第二节 复化求积公式

一、复化求积公式

复化求积公式的基本思想：

将区间$[a,b]$分为若干个小子区间，在每个小子区间上使用低阶的Newton-Cotes公式。然后把它们加起来，作为整个区间上的求积公式。

复化求积的方法是提高求积公式精度很有效的方法

1、复化梯形公式

将区间$[a,b]$ n等分,

$$h=\frac{b-a}{n},x_k=a+kh,\quad (k=0,1,\cdots,n),$$

在每个小区间$[x_k,x_{k+1}]$,（$k=0,1,\cdots,n-1$）

上用梯形公式:

$$T_k=\frac{h}{2}(f(x_k)+f(x_{k+1}))\qquad k=0,1,\cdots,n-1$$

复化梯形公式为

$$\boxed{T_n=\sum_{k=0}^{n-1}T_k=\frac{h}{2}(f(a)+f(b))+h\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)}$$

截断误差分析：

在区间$[x_k, x_{k+1}]$上，$R_k = -\dfrac{h^3}{12} f''(\eta_k)$，$\eta_k \in [x_k, x_{k+1}]$

整体误差为 $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} R_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\dfrac{h^3}{12}\right) f''(\eta_k)$

利用 $h = \dfrac{b-a}{n}$ 和 $\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k) = f''(\eta)$ $\eta \in [a,b]$

得到复化梯形公式的截断误差是：

$$\boxed{R(T_n) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta) = O(h^2)}$$

2、复化Simpson公式

在每小区间$[x_k, x_{k+1}]$上用$Simpson$公式

$$S_k = \frac{h}{6}\left(f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})\right)$$

复化Simpson公式为

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} S_k = \frac{h}{6}(f(a) + f(b)) + \frac{2}{3}h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}h\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$$

$$= \frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}H_n, \qquad \text{其中} H_n = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

复化Simpson公式的截断误差为

$$R(S_n) = -\frac{(b-a)}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta) = O(h^4) \quad \eta \in [a,b]$$

例： 当用复化梯形公式与复化辛卜生公式计算积分

$\int_0^1 e^x dx$的近似值时，若要求误差不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，

问至少各取多少个节点？

解： （1）由$f(x)=e^x, f''(x)=f^{(4)}(x)=e^x$，得

$$\max_{0\le x\le 1}|f''(x)|=e=M_2, \max_{0\le x\le 1}|f^{(4)}(x)|=e=M_4$$

$$|R(T_n)|=\left|-\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\eta)\right|=\left|-\frac{1}{12n^2}f''(\eta)\right|$$

$$\le \frac{1}{12n^2}e\le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$ 解得 $n>67.3$

用复化梯形公式n至少取68，节点至少取$n+1=69$个。

例： 当用复化梯形公式与复化辛卜生公式计算积分

$\int_0^1 e^x dx$ 的近似值时，若要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，

问至少各取多少个节点？

解： （2）由 $f(x)=e^x, f''(x)=f^{(4)}(x)=e^x$，得

$$\max_{0\le x\le 1}|f''(x)|=e=M_2, \max_{0\le x\le 1}|f^{(4)}(x)|=e=M_4$$

$$|R(S_n)|=\left|-\frac{(b-a)}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta)\right|=\left|-\frac{1}{2880n^4}f^{(4)}(\eta)\right|$$

$$\le \frac{1}{2880n^4}e\le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$ 解得 $n>2.1$

用复化辛卜生公式 n 至少取3，节点至少取 $2n+1=7$ 个。

二、变步长复化求积公式

变步长复化求积公式的基本思想：

将区间$[a,b]$逐次分半，建立递推公式，按递推公式计算，直到满足精度要求。

1.变步长复化梯形公式

$$n=1, h=b-a,\quad T_1=T(h)=\frac{h}{2}(f(a)+f(b))$$

$n=2$,将$[a,b]$分半，用复化梯形公式得T_2,

$$h_2=\frac{1}{2}h=\frac{b-a}{2},$$

$n=4$,再将区间分半得T_4，$h_4=\frac{1}{2}h_2=\frac{b-a}{4}$,

直到$|T_{2n}-T_n|<\varepsilon$为止,将T_{2n}作为积分的近似值。

下面推导由n到2n的复化梯形公式

给出误差限ε，将$[a,b]$ n等分，步长$h_n=\dfrac{b-a}{n}$，

用复化梯形公式：

在$[x_k,x_{k+1}]$上，$T_{1k}=\dfrac{h_n}{2}(f(x_k)+f(x_{k+1}))$

在$[a,b]$上，

$$T(h_n)=T_n=\sum_{k=0}^{n-1}T_{1k}=\frac{h_n}{2}(f(a)+f(b))+h_n\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)$$

将原n等分区间，再次分半，每个小区间$[x_k, x_{k+1}]$上取中点$x_{k+\frac{1}{2}}$,分成两个区间$\left[x_k, x_{k+\frac{1}{2}}\right]$和$\left[x_{k+\frac{1}{2}}, x_{k+1}\right]$,

于是，$n \to 2n, h_n \to h_{2n} = \dfrac{h_n}{2}$。

$$T_{1k} = \frac{h_n}{2}(f(x_k) + f(x_{k+1}))$$

在$[x_k, x_{k+1}]$上，

$$T_{2k} = \frac{h_{2n}}{2}(f(x_k) + f(x_{k+\frac{1}{2}})) + \frac{h_{2n}}{2}(f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1}))$$

$$= \frac{1}{2}T_{1k} + \frac{h_n}{2} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

$$\boxed{\text{记} H_n = h_n \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})}$$

在$[a,b]$上，

$$T\left(\frac{h_n}{2}\right) = T_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} T_{2k} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h_n}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}T_n + \frac{H_n}{2}$$

变步长复化梯形公式的递推公式：（由n到2n）

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{H_n}{2}$$

其中$T_n = \frac{h_n}{2}(f(a)+f(b)) + h_n\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$

$$H_n = h_n\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

实际计算中的递推公式为

$$T_1 = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{b-a}{2n}\sum_{j=0}^{n-1} f(a+(2j+1)\frac{b-a}{2n}), \quad n = 1,2,\cdots$$

直到 $|T_{2n} - T_n| \le \varepsilon$ 为止，T_{2n}作为积分的近似值。

例： 用事后误差分析法说明，为什么 $|T_{2n}-T_n|\le\varepsilon$ 可以作为迭代终止条件？

解： $$I-T_n=-\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\eta_1)$$

$$I-T_{2n}=-\frac{(b-a)}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\eta_2)$$

假定 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上变化不大，即有 $f''(\eta_1)\approx f''(\eta_2)$，

于是得

$$\frac{I-T_n}{I-T_{2n}}\approx 4$$

$$\therefore\quad I\approx T_{2n}+\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)\quad 或\quad I-T_{2n}\approx\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$$

当 $\left|T_{2n}-T_n\right|\le\varepsilon$ 时，$\left|I-T_{2n}\right|\le\frac{1}{3}\varepsilon\le\varepsilon$。

变步长复化梯形求积公式的算法

$$1.h=b-a, T=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

$$2.H=0, x=a+\frac{h}{2}$$

$$3.H=H+f(x), x=x+h$$

4. 若$x<b$，则转3.

$$5.T_1=\frac{1}{2}(T+h*H)$$

6.若$|T_1-T|<\varepsilon$,则$I=T_1$，输出I, 停机。

$$7.h=\frac{h}{2}, T=T_1, \text{转}2.$$

$$T_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{H_n}{2}=\frac{1}{2}T_n+\frac{b-a}{2n}\sum_{j=0}^{n-1}f(a+(2j+1)\frac{b-a}{2n})$$

$$n=1,2,\cdots$$

2.变步长复化Simpson公式

已知 $$S_n=\frac{1}{3}T_n+\frac{2}{3}H_n$$

又有 $$T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{1}{2}H_n$$

两式联立解得：

$$S_n=\frac{1}{3}T_n+\frac{2}{3}(2T_{2n}-T_n)=\frac{1}{3}(4T_{2n}-T_n)$$

实际计算过程如下：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
T_1 & \rightarrow & T_2 & \rightarrow & T_4 & \rightarrow & T_8 & \rightarrow & T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{1}{2}H_n & & h^2 \\
 & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & & & & \\
 & & S_1 & & S_2 & & S_4 & \rightarrow & S_n=\frac{1}{3}(4T_{2n}-T_n) & & h^4
\end{array}$$

同理可得变步长复化柯特斯公式

实际计算过程如下：

$$
\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[r] \arrow[dr] & T_2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & T_4 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & T_8 \arrow[r] \arrow[d] & T_{2n} = \frac{1}{2} T_n + \frac{1}{2} H_n & h^2 \\
 & S_1 \arrow[dr] & S_2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & S_4 \arrow[r] \arrow[d] & S_n = \frac{1}{3}(4T_{2n} - T_n) & h^4 \\
 & & C_1 \arrow[r] \arrow[dr] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_n = \frac{4^2 S_{2n} - S_n}{4^2 - 1} & h^6 \\
 & & & R_1 \arrow[r] & R_n = \frac{4^3 C_{2n} - C_n}{4^3 - 1} & h^8
\end{tikzcd}
$$

第三节 提高求积公式精度的外推方法

一、理查逊(Richardson)外推法

理查逊(Richardson)外推法是数值方法中常用的一种加速收敛技术，通过低精度公式的线性组合获得高精度公式的算法。

二、龙贝格(Romberg)方法

龙贝格(Romberg)算法是将理查逊(Richardson)外推法应用于数值积分，由低精度求积公式推出高精度求积公式的算法。

龙贝格(Romberg)方法

一般地 $$T_{m+1}^{(k)} = \frac{4^m T_m^{(k+1)} - T_m^{(k)}}{4^m - 1} \qquad m = 1, 2, \cdots, n \quad k = 0, 1, ..., n-m$$

其中T_{m+1}^{k} k: 表示逐次分半的次数

m: 表示外推的次数

$$I - T_{m+1}^{(k)} = O(h^{2m+2}), \qquad 其中 h = \frac{b-a}{2^k}$$

$T_{m+1}^{(0)}$ $h = b - a$

$T_{m+1}^{(1)}$ $h = \frac{b-a}{2}$

$T_{m+1}^{(k)}$ $h = \frac{b-a}{2^k}$

$T_1^{(k)}$ h^2

$T_2^{(k)}$ h^4

$T_{m+1}^{(k)}$ h^{2m+2}

实际计算过程如下：

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
T_1 & \rightarrow & T_2 & \rightarrow & T_4 & \rightarrow & T_8 & \rightarrow & T_{2n}=\dfrac{1}{2}T_n+\dfrac{1}{2}H_n & & h^2 \\
 & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & & & & \\
 & & S_1 & & S_2 & \rightarrow & S_4 & \rightarrow & S_n=\dfrac{1}{3}(4T_{2n}-T_n) & & h^4 \\
 & & & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & & & & \\
 & & & & C_1 & \rightarrow & C_2 & \rightarrow & C_n=\dfrac{4^2 S_{2n}-S_n}{4^2-1} & & h^6 \\
 & & & & & \searrow & \downarrow & & & & \\
 & & & & & & R_1 & \rightarrow & R_n=\dfrac{4^3 C_{2n}-C_n}{4^3-1} & & h^8
\end{array}
$$

$T_1(h)$——步长为h的复化梯形公式

$T_2(h)$——步长为h的复化辛卜生公式

$T_3(h)$——步长为h的复化柯特斯公式

$T_4(h)$——步长为h的复化龙贝格公式

$$T_{m+1}^{(k)}\left(\frac{h}{2^k}\right)=\frac{4^m T_m^{(k+1)}\left(\frac{h}{2^{k+1}}\right)-T_m^{(k)}\left(\frac{h}{2^k}\right)}{4^m-1}$$

$$m=1,2,\ldots,n; \qquad k=0,1,\ldots,n-m;$$

$$S_n=\frac{1}{3}(4T_{2n}-T_n) \qquad C_n=\frac{4^2 S_{2n}-S_n}{4^2-1}$$

$$R_n=\frac{4^3 C_{2n}-C_n}{4^3-1}$$

龙贝格算法的计算公式

$$T_1^{(0)}=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

$$T_1^{(t)}=\frac{1}{2}\left(T_1^{(t-1)}+\frac{b-a}{2^{t-1}}\sum_{i=1}^{2^{t-1}}f(a+(2i-1)\frac{b-a}{2^t})\right)$$

$$T_{m+1}^{(k)}=\frac{4^m T_m^{(k+1)}-T_m^{(k)}}{4^m-1}$$

$t=1,2,\dots,n;$

$m=1,2,\dots,n;$

$k=0,1,\dots,n-m;$

$$T_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{H_n}{2}=\frac{1}{2}T_n+\frac{b-a}{2n}\sum_{j=0}^{n-1}f(a+(2j+1)\frac{b-a}{2n})$$

$$n=1,2,\cdots$$

龙贝格序列计算流程

k	$m=0, T_1^{(k)}$	$m=1, T_2^{(k)}$	$m=2, T_3^{(k)}$	$m=3, T_4^{(k)}$	$m=4, T_5^{(k)}$	
0	$(1)T_1^{(0)}$	$(3)T_2^{(0)}$	$(6)T_3^{(0)}$	$(10)T_4^{(0)}$	$(15)T_5^{(0)}$	
1	$(2)T_1^{(1)}$	$(5)T_2^{(1)}$	$(9)T_3^{(1)}$	$(14)T_4^{(1)}$		
2	$(4)T_1^{(2)}$	$(8)T_2^{(2)}$	$(13)T_3^{(2)}$			
3	$(7)T_1^{(3)}$	$(12)T_2^{(3)}$				
4	$(11)T_1^{(4)}$					
误差	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	$O(h^{10})$	

例　用龙贝格方法计算积分$\int_1^2 \ln x dx$

解：取$n=3, a=1, b=2$

$$T_1^{(0)} = \frac{1}{2}(f(a)+f(b)) = 0.3465736$$

$$T_1^{(1)} = \frac{1}{2}\left(T_1^{(0)} + \frac{1}{2^0}\sum_{i=1}^{2^0} f(a+\frac{b-a}{2})\right) = 0.3760194$$

$$T_1^{(2)} = \frac{1}{2}\left(T_1^{(1)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} f(a+(2i-1)\frac{b-a}{4})\right) = 0.3836995$$

$$T_1^{(3)} = \frac{1}{2}\left(T_1^{(2)} + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} f(a+(2i-1)\frac{b-a}{8})\right) = 0.3856439$$

$$T_{m+1}^{(k)}\left(\frac{h}{2^k}\right)=\frac{4^m T_m^{(k+1)}\left(\frac{h}{2^{k+1}}\right)-T_m^{(k)}\left(\frac{h}{2^k}\right)}{4^m-1}$$

逐次外推计算流程如下：

k	$m=0,T_1^{(k)}$	$m=1,T_2^{(k)}$	$m=2,T_3^{(k)}$	$m=3,T_4^{(k)}$		
0	0.3465736	0.3858347	0.3862878	0.3862920		
1	0.3760194	0.3862595	0.3862942			
2	0.3836995	0.3862920				
3	0.3856439					