Un Lemma di Margulis senza ipotesi sulla curvatura

Sunto: La "sistole nel punto x" (che chiamiamo $l(x)$) di una varietà riemanniana X^n è la lunghezza minimale di ogni laccio non banale basato in x. Quando la curvatura è negativa o nulla, ogni sfera piena di centro x e di raggio $\frac{l(x)}{4}$ è diffeomorfa (tramite la mappa esponenziale) a una sfera piena di $\mathbb{R}^n$, quindi si può ricostruire la varietà incollando un numero calcolabile di sfere piene di $\mathbb{R}^n$ di raggio conosciuto.

Il classico "lemma" di Margulis dice che, se la curvatura di X^n è compresa tra -1 e 0, allora *esiste* un punto x tale che $l(x) \geq \varepsilon_0(n)$, dove $\varepsilon_0(n)$ è una costante universale. Un altra versione (dovuta a M. Gromov) dice che, se si aggiunge l'ipotesi "diametro$(X) \leq D$", allora *per ogni* x, si ha $l(x) \geq \frac{C(n)}{\sinh^{n-1}(D)} \varepsilon_0(n)$, dove $C(n)$ è una costante universale.

Applicazioni di questo risultato di Gromov sono teoremi di finitezza topologica e di compattezza dell'insieme delle varietà considerate. Una delle applicazioni del lemma di Margulis è l'esistenza di una partizione della varietà in una "parte spessa" $= \{x \ : \ l(x) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}\}$ e una "parte sottile" $= \{x \ : \ l(x) < \frac{\varepsilon_0}{2}\}$ tali che
- ogni componente connessa della "parte sottile" ha la topologia del "cilindro" $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}$,
- se si ammette un "incertezza" $\varepsilon << \varepsilon_0$ sulla distanza tra due punti qualunque, c' è un numero limitato di geometrie possibili per la "parte spessa".

Questi risultati sono infatti corollari di un risultato tipo "azione di gruppi" dello stesso Margulis, il quale dice che, se consideriamo un azione isometrica (senza punti fissi) d'un gruppo discreto Γ sul rivestimento universale $\widetilde{X}$ di X, per ogni $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ l'insieme dei $\gamma \in \Gamma$ tali che $d(\tilde{x}, \gamma\,\tilde{x}) < \varepsilon_0(n)$ genera un sottogruppo nilpotente di Γ.

Lo scopo di questa conferenza è di mostrare che le ipotesi sulla curvatura non sono necessarie e che risultati e applicazioni del tipo visto sopra si possono dedurre direttamente delle proprietà algebriche del gruppo Γ.