

Esercizi sulla teoria degli anelli

1. Sia \mathbb{H} l'insieme dei quaternioni, ovvero $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Si ricordi che, dato $q \in \mathbb{H}$, $q = a + bi + cj + dk$, $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ e che $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}}$.
 - a) si provino le seguenti uguaglianze: $\bar{\bar{q}} = q$, $\overline{q + q_1} = \bar{q} + \bar{q}_1$, $\overline{q \cdot q_1} = \bar{q} \cdot \bar{q}_1$, $q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, $\|q \cdot q_1\| = \|q\| \cdot \|q_1\|$.
 - b) si verifichi che \mathbb{H} forma un corpo (dove per $q \neq 0$, $q^{-1} = \|q\|^{-2} \cdot \bar{q}$).
2. Sul gruppo abeliano $A = (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$ si consideri la moltiplicazione definita da

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' + yy', xy' + x'y).$$

- (a) Dimostrare che in questo modo $(A, +, \cdot)$ risulta un anello unitario e $\mathbb{R} \times \{0\}$ è un suo sottoanello.
 - (b) Caratterizzare gli elementi invertibili ed i divisori dello zero di A .
 - (c) Dire se esistono elementi che non sono né divisori dello zero né invertibili.
 - (d) Trovare gli ideali massimali di A .
3. Sia A un anello commutativo unitario e I e J ideali di A . Definiamo

$$IJ = \{i_1 j_1 + \dots + i_n j_n \mid n \in \mathbb{N}, i_k \in I, j_k \in J, k = 1, \dots, n\}.$$

- (a) Provare che IJ è un ideale di A contenuto nell'ideale $I \cap J$ e mostrare con un esempio che $IJ \neq I \cap J$.
 - (b) Provare che se $A = I + J$ allora $IJ = I \cap J$.
 - (c) Provare che l'affermazione in (b) non è vera se A non è un anello unitario.
 - (d) se I e J sono due ideali massimali distinti, allora $IJ = I \cap J$;
 - (e) se I e J sono ideali principali, $I = (a)$ e $J = (b)$, allora $IJ = (ab)$.
 - (f) descrivere IJ e $I \cap J$ in $A = \mathbb{Z}$ e dedurre quando $IJ = I \cap J$.
4. Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$. Provare che A è un sottocampo di $M_2(\mathbb{Z}_3)$. Dimostrare inoltre che (A^*, \cdot) è un gruppo ciclico, determinare l'ordine di A^* e un suo generatore.

5. Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Provare che A è un sottocampo di $M_2(\mathbb{R})$ isomorfo a \mathbb{C} .
6. Sia A un anello unitario e I un ideale bilatero di A . Dimostrare che l'insieme $U_I = \{x \in U(A) \mid x - 1 \in I\}$ è un sottogruppo normale di $U(A)$.
7. Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
 - (a) Provare che A è un anello commutativo unitario, ma non è un dominio.
 - (b) Determinare l'ideale $N(A)$ degli elementi nilpotenti di A .
 - (c) Mostrare che ogni ideale proprio di A è contenuto in $N(A)$ e dedurre che A è un anello locale.
 - (d) Determinare tutti gli ideali di A .
8. Nell'anello $M_2(\mathbb{Z}_8)$, sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 5b \\ 4b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_8 \right\}$.
 - (a) Provare che A è un sottoanello commutativo di $M_2(\mathbb{Z}_8)$.
 - (b) Dire se A è un dominio.
9. Sia p un primo e $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid n, (m, n) = 1 \right\}$.
 - (a) Provare che $\mathbb{Z}_{(p)}$ è un sottoanello di \mathbb{Q} .
 - (b) Determinare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{(p)}$.
 - (c) Determinare gli ideali di $\mathbb{Z}_{(p)}$.
 - (d) Determinare gli ideali primi e massimali di $\mathbb{Z}_{(p)}$.
 - (e) Provare che $\mathbb{Z}_{(p)}$ è un anello locale.
10. Dimostrare che:
 - (a) ogni campo è un anello locale senza elementi nilpotenti non nulli;
 - (b) se \mathbb{Z}_m è locale e non ha elementi nilpotenti non nulli allora \mathbb{Z}_m è un campo;
 - (c) dare un esempio di anello locale senza elementi nilpotenti non nulli che non sia un campo.
11. Un anello commutativo unitario si dice *regolare* se per ogni $x \in A$ esiste $y \in A$ tale che $x = yx^2$. Dimostrare che:
 - (a) ogni campo è un anello regolare e se A è un dominio regolare allora A è un campo;

- (b) l'anello quoziente di un anello regolare è regolare;
 - (c) in un anello regolare ogni ideale primo è massimale;
 - (d) in un anello regolare ogni ideale principale è generato da un idempotente;
 - (e) se I e J sono due ideali di un anello regolare allora $IJ = I \cap J$;
 - (f) per ogni insieme non vuoto S e per ogni campo K , l'anello K^S è regolare.
12. Sia G un gruppo abeliano ed $\text{End}(G)$ l'insieme degli endomorfismi di G . Siano $f, g \in \text{End}(G)$ e si definisca $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, per $x \in G$. Sia \circ l'usuale composizione di funzioni, cioè $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ per $x \in G$.
- (a) Si dimostri che $(\text{End}(G), +, \circ)$ è un anello unitario.
 - (b) Sia A un anello unitario. Si dimostri che A si può identificare con un sottoanello di $\text{End}(G)$ per qualche gruppo abeliano G .
13. Sia G un gruppo abeliano e $f \in A = \text{End}(G)$.
- (a) Dimostrare che se f è suriettivo, allora f non è divisore destro dello zero in A .
 - (b) Dimostrare che se f è iniettivo, allora f non è divisore sinistro dello zero in A .
 - (c) Trovare un anello dove esistono divisori sinistri dello zero che non sono divisori destri dello zero (suggerimento: considerare l'anello $\text{End}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})$).
14. Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$.
- (a) Dimostrare che A è un sottoanello di $M_2(\mathbb{C})$.
 - (b) Sia $q = a + bi + cj + dk$ un elemento del corpo dei quaternioni \mathbb{H} . Si dimostri che l'applicazione $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow A$ definita da

$$\varphi(q) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha = a + ib, \quad \beta = c + id \in \mathbb{C}$$
 è un isomorfismo di anelli e pertanto di corpi.
 - (c) Si verifichi che

$$\det(\varphi(q)) = \|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$
 Si deduca che $\|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|$, per ogni $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$.
 - (d) Si verifichi che l'insieme dei quaternioni di norma 1 è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo (\mathbb{H}^*, \cdot) .
15. Determinare l'insieme degli endomorfismi unitari dei seguenti anelli: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.

16. Sia $f : A_1 \rightarrow A_2$ un omomorfismo di anelli unitari.
- (a) Provare che $f(U(A_1)) \subseteq U(A_2)$.
 - (b) Considerando l'omomorfismo canonico $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, mostrare che in (a) non vale l'uguaglianza se $n > 6$.
17. Sia A l'anello $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$
- (a) Trovare la caratteristica di A .
 - (b) Descrivere gli ideali (primi, massimali e principali) di A .
 - (c) Determinare a quale degli anelli $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$ e \mathbb{Z}_{60} è isomorfo l'anello A .
 - (d) Descrivere quali sono gli elementi invertibili e gli elementi nilpotenti di A .
18. Sia \mathbb{K} un campo e $A = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ (n fattori). Trovare gli ideali primi e massimali di A e dire quanti sono.
19. Nell'anello $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si considerino gli ideali $I = (2)$ e $J = (3)$. Dire se gli anelli quoziente A/I e A/J sono campi.
20. Nell'anello $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ sia $I = (5)$ e si consideri l'anello quoziente A/I .
- (a) Provare che se $a \equiv 0 \pmod{5}$, allora l'elemento $a + b\sqrt{5} + I$ è nilpotente.
 - (b) Provare che se $a \not\equiv 0 \pmod{5}$, allora l'elemento $a + b\sqrt{5} + I$ è invertibile.
 - (c) Determinare gli ideali di A/I .
21. Sia $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Per $\alpha = x + \sqrt{5}y \in A$ definiamo la norma di α come $N(\alpha) = x^2 - 5y^2$. Dimostrare che $M = \{\alpha \in A \mid N(\alpha) \text{ pari}\}$ è un ideale massimale di A .

Esercizi sui reticoli

1. Dimostrare che se un elemento di un reticolo distributivo e limitato ammette complemento, tale complemento è unico e che se $a \wedge b = 0$ e $a \vee b = 1$ allora $b = \bar{a}$.
2. Dimostrare che in ogni algebra di Boole B vale che $\overline{\bar{x}} = x$ e valgono le leggi di De Morgan, ovvero: $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ e $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$, per ogni $x, y \in B$.
3. Dimostrare che l'insieme degli ideali di un reticolo limitato L forma un reticolo completo (suggerimento: mostrare che l'insieme è chiuso per intersezioni arbitrarie).
4. Un anello commutativo unitario A si dice *Booleano*, se, per ogni $a \in A$, vale $a^2 = a$.
 - (a) Provare che la caratteristica di A è 2 e che A è un anello commutativo;
 - (b) Provare che A ha divisori dello zero qualora $|A| > 2$;
 - (c) Ogni ideale primo di A è massimale;
 - (d) Ogni ideale finitamente generato di A è principale.
5. Sia $(B, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ un'algebra di Boole: si dimostri che, definendo $a + b := (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$ e $a \cdot b := a \wedge b$, $(B, +, \cdot)$ è un anello Booleano.
Viceversa, sia A un anello Booleano e si definiscano $a \vee b := a + b + a \cdot b$, $a \wedge b = a \cdot b$ e $\bar{a} = 1 + a$: si dimostri che $(A, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ è un'algebra di Boole.
6. Sia I un ideale di un reticolo distributivo e limitato L . Dimostrare che esiste un ideale massimale che estende I (per massimale si intende la stessa nozione data per gli anelli).
7. Sia $f: L_1 \rightarrow L_2$ un omomorfismo di reticoli limitati. Dimostrare che l'insieme $I = \{x \in L_1 \mid f(x) = 0\}$ è un ideale di L_1 .
8. Sia L un reticolo distributivo e limitato. Un sottoinsieme non vuoto $F \subseteq L$ si dice un *filtro* di L se soddisfa le seguenti proprietà:
 - 1) $a \wedge b \in F$, per ogni $a, b \in F$;
 - 2) se $a \in F$ e $a \leq x$, per qualche $x \in L$, allora $x \in F$.

Dimostrare che:

- (a) $1 \in F$;
- (b) per ogni $a \in L$, l'insieme $\uparrow a = \{x \in L \mid a \leq x\}$ è un filtro di L ;
- (c) se L è finito ogni filtro è della forma $\uparrow a$;
- (d) se L è un'algebra di Boole, allora un sottoinsieme F di L è un filtro se e solo se l'insieme $I = \{\bar{x} \mid x \in F\}$ è un ideale di L , dove \bar{x} è l'unico complemento dell'elemento $x \in L$.

Esercizi sui polinomi

1. Sia A un anello commutativo unitario. Dimostrare che un polinomio $p(x) \in A[x]$ è nilpotente sse tutti i coefficienti di p sono nilpotenti.
2. Sia A un anello commutativo unitario e $p(x) \in A[x]$ con coefficiente direttivo invertibile e di grado $n > 0$. Dato l'ideale principale $I = (p(x))$, si dimostri che esiste una bigezione tra l'anello quoziente $A[x]/I$ e le classi laterali $r(x) + I$, dove $r(x)$ è un polinomio di grado minore di n oppure $r(x) = 0$.
3. Sia A un dominio. Dimostrare che $U(A[x]) = U(A)$. L'uguaglianza è vera anche nel caso in cui A non sia un dominio?
4. Sia A un anello commutativo unitario e I un ideale di A . Sia J l'insieme di tutti i polinomi che hanno coefficienti in I . Dimostrare che J è un ideale di $A[x]$ e che $A[x]/J \cong A/I[x]$.
5. Si consideri l'anello dei polinomi $\mathbb{Z}[x]$. Sia I l'insieme dei polinomi di $\mathbb{Z}[x]$ il cui termine di grado zero è pari. Verificare che I è un ideale di $\mathbb{Z}[x]$ e che non è principale.