Esercizi su indipendenza lineare,basi e dimensione

Corso di laurea in informatica A.A 2003-2004

Docente : Andrea Loi

Correzione Esercitazione

0. per quali valori di λ i vettori $v_1 = 2\lambda\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $v_2 = \mathbf{j}$ sono linearmente indipendenti?

Soluzione: Consideriamo la matrice $2x2$ avente come colonne le componenti dei vettori:
$\begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
essi saranno linearmente indipendenti quando il suo rango è 2, ossia quando $\lambda \neq 0$

1. Provare che i vettori $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{v}_2 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v}_3 = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, sono linearmente indipendenti. Dire inoltre se il vettore $\mathbf{j}$ è esprimibile come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ e, se lo è, dire in quanti modi.

Soluzione:

Consideriamo la matrice $3x3$ avente come colonne le componenti dei vettori: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, riducendo a gradini (o calcolando direttamente il determinante) si ha:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

quindi il rango vale tre, concludiamo che i tre vettori sono lin.indipendenti. Se $\mathbf{j}$ è esprimibile come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ allora esistono a, b, c tali che $\mathbf{j} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3$ ossia $\mathbf{j} = a(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + b(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + c(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2a - b - c = 0 \\ 2a + 2b - 2c = 1 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{4} \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

2 Vero o Falso:

- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti;
- 6 vettori in $\mathbb{R}^4$ sono sempre linearmente dipendenti;
- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti;

Soluzione:

- FALSO: consideriamo ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$ essi sono lin.indipendenti.
- VERO: infatti considerata la matrice costituita dai 6 vettori essa possiede al piú rango 4.
- FALSO: esistono vettori lin. indipendenti ma anche lin. dipendenti (esempio: vettori proporzionali)

3. Dire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti; scrivere, quando possibile, un vettore come combinazione lineare dei rimanenti:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

stessa domanda per i vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

consideriamo la matrice costituita dai primi tre vettori : $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

riducendo a gradini si ha $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, pertanto i tre vettori sono lin. indipendenti. Consideriamo la matrice costituita dai rimanenti tre vettori:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, riducendo a gradini si ha $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pertanto i tre vettori sono lin. dipendenti, infatti possiamo scrivere

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Provare che i vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. Esprimere le coordinate del vettore

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Soluzione:

Consideriamo la matrice costituita dai tre vettori $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Si ha $rango(A) = 3$ (lo possiamo verificare o calcolando direttamente il determinante e osservando che esso è diverso da zero oppure riducendo la matrice a gradini, i due metodi sono equivalenti.) pertanto i tre vettori essendo linearmente indipendenti formano una base di $\mathbb{R}^3$. Per ricavare le componenti del vettore $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ procediamo nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$, risolvendo si ottiene

$$\begin{cases} a = +x_1 - x_2 \\ b = +2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ c = -x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

5. Verificare che le soluzioni del seguente sistema omogeneo sono un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ 5x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

consideriamo la matrice associata al sistema $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, riducendo a gradini si ha $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{23}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pertanto lo spazio delle soluzioni è $S = \{(\frac{7}{11}t, \frac{23}{11}t, t)\}$, esso è un sottospazio vettoriale infatti presi due suoi elementi $s_1 = (\frac{7}{11}t_1, \frac{23}{11}t_1, t_1)$ e $s_2 = (\frac{7}{11}t_2, \frac{23}{11}t_2, t_2)$ si ha

$$s_1 + s_2 = (\frac{7}{11}(t_1 + t_2), \frac{23}{11}(t_1 + t_2), t_1 + t_2) \in S$$

e

$$\lambda s_1 = (\frac{7}{11}\lambda t, \frac{23}{11}\lambda t, \lambda t) \in S$$

6. Le soluzioni del seguente sistema sono un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 1 \\ 5x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

Consideriamo la matrice associata al sistema: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, riducendo a gradini si ha $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, per il t. di R-Capelli il sistema è incompatibile.

7. Trovare una base del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione:

Consideriamo la matrice costituita dai tre vettori:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, riduciamo a gradini: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pertanto una base potrebbe essere $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

8. Dimostrare che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

è una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$. Scrivere inoltre le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Verificare il risultato usando la matrice $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ del cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$. Se $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono le coordinate di un vettore rispetto alla base B' quali sono le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$?

Soluzione:

Una base di $\mathbb{R}^3$ è costituita da tre vettori linearmente indipendenti, verifichiamo quindi che la matrice costituita dai tre vettori ha rango tre: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Per scrivere le componenti del vettore rispetto alla base data possiamo procedere in due diversi modi:

1. $a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, risolvendo il sistema si ottiene

$$\begin{cases}a=0\\b=0\\c=1\end{cases}$$

2. $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, ottenendo ancora lo stesso risultato.

$M(\mathcal{B},\mathcal{B}^{'})=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}$ mentre il vettore $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}^{'}$ ha componenti $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, ricordando la seguente :

$$M(\mathcal{B},\mathcal{B}^{'})v_{B'}=v_B$$

si ha

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

in accordo con quanto ricavato precedentemente.

Considerando sempre la formula

$$M(\mathcal{B},\mathcal{B}^{'})v_{B'}=v_B$$

si ha

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$