



Concursul Fractal, Secțiunea Seniori a VI-a Ediție din 21.09.2025

Problema 1. Marius și Alexandru joacă un joc. Pe o foaie de hârtie este scris un număr. Pe rând, aceștia scad din numărul scris pe foaie o cifră nenulă a sa și înlocuiesc numărul cu rezultatul obținut. De exemplu atunci când pe foaie este scris numărul 123, cel care mută ar putea lăsa pe foaie numerele $123 - 3 = 120$, $123 - 2 = 121$ și $123 - 1 = 122$. Câștigă acel jucător care scrie 0 pe foaie după mutarea sa. Dacă Marius este primul care scade cifra din numărul scris, pentru ce valori ale numărului inițial el va câștiga?

Problema 2. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ două șiruri de numere reale pozitive care, pentru orice $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$ satisfac următoarele relații:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^{2026} - y_n^{2025} + 1 \\ y_{n+1} = y_n^{2026} - x_n^{2025} + 1 \end{cases}$$

S-a constatat că una și aceeași valoare apare de o infinitate de ori în șirul y_n . Găsiți toate valorile posibile ale numerelor x_1 și y_1 .

Problema 3. În triunghiul ABC , fie I_A , I_B și I_C centrele cercurilor exînscrise triunghiului, opuse vârfurilor A , B și C respectiv. Arătați că dacă centrul de greutate al triunghiului $I_A I_B I_C$ coincide cu centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci aceste triunghiuri sunt echilaterale.

Problema 4. Fie $d(n)$ numărul de divizori naturali ai numărului natural n . Găsiți toate funcțiile $f(x)$ din mulțimea numerelor naturale nenule în mulțimea numerelor naturale nenule care satisfac $f(a) + f(b) = f(a + b)$ dacă $d(a)d(b)$ este pătrat perfect.