插值与拟合的基本问题

如果可以将一个实际问题用函数来描述，那么对这个函数性质以及运算规律的研究，就是对这一实际问题的某些内在规律的理性揭示。

在工程实践和科学实验中，经常需要建立函数关系，即$y=f(x)$。虽然从原则上说，它在某个区间$[a,b]$上是存在的，但通常只能观测到它的部分信息，即只能获取$[a,b]$上一系列离散点上的值，这些值构成了观测数据。这就是说，我们只知道的一张观测数据表

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$

而不知道函数在其他点x上的取值，这时只能用一个经验函数$y=g(x)$对真实函数$y=f(x)$作近似。

下面两种办法常用来确定经验函数$y=g(x)$

（1）插值法　　（2）拟合法

根据问题的不同，有时要用插值技术来解决，有时则应该采用拟合的方法才合理。

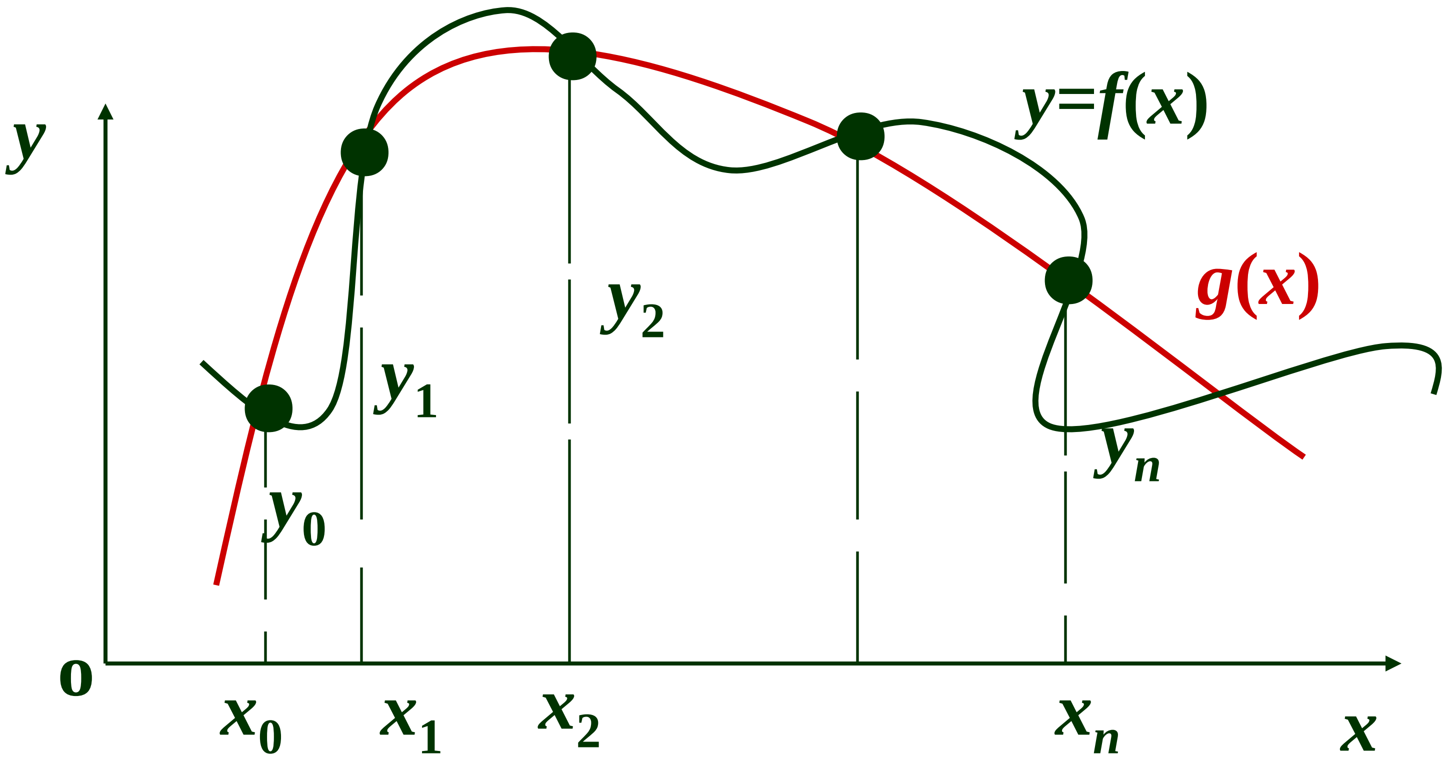
（1）插值法的基本思想

已知数据表

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$

求一个经验函数$y=g(x)$，使$g(x_i)=f(x_i)$，$i=1,\ldots,n.$

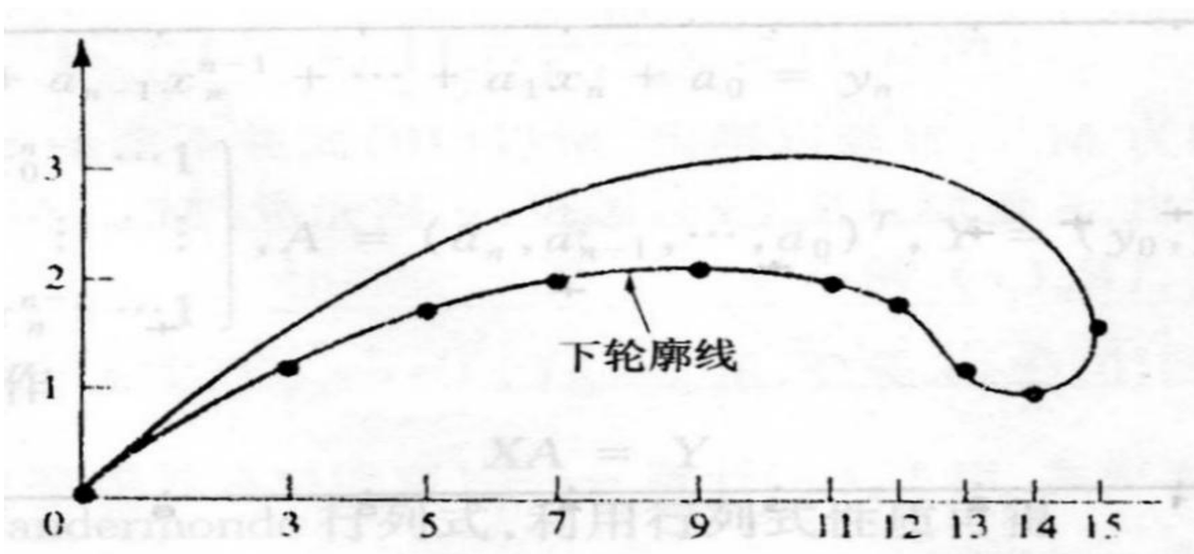
插值的任务就是由已知的观测点(x_i,y_i)为物理量(未知量),建立一个简单的、连续的解析模型$g(x)$，以便能根据该模型推测该物理量在非观测点处的特性。



问题1：机床加工

机翼断面的下轮廓线如图所示，下表给出了下轮廓线上的部分数据。如要求铣床当x坐标每改变0.1单位时的y坐标。试完成加工所需的数据，画出曲线。

x_i	0	3	5	7	9	11	12	13	14	15
y_i	0	1.2	1.7	2.0	2.1	2.0	1.8	1.2	1.0	1.6



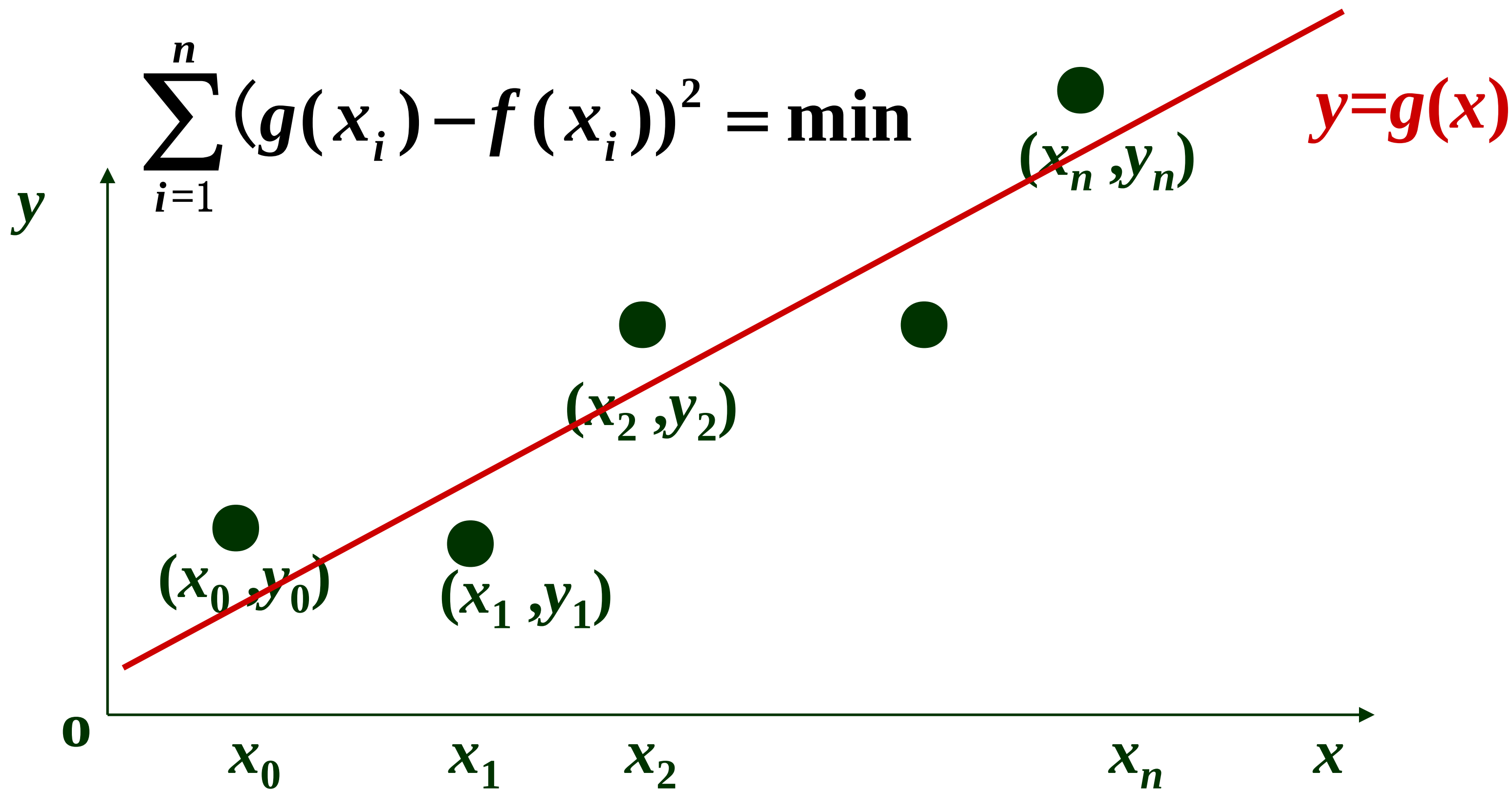
（2）拟合法的基本思想

已知数据表

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$

求一个经验函数$y=g(x)$，使

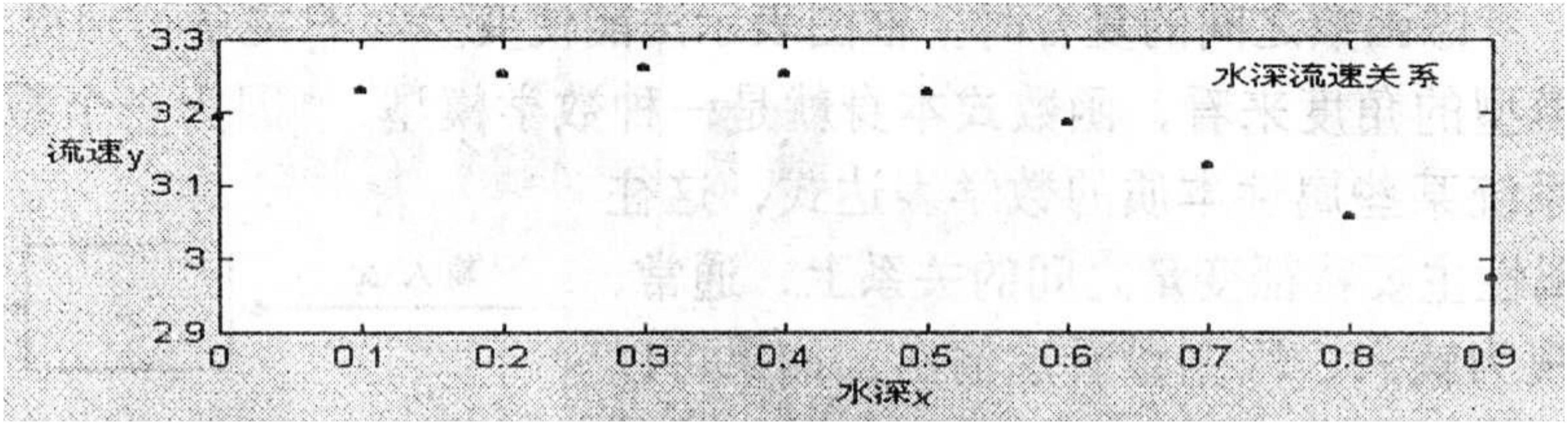
$$\sum_{i=1}^{n}(g(x_i)-f(x_i))^2=\min$$



问题2：水深和流速的关系

在水文数据的测量中，不同水深的流速是不同的。水文数据的测量是天天进行的，为了减少测量的工作量，希望确定水深和流速之间的关系。为此测量了一系列不同水深和流速值，下表给出了对某河流的测量数据

水深x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
流速y_i	3.195	3.229	3.253	3.261	3.251	3.228	3.187	3.126	3.059	2.975



第五章　函数插值

第一节 插值基本问题

插值法:由实验或测量的方法得到所求函数 $y=f(x)$ 在互异点$x_0, x_1, \ldots, x_n$ 处的值 $y_0, y_1, \ldots, y_n$，

构造一个简单函数 $F(x)$ 作为函数 $y=f(x)$ 的近似表达式

$$y=f(x)\approx F(x)$$

使 $$F(x_0)=y_0, F(x_1)=y_1, \ldots, F(x_n)=y_n, \qquad (a)$$

这类问题称为插值问题。 $f(x)$ 称为被插值函数，$F(x)$ 称为插值函数， $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 称为插值节点。

(a)式称为插值条件。

插值函数的类型

在函数类Φ中，选取若干个$\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}\subset\Phi$函数，

以 $F(x)=\sum_{i=0}^{n}c_i\varphi_i(x)$ 作为插值函数。

即：$\Phi=span\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$， $F(x)=\sum_{i=0}^{n}c_i\varphi_i(x)\subset\Phi$

代数插值： 取$\Phi=span\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}=span\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$，

插值函数为$F(x)=P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

三角插值： 取$\Phi=span\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$

$=span\{\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots,\sin nx,\cos nx\}$

例： 取$\Phi=span\{\sin x,\cos x\}$，

$F(x)=a\sin x+b\cos x$

有理插值：$F(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$

例：$F(x)=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2}{b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3}$

一般地：$F(x)=\sum_{i=0}^{n}c_i\varphi_i(x)$

例：$F(x)=a+bx+c\sin x\subset\Phi=span\{1,x,\sin x\}$

代数插值

当插值函数是代数多项式时，插值问题称为代数插值。

设 $P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, ……(1)

n次代数插值问题为:求次数≤n的多项式$P_n(x)$,使满足插值条件

$$P_n(x_i)=y_i, \quad i=0,1,2,\ldots, n, \quad \ldots\ldots (2)$$

定理1 设$x_0, x_1,\ldots,x_n$是$n+1$个互异节点,函数$f(x)$在这组节点的值$y_k=f(x_k)(k=0,1,\ldots,n)$是给定的，那么存在唯一的次数≤$n$的多项式$P_n(x)$满足

$$P_n(x_k)=y_k, \quad k=0,1,\ldots,n$$

只要求出$P_n(x)$的系数$a_0, a_1,\ldots, a_n$即可。

证明 由插值条件(2)知$P_n(x)$的系数满足下列$n+1$个代数方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n=y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\ldots+a_nx_n^n=y_n \end{cases} \qquad (3)$$

$a_i(i=0,1,2,\ldots,n)$的系数行列式是Vandermonde行列式

$$V(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i-x_j) \qquad (4)$$

$$V(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i-x_j) \qquad (4)$$

由于x_i互异，所以(4)右端不为零，从而方程组(3)的解 $a_0,a_1,\ldots a_n$ 存在且唯一。 证毕

但遗憾的是方程组(3)是病态方程组,阶数n越高，病态越严重。为此我们从另一途径寻求获得$P_n(x)$ 的方法----Lagrange插值和Newton插值。（这两种方法称为基函数法）

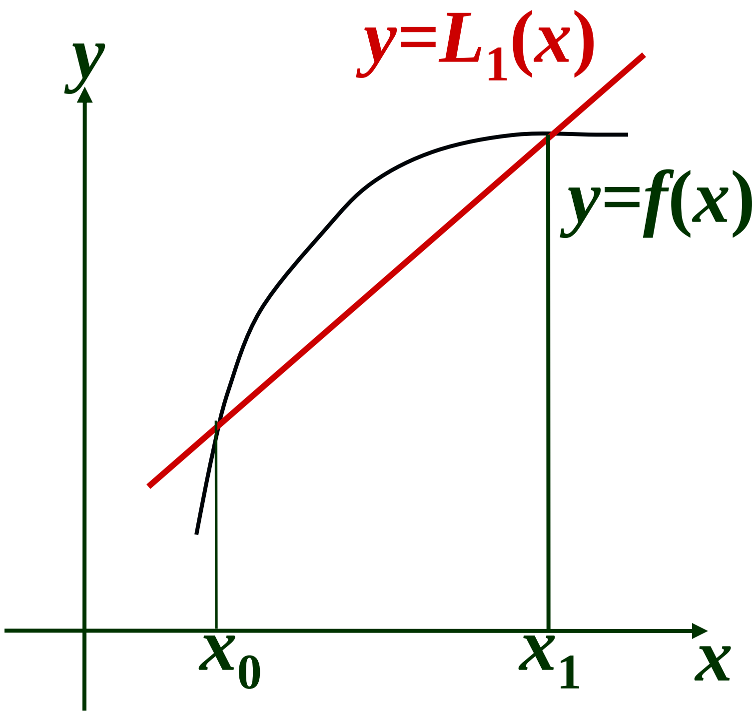
插值误差估计 $R(x)=f(x)-F(x)=f(x)-\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x)$

第二节 两种基本的代数插值

一、拉格朗日插值

线性插值(n=1)　　求次数≤1 的多项式$L_1(x)$.

满足条件$L_1(x_0)=y_0$，　$L_1(x_1)=y_1$，



点斜式

$$L_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

对称式

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

记 $l_0(x)=\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}$, $l_1(x)=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$

$$L_1(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1$$

$$l_0(x_0)=1 \qquad l_0(x_1)=0$$
$$l_1(x_0)=0 \qquad l_1(x_1)=1$$

称$l_0(x)$和$l_1(x)$为以x_0, x_1为节点的插值基函数

二次插值 $(n=2)$ 求次数≤2 的多项式$L_2(x)$,

使其满足条件 $L_2(x_0)=y_0$，$L_2(x_1)=y_1$， $L_2(x_2)=y_2$

令 $L_2(x)=l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$

要求 $l_0(x)$，$l_1(x)$，$l_2(x)$是二次多项式，且满足

$$\begin{cases} l_0(x_0)=1, & l_0(x_1)=0, & l_0(x_2)=0, \\ l_1(x_0)=0, & l_1(x_1)=1, & l_1(x_2)=0, \\ l_2(x_0)=0, & l_2(x_1)=0, & l_2(x_2)=1. \end{cases}$$

$l_0(x)$含有 $x-x_1$, $x-x_2$ 两个因子，令 $l_0(x)=\lambda(x-x_1)(x-x_2)$

利用 $l_0(x_0)=1$ 确定其中的系数λ，得到：

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

类似的可以得到 $l_1(x), l_2(x)$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\qquad l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$l_0(x)$, $l_1(x)$, $l_2(x)$ 称为以 x_0, x_1 , x_2为节点的插值基函数。

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)\ (x-x_2)}{(x_0-x_1)\ (x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)\ (x-x_2)}{(x_1-x_0)\ (x_1-x_2)}y_1$$

$$+\frac{(x-x_0)\ (x-x_1)}{(x_2-x_0)\ (x_2-x_1)}y_2$$

n 次插值多项式 :求次数≤n的多项式$L_n(x)$, 使其满足

$$L_n(x_0)=y_0\,,\quad L_n(x_1)=y_1\,,\ \ldots\ldots,\ L_n(x_n)=y_n$$

令 $L_n(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+\cdots+l_n(x)y_n$

求n 次多项式 $l_j(x)$,(j=0,1,…,n)使其满足条件

$$l_j(x_i)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

容易求得

$$l_j(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}=\prod_{i=0,i\neq j}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

$l_j(x)$(j=0,1,…,n)称为以x_0, x_1,… , x_n为节点的Lagrange插值基函数。

将$l_j(x)$代入 $L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} l_j(x)y_j$ 得

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} l_j(x)y_j$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}y_j$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\Bigl(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\Bigr)y_j$$

*n*次Lagrange插值多项式

特点：构造容易，L-型插值基函数理论上有意义，

但增加节点要重新计算，不适合编程计算。

实际应用：只用低次插值。

Lagrange插值的截断误差

定理5-1: 设$L_n(x)$是过点x_0，x_1，x_2，…x_n的$f(x)$的n次插值多项式，$f(x)\in C^{n+1}[a,b]$，其中$[a,b]$是包含点x_0，x_1，x_2，…, x_n的区间，则对任意给定的$x\in[a,b]$，总存在一点$\xi\in(a,b)$（依赖于x）使

$$\boxed{R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)}$$

其中

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

$$f(x)=L_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\quad a<\xi<b$$

上式称为带余项的Lagrange插值公式,只要$f(x)$具有$n+1$阶导数,就有上式成立,其余项为

$$\boxed{R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)}$$

特别，当$n=1$时，取$x_0=a$, $x_1=b$，则有

$$R_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}\omega_2(x)$$

令$x_1-x_0=b-a=h$, $x=x_0+t\,h$, $0\le t\le 1$ 则 $\omega_2(x)=-t(1-t)h^2$

易证，当$0\le t\le 1$时,$|t(1-t)|$的最大值为1/4,

$$|R_1(x)|\le\frac{h^2}{8}\max_{x_0\le x\le x_1}|f''(x)|$$

应当指出，余项表达式只有在 $f(x)$ 的高阶导数存在时才能应用。ξ 在（a, b）内的具体位置通常不可能给出，如果我们可以求出

$$\max_{a<x<b}\left|f^{(n+1)}(x)\right| = M_{n+1}$$

那么插值多项式$L_n(x)$逼近$f(x)$的截断误差是

$$\boxed{\left\|R_n(x)\right\|_\infty \le \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} M_{n+1}}$$

例: 已给sin0.32=0.314567, sin0.34=0.333487, sin0.36=0.352274, 用线性插值及抛物插值计算sin0.3367 的值并估计截断误差。

解: 取x_0=0.32, x_1=0.34 , x_2=0.36 ,

y_0=0.314567, y_1=0.333487, y_2=0.352274,

用线性插值计算,取 x_0=0.32, x_1=0.34 及x=0.3367, 得到

$$\sin 0.3367 \approx L_1(0.3367) = \frac{0.3367 - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{0.3367 - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$$= \frac{0.3367 - 0.34}{-0.02} \times 0.314567 + \frac{0.3367 - 0.32}{0.02} \times 0.333487$$

$$= 0.330365$$

其截断误差得 $|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2}|(x-x_0)(x-x_1)|$

其中 $M_2 = \max\limits_{x_0 \le x \le x_1} |f''(x)|$ ，因 $f(x)$=sin$x$，$f''(x)$=-sin$x$，

可取 $M_2 = \max\limits_{x_0 \le x \le x_1} |\sin(x)| = \sin(x_1) \le 0.3335$ ，于是

$$|\mathrm{R}_1(0.3367)| = |\sin 0.3367 - \mathrm{L}_1(0.3367)|$$

$$\le 1/2(0.3335)(0.0167)(0.0033) \le 0.92\times 10^{-5},$$

若取x_1=0.34，x_2=0.36为节点，则线性插值为

$$\sin 0.3367 \approx L_1(0.3367) = \frac{0.3367 - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \frac{0.3367 - x_1}{x_2 - x_1} y_2$$

$$= \frac{0.3367 - 0.34}{-0.02} \times 0.333487 + \frac{0.3367 - 0.32}{0.02} \times 0.352274 = 0.330387$$

其截断误差为

$$|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2}|(x-x_1)(x-x_2)|$$

其中 $$M_2 = \max_{x_1 \le x \le x_2} |f''(x)| \le 0.3523$$

于是

$$|R_1(0.3367)| = |\sin 0.3367 - L_1(0.3367)|$$
$$\le \frac{1}{2}(0.3523)(0.0023)(0.0233) \le 1.36 \times 10^{-5}$$

用抛物插值计算 sin0.3367时，可得

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$L_2(0.3367)=0.314567\times\frac{0.7689\times10^{-4}}{0.0008}+0.333487\times\frac{3.89\times10^{-4}}{0.0004}$$

$$+0.352274\times\frac{-0.5511\times10^{-4}}{0.0008}=0.330374$$

$$\sin 0.3367\approx L_2(0.3367)=0.330374$$

这个结果与六位有效数字的正弦函数表完全一样，这说明查表时用二次插值精度已相当高了。

其截断误差得

$$\left|R_2(x)\right| \le \frac{M_3}{6}\left|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right|$$

其中

$$M_3 = \max_{x_0 \le x \le x_2}\left|f'''(x)\right| = \cos x_0 < 0.828$$

于是

$$\left|R_2(0.3367)\right| = \left|\sin 0.3367 - L_2(0.3367)\right|$$

$$\le \frac{1}{6}(0.828)(0.0167)(0.033)(0.0233)$$

$$< 0.178 \times 10^{-6}$$

例 设$x_j(j=0,1,2,...,n)$为互异节点，求证：

$$\sum_{j=0}^{n} l_j(x)x_j^k = x^k, k=0,1,2,...,n$$

证：取$f(x)=x^k$，$k=0,1,2,...,n$. 用节点$x_0, x_1, ... , x_n$对x^k构造Lagrange插值函数

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} l_j(x)x_j^k$$

由插值误差估计定理知，

$$R_n(x)=x^k-\sum_{j=0}^{n} l_j(x)x_j^k=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

当$f(x)=x^k$，$k=0,1,2,...,n$时. 有$f^{(n+1)}(x)\equiv 0$。所以$R_n(x)=0$,

得到 $$x^k \equiv \sum_{j=0}^{n} l_j(x)x_j^k \qquad k=0,1,2,...,n$$

事后误差估计

由$x_0, x_1, \cdots, x_n$构造插值函数$P_n(x)$,则插值误差是

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

再由$x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}$构造插值函数$\overline{P}_n(x)$,插值误差是

$$\overline{R}_n(x) = f(x) - \overline{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i)$$

近似地认为$f^{(n+1)}(\xi) \approx f^{(n+1)}(\eta)$,得到

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{f(x) - \overline{P}_n(x)} \approx \frac{x - x_0}{x - x_{n+1}}$$

$$\frac{f(x)-P_n(x)}{f(x)-\overline{P}_n(x)} \approx \frac{x-x_0}{x-x_{n+1}}$$

解出 $f(x) \approx \dfrac{x-x_{n+1}}{x_0-x_{n+1}} P_n(x) - \dfrac{x-x_0}{x_0-x_{n+1}} \overline{P}_n(x)$

得到事后误差估计式

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

$$\approx \frac{x-x_0}{x_0-x_{n+1}} (P_n(x) - \overline{P}_n(x))$$

$$\overline{R}_n(x) = f(x) - \overline{P}_n(x)$$

$$\approx \frac{x-x_{n+1}}{x_0-x_{n+1}} (P_n(x) - \overline{P}_n(x))$$

例:已知$f(x)=e^x$ 的数据点如下：

x_i	0	1	2	3
e^{x_i}	1	2.7183	7.3891	20.0855

（1）用x_1, x_2, x_3构造二次Lagrange插值多项式$\overline{L_2}(x)$，并计算$e^{1.5}$的近似值$\overline{L_2}(1.5)$ 。

（2）用事后误差估计方法估计$\overline{L_2}(1.5)$的误差。

解:(1)
$$\overline{L}_2(x)=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$\overline{L}_2(1.5)=4.0505$$

(2)由x_0, x_1, x_2计算插值得$L_2(1.5) = 4.6846$

$$\bar{R}(1.5) = f(1.5) - \bar{L}_2(1.5) = \left[\frac{x - x_3}{x_0 - x_3} (L_2(x) - \bar{L}_2(x)) \right]_{x=1.5}$$

$$= \frac{1.5 - 3}{0 - 3} (4.6846 - 4.0505) = 0.3171$$

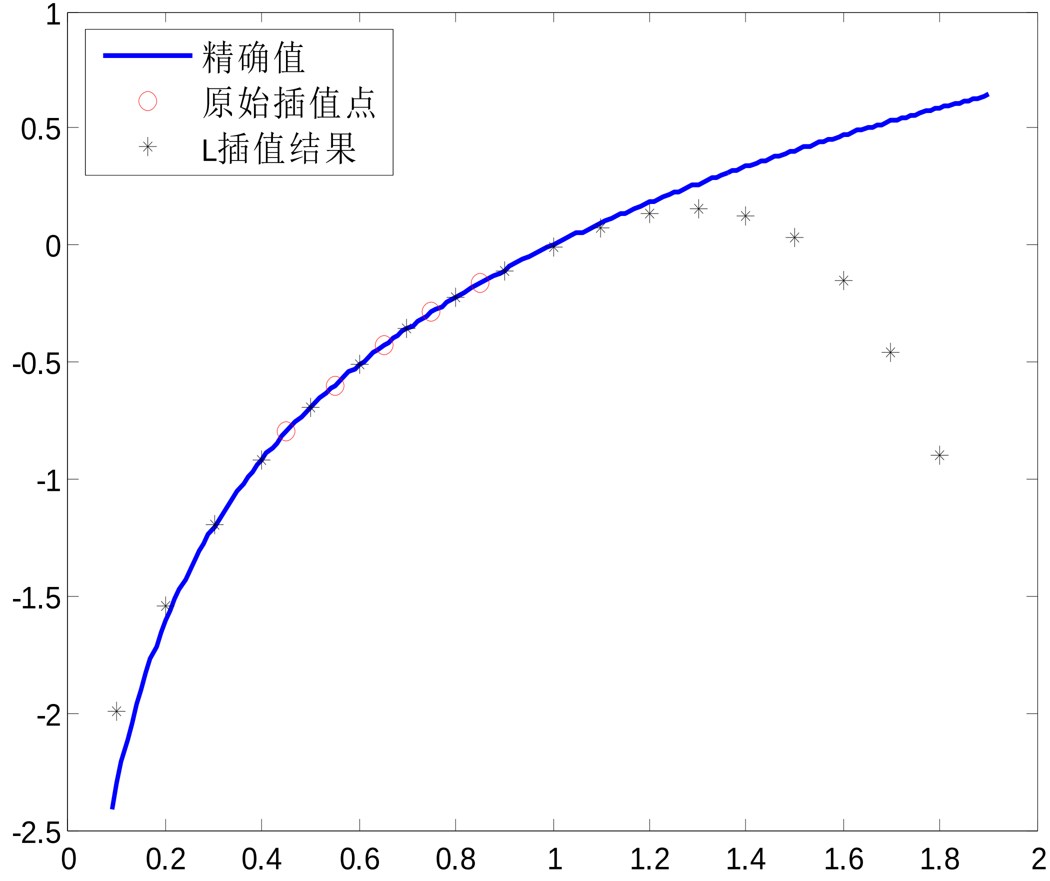
$$\bar{R}_n(x) = f(x) - \bar{P}_n(x)$$
$$\approx \frac{x - x_{n+1}}{x_0 - x_{n+1}} (P_n(x) - \bar{P}_n(x))$$

例5-2：由计算结果及图形可以看出

（1）一般情况下用适当多点插值效果更好；

（2）事后误差界更为粗糙；

（3）当插值点偏离插值区间时，亦即进行外插时，插值效果较差。



二、牛顿插值

本节介绍Newton插值多项式，该公式克服了Lagrange插值的缺点，令

*Newton*插值基函数取为

$$
\begin{cases}
\varphi_0(x) = 1 \\
\varphi_1(x) = x - x_0 = (x - x_0)\varphi_0(x) \\
\qquad\qquad \vdots \\
\varphi_i(x) = (x - x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) \\
\qquad\quad = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1}) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n
\end{cases}
$$

Newton插值多项式为

$$N_n(x)=\sum_{i=0}^{n}c_i\varphi_i(x)$$

$$=c_o+c_1(x-x_0)+\cdots\cdots+c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

式中$c_0,c_1,\cdots,c_n$为插值多项式系数。

为便于表示$N_n(x)$, 引出差商概念.

差商及其性质

定义1 给定一个函数表

x_0	x_1	…	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	…	$f(x_n)$

其中$x_i \neq x_j$,当$i \neq j$时

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

$f[x_i]$称为$f(x)$关于x_i的零阶差商。

$f(x)$关于x_i, x_j的一阶差商定义为

$$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}$$

一般的, $f(x)$关于$x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$的$k$阶差商记做

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

例:

i	0	1	2	3
xi	2	5	4	7
$f(xi)$	5	7	10	4

$$f[x_0,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_0]}{x_2-x_0}=\frac{10-5}{4-2}=\frac{5}{2}$$

$$f[x_2,x_3]=\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}=\frac{4-10}{7-4}=\frac{-6}{3}=-2$$

$$f[x_0,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_0,x_2]}{x_3-x_0}$$

$$=\frac{-2-5/2}{7-2}=\frac{-9}{10}$$

定理1: 差商具有如下性质

(1)差商与函数值的关系为

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

$$\omega'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)$$

例: $f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \dfrac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$

(2)差商与结点排列顺序无关

$$f\left[x_0,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n\right]=f\left[x_0,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n\right]$$

(3)设$f(x)$在$[a,b]$上有n阶导数且, $x_0,x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$,
则存在$\xi\in[a,b]$使

$$f\left[x_0,x_1,\ldots,x_n\right]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Newton 插值公式

$$N_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

由插值条件 $N_n(x_i)=f(x_i)\quad i=0,1,\ldots,n$

导出 $N_n(x_0)=c_0=f(x_0)$

由 $N_n(x_1)=f(x_0)+c_1(x_1-x_0)=f(x_1)$

$$\Rightarrow\quad c_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f[x_0,x_1]$$

$$N_n(x_2)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x_2-x_0)+c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)=f(x_2)$$

$$N_n(x_2) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \underline{f(x_0) + f[x_0, x_1](x_1 - x_0)} + f[x_0, x_1](x_2 - x_1)$$
$$+ c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_1) + f[x_0, x_1](x_2 - x_1) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow f[x_0, x_1](x_2 - x_1) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\Rightarrow \quad f[x_0, x_1] + c_2(x_2 - x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f[x_1, x_2]$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

依次类推，得： $c_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)} = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

$$= f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

$$c_0 = f(x_0) = f[x_0], \qquad c_1 = f[x_0, x_1], \cdots,$$
$$c_n = f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$$

将$c_0, c_1, \cdots, c_n$代入$N_n(x)$，得 n 次 *Newton* 插值多项式：

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \cdots\cdots + f[x_0, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$N_0(x) = f(x_0)$$
$$N_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) = N_0(x) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

……

$$N_{k+1}(x) = N_k(x) + f[x_0, \cdots, x_{k+1}](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_k)$$

因此，每增加一个结点，Newton插值多项式只增加一项，克服了 Lagrange插值的缺点。

n次 Newton 插值多项式：

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots\cdots + f[x_0, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

差商表

x	$f(x)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	……	$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$
x_0	$\underline{f(x_0)}$				
x_1	$f(x_1)$	$\underline{f[x_0, x_1]}$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$\underline{f[x_0, x_1, x_2]}$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	……	
……	……	……	……	…… ……	
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	……	$\underline{f[x_0, x_1, \ldots, x_n]}$

例: 给定$f(x)=\ln x$的数据表

x_i	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00
$f(x_i)$	0.78846	0.87547	0.95551	1.02962	1.09861

1.构造差商表

2. 写出四次Newton插值多项式$N_4(x)$

解:1. 差商表

x_i	$f[x_i]$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
2.20	0.78846				
2.40	0.87547	0.43505			
2.60	0.95551	0.40010	–0.087375		
2.80	1.02962	0.37055	–0.073875	0.02250	
3.00	1.09861	0.34495	–0.06400	0.01646	–0.00755

2.

x_i	$f[x_i]$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
2.20	<u>0.78846</u>				
2.40	0.87547	<u>0.43505</u>			
2.60	0.95551	0.40010	<u>–0.087375</u>		
2.80	1.02962	0.37055	–0.073875	<u>0.02250</u>	
3.00	1.09861	0.34495	–0.06400	0.01646	<u>–0.00755</u>

$P_4(x)=$ 0.78846

$+0.43505(x-2.20)$

$-\ 0.087375(x-2.20)(x-2.40)$

$+0.0225(x-2.20)(x-2.40)(x-2.60)$

$-0.00755(x-2.20)(x-2.40)(x-2.60)(x-2.80)$

定理2：Newton插值多项式的余项为

$$R_n(x)= f(x)-N_n(x)=f[x,x_0,x_1,\ldots,x_n]\omega_{n+1}(x)$$

其中 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$

证明： 过$n+1$个点 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ 作$f(x)$的n次Newton插值多项式$N_n(t)$，设x与$x_0,x_1,\ldots,x_n$ 互异，再取$n+2$个节点 $x, x_0,x_1,\ldots x_n$，构造$f(x)$的$n+1$次Newton插值多项式

$$N_{n+1}(t)=N_n(t)+f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]\omega_{n+1}(t) \qquad (a)$$

满足

$$N_{n+1}(x_i)=f(x_i) \qquad (b)$$

$$N_{n+1}(x)=f(x) \qquad (c)$$

由(a)，(c)有

$$f(x)=N_n(x)+ f[x_0\ x_1 \ldots x_n,x]\omega_{n+1}(x)$$ 证毕

利用Newton插值余项，可证明差商的性质(3)

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

事实上，由Newton插值余项与Lagrange插值余项的等价性，有

$$R_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x]\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

消掉$\omega_{n+1}(x)$，即得性质(3)。

Newton差分插值（等距节点插值公式）

下面讨论等距节点的Newton插值多项式，当节点等距时，利用差分的概念，可使Newton插值多项式得到简化。

定义2（向前差分）设有等距节点 $x_i=x_0+ih$ $(i=0,1,\ldots,n)$，其中$h>0$ 是步长。记 $f_i=f(x_i)$ $(i=0,1\ldots,n)$

$\Delta f_i=f_{i+1}-f_i$ 称为$f(x)$在点x_i处的一阶向前差分。

$\Delta^n f_i=\Delta^{n-1}f_{i+1}-\Delta^{n-1}f_i$称为$f(x)$在点$x_i$处的$n$阶向前差分。

规定 $f_i=\Delta^0 f_i$ 为$f(x)$在点x_i处的零阶差分。

定义3 (向后差分) 设节点 $x_i=x_0+ih$ $(i=0,1,\ldots,n)$，其中 $h>0$ 是步长。记 $f_i=f(x_i)$ $(i=0,1\ldots,n)$

$\nabla f_i=f_i - f_{i-1}$ 称为 $f(x)$ 在点 x_i 处的一阶向后差分。

$\nabla^n f_i=\nabla^{n-1} f_i - \nabla^{n-1} f_{i-1}$ 称为 $f(x)$ 在点 x_i 处的 n 阶向后差分。

规定 $f_i=\nabla^0 f_i$ 为 $f(x)$ 在点 x_i 处的零阶差分。

定义4 (中心差分) 设节点 $x_i=x_0+ih$ $(i=0,1,\ldots,n)$，其中 $h>0$ 是步长。记 $f_{i+1/2}=f(x_{i+1/2})$ $(i=0,1\ldots,n)$

$\delta f_i=f_{i+1/2} - f_{i-1/2}$ 称为 $f(x)$ 在点 x_i 处的一阶中心差分。

$\delta^n f_i= \delta^{n-1} f_{i+1/2} - \delta^{n-1} f_{i-1/2}$ 称为 $f(x)$ 在点 x_i 处的 n 阶中心差分。

规定 $f_i= \delta^0 f_i$ 为 $f(x)$ 在点 x_i 处的零阶差分。

例： $f(x)=x^2$ ， $x_i=i\ (i=1,2,\ldots,n)$,

求 $\Delta^n f(x_i)$, $\nabla^n f(x_i)$, $\delta^n f(x_i)$,$(i=1,\ldots,n-1)$ $n\geq 3$

解： $\Delta f(x_i)=f(x_{i+1})-f(x_i)=(i+1)^2-i^2=2i+1$

$\Delta^2 f(x_i)=\Delta f(x_{i+1})-\Delta f(x_i)=2(i+1)+1-(2i+1)=2$

$\Delta^3 f(x_i)=\Delta^2 f(x_{i+1})-\Delta^2 f(x_i)=2-2=0$, $\Delta^n f(x_i)=0\ \ n\geq 3$

解： $\nabla f(x_i)=f(x_i)-f(x_{i-1})=i^2-(i-1)^2=2i-1$

$\nabla^2 f(x_i)=\nabla f(x_i)-\nabla f(x_{i-1})=2i-1-[2(i-1)-1]=2$

$\nabla^3 f(x_i)=\nabla^2 f(x_i)-\nabla^2 f(x_{i-1})=2-2=0$, $\nabla^n f(x_i)=0$, $n\geq 3$

解： $\delta f(x_i)=f(x_{i+1/2})-f(x_{i-1/2})=(i+1/2)^2-(i-1/2)^2=2i$

$\delta^2 f(x_i)=\delta f(x_{i+1/2})-\delta f(x_{i-1/2})=2(i+1/2)-2(i-1/2)=2$

$\delta^3 f(x_i)=\delta^2 f(x_{i+1/2})-\delta^2 f(x_{i-1/2})=2-2=0$, $\delta^n f(x_i)=0$, $n\geq 3$

差分与差商的关系

(1) $$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+m}] = \frac{\Delta^m f(x_i)}{m!h^m}$$

(2) $$f[x_i, x_{i-1}, \cdots, x_{i-m}] = \frac{\nabla^m f(x_i)}{m!h^m}$$

(3) $$f[x_{i-m}, x_{i-m+1}, \cdots, x_{i+m+1}] = \frac{\delta^{2m+1} f(x_{i+1/2})}{(2m+1)!h^{2m+1}}$$

$$f[x_{i-m}, x_{i-m+1}, \cdots, x_{i+m}] = \frac{\delta^{2m} f(x_i)}{(2m)!h^{2m}}$$

（归纳法证明）

等距节点差分表

x_i	f_k	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
x_0	f_0				
x_1	f_1	Δf_0			
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_0$		
x_3	f_3	Δf_2	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$	
x_4	f_4	Δf_3	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_0$

$$\nabla^i f_n = \Delta^i f_{n-i}$$

例5-4：利用Newton插值求hump函数节点的函数