Il Teorema di Morse

Nicolò Leuzzi

Università degli Studi di Cagliari Facoltà di Scienze Corso di Laurea in Matematica





ARGOMENTI

- DEFINIZIONI
 - indice di un campo di vettori X
 - punti critici non degeneri
 - singolarità semplici
 - punti di massimo, di minimo e di sella
- 2 Alcuni Risultati
- 3 Il Teorema di Morse





L'Indice di un campo di vettori X

Sia M una varietà differenziabile orientata e compatta e scelgo una metrica Riemanniana su M. Sia X un campo di vettori su M avente singolarità isolata p. Sia C una curva semplice che delimita una regione semplice che contiene p nel suo interno. Oriento C come bordo di tale regione e definisco:

DEFINIZIONE

L'indice di X in p come l'intero I tale che:

$$\int_C d\varphi = 2\pi I$$

in cui φ è la funzione angolo tra il campo $e_1 = \frac{X}{|X|}$ e un altro campo unitario \bar{e}_1 definito su C.



Punti critici non degeneri e singolarità semplici

Definizione: Punto critico non degenere

Sia $f:M\to\mathbb{R}$ una funzione differenziabile su una varietà differenziabile M. $p\in M$ è detto *critico* per f se $df_p=0$. Un punto critico è detto non degenere se per qualche parametrizzazione $g:U\subseteq\mathbb{R}^2\to M$ di p=g(0,0) si ha che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^{2}(f \circ g)}{\partial x^{2}} & \frac{\partial^{2}(f \circ g)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^{2}(f \circ g)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^{2}(f \circ g)}{\partial y^{2}} \end{pmatrix} (0,0)$$

ha determinante non nullo.



Punti critici non degeneri e singolarità semplici

Definizione: Singolarità Semplice

Sia X un campo di vettori differenziabile su M e sia $p \in M$ un punto singolare di X. Sia $g: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$ una parametrizzazione di un intorno di p=g(0,0) in cui $X=\alpha(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\beta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$. $p \in M$ è una singolarità semplice per X se la matrice:

$$A_{g} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)_{0} & \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)_{0} \\ \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)_{0} & \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)_{0} \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo.



INDICE DI UN CAMPO DI VETTORI X PUNTI CRITICI NON DEGERERI SINGOLARITÀ SEMPLICI PUNTI DI MASSIMO, DI MINIMO E DI SELLA

Punti critici non degeneri e singolarità semplici

Proposizione 1

Sia $p \in M$ un punto critico di una funzione differenziabile $f: M \to \mathbb{R}$ su una varietà Riemanniana M. Allora: p è un punto critico non degenere di $f \iff p$ è una singolarità semplice di grad f.





Punti di massimo, di minimo e di sella

Sviluppando in serie di Taylor $h(x, y) = f \circ g(x, y)$ attorno a (0, 0) e posto d = h(x, y) - h(0, 0), allora:

$$d = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_0 x^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right)_0 y^2 \right\} + c$$

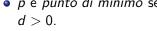
in cui c indica i termini di ordine superiore.

Se det(A) > 0:

Se det(A) < 0:

p è detto punto di sella.

- p è punto di massimo se d < 0:
- p è punto di minimo se







ALCUNI RISULTATI

LEMMA

Sia $p \in M$ una singolarità semplice di un campo di vettori differenziabile X su M, allora p è una singolarità isolata di M.

<u>Co</u>rollario

I punti critici non degeneri di una funzione $f: M \to \mathbb{R}$ sono isolati.

Proposizione 2

Sia $p \in M$ una singolarità semplice di un campo di vettori X differenziabile su M, allora l'indice I di X in p è:

- +1 se $det(A_g) > 0$;
- -1 se $\det(A_g) < 0$.





Il Teorema di Morse

Teorema di Morse

Sia $f:M\to\mathbb{R}$ una funzione differenziabile su una superficie compatta e orientata M tale che tutti i suoi punti critici sono non degeneri. Denotato con M, m ed s rispettivamente il numero di punti di massimo, di minimo e di sella di f, allora il numero M-s+m non dipende dall'applicazione f ed inoltre:

$$M-s+m=\chi(M)$$

in cui $\chi(M)$ è la caratteristica di Eulero-Poincarè di M.



DIMOSTRAZIONE

Scelgo una metrica Riemanniana su M.

Poichè i punti critici per f sono non degeneri \Longrightarrow le singolarità di grad f sono semplici e isolate.

 $\Longrightarrow I_i = \begin{cases} 1 & \text{in corrispondenza dei minimi o massimi} \\ -1 & \text{in corrispondenza dei punti di sella} \end{cases}$ Il numero M-s+m sarà quindi la somma degli indici dei punti singolari di grad f su M.

$$\mathit{M}-\mathit{s}+\mathit{m}=\sum_{i=1}^{\mathit{M}+\mathit{s}+\mathit{m}}\mathit{I}_i=\chi(\mathit{M})=rac{1}{2\pi}\int_{\mathit{M}}\mathit{K}\sigma$$

Per il *Teorema di Gauss-Bonnet* tale somma non dipende dal campo grad f, quindi non dipende dall'applicazione f, ed inoltre è uguale alla caratteristica di Eulero-Poincarè.