Esercizi su indipendenza lineare, basi e dimensione
Corso di Laurea in Informatica A.A. 2003-2004
Docente: Andrea Loi

0. Per quali valori di λ i vettori $v_1 = 2\lambda\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $v_2 = \mathbf{j}$ sono linearmente indipendenti?

1. Provare che i vettori $\mathbf{v_1} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v_2} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v_3} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ sono linearmente indipendenti. Dire, inoltre se il vettore $\mathbf{j}$ è esprimibile come combinazione lineare di $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$, e se lo è, dire in quanti modi.

2. Vero o falso:
   - 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti;
   - 6 vettori in $\mathbb{R}^4$ sono linearmente dipendenti;
   - 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti.

3. Dire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti; scrivere, quando possibile, un vettore come combinazione lineare dei rimanenti:
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Stessa domanda per i vettori
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Provare che i vettori:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. Esprimere le coordinate del vettore

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B}$.

5. Verificare che le soluzioni del seguente sistema omogeneo sono un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ 5x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

6. Le soluzioni del seguente sistema sono un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 1 \\ 5x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

7. Trovare una base del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8. Dimostrare che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

è una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$. Scrivere inoltre le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Verificare il risultato usando la matrice $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ del cambiamento di dalla base canonica $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$. Se $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono le coordinate di un vettore rispetto alla base $\mathcal{B}'$ quali sono le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$?