# 第二章 数值分析基础

# 第一节 线性空间与赋范线性空间

## 一、线性空间

### 1.线性空间概念

**定义2-1** 设V是一个非空集合，F是数域，如果

(1)在集合V中定义了加法运算，记为“+”，

即$\forall\alpha$，$\beta\in V$，有$\alpha+\beta\in V$；

(2)在数域F和集合V的元素之间定义了数量乘法，

即$\forall k\in F$，$\alpha\in V$，有$k\alpha\in V$；

(3)上述定义的加法和数乘运算满足代数运算的八条规则

则称集合 $V$是定义在数域$F$上的**线性空间**,记为 $V(F)$。

# 代数运算的八条规则

设$\alpha,\beta,\gamma\in V;\lambda,\mu\in F$

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha;$

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma);$

(3) 在$V$中存在零元素$0$，对任何$\alpha\in V$，都有

$$\alpha+0=\alpha;$$

(4)对任何$\alpha\in V$，都有$\alpha$的负元素$\beta\in V$，使

$$\alpha+\beta=0;$$

(5) $1\alpha=\alpha;$

(6) $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha;$

(7) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha;$

(8) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta.$

**线性空间是线性代数最基本的概念之一，也是一个抽象的概念，它是向量空间概念的推广.**

## $n$维向量空间$R^n$

$n$维向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$为列向量

$x^T$为行向量, 向量的"维"是指向量所含分量的个数.

线性空间是为了解决实际问题而引入的，它是某一类事物从量的方面的一个抽象，即把实际问题看作线性空间，进而通过研究线性空间来解决实际问题.

## 2、几个具体的线性空间实例

$R$：可以看成是实数域$R$上的线性空间，加法和数乘是实数中的加法和数乘；

$C$：可以看成是复数域$C$上的线性空间，加法是复数的加法，数乘是实数与复数按复数乘法相乘；

$R^{m\times n}$（$C^{m\times n}$）：实数域（复数域）上所有$m\times n$矩阵的集合。按矩阵的加法和数乘矩阵定义加法和数乘，构成线性空间；

$P[x]_n$：实数域上所有次数≤ n 的多项式。按多项式加法和数乘多项式定义加法和数乘，构成线性空间。但次数＝n 的多项式全体不能构成线性空间；

$P[x]$：实数域上多项式全体.按多项式加法和数乘多项式法则构成线性空间；

$C\,[a, b]$ ：区间［$a, b$］上一元连续函数的全体。是 $R$ 上的线性空间,因为两个连续函数之和以及实数$k$与连续函数乘积仍是连续函数；

$C^n\,[a, b]$ ：类似于$C\,[a,b]$，在区间［$a, b$］上 n 阶连续可微的一元函数全体.构成 $R$ 上的线性空间。

# 线性空间的判定方法

**（1）一个集合，如果定义的加法和数乘运算是通常的实数间的加乘运算，则只需检验对运算的封闭性.**

例1　$n$次多项式的全体

$$Q[x]_n = \{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \cdots, a_1, a_0 \in R, \text{且} a_n \neq 0\}$$

对于通常的多项式加法和数乘运算不构成线性空间.

$$0p = 0x^n + \cdots + 0x + 0 \notin Q[x]_n$$

$Q[x]_n$对运算不封闭.

**（2）一个集合，如果定义的加法和数乘运算不是通常的实数间的加乘运算，则必需检验是否满足八条线性运算规律．**

**例2**　正实数的全体，记作 $R^+$，在其中定义加法及乘数运算为

$$a \oplus b = ab, \quad \lambda \circ a = a^{\lambda}, (\lambda \in R, a, b \in R^+).$$

验证 $R^+$对上述加法与数乘运算构成线性空间．

**证明**　$\forall a, b \in R^+, \Rightarrow a \oplus b = ab \in R^+;$

$$\forall \lambda \in R, a \in R^+, \Rightarrow \lambda \circ a = a^{\lambda} \in R^+.$$

所以对定义的加法与数乘运算封闭．

## 下面一一验证八条线性运算规律：

$$(1)\ a \oplus b = ab = ba = b \oplus a;$$

$$(2)(a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = (ab)c = a \oplus (b \oplus c);$$

(3) $R^+$中存在零元素 1,对任何$a \in R^+$,有

$$a \oplus 1 = a \cdot 1 = a;$$

(4) $\forall a \in R^+$,有负元素$a^{-1} \in R^+$,使

$$a \oplus a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1;$$

$$(5)\ 1\circ a = a^1 = a;$$

$$(6)\ \lambda\circ(\mu\circ a) = \lambda\circ a^{\mu} = \left(a^{\mu}\right)^{\lambda} = a^{\lambda\mu} = (\lambda\mu)\circ a;$$

$$(7)\ (\lambda+\mu)\circ a = a^{\lambda+\mu} = a^{\lambda}a^{\mu} = a^{\lambda}\oplus a^{\mu}$$
$$= \lambda\circ a \oplus \mu\circ a;$$

$$(8)\ \lambda\circ(a\oplus b) = \lambda\circ(ab) = (ab)^{\lambda} = a^{\lambda}b^{\lambda}$$
$$= a^{\lambda}\oplus b^{\lambda} = \lambda\circ a\oplus\lambda\circ b.$$

所以 $R^{+}$对所定义的运算构成线性空间.

## 3、线性空间的基和维数

**定义2-3** 在线性空间 $V$中，如果存在 $n$个元素

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$$

满足：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关;

(2) $V$中任一元素$\alpha$总可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示, 那么, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 就称为线性空间$V$ 的一个基, $n$ 称为线性空间$V$ 的维数.

维数为$n$的线性空间称为 $n$ 维线性空间 ,记作$V^n$.

$R^n$是$n$维线性空间

$P[x]_n$是$n+1$维线性空间

**例** 在线性空间$P[x]_4$中，证明 $p_0(x)=1, p_1(x)=x,$

$p_2(x)=x^2, p_3(x)=x^3, p_4(x)=x^4$是线性无关的.

**解：** 令

$$k_0 p_0(x)+k_1 p_1(x)+k_2 p_2(x)+k_3 p_3(x)+k_4 p_4(x)=0$$

即： $$k_0+k_1 x+k_2 x^2+k_3 x^3+k_4 x^4=0$$

$$\Rightarrow \quad k_0=k_1=k_2=k_3=k_4=0$$

所以$p_0(x)=1, p_1(x)=x, p_2(x)=x^2, p_3(x)=x^3, p_4(x)=x^4$
是线性无关的.

# 4、元素在给定基下的坐标

**定义2-4** 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性空间$V^n$的一个基,对于任一元素$\alpha\in V^n$,总有且仅有一组有序数$x_1,x_2,\cdots,x_n$,使

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n,$$

有序数组$x_1,x_2,\cdots,x_n$称为元素$\alpha$在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$这个基下的坐标,并记作 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$.

**注** 线性空间V 的任一元素在不同基下所对应的坐标一般不同，一个元素在一个基下对应的坐标是唯一的.

# 5、线性空间的同构

设 $\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n$，$\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_n\alpha_n$

即元素$\alpha,\beta\in V^n$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标分别为

$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$和$(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，则

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1)\alpha_1+(a_2+b_2)\alpha_2+\cdots+(a_n+b_n)\alpha_n$$

$$k\alpha=ka_1\alpha_1+ka_2\alpha_2+\cdots+ka_n\alpha_n$$

于是$\alpha+\beta$与$k\alpha$的坐标分别为

$$(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^T$$

$$=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T+(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$$

$$(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^T=k(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$$

上式表明：在元素用坐标表示后，它们的运算就归结为坐标的运算，因而线性空间 $V^n$ 的讨论就归结为 $\boldsymbol{R}^n$ 的讨论.

**定义**　设 $U$、$V$ 是两个线性空间，如果它们的元素之间有一一对应关系，且这个对应关系保持线性组合的对应，那末就称线性空间 $U$ 与 $V$ 同构.

## 同构的意义

在线性空间的抽象讨论中，无论构成线性空间的元素是什么，其中的运算是如何定义的，我们所关心的只是这些运算的代数性质．从这个意义上可以说，同构的线性空间是可以不加区别的，而有限维线性空间唯一本质的特征就是它的维数.

# 二、赋范线性空间

## 1.向量范数公理

定义2-5 设$V$是数域$F$上的线性空间，$\forall x \in V$,若存在唯一实数$\|x\|$与其对应，且满足以下三条公理，

(1)正定性：$\|x\| \geq 0$, 且$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2)齐次性：$\|kx\| = |k|\|x\|, \forall k \in F$

(3)三角不等式：$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$

则实数$\|x\|$称为元素$x$的范数。把定义了范数的线性空间称为赋范线性空间。

## 2.$R^n$和$C[a,b]$中的范数

(1)$R^n$ : $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n$,常用的范数有如下三种.

向量的1--范数: $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

向量的2--范数: $\|x\|_2=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

欧氏范数

Cauchy – Schwarz不等式

$$(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)^2\le\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

向量的∞--范数: $\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$

以上三种范数可以统一地表示成$p$--范数的形式

$\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}},\ p=1,2,\infty,$ 一般可表示为$\|\bullet\|$

Matlab: norm($x$,$p$)

例： 证明 $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$ 为向量范数.

证:(1)显然 $\|x\|_\infty \ge 0$,

$$\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n \Leftrightarrow x = 0$$

(2) $\|kx\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |kx_i| = |k| \max\limits_{1\le i\le n} |x_i| = |k| \|x\|_\infty$, $\forall k \in F$

(3) $\|x+y\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i + y_i| \le \max\limits_{1\le i\le n} (|x_i| + |y_i|)$

$$\le \max_{1\le i\le n} |x_i| + \max_{1\le i\le n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty, \ \forall x, y \in V$$

所以 $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$ 为向量范数.

对有限维空间有结论有限维空间中的范数是等价的

在$R^n$上,所有的范数是等价的.即:如果$\|x\|_{P_1}$和$\|x\|_{P_2}$是$R^n$上的范数,则存在正常数$C_1$和$C_2(C_2 \geq C_1 \geq 0)$,对$\forall x \in R^n$有

$$C_1\|x\|_{P_2} \leq \|x\|_{P_1} \leq C_2\|x\|_{P_2}$$

可以证明:$\forall x \in R^n$有关系式

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

例：证明 $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$

证：
$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \le \sqrt{n \max_{1\le i\le n} |x_i|^2}$$
$$= \sqrt{n} \max_{1\le i\le n} |x_i| = \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \ge \sqrt{\max_{1\le i\le n} |x_i|^2} = \max_{1\le i\le n} |x_i| = \|x\|_\infty$$
$$\therefore \|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

注意：

1.等价性不等于互相代替，即在同一问题中不能混用不同的范数。

2.在无限维空间中，向量范数的等价性不成立。

**(2)$C[a,b]$:** $\forall f(x)\in C[a,b]$也有以下的三种常用范数.

$$1--\text{范数}:\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|dx$$

$$2--\text{范数}:\|f\|_2=\left(\int_a^b|f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\infty--\text{范数}:\|f\|_\infty=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

例：证明 在$C[a,b]$中，$\|f\|_1=\int_a^b |f(x)|dx$ 为$f(x)$的范数.

证:(1)显然 $\|f\|_1 \ge 0,\qquad \|f\|_1=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

$$(2)\quad \|kf\|_1=\int_a^b |kf(x)|dx=|k|\int_a^b |f(x)|dx=|k|\|f\|_1,\quad \forall k\in F$$

$$(3)\quad \|f+g\|_1=\int_a^b |f(x)+g(x)|dx \le \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)dx$$

$$=\int_a^b |f(x)|dx+\int_a^b |g(x)|dx=\|f\|_1+\|g\|_1,$$

$$\forall f(x),g(x)\in C[a,b]$$

所以 $\|f\|_1=\int_a^b |f(x)|dx$ 为$f(x)$在$C[a,b]$中的范数.

**(3) $R^{n\times n}$中$n$阶方阵的范数**

**定义2-6** 设矩阵$A\in R^{n\times n}$，若存在一个实值函数$F(A)$ $(F:R^{n\times n}\to R)$与其对应，且满足以下条件

①(正定性)$F(A)\ge 0$,及$F(A)=0$当且仅当$A=0$;

②(齐次性)$\forall k\in R$,有$F(kA)=|k|F(A)$;

③(三角不等式)$\forall A,B\in R^{n\times n}$有

$$F(A+B)\le F(A)+F(B);$$

④(相容性)$\forall A,B\in R^{n\times n}$有

$$F(AB)\le F(A)F(B).$$

则称$F(A)$是$R^{n\times n}$上的一个矩阵的范数,也记为$\|A\|$.

大多数情况下,矩阵范数常与向量范数混合在一起使用,这就要求矩阵的范数和向量的范数具有相容性,即

$$\|Ax\|\le\|A\|\|x\|$$

# 常用的矩阵范数有两种:

**(1)*Forbenius*范数**(即矩阵的欧氏范数，记为$F-$范数)

$$\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

按$R^n$的$\infty-$范数来定义$\|A\|=\max\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}|a_{ij}|$不是矩阵的范数.

如 $A=B=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}, AB=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$

而 $\|AB\|=2, \|A\|=\|B\|=1$

显然 $\|AB\|\le\|A\|.\|B\|$，不成立。

## （2）算子范数（从属范数）

对$\forall x \in R^n, x \neq 0, A \in R^{n\times n}$，

由$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$

有$\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$，即$\left\|A\dfrac{x}{\|x\|}\right\| \leq \|A\|$

定义满足相容性条件

## 定义2-7（矩阵的算子范数）

$$\|A\| = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1}\|Ax\|$$

其中$x \in R^n$，$\|x\|$为向量范数

$\forall A \in R^{n\times n}$,常用的矩阵范数与向量范数相对应也有三种:

①矩阵的1−−范数(称为$A$的列范数)

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

②矩阵的$\infty$−−范数(称为$A$的行范数)

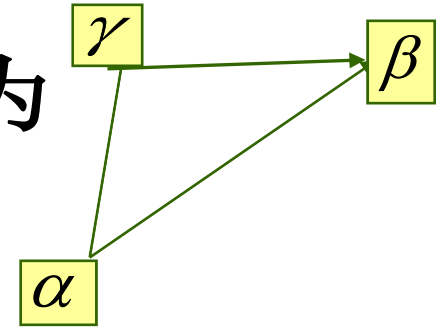
$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

③矩阵的2−−范数(称为$A$的谱范数)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

其中$\lambda_{\max}(A^T A)$表示$(A^T A)$的最大特征值.

# 4. 赋范线性空间中的距离




**定义2-9:** $\forall \alpha,\beta \in V$，$\alpha$与$\beta$之间的距离为

$$\rho(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\|$$

容易验证其满足,距离的三条公理:

①非负性 $\rho=(\alpha,\beta)\geq 0$，且$\rho(\alpha,\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$

②对称性 $\rho(\alpha,\beta)=\rho(\beta,\alpha)$

③三角不等式 $\rho(\alpha,\beta)\leq \rho(\alpha,\gamma)+\rho(\gamma,\beta)$.

用范数定义V中元素之间的距离

**例：** $f(x)=x, g(x)=e^x, x\in[0,1]$

$$\rho(f,g)=\|x-e^x\|_p,\quad p=1,2,\infty$$

$$\rho(f,g)=\|x-e^x\|_1=\int_0^1|x-e^x|dx$$

在距离空间定义向量序列的收敛和极限：

**定义2-10：** 设向量序列$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset V$，若存在$u\in V$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\rho(u,u_n)=\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|=0$$

称向量序列$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于$u$，即$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u$.

在$R^n$中，点列的收敛等价于每个分量的收敛。即

**定理2-4：** $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i^*,(i=1,2,\ldots,n)$$