



Concursul Fractal, Secțiunea Juniori a VII-a Ediție din 19.10.2025

Problema 1. Marius și Alexandru joacă un joc. Pe o foaie de hârtie sunt 100 de căsuțe, inițial goale. Între prima și a doua căsuță este desenat semnul înmulțirii, între a doua și a treia semnul adunării, apoi iar semnul înmulțirii, apoi iar semnul adunării și așa mai departe. Când jocul începe, fiecare jucător, începând cu Marius, scrie într-o căsuță goală un număr de la 1 la 100, care nu a mai fost scris încă. După 100 de mutări, se calculează rezultatul operației. Dacă rezultatul e par, câștigă Alexandru, dacă nu, Marius. Cine dintre cei doi jucători poate câștiga garantat?

Problema 2. Arătați că pentru orice pereche de numere naturale a și x există numere naturale c și b astfel încât $a^2 + x = \frac{c^2 + x}{b^2 + x}$

Problema 3. În triunghiul ABC , fie X , Y și Z picioarele perpendicularelor duse din A , B și C respectiv, iar H -ortocentrul acestuia. Fie M_1 și M_2 mijloacele segmentelor BC și AH . Arătați că M_1M_2 este mediatoarea segmentului YZ .

Problema 4. Arătați că pentru orice numere reale pozitive a , b și c :

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{a^2 + ac + c^2} \geq \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} \right)$$

*Concursul durează 4 ore (240 de minute)
Fiecare problemă valorează câte 7 puncte*