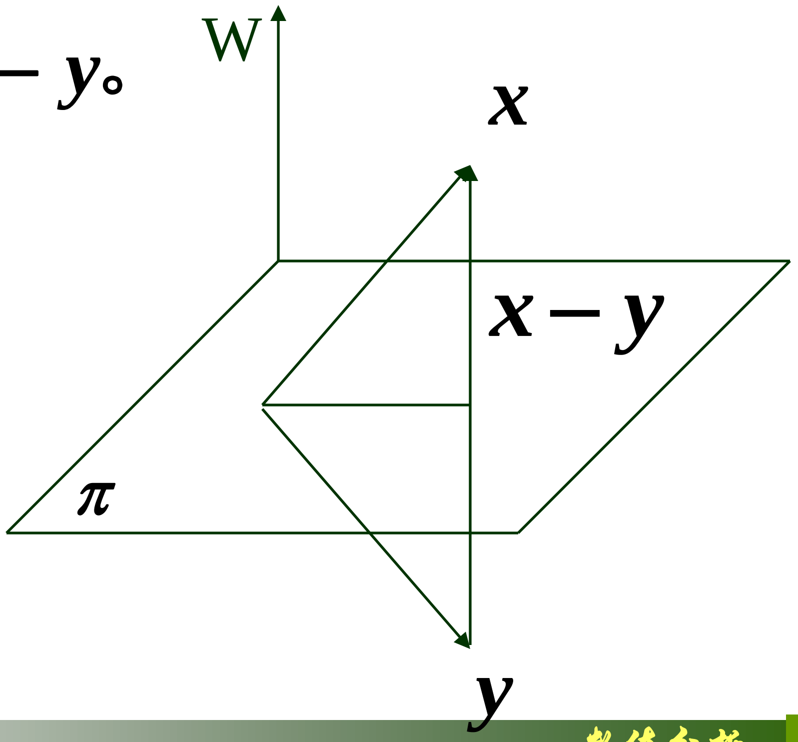


H阵的作用：

定理 设两个不相等的n维向量$x, y \in R^n, x \neq y$，但$\boxed{\|x\|_2 = \|y\|_2}$，则存在householder阵

$$H = I - 2\frac{UU^T}{\|U\|_2^2}$$

使$Hx = y$，其中$U = x - y$。



证：若设$W=\dfrac{U}{\|U\|_2}$，则有$\|W\|_2=1$，因此

$$H=I-2WW^T=I-2\frac{UU^T}{\|U\|_2^2}$$

$$=I-2\frac{(x-y)}{\|x-y\|_2^2}(x^T-y^T)$$

$$Hx=x-2\frac{(x-y)}{\|x-y\|_2^2}(x^T-y^T)x$$

$$=x-2\frac{(x-y)(x^Tx-y^Tx)}{\|x-y\|_2^2}$$

因为$\|x-y\|_2^2=(x^T-y^T)(x-y)=2(x^Tx-y^Tx)$

代入上式后即得到$Hx=y$

$$\because\ x^Tx=y^Ty,\quad x^Ty=y^Tx$$

1. *Householder*变换可以将给定的向量变为一个与任一个$e_i \in R^n (i=1,2,\cdots,n)$同方向的向量。

即：$\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n, x \neq 0,$ 可构造H阵，使

$$Hx = y = -\sigma_i e_i = (0,...,0,-\sigma_i,0,\cdots,0)^T \in R^n$$

其中$\sigma_i = sign(x_i)\|x\|_2 = sign(x_i)(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)^{\frac{1}{2}}$, $\quad sign(x_i) = \begin{cases} 1 & x_i \geq 0 \\ -1 & x_i < 0 \end{cases}$

$$U = x - y = x + \sigma_i e_i = (x_1, \cdots, x_i + \sigma_i, \cdots, x_n)^T,$$

构造初等反射阵

$$H = I - 2WW^T = I - 2\frac{UU^T}{\|U\|^2} = I - \frac{1}{\rho}UU^T$$

有$Hx = y = -\sigma_i e_i$

其中 $\rho = \frac{1}{2}U^T U = \frac{1}{2}(x_1^2 + ... + (x_i + \sigma_i)^2 + \cdots + x_n^2)$

$$= \frac{1}{2}(2x_i\sigma_i + 2\sigma_i^2) = \sigma_i(x_i + \sigma_i)$$

例　已知向量$x=(2,0,2,1)^T$，试构造Householder阵，使$Hx=Ke_3$，其中$e_3=(0,0,1,0)^T\in R^4, K\in R$。

解：$\sigma_3=sign(x_3)\|x\|_2=\sqrt{4+0+4+1}=3$，因$x_3=2>0$，

故取$K=-\sigma_3=-3$　于是$y=-\sigma_3 e_3=Ke_3=(0,0,-3,0)^T$，

$U=x-y=(2,0,5,1)^T$，$\rho=\sigma_3(\sigma_3+x_3)=3(3+2)=15$

$$\rho=\frac{1}{2}U^TU=\sigma_i(x_i+\sigma_i)$$

$$H=I-\frac{1}{\rho}UU^T=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}11 & 0 & -10 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -10 & 0 & -10 & -5\\ -2 & 0 & -5 & 14\end{bmatrix}$$

2. 构造H阵，将向量$x=(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1},\cdots,x_n)^T$的后面$n-k$个分量约化为零$(1\le k<n)$。

即：任给定$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$，构造$H_k\in R^{n\times n}$，使

$$H_k x=(x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},-\sigma_k,0,\cdots,0)^T$$

推导：$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$

$$y=(x_1,\cdots,x_{k-1},-\sigma_k,0,\cdots,0)^T$$

$$\sigma_k=sign(x_k)(\sum_{i=k}^{n}x_i^2)^{\frac{1}{2}},\qquad sign(x_k)=\begin{cases}1 & x_k\ge 0\\ -1 & x_k<0\end{cases}$$

$$U^{(k)}=x-y=(0,\cdots,0,x_k+\sigma_k,x_{k+1},\cdots,x_n)^T$$

$$H_k=I-\frac{1}{\rho_k}U^{(k)}(U^{(k)})^T$$

其中 $\rho_k=\frac{1}{2}U^{(k)T}U^{(k)}=\sigma_k(\sigma_k+x_k)$

特别，取k = 1.

$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n, x\neq 0$, 可构造$H$阵，使

$$Hx=y=-\sigma_1 e_1=(-\sigma_1,0,\cdots,0)^T\in R^n$$

其中$\sigma_1=sign(x_1)\|x\|_2=sign(x_1)(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, $\quad sign(x_1)=\begin{cases}1 & x_1\geq 0\\ -1 & x_1<0\end{cases}$

$$U^{(1)}=x+\sigma_1 e_1=(\sigma_1+x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,$$

可构造初等反射阵

$$H_1=I-2WW^T=I-2\frac{U_1U_1^T}{\|U_1\|^2}=I-\frac{1}{\rho}U_1U_1^T$$

有$H_1x=y=-\sigma_1 e_1$

其中 $\rho_1=\frac{1}{2}U_1^TU_1=\frac{1}{2}((x_1+\sigma_1)^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)$

$$=\frac{1}{2}(2x_1\sigma_1+2\sigma_1{}^2)=\sigma_1(x_1+\sigma_1)$$

H_k阵的另一种形式（可进行降维处理）

H_k阵对向量x的前$k-1$个分量的作用就如同是一个$(k-1)$阶的单位阵的作用。 $\forall x \in R^n$

$$x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x^{(1)} &= (x_1, x_2, \cdots, x_{k-1})^T \in R^{k-1} \\ x^{(2)} &= (x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n)^T \in R^{n-k+1} \end{aligned}$$

令单位阵$I^{(1)} \in R^{(k-1)\times(k-1)}$，$I^{(2)} \in R^{(n-k+1)(n-k+1)}$，对$x^{(2)}$构造一个$(n-k+1)$阶的初等阵$H_k^{(2)}$，使

$$\boxed{H_k^{(2)} x^{(2)} = -\sigma_k e_1^{(k)}}$$

其中$e_1^{(k)} = (1,0,\cdots,0)^T \in R^{n-k+1}$，用前面介绍的方法构造$H_k^{(2)}$。

$$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1},\cdots,x_n)^T\in R^n$$

对$x^{(2)}=(x_k,x_{k+1},\cdots,x_n)^T\in R^{n-k+1}$,构造初等反射阵$H_k^{(2)}$

$$H_k^{(2)}=I^{(2)}-\frac{1}{\rho_k}U^{(k)}(U^{(k)})^T\in R^{(n-k+1)\times(n-k+1)}$$

$$U^{(k)}=(\sigma_k+x_k,x_{k+1},\cdots,x_n)^T\in R^{n-k+1}$$

$$\sigma_k=sign(x_k)(\sum_{i=k}^{n}x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$u_1^{(k)}=\sigma_k+x_k$$

$$\rho_k=\frac{1}{2}(U^{(k)})^TU^{(k)}=\sigma_k(\sigma_k+x_k)=\sigma_ku_1^{(k)}$$

则有$H_k^{(2)}x^{(2)}=-\sigma_ke_1^{(k)}=(-\sigma_k,0,0,\cdots,0)^T$

令$$H_k=\begin{bmatrix} I^{(1)} & 0 \\ 0 & H_k^{(2)} \end{bmatrix}$$

显然H_k也是对称正交阵。

因而 $$H_k x=\begin{bmatrix} I^{(1)} & 0 \\ 0 & H_k^{(2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I^{(1)}x^{(1)} \\ H_k^{(2)}x^{(2)} \end{bmatrix}$$

H_k阵对向量x的前$k-1$个分量的作用就如同是一个$(k-1)$阶的单位阵的作用。 $\forall x\in R^n$

例：已知向量$x=(2,2,1)^T$，试构造初等反射阵使$y=Hx$最后一个元素为零。

解　$k=2$，构造H_2

第一种方法 直接求H_2

$$\sigma_2 = sign(x_2)(x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$U^{(2)} = (0, \sigma_2 + x_2, x_3)^T = (0, 2+\sqrt{5}, 1)^T$$

$$\rho_2 = \sigma_2(x_2+\sigma_2) = 5+2\sqrt{5}$$

于是　$H_2 x = (x_1, -\sigma_2, 0)^T = (2, -\sqrt{5}, 0)^T$

计算 H_2，　$H_2 = I - \dfrac{1}{\rho_2} U^{(2)}(U^{(2)})^T$

$$H_2 = \frac{1}{5+2\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 5+2\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -(4+2\sqrt{5}) & -(2+\sqrt{5}) \\ 0 & -(2+\sqrt{5}) & (4+2\sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

用降维法

对 $x^{(2)}=(2,1)^T$ 构造 $H_2^{(2)}$
$$\begin{cases} \sigma_2 = sign(x_2)(x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \\ U^{(2)} = (\sigma_2 + x_2, x_3) = (2+\sqrt{5},1)^T \\ \rho_2 = \sigma_2 u_1^{(2)} = 5+2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$H_2^{(2)} = I^{(2)} - \frac{1}{\rho_2}(U^{(2)})(U^{(2)})^T = \frac{1}{5+2\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -(4+2\sqrt{5}) & -(2+\sqrt{5}) \\ -(2+\sqrt{5}) & (4+2\sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} I^{(1)} & 0 \\ 0 & H_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ & H_2^{(2)} & \\ 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4+2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} & -\frac{2+\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2+\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} & \frac{4+2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$H_2 x = (x_1, -\sigma_2, 0)^T = (2, -\sqrt{5}, 0)^T$$

矩阵的正交分解

定理　$\forall A \in R^{m\times n}$是列满秩矩阵（$m > n, r(A) = n$），存在分解式$A = QR$，其中$Q \in R^{m\times n}$列法正交矩阵，$R \in R^{n\times n}$非奇异上三角阵。若限定$R$阵对角元符号，则分解式是唯一的。

当$m = n$时，$Q \in R^{n\times n}$正交阵，$R \in R^{n\times n}$非奇异上三角阵。

$$A_{n\times n}=QR=\begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{bmatrix}$$

$$A_{m\times n}=QR=\begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{bmatrix}_{m\times n}\begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$A_{m\times n}=QR=\begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{bmatrix}_{m\times m}\begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

1、用Householder变换对A作QR分解

有两种情况

(1) $\forall A \in R^{n\times n}$非奇异

构造Householder阵 $H_k \in R^{n\times n} (k = 1, 2, \cdots, n-1)$

则$H_{n-1}H_{n-2}\cdots H_2 H_1 A = R$(上三角阵)

$$A = H_1^{-1}H_2^{-1}\cdots H_{n-1}^{-1}R = H_1 H_2 \cdots H_{n-1}R = QR$$

其中

$Q = H_1 H_2 \cdots H_{n-1} \in R^{n\times n}$为正交阵

$R = Q^{-1}A = Q^T A = H_{n-1}H_{n-2}\cdots H_2 H_1 A$

$$H_k^{-1} = H_k^T = H_k, Q^{-1} = Q^T = H_{n-1}H_{n-2}\cdots H_2 H_1$$

$$A = H_1^{-1}H_2^{-1}\cdots H_{n-1}^{-1}R = H_1H_2\cdots H_{n-1}R = QR$$

其中

$$Q = H_1H_2\cdots H_{n-1} \in R^{n\times n}\text{为正交阵}$$

$$R = Q^{-1}A = Q^TA = H_{n-1}H_{n-2}\cdots H_2H_1A$$

$$H_k^{-1} = H_k^T = H_k, Q^{-1} = Q^T = H_{n-1}H_{n-2}\cdots H_2H_1$$

化矩阵$A \in R^{n\times n}$为上三角阵，$A = \begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{bmatrix}$

只须依次将各列对角线下元素化为零

（2）$\forall A\in R^{m\times n}, m>n, r(A)=n$ 列满秩

构造Householder阵 $H_k\in R^{m\times m}(k=1,2,\cdots,n)$

$$\text{则} H_nH_{n-1}\cdots H_2H_1A=R=\begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \\ & O & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{R}\\ O\end{bmatrix}\in R^{m\times n}$$

$\overline{R}\in R^{n\times n}$ 上三角阵

$$A=H_1H_2\cdots H_{n-1}H_nR=QR$$

其中 $Q=H_1H_2\cdots H_{n-1}H_n\in R^{m\times m}$ 为正交阵

$$R=Q^TA=H_nH_{n-1}\cdots H_2H_1A\in R^{m\times n}$$

Q、Q^T是m阶正交矩阵，R是长方形上三角阵

$A \in R^{n\times n}$， Schmidt 正交化方法和Householder方法结果一样。

$A \in R^{m\times n}\ (m > n, r(A) = n)$ Sm 法和 H法结果不一样。

Sm法 $$\underset{m\times n}{\begin{bmatrix} \quad & & \\ & A & \\ & & \quad \end{bmatrix}} = \underset{m\times n}{\begin{bmatrix} \quad & & \\ & Q & \\ & & \quad \end{bmatrix}} \underset{n\times n}{\begin{bmatrix} \quad & & \\ & R & \\ & & \quad \end{bmatrix}}$$

H法 $$\underset{m\times n}{\begin{bmatrix} \quad & & \\ & A & \\ & & \quad \end{bmatrix}} = \underset{m\times m}{\begin{bmatrix} \quad & & \\ & Q & \\ & & \quad \end{bmatrix}} \underset{m\times n}{\begin{bmatrix} \bar{R} \\ \\ O \end{bmatrix}}, \quad \bar{R} \in R^{n\times n}$$

Matlab调用格式:

[q,r]=qr(a) , [q,r]=qr(a,0) %紧凑格式，经济大小分解

例：用Householder方法求矩阵A的正交分解，

即A=QR，其中

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\\ 2 & -10/11\end{bmatrix}$$

法一：$x=(-2,1,2)^T, y=(3,0,0)^T, u=x-y=(-5,1,2)^T$

$$H=I-2\frac{uu^T}{u^Tu}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{15}\begin{bmatrix}25 & -5 & -10\\ -5 & 1 & 2\\ -10 & 2 & 4\end{bmatrix}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-10 & 5 & 10\\ 5 & 14 & -2\\ 10 & -2 & 11\end{bmatrix}$$

$$HA=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}33 & -14\\ 0 & 5\\ 0 & 0\end{bmatrix}=R \qquad Q=H=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-10 & 5 & 10\\ 5 & 14 & -2\\ 10 & -2 & 11\end{bmatrix}$$

法二：$x_1=(-2,1,2)^T, y_1=(-3,0,0)^T, u_1=x_1-y_1=(1,1,2)^T$

$$H_1=I-2\frac{u_1u_1^T}{u_1^Tu_1}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&-2\\-1&2&-2\\-2&-2&-1\end{bmatrix}$$

$$H_1A=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-33&14\\0&3\\0&-4\end{bmatrix}=A_2$$

$x_2=(14/11,3/11,-4/11)^T, y_2=(14/11,-5/11,0)^T, u_2=x_2-y_2=(0,8/11,-4/11)^T$

$$H_2=I-2\frac{u_2u_2^T}{u_2^Tu_2}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&8&-4\\0&-4&2\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5&0&0\\0&-3&4\\0&4&3\end{bmatrix}$$

$$Q=H_1H_2=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}10&-5&-10\\-5&-14&2\\-10&2&-11\end{bmatrix}, R=Q^TA=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-33&14\\0&-5\\0&0\end{bmatrix}$$

四、几种特殊矩阵

(1)三角阵$A \in R^{n\times n}$

当$i > j$时,$a_{ij} = 0$, A为上三角阵;

当$i < j$时,$a_{ij} = 0$, A为下三角阵.

若A为上(下)三角阵;则A^{-1}是上(下)三角阵(A可逆),则A^T是下(上)三角阵.

若B是与A同阶的上(下)三角阵;则AB也是上(下)三角阵。

(2)上*Hessenberg*(海森伯格)阵$A \in R^{n\times n}$

$$\text{当} i > j+1 \text{时}, a_{ij} = 0,\quad A = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & & & * \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & * \\ & & & * & * \end{pmatrix}$$

(3)三对角阵$A \in R^{n\times n}$

$$\text{当} \begin{cases} i > j+1 \\ j > i+1 \end{cases} \text{时}, a_{ij} = 0,\quad A = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ * & * & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & * \\ & & & * & * \end{pmatrix}$$

(4)严格对角占优阵$A \in R^{n\times n}$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

例 $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

严格对角占优阵是非奇异矩阵

对角占优阵$A \in R^{n\times n}$：

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

例 $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$