第三节 带导数条件的Hermite插值

假设函数$y=f(x)$是 在$[a,b]$上有一定光滑性的函数，在$[a,b]$ 上有$n+1$个互异点$x_0 \ldots x_n$, $f(x)$在这些点上取值$y_0 \ldots\ldots y_n$.求一个确定的函数$p(x)$在上面$n+1$个点上满足$p(x_i)=y_i$ $i=0,1,\ldots,n$.这是最简单的插值问题。

如果除了知道$f(x)$在插值节点上的取值外,还知道$f(x)$在插值节点x_i上的 $1 \le m_i \le n$阶导数，如何来构造插值函数呢?

Hermite插值就是既满足插值节点x_i的函数值条件又满足微商条件的插值函数。

Hermite插值也叫带指定微商值的插值,它要构造一个插值函数,不但在给定节点上取**函数值**,而且取已知**微商值**，使插值函数和被插函数的密和程度更好 。

Hermite插值的一般提法如下：

给出函数$f(x)$在$n+1$个互异节点上的函数值及若干导数值，设插值节点为$x_0, x_1, x_2 \cdots, x_n$。给出

$$f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(m_0)}(x_0)$$

$$f(x_1), f'(x_1), \ldots, f^{(m_1)}(x_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x_n), f'(x_n), \ldots, f^{(m_n)}(x_n)$$

其中$m_i (i = 0,1,2,\cdots,n)$是正整数。

以上总共有$N = n+1+\sum_{i=0}^{n} m_i$个插值条件，要求构造不低于$N-1$次插值函数$H(x)$满足以上插值条件。

*Hermite*插值中，最基本而重要的情形是只要求一阶导数的条件。给出$n+1$个互异节点$x_0, x_1 \cdots, x_n$上的函数值和导数值

$$y_i = f(x_i) \text{和} y'_i = f'(x_i) \qquad (i = 0,1,2,\cdots,n)$$

构造不低于$2n+1$次插值多项式$H_{2n+1}(x)$，要求满足插值条件

$$\begin{cases} H_{2n+1}(x_i) = y_i \\ H'_{2n+1}(x_i) = y'_i \end{cases} \qquad i = 0,1,2,\cdots n$$

Hermite插值多项式的构造

*Lagrange*型插值基函数法

设Hermite插值多项式为

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}h_i(x)y_i+\sum_{i=0}^{n}\bar{h}_i(x)y'_i$$

使其满足插值条件

$$\begin{cases} H_{2n+1}(x_i)=y_i \\ H'_{2n+1}(x_i)=y'_i \end{cases} \qquad i=0,1,2,\cdots n$$

$$H_{2n+1}(x_j)=\sum_{i=0}^{n}h_i(x_j)y_i+\sum_{i=0}^{n}\bar{h}_i(x_j)y'_i=y_j$$

$$H'_{2n+1}(x_j)=\sum_{i=0}^{n}h'_i(x_j)y_i+\sum_{i=0}^{n}\bar{h}'_i(x_j)y'_i=y'_j$$

$h_i(x)$应满足条件：

(1) $h_i(x)$应是$2n+1$次多项式；

(2) $h_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

$h'_i(x_j)=0 \qquad (i,\ j=0,1,2,\cdots,\ n)$

$\bar{h}_i(x)$应满足条件：

(1)$\bar{h}_i(x)$应是$2n+1$次多项式；

(2)$\bar{h}'_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

$\bar{h}_i(x_j)=0 \qquad (i,\ j=0,1,2,\cdots,\ n)$

1.构造$h_i(x)(i=0,1,2,\cdots,n)$

$h_i(x)$应满足条件：

(1)$h_i(x)$应是$2n+1$次多项式；

$$(2)h_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$$h'_i(x_j)=0 \qquad (i,\ j=0,1,2,\cdots,\ n)$$

利用Lagrange插值基函数$l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\(j\neq i)}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)$

设 $h_i(x)=\qquad\qquad l^2{}_i(x)$

由条件(2)可列出方程组

$$\begin{cases}h_i(x_i)=(ax_i+b)l_i^2(x_i)=1\\ h_i^{'}(x_i)=al_i^2(x_i)+2(ax_i+b)l_i(x_i)l_i^{'}(x_i)=0\end{cases}$$

由条件(2)可列出方程组

$$\begin{cases} h_i(x_i)=(ax_i+b)l_i^2(x_i)=1 \\ h_i'(x_i)=al_i^2(x_i)+2(ax_i+b)l_i(x_i)l_i'(x_i)=0 \end{cases}$$

$$\because l_i(x_i)=1, \quad \therefore ax_i+b=1, \quad \therefore a+2l_i'(x_i)=0$$

解出 $\begin{cases} a=-2l_i'(x_i) \\ b=1+2x_il_i'(x_i) \end{cases}$

所以 $\boxed{h_i(x)=(1-2(x-x_i)l_i'(x_i))l_i^2(x)}$

$$(i=0,1,2,\cdots n)$$

其中 $l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\(j\neq i)}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)$, $\quad l'_i(x_i)=\prod_{\substack{j=0\\(j\neq i)}}^{n}\left(\frac{1}{x_i-x_j}\right)$

2.构造$\bar{h}_i(x),(i=0,1,2,\cdots,n)$

$\bar{h}_i(x)$应满足条件：

(1)$\bar{h}_i(x)$应是$2n+1$次多项式；

$$(2)\bar{h}'_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$$\bar{h}_i(x_j)=0\qquad (i,\ j=0,1,2,\cdots,\ n)$$

设 $\bar{h}_i(x)=(cx+d)l^2{}_i(x)$

由条件(2)可列出方程组

$$\begin{cases}\bar{h}_i(x_i)=(cx_i+d)l_i^2(x_i)=0\\ \bar{h}'_i(x_i)=cl_i^2(x_i)+2(cx_i+d)l_i(x_i)l_i'(x_i)=1\end{cases}$$

由条件(2)可列出方程组

$$\begin{cases} \bar{h}_i(x_i) = (cx_i + d)l_i^2(x_i) = 0 \\ \bar{h}'_i(x_i) = cl_i^2(x_i) + 2(cx_i + d)l_i(x_i)l_i'(x_i) = 1 \end{cases}$$

$$\because l_i(x_i) = 1, \qquad \therefore cx_i + d = 0, \qquad \therefore c = 1$$

解出 $\begin{cases} c = 1 \\ d = -x_i \end{cases}$

于是求出 $\boxed{\bar{h}_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x)}$

代入$h_i(x)$和$\bar{h}_i(x)$经整理得到

$$\boxed{H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n}[(1 - 2(x - x_i)l'_i(x_i)y_i) + (x - x_i)y'_i]l_i^2(x)}$$

Hermite 插值误差分析

定理 设$f(x)\in C[a,b]$，且在（a,b）上存在$2n+2$次导数，对于$n+1$个互异节点上的$Hermite$插值函数，有如下误差估计式

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$$

其中ξ是介于$x_0,x_1,\cdots,x_n$中最小数和最大数之间。

例 在节点x_1和x_2上已知y_1, y_2和y_1', y_2'。试构造两点三次*Hermite*插值多项式$H_3(x)$满足条件

$$\begin{cases} H_3(x_i) = y_i & i = 1,2 \\ H_3'(x_i) = y_i' & i = 1,2 \end{cases}$$

解： $H_3(x) = h_1(x)y_1 + h_2(x)y_2 + \bar{h}_1(x)y'_1 + \bar{h}_2(x)y'_2$

由*Hermite*插值基函数的一般形式，得两点三次$H_3(x)$,

$$h_1(x) = (1 - 2(x - x_1)\ l_1'(x_1)\ )\ l^2_1(x\ )$$

$$h_2(x) = (1 - 2(x - x_2)\ l_2'(x_2)\ )\ l^2_2(x\ )$$

$$\bar{h}_1(x) = (x - x_1)\ l^2_1(x\ )$$

$$\bar{h}_2(x) = (x - x_2)\ l^2_2(x\ )$$

其中

$$l_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, \qquad l'_1(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}$$

$$l_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \qquad l'_2(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}$$

代入后得到

$$h_1(x)=(1+2\frac{x-x_1}{x_2-x_1})\quad(\frac{x-x_2}{x_1-x_2})^2,\quad \bar{h}_1(x)=(x-x_1)\quad(\frac{x-x_2}{x_1-x_2})^2$$

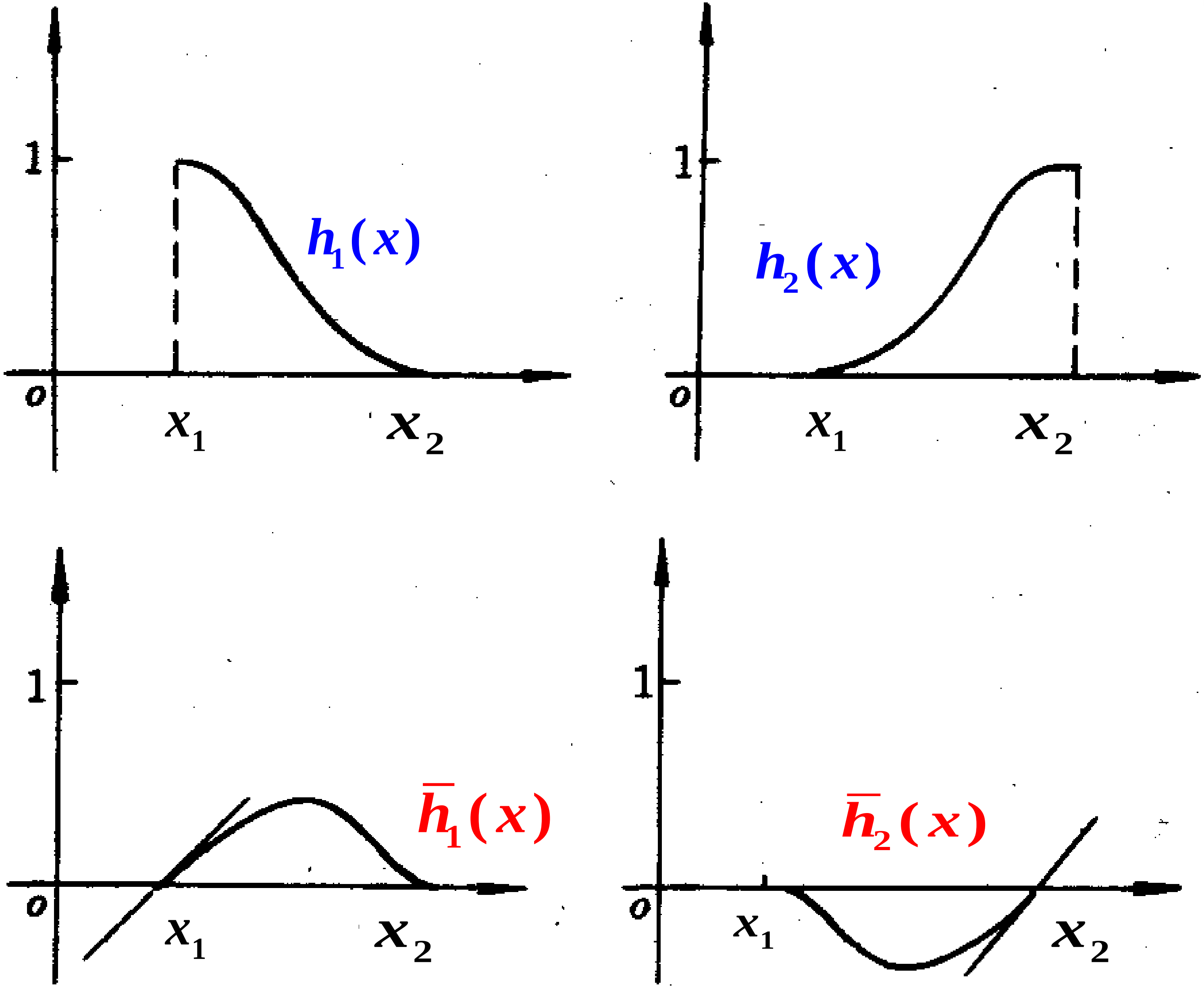
$$h_2(x)=(1+2\frac{x-x_2}{x_1-x_2})\quad(\frac{x-x_1}{x_2-x_1})^2,\quad \bar{h}_2(x)=(x-x_2)\quad(\frac{x-x_1}{x_2-x_1})^2$$

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\prod_{i=1}^{2}(x-x_i)^2$$

$$\left|R_3(x)\right|\le\frac{1}{4!}\max_{x_1\le x\le x_2}\left|f^{(4)}(\xi)\right|\cdot\max_{x_1\le x\le x_2}\left|\prod_{i=1}^{2}(x-x_i)^2\right|$$

$$\le\frac{1}{4!}\left(\frac{h}{2}\right)^4\max_{x_1\le x\le x_2}\left|f^{(4)}(\xi)\right|$$

其中$h=x_2-x_1$


1
o
x_1
x_2
$h_1(x)$
1
o
x_1
x_2
$h_2(x)$
1
o
x_1
x_2
$\bar{h}_1(x)$
1
o
x_1
x_2
$\bar{h}_2(x)$

不完全导数条件的Hermite插值

例： 试构造一个不高于4次的Hermite插值多项式

$H_4(x)$,使其满足条件

$$H_4(0)=0, \qquad H_4(1)=1, \qquad H_4(2)=1,$$

$$H_4'(0)=0, \qquad H_4'(1)=1,$$

解： 用Lagrange插值基函数法构造$H_4(x)$,设

$$H_4(x)=h_0(x)y_0+h_1(x)y_1+h_2(x)y_2+\bar{h}_0(x)y_0'+\bar{h}_1(x)y_1'$$

$$\because y_0=y_0'=0$$

$$\therefore H_4(x)=h_1(x)y_1+h_2(x)y_2+\bar{h}_1(x)y_1'$$

$$H_4(x)=h_0(x)y_0+h_1(x)y_1+h_2(x)y_2+\bar{h}_0(x)y_0'+\bar{h}_1(x)y_1'$$

$$h_0(x_0)=1, h_1(x_0)=0, h_2(x_0)=0, \bar{h}_0(x_0)=0, \bar{h}_1(x_0)=0 \quad H_4(x_0)=y_0$$

$$h_0(x_1)=0, h_1(x_1)=1, h_2(x_1)=0, \bar{h}_0(x_1)=0, \bar{h}_1(x_1)=0 \quad H_4(x_1)=y_1$$

$$h_0(x_2)=0, h_1(x_2)=0, h_2(x_2)=1, \bar{h}_0(x_2)=0, \bar{h}_1(x_2)=0 \quad H_4(x_2)=y_2$$

$$H_4'(x)=h_0'(x)y_0+h_1'(x)y_1+h_2'(x)y_2+\bar{h}_0'(x)y_0'+\bar{h}_1'(x)y_1'$$

$$h_0'(x_0)=0, h_1'(x_0)=0, h_2'(x_0)=0, \bar{h}_0'(x_0)=1, \bar{h}_1'(x_0)=0 \quad H'_4(x_0)=y'_0$$

$$h_0'(x_1)=0, h_1'(x_1)=0, h_2'(x_1)=0, \bar{h}_0'(x_1)=0, \bar{h}_1'(x_1)=1 \quad H'_4(x_1)=y'_1$$

(1)$h_1(x)$为四次多项式,且满足

$$h_1(0)=0,h_1(1)=1,h_1(2)=0,h_1'(0)=0,h_1'(1)=0$$

设$h_1(x)=(x-0)^2(x-2)(ax+b)$

由 $h_1(1)=1,h_1'(1)=0$ 得$\begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \quad a=1,b=-2$

$\therefore \boxed{h_1(x)=x^2(x-2)^2}$

(2)$h_2(x)$为四次多项式,且满足

$$h_2(0)=0,h_2(1)=0,h_2(2)=1,h_2'(0)=0,h_2'(1)=0$$

设$h_2(x)=\lambda[(x-0)(x-1)]^2$

由$h_2(2)=1$得$\lambda=1/4,\therefore \boxed{h_2(x)=\frac{1}{4}x^2(x-1)^2}$

(3)$\bar{h}_1(x)$为四次多项式,且满足

$$\bar{h}_1(0)=0,\bar{h}_1(1)=0,\bar{h}_1(2)=0,\bar{h}_1'(0)=0,\bar{h}_1'(1)=1$$

设$\bar{h}_1(x)=\lambda(x-0)^2(x-1)(x-2)$

由 $\bar{h}_1'(1)=1$ 得 $\lambda=-1$, $\therefore \boxed{\bar{h}_1(x)=-x^2(x-1)(x-2)}$

$$\therefore H_4(x)=h_1(x)y_1+h_2(x)y_2+\bar{h}_1(x)y_1'$$

$$=x^2(x-2)^2+\frac{1}{4}x^2(x-1)^2-x^2(x-1)(x-2)$$

$$=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$$

误差余项$R_4(x)=\dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^2(x-1)^2(x-2)$

用重节点差商构造*Hermite*插值。

对差商$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$中，若有某些节点相重，

由$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$可定义重节点差商

如：对$f[x_0,x_0]=\lim\limits_{x\to x_0} f[x_0,x]$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\\ \lim\limits_{\xi\to x_0}\dfrac{f'(\xi)}{1!}=\dfrac{f'(x_0)}{1!}=f'(x_0)\end{cases}$$

类似地 $f[x,x]=\lim\limits_{x_0,x_1\to x} f[x_0,x_1]$

$$=\lim_{\xi\to x}\frac{f'(\xi)}{1!}=\frac{f'(x)}{1!}$$

由此可得到一般重节点差商的表达式

$$\forall x \in R^n,\ f\underbrace{[x, x, \cdots, x]}_{k+1\text{个}} = \lim_{x_0, x_1, \cdots, x_k \to x} f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$$

$$= \lim_{\xi \to x} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$$

重节点差商在后面插值中可以用来简化带导数条件的插值多项式。

用重节点差商构造*Hermite*插值。

$$f[\underbrace{x,\ x,\cdots,\ x}_{k+1}]=\lim_{x_0,\ x_1,\cdots,\ x_{k-1}\to x} f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x]=\frac{f^{(k)}(x)}{k!}$$

例　　求一个四次插值多项式$H(x)$，使

$x=0$时，$H(0)=-1$，$H'(0)=-2$;

$x=1$时，$H(1)=0$，$H'(1)=10$，$H''(1)=40$.

并写出插值余项的表达式。

解： 由于在$x=0$处有一阶导数值的插值条件，所以它是“二重节点”；而在$x=1$处有直到二阶导数值的插值条件，所以$x=1$是“三重节点”。因此，利用重节点差商公式可以作出下列差商表。

$H(0)=-1,\ H'(0)=-2;$

$H(1)=0,\ H'(1)=10,\ H''(1)=40$

$$f[x, x, \cdots, x]=\frac{f^{(k)}(x)}{k!}$$

x_i	y_i	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0	−1				
0	−1	−2			
1	0	1	3		
1	0	10	9	6	
1	0	10	40/2！ =20	11	5

根据Newton插值公式，插值多项式为

$$H(x)=-1-2x+3x^2+6x^2(x-1)+5x^2(x-1)^2$$

且插值余项为

$$R(x)=\frac{1}{5!}f^{(5)}(\xi)x^{2}(x-1)^{3}, 0<\xi<1,$$

其中$f(x)$是被插函数。