



Concursul Fractal, Secțiunea Seniori a VII-a Ediție din 19.10.2025

Problema 1. În triunghiul ABC , fie X , Y și Z picioarele perpendicularelor duse din A , B și C respectiv, iar H -ortocentrul acestuia. Fie M_1 și M_2 mijloacele segmentelor BC și AH . Arătați că M_1M_2 este mediatoarea segmentului YZ .

Problema 2. Fie ϕ unica soluție pozitivă a ecuației $x^2 + x = 1$. O vrăjitoare a transformat o prințesă în broască și a aruncat-o într-un lac unidimensional de lungime 1. Vrăjitoarea stă la unul dintre capetele lacului. În fiecare dimineață, vrăjitoarea aduce broasca mai aproape de ea, de la distanța inițială d la ϕd . În fiecare seară, broasca are opțiunea de a sări în direcția opusă vrăjitoarei, depărtându-se cu exact ϕ^2 . Broasca știe că undeva pe lac se află o insulă de lungime $\frac{1}{10^{2025}}$, iar dacă ajunge pe ea, prințul care locuiește acolo o va săruta, iar ea va redeveni prințesă. Arătați că, după un număr suficient de mare de zile, broasca va ajunge pe insulă și se va putea transforma înapoi în prințesă.

Problema 3. Într-o companie lucrează 100000 de angajați, fiecare având salariu distinct și stagiul de muncă distinct față de toți ceilalți. În decursul unui an de 365 de zile, începând cu prima zi, directorul aplică o metodă inovativă de organizare a muncii. În fiecare dimineață, el alege un angajat și alege dintre a chema la muncă:

- angajatul respectiv și toți angajații ce au și salariu, și stagiul de muncă mai mare ca el;
- angajatul respectiv și toți angajații ce au și salariu, și stagiul de muncă mai mic ca el.

În ultima zi al anului, directorul analizează prezența fiecărui angajat pe parcursul celor 364 de zile anterioare. Demonstrați că există doi angajați care au avut același program de lucru în toate cele 364 de zile.

Problema 4. Găsiți toate funcțiile $f(x)$ din mulțimea numerelor naturale nenule în mulțimea numerelor naturale nenule astfel încât pentru orice pereche de numere naturale a și b cu $a \neq b$ și care nu sunt egale în vreo ordine cu $(2, 4)$:

$$f(a)^b - f(b)^a \mid a^{f(b)} - b^{f(a)}$$

*Concursul durează 4 ore (240 de minute)
Fiecare problemă valorează câte 7 puncte*