Esercizi di riepilogo
Corso di Laurea in Informatica A.A. 2007-2008
Docente: Andrea Loi

1. Trovare le radici complesse del polinomio:

$$z^4 + i$$

e dire come sono disposte nel piano.

2. VERO O FALSO (giustificando la risposta).

   - Un polinomio di quarto grado a coefficienti complessi ammette sempre 4 radici.
   - Un polinomio di quarto grado a coefficienti complessi ammette sempre 4 radici distinte.
   - Esistono polinomi a coefficienti reali che non ammettono radici reali.

3. Si trovino i vettori del piano ortogonali ai seguenti:

   - $i + 2j$
   - $2i - j$
   - $i + j$
   - $2i + j$
   - $3i + 4j$

4. Provare che i vettori:

$$u = 2i - 3j; v = 3i + 2j$$

costituiscono una base del piano. Si esprimano inoltre i vettori della base $\mathcal{B} = \{i, j\}$ nella base $\mathcal{B}' = \{u, v\}$. Si scriva inoltre il vettore $w = -5i + 2j$ nella base $\mathcal{B}'$, si scriva, infine, il vettore $z = u + 2v$ nella base $\mathcal{B}$.

5. Per quali valori di m i vettori:

$$u = (m-2)i + mj; v = -2i + mj$$

costituiscono una base per il piano? Stesso esercizio con:

$$u = (m+3)i + (m+1)j; v = -3i + (m-1)j$$

6. Si determinino m e n in maniera tale che i vettori:

$$u = (m+3n)i + (2m+n-1)j; v = (3m+n)i - (3m+4n+2)j$$

soddisfino le seguenti condizioni:

- u=v
- u=-v
- u=2v
- 3u=2v
- u+v=3i+5j

1. Si determini k in maniera tale che i vettori dello spazio:

$$u = (1,2,3); v = (0,k,1); w = (1,1,k)$$

Formino una base per lo spazio.

2. Calcolare il prodotto scalare e vettoriale tra i vettori $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Verificare inoltre la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz.

3. Si determini λ in maniera tale che il triangolo di vertici i punti $O = (0,0,0)$, $P_1 = (1,\lambda,2)$ e $P_2 = (1,2,1)$, abbia area pari a $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Si dica di che tipo di triangolo si tratta.

4. Siano $\mathbf{v} = (1,4,0)$ e $\mathbf{w} = (1,-2,-1)$. Calcolare l'area del parallelogramma di vertici $O, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}+\mathbf{v}$. Tale parallelogramma è un rombo, un rettangolo e(o) un quadrato?

5. Sia $\mathbf{v}$ un vettore di $\mathbb{R}^n$ e λ un numero reale. Dimostrare che $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\|$.

6. VERO O FALSO (giustificando la risposta).

   (a) Per tutti i vettori $\|\mathbf{v}\|$ e $\|\mathbf{w}\|$ in $\mathbb{R}^n$

   $$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|.$$

   (b) Esistono vettori $\|\mathbf{v}\|$ e $\|\mathbf{w}\|$ in $\mathbb{R}^n$

   $$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|.$$

7. Verificare che i vettori $(1, 2, -1)$ e $(-1, 0, -1)$ di $\mathbb{R}^3$ sono ortogonali. A partire da questi vettori costruire una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Fare lo stesso con i vettori $(2, 2, 1)$ e $(1, 1, -4)$.

8. VERO O FALSO (giustificando la risposta).

   (a) Se il prodotto di due matrici è uguale alla matrice nulla allora una delle due matrici è la matrice nulla.

   (b) Una matrice $n \times n$ è invertibile se solo se ha rango n.

   (c) Se A e B sono due matrci invertibili $n \times n$ allora il loro prodotto è una matrice invertibile $n \times n$.

   (d) Esitono due matrici A e B invertibili $n \times n$ tale che il loro prodotto non è invertibile.

   (e) Per ogni matrice A $n \times n$ e $k \in \mathbb{R}$ allora $\det(kA) = k \det A$.

   (f) Esiste una matrice $A \in M_{n,n}$ e $k \in \mathbb{R}$ tale che $\det(kA) = k \det A$.

9. Per quali valori del parametro λ la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile.

10. Trovare l'inversa (se possibile) della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

11. Trovare i valori del parametro reale λ in modo tale che il seguente sistema nelle incognite x, y, z abbia: (a) una soluzione unica, (b) nessuna soluzione, (c) un numero infinito di soluzioni:

$$\begin{cases} x - y + z = \lambda \\ 2x + y - z = \lambda + 1 \\ 5x + y - z = \lambda \end{cases}$$

12. VERO O FALSO (giustificare le risposte)

    (a) Un sistema omogeneo è sempre compatibile

    (b) Un sistema omogeneo di 3 equazioni in 9 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono da almeno 6 parametri.

    (c) Un sistema omogeneo di 3 equazioni in 9 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono esattamente da 6 parametri.

    (d) Se $A \in M_{m,n}$ con $m < n$, allora il sistema omogeneo $Ax = 0$ ammette soluzioni non banali.

13. VERO O FALSO (giustificare):

    (a) 5 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti;

    (b) 7 vettori in $\mathbb{R}^5$ sono linearmente dipendenti;

    (c) 6 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti.

14. Dimostrare che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

è una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$. Scrivere inoltre le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Se $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono le coordinate di un vettore rispetto alla base $\mathcal{B}'$ quali sono le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$?

15. VERO O FALSO (giustificare le risposte) (Una matrice quadrata $A \in M_n$ è ortogonale se $AA^T = I_n$, dove A^T è la trasposta di A e I_n denota la matrice identità $n \times n$).

    (a) Tutte la matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1;

    (b) Tutte la matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 oppure -1;

    (c) Esistono matrici ortogonali che non rappresentano una rotazione.

16. Per quali valori di λ i vettori $v_1 = 2\lambda\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $v_2 = \mathbf{j}$ sono linearmente indipendenti?

17. Provare che i vettori $\mathbf{v_1} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v_2} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v_3} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ sono linearmente indipendenti. Dire, inoltre se il vettore $\mathbf{j}$ è esprimibile come combinazione lineare di $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$, e se lo è, dire in quanti modi.

18. Dire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti; scrivere, quando possibile, un vettore come combinazione lineare dei rimanenti:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

    Stessa domanda per i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

19. Provare che i vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. Esprimere le coordinate del vettore

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B}$.

20. Trovare una base del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$