Esercizi geometria analitica nel piano

Corso di Laurea in Informatica

Docente: Andrea Loi

Correzione

1. Scrivere le formule del cambiamento di riferimento ottenuto da una rotazione antioraria di $\frac{\pi}{6}$. Quali sono le coordinate del punto $(1,1)$ nel nuovo sistema di riferimento?

   Soluzione: Indichiamo con x', y' le nuove coordinate e con x, y le vecchie, allora le formule per passare dalle vecchie alle nuove coordinate si ottengono dalla seguente relazione tra matrici:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   che è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x' & = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\,, \\ y' & = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\,. \end{cases}$$

   Per trovare le nuove coordinate del punto $(1,1)$ basta sostituire nel sistema le vecchie coordinate e ricavarne le nuove, che sono: $(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2})$.

2. Scrivere le formule del cambiamento di riferimento ottenuto da una rotazione antioraria di $\frac{\pi}{6}$ e una traslazione T di vettore $v = 3i + j$. Trovare le coordinate del punto $P = (1,2)$ nel nuovo sistema di riferimento.

   Soluzione: Indichiamo con x', y' le nuove coordinate e con x, y le vecchie, allora le formule per passare dalle vecchie alle nuove coordinate si ottengono dalla seguente relazione tra matrici:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

che è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x' &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 3) + \frac{1}{2}(y - 1)\,, \\ y' &= -\frac{1}{2}(x - 3) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y - 1)\,. \end{cases}$$

Anche in questo caso per trovare le nuove coordinate del punto P basta sostituire nel sistema le vecchie coordinate. Si ricava che $P = (\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2})$.

3. Trovare le equazioni della retta $r:\ y - x = 0$ in un sistema di riferimento ottenuto con una rotazione oraria di $\frac{\pi}{4}$.

   Soluzione: Indichiamo con x', y' le nuove coordinate e con x, y le vecchie, allora le formule per passare dalle nuove alle vecchie coordinate si ottengono dalla seguente relazione tra matrici:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

   che è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\,, \\ y &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\,. \end{cases}$$

   Per trovare le equazioni della retta $r:\ y - x = 0$ nel nuovo sistema di riferimento basta sostituire le espressioni di x e y in funzione di x', y' nell'equazione cartesiana della retta. In questo modo otteniamo:

$$(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y') - (\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y') = 0$$

   ossia $r:\ x' = 0$.

4. Verificare che le rette $r: \ x - 2y + 1 = 0$ e $s: \ 2x + y - 1 = 0$ sono ortogonali. Si scrivano le equazioni del cambiamento di riferimento tale che le rette r e s siano gli assi coordinati e tale che $(0,0)$ abbia coordinate positive nel nuovo sistema di riferimento.

   Soluzione: Le rette r e s sono ortogonali tra loro, infatti il prodotto scalare tra i parametri direttori delle due rette è: $<(2,1),(1,-2)>= 0$. Indichiamo ora con x', y' le nuove coordinate e con x, y le vecchie, allora le formule per passare dalle vecchie alle nuove coordinate si ottengono nel seguente modo:

$$\begin{cases} x' & = \pm \frac{2x+y-1}{\sqrt{3}} \,, \\ y' & = \pm \frac{x-2y+1}{\sqrt{3}} \,. \end{cases}$$

   Imponendo che il punto $(0,0)$ abbia coordinate positive si ottengono le seguenti formule:

$$\begin{cases} x' & = - \frac{2x+y-1}{\sqrt{3}} \,, \\ y' & = \frac{x-2y+1}{\sqrt{3}} \,. \end{cases}$$

5. Verificare che l'equazione della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ resta invariata per una qualsiasi rotazione piana intorno all'origine.

   Soluzione: Consideriamo il sistema associato ad una rotazione antioraria di un angolo ϕ intorno all'origine:

$$\begin{cases} x & = \cos\phi \, x' + \sin\phi \, y' \,, \\ y & = -\sin\phi \, x' + \cos\phi \, y' \,. \end{cases}$$

   Sostituendo le componenti delle x, y in funzione delle x', y' otteniamo:

$$(\cos\phi \, x' + \sin\phi \, y') + (-\sin\phi \, x' + \cos\phi \, y') = 1$$

   ossia

$${x'}^2 + {y'}^2 = 1 \,.$$

Se consideriamo invece il sistema associato ad una rotazione oraria di un angolo ϕ intorno all'origine:

$$\begin{cases} x &= \cos\phi\, x' \,-\, \sin\phi\, y'\,, \\ y &= \sin\phi\, x' \,+\, \cos\phi\, y'\,. \end{cases}$$

Sostituendo le componenti delle x, y in funzione delle x', y' otteniamo:

$$(\cos\phi\, x' \,-\, \sin\phi\, y') \,+\, (\sin\phi\, x' \,+\, \cos\phi\, y'\,) \,=\, 1$$

ossia

$$x'^2 \,+\, y'^2 \,=\, 1\,.$$

6. Trovare le equazioni che rappresentano la simmetria del piano rispetto alla retta di equazione cartesiana $r:\ 2x \,+\, y \,-\, 1 \,=\, 0$.

   Soluzione: Sia n la retta perpendicolare ad r e passante per il punto di coordinate (x_0, y_0), essa ha coordinate parametriche:

$$\begin{cases} x &= x_0 \,+\, 2t\,, \\ y &= y_0 \,+\, t\,. \end{cases}$$

   Detto H il punto d'intersezione tra le due rette si ha

$$2(x_0 \,+\, 2t\,) \,+\, (y_0 \,+\, t\,) \,-\, 1 \,=\, 0$$

   da cui si ricava il parametro relativo al punto H: $t_H \,=\, \frac{1}{5} - \frac{2x_0}{5} - \frac{y_0}{5}$. Ora il punto simmetrico S di (x_0, y_0) si trova sulla retta n e corrisponde al parametro $t_S \,=\, 2t_H$, quindi si ottiene

$$\begin{cases} x &= x_0 \,+\, 4(\frac{1}{5} \,-\, \frac{2x_0}{5} \,-\, \frac{y_0}{5})\,, \\ y &= y_0 \,+\, 2(\frac{1}{5} \,-\, \frac{2x_0}{5} \,-\, \frac{y_0}{5})\,, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x &= -\frac{3}{5}x_0 - \frac{4}{5}y_0 + \frac{4}{5}\,, \\ y &= -\frac{4}{5}x_0 + \frac{3}{5}y_0 + \frac{2}{5}\,. \end{cases}$$

Ponendo $x_0 = x\,, y_0 = y$ e $x = x'\,, y = y'$ otteniamo le equazioni della simmetria rispetto alla retta r:

$$\begin{cases} x' &= -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{4}{5}\,, \\ y' &= -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}\,. \end{cases}$$