Capitolo 1

Complementi e esercizi del Capitolo 7 libro di testo

1.1 Operazioni elementari sulle righe di una matrice

Sia A_i la riga i-esima di una matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
Allora
$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$
Consideriamo le seguenti operazioni elementari:

- Scambiare la riga i-esima con la riga j-esima $A_i \leftrightarrow A_j$;
- moltiplicare la riga i-esima per uno scalare non nullo λ, $A_i \to \lambda A_i$;
- sostituire alla riga i-esima λ volte la j-esima sommata alla riga i-esima stessa, $A_i \to \lambda A_j + A_i$.

1.2 Matrici elementari

Una matrice elementare di ordine n è una matrice $E \in M_n(\mathbb{R})$ che può essere ottenuta dalla matrice identità I_n per mezzo di un'operazione elementare sulle righe.

Introduciamo le seguenti notazioni per le matrici elementari di ordine n:

- E_{ij}^n: matrice ottenuta scambiando tra loro l'i-esima e la j-esima riga di I_n;
- $E_i^n(c)$: matrice ottenuta moltiplicando per $c \in \mathbb{R}^*$ l'i-esima riga di I_n;
- $E_{ij}^n(c)$: matrice ottenuta sommando alla i-esima riga di I_n la j-esima moltiplicata per $c \in \mathbb{R}$.

Quando la dimensione delle matrici è chiara dal contesto indicheremo le matrici elementari con E_{ij}, $E_i(c)$ e $E_{ij}(c)$.

Le matrici elementari sono invertibili Osserviamo che le matrici elementari sono invertibili. Più precisamente valgono le seguenti relazioni (esercizio)

- $(E_{ij}^n)^{-1} = E_{ij}^n$;
- $(E_i^n(c))^{-1} = E_i^n(\frac{1}{c})$;
- $(E_{ij}^n(c))^{-1} = E_{ij}^n(-c)$.

Legame tra le operazioni elementari tra le righe e le matrici elementari Sia $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, allora *ogni operazione elementare sulle righe di A si ottiene moltiplicando a sinistra per A la corrispondente matrice elementare.* La dimostrazione si basa sul fatto che $e_iA = A_i$, dove (e_i è il vettore i-esimo della base canonica) e sulle seguenti identità:

$$E_{ij}A = \begin{array}{r} \vdots \\ i-esima\ riga \rightarrow \\ \vdots \\ j-esima\ riga \rightarrow \\ \vdots \end{array} \begin{pmatrix} e_1A \\ \vdots \\ e_jA \\ \vdots \\ e_iA \\ \vdots \\ e_nA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$E_i(c)A = \begin{array}{r} \vdots \\ i-esima\ riga \rightarrow \\ \vdots \end{array} \begin{pmatrix} e_1A \\ \vdots \\ ce_iA \\ \vdots \\ e_nA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ cA_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$E_{ij}(c)A = \begin{array}{r} \vdots \\ i-esima\ riga \rightarrow \\ \vdots \\ j-esima\ riga \rightarrow \\ \vdots \end{array} \begin{pmatrix} e_1A \\ \vdots \\ (ce_j+e_i)A \\ \vdots \\ e_jA \\ \vdots \\ e_nA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ cA_j+A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Teorema 1 *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti: a) A è invertibile; b) A si può esprimere come prodotto di matrici elementari.*

Dimostrazione: a)$\Rightarrow$ b). Se A è invertibile il sistema omogeneo $Ax = 0$ ha l'unica soluzione $x = 0$. Quindi utilizzando il procedimento di Gauss, con operazioni elementari esso può essere trasformato in un sistema a gradini di n equazioni omogenee in n incognite. Con ulteriori operazioni elementari di tipo $E_{ij}(c)$ è possibile ridurre questo sistema nella forma $x = 0$. Quindi esistono un numero finito di matrici elementari $E_1, \dots E_p$ tali che

$$E_1 \cdots E_p A x = I_n x.$$

Conseguentemente

$$E_1 \cdots E_p A = I_n$$

Per l'unicità dell'inversa

$$A^{-1} = E_1 \cdots E_p \tag{1.1}$$

e quindi

$$A = (E_1 \cdots E_p)^{-1} = E_p^{-1} \cdots E_1^{-1}. \tag{1.2}$$

Siccome l'inversa di una matrice elementare è ancora una matrice elementare abbiamo scritto A come prodotto di matrici elementari.
b)$\Rightarrow$ a) se A è il prodotto di matrici elementari allora A è invertibile perchè ognuno dei fattori lo è. $\square$

1.3 Algoritmo per trovare l'inversa di una matrice

Passo 1. formare la matrice $n \times 2n$ $M = (A \mid I_n)$: A nella metà sinistra I_n nella metà destra di M.

Passo 2. usando operazioni elementari sulle righe ridurre M nella forma $(I_n \mid B)$, dove I_n è la matrice identità $n \times n$

Passo 3. porre $A^{-1} = B$.

La giustificazione dell'algoritmo è la seguente: se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora moltiplicando la matrice $M = (A \mid I_n)$ a sinistra per A^{-1} si ottiene:

$$A^{-1}(A \mid I_n) = (I_n \mid A^{-1}).$$

Dalla formula (1.1) la matrice A^{-1} è esprimibile come prodotto di matrici elementari. Quindi la matrice $(I_n \mid A^{-1})$ può essere ottenuta a partire da $(A \mid I_n)$ mediante operazioni elementari sulle righe.

Osservazione Se applicando l'algoritmo precedente si viene a creare nella metà sinistra di M una riga o una colonna nulla questo significa che la matrice non è invertibile.

Esempio 1 *Troviamo l'inversa della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Scriviamo la matrice 4×8

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando le operazioni elementari:
$A_3 \to -A_1 + A_3, A_4 \to -A_1 + A_4$
si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando le operazioni elementari:
$A_1 \to -2A_2 + A_1, A_3 \to -A_2 + A_3, A_4 \to -2A_2 + A_4$

si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando le operazioni elementari:

$A_1 \to -3A_3 + A_1, A_2 \to A_3 + A_2, A_4 \to A_3 + A_4$

si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando l' operazione elementare: $A_4 \to -A_4$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Infine, applicando le operazioni elementari:

$A_3 \to 3A_4 + A_3, A_2 \to 2A_4 + A_2, A_1 \to -7A_4 + A_1$

si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & -20 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 8 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -20 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & -1 & -2 \\ 5 & 8 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1: verificare che la matrice scritta sopra è effettivamente l'inversa della matrice A.

Osserviamo che la formula (1.2) e il fatto che le operazioni elementari sulle righe corrispondono alla moltiplicazione a sinistra per matrici elementari ci fornisce un modo per esprimere A come prodotto di matrici elementari (convincersi di questo fatto e risolvere gli esercizi seguenti).

Esercizio 1: Esprimere la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

come prodotto di matrici elementari.

Esercizio 2^***:** Esprimere la matrice A dell'esempio precedente come prodotto di matrici elementari.

Esercizi sulle applicazioni lineari e matrici

1. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

   $$T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z) :$$

   Trovare T^{-1}, T^2, T^{-2}.

2. $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \to (2x, y + z)$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \to (x - z, y)$.

   Trovare $S + T, 2S - 5T$,

3. Siano $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \to (y, x)$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \to (0, x)$.

   Trovare $S + T, 2S - 3T, S \circ T, T \circ S, S^2, T^2$.

4***. Siano $S : U \to V$, $T : V \to W$ e $L : W \to Z$ tre applicazioni lineari fra spazi vettoriali. Dimostrare che:

   $(i)\, \mathrm{rg}(L \circ T) + \mathrm{rg}(T \circ S) \leq \mathrm{rg}\, T + \mathrm{rg}(L \circ T \circ S)$

   $(ii)\, \mathrm{rg}\, S + \mathrm{rg}\, T - \dim V \leq \mathrm{rg}(T \circ S) \leq min(\mathrm{rg}\, S, \mathrm{rg}\, T)$.

5. Siano $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$ ed $S : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^2$ le applicazioni lineari date da

$$T(x, y, z) = x + (2y - x)t + zt^2, \;\; S(p) = (p(0), p(1)).$$

   Calcolare $S \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e trovare $\mathrm{Ker}(S \circ T)$ e $\mathrm{Im}(S \circ T)$.

6. Sia $T : V \to V$ un endomorfismo tale che $T \circ T = 0$. Dimostrare $T + id_V$ è invertibile.

7. Scrivere un'applicazione lineare da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_2(\mathbb{R})$. Esiste un isomorfismo tra $M_{4,3}(\mathbb{R})$ e $M_{6,2}(\mathbb{R})$? Se la risposta è affermativa scrivere l'isomorfismo esplicitamente.

8*. Sia $T_a : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$T_a(p) = (p(0), p(a), p(1)), p \in \mathbb{R}_2[t], a \in \mathbb{R}.$$

   Dopo aver verificato che T_a è lineare, trovare i valori di a per i quali T_a è un isomorfismo.

9. Dimostrare che un sistema lineare quadrato $Ax = b$ ammette soluzione qualunque sia b se e solo se il sistema omogeneo $Ax = 0$ ammette solo la soluzione $x = 0$.

10**. Un endomorfismo $P \in \mathcal{L}(V, V)$ tal che $P \circ P = P$ si chiama *proiezione*.

   (i) Dimostrare che se P è una prioiezione allora

$$V = \mathrm{Ker}\, P \oplus \mathrm{Im}\, P.$$

(suggerimento: osservare che ogni $v \in V$ può scriversi come

$$v = (v - P(v)) + P(v)).$$

(ii) Dimostrare che se P e Q sono proiezioni tali che $P \circ Q = Q \circ P$ allora $P + Q - P \circ Q$ è ancora una proiezione.

11. Siano $V_1, V_2, \dots V_k$ sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V tali che $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. Definiamo la proiezione $P_j : V \to V_j \subset V$ come $P_j(v) = v_j$, dove $v = v_1 + \cdots + v_k, v_j \in V$. Dimostrare che le P_j sono applicazioni lineari per ogni $j = 1, \dots n$. Dimostrare inoltre che le P_j sono proiezioni nel senso dell'esercizio precedente.

12. Dimostrare che due spazi vettoriali di dimensione finita sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

13*. Siano U e W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Definire una somma e un prodotto sul prodotto cartesiano $U \times W$ in modo da renderlo uno spazio vettoriale. Se $\dim U = m$ e $\dim W = m$, calcolare la dimensione di $U \times W$. Assumiamo inoltre che $U \cap W = \{0\}$. Dimostare che $U \oplus W$ è isomorfo a $U \times W$.

14. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $T_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ definita da $T_\lambda(x) = \lambda x$. Trovare la matrice A tale che $L_A = T_\lambda$.

15. a) Dire quali sono le dimensioni delle matrici seguenti.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Quali delle matrici precedenti possono essere moltiplicate fra loro.

16. Moltiplicare le seguenti matrici quando possibile.

$$a)\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&8\\9&0\\1&2\end{pmatrix}, b)\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\-1&3\\-2&2\end{pmatrix}, c)\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&2\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&1&2\\2&0&-2\end{pmatrix},$$

$$d)\begin{pmatrix}7&1\\-1&0\\s2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}, e)\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&3\end{pmatrix}, f)\begin{pmatrix}0&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\3&5\end{pmatrix}$$

17. Siano date le matrici $A = \begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&-1\end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix}2&5&1\\1&4&2\\1&3&3\end{pmatrix}$.

   a) Calcolare le terza colonna di AB senza calcolare la matrice AB.

   b) Calcolare la seconda riga di AB, senza calcolare la matrice AB.

18. Calcolare i seguenti prodotti

$$a)\begin{pmatrix}7&2&\sqrt{3}&4\\6&8&a^2&2\\3&\sqrt{5}&a&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, b)\begin{pmatrix}6a&2&3a^2\\4&2\sqrt{a}&2\\5&12&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, c)\begin{pmatrix}2&1&8&6\\3&2\sqrt{3}&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

19. Siano A e B due matrici $n \times n$ e supponiamo che A sia simmetrica. Quale delle seguenti equazioni è vera e quale è falsa?

$$a)\ (AB)^T = B^T A,\quad b)\ (A^T B)^T = B^T A^T$$
$$c)\ (A^T B)^T = BA,\ d)\ (AB)^T = A^T B^T.$$

20. Quali delle seguenti matrici sono diagonali? simmetriche? Triangolari? Antisimmetriche?

$$a)\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}, b)\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}^2, c)\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\b&b\end{pmatrix}, d)\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^2\ e)\begin{pmatrix}0&0\\a&a\end{pmatrix}^2,$$

$f)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix}^3$, $g)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $h)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $i)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3$,

$l)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$, $m)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$, $n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^4$.

21. Per quali valori di a le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ commutano?

22. Determinare le matrici 2×2 che commutano con la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

23. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, troave tutte le matrici $B \in M_2(\mathbb{R})$ tali che $AB = BA$.

24. Siano $A \in M_{1,5}$ e $B \in M_{5,1}$ definte come segue: $A = (1,\ -1,\ 0,\ \sqrt{2},\ 1)$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcolare AB e BA.

25*. Data la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcolare A^n, dove n è un numero naturale.

26**. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ considera l'insieme

$$W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) |\ AX = 0\}.$$

Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$. Calcolare la dimensione e una base di W. Più in generale per $A \in M_{m,n}$ tale che $\mathrm{rg}(A) = r$

dimostrare che l'insieme

$$W = \{X \in M_{n,p}(\mathbb{R}) |\ AX = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $M_{n,p}(\mathbb{R})$ di dimensione $p(n-r)$.

27. Trovare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali esiste una matrice $X \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}.$$

28. Calcolare (se possibile) l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

29. Calcolare (se possibile) l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

30. Trovare due matrici quadrate invertibili la cui somma sia una matrice non invertibile (per cui $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ non è un gruppo rispetto alla somma di matrici).

31*. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dimostrare che A non è invertibile se e solo se esiste una matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ non nulla tale che $AB = O$.

32*. La traccia $\operatorname{tr} A$ di una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ è per definizione la somma degli elementi sulla diagonale principale:

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + \cdots a_{nn}.$$

Dimostrare che $\operatorname{tr} : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è lineare. Dimostrare inoltre che per A e B in $M_n(\mathbb{R})$ vale la sguente uguaglianza.

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Dedurre che $\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr} A$, per $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

33*. Dimostrare che non esistono due matrici A, B in $M_n(\mathbb{R})$ tali che

$$AB - BA = I_n,$$

dove I_n denota la matrice identità $n \times n$. (suggerimento: usare l'esercizio precedente).

34. Quale è l'inversa delle matrici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$?

35. Per quali valori del parametro λ le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \lambda & 0 & -1 \\ 5 & 4 & \lambda \end{pmatrix}$ sono invertibili.

36. Trovare l'inversa (se possibile) della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e scriverla come prodotto di matrici elementari.

37. Sia S l'insieme delle matrici $n \times n$ simmetriche, T l'insieme delle matrici triangolari, D l'insieme delle matrici $n \times n$ diagonali. Dimostrare che $S \cap T = D$.

38*. Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ è triangolare superiore se $a_{ij} = 0$ per $j < i$. Dimostare che le matrici triangolari superiori invertibili sono un sottogruppo di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

39*. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $AB = BA$ per ogni $B \in M_n(\mathbb{R})$. Dimostrare che $A = \lambda I_n$, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

40***. Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ tale che

$$|a_{ii}| > \sum_{1 \leq j \neq i \leq n} |a_{ij}|$$

per $i = 1, \ldots n$. Dimostrare che A è invertibile. (consiglio: NON è una buona idea trovare l'inversa).

Capitolo 2

Esercizi Capitolo 8 del libro di testo

1. Date le quattro basi di $\mathbb{R}^3$:

   $\mathcal{B}_1 = \{e_1+e_3, e_1-2e_2+e_3, e_2-e_3\}$, $\mathcal{B}_2 = \{2e_1-3e_2+3e_3, -2e_2-e_1, 3e_2-2e_3\}$, $\mathcal{B}_3 = \{e_1-e_2+2e_3, -2e_2, 3e_2-e_3\}$ $\mathcal{B}_4 = \{e_1-e_2+2e_3, e_2-e_3, -e_1+3e_2-2e_3\}$

   Trovare le matrici $\mathcal{B}_{ij}$ di cambiamento di base da $\mathcal{B}_i$ a $\mathcal{B}_j$, per $i, j = 1, 2, 3, 4$.

2. Siano $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ tre basi di uno spazio vettoriale V. Se B è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}_0$ a $\mathcal{B}$ e C è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}_0$ a $\mathcal{C}$ dimostare che $B^{-1}C$ è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice che rappresenta il cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ alla base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^2$.

   (i)Trovare $\mathcal{B}$ nel caso $\mathcal{C} = \{e_1, e_1 + e_2\}$. Se $(1, 2)$ sono le componenti di un vettore di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ quali sono le sue componenti rispetto alla base $\mathcal{C}$?

   (ii) Trovare $\mathcal{C}$ nel caso $\mathcal{B} = \{e_1, e_1 + e_2\}$. Se $(1, 2)$ sono le componenti di un vettore di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ quali sono le sue componenti rispetto alla base $\mathcal{C}$?

4. Siano dati i tre vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e trovare la matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica.

5. Considerati i polinomi $p_1(t) = t^2 - 2t$, $p_2(t) = 1 + 2t$, $p_3(t) = 2 - t^2$,$q_1(t) = -1+t$, $q_2(t) = -1+t-t^2$ e $q_3(t) = 2t+2t^2$. Dimostrare che $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ e $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3\}$ sono basi di $\mathbb{R}_2[t]$. Trovare inoltre la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

6**. Dati i sottospazi $U = \text{Span}\{p_1, p_2\}$ e $W = \text{Span}\{q_2, q_3\}$ di $\mathbb{R}_2[t]$, dove p,p_2, q_2, q_3 sono gli stessi dell'esercizio 5. Calcolare dimensione e base di $U + W$ e $U \cap W$.

7*. Sia $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ l'applicazione lineare data da $T(p) = tp' - 2p$, dove l'apice indica la derivata del polinomio. Trovare la matrice che rappresenta T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ dell'esercizio 5, e rispetto alla base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$. Trovare inoltre dimensione e base di $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$.

8. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare la matrice A' che rappresenta T rispetto alle basi

$$\mathcal{C}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

9. Siano $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Scrivere le matrici associate agli endomorfismi $L_A, L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alle due basi seguenti:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

10. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Trovare la matrice che rappresenta T rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

11. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $T(x, y) = (x - y, y - x)$. Trovare una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ che non rappresenta T rispetto a nessuna base di $\mathbb{R}^2$.

12*. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. Trovare una base $\mathcal{B}$ di W. Sia $T : W \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare data da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_3 + x_4, 3x_1 + x_2 + 2x_4, x_2 - x_4).$$

Dimostrare che $\operatorname{Im} T \subset W$, per cui possiamo considerare T come un endomorfismo di W. Trova la matrice che rappresenta T rispetto alla base $\mathcal{B}$.

13*. Sia

$$T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$$

l'applicazione lineare data da

$$T(X) = AX - XA$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che T è lineare e trovare $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$. Dimostrare inoltre che

$$M_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T.$$

14. Le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sono simili? Stessa domanda per le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

15*. Dimostrare che se almeno una delle due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora AB e BA sono simili. Mostrare con degli esempi che se nè A nè B sono invertibili non si può concludere niente sul fatto che A e B siano simili.

16**. Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare di rango r. Dimostare che esistono una base $\mathcal{B}$ di V e una base $\mathcal{C}$ di W tali che la matrice associata a T rispetto a queste basi è

$$A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

dove I_r denota la matrice identità $r \times r$.

17*. Sia $T : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V. Supponiamo che esista una base $\mathcal{B}$ di V tale che la matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}$ sia la matrice identità. Dimostrare che $T = id_V$.

18*. Trovare $r > 0$ e un endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di rango r tale che la matrice $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ non può essere associata a T rispetto ad alcuna base di $\mathbb{R}^3$. Come si concilia questo risultato con l'esercizio 16?

19**. Sia P un endomorfismo di rango r. Dimostrare che P è una proiezione, cioè $P \circ P = P$, se e solo se esiste una base di V rispetto alla quale P è rappresentata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ (suggerimento: utlizzare l' esercizio 10 del Capitolo 1).

20. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y-z \end{pmatrix}.$$

Si scriva la matrice A che rappresenta T rispetto alle basi canoniche e la matrice A' che rappresenta T rispetto alle basi

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ e } C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Le matrici A e A' sono simili?

21. Siano $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$ le matrici che rappresentano un endomorfismo $T : V \to V$ rispetto a due basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ rispettivamente. Se il sistema $Ax = b$ ha un'unica soluzione, quante ne ha il sistema $A'x = 0$ e quali sono?

22. Siano

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

basi di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ rispettivamente. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare che ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ come matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Si trovi $T(v)$, dove $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

23. Si scriva la matrice che rappresenta l'applicazione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \\ z \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

24. Sia $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo invertibile e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo qualunque. $T \circ S$ è iniettiva? $T \circ S$ è suriettiva?

25. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$
la matrice associata a un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alla base
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Scrivere la matrice A' che rappresenta T rispetto alla base
$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Si dica, inoltre, giustificando la risposta, se A e A' sono simili.

26. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

la matrice che rappresenta un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Scrivere la matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica.

28. Stabilire, giustificando la risposta, se le seguenti matrici $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ sono simili:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Capitolo 3

Appunti e esercizi del Capitolo 9 libro di testo

Queste note sui determinanti contengono un riassunto di quello che è stato svolto a lezione.

Teorema 2 *(senza dimostrazione) Per ogni* $n \geq 1$ *esiste un unica funzione* $det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *che soddisfa le seguenti proprietà:*

A. det è omogeneo in ogni riga;

B. det è additivo in ogni riga;

C. det cambia segno se si scambiano due righe qualunque;

D. $det(I_n) = 1$.

Ecco alcune conseguenze di questa teorema. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora:

- se A ha due righe uguali allora $\det A = 0$;
- se A ha una riga nulla allora $\det A = 0$;
- il valore di $\det A$ non cambia sommando ad una riga un multiplo di un'altra;

- sia S una matrice triangolare superiore ottenuta effettuando operazioni $A_i \leftrightarrow A_j$ oppure $A_i \to \lambda A_j + A_i$ sulle righe di A. Allora

$$\det(A) = (-1)^\sigma \det(S) = (-1)^\sigma p_1 \dots p_n,$$

  dove σ è il numero di scambi di righe e $p_1, \dots, p_n$ sono i pivot di A; in particolare anche se i pivot possono essere diversi, il valore assoluto del loro prodotto non dipende dalle operazioni elementari effettuate per passare da A a S;

- $\det A = 0$ se e solo se le righe di A sono linearmente dipendenti;

- A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

Un metodo pratico per il calcolo del determinante sono gli sviluppi di Laplace.

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. La matrice che si ottiene cancellando la riga i e la riga j di A si chiama *minore* (i, j) di A e si indica con $A_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$.

Teorema 3 *(senza dimostrazione)(sviluppi di Laplace del determinante rispetto ad una riga):* Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora per ogni $1 \leq i \leq n$ si ha

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}).$$

In particolare

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Dimostrazione: segue dal Teorema 1 verificando le proprietà A, B, C, D. $\square$

Determinante delle matrici elementari

Ricordiamo che esistono tre matrici elementari;

- E_{ij}: matrice ottenuta scambiando tra loro l'i-esima e la j-esima riga di I_n;

- $E_i(c)$: matrice ottenuta moltiplicando per $c \in \mathbb{R}^*$ l'i-esima riga di I_n;

- $E_{ij}(c)$: matrice ottenuta sommando alla i-esima riga di I_n la j-esima moltiplicata per $c \in \mathbb{R}$.

Usando le proprietà dei determinanti (quali?) si ottiene (perchè?) che

- $\det(E_{ij}) = -1$
- $\det(E_i(c)) = c$
- $\det(E_{ij}(c)) = 1$

Inoltre qualunque sia la matrice elementare E si ha che:

$$\det(E) = \det(E^T) \quad (*).$$

In effetti E_{ij} e $E_i(c)$ sono simmetriche cioè $E_{ij}^T = E_{ij}$ e $E_i(c)^T = E_i(c)$ quindi non c'è niente da dimostrare. Mentre il fatto che $\det(E_{ij}(c)) = \det(E_{ij}(c)^T) = 1$ è di facile verifica (perchè?).

Enunciamo e dimostriamo ora il Teorema di Binet e alcuni suoi importanti corollari.

Teorema 4 *(Binet): Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora*

$$det(AB) = det(A)\,det(B) = det(B)\,det(A). \tag{3.1}$$

Dimostrazione: Se $\det B = 0$ allora esiste $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ tale che $Bv = 0$ e quindi $(AB)(v) = 0$ quindi $\det(AB) = 0$ (lo sutdente è invitato a riflettere su queste implicazioni). Possiamo allora supporre che $\det B \neq 0$. Consideriamo l'applicazione

$$f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \frac{\det(AB)}{\det B}.$$

Non è difficiel vedere (vedi appunti presi a lezione) che ques'applicazione soddisfa A, B, C, D del Teorema 2. Allora per l'unicità $f(A) = \det(A)$ e la 3.1 segue. □

Corollario 1 *Se A è invertibile allora*

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det\,A}.$$

Dimostrazione:

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}),$$

da cui segue la tesi. $\square$

Corollario 2 *Sia $B \in GL_n(\mathbb{R})$ e $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora*

$$det(B^{-1}AB) = det\, A.$$

Dimostrazione:

$$\det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1})\det A \det B = \frac{1}{\det B}\det A \det B = \det A.$$

$\square$

Dal corollario precedente segue che due matrici simili hanno lo stesso determinante. Quindi possiamo dare la seguente definizione. *Sia $T : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n. Allora il* determinante *di T è dato da $det\, A$ dove $A \in M_n(\mathbb{R})$ è la matrice che rappresenta T rispetto a una qualsiasi base di V.*

Il seguente teorema mostra che il determinante di una matrice quadrata è uguale a quello della sua trasposta (e quindi la relazione (*) precedente è valida per una qualunque matrice quadrata non necessariamente elementare).

Teorema 5 *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora*

$$det(A) = det(A^T).$$

Dimostrazione: Se $\det A = 0$ allora $\operatorname{rg} A < n$. Quindi $\operatorname{rg}(A^T) < n$ e quindi $\det A^T = 0$. Se A è invertibile allora A si esprime come prodotto di matrici elementari

$$A = E_1 \dots E_p.$$

Allora $\det(A^T) = \det\big((E_1 \dots E_p)^T\big) = \det(E_p^T \cdots E_1^T) = \det(E_p^T) \cdots \det(E_1^T) = \det(E_p) \cdots \det(E_1) = \det(E_1) \cdots \det(E_P) = \det(E_1 \cdots E_p) = \det A$, dove abbiamo usato la (*) e il Teorema di Binet (lo studente è invitato a giustificare tutte le uguaglianze). $\square$

Mettendo insieme il teorema precedente con il Teorema 3 si ottiene:

Corollario 3 *(sviluppi di Laplace del determinante rispetto ad una colonna): Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora per ogni $1 \leq j \leq n$ si ha*

$$det(A) = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{hj}\, det(A_{hj}).$$

Conseguentemente le proprietà A, B, C, D del Teorema 2 valgono anche per le colonne di A.

Corollario 4 *(Cramer) Sia $Ax = b$ un sistema quadrato di ordine n con matrice non singolare, cioè $det A \neq 0$. Allora l'unica soluzione $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ del sistema è data da*

$$v_i = \frac{det B_i}{det A}, i = 1, \dots, n, \tag{3.2}$$

dove B_i è la matrice ottenuta sostituendo in A alla colonna i-esima la colonna b dei termini noti, cioè

$$B_i = (A^1 \dots A^{i-1}, b, A^{i+1}, \dots A^n).$$

Dimostrazione: Sia

$$X_i = (e^1 \dots e^{i-1}, v, e^{i+1}, \dots e^n) \in M_n(\mathbb{R})$$

la matrice che si ottiene inserendo nell' i-esima colonna della matrice identità il vettore v (qui e^j denota il vettore colonna j-esimo della base canonica). Osserviamo che:

$v \in \mathbb{R}^n$ è soluzione di $Ax = b \iff Av = b \iff AX_i = B_i, \forall i = 1, \dots, n.$

Per la formula di Binet

$$\det(B_i) = \det(AX_i) = \det(A)\det(X_i) = \det(A)v_i, \forall i = 1, \ldots, n$$

(dove abbiamo usati il fatto che $\det(X_i) = v_i$) e la 3.2 è dimostrata. $\square$

Corollario 5 *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_m(\mathbb{R})$ e $C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. Allora*

$$det \begin{pmatrix} A & | & C \\ 0 & | & B \end{pmatrix} = det\, A\, det\, B$$

Dimostrazione: Se $\det A = 0$ allora le prime n colonne della matrice in questione sono linearmente dipendenti e quindi il suo determinante è zero. Possiamo quindi assumere $\det A \neq 0$. Se A è diagonale (risp. B è diagonale) allora sviluppando rispetto alle prime n colonne (risp. rispetto alle ultime m righe) si ottiene la tesi. Se nè A nè B sono diagonali possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} A & | & C \\ 0 & | & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & | & 0 \\ 0 & | & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & | & A^{-1}C \\ 0 & | & B \end{pmatrix}$$

e la tesi segue dal Teorema di Binet. $\square$

Concludiamo con un teorema che lega il rango di una matrice non necessariamente quadrata con il concetto di determinante.
Prima una definizione.

Definizione: *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; una sottomatrice di ordine p di A è una matrice quadrata A' ottenuta considerando le entrate di A comuni a p righe e a p colonne fissate di A. Se alla sottomatrice A' aggiungiamo un'altra riga e un'altra colonna di A diremo che stiamo orlando la sottomatrice.*

Teorema 6 *(degli orlati) Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice. Allora $rg(A) = r$ se e solo se esiste una sottomatrice A' di ordine r di A non singolare e tutte le sottomatrici di ordine $r+1$ di A ottenute orlando A' hanno determinante nullo.*

Dimostrazione: vedi appunti presi in classe. $\square$

Esercizi sui determinanti

1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \pi \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Siano $x, y, z \in \mathbb{R}$ tali che

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

Calcolare i determinanti delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 5 \\ 2x & 1+2y & 3+2z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3x & 3y & 3z \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2+2x & 2+2y & 4+2z \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Calcola il determinante della matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. Trovare i valori di λ per i quali la seguente matrice è invertibile. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Dimostra che A è invertibile e calcolne l'inversa.

6. Calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

usando sia il teorema degli orlati sia la riduzione e gradini.

7. Risolvere i seguenti sistemi lineari usando il metodo di Cramer.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ -x + 2z = -1 \\ 3x + y + z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ y + 2z = -2 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}.$$

8. Scrivere due matrici non simili con la stessa traccia.

9*. Siano $x, y, z \in \mathbb{R}$ tali che

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ -1 & \pi & 2 \\ \sqrt{2} & 7 & 333 \end{pmatrix} = 1.$$

Calcolare i determinanti delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3x & 3y & 3z \\ -\frac{1}{2} & \frac{\pi}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{7}{3} & 111 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & z \\ x-1 & y+\pi & z+2 \\ \sqrt{2}+1 & 7-\pi & 331 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & y-z \\ \pi x - 1 & \pi(y+1) & \pi(y-z+1)-2 \\ \sqrt{2} & 7 & -326 \end{pmatrix}.$$

10. Sia $P : V \to V$ una proiezione, cioè $P \circ P = P$. Se $P \neq id_V$ allora $\det P = 0$.

11. Sia $T : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $T \circ T = id_V$. Dimostrare che $\det T = \pm 1$.

12*. Dimostrare che $\det A = 0$ se e solo se esistono due matrici quadrate B e C non nulle tali che $AB = 0 = CA$.

13*. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

14*. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica cioè tale che $A = -A^T$. Dimostrare che se n è dispari allora $\det A = 0$.

15**. Sia $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$ l'endomorfismo definito da

$$T(p)(t) = p^{'}(t),$$

dove $p^{'}(t)$ denota la derivata del polinomio $p(t)$. Calcolare $\det T$.

16**. Sia $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$ l'endomorfismo definito da

$$T(p)(t) = p^{'}(t)(t - \pi).$$

Calcolare $\det T$.

17*. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ e sia $T : V \to V$ dato da: $T(X) = AX$, per una fissata $A \in M_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che $\det T = (\det A)^2$.

18**. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ e sia $T : V \to V$ dato da: $T(X) = X^T$. Calcolare $\det T$.

19***. Sia $V = M_n(\mathbb{R})$, trovare $\det T$ quando $T : V \to V$ è dato da:

(i) $T(X) = AX$, per una fissata $A \in M_n(\mathbb{R})$;

(ii) $T(X) = AX - XA$, per una fissata $A \in M_n(\mathbb{R})$;

(iii) $T(X) = X^T$.

Capitolo 4

I numeri complessi (vedi Capitolo 11 libro di testo)

4.1 I numeri complessi

Introduciamo un simbolo i, detto unità immaginaria definito dalla condizione

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

Il simbolo i soddisfa l'equazione

$$x^2 + 1 = 0.$$

Un numero complesso è un'espressione del tipo:

$$z = a + ib, \;\; a, b \in \mathbb{R}.$$

I numeri a e b si chiamano parte reale e parte immaginaria del numero complesso z.

Indicheremo con $\operatorname{Re} z$ e con $\operatorname{Im} z$ la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso z.

Sia $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e un sottoinsieme di $\mathbb{C}$. Infatti i numeri reali si possono identificare con l'insieme

$$\{z = a + ib \in \mathbb{C} | \quad \mathrm{Im}(z) = b = 0\}.$$

I numeri complessi $z = a + ib$ tali che $\mathrm{Re}\, z = 0$ si dicono immaginari puri.

Due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$ sono *uguali* se $a = c$ e $b = d$.

Definiamo la somma e la moltiplicazione di due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$ con le solite regole del calcolo algebrico.

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d),$$

$$z \cdot w = (a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + i^2bd = ac - bd + i(bc + ad).$$

Dato un numero complesso $z = a+ib \neq 0$ esiste un numero complesso w, chiamato l'inverso di z tale che

$$z \cdot w = 1.$$

Denoteremo l'inverso di z con $\frac{1}{z}$.

Per trovare $\frac{1}{z}$ scriviamo $\frac{1}{z} = x + iy$. Allora

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1 = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay),$$

quindi

$$ax - by = 1, \ bx + ay = 0.$$

Abbiamo quindi un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite x, y. Usando, il fatto che $z \neq 0$ e quindi $a^2 + b^2 \neq 0$ otteniamo:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad , \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Equivalentemente

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

Quindi il quoziente di due numeri complessi $w = c + id$ e $z = a + ib \neq 0$ è dato da:

$$\frac{w}{z} = w \cdot \frac{1}{z} = \frac{c+id}{a+ib} = \frac{(c+id)(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + i\frac{ad-bc}{a^2+b^2}.$$

Osservazione 1 Le operazioni di somma e prodotto dei numeri complessi, ristrette ai numeri reali (cioè ai numeri complessi con parte immaginaria uguale a zero), coincidono con le operazioni di somma e prodotto sui numeri reali. Per questo motivo si dice che il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è un *estensione* del campo dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Osservazione 2 Una differenza sostanziale tra il campo dei numeri reali e quello dei numeri complessi è quella dell'ordinamento.
Il campo dei numeri reali è un *campo ordinato* in quanto sussistono le seguenti proprietà:

1) se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$;

2) se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$;

3) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$;

4) se $x \leq y$, allora $x + z \leq y + z, \forall z \in \mathbb{R}$;

5) se $0 \leq x$ e $0 \leq y$, allora $0 \leq xy$.

Nel campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ non è possibile definire una struttura " $\leq''$ di campo ordinato.
Infatti dalle proprietà 4) e 5) seguirebbe che una relazione d'ordine $\leq$ soddisfa le seguenti proprietà:

- se un numero è positivo (negativo) il suo opposto è negativo (positivo);
- il quadrato di un numero qualsiasi non è mai negativo.

D'altra parte $1^2 = 1$ e $i^2 = -1$. Quindi abbiamo due quadrati che sono l'uno l'opposto dell'altro. Nessuno dei due però può essere negativo (perchè sono quadrati) e questo è assurdo (perchè tra a e $-a$ uno dev'essere negativo se $a \neq 0$).

Il <u>complesso coniugato</u> di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero, che si indica con $\bar{z}$, dato da $\bar{z} = a - ib$.

Un numero complesso è reale se e solo se coincide col suo coniugato.

Inoltre valgono le seguenti proprietà (esercizio!):

- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$;
- $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$;
- $z\bar{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$;
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$;
- $\bar{\bar{z}} = z$; (l'operazione di coniugio è involutoria);
- $\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$;
- $\overline{(zw)} = \bar{z}\bar{w}, \forall z, w \in \mathbb{C}$;
- $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$.

Esempio 2 Vogliamo scrivere la forma algebrica, cioè la forma $z = a + ib$ del numero complesso

$$z = \frac{2+5i}{1-3i}.$$

Per fare questo moltiplichiamo numeratore e denominatore per $1+3i$ (il complesso coniugato di $1-3i$) e otteniamo:

$$z = \frac{2+5i}{1-3i} = \frac{(2+5i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{1}{10}(-13+11i).$$

Quindi $a = \mathrm{Re}(z) = -\frac{13}{10}$ e $b = \mathrm{Im}(z) = \frac{11}{10}$.

Esempio 3 Scriviamo in forma algebrica il numero complesso

$$i(5+6i)^2 - \frac{4}{1-i}.$$

Si ha:

$$i(25+60i+36i^2) - \frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -60-11i-2(1+i) = -62-13i$$

4.2 Rappresentazione geometrica e trigonometrica dei numeri complessi

Ricordiamo che i numeri reali si possono rappresentare come i punti di una retta una volta scelto un sistema di riferimento su di essa. Analogamente i numeri complessi si possono rappresentare con i punti di un piano, che prende il nome di *piano di Gauss.*

Fissato un sistema di coordinate ortogonali, associamo al numero complesso $z = a+ib$ il punto P del piano di coordinate (a,b).

In questo modo ai numeri reali vengono associati i punti dell'asse x, che viene detto *asse reale*, mentre gli immaginari puri sono rappresentati dai punti dell'asse y, detto *asse immaginario.*

L'unità immaginaria viene quindi rappresentata come la coppia $(0,1)$.

Il punto che rappresenta il complesso coniugato $\bar{z}$ è il simmetrico rispetto all'asse x del punto che rappresenta z.

La distanza dall'origine O (che rappresenta lo zero 0 in $\mathbb{C}$) del punto P che rappresenta z si chiama modulo di z e si indica con $\rho = |z|$.

Per il Teorema di Pitagora

$$\rho = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Supponiamo $z \neq 0$ (e quindi $P \neq O$). Denotiamo con

$$\theta = \operatorname{Arg}(z)$$

la misura in radianti di una qualsiasi rotazione che sovrappone l'asse delle x al segmento orientato OP, presa con il segno positivo se avviene in senso antiorario, negativo nel caso opposto, si chiama *argomento* di z.

Osserviamo che l'argomento di z è definito a meno di multipli di 2π. Inoltre se $z = 0$, l'argomento è indeterminato.

Per assegnare un ben determinato argomento basta assegnare un intervallo di ampiezza 2π nel quale far variare l'angolo θ. Noi fisseremo l'intervallo $[0, 2\pi)$.

Dato un numero complesso $z = a + ib$ sussistono le relazioni:

$$a = \operatorname{Re}(z) = \rho \cos\theta, \;\; b = \operatorname{Im}(z) = \rho \sin\theta. \tag{4.1}$$

Quindi

$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)}, \tag{4.2}$$

che prende il nome di rappresentazione trigonometrica del numero complesso z.

Per trovare la forma trigonometrica (4.2) di un numero complesso $z = a + ib$ si usano le (4.1). Prima di tutto si calcola il modulo di z dato da

$$\boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Inoltre
$$\boxed{\cos\theta = \frac{a}{\rho} \quad \sin\theta = \frac{b}{\rho}}.$$
e quindi possiamo trovare univocamente θ restringendosi all'intervallo $[0, 2\pi)$.

Esempio 4 Scriviamo la forma trigonometrica del numero complesso $z = 1 - i$.
Si ha
$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
mentre
$$\cos\theta = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ oppure } \theta = \frac{7\pi}{4}$$
$$\sin\theta = \frac{-1}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ oppure } \theta = \frac{7\pi}{4}$$
Segue che $\theta = \frac{7\pi}{4}$ e la forma trigonometrica di z è data da
$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}).$$

Due numeri complessi
$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \text{ e } z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
sono uguali se e solo se
$$\rho_1 = \rho_2, \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Dati
$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \text{ e } z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
usando le relazioni trigonometriche
$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$
e
$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1$$

si ottiene

$$\boxed{z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]}. \tag{4.3}$$

Proprietà *il prodotto di due numeri complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti*

In particolare per ogni intero non negativo n e per ogni numero complesso $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ si ottiene la cosidetta *formula di De Moivre*:

$$\boxed{z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]} \tag{4.4}$$

Inoltre è immediato verificare che:

$$|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\rho}, \quad \operatorname{Arg}(\frac{1}{z}) = -\operatorname{Arg}(z) = -\theta.$$

Equivalentemente

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta).$$

Dati

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

con $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]. \tag{4.5}$$

Proprietà *il quoziente di due numeri complessi ha come modulo il quoziente dei moduli e come argomento la differenza degli argomenti.*

Esempio 5 Calcoliamo $z = (2-2i)^5$. Si ha:

$$z = (2-2i)^5 = 2^5(1-i)^5 = 32(1-i)^5.$$

Per l'esempio (4)

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$$

Usando formula di formula di De Moivre (4.4) otteniamo:

$$(1-i)^5 = (\sqrt{2})^5(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})^5 = 4\sqrt{2}(\cos\frac{35\pi}{4} + i\sin\frac{35\pi}{4}).$$

Siccome $\frac{35\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 8\pi)$, otteniamo

$$(1-i)^5 = 4\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = 4\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4(-1+i).$$

Quindi $z = 128(-1+i)$.

Esempio 6 Cerchiamo i numeri complessi z che soddisfano l'equazione:

$$z^3 - |z|^2 = 0. \tag{4.6}$$

Primo metodo Scriviamo z in forma algebrica $z = x + iy$. L'equazione (4.6) diventa

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = x^2 + y^2,$$

la quale è equivalente al sistema (non lineare!)

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 & = & x^2 + y^2 \\ 3x^2y - y^3 & = 0 & \end{cases} \tag{4.7}$$

nelle incognite reali x e y.
Dalla seconda equazione ricaviamo $y(3x^2 - y^2) = 0$ le cui soluzioni sono $y = 0$ e $y^2 = 3x^2$.
Sostituendo $y = 0$ nella prima equazione otteniamo

$$x^3 = x^2$$

le cui soluzioni sono $x = 0$ e $x = 1$. Quindi le coppie $(x = 0, y = 0)$ e $(x = 1, y = 0)$ sono soluzioni del sistema.
Sostituendo $y^2 = 3x^2$ nella prima equazione si ottiene

$$x^3 - 9x^3 = -8x^3 = x^2 + 3x^2 = 4x^2,$$

o, equivalentemente,

$$4x^2(2x+1) = 0,$$

le cui soluzioni sono $x = 0$ e $x = -\frac{1}{2}$. La soluzione $x = 0$ sostituita in $y^2 = 3x^2$ ci da $y = 0$ mentre $x = -\frac{1}{2}$ sostituita in $y^2 = 3x^2$ ci da $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Abbiamo trovato quindi due nuove soluzioni $(x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2})$

In definitiva abbiamo trovato le quattro coppie di soluzioni

$$(0,0), (1,0), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}),$$

e quindi le soluzioni dell'equazione (4.6) sono fornite dai quattro numeri complessi:

$$z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Secondo metodo Scriviamo z in forma trigonometrica

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Per la formula di De Moivre, l'equazione (4.6) è equivalente all'equazione

$$\rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = \rho^2,$$

la quale è a sua volta equivalente al sistema

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho^2 \\ \cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = 1 \end{cases} \tag{4.8}$$

nelle incognite $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$.

Le soluzioni della prima equazione sono $\rho = 0$ e $\rho = 1$. Mentre le soluzioni della seconda equazione sono $3\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ossia le tre soluzioni $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. In questo modo ritroviamo le soluzioni già trovate in precedenza e cioè:

$$z_1 = 0, z_2 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$
$$z_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esempio 7 Calcoliamo il quoziente $\frac{z_1}{z_2}$ dove $z_1 = i$ e $z_2 = 1 - i$ usando le loro forme trigonometriche. Il modulo e l'argomento di $z_1 = i$ sono $\rho_1 = 1$ e $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, mentre il modulo e l'argomento di z_2 sono dati da $\rho_2 = \sqrt{2}$ e $\theta_2 = \frac{7\pi}{4}$. Qunidi per la formula (4.5)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4}).$$

Osserviamo che

$$\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4} = 2\pi - \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

da cui

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}(-1 + i)$$

4.3 Radici di un numero complesso

Vogliamo estendere il concetto di radice n-esima valido per i numeri reali positivi a tutti i numeri complessi.

Definizione 1 *Dati un numero naturale $n \geq 1$ e un numero complesso w, diremo che il numero complesso z è una radice n-esima di w, e scriveremo $z = \sqrt[n]{w}$ se $z^n = w$.*

Teorema 7 *Sia $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, e n un intero ≥ 1. Esistono esattamente n radici n-esime complesse $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ di w. Posto $w = r(cos\varphi + i\, sin\varphi)$ e $z_k = \rho_k(cos\theta_k + i\, sin\theta_k)$ abbiamo*

$$\rho_k = \sqrt[n]{r}$$

$$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Equivalentemente

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}(cos(\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}) + i\, sin(\tfrac{\varphi+2k\pi}{n})), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1} \tag{4.9}$$

Dimostrazione: I numeri z_k sono evidentemente radici n-esime di w, come risulta applicando la formula di De Moivre (4.4). Mostriamo che non ce ne sono altre. Infatti affinchè un numero complesso $R(\cos\psi + i\sin\psi)$ sia radice n-esima di w, dovrebbe risultare:

$$R^n = r \ \text{ e } \ n\psi = \varphi + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}$$

e cioè

$$R = \sqrt[n]{r} \ \text{ e } \ \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2h\pi}{n}.$$

Attribuendo a n i valori $0, 1, \dots, n-1$ troviamo appunto i numeri z_k. Dando a h un qualsiasi altro valore $\tilde{h}$ diverso dai precedenti, questo può scriversi nella forma $\tilde{h} = k + mn, m \in \mathbb{Z}$ ($m \in \mathbb{Z}$ è il quoziente e k il resto della divisione di $\tilde{h}$ per n) per cui sarebbe

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2m\pi = \theta_k + 2m\pi$$

e ritroveremmo ancora gli stessi z_k precedenti. □

Indichiamo con ϵ_k le radici n-esime del numero 1. Osserviamo che il modulo del numero 1 è uguale a 1 mentre l'argomento è $\theta = 0$.
Dalla formula (4.11) si ottiene allora:

$$\boxed{\epsilon_k = \cos\tfrac{2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1} \tag{4.10}$$

Esempio 8 Calcoliamo le radici quarte di 1. In queto caso nella formula (4.10) $k = 0, 1, 2, 3$. Otteniamo quindi:

$$\epsilon_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$\epsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$\epsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$\epsilon_3 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Proposizione 1 *Le radici n-esime di un qualunque numero complesso z si possono ottenere moltiplicando una di esse per le n radici n-esime del numero* 1.

Dimostrazione: se z_1 è una radice n-esima di z ed ϵ_k una qualsiasi radice n-esima di 1 si ha:

$$(z_1\epsilon_k)^n = z_1^n(\epsilon_k)^n = z_1^n = z$$

e quindi $z_1\epsilon_k$ è una radice n-esima di z; inoltre, al variare di $\epsilon_k, k = 0, 1, \dots, n-1$, i numeri $z_1\epsilon_k$ sono tutti distinti. $\square$

Esempio 9 Calcoliamo le radici terze di -27. Sicuramente ci sono tre radici complesse. Una di queste è -3. Per la Proposizione 1 le radici terze di -27 si possono ottenere moltiplicando -3 per le radici terze di 1.

Dalla formula (4.10) queste ultime sono date da:

$$\epsilon_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$
$$\epsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\epsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quindi le radici terze di -27 sono date $z_0 = -3, z_1 = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Il Teorema 7 ci dice che un polinomio del tipo $z^n = z_0$ ammette n radici complesse. Vale un risultato più generale noto come il *teorema fondamentale dell'algebra* del quale riportiamo l'enunciato.

Abbiamo bisogno di una definizione

Definizione 2 *Se $P(z)$ è un polinomio in z di grado n e z_0 una sua radice, si dice che z_0 è di molteplicità k (k intero ≥ 1) se vale la formula*

$$P(z) = (z - z_0)^k Q(z),$$

dove Q è un polinomio tale che $Q(z_0) \neq 0$.

Esempio 10 *L'unità immaginaria i è radice di molteplicità due del polinomio* $P(z) = z^3 - iz^2 + z - i = z^2(z-i) + (z-i) = (z-i)(z^2+1) = (z-i)^2(z+i)$

Teorema 8 *(teorema fondamentale dell'algebra) Un'equazione polinomiale*

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0, \quad a_n \neq 0$$

con coefficienti complessi qualsiasi ammette precisamente n radici in $\mathbb{C}$, se ognuna di esse viene contata con la sua molteplicità.

Esercizi sui numeri complessi

0. Trovare parte reale e immaginaria dei numeri complessi:

$$3 + i - \frac{5}{2-4i}$$

e

$$\frac{3+i}{i} - \frac{1}{i}.$$

1. Trovare le radici quadrate dei seguenti numeri complessi: $1, i, -i, -3$.

2. Risolvere le seguenti equazioni nel campo complesso:

$$z^2 + 2z - 1 = 0$$

$$z^2 + z + 1 = 0$$

3. Trovare le radici quinte dell'unità.

4. Dalla formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{4.11}$$

(dimostrata a lezione) si deduce che *le radici di un numero complesso z si dispongono nel piano complesso come i vertici di un poligono regolare di*

n lati inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[n]{r}$, dove uno di tali vertici rappresenta il numero complesso di argomento $\frac{1}{n}\,Arg(z)$.

Trovare le radici terze, quarte quinte dei seguenti numeri complessi

$$-1, 1+i, 1-i$$

e verificare questo risultato.

5. Trovare le radici complesse dei seguenti polinomi:

$$z^4 + i = 0$$

$$z^5 + z^3 - iz^2 - i = 0.$$

Capitolo 5

Esercizi sul Capitolo 14 del libro di testo

1. Si dica se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

   è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e, in caso affermativo, si scriva una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

2. Si dica, giustificando la risposta, se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

3. Si dica se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e, in caso affermativo, si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

4. Stessa domanda dell'esercizio precedente per le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Sia $T : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V. Si dia la definizione (senza guardare gli appunti o il libro) di autospazio V_λ relativo a un autovalore λ di T e si dimostri che V_λ è un sottospazio vettoriale di V.

6. Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Si trovi (se esiste) $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $L_A(v) = v$.

7. Trovare autovalori e autovettori degli endomorfismi rappresentati, sui reali o sui complessi, dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 & -24 & -18 \\ 8 & 17 & 12 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

   e determinare se sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$.

8. Trovare gli autovalori e gli autospazi delle matrici al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (distinguendo, ove occorra i due casi).

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \; B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \; C_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda-1 \end{pmatrix}.$$

9. Sia $T : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V e sia V_λ l'autospazio associato a $\lambda \in \mathrm{sp}(T)$. Se $V_\lambda = V$, che cosa si può dire su T?

10. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dimostrare che A e A^T hanno gli stessi autovalori ma non necessariamente gli stessi autovettori.

11*. Sia $T : V \to V$ un endomorfismo tale che $\mathrm{sp}(T) = \{\lambda_0\}$. Dimostrare che T è diagonalizzabile se e solo se $T = \lambda_0 id_V$.

12**. Trovare gli autovalori e gli autovettori dell'endomorfismo $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$ dato da $T(p) = tp^{'}$.

13*. Trovare due matrici $A, A^{'} \in M_2(\mathbb{R})$ che non siano simili ma che abbiano comunque polinomio caratteristico, autovalori, determinante e traccia uguali.

14**. Sia $T : V \to V$ una proiezione, cioè un endomorfismo tale che $T \circ T = T$. Dimostrare che T è diagonalizzabile (usare l'esercizio 10 del Capitolo 1).

15***. Sia $T : V \to V$ un endomorfismo tale che $T^2 = id_V$. Dimostrare che T è diagonalizzabile (suggerimento: considerare i sottospazi U e W di V definiti da $U = \{\mathrm{Ker}(T - id_V)\}$ e $W = \mathrm{Ker}(T + id_V))$.

16**. Sia $T : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{R}$ e $U \subset V$ un sottospazio di V tale che $T(U) \subseteq U$. Dimostrare che il polinomio caratteristico della restrizione $T|_U$ di T a U divide p_T. In particolare se T ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$ anche $T_{|U}$ li ha. Dimostrare inoltre che se T è diagonalizzabile allora anche $T_{|U}$ lo è. (suggerimento: per la prima parte usare $\det \begin{pmatrix} A & | & C \\ 0 & | & B \end{pmatrix} = \det A \det B$, vedi corollario *Appunti sul determinante*. Per la seconda parte dimostrare che se $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$ allora $U = U \cap V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus U \cap V_{\lambda_k}$.

Infine per i più audaci un'esercizio con quattro asterischi (che guarda a caso è il numero 17, spero che non siate scaramantici!)

17****. Siano A, A' due matrici simili su $\mathbb{C}$, cioè esiste un matrice $\tilde{B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tale che $A' = \tilde{B}^{-1} A \tilde{B}$. Dimostare che A e A' sono simili su $\mathbb{R}$, cioè esiste un matrice $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tale che $A' = B^{-1} A B$.

Capitolo 6

Spazi vettoriali con prodotto scalare (vedi Capitolo 12, 15 e 16 libro di testo)

6.1 Definizione di prodotto scalare

Tutti gli spazi vettoriali trattati in queste note saranno sul campo dei numeri reali e (tranne nell' Esercizio 1) di dimensione finita.
Sia V uno spazio vettoriale. Un prodotto scalare in V è un'applicazione

$$V \times V \to \mathbb{R} : (u, v) \mapsto u \cdot v$$

che gode delle seguenti proprietà (dove u, v sono in V e $\lambda \in \mathbb{R}$):

PS1 $u \cdot v = v \cdot u$ (simmetria);

PS2 $(\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v) = u \cdot (\lambda v)$ (omogeneità);

PS3 $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$ (additività);

PS4 $v \cdot v \geq 0$, e $v \cdot v = 0$ se e solo se $v = 0$ ($\cdot$ è definito positivo).

Uno spazio vettoriale V in cui sia fissato un prodotto scalare si denota con $(V, \cdot)$ e si chiama *spazio vettoriale metrico*.

Altre proprietà del prodotto scalare

1. Da **PS1**, **PS2** e **PS3** segue che

   $$v \cdot (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 (v \cdot v_1) + \cdots + \lambda_n (v \cdot v_n), \ \forall v, v_1, \ldots, v_n \in V, \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n.$$

2. Da **PS3** segue

   $$v \cdot 0 = v \cdot (0 + 0) = v \cdot 0 + v \cdot 0$$

   e quindi $v \cdot 0 = 0$. Usando anche **PS1** risulta anche $0 \cdot v = 0$.

Lo spazio euclideo n-dimensionale
Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ si può definire il *prodotto scalare euclideo* con la formula seguente:

$$(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Si tratta di un prodotto scalare (facile verifica) molto importante nella pratica. Scrivendo i vettori di $\mathbb{R}^n$ come vettori a n righe e a una colonna, il prodotto scalare euclideo si può scrivere come prodotto di matrici: $x^T y$. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ munito del prodotto scalare euclideo si chiama *spazio euclideo n-dimensionale*.

Esempio 11 Verificare che

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_2$$

definisce un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$. La proprietà **PS1**, cioè la simmetria è ovvia. La **PS2** e la **PS3** seguono dal fatto che fissando (x_1, x_2) (risp. (y_1, y_2)) si ottiene un polinomio di primo grado in x_1 e x_2 (risp, y_1 e y_2) senza termine noto. Per verificare la proprietà **PS4** dobbiamo verificare che

$$2x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \geq 0$$

e

$$2x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = 0$$

se e solo se $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Osserviamo che $2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 \geq 0$ Inoltre $2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 = 0$ se e solo se $x_1 = 0$ e $x_1 - x_2 = 0$, cioè se e solo se $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Esercizio 1 Sia $V = C([a, b])$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue definite nell'intervallo $[a, b]$, $a < b$. Dimostrare, usando le proprietà degli integrali, che

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

definisce un prodotto scalare su V.

Esercizio 2 Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale metrico e W un sottospazio vettoriale di V. Si può considerare su W il prodotto scalare (denotato sempre con $\cdot$) *indotto* da quello di V (cioè il prodotto scalare di due elementi di W si calcola considerandoli in V). Dimostrare che così $(W, \cdot)$ è uno spazio metrico.

Prodotti scalari in $\mathbb{R}^n$ e matrici simmetriche

Sia $\cdot$ un prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Consideriamo la matrice $S \in M_n(\mathbb{R})$ definita da

$$S = (s_{ij}) = e_i \cdot e_j, \ i, j = 1 \dots n, \tag{6.1}$$

dove e_i è il vettore i-esimo della base canonica di $\mathbb{R}^n$ non è difficile vedere che

$$x \cdot y = x^T S y.$$

Per la proprietà **PS1** la matrice S è simmetrica e inoltre per la proprietà **PS4** soddisfa la relazione

$$x^T S x \geq 0, \ x^T S x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ (non necessariamente simmetrica) che soddisfa la relazione precedente e cioè

$$x^T A x \geq 0, \ x^T A x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

è detta *definita positiva*.

Per esempio la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è definita positiva (verificare) ma non è simmetrica.

Osserviamo che se S è una matrice simmetrica definita positiva allora ponendo

$$x \cdot y = x^T S y \tag{6.2}$$

resta definito un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ (perchè?).

La seguente proposizione è ora di verifica immediata

Proposizione 2 *Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei prodotti scalari in $\mathbb{R}^n$ e l'insieme delle matrici simmetriche in $M_n(\mathbb{R})$ definite positive. Questa corrispondenza è ottenuta associando ad un prodotto scalare $\cdot$ in $\mathbb{R}^n$ la matrice simmetrica S data da (6.1) (la sua inversa associa a S il prodotto scalare dato 6.2).*

Il prodotto scalare corrispondente ad una base

Per ogni base fissata $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di uno spazio vettoriale V si può definire un prodotto scalare

$$(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) \cdot (y_1v_1 + \cdots + y_nv_n) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Esempio 12 Se $V = \mathbb{R}^n$ ed $\mathcal{B}$ è la base canonica, il prodotto scalare corrispondente coincide col prodotto scalare euclideo.

Esercizio 3 Costruire il prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$ associato alla base $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 0)\}$.

6.2 Forme quadratiche in $\mathbb{R}^n$

Nell'esempio (11) per dimostare la validità della **PS4**, o come si usa dire che il prodotto scalare è *definito positivo*, abbiamo scritto

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2.$$

Ma come si opera in generale per verificare che un prodotto scalare è definitio positivo? Per rispondere a questa domanda sviluppiamo (una parte) della teoria delle forme quadratiche in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 3 *Una forma quadratica $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è un polinomio omogeneo di grado 2 nelle variabili $x_1, \dots, x_n$.*

Esempi

- $x^2 + y^2$ e $4x^2 + xy - y^2$ sono forme quadratiche in $\mathbb{R}^2$;
- $4x^2 + xy - y^2 + xz + z^2$ è una forma quadratica in $\mathbb{R}^3$;

Essenzialmente tutto quello che c'è da dire sulle forme quadratiche in $\mathbb{R}^n$ è contenuto nel seguente teorema che afferma che una forma quadratica può essere scritta come somma di quadrati di funzioni lineari linearmente indipendenti delle variabili.

Teorema 9 *(forme quadratiche come somma di quadrati)*

(a) Per ogni forma quadratica Q in $\mathbb{R}^n$ esistono $m = k + l$ funzioni lineari linearmente indipendenti $\alpha_1, \dots \alpha_m$ tali che

$$Q(x) = (\alpha_1(x))^2 + \cdots + (\alpha_k(x))^2 - (\alpha_{k+1}(x))^2 - \cdots - (\alpha_{k+l}(x))^2 . \quad (6.3)$$

($\alpha_1, \dots \alpha_m$ sono dette linearmente indipendenti se la matrice associata al sistema omogeneo $\alpha_1(x) = 0, \dots, \alpha_m(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n$ ha rango massimo cioè m).

(b) Il numero k di segni positivi e il numero l di segni negativi in un espressione tipo (6.3) dipende solo da Q e non dalle funzioni lineari scelte.

Definizione 4 *La segnatura di una forma quadratica Q in $\mathbb{R}^n$ è la coppia di interi data da (k, l) che compaiono nel teorema precedente.*

La dimostrazione del teorema precedente si basa sul metodo del *completamento dei quadrati*. In queste note non dimostreremo il teorema ma ci limiteremo a mostrare la tecnica usata in vari esempi. L'idea viene dalla formula per trovare le soluzioni di un'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Questa può essere scritta come (supponendo a positivo)

$$ax^2 + bx + c = (\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}})^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0.$$

Ossia

$$(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}})^2 = \frac{b^2}{4a} - c$$

Estraendo le radici quadrate si ottiene

$$\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}$$

che da origine alla famosa formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esempio 13 Scriviamo $x^2 + xy$ come somma di quadrati. cioè

$$x^2 + xy = (x + \frac{y}{2})^2 - (\frac{y}{2})^2.$$

Quindi la forma quadratica $Q(x, y) = x^2 + xy$ può essere scritta come $(\alpha_1(x, y))^2 - (\alpha_2(x, y))^2$, dove α_1 e α_2 sono le funzioni lineari date da

$$\alpha_1(x, y) = x + \frac{y}{2},\ \alpha_2(x, y) = \frac{y}{2}$$

Esempio 14 Consideriamo la forma quadratica

$$Q(x, y, z) = x^2 + 2xy - 4xz + 2yz - 4z^2.$$

Consideriamo tutti i termini dove appare la x, cioè $x^2 + (2y - 4z)x$. Questo ci permette di completare i quadrati

$$(x + y - 2z)^2 - (y^2 - 4yz + 4z^2) + 2yz - 4z^2 = (x + y - 2z)^2 - y^2 + 6yz - 8z^2.$$

Raccogliamo ora i termini rimanenti in cui compare y

$$Q(x, y, z) = (x + y - 2z)^2 - (y - 3z)^2 + z^2.$$

In questo caso le funzioni lineari sono

$$\alpha_1(x, y, z) = x + y - 2z,\ \ \alpha_2(x, y, z) = y - 3z,\ \ \alpha_3(x, y, z) = z.$$

Se scriviamo ciascuna funzione come le righe di una matrice otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango tre e quindi queste funzioni sono linearmente indipendenti.

L'algoritmo per completare i quadrati dovrebbe essere chiaro: se il quadrato di una funzione coordinata appare nell'espressione della forma quadratica, allora ogni comparsa di quella variabile può essere incorporata in un quadrato perfetto. Sottraendo questo quadrato perfetto, si ha a che fare una forma quadratica con precisamente una variabile in meno. E' proprio questo che fa si che le funzioni lineari $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ nel Teorema 9 siano linearmente indipendenti. Il prossimo esempio mostra come si deve fare nel caso non ci sia una variabile al quadrato.

Esempio 15 Consideriamo la forma quadratica

$$Q(x, y, z) = xy - xz + yz.$$

Inroduciamo la nuova variabile $u = x - y$ quindi $x = u + y$ e sostituendo

$$\begin{aligned} &(u + y)y - (u + y)z + yz = y^2 + uy - uz = (y + \tfrac{u}{2})^2 - \tfrac{u^2}{4} - uz = \\ &= (y + \tfrac{u}{2})^2 - (\tfrac{u}{2} + z)^2 + z^2 = (\tfrac{x}{2} + \tfrac{y}{2})^2 - (\tfrac{x}{2} - \tfrac{y}{2} + z)^2 + z^2. \end{aligned}$$

Anche qui si verifica facilmente che le funzioni $\alpha_1(x,y,z) = \frac{x}{2}+\frac{y}{2}$, $\alpha_2(x,y,z) = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + z$, $\alpha_3(x,y,z) = z$ sono linearmente indipendenti. Infatti se scriviamo ciascuna funzione come le righe di una matrice otteniamo

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango tre e quindi queste funzioni sono linearmente indipendenti.

Osservazione 3 E' importante osservare che il Teorema 9 afferma che una forma quadratica può essere espressa come somma di funzioni linearmente indipendenti ma *non* ci dice che se una forma quadratica è scritta come somma di quadrati di funzioni lineari allora queste funzioni sono linearmente indipendenti. Per esempio la forma quadratica

$$Q(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$$

può essere scritta come

$$Q(x,y) = x^2 + y^2 + (x+y)^2$$

ma anche come

$$Q(x,y) = (\sqrt{2}x + \frac{y}{\sqrt{2}})^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}y\right)^2.$$

Soltanto la seconda decomposizione riflette il Teorema 9. Infatti nella prima $x+y$ è una combinazione lineare di x e y.

Forme quadratiche e matrici simmetriche

In generale una forma quadratica si scrive come

$Q(x_1,\ldots,x_n) = a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n + a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3n}x_3x_n + \cdots\cdots + a_{nn}x_n^2$.

Questa scrittura permette di costruire la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

che si chiama *matrice associata alla forma quadratica* Q.
Usando la matrice associata, la forma quadratica Q si può scrivere mediante il prodotto di matrici:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

e in forma compatta

$$Q(x) = x^T A x$$

dove $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è la matrice colonna delle variabili.

Viceversa ad ogni matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ si può associare una forma quadratica $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita così:

$$Q(x) = x^T A x$$

la cui matrice associata è esattamente A.

Vale quindi la seguente

Proposizione 3 *Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle matrici simmetriche in $M_n(\mathbb{R})$ e le forme quadratiche in $\mathbb{R}^n$. Questa corrispondenza è ottenuta associando alla matrice simmetrica A la forma quadratica $Q(x) = x^T A x$.*

Osservazione 4 Se $A = (a_{ij})$ è la matrice associata alla forma quadratica Q risulta:

a_{ii} è il coefficiente di x_i^2
$2a_{ij},\ (i \neq j)$ è il coefficiente di $x_i x_j$.

Definizione 5 *Una forma quadratica Q su $\mathbb{R}^n$ è definita positiva se $Q(x) > 0$ quando $x \neq 0$.*

Dalla Proposizione 2 e dalla Proposizione 3 si ottiene la seguente

Proposizione 4 *Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei prodotti scalari in $\mathbb{R}^n$ e le forme quadratiche definite positive in $\mathbb{R}^n$. Questa corrispondenza è ottenuta associando ad un prodotto scalare $\cdot$ in $\mathbb{R}^n$ la forma quadratica $Q(x) = x^T S x$, dove S è la matrice data da (6.1).*

Il seguente teorema chiude il cerchio e ci dice quando una forma quadratica (risp. un prodotto scalare, per la Proposizione 4) è definita positiva (risp. è definito positivo).

Teorema 10 *Una forma quadratica Q in $\mathbb{R}^n$ è definita positiva se e solo se la sua segnatura è $(n, 0)$.*

Dimostrazione: Supponiamo che Q sia definita positiva e sia

$$Q(x) = (\alpha_1(x))^2 + \cdots + (\alpha_k(x))^2 - (\alpha_{k+1}(x))^2 - \cdots - (\alpha_{k+l}(x))^2 .$$

la decomposizione data dal Teorema 9. Supponiamo per assurdo $k < n$ e consideriamo il sistema omogeneo dato dalle equazioni

$$\alpha_1(x) = 0, \ldots, \alpha_k(x) = 0.$$

Allora questo sistema ha una soluzione non banale $y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$ (perchè?). Quindi

$$Q(y) = (\alpha_1(y))^2 + \cdots + (\alpha_k(y))^2 - (\alpha_{k+1}(y))^2 - \cdots - (\alpha_{k+l}(y))^2 =$$
$$- (\alpha_{k+1}(y))^2 - \cdots - (\alpha_{k+l}(y))^2 \leq 0$$

che contraddice l'ipotesi che Q è definita positiva e quindi $k = n$ e $l = 0$. Viceversa, se la segnatura di Q è $(n, 0)$ allora

$$Q(x) = (\alpha_1(x))^2 + \cdots + (\alpha_n(x))^2 \geq 0$$

e $Q(x) = 0$ equivale a trovare una soluzione del sistema omogeneo costituito dalle equazioni

$$\alpha_1(x) = 0, \ldots, \alpha_n(x) = 0.$$

Essendo queste n equazioni linearmente indipendenti in n incognite segue che $x = 0$. □

Esercizio 4 *Dimostrare che*

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + x_2y_3 + y_2x_3 - 4x_3y_3$$

non definisce un prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5 *Scrivere la forma quadratica*

$$Q(x, y, z) = x^2 + 2xy - 4xz + 2yz - 4z^2.$$

come nel Teorema 9.

Esercizio 6 *Trovare quali delle seguenti applicazioni sono prodotti scalari su* $\mathbb{R}^3$ *scrivendo quando possibile le matrici simmetriche associate.*

1. $x \cdot y = x_1^2 + y_2^2 + x_3y_3$;

2. $x \cdot y = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + \pi x_3y_3$;

3. $x \cdot y = x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_3$;

4. $x \cdot y = 3x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2 + x_3y_3$;

5. $x \cdot y = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2 - x_2y_3$*;*

6. $x \cdot y = -x_1y_1 - x_2y_2$*;*

7. $x \cdot y = -400x_1y_1 + 3\sqrt{\pi}x_1y_3 + 3\sqrt{\pi}x_3y_1 + 227x_3y_3$*;*

dove $x = (x_1, x_2, x_3)$ *e* $y = (y_1, y_2, y_3)$*.*

Esercizio 7 *** Sia* $\cdot$ *un prodotto scalare in* $\mathbb{R}^n$ *e sia* A *la matrice simmetrica associata, cioè*

$$x \cdot y = x^T Ay.$$

Dimostrare che ponendo

$$C \cdot D = tr(D^T AC),\ C, D \in M_n(\mathbb{R}),$$

si definisce un prodotto scalare su $M_n(\mathbb{R})$*.*

6.3 Spazi normati

Sia V uno spazio vettoriale. Una norma in V è un'applicazione

$$\| \cdot \| : V \to \mathbb{R},\ v \mapsto \|v\|,$$

che gode delle seguenti proprietà (dove $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$):

N1 $\|v\| \geq 0$, e $\|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$;

N2 $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$;

N3 $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (disuguaglianza triangolare).

Uno spazio vettoriale con norma viene chiamato *spazio normato*.

Versori e normalizzazione di un vettore
Sia $(V, \| \ \|)$ uno spazio normato. Un vettore di norma 1 si chiama *versore*. Chiamiamo *normalizzato* di $v \in V,\ v \neq 0$ il versore

$$norm(v) = \frac{v}{\|v\|}.$$

La norma associata ad un prodotto scalare

Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare e per ogni $v \in V$ definiamo

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}.$$

Proposizione 5 *La formula precedente definisce una norma su V.*

Dimostrazione: Le proprietà **N1** e **N2** sono immediate. Per dimostrare la **N3** dimostriamo prima la seguente disuguaglianza che prende il nome di *disuguaglianza di Cauchy–Schwarz*:

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \ \|v\|, \ \forall u, v \in V,$$

e vale l'uguaglianza se e solo se u e v sono linearmente dipendenti. Infatti per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha:

$$0 \leq \|tu + v\|^2 = (tu + v)(tu + v) = t^2\|u\|^2 + 2tu \cdot v + \|v\|^2.$$

Quindi il discriminante del polinomio di secondo grado appena trovato deve essere ≤ 0. Pertanto

$$0 \geq \frac{\Delta}{4} = (u \cdot v)^2 - \|u\|^2\|v\|^2$$

da cui segue facilmente la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz (e vale l'uguaglianza se e solo se $\Delta = 0$ se e solo se $v = tu$ se e solo se u e v sono linearmente indipendenti). Per dimostrare la **N3** osserviamo che:

$$\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2$$

e dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2,$$

da cui $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ essendo $\|u + v\| \geq 0$ e $\|u\| + \|v\| \geq 0$. $\square$

Come si recupera il prodotto scalare a partire dalla norma

Sia V uno spazio vettoriale metrico $(V, \cdot)$ e sia $\| \ \|$ la norma associata. Allora

$$u \cdot v = \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\right).$$

Infatti

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v$$
$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u \cdot v$$

e sottraendole si ottiene l'asserto.

Esempio 16 Si verifica immediatamente che la norma nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ è data dalla formula

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Rispetto a questa norma gli elementi della base canonica sono versori.

Esempio 17 Sia $\cdot$ il prodotto scalare associato ad una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di uno spazio vettoriale V. Allora

$$\|x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

In particolare tutti i vettori di $\mathcal{B}$ sono versori.

Esercizio 8 Verificare che $(1, 0)$ non è un versore rispetto alla norma associata al prodotto scalare dell'Esempio 11.

Esercizio 9 Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale metrico e sia $\| \ \|$ la norma associata. Dimostrare che per ogni $v, w \in V$

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

Interpretare geometricamente quest'uguaglianza.

6.4 Angolo tra due vettori

Siano u e v due vettori non nulli di uno spazio vettoriale V. Possiamo definire l'*angolo* tra i due vettori come quel numero reale $\widehat{uv} \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos \widehat{uv} = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}.$$

Grazie alla disuguaglianza di Cauchy–Scharwz, questo rapporto è in modulo minore o uguale a 1, per cui è il coseno di qualcosa; e siccome il coseno è una funzione iniettiva nell'intervallo $[0, \pi]$, questo definisce in modo unico l'angolo tra u e v. Dunque abbiamo recuperato anche la definizione di angolo in uno spazio vettoriale metrico. Notiamo anche che si ottiene che due vettori u e v sono linearmente dipendenti se e solo se il coseno del loro angolo è uguale a ± 1, cioè se e solo se formano un angolo di 0 o π radianti. Inoltre formano un angolo di $\frac{\pi}{2}$ se e solo il coseno è zero, cioè se e solo se $u \cdot v = 0$.

Esercizio 10 Esibire due vettori ortogonali rispetto al prodotto scalare dell'Esempio 11.

Esercizio 11 Sia $V = C([-\pi, \pi])$ col prodotto scalare dato dall' Esercizio 1. Dimostrare che le funzioni $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sin x$ sono ortogonali.

Osservazione 5 Osserviamo che per definire l'angolo tra due vettori che generalizza il concetto usuale di angolo abbiamo dovuto usare la funzione coseno che di solito viene definita usando gli angoli nel piano. Questo sembra essere un cane che si morde la coda. Come risolvere il dilemma? Basterebbe trovare una definizione non geometrica di coseno e questa esiste grazie all'analisi. Infatti si può definire

$$\cos x = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

6.5 Insiemi e basi ortonormali

Un insieme $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ si dice *ortogonale* se v_i è ortogonale a v_j tutte le volte che $i \neq j$. Se inoltre $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono versori l'insieme si dice *ortonormale*. Quindi $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è ortonormale se e solo se:

$$v_i \cdot v_j = \delta_{ij}.$$

Il simbolo δ_{ij} si chiama *delta di Kronecker*. Una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ si dice *ortonormale* se l'insieme $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è ortonormale.

Esempio 18 La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è una base ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico.

Esempio 19 Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B}$ una base di V. Allora $\mathcal{B}$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare corrispondente a $\mathcal{B}$ (perchè?).

Proposizione 6 *I vettori che costituiscono un sistema ortogonale sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione: Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ un sistema ortogonale e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$. Usando le proprietà del prodotto scalare risulta, per ogni $i = 1, \dots, n$:

$$0 = (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \cdot v_i = \lambda_1 (v_1 \cdot v_i) + \cdots \lambda_n (v_n \cdot v_i) = \lambda_i (v_i \cdot v_i) = \lambda_i$$

e quindi $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$. □

Componenti di un vettore rispetto ad una base ortonormale
Le componenti di un vettore rispetto ad una base ortonormale si calcolano semplicemente come espresso dalla seguente:

Proposizione 7 *Sia $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di V. Se $v \in V$ si ha:*

$$v = (v \cdot e_1)e_1 + \cdots + (v \cdot e_n)e_n. \tag{6.4}$$

Cioè le componenti di v rispetto ad $\mathcal{B}$ si ottengono calcolando i prodotti scalari $v \cdot e_i$.

Dimostrazione: Sia $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Dalle proprietà del prodotto scalare e dalla ortonormalità della base $\mathcal{B}$ risulta, per ogni $i = 1, \dots, n$:

$$v \cdot e_i = (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) \cdot e_i = \alpha_i (e_i \cdot e_i) = \alpha_i.$$

□

Dalla proposizione precedente si ottiene:

$$\|v\|^2 = (v \cdot e_1)^2 + \cdots + (v \cdot e_n)^2$$

la quale si chiama *formula di Parseval*.

Prodotto scalare mediante le componenti
Sia $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di uno spazio vettoriale metrico $(V, \cdot)$ e siano $u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ e $v = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n$ due vettori di V. Con un facile calcolo si ottiene

$$u \cdot v = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n. \tag{6.5}$$

Esistenza di una base ortonormale Costruiremo ora una base ortonormale di uno spazio vettoriale metrico $(V, \cdot)$. Questo sarà particolarmente utile quando V è un sottospazio di uno spazio euclideo. Il procedimento usato si chiama *ortonormalizzazione di Gram–Schmidt* e consiste in quanto segue. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base qualsiasi di V. Poniamo

$$\begin{aligned}
&e_1 = norm(v_1)\\
&e_2 = norm\,(v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1)\\
&e_3 = norm\,(v_3 - [(v_3 \cdot e_1)e_1 + (v_3 \cdot e_2)e_2])\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&e_n = norm\,(v_n - [(v_n \cdot e_1)e_1 + \cdots + (v_n \cdot e_{n-1})e_{n-1}]).
\end{aligned}$$

Un calcolo diretto mostra che l'insieme $\{e_1, \dots, e_n\}$ è ortonormale. Quindi $\{e_1, \dots, e_n\}$ sono linearmente indipendenti. Essendo $n = \dim V$ risulta quindi che $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale.

Se la base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è già ortogonale, per ottenere una base ortonormale basta normalizzare tutti i vettori $v_1, \dots, v_n$.

L'importanza del procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schimdt è che permette di dare un teorema di esistenza per le basi ortonormali.

Teorema 11 *Sia $(V, \cdot)$ uno spazio metrico. Allora V ha una base ortonormale.*

Dimostrazione: Basta ortonormalizzare una base di V. □

Osservazione 6 Esistono infinite basi ortonormali in uno spazio metrico!!! Lo studente è invitato a considerare le basi ortonormali rispetto al prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^2$ e convincersi che ne esistono infinite.

Il teorema seguente dimostra che una sistema ortonormale può essere completato ad una base ortonormale.

Teorema 12 *Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale metrico e sia $e_1, \dots, e_r$ un insieme ortonormale di vettori di V. Allora esiste una base ortonormale di V del tipo $e_1, \dots e_r, e_{r+1}, \dots, e_n$.*

Dimostrazione: Basta completare la base $e_1, \dots, e_r$ ad una base qualsiasi di V e ortonormalizzare la base ottenuta: così facendo $e_1, \dots, e_r$ rimangono invariati. $\square$

Esercizio 12 Trovare una base ortonormale $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ (rispetto al prodotto scalare canonico) del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dato da

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dopo aver verificato che $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a W, trovare le componenti del vettore w rispetto alla base $\mathcal{B}$.

6.6 Sottospazi ortogonali

Sia $W \subset V$ un sottospazio e sia $v \in V$. Si dice che v è ortogonale a W (e si scrive $v \perp W$) se $v \perp w$ per ogni $w \in W$. Dalla definizione di ortogonalità e dalle proprietà del prodotto scalare segue facilmente che se W è generato da $w_1, \ldots, w_r$, si ha:

$$v \perp W \iff v \perp w_1, \ldots, v \perp w_r.$$

Due sottospazi W e Z si dicono *ortogonali* (e si scrive $Z \perp W$) se $w \perp Z$ per ogni $w \in W$. Ciò è equivalente a dire che $z \perp W$ per ogni $z \in Z$.
Se W è generato da $w_1, \ldots, w_r$ e Z è generato da $z_1, \ldots, z_r$ risulta;

$$W \perp Z \iff w_i \perp z_j, \ \forall\, i, j.$$

Esercizio 13 Se $e_1, \ldots, e_n$ è una base ortonormale di V e $1 \leq r < n$, allora i due sottospazi $W = \mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_r\}$, $Z = \mathrm{Span}\{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ sono ortogonali.

Esercizio 14 Siano $V_1, \ldots, V_s$, s sottospazi di V a due a due ortogonali. Provare che la somma $V_1 + \cdots + V_s$ è diretta.

Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale metrico e sia W un sottospazio di V. Si chiama *ortogonale* di W e si denota con $W^\perp$ il sottospazio di V costituito da tutti i vettori di V che sono ortogonali a W; in simboli:

$$W^\perp = \{v \in V |\ v \perp W\}.$$

Osserviamo che se V ha dimensione finita e $W \neq V$, si ha $W^\perp \neq \{0\}$. Infatti se $(e_1, \ldots, e_r)$ è una base ortonormale di W si ha $r < \dim V$ e per il teorema sul completamento della base ortonormale esiste almeno un versore e_{r+1} ortogonale a $(e_1, \ldots, e_r)$ e quindi a W. Osserviamo anche che se $(e_1, \ldots, e_n)$ è una base ortonormale di V e $(e_1, \ldots, e_r)$ è una base ortonormale per W allora $(e_{r+1}, \ldots, e_r)$ è una base ortonormale di $W^\perp$. Conseguentemente vale l' uguaglianza:

$$V = W \oplus W^\perp. \tag{6.6}$$

Di conseguenza ogni vettore $v \in V$ si può decomporre come $v = v_{par} + v_{perp}$ dove

$$v_{par} = (v \cdot e_1)e_1 + (v \cdot e_2)e_2 + \cdots + (v \cdot e_r)e_r$$

e

$$v_{perp} = v - ((v \cdot e_1)e_1 + (v \cdot e_2)e_2 + \cdots + (v \cdot e_r)e_r) = (v \cdot e_{r+1})e_{r+1} + \cdots + (v \cdot e_n)e_n.$$

Esercizio 15 Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale metrico finito dimensionale e sia W un sottospazio di V. Dimostrare che

$$(W^{\perp})^{\perp} = W.$$

Algoritmo per trovare una base ortonormale di un sottospazio vettoriale W e del suo complementare $W^{\perp}$.
I due esercizi che seguono descrivono un algoritmo per trovare una base ortonormale di $W^{\perp}$.

Esercizio 16 Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale metrico. Generalizzare l'algoritmo di Gram–Schimdt per calcolare una base ortonormale del sottospazio $W \subset V$ generato dai vettori $w_1, \dots w_r$ anche se i vettori non sono indipendenti (cioè anche se $w_1, \dots, w_r$ non sono necessariamente una base di W)

Esercizio 17 Sia W il sottospazio di V generato dai vettori $w_1, w_2, \dots, w_r$ e sia $v_1, v_2, \dots, v_n$ una base di V. Dimostrare che applicando l'algoritmo di Gram–Schimdt (come nell'esercizio precedente) ai vettori $w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_n$ si ottiene una base ortonormale per V. Una base ortonormale di W è data dai versori $e_1, \dots, e_p$, $p = \dim W$ ottenuti usando $w_1, \dots, w_r$ mentre una base ortonormale di $W^{\perp}$ è data dai versori $e_{p+1}, \dots, e_n$ ottenuti usando $v_1, \dots, v_n$.

Esercizio 18 Sia W il sottospazio vettoriale dello spazio euclideo $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori $(1, 1, 0, 0, 0)$, $(0, -1, 0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0, -1, 0)$. Trovare una base ortonormale di W e di $W^{\perp}$.

6.7 Matrici ortogonali e cambiamenti di base ortonormale

In questo paragrafo introduciamo le matrici ortogonali e dimostriamo che esse sono le matrici di passaggio tra basi ortonormali. Le matrici ortogonali verranno utilizzate nei capitoli successivi per descrivere i cambiamenti di riferimento cartesiani.

Definizione di matrice ortogonale
Una matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ si dice *ortogonale* se

$$PP^T = I_n.$$

Ciò equivale a dire che P è invertibile e che inoltre l'inversa P^{-1} di P coincide con la sua trasposta P^T (e quindi vale anche $P^T P = I_n$) . Denoteremo con $O(n)$ l'insieme delle matrici ortogonali di ordine n.

Esempio 20 La matrice identità I_n è ortogonale.

Esempio 21 La matrice $P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ è ortogonale per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Infatti risulta facilmente $PP^T = I_2$ (verificare).

Esempio 22 La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è ortogonale pur essendo invertibile. Infatti $AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2$.

Esercizio 19 $O(n)$ è un sottogruppo di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Esercizio 20 Usare la formula di Binet per dimostare che il determinante di una matrice ortogonale è $+1$ oppure -1.

Esercizio 21 Dimostrare che le matrici ortogonali 2×2 sono della forma

$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

se $\det P = 1$ oppure

$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

se $\det P = -1$

Teorema 13 *(matrici ortogonali e cambiamenti di base) Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione finita, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ due basi di V e sia P la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$. Supponiamo inoltre che $\mathcal{B}$ sia ortonormale. Allora $\mathcal{C}$ è ortonormale se e solo se P è ortogonale.*

Dimostrazione: Poniamo $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathcal{C} = \{f_1, \ldots, f_n\}$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \ldots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Per definizione di matrice di passaggio abbiamo:

$$f_1 = p_{11}e_1 + \cdots + p_{n1}e_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n = p_{1n}e_1 + \cdots + p_{nn}e_n$$

Essendo $\mathcal{B}$ ortonormale da (6.5) risulta

$$f_i \cdot f_j = p_{1i}p_{1j} + \cdots + p_{ni}p_{nj} = P^i P^j = (P^T)_i P^j, \; i, j = 1 \ldots, n.$$

da cui:

$$P^T P = \begin{pmatrix} f_1 \cdot f_1 & \ldots & f_1 \cdot f_n \\ \vdots & & \vdots \\ f_n \cdot f_1 & \ldots & f_n \cdot f_n \end{pmatrix}.$$

Quindi $P^T P = I_n$ se e solo se $\mathcal{C}$ è ortonormale. □

Corollario 6 *(caratterizzazione delle matrici ortogonali) Sia $P \in M_n(\mathbb{R})$, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) P è ortogonale;

(ii) le colonne di P formano una base ortonormale dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$;

(iii) le righe di P formano una base ortonormale dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$;

Dimostrazione: $(i) \Rightarrow (ii)$ poichè P è invertibile le colonne di P formano una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^n$ e P è la matrice di passaggio tra la base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ e la base $\mathcal{C}$. Se consideriamo il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$ la base $\mathcal{B}$ è ortonormale e quindi per il teorema precedente (essendo per ipotesi $P \in O(n)$) $\mathcal{C}$ è una base ortonormale dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Se le colonne di P formano una base di $\mathbb{R}^n$ risulta che P è la matrice di passaggio tra la base canonica $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Quindi P è ortogonale sempre per il teorema precedente.

Infine osserviamo che dalle implicazioni appena dimostate e cioè $(i) \Leftrightarrow (ii)$ vale la (iii) se e solo se P^T è ortogonale. Ma dire che P^T è ortogonale è equivalente e dire che P è ortogonale (perchè?). $\square$

Esercizio 22 Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che esiste un'unica matrice ortogonale $P \in O(n)$ tale che $P(v_j) = w_j,\ j = 1, \dots n$.

6.8 Isometrie

Siano $(V, \cdot)$ e $(W, \cdot)$ due spazi vettoriali metrici e sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare.

Definizione 6 • *Diremo che T è un'* isometria *se preserva il prodotto scalare, cioè*

$$T(v) \cdot T(w) = v \cdot w, \forall v, w \in V;$$

- *Diremo che T preserva la norma se*

$$\|T(v)\| = \|v\|,\ \forall v \in V.$$

In effetti preservare la norma o essere un'isometria sono condizioni equivalenti come espresso dalle condizioni (i) e (ii) della proposizione seguente.

Proposizione 8 *Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(i) T *è un'isometria;*

(ii) T *preserva la norma;*

(iii) *per ogni insieme ortonormale* $\{e_1, \dots, e_r\}$ *di* V *l'insieme* $\{T(e_1), \dots, T(e_r)\}$ *è un insieme ortonormale di* W*;*

(iv) *esiste una base ortonormale* $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ *di* V *tale che* $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ *è un insieme ortonormale di* W*.*

Dimostrazione:

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* $\|T(v)\|^2 = T(v) \cdot T(v) = v \cdot v = \|v\|^2$.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* $\|T(v)\|^2 + 2T(v) \cdot T(w) + \|T(w)\|^2 = \|T(v) + T(w)\|^2 = \|T(v+w)\|^2 = \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2v \cdot w + \|w\|^2$ *e siccome* $\|T(v)\|^2 = \|v\|^2$ *e* $\|T(w)\|^2 = \|w\|^2$ *si ottiene la tesi.*

(i) $\Rightarrow$ *(iii)* $T(e_i) \cdot T(e_j) = e_i \cdot e_j = \delta_{ij}, \ i, j = 1, \dots, r$.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv) ovvia*

(iv) $\Rightarrow$ *(i) siano* $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n, \ w = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n$. *Allora* $v \cdot w = \alpha_1 \beta_1 + \cdots + \alpha_n \beta_n$ *in quanto* $\mathcal{B}$ *è ortonormale. Ora per la (iv)*

$$T(v) \cdot T(w) = (\alpha_1 T(e_1) + \cdots + \alpha_n T(e_n)) \cdot (\beta_1 T(e_1) + \cdots + \beta_n T(e_n))$$
$$= \alpha_1 \beta_1 + \cdots + \alpha_n \beta_n. \qquad \square$$

Osservazione 7 Un' isometria $T : V \to W$ è iniettiva. Infatti se $T(v) = 0, v \in V$ allora $\|T(v)\| = \|v\| = 0$ e quindi $v = 0$. In particolare se $V = W$ allora T è un isomorfismo.

Corollario 7 *(isometrie e matrici ortogonali) Sia* $T : V \to W$ *un'applicazione lineare tra spazi vettoriali metrici della stessa dimensione. Siano* $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ *e* $\mathcal{C}$ *due basi ortonormali di* V *e* W *rispettivamente e sia* P *la matrice associata a* T *rispetto a queste basi. Allora* P *è ortogonale se e solo se* T *è un'isometria. In particolare l'applicazione lineare* $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *è un'isometria se e solo se* A *è ortogonale.*

Dimostrazione: Per il Teorema 13 (e per la definizione stessa della matrice P) la matrice P è ortogonale se e solo se se e solo se $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ è una base ortonormale di W. Per la Proposizione 8 (iv) questo capita se e solo se T è un'isometria. L'ultima affermazione è immediata (perchè?). $\square$

Esercizio 23 * Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale metrico e sia T un endomorfismo di V. Dimostrare che se T è un'isometria e λ è un autovalore di T allora $\lambda = \pm 1$.

Esercizio 24 Dimostrare che un autovalore di una matrice ortogonale può essere solo $+1$ oppure -1.

Esercizio 25 *** Sia P una matrice ortogonale. Provare che se n è dispari e $\det P = 1$, allora 1 è un autovalore di P.

Esercizio 26 * Trovare una matrice ortogonale P senza autovalori.

Esercizio 27 **** Sia $P \in O(3)$ (ortogonale di ordine 3) con $\det P = 1$. Provare che P è simile ad una matrice del tipo

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix},$$

dove

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2).$$

6.9 Endomorfismi autoaggiunti e matrici simmetriche reali

Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale metrico. Tra gli endomorfismi di uno spazio vettoriale metrico hanno particolare importanza quelli autoaggiunti, specialmente in relazione allo studio delle matrici simmetriche.

Definizione 7 *Un endomorfismo $T : V \to V$ si dice autoaggiunto se*

$$T(v) \cdot w = v \cdot T(w), \forall v, w \in V \tag{6.7}$$

Esempio 23 L'endomorfismo identico id_V e quello nullo sono ovviamente autoaggiunti.

Esempio 24 Sia $V = \mathbb{R}^2$ lo spazio euclideo. L'endomorfismo

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

definito da

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1)$$

è autoaggiunto. Infatti

$T(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 + x_2, x_1) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 + x_2)y_1 + x_1y_2 = x_1(y_1 + y_2) + x_2y_1 = (x_1, x_2)(y_1 + y_2, y_1) = (x_1, x_2)T(y_1, y_2)$.

Esempio 25 L'endomorfismo T dello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ definito da

$$T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$$

non è autoaggiunto. Infatti si ha

$$T(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, -1) \cdot (0, 1) = -1,$$

mentre

$$(1, 0) \cdot T(0, 1) = (1, 0) \cdot (1, 0) = 1$$

e quindi

$$T(1, 0) \cdot (0, 1) \neq (1, 0) \cdot T(0, 1).$$

Proposizione 9 *(criterio per gli endomorfismi autoaggiunti) Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale metrico. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots v_n\}$ una base di V e sia $T : V \to V$ un endomorfismo. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti*

a) T è autoaggiunto;

b) $T(v_i) \cdot v_j = v_i \cdot T(v_j)$.

Dimostrazione:

$a) \Rightarrow b)$ ovvia

$b) \Rightarrow a)$ siano $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,\ w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$ due vettori di V, applicando le proprietà del prodotto scalare e b) si ottiene (perchè?)

$$T(v) \cdot w = v \cdot T(w).$$

□

Teorema 14 *(endomorfismi autoaggiunti e matrici simmetriche) Sia $(V, \cdot)$ uno spazio metrico, $T : V \to V$ un endomorfismo e $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots e_n\}$ una base ortonormale di V. Sia A la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

a) T è autoaggiunto;

b) A è simmetrica (cioè $A^T = A$).

Dimostrazione: Siccome $\mathcal{B}$ è ortonormale segue ogni $v \in V$ può essere scritto come $v = (v \cdot e_1)e_1 + \cdots + (v \cdot e_n)e_n$ (vedi (6.4) sopra). In particolare

$$\begin{aligned} &T(e_1) = (T(e_1) \cdot e_1)e_1 + \cdots + (T(e_1) \cdot e_n)e_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &T(e_n) = (T(e_n) \cdot e_1)e_1 + \cdots + (T(e_n) \cdot e_n)e_n. \end{aligned}$$

Siccome la matrice A ha per colonna j-esima la componenti del vettore $T(e_j)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ risulta:

$$A = \begin{pmatrix} T(e_1) \cdot e_1 & T(e_2) \cdot e_1 & \ldots & T(e_n) \cdot e_1 \\ T(e_1) \cdot e_2 & T(e_2) \cdot e_2 & \ldots & T(e_n) \cdot e_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T(e_1) \cdot e_n & T(e_2) \cdot e_n & \ldots & T(e_n) \cdot e_n \end{pmatrix}.$$

Ora se T è autoaggiunto segue immediatamente che $T(e_i) \cdot e_j = e_j \cdot T(e_i),\ \forall i, j$ e quindi A è simmetrica. Viceversa se A è simmetrica allora $T(e_i) \cdot e_j = e_j \cdot T(e_i),\ \forall i, j$ e quindi T è autoaggiunto per la proposizione precedente □

Osservazione 8 *(endomorfismi autoaggiunti in* $\mathbb{R}^n$*)*Segue dal teorema precedente che l'endomorfismo $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è autoagguinto se e solo se A è simmetrica. Infatti A rappresenta l'endomorfismo L_A rispetto alla base canonica dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ che è una base ortonormale.

Esempio 26 Verifichiamo che l'endomorfismo nell' esempio (24) è autoagguinto usando l'osservazione precedente. Infatti la matrice A associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che è in effetti simmetrica.

Esercizio 28 Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ consideriamo l'endomorfismo T definito da

$$T(1,1) = (1,-1),\ T(1,2) = (t,0),\ t \in \mathbb{R}.$$

Trovare i valori del parametro reale t per i quali T è autoagguinto.

Osservazione 9 Nel Teorema 14 è fondamentale che la base $\mathcal{B}$ sia ortonormale. Infatti esistono endomorfismi $T : V \to V$ che rispetto ad una base $\mathcal{B}$ sono rappresentati da una matrice A simmetrica ma che non sono autoaggiunti (ciò significa che $\mathcal{B}$ non è ortonormale). Sapreste esibire un simile endomorfismo?

Veniamo ora al risultato più importante di questo paragrafo (e forse di tutta l'algebra lineare)

Teorema 15 *(fondamentale sugli endomorfismi autoaggiunti) Sia* $(V, \cdot)$ *una spazio vettoriale metrico e* $T : V \to V$ *un endomorfismo. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

a) T *è autoaggiunto;*

b) esiste una base ortonormale di V *formata da autovettori di* T*.*

Per dimostrare il Teorema 15 e in particolare l'implicazione $a) \Rightarrow b)$ (che è la più complicata) abbiamo bisogno del seguente Lemma 1 e del suo Corollario 8.

Lemma 1 *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica reale. Allora le radici del polinomio caratteristico di A sono tutte reali.*

Dimostrazione: Sia $\lambda = \alpha + i\beta$ una radice del polinomio caratteristico di A, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vogliamo dimostare che $\beta = 0$ ossia che λ è reale. Sia $T = L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'endomorfismo associata ad A rispetto alla base canonica, cioè $T(z) = Az, z \in \mathbb{C}^n$. Allora λ è un autovalore per T ed esiste quindi un vettore $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$ tale che $T(z) = \lambda z$. Poniamo $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}^n$ dove x, y sono pensati come vettori colonna. Risulta allora

$$Ax + iAy = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y),$$

e uguagliando la parte reale e la parte immaginaria dell'uguaglianza si ha

$Ax = \alpha x - \beta y$

$Ay = \beta x + \alpha y.$

Moltiplicando a sinistra per $-y^T$ la prima uguaglianza e a destra per x^T la seconda e sommando si ottiene

$$x^T Ay - y^T Ax = \beta(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

dove la norma è quella euclidea in $\mathbb{R}^n$.

Osserviamo ora che $x^T Ay$ è una matrice 1×1 (cioè un numero reale) e quindi simmetrica. Ne segue che

$$x^T Ay - y^T Ax = (x^T Ay)^T - y^T Ax = y^T A^T x - y^T Ax = 0$$

essendo A simmetrica. Quindi si ha

$$\beta(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 0.$$

Ma $x + iy \neq 0$ e quindi i vettori x e y non possono essere entrambi nulli, il che implica che $\|x\|^2 + \|y\|^2 \neq 0$, da cui infine $\beta = 0$. $\square$

Corollario 8 *Sia* $(V, \cdot)$ *uno spazio vettoriale metrico e sia* T *un endomorfismo autoaggiunto di* V*. Allora le radici del polinomio caratteristico di* T *sono tutte reali.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V allora la matrice associata a T rispetto a questa base è simmetrica per il Teorema 14 e la conclusione segue dal lemma precedente. □

Siamo ora in grado di dimostrare il Teorema 15.

dimostrazione del Teorema 15

$a) \Rightarrow b)$ La dimostrazione è per induzione su $n = \dim V$. Se $n = 1$ non c'è niente da dimostrare (perchè?); supponiamo quindi che $n \geq 2$ e che l'asserzione sia vera per spazi di dimensione $n - 1$. Siccome T è autoaggiunto il polinomio caratteristico di T possiede radici reali, per il corollario precedente. Quindi T possiede un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia $v \in V$ $(v \neq 0)$ un autovettore associato a λ (cioè $T(v) = \lambda v$). Quindi $e_1 = \frac{v}{\|v\|}$ è ancora un autovettore di T ma di norma unitaria (quale è il suo autovalore associato?). Sia $U = \mathrm{Span}(e_1)^{\perp}$ il complemento ortogonale dello spazio vettoriale generato da e_1 (ossia lo spazio vettoriale costituito da tutti i vettori di V ortogonali a e_1, vedi Paragrafo 6.6). Osserviamo ora che per ogni $u \in U$ si ha

$$T(u) \cdot e_1 = u \cdot T(e_1) = u \cdot \lambda e_1 = \lambda u \cdot e_1 = \lambda 0 = 0,$$

e quindi $T(u) \in U$. Questo significa che possiamo definire un'endomorfismo

$$S : U \to U$$

definendo

$$S(u) = T(u), \forall u \in U$$

(S non è altro che la restrizione dell'endomorfismo T al sottospazio U). Essendo T autoaggiunto lo è chiaramente S e per l'ipotesi induttiva (dato che $\dim U = n-1$) U possiede una base ortonormale $\{e_2, \ldots e_n\}$ che diagonalizza S. Allora $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ è una base ortonormale di V (cfr. uguaglianza 6.6) che diagonalizza T.

b) $\Rightarrow$ *a*) Sia $\mathcal{B} = \{e_1, \dots e_n\}$ una base ortonormale formata da autovettori di T e sia λ_i l'autovalore corrispondente all'autovettore e_i. Risulta allora per $i \neq j$

$T(e_i) \cdot e_j = \lambda e_i \cdot e_j = 0$

$e_i \cdot T(e_j) = e_i \cdot \lambda_j e_j = 0.$

Poichè ovviamente $T(e_i) \cdot e_i = e_i \cdot T(e_i)$ segue che $T(e_i) \cdot e_j = e_i \cdot T(e_j)$ per ogni i, j e quindi T è autoaggiunto per la Proposizione 9.

$\square$

Osservazione 10 Nella dimostrazione del Teorema 15 è implicito che *gli autovettori relativi a autovalori distinti di un endomorfismo autoaggiunto sono ortogonali*. Questo lo si può vedere direttamente come segue. Siano v_1 e v_2, due autovettori per T associati agli autovalori λ_1 e λ_2 rispettivamente con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Allora

$$T(v_1) \cdot v_2 = (\lambda_1 v_1) \cdot v_2 = \lambda_1 (v_1 \cdot v_2) \qquad v_1 \cdot T(v_2) = v_1 \cdot (\lambda_2 v_2) = \lambda_2 (v_1 \cdot v_2)$$

e poichè T è autoaggiunto si ottiene

$$\lambda_1 (v_1 \cdot v_2) = \lambda_2 (v_1 \cdot v_2).$$

Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ si deve avere $v_1 \cdot v_2 = 0$ e quindi v_1 e v_2 sono ortogonali.

Confronto tra endomorfismi diagonalizzabili ed endomorfismi autoaggiunti (opzionale)

Il Teorema 15 afferma che un endomorfismo autoaggiunto è sempre diagonalizzabile, con in più la proprietà che la base diagonalizzante può essere presa ortonormale. Conseguentemente un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale metrico non è necessariamente autoaggiunto. Per esempio l'endomorfismo T dello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile (perchè?) d'altra parte la base canonica è ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico e A non è simmetrica. Quindi per il Teorema 14 l'endomorfismo T non è autoaggiunto.
Vale tuttavia il seguente

Teorema 16 *Sia V uno spazio vettoriale e sia T un endomorfismo diagonalizzabile di V. Allora esiste in V un prodotto scalare rispetto al quale l'endomorfismo T è autoaggiunto.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{B}$ una base di V formata da autovettori di T (questa base esiste perchè T è diagonalizzabile) e definiamo in V il prodotto scalare associato a $\mathcal{B}$. Rispetto a questo prodotto scalare $\mathcal{B}$ è ortonormale (vedi Esempio 19). Quindi $\mathcal{B}$ risulta essere una base ortonormale di autovettori per l'endomorfismo T. Per il Teorema 15 l'endomorfismo T è dunque autoaggiunto. $\square$

Diagonalizzazione delle matrici simmetriche reali

Concludiamo il capitolo con un teorema sulle matrici simmetriche (spesso chiamato *Teorema spettrale*) il quale afferma che una matrice simmetrica reale è diagonalizzabile (fatto di per se già sorprendente) tramite una matrice ortogonale.

Teorema 17 *(diagonalizzazione delle matrici simmetriche) Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ un matrice simmetrica. Allora esiste una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.*

Dimostrazione: Consideriamo $\mathbb{R}^n$ lo spazio euclideo e sia $T = L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'endomorfismo associato ad A mediante la base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$. Siccome $\mathcal{B}$ è ortonormale e A è simmetrica allora, per l'Osservazione 8, T è autoaggiunto quindi per il Teorema 15 esiste una base ortonormale $\mathcal{C}$ formata da autovettori di T. Se P è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$. risulta che P è ortogonale essendo la matrice di passaggio tra basi ortonormali (vedi Teorema 13). Inoltre la matrice A' che rappresenta T rispetto alla base $\mathcal{C}$ è legata a A tramite la formula

$$A' = P^{-1}AP.$$

Ma essendo $\mathcal{C}$ formata da autovettori A' è un matrice diagonale (con gli autovalori nella diagonale principale). $\square$

Metodo pratico per trovare P

La dimostrazione del teorema precedente fornisce un metodo pratico per diagonalizzare una matrice simmetrica A mediante una matrice ortogonale. Infatti la matrice P ha come colonne proprio una base ortonormale di autovettori di $T = L_A$ (stiamo lavorando in $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}$ è la base canonica).

Esempio 27 Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo dello spazio euclideo la cui matrice rispetto alla base canonica è data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo subito che $T = L_A$ è autoaggiunto perchè la matrice di T è simmetrica e la base canonica è ortonormale (cfr. Osservazione 8). Vogliamo trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori. Per fare ciò calcoliamo il polinomio caratteristico e otteniamo

$$p_T(\lambda) = -\lambda^3 + 25\lambda$$

le cui radici (gli autovalori di T) sono $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 5$ in accordo con il Teorem 15. Svolgendo i calcoli si ottiene (lo studente è pregato di verificare)

$$V_{\lambda_1} = \mathrm{Span}\{v_1 = (4, -5, 3)\}$$
$$V_{\lambda_2} = \mathrm{Span}\{v_2 = (-3, 0, 4)\}$$
$$V_{\lambda_3} = \mathrm{Span}\{v_3 = (4, 5, 3)\}$$

Una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori si ottiene ortonormalizzando le basi ottenute degli autospazi e facendone l'unione. In questo caso basta normalizzare i vettori v_1, v_2 e v_3 che sono a due a due ortogonali. Una delle basi cercate è dunque

$$\left(e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}\ ,\ e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}\ ,\ e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}\right) = (\frac{1}{5\sqrt{2}}(4, -5, 3),\ \frac{1}{5}(-3, 0, 4),\ \frac{1}{5\sqrt{2}}(4, 5, 3))$$

Troviamo adesso una matrice ortogonale P che diagonalizza A. Basta prendere una matrice P che ha per colonne le componenti di e_1, e_2 e e_3 rispetto alla base canonica e cioè

$$P = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & -3\sqrt{2} & 4 \\ -5 & 0 & 5 \\ 3 & 4\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Per controllare l'esattezza del risultato trovato dobbiamo verificare che $P^{-1}AP$ è la matrice diagonale, avente sulla diagonale principale $-5, 0, 5$. Poichè $P^{-1} = P^T$ si tratta di calcolare $P^T AP$. In effetti si ottiene

$$P^T AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 29 Sia T l'endomorfismo dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Dimostrare che T è autoaggiunto e trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza T. Trovare inoltre una matrice $P \in O(3)$ che diagonalizza A.

Esercizio 30 Sia T l'endomorfismo dello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Dimostrare che T è autoaggiunto e trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza T. Trovare inoltre una matrice $P \in O(2)$ che diagonalizza A.

Esercizio 31 **** Dimostrare il Teorema 17 per le matrici simmetriche 2×2 direttamente, cioè senza utilizzare la teoria di questo capitolo.