Nome e mail
Matricola

Algebra 2 13 Settembre 2016

Esercizio 1 Dimostrare che $(\mathbb{Z}_8, +)$ e $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{15})$ non sono isomorfi.

Esercizio 2 Sia $A = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.

(1) Dimostrare che A è un sottoanello di $M_2(\mathbb{C})$.

(2) Sia $q = a + bi + cj + dk$ un elemento del corpo dei quaternioni $\mathbb{H}$. Si dimostri che l'applicazione $\varphi : \mathbb{H} \to A$ definita da

$$\varphi(q) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \ \alpha = a + bi, \ \beta = c + id \in \mathbb{C}$$

è un isomorfismo di anelli e pertanto di corpi.

(3) Si verifichi che

$$\det(\varphi(q)) = \|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Si deduca che $\|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|$, per ogni $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$.

(4) Si verifichi che l'insieme dei quaternioni di norma 1 è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo $(\mathbb{H}^*, \cdot)$.