第九章 常微分方程初边值问题的数值解法

第一节 求解初值问题数值方法的基本原理

一、初值问题的数值解

考虑一阶常微分方程的初值问题 /* Initial-Value Problem */:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \quad x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad (9\text{–}1)$$

只要 $f(x, y)$ 在$[a, b] \times R^1$ 上连续，且关于 y 满足 ***Lipschitz* 条件**，即存在与 x, y 无关的常 … $|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|$ 对任意定义在 $[a, b]$ 上的 … 都成立，则上述IVP**存在唯一解。**

数值解

要计算出解函数 $y(x)$ 在一系列节点 $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ 处的近似值 $y_i \approx y(x_i) \quad (i = 1, \ldots, n)$

节点间距 $h_i = x_{i+1} - x_i \ (i = 0, \ldots, n-1)$ 为步长，通常采用**等距节点**，即取 $h_i = h$ (常数)。

求解(9-1)最基本的方法是**单步法**

单步法:从初值 y_0 开始,依次求出 $y_1, y_2, \cdots$,后一步的值 y_{n+1} 只依靠前一步的 y_n ， 是一种逐点求解的离散化方法。

典型的单步法是**Euler(欧拉)**方法,其计算格式是:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

例:求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1 & x \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

取步长$h = 0.1$,计算到$x = 0.5$

解: $f(x, y) = -y + x + 1$,由*Euler*公式

$$y_{n+1} = y_n + h(-y_n + x_n + 1)$$

代入$h = 0.1$,有$y_{n+1} = 0.9y_n + 0.1(x_n + 1)$,依次算得果如下:

$n=0$	1	2	3	4	5
$x_n = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y_n = 1.0$	1.0	1.01	1.029	1.0561	1.09049

直接解微分方程可得精确解:$y = f(x) = x + e^{-x}$,故$x_5 = 0.5$,

$y(0.5) = 1.106531$, $\quad |y(x_5) - y_5| = 1.604 \times 10^{-2}$

由此可见,Euler公式的近似值接近方程的精确值.

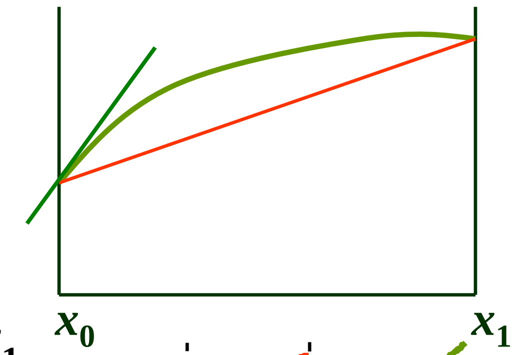
二、构造初值问题数值方法的基本途径

以Euler法为例说明构造IVP问题数值方法的三种基本途径

1. 数值微……商

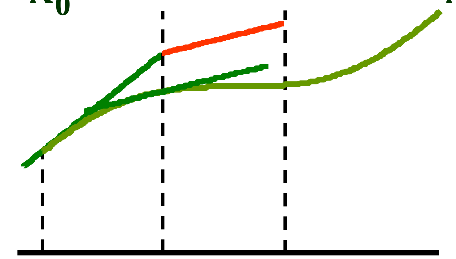
亦称为欧拉折线法

向前差商近似导数 $y'(x_0)\approx \dfrac{y(x_1)-y(x_0)}{h}$



$$y(x_1)\approx y(x_0)+hy'(x_0)=y_0+h\,f(x_0,y_0)\ \overset{\text{记为}}{=\!=}\ y_1$$

$$y_{n+1}=y_n+h\,f(x_n,y_n)\quad (n=0,1,2,\ldots)$$



2. Taylor展开法

将$y(x_n+h)$在点x_n作$Taylor$展开

$$y(x_n+h)=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(\xi)$$

忽略高阶项,取近似值可得到Euler公式

$$y_{n+1}=y_n+h\,f(x_n,y_n)\quad (n=0,1,2,\ldots)$$

3. 数值积分法区间

将方程$y' = f(x,y)$在区间$[x_n, x_{n+1}]$上积分

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y' dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y) dx \quad (n = 0,1,\cdots)$$

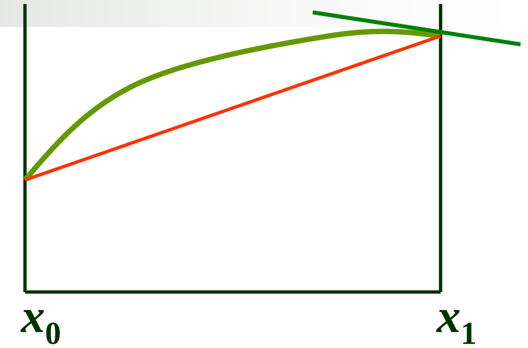
用y_{n+1}, y_n代替$y(x_{n+1}), y(x_n)$,对右端积分采用取左端点的矩形公式

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y) dx \approx h f(x_n, y_n)$$

则有

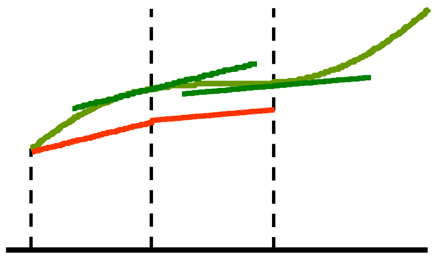
$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

三、Euler法的改进及梯形公式



隐式欧拉法 /* implicit Euler method */

向后差商近似导数 ➡ $y'(x_1) \approx \dfrac{y(x_1) - y(x_0)}{h}$



➡ $y(x_1) \approx y_0 + h\, f(x_1, y(x_1))$

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

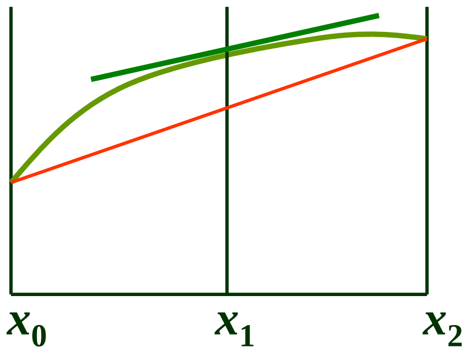
由于未知数 y_{i+1} 同时出现在等式的两边，不能直接得到，故称为隐式 /* implicit */ 欧拉公式，而前者称为显式 /* explicit */ 欧拉公式。

一般先用显式计算一个初值，再迭代求解。

梯形公式 /* trapezoid formula */ — 显、隐式两种算法的平均

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad (n = 0, 1, 2 \cdots)$$

中点欧拉公式 /* midpoint formula */



中心差商近似导数 ⇨ $y'(x_1) \approx \dfrac{y(x_2) - y(x_0)}{2h}$

⇨ $y(x_2) \approx y(x_0) + 2h\, f(x_1, y(x_1))$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2h\, f(x_n, y_n) \quad n = 1, 2, \cdots$$

改进欧拉法 /* modified Euler's method */

Step 1: 先用显式欧拉公式作预测，算出 $\bar{y}_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$

Step 2: 再将 $\bar{y}_{n+1}$ 代入隐式梯形公式的右边作校正，得到

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})]$$

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})\right) \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big[f(x_n, y_n) + f\big(x_{n+1}, \underbrace{y_n + h\, f(x_n, y_n)}_{y_{n+1}}\big)\Big] \quad (n = 0, 1, 2\cdots)$$

注： 此法亦称为预测-校正法 /* predictor-corrector method */。一方面它有较高精度，同时可以看到它是个单步递推格式，比隐式公式的迭代求解过程简单。后面将看到，它的稳定性高于显式欧拉法。

例9-2 用改进的Euler方法解初值问题

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

取h=0.1，计算到x=0.5。

解： 利用

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))$$

可得

$$y_{n+1} = y_n + h\left((1 - \frac{h}{2})(x_n - y_n) + 1\right)$$

以 $h = 0.1$ 代入得 $y_{n+1} = 0.905y_n + 0.095x_n + 0.1$

改进的Euler方法

x_n	y_n	$y(x_n)$	$\lvert y(x_n)-y_n \rvert$
0	1.000000	1.000000	
0.1	1.004762	1.004837	1.6×10^{-4}
0.2	1.018594	1.018731	2.9×10^{-4}
0.3	1.040633	1.040818	4.0×10^{-4}
0.4	1.070096	1.070320	4.8×10^{-4}
0.5	1.106278	1.106531	5.5×10^{-4}

Euler法的误差 $\lvert \boldsymbol{y(x_5)-y_5} \rvert = \mathbf{1.604\times10^{-2}}$

四、单步法的误差分析和稳定性

1. 整体截断误差和局部截断误差

定义 整体截断误差:数值解 y_n 和精确解 $y(x_n)$ 之差

$$e_n = y(x_n) - y_n$$

整体截断误差除与 x_n 步计算有关外,还与 $x_{n-1},\cdots,x_1$ 的计算有关

定义 局部截断误差:设 $y(x)$ 是初值问题(9.1)的解,用单步法计算到第n步没有误差,即 $y_n = y(x_n)$,则

$$E_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

称为单步法在点 x_{n+1} 处的局部截断误差。

定义 局部截断误差:设 $y(x)$是初值问题(10.1)的解,用单步法计算到第n步没有误差,即 $y_n = y(x_n)$,则

$$E_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

称为单步法在点 x_{n+1} 处的局部截断误差。

定义 若某算法的局部截断误差为$E_{n+1} = O(h^{p+1})$，则称该算法有p 阶精度。

欧拉法的局部截断误差,由Taylor展开:

$$E_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = [\cancel{y(x_n)} + h\cancel{y'(x_n)} + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)] - [\cancel{y_n} + hf\cancel{(x_n, y_n)}]$$

$$= \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$$

欧拉法具有 1 阶精度。

类似可以证明改进的Euler方法具有2阶精度

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))$$

上式在(x_n,y_n)

$$f(a,b)=f(x,y)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(a-x)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(b-y)+\cdots$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\{f(x_n,y_n)+[f(x_n,y_n)+hf_x'(x_n,y_n)$$

$$+hf_y'(x_n,y_n)f(x_n,y_n)]\}+O(h^3)$$

$$=y_n+f(x_n,y_n)h+[f_x'(x_n,y_n)+f_y'(x_n,y_n)f(x_n,y_n)]\frac{h^2}{2}+O(h^3)$$

$$E_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$$

$$=[y(x_n)+hy'(x_n)+\tfrac{h^2}{2}y''(x_n)+O(h^3)]$$

$$-[y_n+f(x_n,y_n)h+[f_x'(x_n,y_n)+f_y'(x_n,y_n)f(x_n,y_n)]\frac{h^2}{2}+O(h^3)]$$

$$E_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$$

$$=[\cancel{y(x_n)}+\cancel{hy'(x_n)}+\cancel{\frac{h^2}{2}y''(x_n)}+O(h^3)]$$

$$-[\cancel{y_n}+\cancel{f(x_n,y_n)h}+\cancel{[f_x'(x_n,y_n)+f_y'(x_n,y_n)f(x_n,y_n)]\frac{h^2}{2}}+O(h^3)]$$

$$=O(h^3)$$

改进的Euler方法具有2阶精度.

例： 对于常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

证明隐式欧拉公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \qquad n = 0,1,2,\ldots$

是一阶方法。

解： $E_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$

$$= [y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)] - [y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

$$f(x_{n+1}, y_{n+1}) \approx y'(x_{n+1}) = y'(x_n) + hy''(x_n) + O(h^2)$$

$E_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$

$$= [\cancel{y(x_n)} + \cancel{hy'(x_n)} + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)] - [\cancel{y_n} + \cancel{h(y'(x_n)} + hy''(x_n) + O(h^2))]$$

$= O(h^2)$ 隐式欧拉公式是一阶方法

2. 收敛性

定义 若某算法对于任意固定的 $x = x_0 + n\,h$，当 $h \to 0$（同时 $n \to \infty$）时有 $y_n \to y(x_n)$，则称该算法是收敛的。

例：就初值问题 $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ 考察欧拉显式格式的收敛性。

解：该问题的精确解为 $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$

欧拉公式为 $y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1+\lambda h) y_n$

$$\lim_{h\to 0}(1+\lambda h)^{1/\lambda h} = e$$

对任意固定的 $x = x_n = nh$，有

$$y_n = y_0(1+\lambda h)^{x_n/h} = y_0[(1+\lambda h)^{1/\lambda h}]^{\lambda x_n}$$

$$\to y_0 e^{\lambda x_n} = y(x_n)$$

整体截断误差: 数值解 y_n 和精确解 $y(x_n)$ 之差

$$e_n = y(x_n) - y_n$$

整体截断误差除与 x_n 步计算有关外,还与 $x_{n-1},\cdots,x_1$ 的计算有关

局部截断误差: 设 $y(x)$ 是初值问题(10.1)的解,用单步法计算到第n步没有误差,即 $y_n = y(x_n)$,则

$$E_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

分析计算中的某一步,显式单步法的一般形式可写为:

$$y_{n+1} = y_n + hQ(x_n, y_n, h)$$

其中 $Q(x_n, y_n, h)$ 称为增量函数。如对于Euler公式其增量函数 $Q(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n) = y'(x_n)$

关于整体截断误差与局部截断误差的关系,有如下定理

定理9-1: 对IVP(9-1)式的单步法 $y_{n+1}=y_n+hQ(x_n,y_n,h)$

若局部截断误差为 $O(h^{p+1})$ $(p\geq 1)$,且函数 $Q(x_n,y_n,h)$

对y满足Lipschitz条件,即存在L>0,使得

$$|Q(x,y,h)-Q(x,\bar{y},h)|\leq L|y-\bar{y}|$$

对一切 y和$\bar{y}$ 成立,则该方法收敛,且有 $e_n=O(h^p)$

由该定理可知整体截断误差总比局部截断误差低一阶

对Eular方法，$Q(x,y,h)=f(x,y)$,当$f(x,y)$关于y满足Lipschitz条件时是收敛的。

对Eular方法，$Q(x,y,h)=f(x,y)$,当$f(x,y)$关于y满足Lipschitz条件时是收敛的。

对改进的Euler法,

$$Q(x,y,h)=\frac{1}{2}\Big(f(x,y)+f(x+h,y+hf(x,y))\Big)$$

于是有 $$\left|Q(x,y,h)-Q(x,\bar{y},h)\right|\le\frac{1}{2}\left|f(x,y)-f(x,\bar{y})\right|+$$

$$\frac{1}{2}\left|f(x+h,y+hf(x,y))-f(x+h,\bar{y}+hf(x,\bar{y}))\right|$$

设L为f关于y的*Lipschitz*常数,则由上式可得

$$\left|Q(x,y,h)-Q(x,\bar{y},h)\right|\le L(1+\frac{h}{2}L)\left|y-\bar{y}\right|$$

限定h即可知Q满足*Lipschitz*条件,故而改进的*Euler*法收敛。

3. 稳定性

例： 考察初值问题 $\begin{cases} y'(x) = -30y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 在区间[0, 0.5]上的解。分别用欧拉显、隐式格式和改进的欧拉格式计算数值解。

节点 x_i	欧拉显式	欧拉隐式	改进欧拉法	精确解 $y = e^{-30x}$
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	–2.0000	2.5000×10^{-1}	2.5000	4.9787×10^{-2}
0.2	4.0000	6.2500×10^{-2}	6.2500	2.4788×10^{-3}
0.3	–8.0000	1.5625×10^{-2}	1.5626×10^{1}	1.2341×10^{-4}
0.4	1.6000×10^{1}	3.9063×10^{-3}	3.9063×10^{1}	6.1442×10^{-6}
0.5	-3.2000×10^{1}	9.7656×10^{-4}	9.7656×10^{1}	3.0590×10^{-7}

设在计算y_n时有误差ρ_n，

即$\rho_n=\bar{y}_n-y_n$，则$\rho_{n+1}=\bar{y}_{n+1}-y_{n+1}$

如果有

$$|\rho_{n+1}|/|\rho_n|<1,$$

说明计算中的舍入误差可以得到控制，

数值方法是稳定的，否则是不稳定的。

定义 若某算法在计算过程中任一步产生的误差在以后的计算中都逐步衰减，则称该算法是绝对稳定的 /*absolutely stable */。

常数，可以是复数

一般分析时为简单起见，只考虑试验方程 /* test equation */

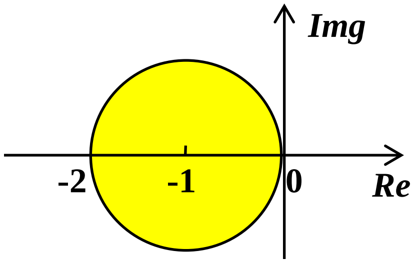
$$y' = \lambda y$$

当步长取为 h 时，将某算法应用于上式，并假设只在初值产生误差 $\rho_0 = y_0 - \bar{y}_0$，则若此误差以后逐步衰减，就称该算法相对于 $\bar{h} = \lambda h$ 绝对稳定，$\bar{h}$ 的全体构成绝对稳定区域。我们称算法A 比算法B 稳定，就是指 A 的绝对稳定区域比 B 的大。

例：考察显式欧拉法 $y_{n+1}=y_n+h\lambda y_n=(1+\bar{h})^{n+1}y_0$

$\varepsilon_0=y_0-\bar{y}_0 \Rightarrow \bar{y}_{n+1}=(1+\bar{h})^{n+1}\bar{y}_0$

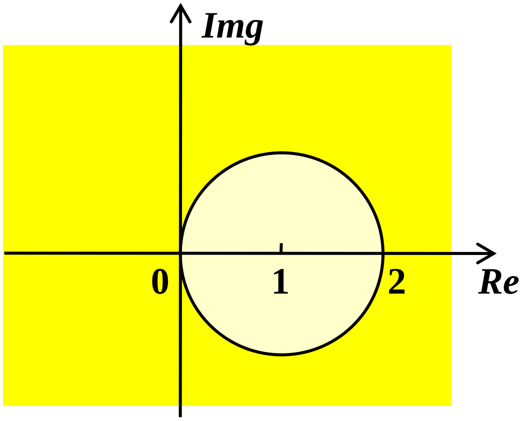
$\Rightarrow \varepsilon_{n+1}=y_{n+1}-\bar{y}_{n+1}=(1+\bar{h})^{n+1}\varepsilon_0$



由此可见，要保证初始误差ε_0以后逐步衰减，$\bar{h}=\lambda h$必须满足：$|1+\bar{h}|<1$

例：考察隐式欧拉法 $y_{n+1}=y_n+h\lambda y_{n+1}$

$y_{n+1}=\left(\dfrac{1}{1-\bar{h}}\right)y_n \Rightarrow \varepsilon_{n+1}=\left(\dfrac{1}{1-\bar{h}}\right)^{n+1}\varepsilon_0$



可见绝对稳定区域为：$|1-\bar{h}|>1$

注：一般来说，隐式欧拉法的绝对稳定性比同阶的显式法的好。

例：考察梯形的稳定性 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(\lambda y_n + \lambda y_{n+1})$

$$y_{n+1} = \frac{1+\frac{\lambda h}{2}}{1-\frac{\lambda h}{2}} y_n$$

可见绝对稳定条件是：

$$\left|\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\right| = \left|\frac{1+\frac{\lambda h}{2}}{1-\frac{\lambda h}{2}}\right| < 1$$

第二节　高精度的单步法

在高精度的单步法中,应用最广泛的是Runge-Kutta (龙格-库塔)方法

一、Runge-Kutta法的基本思想（1）

若用p阶*Taylor*多项式近似函数$y(x_{n+1})$有：

$$y_{n+1} \approx y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \cdots + \frac{h^p}{P!} y^{(p)}(x_n)$$

其中$y'(x) = f(x,y),\ y''(x) = f_x'(x,y) + f_y'(x,y) f(x,y), \cdots\cdots$。

但由于公式中各阶偏导数计算复杂，不实用。

Runge-Kutta法的基本思想（2）

如果将*Euler*公式与改进*Euler*公式写成下列形式：

*Euler*公式 $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_1 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \end{cases}$

改进*Euler*公式 $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1) \end{cases}$

以上两组公式都使用函数$f(x,y)$在某些点上的值的线性组合来计算$y(x_{n+1})$的近似值y_{n+1}。

Euler公式：每步计算一次$f(x,y)$的值，为一阶方法。

改进Euler公式：需计算两次$f(x,y)$的值，为二阶方法。

Runge-Kutta法的基本思想（3）

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{p} c_i K_i \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_i = f(x_n + a_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j) \quad (i = 2, 3\cdots, p) \end{cases}$$

于是可考虑用函数$f(x,y)$在若干点上的函数值的线性组合来构造近似公式，构造是要求近似公式在(x_n, y_n)处的$Taylor$展开式与解$y(x)$在x_n处的$Taylor$展开式的前面几项重合，从而使近似公式达到所需要的阶数。即避免求偏导，又提高了方法的精度，此为RK方法的基本思想。

二、二阶龙格—库塔方法

一般地，RK方法设近似公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{p} c_i K_i \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_i = f(x_n + a_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j) \quad (i = 2,3\cdots, p) \end{cases}$$

其中a_i，b_{ij}，c_i都是参数，确定它们的原则是使近似公式在(x_n, y_n)处的$Taylor$展开式与$y(x)$在x_n处的$Taylor$展开式的前面项尽可能多地重合。

当p = 2时，近似公式为 $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(c_1K_1 + c_2K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + a_2h, y_n + hb_{21}K_1) \end{cases}$

上式在(x_n, y_n)处的*Taylor*展开式为

$$y_{n+1} = y_n + h[c_1 f(x_n, y_n) + c_2 f(x_n + a_2h, y_n + hb_{21} f(x_n, y_n))]$$

$$= y_n + h\{c_1 f(x_n, y_n) + c_2[f(x_n, y_n) + a_2hf_x'(x_n, y_n)$$

$$+ hb_{21} f_y'(x_n, y_n) f(x_n, y_n)]\} + O(h^3)$$

$y(x_{n+1})$在x_n处的*Taylor*展开式为

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3)$$

$$= y_n + f(x_n, y_n)h$$

$$+ \frac{h^2}{2}[f_x'(x_n, y_n) + f_y'(x_n, y_n) f(x_n, y_n)] + O(h^3)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c_1+c_2=1\\c_2a_2=1/2\\c_2b_{21}=1/2\end{cases}$$

有无穷多组解，每一组解得一近似公式，局部截断误差均为$O(h^3)$，这些方法统称二阶方法。

取$c_1=c_2=\dfrac{1}{2}, a_2=b_{21}=1$，此为改进$Euler$公式。

近似公式为
$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+h(K_1+K_2)/2\\K_1=f(x_n,y_n)\\K_2=f(x_n+h,y_n+hK_1)\end{cases}$$

取$c_1=0, c_2=1, a_2=b_{21}=\dfrac{1}{2}$，此为常用的二阶公式，

称为中点公式。
$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+hK_2\\K_1=f(x_n,y_n)\\K_2=f(x_n+h/2,y_n+hK_1/2)\end{cases}$$

三、三阶龙格－库塔方法

类似地，对$p=3$，即三个点，通过更复杂的计算，可导出三阶*RK*公式。

常用的三阶*RK*公式为：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+4K_2+K_3) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1) \\ K_3=f(x_n+h,y_n-hK_1+2hK_2) \end{cases}$$

四、四阶龙格—库塔方法

对$p=4$，即四个点，可导出四阶RK公式。

常用的四阶RK公式为：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}K_1) \\ K_3=f(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}K_2) \\ K_4=f(x_n+h,y_n+hK_3) \end{cases}$$

例： 设取步长h=0.2,从x=0直到x=1用四阶龙格—库塔方法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} \quad (0 < x < 1); \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

解： 由经典的四阶龙格—库塔公式得

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4); \\ K_1 = y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}; \\ K_2 = y_n + \dfrac{h}{2}K_1 - \dfrac{2x_n + h}{y_n + \dfrac{h}{2}K_1}; \\ K_3 = y_n + \dfrac{h}{2}K_2 - \dfrac{2x_n + h}{y_n + \dfrac{h}{2}K_2}; \\ K_4 = y_n + hK_3 - \dfrac{2(x_n + h)}{y_n + hK_3}. \end{cases}$$

两点说明:

1）当p=1, 2, 3, 4时，**RK**公式的最高阶数恰好是p, 当p>4时，**RK**公式的最高阶数不是p，如p=5时仍为**4**，p=**6**时**RK**公式的最高阶数为**5**。

2）**RK**方法的导出基于Taylor展开，故要求所求问题的解具有较高的光滑度。

当解充分光滑时，四阶**RK**方法确实优于改进Euler法。对一般实际问题，四阶**RK**方法一般可达到精度要求。

如果解的光滑性差，则用四阶**RK**方法解的效果不如改进Euler法。

R-K方法的绝对稳定区域

将 $y' = f(x,y) = \lambda y$ 代入 $R-K$ 公式:

$$K_1 = h\lambda y_n,\quad K_2 = h\lambda\left(y_n + \frac{1}{2}K_1\right) = y_n\left(h\lambda + \frac{1}{2}(\lambda h)^2\right)$$

$$K_3 = h\lambda(y_n + \frac{1}{2}K_2) = y_n\left(h\lambda + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{4}(\lambda h)^3\right)$$

$$K_4 = h\lambda(y_n + K_3) = y_n\left(h\lambda + (\lambda h)^2 + \frac{1}{2}(\lambda h)^3 + \frac{1}{4}(\lambda h)^4\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$= y_n\left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3 + \frac{1}{24}(\lambda h)^4\right)$$

则 $$\rho_{n+1}=\rho_n\left(1+h\lambda+\frac{1}{2}(\lambda h)^2+\frac{1}{6}(\lambda h)^3+\frac{1}{24}(\lambda h)^4\right)$$

绝对稳定区域：

$$\left|1+h\lambda+\frac{1}{2}(\lambda h)^2+\frac{1}{6}(\lambda h)^3+\frac{1}{24}(\lambda h)^4\right|\le 1$$