Università degli Studi di Cagliari
Programma “Visiting Professors” Il 31 Marzo 2011

Dal baricentro euclideo ai teoremi di rigidità

(*conferenza di Sylvestre Gallot, Visiting Professor*)

1 Riassunto :

Partando dal baricentro euclideo, dimostreremo che ha una proprietà di contrazione, cioè, che si maggiora la distanza tra i baricentri di due misure μ e μ' in funzione della "distanza" tra μ e μ'. Mostreremo come la nozione di baricentro (e la proprietà di contrazione) si generalizzano (per esempio) ai spazi simmetrici.
Su uno spazio localmente simmetrico (X, g_0) (di curvatura negativa o nulla), consideriamo un altra metrica riemanniana qualunque g. Usando una famiglia di misure $x \mapsto \mu_x$ (dove x percorre X), di densità $e^{-c\, d_g(x,\,\cdot\,)}$, si costruisce la mappa $F : x \mapsto$ baricentro di μ_x di X in se stesso. Usando la proprietà di contrazione del baricentro, si maggiora la distanza tra i due punti $F(x)$ e $F(x')$ in funzione della distanza tra x e x'.
Cosi otteniamo una disuguaglianza del tipo $|\det(d_yF)| \leq \left(\dfrac{\mathrm{Ent}(g)}{\mathrm{Ent}(g_0)}\right)^n$, dove $Ent(g)$ è l'entropia della metrica g (quando si muove seguendo il sistema dinamico dato dalle geodetiche della metrica g, l'entropia misura, per una posizione iniziale conosciuta con precisione piccola ε, come si è deteriotata questa precisione all'istanto t).
Integrando questa disuguaglianza, si dimostra che, tra tutte le metriche che hanno lo stesso volume, è quella localmente simmetrica che corrisponde al chaos (cioè all'entropia) minimale. Se la curvatura di g è maggiora della curvatura di g_0, questo implica che $\mathrm{Volume}(g) \geq \mathrm{Volume}(g_0)$ risolvendo una coniettura di M. Gromov sul volume minimale di una varietà. L'uguaglianza $\mathrm{Volume}(g) = \mathrm{Volume}(g_0)$ implica che F è un isometria di (X, g) su (X, g_0), dando una ridimostrazione costruttiva del teorema di rigidità di Mostow che generalizziamo alle varietà di Einstein di dimensione 4. In fine, siccome l'entropia e il volume sono invarianti del sistema dinamico associato alle mosse lungo le geodetiche, dimostriamo che, se una varietà (Y, g) ha un sistema dimamico coniugato a quello di (X, g_0), allora (Y, g) è isometrica a (X, g_0).

2 Testo (manoscritto) della conferenza :

① Baricentro euclideo:

Sia $(E, \underbrace{\langle \cdot, \cdot \rangle}_{\boxed{\text{prodotto scalare}}})$ uno spazio euclideo.

a) Definizione classica:

Classicamente, si definisce il baricentro dei punti $(a_i, \lambda_i)_{i=1}^{n}$ ($\sum \lambda_i \neq 0$) come l'unico punto $g \in E$ tale che

$$(1) \quad \sum_i \lambda_i \underbrace{(a_i - g)}_{\text{vettore } \overrightarrow{ga_i}} = \vec{0}$$

Questo punto è dato dalla formula

$$g = \frac{1}{\sum \lambda_i} \cdot \sum_i \lambda_i . a_i$$

Può anche essere definito come l'unico punto critico della funzione

$$f_\mu : x \longmapsto \sum_i \lambda_i \|x - a_i\|^2$$

[perchè g punto critico $\Longleftrightarrow$ g verifica (1)]

f_μ = funzione di Leibniz.

b) Generalizzazione:

Definizione: Per ogni misura $\mu \geqslant 0$ su E (tale che

$$\int_E (1+\|z\|)^2 \, d\mu(z) < +\infty \ )$$

Si definisce suo baricentro $\mathrm{bar}(\mu) \in E$ come l'unico punto $g \in E$ tale che

$$\int_E (z-g)\, d\mu(z) = \vec{0}$$

Questo punto è dato dalla formula

$$\mathrm{bar}(\mu) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E z \, d\mu(z).$$

Osservazione: Se facciamo

$$\mu = \lambda_1 \cdot \delta_{a_1} + \dots + \lambda_n \cdot \delta_{a_n}$$

dove δ_{a_i} = misura di Dirac al punto a_i [definita da $\int_E u(z)\, d(\delta_{a_i})(z) = u(a_i)$]

Ritroviamo

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_E \underbrace{1 \cdot d(\delta_{a_i})(z)}^{\boxed{=1}} = \sum_i \lambda_i$$

$$\int_E z \, d\mu(z) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{\int_E z \, d(\delta_{a_i})(z)}_{= a_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . a_i .$$

E quindi :

$$\text{bar}(\mu) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E z \, d\mu(z)$$

$$= \frac{1}{\sum_i \lambda_i} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . a_i .$$

Sia $\quad \rho(x,y) = \|x-y\|$

Si definisce la funzione di Leibniz:

$f_\mu : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dall'uguaglianza

$$f_\mu(x) = \int_E \rho(x,z)^2 \, d\mu(z).$$

<u>Lemma A</u>. – Per ogni $x \in E$

$$\boxed{\rho(x, \text{bar}\,\mu)^2 = \frac{1}{\mu(E)}\left(f_\mu(x) - f_\mu(\text{bar}\,\mu)\right)}$$

<u>Dimostrazione</u>: Sia $g = \text{bar}\,\mu \in E$

$$f_\mu(x) - f_\mu(g) = \int_E \left(\|\underbrace{x-z}_{\vec{a}}\|^2 - \|\underbrace{g-z}_{\vec{b}}\|^2\right) d\mu(z)$$

$$= \int_E \langle \underbrace{x-g+2(g-z)}_{\vec{a}+\vec{b}}, \underbrace{x-g}_{\vec{a}-\vec{b}} \rangle \, d\mu(z)$$

$$= \int_E \langle x-g, x-g \rangle \, d\mu(z) + 2 \langle x-g, \underbrace{\int_E (g-z)\, d\mu(z)}_{= \vec{0}} \rangle$$

$$= \|x-g\|^2 \mu(E). \ \square$$

Corollario: bar(μ) è

(i) l'unico punto dove la funzione f_μ raggiunge suo minimo assoluto

(ii) l'unico punto critico di questa funziane

Dimostrazione (i): Si applica il Lemma A:

$$f_\mu(x) - f_\mu(\text{bar}\,\mu) = \|x - \text{bar}\,\mu\|^2$$

>0 quando $x \neq \text{bar}\,\mu$. $\square$

Dimostrazione (ii): bar(μ) è un punto minimale di f_μ, dunque un punto critico.

$g_z : x \longmapsto \|x - z\|^2$ è strettamente convessa, quindi

$$f_\mu : x \longmapsto \int_E g_z(x)^2 \, d\mu(z)$$

è strettamente convessa,

Quindi non puo avere 2 punti critici.

c) Proprietà di contrazione:

Proposizione. — Consideriamo due misure μ e μ' di tipo:

$$d\mu(z) = \phi(z)\, d\mu_0(z)$$

$$d\mu'(z) = \phi'(z)\, d\mu_0(z)$$

(sono "di densita" rispetto a una misura di referenza μ_0, nel nostro caso μ_0 sara la misura associata a una metica riemanniana)

Allora

$$\rho^2(\text{bar}\,\mu, \text{bar}\,\mu')\,[\mu(E) + \mu'(E)]$$

$$= \int_E [\rho^2(\text{bar}\,\mu', z) - \rho^2(\text{bar}\,\mu, z)] \cdot [\phi(z) - \phi'(z)]\, d\mu_0(z)$$

Corollario intuitivo: Se si contiolla $\|\phi - \phi'\|$, si contiolla la distanza tra bar μ e bar μ'.

Dimostrazione della Proposizione:

Per simplificare le notazioni:

$g = \text{bar}\,\mu$, $g' = \text{bar}\,\mu'$

Sappiamo (Lemma A) che

$$\mu(E)\,\rho^2(x,g) =$$

$$\int_E \left[\rho^2(x,z) - \rho^2(g,z)\right]\phi(z)\,d\mu_0(z)$$

Facendo $x = g'$, segue:

$$\mu(E)\,\rho^2(g',g) = \int_E \left[\rho^2(g',z) - \rho^2(g,z)\right]\phi(z)\,d\mu_0(z)$$

Lo stesso argomento par la misura μ' da:

$$\mu'(E)\,\rho^2(g,g') = \int_E \left[\rho^2(g,z) - \rho^2(g',z)\right]\phi'(z)\,d\mu_0(z)$$

Facendo la somma di queste due uguaglianze, otteniamo il risultato:

$$\rho^2(g',g)\left[\mu(E) + \mu'(E)\right] =$$

$$\int_E \left[\rho^2(g',z) - \rho^2(g,z)\right]\left(\phi(z) - \phi'(z)\right)d\mu_0(z). \square$$

(2) Baricentro su una varietà X simplicitamente connessa di curvatura $\leqslant 0$

In questa sezione, ρ sara la distanza riemanniana su X

Sia μ una misura su X, si definisce

$$f_\mu(x) = \int_X \rho^2(x,z)\, d\mu(z).$$

a) **Proposizione e definizione:**

Sia μ una misura su X tale che $\int_X (1+\rho(x_0,z))^2 d\mu(z) < +\infty$ (x_0 = punto fissato)

Esiste un unico punto dove f_μ raggiunge il suo valore minimale. Questo punto sara chiamato "baricentro di μ".

Dimostrazione: L'esistenza d'un punto dove la funzione f_μ raggiunge suo minimo assoluto viene del fatto che $f_\mu(x) \to +\infty$ quando $\rho(x_0, x) \to +\infty$ (essendo x_0 un punto fissato), il quale si dimostra come segue: Per ogni $x \in X$,

$$\rho(x, z) \geq \rho(x, x_0) - \rho(x_0, z)$$

(disuguaglianze nel triangolo), quindi:

$$f_\mu(x) = \int_X \rho^2(x, z)\, d\mu(z)$$

$$\geq \rho(x, x_0)^2 \mu(X) - 2\rho(x, x_0)\left(\int_X \rho(x_0, z)\, d\mu(z)\right) + \int_X \rho(x_0, z)^2\, d\mu(z)$$

$$= \rho(x, x_0)^2 \mu(X) - 2A \cdot \rho(x, x_0) + B$$

$\to +\infty$ quando $\rho(x, x_0) \to +\infty$.

L'unicità di questo minimo si può dedurre del fatto che $g_z : x \longmapsto \rho(x,z)^2$ è ancora una funzione convessa, ma preferiamo dedurlo della

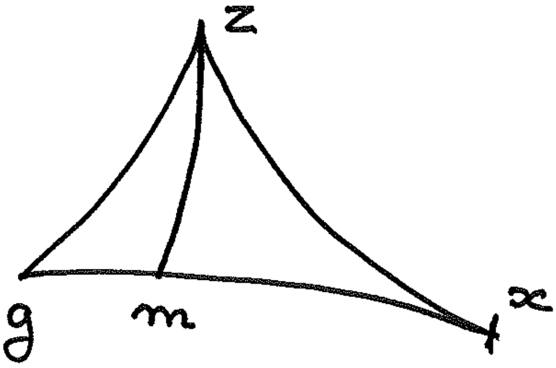
b) Proposizione.— Se $g \in X$ è un punto dove la funzione f_μ raggiunge suo minimo (abbiamo dimostrato qu'un tale punto esiste), allora, per ogni $x \in X$

$$\rho(x,g)^2 \mu(X) \leq f_\mu(x) - f_\mu(g)$$

Questo dimostra immediatamente che g è l'unico punto dove f_μ raggiunge suo minimo (assoluto).

Una relazione nei triangoli di curvatura ≤ 0 :

(Dimostrazione dell'ultima proposizione)



abbiamo:

$$
(*)\begin{cases} \rho(z,g)^2 \dfrac{\rho(m,x)}{\rho(g,x)} + \rho(z,x)^2 \dfrac{\rho(m,g)}{\rho(g,x)} \\ \geq \rho(z,m)^2 + \rho(m,g)\cdot\rho(m,x) \end{cases}
$$

(l'uguaglianza vale per tutti i triangoli euclidei).

Scegliendo per g un punto dove f_μ raggiunge suo minimo e integrando rispetto a z (e alla misura μ):

$$
f_\mu(g) \underset{\boxed{g \text{ è minimizzante}}}{\leq} f_\mu(m) \underset{\boxed{\text{integrazione di } (*)}}{\leq} f_\mu(g)\frac{\rho(m,x)}{\rho(g,x)} +
$$

$$
f_\mu(x)\frac{\rho(m,g)}{\rho(g,x)} - \rho(m,g)\,\rho(m,x)\,\mu(X)
$$

il quale da (moltiplicando da
$\frac{\rho(g,x)}{\rho(m,g)}$):

$$\mu(x)\,\rho(g,x)\,\rho(m,x) \leq f_\mu(x) - f_\mu(g)$$

Si conclude facendo $m \to g$. $\square$

3) Baricentro sullo spazio iperbolico:

Notazioni: Da ora in poi,

- $X = \mathbb{H}^n = \mathbb{R}H^n$ = spazio iperbolico (curvature sezionale $\equiv -1$)
- ρ = distanza su $\mathbb{H}^n$
- μ = misura su $\mathbb{H}^n$ tale che, fissando un punto $x_0 \in \mathbb{H}^n$ (non dipende la condizione della scelta di questo punto)

$$\int_{\mathbb{H}^n} e^{\rho(x_0, z)}\, d\mu(z) < +\infty$$

Funzione di Leibniz per $\mathbb{H}^n$:

$$f_\mu(x) = \int_{\mathbb{H}^n} \cosh[\rho(x,z)]\, d\mu(z)$$

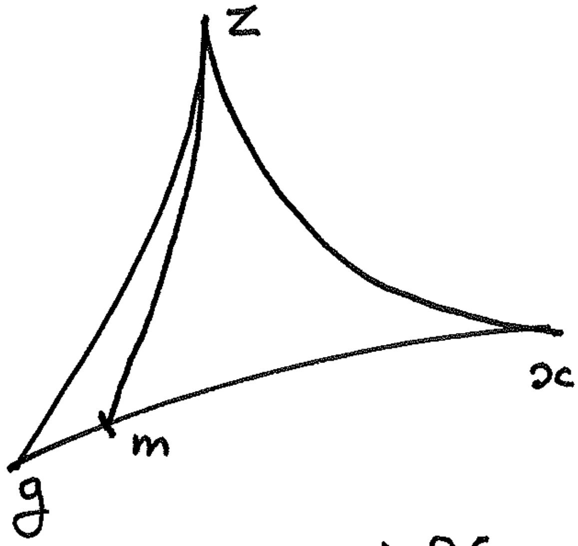
Proposizione e definizione:

Esiste un unico punto dove f_μ raggiunge il suo valore minimale. Questo punto sara chiamato "baricentro di μ" (notazione bar μ o bar(μ)). In oltre, $\forall x$

$$(2) \quad \begin{cases} 2 \cdot f_\mu(\text{bar}\,\mu) \sinh^2\left[\dfrac{\rho(x, \text{bar}\,\mu)}{2}\right] \\ = f_\mu(x) - f_\mu(\text{bar}\,\mu). \end{cases}$$

Dimostrazione: L'esistenzà di un punto g dove f_μ è minimale segue del fatto che $f_\mu(x) \longrightarrow +\infty$ quando $\rho(x_0, x) \longrightarrow +\infty$ (la prova di questo fatto è analoga a quella fatta nel caso di curvatura $\leqslant 0$
L'unicità segue dall'uguaglianza (2).
Facciamo ora la dimostrazione dell'uguaglianza (2)

• Una relazione nel triangolo iperbolico:



Si ha:

$$(3)\begin{cases} \cosh[\rho(z,m)] = \cosh[\rho(z,g)]\cdot \dfrac{\sinh[\rho(m,x)]}{\sinh[\rho(g,x)]} \\ + \cosh[\rho(z,x)]\cdot \dfrac{\sinh[\rho(m,g)]}{\sinh[\rho(g,x)]} \end{cases}$$

Scegliendo per g un punto dove f_μ raggiunge suo minimo e integrando rispetto a z e a μ, si ottiene:

$$f_\mu(g) \underset{\boxed{g \text{ è minimizzante}}}{\leq} f_\mu(m) \underset{\boxed{\text{integrazione di (3)}}}{=} f_\mu(g)\cdot \frac{\sinh[\rho(m,x)]}{\sinh[\rho(g,x)]} + f_\mu(x)\cdot \frac{\sinh[\rho(m,g)]}{\sinh[\rho(g,x)]}$$

Si moltiplica da $\left(\dfrac{\sinh[\rho(g,x)]}{\rho(m,g)}\right)$ e si fa $m \to g$, si ottiene:

$$f_\mu(g)\, \mathrm{ch}\left[\rho(g,x)\right] = f_\mu(x)\,,$$

il quale conclude. $\square$

Nel caso iperbolico la proprietà di contrazione è ancora valida e si scrive:

$$\boxed{\begin{aligned} & 2\sinh^2\left[\frac{\rho(\mathrm{bar}\,\mu, \mathrm{bar}\,\mu')}{2}\right]\cdot\left(f_\mu(\mathrm{bar}\,\mu) + f_{\mu'}(\mathrm{bar}\,\mu')\right) \\ & = \int_{\mathbb{H}^n}\left(\cosh\left[\rho(\mathrm{bar}\,\mu, z)\right] - \cosh\left[\rho(\mathrm{bar}\,\mu', z)\right]\right)\cdot \\ & \qquad (\phi(z) - \phi'(z))\, d\mu_0(z) \end{aligned}}$$

Se $\mu = \phi \cdot \mu_0$

e $\mu' = \phi' \cdot \mu_0$.

(4) Qualche applicazioni:

Su una data varietà compatta M Gromov definisce il Volume minimale di M come il minimo della funzione $g \longmapsto \mathrm{Vol}(M, g)$, definita sull'insieme delle metriche g su M la quale curvature sezionale K_g verifica $-1 \leq K_g \leq 1$

(Gromov + Thurston) Se M ammette una metrica g_0 di curvatura costante $= -1$, allora

$$\begin{pmatrix} \text{Volume minimale} \\ \text{di } M \end{pmatrix} \geq C_n \cdot \mathrm{Vol}(g_0)$$

$C_n << 1$, quindi motiva la

(Congettura di Gromov) In questo caso si può dimostrare che

$$\begin{pmatrix} \text{Volume minimale} \\ \text{di } M \end{pmatrix} = \mathrm{Vol}(g_0) \; ?$$

Se $\dim M = 2$ è vero (corollario della formula di Gauss-Bonnet)

Quid se $n \geq 3$?

La curvatura di Ricci di g (Ricci$_g$

Ricci$_g$ è il 2-tensore simmetrico la quale restrizione ai vettori $u \in T_m M$ tali che $g(u,u) = 1$ si scrive

$$\mathrm{Ricci}_g(u,u) \underset{\text{déf}}{=} \sum_{i=2}^{n} \underbrace{K_g(u,e_i)}_{\substack{\text{curvatura del 2} \\ \text{2-piano} \\ \langle u, e_i \rangle}}$$

per ogni base ortonormale $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ di $T_m M$ tale che $e_1 = u$.

La notazione $\mathrm{Ric}_g \geqslant C$ significa che $\mathrm{Ric}_g(u,u) \geqslant C$ per ogni vettore tangente u tale che $g(u,u) = 1$.

Se vede dalla definizione che

$$\mathrm{Ricci}_{g_0}(u,u) = \sum_{i=2}^{n} (-1) = -(n-1)$$

e che

$$K_g \geqslant -1 \Rightarrow \mathrm{Ricci}_g \geqslant -(n-1)$$

Con l'uso della tecnica del baricentro abbiamo dimostrato il

Teorema (Besson - Courtois - G).— Se M^n ammette una metrica di curvatura costante -1, allora per ogni g su M^n tale che

$$\mathrm{Ricci}_g \geqslant \mathrm{Ricci}_{g_0} = -(n-1)$$

si ha $\mathrm{Vol}(g) \geqslant \mathrm{Vol}(g_0)$

Inoltre, se $\mathrm{Vol}(g) = \mathrm{Vol}(g_0)$ $(n \geqslant 3)$ allora g è isometrica a g_0, e la costruzione dell'isometria si fa col baricentro.

- Questo risolve la conjettura di Gromov

$$\left[-1 \leqslant K_g \leqslant 1 \Rightarrow \mathrm{Ric}_g \geqslant -(n-1) \Rightarrow \mathrm{Vol}(g) \geqslant \mathrm{Vol}(g_0)\right]$$

- Da una dimostrazione construttiva del teorema di rigidità di Mostow:
  Se, sulla stessa varietà M^n $(n \geqslant 3)$ ci sono 2 metriche g_0 e g_1 di curvatura costante -1, allora sono isometriche.

Dimostrazione: Il teorema implica che $Vol(g_1) \geqslant Vol(g_0)$ e che $Vol(g_0) \geqslant Vol(g_1)$, quindi

$$Vol(g_1) = Vol(g_0) \Longrightarrow g_1 \text{ isometrica a } g_0. \square$$

Corollario: Se una varietà M di dimensione 4 ammette una metrica g_0 di curvatura costante $K_g = -1$, quella è l'unica metrica di Einstein su M (modulo rescaling).

Ricordiamo che

$$g \text{ è d'Einstein} \underset{def}{\Longleftrightarrow} Ric_g(u,u) = c^{te} \quad (\text{quando } g(u,u) = 1)$$

Dimostrazione: Si sapeva (Avez - Allendoerfer - Chern - Weil generalizzazione della formula di Gauss - Bonnet) che, se g è d'Einstein $Vol(g) \leqslant Vol(g_0)$. Il teorema di sopra implica che $Vol(g) \geqslant Vol(g_0)$, dunque $Vol(g) = Vol(g_0) \Longrightarrow g \sim g_0. \square$

Come si usa il baricentro per dimostrare il Teorema?

Sia X = rivestimento universale di M

$X = \tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ il rivestimento universale

Si alzano le due metriche g e g_0 su X in metriche $\tilde{g} = \pi^* g$ e $\tilde{g}_0 = \pi^* g_0$

$(X, \tilde{g}_0)$ è lo spazio iperbolico $\mathbb{H}^n$.

Si definisce una misura μ_y su X come

$$d\mu_y(z) = e^{-c\, d(y,z)}\, dv_{\tilde{g}}(z)$$

dove d è la distanza riemanniana associata alla metrica $\tilde{g}$.

Si definisce una mappa

$$F : \begin{cases} (X, \tilde{g}) \longrightarrow (X, \tilde{g}_0) \\ y \longmapsto \operatorname{bar}(\mu_y) \end{cases}$$

La propieta di contrazione del baricentro ci da:

$$2 \sinh^2\left[\frac{1}{2}\,\rho\big(\overset{F(y)}{\overset{\shortparallel}{\overbrace{\text{bar}\,\mu_y}}}\,,\,\overset{F(y')}{\overset{\shortparallel}{\overbrace{\text{bar}\,\mu_{y'}}}}\big)\right]\cdot$$

$$\left[f_{\mu_y}(\text{bar}\,\mu_y) + f_{\mu_y}(\text{bar}\,\mu_{y'})\right] =$$

$$\int_X \Big(\cosh\left[\rho(\text{bar}\,\mu_{y'}, z)\right] - \cosh\left[\rho(\text{bar}\,\mu_y, z)\right]\Big)$$

$$\left[e^{-c\,d(y,z)} - e^{-c\,d(y',z)}\right] dv_g(z)$$

Usando il fatto che

$$\|d_y F\| = \lim_{y' \to y} \frac{\rho(F(y), F(y'))}{d(y,y')}$$

$$= \lim_{y' \to y} \frac{\rho(\text{bar}\,\mu_y, \text{bar}\,\mu_{y'})}{d(y,y')}$$

si può limitare di sopra $\|d_y F\|$ (in modo non optimale), e poi si può limitare di sopra $|\det[d_y F]|$ in modo optimale, cioè da $\left(\frac{c}{n-1}\right)^n$

Il valore di c non può essere qualunque, infatti si definisce

$$\text{Entropia di } g \underset{def}{=} \text{Inf}\left\{ c \,/\, \mu_y(X) < +\infty \right\}$$

$$= \text{Inf}\left\{ c \,/\, \int_X e^{-c\, d(y,z)}\, dv_g(z) < +\infty \right\}$$

abbiamo quindi

$$|\det(d_y F)| \leqslant \left(\frac{\text{Entropia di } g + \varepsilon}{n-1} \right)^n$$

Il quale implica che

$$\left(\frac{\text{Entropia di } g + \varepsilon}{n-1} \right)^n \text{Vol}(M, g) \geqslant$$

$$\int_M |\det(d_x F)|\, dv_g \geqslant$$

$$\geqslant |\text{grado di } F| \cdot \int_M dv_{g_0}$$

$$\geqslant \text{Vol}(g_0) \qquad (\text{perchè grado}(F) = 1)$$

si nota che $n-1 = \text{Entropia di } g_0$ e che, usando il teorema di R.L. Bishop sulla crescità delle sfere geodetiche,

$$\text{Ricci}_g \geqslant -n-1 \implies \text{Entropia di } g \leqslant n-1$$

Il quale implica che

$$|\text{dét}\,(d_y F)| \leq \left(\frac{\text{Entropia di } g + \varepsilon}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\leq \left(\frac{n-1+\varepsilon}{n-1}\right)^{n} \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{n-1}\right)^{n}$$

essando ε arbitrariamente piccolo, abbiamo dimostrato che

$$\frac{\mathrm{Vol}(M,g)}{\mathrm{Vol}(M,g_0)} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{n-1}\right)^{n} \to 1$$

quand $\varepsilon \to 0$. $\square$