4

July 23, 2021

1 Aplicações em Cálculo Diferencial e Integral

De modo geral, o principal objetivo do curso é garantir que seus alunos estejam proeficientes no uso de `SymPy` no Cálculo. Na minha opinião, esse é o capítulo mais importante do curso. Dê seu máximo para absorver o conteúdo aqui apresentado.

Antes de comerçarmos, certifique-se que fez as devidas importações e atribuições:

[1]:
```python
from sympy import *
x, y, z = symbols('x y z')
init_printing(use_unicode=True, use_latex='mathjax')
```

1.1 Intervalos

Nós sabemos que o Cálculo é, genericamente, o estudo das mudanças. E nós costumamos definir intervalos para trabalhar com nossas funções e expressões. É bem simples de criá-los e utilizá-los no `SymPy`.

Para criar um intervalo, criamos um objeto a partir da classe `Interval` e/ou um método seu para definir se está aberto em algum dos lados. Veja os exemplos:

[2]:
```python
# Intervalo Fechado
Interval(0,10)
```

[2]: $[0, 10]$

[3]:
```python
# Intervalo Aberto
Interval.open(-10, 20)
```

[3]: $(-10, 20)$

[4]:
```python
# Intervalo Aberto em um dos lados
Interval.Ropen(10,30) # R - Direita
```

[4]: $[10, 30)$

[5]:
```python
Interval.Lopen(10,30) # L - Direita
```

[5]: $(10, 30]$

[6]:
```
Interval(0,oo) # oo representa o infinito em sympy. Note que onde oo estiver␣
↪será aberto.
```

[6]: $[0, \infty)$

1.2 Análises de Domínio/Intervalo

Existem diversas funções embutidas no SymPy para avaliar o comportamento das funções/expressões ao longo de seu domínio ou de um intervalo específico. Normalmente elas retornarão um booleano.

1.2.1 Verificar se é crescente ou decrescente.

[7]:
```
## x² em seu domínio não é crescente
is_increasing(x**2)
```

[7]: False

[8]:
```
## x² em (0, oo) é crescente
is_increasing(x**2, Interval.open(0, oo))
```

[8]: True

[9]:
```
## O contrário vale para decreasing
is_decreasing(x**2, Interval.open(-oo, 0))
```

[9]: True

Podemos verificar também se ela é estritamente crescente ou decrescente, ou seja, se ela é injetiva.

[10]:
```
## x³ é crescente em todo seu domínio. (d/dx = 3x² >= 0)
is_increasing(x**3)
```

[10]: True

[11]:
```
## x³ não é estritamente crescente em seu domínio (3*0² = 0)
is_strictly_increasing(x**3)
```

[12]:
```
## 1/(e^x) é estritamente decrescente em seu domínio
is_strictly_decreasing(1/(exp(x)))
```

[12]: True

Podemos também verificar se ela é monótona com is_monotonic(). Para finalizar, podemos verificar se há pontos (e quais são) com singularidades. Ou seja, que requerem certa atenção. Normalmente, são pontos que não têm limite.

[13]:
```
singularities(1/x,x)
```

[13]: $\{0\}$

1.3 Limites

Assim como veremos posteriormente nas derivadas e nas integrais, há duas formas de criar e calcular limites no SymPy. A primeria forma é através da classe Limit, que criará um limite e não calculará seu valor. Ou seja, utilize ela para armazenar a expressão do limite. Caso queira somente calcular o limite. Utilizamos a função limit().

[14]:
```
Limit(sin(x)/x, x, 0, '+') ## sin(x)/x, x -> 0+
```

[14]:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$$

[15]:
```
Limit(1/x, x, 0, '-') ## sin(x)/x, x -> 0-
```

[15]:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$$

[16]:
```
limit(sin(x)/x, x, 0, '+')
```

[16]:

$$1$$

[17]:
```
limit(1/x, x, 0) # '+' por padrão
```

[17]:

$$\infty$$

[18]:
```
limit(1/x, x, 0, '-')
```

[18]:

$$-\infty$$

[19]:
```
limit(1/x, x, 0, '+-') # Dois lados
```

[19]:

$$\tilde{\infty}$$

[20]:
```
my_sin = Limit(sin(x)/x, x, 0, '+')
my_sin.doit() # Método doit() calcula uma expressão.
```

[20]:

$$1$$

1.4 Derivadas

Assim com os limites, podemos criar a derivada (sem calculá-la) através da classe Derivative(). E calcular diretamente através da diff().

[21]:
```
Derivative(exp(2*x**3),x)
```

[21]:

$$\frac{d}{dx} e^{2x^3}$$

[22]:
```
diff(sin(x**2),x)
```

[22]:

$$2x \cos\left(x^2\right)$$

[23]:
```
diff(sin(x**2),x, x) ## Calcular a segunda derivada
```

[23]:

$2\left(-2x^{2}\sin\left(x^{2}\right)+\cos\left(x^{2}\right)\right)$

[24]:
```
diff(sin(x**2),x, x, x) ## Calcular a terceira derivada
```

[24]:
$-4x\left(2x^{2}\cos\left(x^{2}\right)+3\sin\left(x^{2}\right)\right)$

[25]:
```
diff(sin(x**2),x, 3) ## Calcular a terceira derivada de outra forma
```

[25]:
$-4x\left(2x^{2}\cos\left(x^{2}\right)+3\sin\left(x^{2}\right)\right)$

[26]:
```
diff(sin(x**2),x, 10) ## Calcular a décima derivada
```

[26]:
$32\left(-32x^{10}\sin\left(x^{2}\right)+720x^{8}\cos\left(x^{2}\right)+5040x^{6}\sin\left(x^{2}\right)-12600x^{4}\cos\left(x^{2}\right)-9450x^{2}\sin\left(x^{2}\right)+945\cos\left(x^{2}\right)\right)$

[27]:
```
my_deriv = Derivative(exp(2*x**3),x)
my_deriv.doit()
```

[27]:
$6x^{2}e^{2x^{3}}$

[28]:
```
## Podemos, com o método diff()
expr = exp(2*x**3)
expr.diff(x)
```

[28]:
$6x^{2}e^{2x^{3}}$

[29]:
```
expr.diff(x,3) # Terceira derivada
```

[29]:
$12\left(18x^{6}+18x^{3}+1\right)e^{2x^{3}}$

1.5 Integrais

Assim como os Limites e as Derivadas que vimos acima, podemos criar uma Integral através da classe Integral() caso queiramos ter somente a expressão, e caso queiramos o resultado de uma Integral, basta utilizar a função integrate().

O Sympy não acresce a constante de integração nas Integrais Indefinidas, então é importante se lembrar delaa quando for resolver algum exercício.

[30]:
```
Integral(1/x, x)
```

[30]:
$$\int\frac{1}{x}\,dx$$

[31]:
```
Integral(1/x, (x, 1, 10)) # Note que passamos (simbolo, inf, sup)
```

[31]:
$$\int\limits_{1}^{10}\frac{1}{x}\,dx$$

[32]:
```
integrate(1/x, (x,1,10))
```

[32]:
$\log\left(10\right)$

[33]:
```
my_integral = Integral(1/x + 1/y, (x, 1, 10), (y, 1, 10)) # Integral dupla,␣
↪duas variáveis.
my_integral
```

[33]:

$$\int\limits_{1}^{10}\int\limits_{1}^{10}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\,dx\,dy$$

[34]:
```
my_integral.doit()
```

[34]:

$$18\log{(10)}$$

[35]:
```
Integral(exp(x**2 - 10), x,x) # Integral dupla indefinida, mesma variável
```

[35]:

$$\iint e^{x^2-10}\,dx\,dx$$

1.6 Outras funções

1.6.1 Séries

Você pode utilizar o método series() em uma expressão para fazer sua expansão em série.

[36]:
```
asin(x).series(x,0, 10) # (x, x_0, n)
```

[36]:

$$x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\frac{35x^9}{1152}+O\left(x^{10}\right)$$

1.6.2 Equações Diferenciais

Ao criar uma função simbólica, você pode utilizar derivadas e a função dsolve() para encontrar a solução de uma expressão e ou equação diferencial. Nesse caso, o SymPy insere as constantes quando necessário.

[37]:
```
f = Function('f')
my_deq = Eq(Derivative(f(x),x,2),f(x))
my_deq
```

[37]:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x)=f(x)$$

[38]:
```
dsolve(my_deq)
```

[38]:

$$f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{x}$$

1.7 Exercícios

Como nos últimos capítulos, resolva os seguintes exercícios com o que aprendeu ao longo do curso.

1. Para cada uma das funções abaixo, encontre:

a) O domínio da função;

b) As assíntotas horizontais e verticais, caso existam;

c) Sua derivada, os intervalos de crescimento e decrescimento de f,os pontos de máximo e mínimo, caso existam;

d) Os intervalos onde o gráfico da f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.

$$f(x) = \frac{x^3}{x+4}$$

$$g(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 5}{x^2 - x}$$

$$h(x) = x^2 - 4x + \frac{x}{x-10}$$

2. Calcule:

$$\int x^3 - 2x^2 + 3x + 10 \quad dx$$

$$\int x^3 \cdot \sin(2x) \quad dx$$

$$\int_0^{10} \tan^3(x)\sec^3(x) \quad dx$$

$$\int_1^{\infty} -\frac{1}{x^2} \quad dx$$

3. Qual a menor distância vertical entre as funções $f(x) = 32x^2$ e $g(x) = -\frac{8}{x^2}$?