

Алгоритмы и структуры данных

Алгоритм Карацубы умножения чисел

Александр Куликов

Сложение чисел: $O(n)$

перенос:	1			1	1	1	
		1	1	0	1	0	1 (53 ₂)
		1	0	0	0	1	1 (35 ₂)
		<hr/>					
	1	0	1	1	0	0	0 (88 ₂)

Умножение чисел: $O(n^2)$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ + \\ \hline 1 \end{array} \begin{array}{l} (13_2) \\ (11_2) \\ (1101 \times 1) \\ (1101 \times 1, \text{сдвинутое на } 1) \\ (1101 \times 0, \text{сдвинутое на } 2) \\ (1101 \times 1, \text{сдвинутое на } 3) \\ (143_2) \end{array}$$

$$y = \begin{cases} 2 \lfloor \frac{y}{2} \rfloor, & \text{если } y \text{ чётно,} \\ 1 + 2 \lfloor \frac{y}{2} \rfloor, & \text{если } y \text{ нечётно.} \end{cases}$$

$$x \cdot y = \begin{cases} 2(x \cdot \lfloor \frac{y}{2} \rfloor), & \text{если } y \text{ чётно,} \\ x + 2(x \cdot \lfloor \frac{y}{2} \rfloor), & \text{если } y \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Псевдокод

процедура `MULTIPLY(x, y)`

{Вход: множители x и y , где $y \geq 0$.}

{Выход: xy .}

если $y = 0$: вернуть 0

$z \leftarrow \text{MULTIPLY}(x, \lfloor y/2 \rfloor)$

если y чётно:

 вернуть $2z$

иначе:

 вернуть $x + 2z$

$$x = \boxed{x_L} \boxed{x_R} = 2^{n/2}x_L + x_R$$

$$y = \boxed{y_L} \boxed{y_R} = 2^{n/2}y_L + y_R$$

$$xy = (2^{n/2}x_L + x_R)(2^{n/2}y_L + y_R) = 2^n x_L y_L + 2^{n/2}(x_L y_R + x_R y_L) + x_R y_R$$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$xy = 2^n x_L y_L + 2^{n/2} (x_L y_R + x_R y_L) + x_R y_R$$

$$x_L y_L \quad x_R y_R \quad (x_L + x_R)(y_L + y_R)$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

Псевдокод алгоритма Карацубы

процедура KARATSUBA(x, y)

{Вход: положительные целые числа x и y .}

{Выход: xy .}

$n \leftarrow \max(\text{размер } x, \text{размер } y)$

если $n = 1$: вернуть xy

$x_L, x_R \leftarrow$ левые $\lceil n/2 \rceil$, правые $\lfloor n/2 \rfloor$ битов x

$y_L, y_R \leftarrow$ левые $\lceil n/2 \rceil$, правые $\lfloor n/2 \rfloor$ битов y

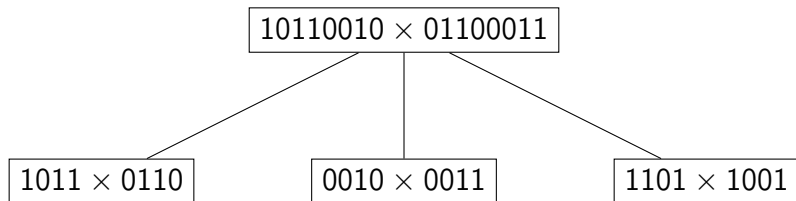
$P_1 \leftarrow \text{KARATSUBA}(x_L, y_L)$

$P_2 \leftarrow \text{KARATSUBA}(x_R, y_R)$

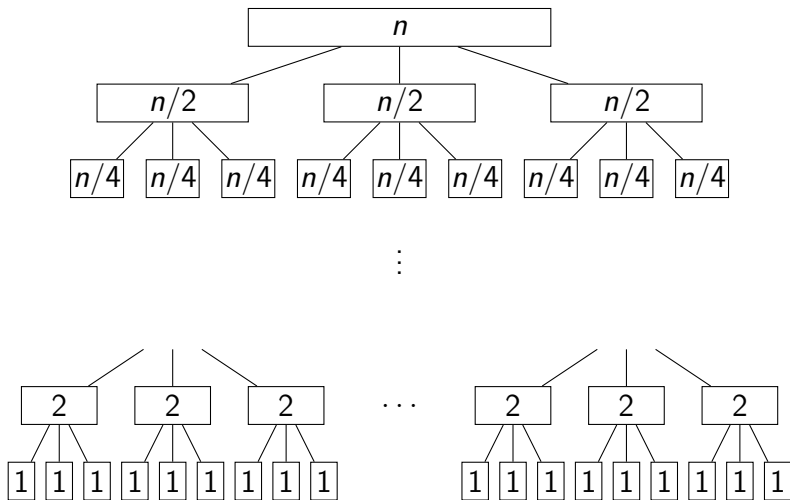
$P_3 \leftarrow \text{KARATSUBA}(x_L + x_R, y_L + y_R)$

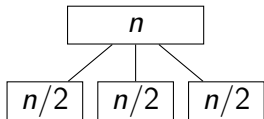
вернуть $P_1 \times 2^{2\lfloor n/2 \rfloor} + (P_3 - P_1 - P_2) \times 2^{\lfloor n/2 \rfloor} + P_2$

Дерево рекурсии

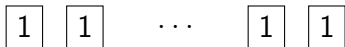


Дерево рекурсии





\vdots



Оценка на время работы