线性方程组的数值解法

直接法	• 低阶稠密矩阵
迭代法	• 大型稀疏矩阵
极小化法	• 优化、非线性及病态问题

第五节 大型稀疏方程组的迭代法

迭代法适用于求解大型稀疏的线性方程组，其基本思想是通过构造迭代格式产生迭代序列，由迭代序列来逼近原方程组的解，因此，要解决的基本问题是：1. 如何构造迭代格式　2.迭代序列是否收敛

一．基本迭代法及其收敛性

二．两种基本迭代法

三．超松弛迭代法

四．应用实例

一．基本迭代法及收敛性

设有线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

用矩阵表示： $Ax=b$

A 为系数矩阵，非奇异且设$a_{ii}\neq 0$；b为右端，x为解向量

$A=M+N$ M的逆好求。$Ax=b \Longleftrightarrow (M+N)x=b$

$\Longleftrightarrow Mx=-Nx+b \Longleftrightarrow x=-M^{-1}Nx+M^{-1}b$

$$Ax=b \Leftrightarrow x=Bx+g, \qquad B=-M^{-1}N, g=M^{-1}b$$

$$Ax=b \Leftrightarrow x=Bx+g, \qquad B=-M^{-1}N, g=M^{-1}b$$

基本迭代法的迭代格式

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

其中$B\in R^{n\times n}$称为迭代矩阵，g是已知的n维向量，

给定$x^{(0)}$,由迭代格式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$

即可产生迭代序列$\{x^{(k)}\}$。

当 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}=x$

对 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$ 取极限

得 $x=Bx+g \Leftrightarrow Ax=b$

注：分解A是一个重要问题

例： 对线性方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{bmatrix}8 & -3 & 2\\ 4 & 11 & -1\\ 6 & 3 & 12\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}20\\ 33\\ 36\end{bmatrix}$

解： 将 A 分解为 $A=M+N$, 其中 $M=\begin{bmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 11 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix}0 & -3 & 2\\ 4 & 0 & -1\\ 6 & 3 & 0\end{bmatrix}$

$$Ax=b \Leftrightarrow x=-M^{-1}Nx+M^{-1}b=M^{-1}(b-Nx)$$

$$=\begin{bmatrix}1/8 & 0 & 0\\ 0 & 1/11 & 0\\ 0 & 0 & 1/12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20+3x_2-2x_3\\ 33-4x_1+x_3\\ 36-6x_1-3x_2\end{bmatrix} \qquad \begin{cases}x_1=(20+3x_2-2x_3)/8\\ x_2=(33-4x_1+x_3)/11\\ x_3=(36-6x_1-3x_2)/12\end{cases}$$

迭代格式的分量形式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)})/8 \\ x_2^{(k+1)} = (33 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k)})/11 \\ x_3^{(k+1)} = (36 - 6x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)})/12 \qquad k = 0,1,2,.... \end{cases}$$

迭代到第10次, 得到

$$x^{(10)} = (3.000032, 1.999838, 0.9998813)^T$$

已知精确解为 $x = (3,2,1)^T$

$$\boxed{B = -M^{-1}N,\ g = M^{-1}b}$$

迭代格式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$

迭代矩阵B=
$$\begin{bmatrix} 0 & 3/8 & -2/8 \\ -4/11 & 0 & 1/11 \\ -6/12 & -3/12 & 0 \end{bmatrix},\quad g = \begin{bmatrix} 20/8 \\ 33/11 \\ 36/12 \end{bmatrix}$$

定义 基本迭代法$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$产生的迭代序列$\{x^{(k)}\}$，如果对任取初始向量$x^{(0)}$都有$\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x$，则称此迭代法是收敛的，否则是发散的。

在R^n中，点列的收敛等价于每个分量的收敛。

矩阵同理

收敛性分析

x是精确解 $\quad Ax=b \Leftrightarrow x=Bx+g$

迭代格式为 $\quad x^{(k)}=Bx^{(k-1)}+g$

误差向量 $\quad \varepsilon^{(k)}=x-x^{(k)}=B(x-x^{(k-1)})=B\varepsilon^{(k-1)}$

$$=\cdots=B^k\varepsilon^{(0)}$$

其中$\varepsilon^{(0)}=x-x^{(0)}$是初始误差向量，是一个确定的值

由此，得到结论:对任意初值$x^{(0)}$,

$$\text{迭代序列}\left\{x^{(k)}\right\}\text{收敛} \Leftrightarrow B^k\to O \qquad (k\to\infty)$$

迭代格式为 $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g$

由此，得到结论:对任意初值$x^{(0)}$,

迭代序列$\{x^{(k)}\}$收敛 $\Leftrightarrow B^k \to O \quad (k \to \infty)$

定理1(迭代法收敛的充要条件)

迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$对任意初始向量$x^{(0)}$都收敛的充分必要条件是$\rho(B) < 1$.

谱半径$\rho(B) = \max\limits_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$

例： 用迭代法求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ 3x_1 - x_2 = -5 \end{cases}$$

解: 构造迭代格式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$,

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 5 + 2x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 3x_1^{(k)} - 5 \end{cases}, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

迭代矩阵 $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $g = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$

由 $\det(\lambda I - B) = \lambda^2 - 6 = 0$, 得 $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}$,

$\rho(B) = 2.449 > 1$.由定理1迭代格式不收敛.

引理（特征值上界定理）

设$A\in R^{n\times n}$,对于$\|\cdot\|_p,(p=1,2,\infty)$有

$$\rho(A)\le\|A\|_p$$

定理2 (迭代法收敛的充分条件)

如果迭代格式$x^{(k)}=Bx^{(k-1)}+g$的迭代矩阵B的某一种范数$\|B\|<1$,则此迭代格式收敛.

定理3 如果迭代格式$x^{(k)}=Bx^{(k-1)}+g$的迭代矩阵B满足$\|B\|<1$，则有如下的误差估计式.

$$\|x^{(k)}-x\|\le\frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$$

$$\|x^{(k)}-x\|\le\frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$$

注：(1)$\|B\|$越小，收敛越快.

(2)$\|B\|$接近1时，收敛慢.

估计迭代次数

由误差估计式$\left\|x^{(k)}-x\right\| \le \dfrac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$估计迭代次数

$$\left.\begin{aligned}
&\left\|x^{(k)}-x\right\| \le \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\| \le \varepsilon \\
&\Rightarrow \ln\|B\|^k = k\ln\|B\| \le \ln\left(\varepsilon\frac{1-\|B\|}{\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|}\right) \\
&\qquad \because \|B\|<1, \therefore \ln\|B\|<0
\end{aligned}\right\}$$

渐近收敛速度

定义 $R = -\ln(\rho(B))$为迭代格式的渐近收敛速度。

当$\rho(B)<1$时，$\rho(B)$越小，则R值越大。

迭代终止标准

(1) 绝对误差标准。给出容许误差界ε

当$\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_p \le \varepsilon$ 时，$p = 1, 2, \infty$,终止迭代，

解取为$x \approx x^{(k)}$.

常取$\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_\infty \le \varepsilon \Leftrightarrow \max_i | x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} | \le \varepsilon$

(2) 相对误差标准。给出容许误差界ε

$$\frac{\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|}{\| x^{(k)} \|} < \varepsilon$$

(3)给出最大迭代次数 $k_{\max}$

当$k \ge k_{\max}$迭代终止，给出失败信息。

例： 已知 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$, 用迭代公式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha(Ax^{(k)}-b),\qquad (k=0,1,\ldots)$$

求解 $Ax=b$。问 α 取什么实数可使迭代收敛，且 α 为何值时，收敛最快？

解： (1)迭代矩阵 $B=I+\alpha A$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2\\ -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+4=(\lambda-1)(\lambda-4)$$

A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=4$,

迭代矩阵 $B=I+\alpha A$ 的特征值为 $\mu_1=1+\alpha,\mu_2=1+4\alpha$,

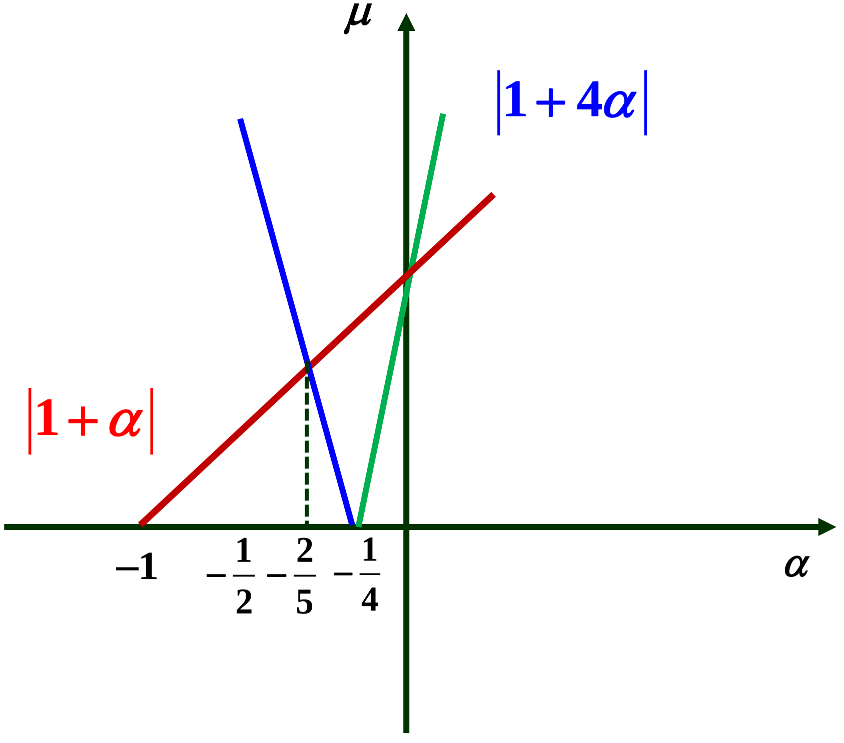
$$|1+\alpha|<1\Rightarrow -1<1+\alpha<1\Rightarrow -2<\alpha<0,$$

$$|1+4\alpha|<1\Rightarrow -1<1+4\alpha<1\Rightarrow -\frac{1}{2}<\alpha<0,$$

当$-\dfrac{1}{2}<\alpha<0$时，迭代格式收敛。

$$|1+\alpha|=|1+4\alpha|\Rightarrow -(1+\alpha)=1+4\alpha\Rightarrow 5\alpha=-2\Rightarrow \alpha=-\frac{2}{5},$$

当$\alpha=-\dfrac{2}{5}$时，收敛最快。



二.两种基本迭代法

1、Jacobi迭代法

2、Gauss-Seidel迭代法

1、Jacobi 迭代

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}=D-L-U$$

例：$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}=D-L-U$$

$$D=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, U=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax=b \Leftrightarrow (D-L-U)x=b$$

$$\Leftrightarrow Dx=(L+U)x+b$$

$$\Leftrightarrow x=D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b$$

于是 $$Ax=b \Leftrightarrow x=D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b$$

$$=B_J x+g$$

其中 $$B_J=D^{-1}(L+U),\quad g=D^{-1}b$$

Jacobi迭代的矩阵格式

$$x^{(k+1)}=B_J x^{(k)}+g$$

Jacobi迭代矩阵

推导其分量形式

由 $Ax=b \Leftrightarrow (D-L-U)x=b \Leftrightarrow Dx=(L+U)x+b$ 得

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = -a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n + b_1 \\ a_{22}x_2 = -a_{21}x_1 \quad -a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n + b_2 \\ \cdots \\ a_{nn}x_n = -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1} \quad + b_n \end{cases}$$

第i个方程除以a_{ii} (i =1, 2, ..., n), 得

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 \quad - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \cdots \\ x_n = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1} \quad + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 \quad - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \cdots \\ x_n = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1} \quad + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

Jacobi迭代的分量形式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)} + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k)} \quad - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)} + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \cdots \\ x_n^{(k+1)} = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k)} \quad + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

令： $B_J=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, $x^{(k)}=\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$, $g=\begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$

则 $x^{(k+1)}=B_J x^{(k)}+g$ ，

这里 $B_J=D^{-1}(L+U)$, $g=D^{-1}b$

Jacobi迭代公式（分量形式）

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Jacobi迭代的矩阵格式

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + g$$

其中 $B_J = D^{-1}(L+U)$, $g = D^{-1}b$

给出初始向量 $x^{(0)}$, 即可得到向量序列：

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$$

若 $x^{(k)} \to x^*$, 则 x^* 是解。

例1：设方程组为
$$\begin{cases}5x_1+2x_2+x_3=-12\\-x_1+4x_2+2x_3=20\\2x_1-3x_2+10x_3=3\end{cases}$$
试写出其Jacobi分量迭代格式以及相应的迭代矩阵，并求解。

解：Jacobi迭代格式为
$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{5}(-12-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)})=-\frac{2}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{5}x_3^{(k)}-\frac{12}{5}\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(20+x_1^{(k)}-2x_3^{(k)})=\frac{1}{4}x_1^{(k)}-\frac{1}{2}x_3^{(k)}+5\\x_3^{(k+1)}=\frac{1}{10}(3-2x_1^{(k)}+3x_2^{(k)})=-\frac{1}{5}x_1^{(k)}+\frac{3}{10}x_2^{(k)}+\frac{3}{10}\end{cases}$$

故Jacobi迭代矩阵为
$$B_J=\begin{bmatrix}0&-\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{5}&\frac{3}{10}&0\end{bmatrix}$$

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$, $e=10^{-3}$,终止准则：$\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|<e$

$$x^{(14)}=\begin{pmatrix}-3.9997\\2.9998\\1.9998\end{pmatrix}$$

2、Gauss-Seidel迭代法

例2：设方程组为
$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=-12 \\ -x_1+4x_2+2x_3=20 \\ 2x_1-3x_2+10x_3=3 \end{cases}$$

试写出Gauss-Seidel迭代格式.

解：Gauss-Seidel迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{5}(-12-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}(20+x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=\dfrac{1}{10}(3-2x_1^{(k+1)}+3x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

Gauss-Seidel迭代的分量形式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(k)} + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\
x_2^{(k+1)} = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(k)} + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\
\cdots \\
x_n^{(k+1)} = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(k+1)} - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(k+1)} + \dfrac{b_n}{a_{nn}}
\end{cases}
$$

$$
\boxed{x_i^{(k+1)} = \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\Big) / a_{ii}, \quad i = 1, 2, \cdots, n}
$$

推导Gauss-Seidel迭代法的矩阵形式（n=3）

由

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k)} + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k)} + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} = -\dfrac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(k+1)} + \dfrac{b_3}{a_{33}} \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} = -a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} + b_1 \\ a_{22}x_2^{(k+1)} = -a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} + b_2 \\ a_{33}x_3^{(k+1)} = -a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} + b_3 \end{cases}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Dx^{(k+1)} = b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}$$

同理n阶方程Gauss-Seidel 迭代格式的矩阵形式

$$Dx^{(k+1)} = b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}$$

$$\Leftrightarrow (D-L)x^{(k+1)} = b + Ux^{(k)}$$

$$\Leftrightarrow x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b$$

Gauss-Seidel迭代的矩阵格式

$$x^{(k+1)} = B_G x^{(k)} + g$$

Gauss-Seidel迭代矩阵

其中 $B_G = (D-L)^{-1}U,\qquad g = (D-L)^{-1}b$

Gauss-Seidel迭代公式

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

Gauss-Seidel迭代的矩阵格式

$$x^{(k+1)} = B_G x^{(k)} + g$$

其中$B_G = (D-L)^{-1}U, \qquad g = (D-L)^{-1}g$

给出初始向量 $x^{(0)}$, 即可得到向量序列:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$$

若 $x^{(k)} \to x^*$, 则 x^* 是解。

收敛准则 (Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代的收敛性)

一般收敛原则 $\left.\begin{array}{l}\rho(B)<1\Leftrightarrow\\ \|B\|<1\Rightarrow\end{array}\right\}$ 收敛

实用准则： 由A来直接判断（充分准则）

准则1: A严格对角占优 $\Rightarrow$ Jacobi和Gauss-Seidel迭代法收敛.

准则2: $\|B_J\|_\infty<1\Rightarrow$ Jacobi迭代法, Gauss-Seidel迭代法收敛.

准则3: A 对称正定 $\Rightarrow$ Gauss-Seidel迭代法收敛.

准则4: 若A是对称正定的, 则$2D-A$是对称正定

$\Leftrightarrow$ Jacobi迭代法收敛.

注：对一个任意给定的系数矩阵

1.*Jacobi*迭代法和*Gauss* – *Seidel*迭代法可能同时收敛，或同时不收敛，或者一个收敛而另一个不收敛。

2.在都收敛的情况下，其收敛的速度也不一定是哪一种一定快。

3.A对称正定,*Gauss* – *Seidel*一定收敛,但$2D-A$不一定也是对称正定,所以*Jacobi*法未必收敛。

例如

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 6 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\text{正定},2D-A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 6 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\text{不正定}$$

$|A|=12+4-15=1$, $|2D-A|=12-4-15=-7$

例：讨论用Gauss-Seidel迭代法求解方程组Ax=b时的收敛性，已知

$$A=\begin{bmatrix}3&1&2\\0&4&1\\1&0&2\end{bmatrix}$$

解：(1)对A：不是严格对角占优的矩阵，无法用充分准则I，

(2)考虑充分准则II，计算Jacobi迭代矩阵

$$B_J=D^{-1}(L+U)=I-D^{-1}A$$

$$D=\begin{bmatrix}3&&\\&4&\\&&2\end{bmatrix},\quad L=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

可求出 $B_J=\begin{bmatrix} 0 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\|B_J\|_\infty = 1$

不满足充分准则II，故无法判断。

(3)考虑用定理2的充分条件

先求出Gauss-Seidel迭代矩阵 $B_G=(D-L)^{-1}U$

$$B_G=\begin{bmatrix} 0 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$\|B_G\|_\infty = 1$

$\|B_G\|_1 = 5/4$

不满足定理2的充分条件，故无法判断。

(4)再用定理1的充要条件

$$B_G=\begin{bmatrix}0 & -1/3 & -2/3\\ 0 & 0 & -1/4\\ 0 & 1/6 & 1/3\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I-B_G)=\lambda\cdot\left(\lambda\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{24}\right)=0$$

得到 $\lambda_1=0,\ \lambda_{2,3}=\frac{1}{12}(2\pm i\sqrt{2})$

易知 $\rho(B_G)=|\lambda_{\max}|<1$，故**收敛**.

例: 讨论用Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法求解方程组$Ax=b$时的收敛性，如果收敛，并比较哪种方法收敛较快，其中

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

解: (1)对Jacobi方法，迭代矩阵

$$B_J=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(B_J)=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}}<1,$$ 故方法收敛。

(2)对Gauss-Seidel方法，迭代矩阵

$$B_G = \left[\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ & 0 & -\frac{1}{2} \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{11}{12} \end{pmatrix} \qquad \rho(B_G) = \frac{11}{12} < 1, \qquad \text{故方法收敛。}$$

(3) $\rho(B_G) = \dfrac{11}{12} < \rho(B_J) = \dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}}$

Gauss-Seidel方法比Jacobi方法收敛快。

三. 超松弛迭代法

1、超松弛迭代法（SOR)

2、对称超松弛迭代法（SSOR)

3、块超松弛迭代法（BSOR法）

1、超松弛迭代法（SOR法）

(1)用Gauss-seidel迭代法计算$\overline{x}^{(k+1)}$

$$\begin{cases} \overline{x}_1^{(k+1)} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)} + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \overline{x}_2^{(k+1)} = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)} + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \cdots \\ \overline{x}_n^{(k+1)} = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k+1)} - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k+1)} + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

(2)引入松弛因子ω,

$$x_i^{(k+1)} = \omega \overline{x}_i^{(k+1)} + (1-\omega)x_i^{(k)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

以三阶方程为例，推导超松弛迭代法（SOR法）的分量形式

(1)用Gauss-seidel迭代法计算$\bar{x}^{(k+1)}$

$$\begin{cases} \bar{x}_1^{(k+1)} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \bar{x}_2^{(k+1)} = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \bar{x}_3^{(k+1)} = -\dfrac{a_{31}}{a_{33}}x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{32}}{a_{33}}x_2^{(k+1)} + \dfrac{b_3}{a_{33}} \end{cases}$$

(2)引入松弛因子ω,

$$x_i^{(k+1)} = \omega \bar{x}_i^{(k+1)} + (1-\omega)x_i^{(k)}, \qquad i = 1,2,3$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \omega(-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} + \dfrac{b_1}{a_{11}}) + (1-\omega)\dfrac{a_{11}}{a_{11}}x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \omega(-\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} + \dfrac{b_2}{a_{22}}) + (1-\omega)\dfrac{a_{22}}{a_{22}}x_2^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \omega(-\dfrac{a_{31}}{a_{33}}x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{32}}{a_{33}}x_2^{(k+1)} + \dfrac{b_3}{a_{33}}) + (1-\omega)\dfrac{a_{33}}{a_{33}}x_3^{(k)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \omega(-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} + \dfrac{b_1}{a_{11}}) + (1-\omega)\dfrac{a_{11}}{a_{11}}x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \omega(-\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} + \dfrac{b_2}{a_{22}}) + (1-\omega)\dfrac{a_{22}}{a_{22}}x_2^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \omega(-\dfrac{a_{31}}{a_{33}}x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{32}}{a_{33}}x_2^{(k+1)} + \dfrac{b_3}{a_{33}}) + (1-\omega)\dfrac{a_{33}}{a_{33}}x_3^{(k)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{11}}(b_1 - a_{11}x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{22}x_2^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{33}x_3^{(k)}) \end{cases}$$

同理得到n阶方程超松弛迭代法（SOR法）的分量形式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \omega\left(-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)} + \dfrac{b_1}{a_{11}}\right) + (1-\omega)\dfrac{a_{11}}{a_{11}}x_1^{(k)} \\
x_2^{(k+1)} = \omega\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)} + \dfrac{b_2}{a_{22}}\right) + (1-\omega)\dfrac{a_{22}}{a_{22}}x_2^{(k)} \\
\cdots \\
x_n^{(k+1)} = \omega\left(-\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k+1)} - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k+1)} + \dfrac{b_n}{a_{nn}}\right) + (1-\omega)\dfrac{a_{nn}}{a_{nn}}x_n^{(k)}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{11}}\left(b_1 - a_{11}x_1^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{22}x_2^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\
\cdots \\
x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} - a_{nn}x_n^{(k)}\right)
\end{cases}
$$

SOR迭代公式（分量形式）

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

$\omega = 1$，为Gauss – seidel迭代法，

$\omega > 1$，超松弛迭代法，

$\omega < 1$，低松弛迭代法。

推导SOR迭代格式的矩阵形式（以三阶方程为例）

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \omega\left(-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} + \dfrac{b_1}{a_{11}}\right) + (1-\omega)\dfrac{a_{11}}{a_{11}}x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \omega\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} + \dfrac{b_2}{a_{22}}\right) + (1-\omega)\dfrac{a_{22}}{a_{22}}x_2^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \omega\left(-\dfrac{a_{31}}{a_{33}}x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{32}}{a_{33}}x_2^{(k+1)} + \dfrac{b_3}{a_{33}}\right) + (1-\omega)\dfrac{a_{33}}{a_{33}}x_3^{(k)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} = \omega(-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} + b_1) + (1-\omega)a_{11}x_1^{(k)} \\ a_{22}x_2^{(k+1)} = \omega(-a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} + b_2) + (1-\omega)a_{22}x_2^{(k)} \\ a_{33}x_3^{(k+1)} = \omega(-a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} + b_3) + (1-\omega)a_{33}x_3^{(k)} \end{cases}$$

$$\boxed{Dx^{(k+1)} = \omega(b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}) + (1-\omega)Dx^{(k)}}$$

n阶方程SOR迭代格式的矩阵形式

$$\boxed{Dx^{(k+1)} = \omega(b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}) + (1-\omega)Dx^{(k)}}$$

$$(D-\omega L)x^{(k+1)} = (\omega U + (1-\omega)D)x^{(k)} + \omega b$$

SOR迭代法的矩阵形式

$$x^{(k+1)} = B_\omega x^{(k)} + g$$

迭代矩阵 $B_\omega = (D-\omega L)^{-1}(\omega U + (1-\omega)D)$

右端向量 $g = \omega(D-\omega L)^{-1} b$

选择ω的实用方法

（1） 选择最优松弛因子

$$\omega_{opt}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(B_J)}}$$

（2） 实用中采取试算法是最有效的

SOR法收敛性的结论：

（1）SOR方法收敛的必要条件为0< ω<2

（2）若系数阵A对称正定，则当0< ω<2时，

SOR方法收敛

（3）若系数阵A严格对角占优，则当0< ω≤1时，

SOR方法收敛。

2、对称超松弛迭代法（SSOR法）

(1)用向前迭代的SOR方法，由$x^{(k)}$求$x^{(k+\frac{1}{2})}$，

$$
\begin{aligned}
x^{(k+\frac{1}{2})} &= (D-\omega L)^{-1}(\omega U+(1-\omega)D)x^{(k)}+\omega(D-\omega L)^{-1}b \\
&= B_{f\omega}x^{(k)}+g_f
\end{aligned}
$$

(2)再用向后迭代的SOR方法，由$x^{(k+\frac{1}{2})}$求$x^{(k+1)}$。

$$
\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= (D-\omega U)^{-1}(\omega L+(1-\omega)D)x^{(k+\frac{1}{2})}+\omega(D-\omega U)^{-1}b \\
&= B_{b\omega}x^{(k+\frac{1}{2})}+g_b
\end{aligned}
$$

SSOR迭代法的矩阵形式：

$$x^{(k+1)} = S_\omega x^{(k)} + g$$

其中$S_\omega = B_{b\omega} \cdot B_{f\omega}$

注：

（1）关于ω的收敛条件和准则与SOR方法相同；

（2）收敛快慢对ω 的选取不敏感。

3、块超松弛迭代法（BSOR法）

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}$$

$$A_{ii} X_i^{(k+1)} = A_{ii} X_i^{(k)} + \omega \left(B_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} A_{ij} X_j^{(k)} \right)$$

$$i = 1, 2, \cdots, m$$

对于系数矩阵A是对角元非零的方程组Ax＝b用迭代法求解，其迭代收敛速度按从慢到快的排列顺序是：Jacobi迭代法、Gauss-Seidel迭代法、SOR方法、BSOR方法。

四、应用实例

1．案例 1 （热传导问题）

设有一维热传导方程的初边值问题

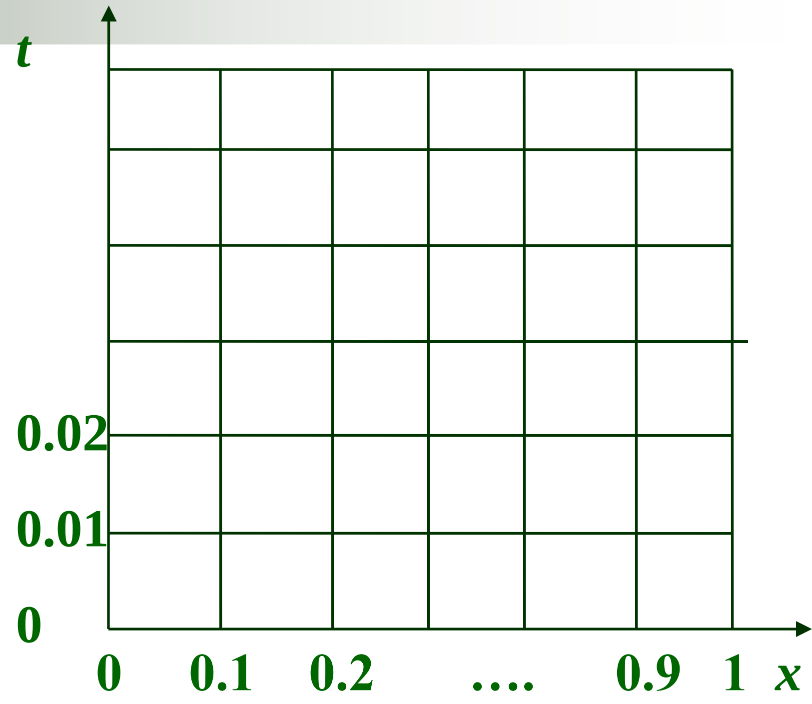
$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} & (0 < x < 1, t > 0) \\ T(x,0) = \sin(\pi x) & (0 < x < 1) \\ T(0,t) = T(1,t) = 0 & \end{cases}$$

试用数值方法求出t=0.2时刻金属杆的温度分布.

解:(1)对空间进行离散.

取空间间隔$h=0.1$,

时间间隔$\tau=0.01$.



(2)对微分算子进行离散.

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x_j,t_n)=\frac{T(x_j,t_{n+1})-T(x_j,t_n)}{\tau}+O(\tau)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_j,t_n)=\frac{T(x_{j+1},t_n)-2T(x_j,t_n)+T(x_{j-1},t_n)}{h^2}$$

$$+O(h^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x_j,t_n) \approx \frac{T_j^{n+1}-T_j^n}{\tau}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_j,t_n) \approx \frac{T_{j+1}^n-2T_j^n+T_{j-1}^n}{h^2}$$

采用无条件稳定的Crank-Nicholson格式,则有

$$\frac{T_j^{n+1}-T_j^n}{\tau} = \frac{T_{j+1}^{n+\frac{1}{2}}-2T_j^{n+\frac{1}{2}}+T_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{T_{j+1}^n-2T_j^n+T_{j-1}^n}{h^2}+\frac{T_{j+1}^{n+1}-2T_j^{n+1}+T_{j-1}^{n+1}}{h^2}\right)$$

或

$$T_j^{n+1} = T_j^n +$$

$$\frac{1}{2}\lambda\left[(T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n) + (T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1})\right]$$

$$\text{其中}\lambda = \frac{\tau}{h^2} = \frac{0.01}{0.01} = 1$$

加上边界条件后有

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}T_{j+1}^{n+1} + 2T_j^{n+1} - \frac{1}{2}T_{j-1}^{n+1} = \frac{1}{2}(T_{j+1}^n + T_{j-1}^n) = d_j^n, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j = 1,2,\ldots,9 \\ T_0^n = T_{10}^n = 0 \end{cases}$$

加上边界条件后有

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}T_{j+1}^{n+1}+2T_j^{n+1}-\frac{1}{2}T_{j-1}^{n+1}=\frac{1}{2}(T_{j+1}^n+T_{j-1}^n)=d_j^n, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad j=1,2,\dots,9 \\ T_0^n=T_{10}^n=0 \end{cases}$$

其矩阵形式为

$AT^{n+1}=d^n$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1/2 & & & \\ -1/2 & 2 & \ddots & & \\ & -1/2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1/2 \\ & & & -1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

2．案例 2

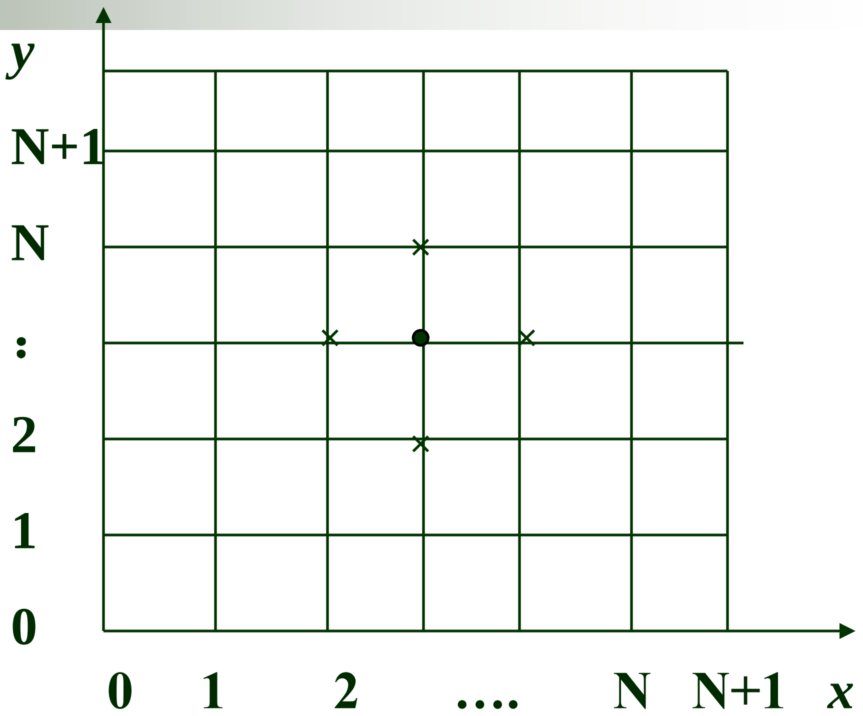
数值求解正方形域上的Poisson方程边值问题

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,y), 0<x,y<1 \\ u(0,y)=u(1,y)=u(x,0)=u(x,1)=0 \end{cases}$$

解:(1)剖分求解域.

$$x = x_i = ih, y = y_j = jh,$$

$$i, j = 0,1,\ldots,N, N+1$$



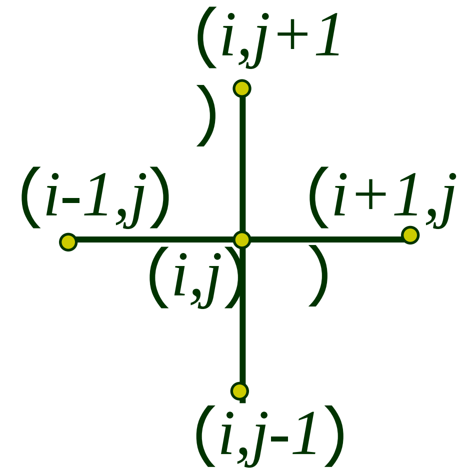
(2)对微分算子进行离散.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{h^2} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1})}{h^2} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2}$$



在每个点(x_i,y_j)上的有限差分方程为

$$4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} = h^2 f_{ij}$$

$$1 \le i, j \le N$$

又称为五点差分格式

在边界上

$$u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0$$

对非边界点进行编号:

顺序为----从下往上,从左往右

$$(x_1,y_1),(x_2,y_1),\dots,(x_N,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_2),$$

$$\dots,(x_N,y_2),\dots,(x_1,y_N),(x_2,y_N),\dots,(x_N,y_N)$$

相应的解向量和右端向量分别为

$$u=(u_{1,1},u_{2,1},\dots,u_{N,1},u_{1,2},u_{2,2},\dots,u_{N,2},\dots,u_{1,N},$$
$$u_{2,N},\dots,u_{N,N})^T$$

$$f=h^2(f_{1,1},f_{2,1},\dots,f_{N,1},f_{1,2},f_{2,2},\dots,f_{N,2},\dots,f_{1,N},$$
$$f_{2,N},\dots,f_{N,N})^T$$

$$4u_{i,j}-u_{i-1,j}-u_{i+1,j}-u_{i,j-1}-u_{i,j+1}=h^2 f_{ij}\ ,1\le i,j\le N$$

$$u_{0,j}=u_{N+1,j}=u_{i,0}=u_{i,N+1}=0$$

$N=3$

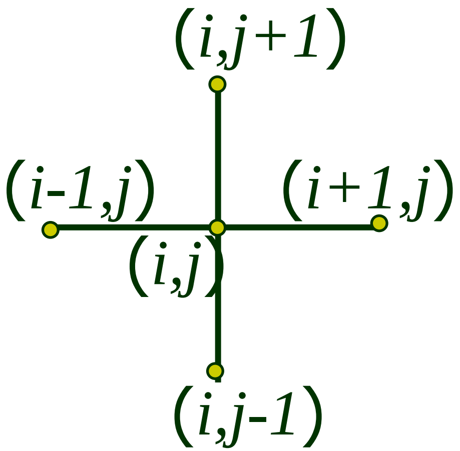
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \end{bmatrix}$$

$$4u_{i,j}-u_{i-1,j}-u_{i+1,j}-u_{i,j-1}-u_{i,j+1}=h^2 f_{ij}$$

$$1\le i,j\le N$$

$$u_{0,j}=u_{N+1,j}=u_{i,0}=u_{i,N+1}=0$$

Jacobi迭代格式:



$$u_{0,j}=u_{N+1,j}=u_{i,0}=u_{i,N+1}=0$$

$for \quad j=1:N$

$\quad for \quad i=1:N$

$$u_{i,j}^{(k+1)}=(u_{i-1,j}^{(k)}+u_{i+1,j}^{(k)}+u_{i,j-1}^{(k)}+u_{i,j+1}^{(k)}+h^2 f_{ij})/4$$

$\quad end$

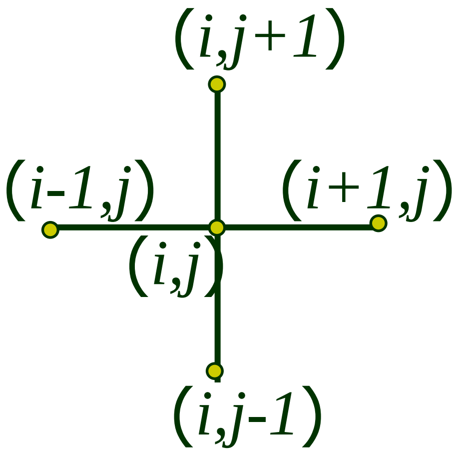
end

$$4u_{i,j}-u_{i-1,j}-u_{i+1,j}-u_{i,j-1}-u_{i,j+1}=h^2 f_{ij}$$

$$1\le i,j\le N$$

$$u_{0,j}=u_{N+1,j}=u_{i,0}=u_{i,N+1}=0$$

Gauss-Seidel迭代格式：



$$u_{0,j}=u_{N+1,j}=u_{i,0}=u_{i,N+1}=0$$

$$for\quad j=1:N$$

$$for\quad i=1:N$$

$$u_{i,j}^{(k+1)}=(u_{i-1,j}^{(k+1)}+u_{i+1,j}^{(k)}+u_{i,j-1}^{(k+1)}+u_{i,j+1}^{(k)}+h^2 f_{ij})/4$$

$$end$$

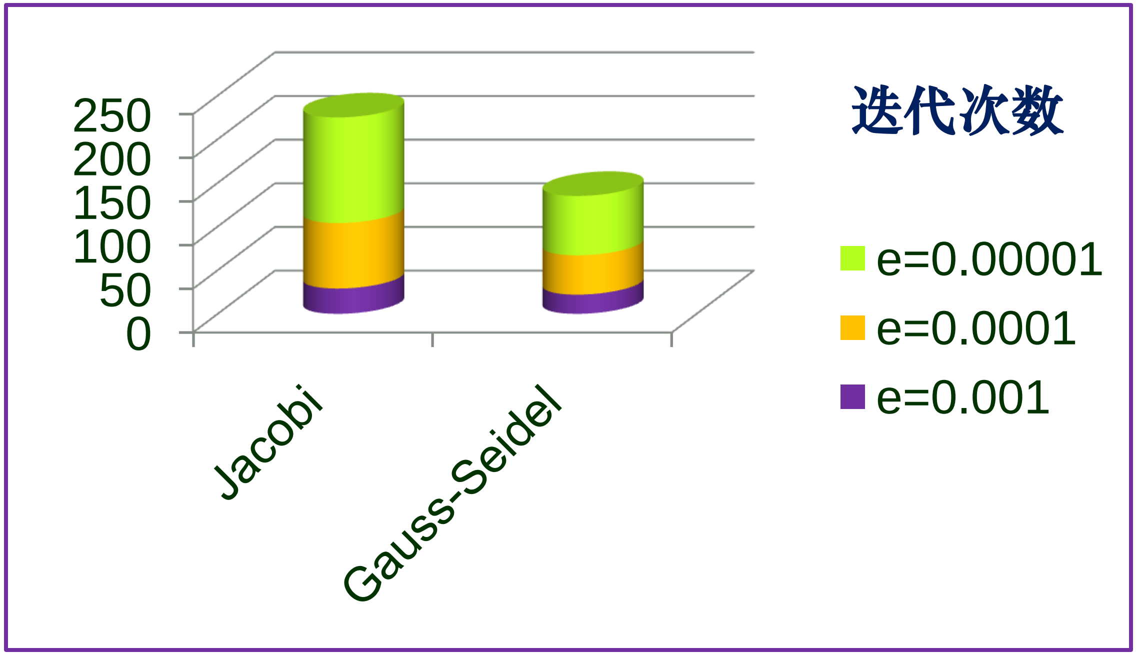
$$end$$

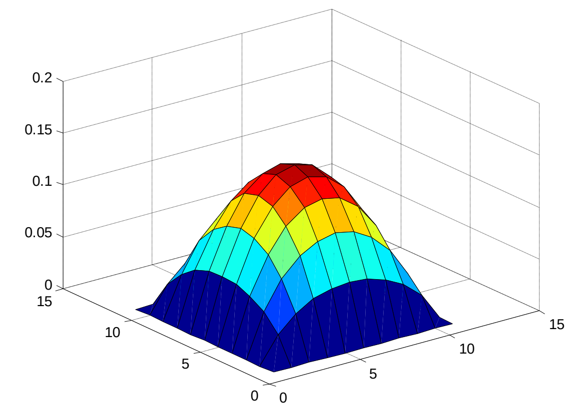
可分块求解线性方程组

$N = 3$

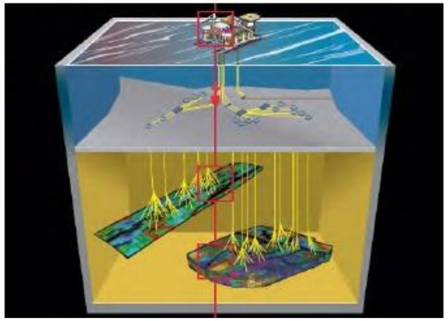
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \end{bmatrix}$$

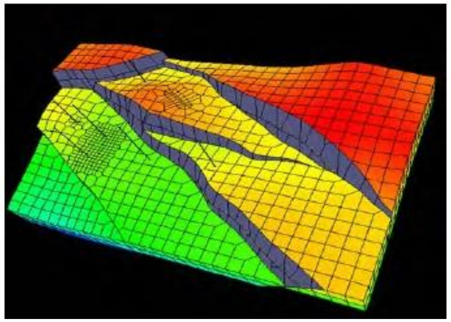
计算结果 取 $x^{(0)}=(0,\ldots,0)^T$, $f(x,y)=2$, $h=0.1$

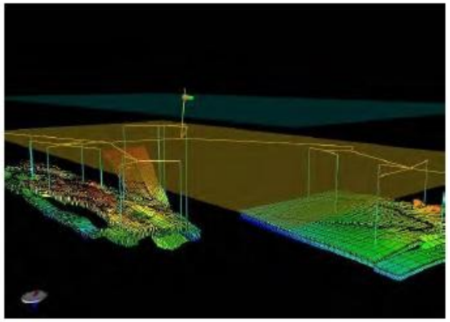




精确解







课后练习　　P124—3，4