Chapter 1

I numeri complessi

1.1 I numeri complessi

Introduciamo un simbolo i, detto unità immaginaria definito dalla condizione

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

Il simbolo i soddisfa l'equazione

$$x^2 + 1 = 0.$$

Un numero complesso è un'espressione del tipo:

$$z = a + ib, \ \ a, b \in \mathbb{R}.$$

I numeri a e b si chiamano parte reale e parte immaginaria del numero complesso z.

Indicheremo con $\operatorname{Re} z$ e con $\operatorname{Im} z$ la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso z.

Sia $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e un sottoinsieme di $\mathbb{C}$. Infatti i numeri reali si possono identificare con l'insieme

$$\{z = a + ib \in \mathbb{C} | \quad \operatorname{Im}(z) = b = 0\}.$$

I numeri complessi $z = a + ib$ tali che $\operatorname{Re} z = 0$ si dicono immaginari puri.

Due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$ sono *uguali* se $a = c$ e $b = d$.

Definiamo la somma e la moltiplicazione di due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$ con le solite regole del calcolo algebrico.

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d),$$

$$z \cdot w = (a+ib)(c+id) = ac+ibc+iad+i^2bd = ac-bd+i(bc+ad).$$

Dato un numero complesso $z = a + ib \neq 0$ esiste un numero complesso w, chiamato l'inverso di z tale che

$$z \cdot w = 1.$$

Denoteremo l'inverso di z con $\frac{1}{z}$.

Per trovare $\frac{1}{z}$ scriviamo $\frac{1}{z} = x + iy$. Allora

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1 = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay),$$

quindi

$$ax - by = 1, \;\; bx + ay = 0.$$

Abbiamo quindi un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite x, y. Usando, il fatto che $z \neq 0$ e quindi $a^2 + b^2 \neq 0$ otteniamo:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \;\;, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Equivalentemente

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Quindi il quoziente di due numeri complessi $w = c + id$ e $z = a + ib \neq 0$ è dato da:

$$\frac{w}{z} = w \cdot \frac{1}{z} = \frac{c + id}{a + ib} = \frac{(c + id)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + i \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}.$$

Osservazione 1 Le operazioni di somma e prodotto dei numeri complessi, ristrette ai numeri reali (cioè ai numeri complessi con parte immaginaria uguale a zero), coincidono con le operazioni di somma e prodotto sui numeri reali. Per questo motivo si dice che il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è un *estensione* del campo dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Osservazione 2 Una differenza sostanziale tra il campo dei numeri reali e quello dei numeri complessi è quella dell'ordinamento.

Il campo dei numeri reali è un *campo ordinato* in quanto sussistono le seguenti proprietà:

1) se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$;

2) se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$;

3) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$;

4) se $x \leq y$, allora $x + z \leq y + z, \forall z \in \mathbb{R}$;

5) se $0 \leq x$ e $0 \leq y$, allora $0 \leq xy$.

Nel campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ non è possibile definire una struttura " $\leq$ " di campo ordinato.
Infatti dalle proprietà 4) e 5) seguirebbe che una relazione d'ordine $\leq$ soddisfa le seguenti proprietà:

- se un numero è positivo (negativo) il suo oppposto è negativo (positivo);
- il quadrato di un numero qualsiasi non è mai negativo.

D'altra parte $1^2 = 1$ e $i^2 = -1$. Quindi abbiamo due quadrati che sono l'uno l'opposto dell'altro. Nessuno dei due però può essere negativo (perchè sono quadrati) e questo è assurdo (perchè tra a e $-a$ uno dev'essere negativo se $a \neq 0$).

Il <u>complesso coniugato</u> di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero, che si indica con $\bar{z}$, dato da $\bar{z} = a - ib$.

Un numero complesso è reale se e solo se coincide col suo coniugato.

Inoltre valgono le seguenti proprietà (esercizio!):

- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$;
- $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$;
- $z\bar{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$;
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$;
- $\bar{\bar{z}} = z$; (l'operazione di coniugio è involutoria);
- $\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$;
- $\overline{(zw)} = \bar{z}\bar{w}, \forall z, w \in \mathbb{C}$;
- $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$.

Esempio 3 Vogliamo scrivere la forma algebrica, cioè la forma $z = a + ib$ del numero complesso

$$z = \frac{2+5i}{1-3i}.$$

Per fare questo moltiplichiamo numeratore e denominatore per $1 + 3i$ (il complesso coniugato di $1 - 3i$) e otteniamo:

$$z = \frac{2 + 5i}{1 - 3i} = \frac{(2 + 5i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{1}{10}(-13 + 11i).$$

Quindi $a = \mathrm{Re}(z) = -\frac{13}{10}$ e $b = \mathrm{Im}(z) = \frac{11}{10}$.

Esempio 4 Scriviamo in forma algebrica il numero complesso

$$i(5 + 6i)^2 - \frac{4}{1 - i}.$$

Si ha:

$$i(25+60i+36i^2) - \frac{4(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = -60-11i-2(1+i) = -62-13i$$

1.2 Rappresentazione geometrica e trigonometrica dei numeri complessi

Ricordiamo che i numeri reali si possono rappresentare come i punti di una retta una volta scelto un sistema di riferimento su di essa. Analogamente i numeri complessi si possono rappresentare con i punti di un piano, che prende il nome di *piano di Gauss*.

Fissato un sistema di coordinate ortogonali, associamo al numero complesso $z = a+ib$ il punto P del piano di coordinate (a, b).

In questo modo ai numeri reali vengono associati i punti dell'asse x, che viene detto *asse reale*, mentre gli immaginari puri sono rappresentati dai punti dell'asse y, detto *asse immaginario*.

L'unità immaginaria viene quindi rappresentata come la coppia $(0, 1)$.

Il punto che rappresenta il complesso coniugato $\bar{z}$ è il simmetrico rispetto all'asse x del punto che rappresenta z.

La distanza dall'origine O (che rappresenta lo zero 0 in $\mathbb{C}$) del punto P che rappresenta z si chiama <u>modulo</u> di z e si indica con $\rho = |z|$.

Per il Teorema di Pitagora

$$\rho = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Supponiamo $z \neq 0$ (e quindi $P \neq O$). Denotiamo con

$$\theta = \operatorname{Arg}(z)$$

la misura in radianti di una qualsiasi rotazione che sovrappone l'asse delle x al segmento orientato OP, presa con il segno positivo se avviene in senso antiorario, negativo nel caso opposto, si chiama *argomento* di z.

Osserviamo che l'argomento di z è definito a meno di multipli di 2π. Inoltre se $z = 0$, l'argomento è indeterminato.

Per assegnare un ben determinato argomento basta assegnare un intervallo di ampiezza 2π nel quale far variare l'angolo θ. Noi fisseremo l'intervallo $[0, 2\pi)$.

Dato un numero complesso $z = a + ib$ sussistono le relazioni:

$$a = \operatorname{Re}(z) = \rho \cos \theta, \;\; b = \operatorname{Im}(z) = \rho \sin \theta. \tag{1.1}$$

Quindi

$$\boxed{z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)}, \tag{1.2}$$

che prende il nome di rappresentazione trigonometrica del numero complesso z.

Per trovare la forma trigonometrica (1.2) di un numero complesso $z = a + ib$ si usano le (1.1). Prima di tutto si calcola il modulo di z dato da

$$\boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Inoltre

$$\boxed{\cos\theta = \tfrac{a}{\rho} \quad \sin\theta = \tfrac{b}{\rho}}.$$

e quindi possiamo trovare univocamente θ restringendosi all'intervallo $[0, 2\pi)$.

Esempio 5 Scriviamo la forma trigonometrica del numero complesso $z = 1 - i$. Si ha

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

mentre

$$\cos\theta = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ oppure } \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$\sin\theta = \frac{-1}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ oppure } \theta = \frac{7\pi}{4}$$

Segue che $\theta = \frac{7\pi}{4}$ e la forma trigonometrica di z è data da

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}).$$

Due numeri complessi

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

sono uguali se e solo se

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Dati

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

usando le relazioni trigonometriche

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

e

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1$$

si ottiene

$$\boxed{z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]}. \tag{1.3}$$

Proprietà *il prodotto di due numeri complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti*

In particolare per ogni intero non negativo n e per ogni numero complesso $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ si ottiene la cosidetta *formula di De Moivre*:

$$\boxed{z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]} \tag{1.4}$$

Inoltre è immediato verificare che:

$$|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\rho}, \quad \operatorname{Arg}(\frac{1}{z}) = -\operatorname{Arg}(z) = -\theta.$$

Equivalentemente

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta).$$

Dati

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

con $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \tag{1.5}$$

Proprietà *il quoziente di due numeri complessi ha come modulo il quoziente dei moduli e come argomento la differenza degli argomenti.*

Esempio 6 Calcoliamo $z = (2-2i)^5$. Si ha:

$$z = (2-2i)^5 = 2^5(1-i)^5 = 32(1-i)^5.$$

Per l'esempio (5)

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$$

Usando formula di formula di De Moivre (1.4) otteniamo:

$$(1-i)^5 = (\sqrt{2})^5(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})^5 = 4\sqrt{2}(\cos\frac{35\pi}{4}+i\sin\frac{35\pi}{4}).$$

Siccome $\frac{35\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 8\pi)$, otteniamo

$$(1-i)^5 = 4\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}) = 4\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4(-1+i).$$

Quindi $z = 128(-1+i)$.

Esempio 7 Cerchiamo i numeri complessi z che soddisfano l'equazione:

$$z^3 - |z|^2 = 0. \tag{1.6}$$

Primo metodo Scriviamo z in forma algebrica $z = x+iy$. L'equazione (1.6) diventa

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = x^2 + y^2,$$

la quale è equivalente al sistema (non lineare!)

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 \quad = \quad x^2 + y^2 \\ 3x^2y - y^3 \ = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

nelle incognite reali x e y.

Dalla seconda equazione ricaviamo $y(3x^2 - y^2) = 0$ le cui soluzioni sono $y = 0$ e $y^2 = 3x^2$.

Sostituendo $y = 0$ nella prima equazione otteniamo

$$x^3 = x^2$$

le cui soluzioni sono $x = 0$ e $x = 1$. Quindi le coppie $(x = 0, y = 0)$ e $(x = 1, y = 0)$ sono soluzioni del sistema.

Sostituendo $y^2 = 3x^2$ nella prima equazione si ottiene

$$x^3 - 9x^3 = -8x^3 = x^2 + 3x^2 = 4x^2,$$

o, equivalentemente,

$$4x^2(2x + 1) = 0,$$

le cui soluzioni sono $x = 0$ e $x = -\frac{1}{2}$. La soluzione $x = 0$ sostituita in $y^2 = 3x^2$ ci da $y = 0$ mentre $x = -\frac{1}{2}$ sostituita in $y^2 = 3x^2$ ci da $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Abbiamo trovato quindi due nuove soluzioni ($x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$) e ($x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

In definitiva abbiamo trovato le quattro coppie di soluzioni

$$(0,0),(1,0),(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}),$$

e quindi le soluzioni dell'equazione (1.6) sono fornite dai quattro numeri complessi:

$$z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Secondo metodo Scriviamo z in forma trigonometrica

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Per la formula di De Moivre, l'equazione (1.6) è equivalente all'equazione

$$\rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = \rho^2,$$

la quale è a sua volta equivalente al sistema

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho^2 \\ \cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = 1 \end{cases} \tag{1.8}$$

nelle incognite $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$.

Le soluzioni della prima equazione sono $\rho = 0$ e $\rho = 1$. Mentre le soluzioni della seconda equazione sono $3\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ossia le tre soluzioni $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. In questo modo ritroviamo le soluzioni già trovate in precedenza e cioè:

$$z_1 = 0, z_2 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$
$$z_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esempio 8 Calcoliamo il quoziente $\frac{z_1}{z_2}$ dove $z_1 = i$ e $z_2 = 1 - i$ usando le loro forme trigonometriche. Il modulo e l'argomento di $z_1 = i$ sono $\rho_1 = 1$ e $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, mentre il modulo e l'argomento di z_2 sono dati da $\rho_2 = \sqrt{2}$ e $\theta_2 = \frac{7\pi}{4}$. Qunidi per la formula (1.5)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4}).$$

Osserviamo che

$$\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4} = 2\pi - \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

da cui

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}(-1+i)$$

1.3 Radici di un numero complesso

Vogliamo estendere il concetto di radice n-esima valido per i numeri reali positivi a tutti i numeri complessi.

Definizione 9 *Dati un numero naturale* $n \geq 1$ *e un numero complesso* w*, diremo che il numero complesso* z *è una radice* n*-esima di* w*, e scriveremo* $z = \sqrt[n]{w}$ *se* $z^n = w$*.*

Teorema 10 *Sia* $w \in \mathbb{C}$*,* $w \neq 0$*, e* n *un intero* ≥ 1*. Esistono esattamente* n *radici* n*-esime complesse* $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ *di* w*. Posto* $w = r(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$ *e* $z_k = \rho_k(cos\,\theta_k + i\,sin\,\theta_k)$ *abbiamo*

$$\rho_k = \sqrt[n]{r}$$
$$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Equivalentemente

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}(cos(\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}) + i\,sin(\tfrac{\varphi+2k\pi}{n})), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1} \tag{1.9}$$

Dimostrazione: I numeri z_k sono evidentemente radici n-esime di w, come risulta applicando la formula di De Moivre (1.4). Mostriamo che non ce ne sono altre. Infatti affinchè un numero complesso $R(\cos\psi + i\sin\psi)$ sia radice n-esima di w, dovrebbe risultare:

$$R^n = r \text{ e } n\psi = \varphi + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}$$

e cioè

$$R = \sqrt[n]{r} \text{ e } \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2h\pi}{n}.$$

Attribuendo a n i valori $0, 1, \ldots, n-1$ troviamo appunto i numeri z_k. Dando a h un qualsiasi altro valore $\tilde{h}$ diverso dai precedenti, questo può scriversi nella forma $\tilde{h} = k + mn, m \in \mathbb{Z}$ ($m \in \mathbb{Z}$ è il quoziente e k il resto della divisione di $\tilde{h}$ per n) per cui sarebbe

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2m\pi = \theta_k + 2m\pi$$

e ritroveremmo ancora gli stessi z_k precedenti. $\square$

Indichiamo con ϵ_k le radici n-esime del numero 1. Osserviamo che il modulo del numero 1 è uguale a 1 mentre l'argomento è $\theta = 0$.

Dalla formula (1.9) si ottiene allora:

$$\boxed{\epsilon_k = \cos\tfrac{2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1} \qquad (1.10)$$

Esempio 11 Calcoliamo le radici quarte di 1. In queto caso nella formula (1.10) $k = 0, 1, 2, 3$. Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 \\
\epsilon_1 &= \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i \\
\epsilon_2 &= \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \\
\epsilon_3 &= \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.
\end{aligned}$$

Proposizione 12 *Le radici n-esime di un qualunque numero complesso z si possono ottenere moltiplicando una di esse per le n radici n-esime del numero* 1.

Dimostrazione: se z_1 è una radice n-esima di z ed ϵ_k una qualsiasi radice n-esima di 1 si ha:

$$(z_1\epsilon_k)^n = z_1^n(\epsilon_k)^n = z_1^n = z$$

e quindi $z_1\epsilon_k$ è una radice n-esima di z; inoltre, al variare di $\epsilon_k, k = 0, 1, \ldots, n-1$, i numeri $z_1\epsilon_k$ sono tutti distinti. □

Esempio 13 Calcoliamo le radici terze di -27. Sicuramente ci sono tre radici complesse. Una di queste è -3. Per la Proposizione 12 le radici terze di -27 si possono ottenere moltiplicando -3 per le radici terze di 1.

Dalla formula (1.10) queste ultime sono date da:

$$\epsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$
$$\epsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\epsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quindi le radici terze di -27 sono date $z_0 = -3, z_1 = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Il Teorema 10 ci dice che un polinomio del tipo $z^n = z_0$ ammette n radici complesse. Vale un risultato più generale noto come il *teorema fondamentale dell'algebra* del quale riportiamo l'enunciato.

Abbiamo bisogno di una definizione

Definizione 14 *Se $P(z)$ è un polinomio in z di grado n e z_0 una sua radice, si dice che z_0 è di molteplicità k (k intero ≥ 1) se vale la formula*

$$P(z) = (z - z_0)^k Q(z),$$

dove Q è un polinomio tale che $Q(z_0) \neq 0$.

Esempio 15 *L'unità immaginaria i è radice di molteplicità due del polinomio $P(z) = z^3 - iz^2 + z - i = z^2(z - i) + (z - i) = (z - i)(z^2 + 1) = (z - i)^2(z + i)$*

Teorema 16 *(teorema fondamentale dell'algebra) Un'equazione polinomiale*

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0, \;\; a_n \neq 0$$

con coefficienti complessi qualsiasi ammette precisamente n radici in $\mathbb{C}$, se ognuna di esse viene contata con la sua molteplicità.

Chapter 2

Geometria analitica nel piano

2.1 Richiami di geometria euclidea piana

In questa sezione verranno richiamati alcuni concetti della Geometria euclidea piana riguardanti l'appartenenza di punti, rette e alcune proprietà metriche.

Non ci sono dimostrazioni, ne è rispettata la distinzione fra assiomi o postulati e teoremi. Il lettore può consultare un buon testo di Geometria per le scuole secondarie superiori.

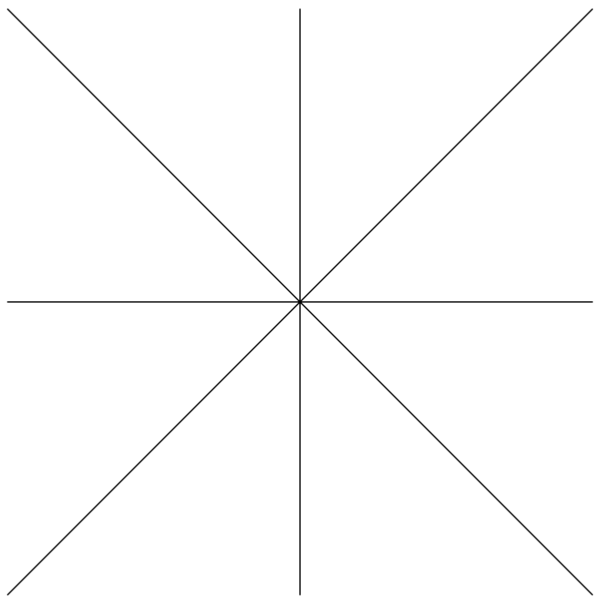
A. Proprietà di appartenenza

- Due punti distinti individuano una e una sola retta.

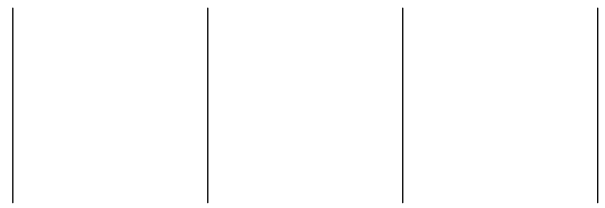
- Due rette distinte individuano un punto (e in tal caso si dicono incidenti) oppure sono parallele.

- Dati un punto P e una retta r tale che $P \notin r$, esiste una e una sola retta s per P parallela a r (quinto postulato di Euclide).

- Un fascio (proprio) di rette è l'insieme di tutte le rette del piano che passano per un punto fisso C, detto centro;



- Un fascio (improprio) di rette è l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data.



B. Proprietà metriche

- Dati un punto A e una retta r, esiste una e una sola retta s per A perpendicolare a r.
- Due rette incidenti formano un angolo φ e anche il suo complementare ψ.
- La proiezione ortogonale di un punto P su una retta r che non lo contiene è l'intersezione Q di r con la retta per P perpendicolare a r. La distanza di un punto P da una retta r è la distanza del punto P dalla sua proiezione ortogonale Q su r.

C. Misure

- La misura (o lunghezza) del segmento AB rispetto al segmento unità di misura u è il numero reale m tale che

$AB = mu$.

- Dati una retta r, un suo punto O e un numero reale m positivo, esistono esattamente due punti P e Q su r tali che OP e OQ abbiano lunghezza m.

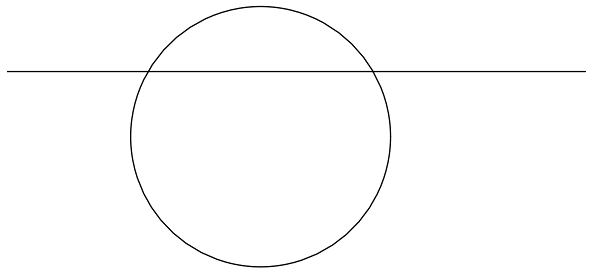
- Gli angoli si misurano in gradi o, più comunemente in radianti; misura un radiante l'angolo che sottende, in una circonferenza qualsiasi, un arco lungo quanto il raggio.

D. Circonferenze

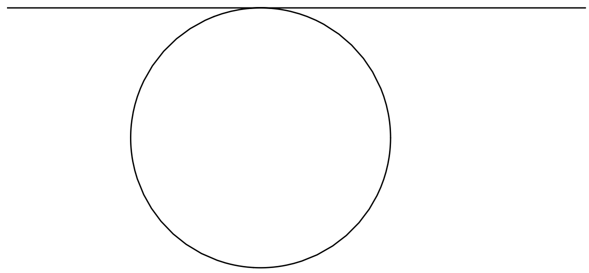
- Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza Γ circoscritta al triangolo avente i tre punti come vertici.

- Una circonferenza Γ e una retta s si tagliano:

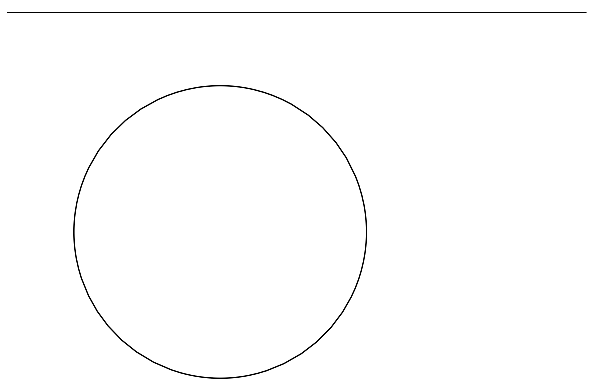
  in due punti distinti se la distanza del centro di Γ da s è minore del raggio;



in un solo punto se la distanza del centro di Γ da s è uguale al raggio;

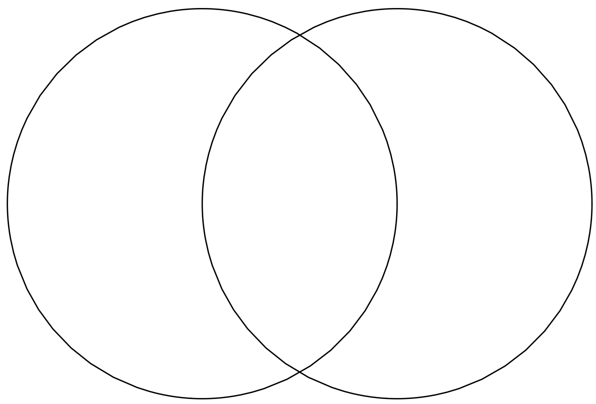


in nessun punto se la distanza del centro di Γ da s è maggiore del raggio.

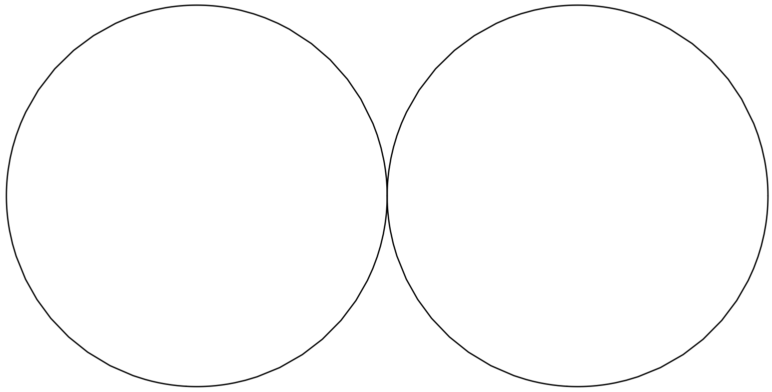


- Due circonferenze Γ e Σ si tagliano in:

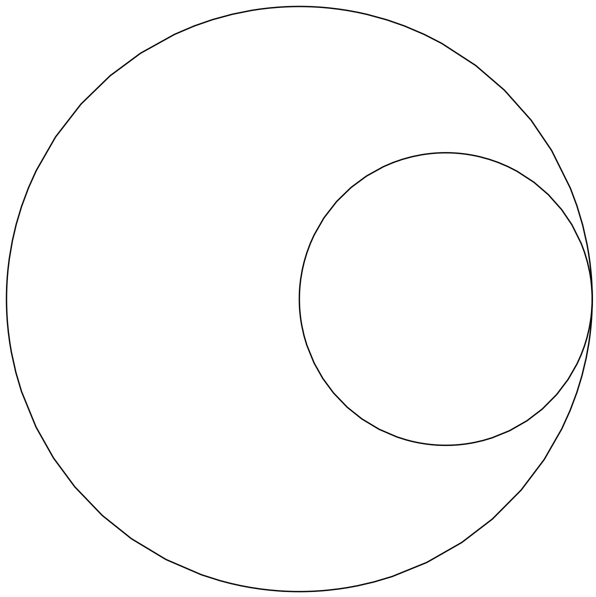
  due punti distinti se la distanza dei centri è minore della somma dei raggi e maggiore della differenza (circonferenze secanti);



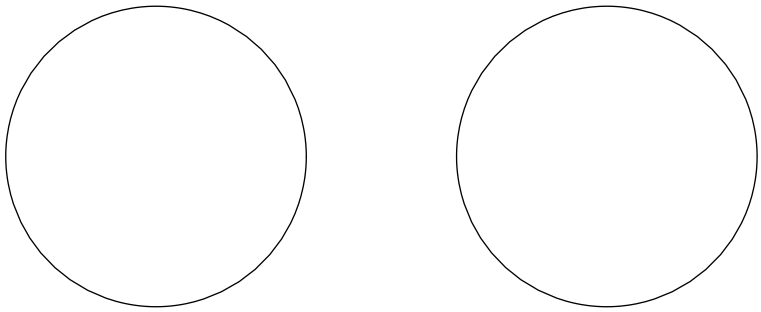
in un punto se la distanza dei centri è uguale alla somma;



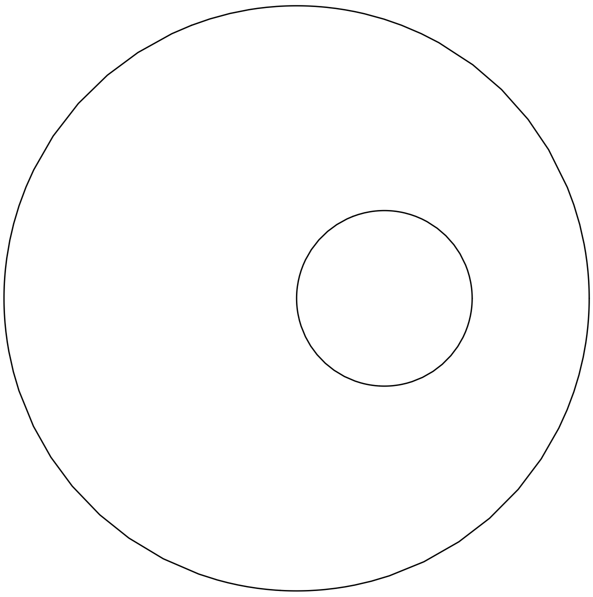
in un punto se la distanza dei centri è uguale alla differenza dei raggi;



in nessun punto se la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi;



in nessun punto se la distanza dei centri è minore della differenza dei raggi.



2.2 Riferimento ortonormale del piano e applicazioni

Indichiamo l'insieme dei vettori del piano con V_2. Fissata una base nel piano possiamo identificare V_2 con $\mathbb{R}^2$ ponendo

$$u = (u_1, u_2).$$

Una base $\{i, j\}$ del piano si dice <u>ortonormale</u> se è costituita da versori ortogonali.

Una base ortonormale $\{i, j\}$ si dice <u>positiva</u> (rispettivamente <u>negativa</u>) se la rotazione che il vettore i deve compiere per sovrapporsi al vettore j avviene in senso antiorario (rispettivamente orario.)

Fissiamo una base ortonormale positiva $\{i, j\}$ e ricordiamo le operazioni di prodotto scalare, lunghezza di un vettore e angolo tra due vettori nelle componenti rispetto alla base $\{i, j\}$.

Se

$$u = u_1 i + u_2 j$$

e

$$v = v_1 i + v_2 j$$

si ha:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 \tag{2.1}$$

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \tag{2.2}$$

$$\cos \hat{uv} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \quad 0 \leq \hat{uv} \leq \pi \tag{2.3}$$

Un <u>riferimento ortonormale</u> del piano è costituito da un punto O, origine del sistema di riferimento, e da una base ortonormale $\mathcal{B}\{i, j\}$ dei vettori del piano.

Il riferimento si dice *positivo* o *negativo* a seconda che la base B sia positiva oppure negativa.

Le rette orientate individuate dai rappresentanti di $\{i, j\}$

applicati in O si dicono rispettivamente *asse delle ascisse* o asse x e *asse delle ordinate* o asse y.

Da ora in poi supporremo fissato un riferimento cartesiano che indicheremo con il simbolo $\mathcal{R}(O, i, j)$.

Le *coordinate cartesiane* di un punto P del piano sono le componenti del vettore $P - O$ rispetto alla base $\{i, j\}$ cioè

$$P(x, y) \Leftrightarrow P - O = xi + yj.$$

Le componenti del vettore u di rappresentante $\vec{P_1 P_2} = P_2 - P_1$ rispetto alla base $\{i, j\}$ sono la differenza tra le coordinate omonime di P_2 e di P_1.

Infatti, se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, risulta

$u = (P_2 - O) + (O - P_1) = (P_2 - O) - (P_1 - O) = x_2 i + y_2 j - x_1 i - y_1 j$

ossia

$$P_2 - P_1 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j. \qquad (2.4)$$

Il punto medio $M = (x_M, y_M)$ del segmento di estremi $P_1(x_1, y_1)$

e $P_2(x_2, y_2)$ è l'unico punto tale che

$$M - P_1 = P_2 - M$$

e dalla (2.4) segue:

$$(x_M - x_1)i + (y_M - y_1)j = (x_2 - x_M)i + (y_2 - y_M)j$$

e quindi

$$\boxed{x_M = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \;\; y_M = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).}$$

Denoteremo con $\overline{P_1P_2}$ la <u>distanza</u> dei punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$.

Questa è data dalla lunghezza del vettore $P_2 - P_1$ e segue dalla formula (2.2):

$$\boxed{\overline{P_1P_2} = \|P_2 - P_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.}$$

Una <u>circonferenza</u> è il luogo dei punti P del piano che hanno distanza costante r, raggio, da un punto fisso C, centro della circonferenza, ossia

$$\|P - C\| = r, \;\; \overline{PC}^2 = r^2.$$

Se $C = (\alpha, \beta)$, il punto $P(x, y)$ appartiene alla circonferenza se e solo se:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2. \tag{2.5}$$

La (2.5) è l'*equazione cartesiana* della circonferenza σ di centro $C(\alpha, \beta)$ e raggio r.

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \tag{2.6}$$

dove:

$$\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}. \tag{2.7}$$

Osservazione 17 Se si moltiplica la (2.5) per un fattore $\lambda \neq 0$, si ottiene un'altra equazione che rappresenta la stessa circonferenza.

Osservazione 18 Per trovare le coordinate del centro ed il raggio della circonferenza attraverso le (2.6) e (2.7). Bisogna prima di tutto assicurarsi che $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma > 0$ (per essere sicuri che si tratti di una circonferenza reale) e che i coefficienti di x^2 e y^2 siano uguali a 1.

Esempio 19 Vogliamo trovare il centro e il raggio della circonferenza γ di equazione cartesiana: $x^2+y^2-4x-6y-3=0$. L'equazione cartesiana di γ si può scrivere come:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=16,$$

dalla quale si deduce che γ è la circonferenza di centro $C(2,3)$ e raggio $r=4$.

Esempio 20 Vogliamo stabilire le posizioni delle circonferenze $\sigma_1 : x^2+y^2+6x-8y+16=0$ e $\sigma_2 : x^2+y^2+2x=0$.

Si ottiene facilmente che la circonferenza σ_1 ha raggio $r_1=3$ e centro $C_1(-3,4)$ mentre la seconda circonferenza ha raggio $r_2=1$ e centro $C_1(-1,0)$.

La distanza tra i centri è $\sqrt{20}$ che è maggiore della somma dei raggi che vale 4. Di conseguenza le circonferenze C_1 e C_2 sono esterne (confronta D. sopra).

Supponiamo di avere fissato un riferimento positivo i, j. Sia P un punto sulla circonferenza e φ l'angolo che il vettore $\vec{PC}$ forma con l'asse delle x.

Si ha:

$$P - C = r(\cos\varphi i + \sin\varphi j).$$

la quale, scritta in componenti diventa:

$$x - \alpha = r\cos\varphi, \quad y - \beta = r\sin\varphi$$

ossia

$$\boxed{\begin{cases} x = \alpha + r\cos\varphi \\ y = \beta + r\sin\varphi \end{cases}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi} \tag{2.8}$$

che sono le *equazioni parametriche* della circonferenza di centro (α, β) e raggio r al variare del parametro φ tra 0 e 2π.

2.3 Le rette nel piano

Una retta si può rappresentare geometricamente assegnando

- un suo punto P_0 ed un vettore $n \neq 0$ perpendicolare alla retta;
- un suo punto P_0 ed un vettore $u \neq 0$ parallelo alla retta. In questo caso rientra anche quello in cui la retta sia individuata da due suoi punti P_0, P_1, ponendo $u = P_1 - P_0$.

Le rappresentazioni della retta si ottengono traducendo mediante l'uso delle coordinate le situazioni geometriche sopra indicate.

Vogliamo trovare la retta r passante per un punto P_0 perpendicolare ad un vettore n.

$$\boxed{P(x,y) \in r \Leftrightarrow (P - P_0) \cdot n = 0}. \qquad (2.9)$$

Se $P_0(x_0, y_0)$, $n = ai+bj \neq 0$, $P-P_0 = (x-x_0)i+(y-y_0)j$

$$\boxed{(P-P_0)\cdot n = 0 \Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)=0}. \tag{2.10}$$

Di conseguenza la retta è rappresentata da un'equazione lineare

$$\boxed{ax+by+c=0} \tag{2.11}$$

che si dice equazione cartesiana della retta r.

Osserviamo che i coefficienti della x e della y sono le componenti di un vettore perpendicolare ad r.

Se si moltiplica l'equazione per un fattore di proporzionalità non nullo arbitrario, si ottiene una nuova equazione che rappresenta la stessa retta. Questo si esprime dicendo che i coefficienti e termine noto dell'equazione di una retta sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità.

Vogliamo trovare la retta r passante per un punto P_0 parallela ad un vettore u.

$$\boxed{P(x,y)\in r \Leftrightarrow (P-P_0) = tu, t\in\mathbb{R}}. \tag{2.12}$$

Se $P_0(x_0, y_0)$, $u = li + mj \neq 0$, $P - P_0 = (x - x_0)i + (y - y_0)j$

$$\boxed{P - P_0 = tu \Leftrightarrow x = x_0 + lt, \;\; y = y_0 + mt} \qquad (2.13)$$

le quali esprimono le coordinate del punto variabile su r mediante polinomi di primo grado nel parametro t e si dicono *equazioni parametriche* della retta r passante per P_0 e parallela al vettore u.

I numeri (l, m), componenti di un vettore parallelo alla retta r si chiamano *parametri direttori* della retta e sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità . Quando si dice che la retta r ha direzione (l, m) si intenderà che r è parallela al vettore (l, m).

Si osservi che se si considera t soggetto alle limitazioni $\alpha \leq t \leq \beta$ le (2.13) rappresentano i punti di un segmento di estremi AB dove $A = (x_0 + l\alpha, y_0 + m\alpha)$ e $B = (x_0 + l\beta, y_0 + m\beta)$.

Un altro modo per esprimere il parallelismo tra i vettori $P - P_0$ ed u è la proporzionalità tra le relative componenti:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \tag{2.14}$$

con la convenzione che se uno dei due numeri al denominatore si annulla , dev'essere posto a zero il corrispondente numeratore.

Si perviene alla (2.14) eliminando il parametro t dalla (2.13).

Dalla (2.14) si ottiene

$$m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0 \tag{2.15}$$

che è un'equazione del tipo (2.11).

Da essa si può leggere la relazione tra i coefficienti della x e della y ed i parametri direttori di r.

Infatti essendo i parametri direttori definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo si ottiene:

$$a = \rho m, \;\; b = -\rho l. \tag{2.16}$$

Regola pratica: i parametri direttori della retta r rappresentata dalla (2.11) sono dati, a meno di un fattore non nullo, dai numeri $(b, -a)$, cioè si ottengono scambiando i coefficienti delle incognite e cambiando di segno ad uno di essi.

Il passaggio dall'equazione (2.11) alle equazioni parametriche (2.13) si ottiene chiamando t una delle incognite e ricavando quindi il valore dell'altra dalla (2.11).

Se la retta r è individuata dai due punti $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ la sua rappresentazione è data dalla (2.13) o dalla (2.14) con $l = (x_1 - x_0)$ e $m = (y_1 - y_0)$.

Dalla (2.14) si ottiene

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \tag{2.17}$$

Questa è equivalente a

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.18}$$

Due rette del piano o sono *incidenti* quindi hanno un punto in comune o sono *parallele*, cioè con la stessa direzione: in questo caso o non hanno punti in comune oppure coincidono.

Se le rette r, s sono rispettivamente rappresentate dalle equazioni:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a^{'}x + b^{'}y + c^{'} = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

la loro posizione è determinata dalle eventuali soluzioni del sistema (2.19).

Si hanno i seguenti casi:

- $\frac{a}{a^{'}} \neq \frac{b}{b^{'}}$ le rette sono incidenti;
- $\frac{a}{a^{'}} = \frac{b}{b^{'}} \neq \frac{c}{c^{'}}$: le rette non hanno punti in comune;
- $\frac{a}{a^{'}} = \frac{b}{b^{'}} = \frac{c}{c^{'}}$: le rette coincidono.

Pertanto la *condizione di parallelismo* delle rette (2.19) è data:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

da cui segue che due rette parallele si possono rappresentare con equazioni che differiscono solo per il termine noto.

La stessa condizione di parallelismo, espressa mediante i parametri di direzione (l, m) e (l', m') delle rette si esprime, per la (2.16):

$$\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} \tag{2.20}$$

Si dice *fascio proprio* di rette di centro $P_0(x_0, y_0)$ la totalità delle rette del piano passanti per P_0.

Imponendo che il punto $P_0(x_0, y_0)$ appartenga alla retta $ax + by + c = 0$ otteniamo $c = -ax_0 - by_0$, e quindi il fascio di rette di centro P_0 è rappresentato al variare di a, b dall'equazione:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

che è la combinazione lineare di coefficienti a, b delle equazioni delle rette passanti per P_0 e parallele rispettivamente all'asse y ed all'asse x.

Il *fascio improprio* di rette è la totalità delle rette del piano parallele ad una stessa retta; se questa ha equazione $ax+by+$

$c = 0$, il fascio improprio da essa individuato si rappresenta con

$$ax + by + k = 0$$

al variare del termine noto k.

Date due rette distinte

$$r : ax + by + c = 0 \;\; s : a^{'}x + b^{'}y + c^{'} = 0$$

si può determinare l'equazione del fascio cui esse appartengono senza determinarne il punto comune.

Si considera la combinazione lineare di coefficienti λ, μ (non entrambi nulli) delle date equazioni:

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a^{'}x + b^{'}y + c^{'}) = 0 \tag{2.21}$$

Se le rette non sono parallele, fatto che si verifica immediatamente la (2.21) rappresenta una retta per ogni valore di λ, μ.

Una retta di equazione $a^{''}x + b^{''}y + c^{''} = 0$ appartiene al fascio (2.21) se e solo se

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^{'} & b^{'} & c^{'} \\ a^{''} & b^{''} & c^{''} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.22}$$

La (2.21) si dice equazione del fascio in *forma omogenea* in quanto coppie proporzionali (λ, μ) e $(\rho\lambda, \rho\mu)$ qualunque sia $\rho \neq 0$, individuano la stessa retta.

Se si divide la (2.21) per λ e si pone $k = \frac{\mu}{\lambda}$ il fascio viene rappresentato con l'equazione *non omogenea*

$$ax + by + c + k(a^{'}x + b^{'}y + c^{'}) = 0 \tag{2.23}$$

dove la retta varia al variare di k.

Osserviamo tuttavia che tramite la (2.23) non resta rappresentata la retta $s : a^{'}x+b^{'}y+c^{'} = 0$ a cui convenzionalmente si associa $k = \infty$.

Esempio 21 Vogliamo scrivere le equazioni cartesiane delle rette $r^{'}$ e $s^{'}$ passanti per il punto $A = (1, 2)$ e parallele alle rette r e s date da: $r : x+y-1 = 0$ e $s : x = 1-t, y = 2+3t$. La totalità delle rette parallele ad r è rappresentata da $x+y+k = 0$ imponendo il passaggio per A si ottiene $1 + 2 + k = 0$ ossia $k = -3$.

Quindi $r^{'} : x + y - 3 = 0$.

La retta $s^{'}$ in forma parametrica è rappresentata da: $s : x = 1 - u, y = 2 + 3u$ (parametro u).

Eliminando u tra queste equazioni si ottiene l'equazione cartesiana di $s^{'} : 3x + y - 5 = 0$.

Esempio 22 Siano P_1 e P_2 le intersezioni dell'asse delle x e l'asse delle y con la retta generica s del fascio improprio di direzione individuata dal vettore $3i + j$.

Vogliamo determinare il luogo geometrico descritto dal punto medio M del segmento P_1P_2.

Per fare questo consideriamo il fascio improprio $s : x - 3y + k = 0$ che interseca l'asse x (equazione cartesiana $y = 0$) nel punto $P_1(-k, 0)$ e l'asse y (equazione cartesiana $x = 0$) nel punto $P_2(0, \frac{k}{3})$.

Il punto medio M ha pertanto coordinate $x = -\frac{k}{2}$ e $y = \frac{k}{6}$, che rappresentano al variare del parametro k il luogo descritto da M.

Eliminando il parametro k si ottiene l'equazione del luogo cercato: $x + 3y = 0$ che è l'equazione di una retta.

2.4 Angoli e distanze

Due rette non parallele r, s dividono il piano in quattro angoli a due a due uguali perchè opposti al vertice; quindi r e s individuano due angoli distinti, fra loro supplementari, che si diranno angoli di r e s.

Siano $r = (l, m)$ e $s = (l', m')$ due vettori non nulli paralleli alle rette r e s e sia $\hat{rs}$ la misura di uno dei due angoli di r ed s.

Si hanno due possibilità:

$$\hat{rs} = \hat{rs}$$

oppure

$$\hat{rs} = \pi - \hat{rs}.$$

Quindi

$$\cos \hat{rs} = \pm \cos \hat{rs}.$$

Se si usa il fatto che l'angolo tra due vettori u e v soddisfa:

$$\cos \hat{uv} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \quad 0 \leq \hat{uv} \leq \pi$$

si ottiene:

$$\cos \hat{rs} = \pm \frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2 + m^2}\sqrt{l'^2 + m'^2}} \tag{2.24}$$

Se le rette sono date dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

ricordando che $a = \rho m$ e $b = -\rho l$ $(\rho \neq 0)$ dalla (2.24) si ottiene:

$$\cos \hat{rs} = \pm \frac{aa^{'} + bb^{'}}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}} \tag{2.25}$$

Dalle equazioni (2.24) e (2.25) si ottengono le condizioni di perpendicolarità tra le rette cioè:

$$ll^{'} + mm^{'} = 0 \tag{2.26}$$

$$aa^{'} + bb^{'} = 0 \tag{2.27}$$

Ricaviamo quindi la seguente regola: considerata una retta di equazione $ax+by+c=0$, ogni sua perpendicolare si può rappresentare con l'equazione $bx-ay+c=0$, al variare di c.

Vogliamo fornire un metodo per trovare <u>il simmetrico</u> $S(x_S, y_S)$ di un punto $P(x_0, y_0)$ rispetto ad una retta $r : ax+by+c = 0$.

Sia $n : x = x_0 + at, y = y_0 + bt$ la sua normale condotta dal punto $P(x_0, y_0)$.

Sia t_s il valore del parametro che spetta la punto S. e sia t_H il valore del parametro t che spetta al punto H intersezione di n e r.

Allora S ha coordinate $x_S = x_0 + at_S, y_S = y_0 + bt_S$ mentre H ha coordinate $x_H = x_0 + at_H, y_s = y_0 + bt_H$.

Imponendo che la distanza del punto S da H sia uguale alla distanza di P_0 da H si ottiene facilemente: $t_S = 2t_H$.

Si ottiene la seguente regola pratica:

Detto t_H il valore del parametro t che spetta al punto H intersezione di r con n, il punto S simmetrico di P_0 rispetto a r si ottiene ponendo $t = 2t_H$ nelle equazioni parametriche di n.

Esempio 23 Vogliamo determinare le coordinate del punto S simmetrico del punto $P_0(3, -1)$ rispetto alla retta $r : x - y + 2 = 0$.

Un'equazione parametrica della normale n a r passante per

P_0 è data da $n : x = 3 - t, y = -1 + t$.

Per trovare t_H dobbiamo risolvere l'equazione $3 - t_H - (-1 + t_H) + 2 = 0$ che ha soluzione $t_H = 3$.

Quindi il punto S ha coordinate $x = 3 - 2t_H = 3 - 6 = -3$ e $y = -1 + 2t_H = -1 + 6 = 5$.

Esempio 24 Vogliamo trovare le equazioni delle rette passanti per $P(2, 1)$ e che formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con la retta $r : x - y + 1 = 0$.

Ci aspettiamo di trovare due rette.

Consideriamo il fascio di rette passanti per il punto P e cioè: $a(x - 2) + b(y - 1) = 0$.

Usando la formula (2.25) otteniamo

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \pm\frac{a - b}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Elevando al quadrato ambo i membri si ottiene

$$\frac{1}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2(a^2 + b^2)}.$$

Che è equivalente all'equazione omogenea:

$$a^2 + b^2 - 4ab = 0.$$

Dando un valore arbitrario ad a per esempio $a = 1$ si ottiene l'equazione

$$b^2 - 4b + 1 = 0$$

le cui soluzioni sono $2 + \sqrt{3}$ e $2 - \sqrt{3}$.

Le rette cercate hanno quindi equazioni

$$x + (2 + \sqrt{3})y - 4 = 0$$

e

$$x + (2 - \sqrt{3})y - 4 = 0.$$

Vogliamo ora trovare la retta <u>tangente ad una circonferenza</u> in un suo punto.

Sia σ la circonferenza di centro $C(\alpha, \beta)$ rappresentata dall'equazione

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \tag{2.28}$$

e sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto di σ.

La retta tangente t in P_0 a σ è la retta passante per P_0 e prependicolare al vettore $P - C = (x_0 - \alpha)i + (y_0 - \beta)j$.

La retta tangente a σ in P_0 ha allora equazione:

$$(x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) = 0. \tag{2.29}$$

Sviluppando i calcoli e sfruttando il fatto che $-x_0^2 - y_0^2 = -2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + \gamma$ (in quanto $P_0 \in \sigma$) si ottiene:

$$x_0 x + y y_0 - \alpha(x_0 + x) - \beta(y_0 + y) + \gamma = 0 \tag{2.30}$$

La (2.30) si dice ottenuta dall'equazione (2.28) mediante la *regola degli sdoppiamenti.* Infatti scritta la (2.28) nella forma "sdoppiata"

$$xx + yy - \alpha(x + x) - \beta(y + y) + \gamma = 0$$

si sostituisce in questa in ogni termine una x o una y con la corrispondente coordinata di P_0.

La distanza di un punto P_0 da una retta r si ottiene come segue. Detta H l'intersezione di r con la retta n ad essa perpendicolare passante per P_0 si ha

$$d(P_0, r) = \overline{P_0H}.$$

Supposto $P_0(x_0, y_0)$ ed r di equazione $ax + by + c = 0$, la retta n ha equazione parametriche:

$$x = x_0 + at, \ \ y = y_0 + bt.$$

Un punto di n appartiene a r se $a(x_0+at+b(y_0+bt)+c = 0$ e questo fornisce il valore del parametro t del punto H:

$$t_H = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

La distanza dei punti $P_0(x_0, y_0)$, $H(x_0 + at_H, y_0 + bt_H)$ è data da

$$\overline{P_0H} = \sqrt{a^2t_H^2 + b^2t_H^2} = |t_H|\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

cioè
$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Forniamo adesso un metodo per trovare le <u>bisettrici</u> di due rette $r : ax+by+c = 0$ e $s : a^{'}x+b^{'}y+c^{'} = 0$ non parallele.

I punti $P(x, y)$ delle bisettrici soddisfano alla condizione:
$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a^{'}x + b^{'}y + c^{'}|}{\sqrt{a^{'2} + b^{'2}}}.$$

Ossia

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm\frac{a^{'}x + b^{'}y + c^{'}}{\sqrt{a^{'2} + b^{'2}}},$$

dalla quale si ottengono le bisettrici prendendo una volta il $+$, l'altra volta il segno $-$.

<u>L'area del triangolo</u> di vertici $P_0(x_0, y_0)$,$P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ è:
$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}\right|. \tag{2.31}$$

La formula (2.31) si ottiene considerando i due fatti che seguono:

l' equazione della retta passante per P_1 e P_2 ha equazione

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$$

la distanza di P_0 da tale retta e data da:

$$d(P_0, P_1P_2) = \frac{|(y_2 - y_1)(x_0 - x_1) - (x_2 - x_1)(y_0 - y_1)|}{\overline{P_1P_2}}.$$

2.5 Cambiamenti di riferimento cartesiani

Siano $\mathcal{R}(O, i, j)$ e $\mathcal{R}^{'}(O^{'}, i^{'}, j^{'})$ due riferimenti ortonormali relativi alla stessa unità di misura e supponiamo $\mathcal{R}$ positivo. Indichiamo con (x, y), $(x^{'}, y^{'})$ le coordinate di uno stesso punto del piano relativo ai due sistemi di riferimento.

Supposta nota la posizione del riferimento $\mathcal{R}^{'}$ rispetto a $\mathcal{R}$, si tratta di determinare la relazione fra le coordinate (x, y), $(x^{'}, y^{'})$.

$\mathcal{R}^{'}$ è individuato quando si assegnano rispetto a $\mathcal{R}$ le coordinate (x_0, y_0) di $O^{'}$ e le componenti dei versori $i^{'}, j^{'}$ rispetto alla base i, j.

Si ottiene facilmente:

$$i^{'} = \cos\varphi i + \sin\varphi j, \quad j^{'} = \epsilon(-\sin\varphi i + \cos\varphi j), \tag{2.32}$$

dove φ è l'angolo tra i e $i^{'}$ ed $\epsilon = +1$ oppure -1 a seconda che il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ sia positivo oppure negativo.

Il vettore $P - O^{'}$ nel riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è dato da

$$P - O^{'} = x^{'}i^{'} + y^{'}j^{'}.$$

Lo stesso vettore, nel riferimento $\mathcal{R}$ è dato da

$$P - O^{'} = (x - x_0)i + (y - y_0)j.$$

Tenendo conto della (2.32) si ottiene:

$$(x-x_0)i+(y-y_0)j = x^{'}(\cos\varphi i+\sin\varphi j)+y^{'}(-\sin\varphi i+\cos\varphi j),$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è positivo.

Mentre si ottiene:

$(x-x_0)i+(y-y_0)j = x^{'}(\cos\varphi i+\sin\varphi j)+y^{'}(\sin\varphi i-\cos\varphi j),$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è negativo.

Equivalentemente

$$\boxed{\begin{cases} x = x^{'}\cos\varphi - y^{'}\sin\varphi + x_0 \\ y = x^{'}\sin\varphi + y^{'}\cos\varphi + y_0 \end{cases}} \tag{2.33}$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è positivo,

Mentre

$$\boxed{\begin{cases} x = x^{'}\cos\varphi + y^{'}\sin\varphi + x_0 \\ y = x^{'}\sin\varphi - y^{'}\cos\varphi + y_0 \end{cases}} \tag{2.34}$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è negativo.

Usando la regola di Cramer si possono esprimere le $(x^{'}, y^{'})$ in funzione delle (x, y):

$$\begin{cases} x^{'} = (x-x_0)\cos\varphi + (y-y_0)\sin\varphi \\ y^{'} = -(x-x_0)\sin\varphi + (y-y_0)\cos\varphi \end{cases} \tag{2.35}$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è positivo,

$$\begin{cases} x^{'} = (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi \\ y^{'} = (x - x_0)\sin\varphi - (y - y_0)\cos\varphi \end{cases} \tag{2.36}$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è negativo.

Che si possono anche scrivere

$$\boxed{\begin{cases} x^{'} = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a \\ y^{'} = -x\sin\varphi + y\cos\varphi + b \end{cases}} \tag{2.37}$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è positivo,

$$\boxed{\begin{cases} x^{'} = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a \\ y^{'} = x\sin\varphi - y\cos\varphi + b \end{cases}} \tag{2.38}$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è negativo.

dove (a, b) sono le componenti del punto $O = (0, 0)$ nel riferimento $\mathcal{R}^{'}$ come si può verificare sostituendo $x = 0$ e $y = 0$ in (2.37).

Le (2.33) e (2.34) con le loro inverse (2.37) e (2.38) rappresentano le formule di trasformazione delle coordinate allorchè si passa da un sistema di riferimento ortonormale ad un altro sistema ortonormale.

In particolare, se i due sistemi di riferimento hanno gli stessi versori $i = i^{'}$ e $j = j^{'}$ e differiscono solo per l'origine, le (2.33) si scrivono:

$$\boxed{\begin{cases} x = x^{'} + x_0 \\ y = y^{'} + y_0 \end{cases}} \tag{2.39}$$

e le loro inverse (2.37)

$$\boxed{\begin{cases} x^{'} = x - x_0 \\ y^{'} = y - y_0 \end{cases}} \tag{2.40}$$

In tal caso si dice che il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è ottenuto da $\mathcal{R}$ per traslazione.

Se invece i due sistemi di riferimento hanno la stessa origine si ottiene

$$\boxed{\begin{cases} x = x^{'} \cos\varphi - y^{'} \sin\varphi \\ y = x^{'} \sin\varphi + y^{'} \cos\varphi \end{cases}} \tag{2.41}$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è positivo,

Mentre

$$\boxed{\begin{cases} x = x^{'} \cos\varphi + y^{'} \sin\varphi \\ y = x^{'} \sin\varphi - y^{'} \cos\varphi \end{cases}} \tag{2.42}$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è negativo.

Con le rispettive inverse

$$\boxed{\begin{cases} x^{'} = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y^{'} = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}} \tag{2.43}$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è positivo,

$$\boxed{\begin{cases} x^{'} = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y^{'} = x\sin\varphi - y\cos\varphi \end{cases}} \tag{2.44}$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è negativo.

Nel caso (2.43) diremo che $\mathcal{R}'$ è ottenuto da $\mathcal{R}$ per una rotazione.

E' un facile esercizio, che viene lasciato come compito allo studente, scrivere le equazioni precedenti in forma matriciale.

Un'applicazione Sono date le rette ortogonali

$$r : ax + by + c = 0, \quad s : bx - ay + c' = 0.$$

Vogliamo trovare le formule del cambiamento di riferimento in modo tale che le due rette nel nuovo riferimento coincidano rispettivamente con gli assi x', y'.

Siccome gli assi di un sistema di riferimento sono rette orientate, vi saranno quattro possibili sistemi di riferimento i cui gli assi x', y' coincidano con le rette r, s a seconda dell'orientamento di queste.

Osserviamo che la distanza di un punto $P(x, y)$ dalla retta s, che denotiamo con $d(P, s)$ nel riferimento $\mathcal{R}$ è data da:

$$d(P, s) = \frac{|bx - ay + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{2.45}$$

Mentre la distanza dello stesso punto $P(x, y)$ nel riferimento $\mathcal{R}^{'}$ in cui s sia l'asse delle $y^{'}$ è data da:

$$d(P, s) = |x^{'}|. \tag{2.46}$$

In maniera analoga, $d(P, r)$, cioè la distanza di P dalla retta r è data da:

$$d(P, r) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{2.47}$$

Mentre la distanza dello stesso punto $P(x, y)$ nel riferimento $\mathcal{R}^{'}$ in cui r sia l'asse delle $x^{'}$ è data da:

$$d(P, r) = |y^{'}|. \tag{2.48}$$

Uguagliando la (2.45) con (2.46) e la (2.47) con (2.48) si ottiene:

$$\begin{cases} x^{'} = \pm\frac{bx - ay + c^{'}}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y^{'} = \pm\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \tag{2.49}$$

le quali forniscono le possibili formule del cambiamento di riferimento coi nuovi assi r e s.

Una scelta di segno nelle (2.49) equivale a fissare un orioentamento sui nuovi assi.

Esempio 25 Vogliamo trovare le formule del cambiamento di riferimento in modo tale che le rette $r : x + y = 0$ e $s : x - y = 0$. nel nuovo riferimento coincidano con gli assi $x^{'}$ e $y^{'}$ e il punto $P(1, 2)$ abbia coordinate positive.

Le possibili formule del cambiamento di riferimento sono:

$$\begin{cases} x^{'} = \pm \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ y^{'} = \pm \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Imponendo la condizione che il punto $P(1, 2)$ abbia coordinate positive si ottiene il cambiamento di riferimento:

$$\begin{cases} x^{'} = -\frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ y^{'} = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

2.6 Movimenti rigidi del piano

In questo paragrafo vogliamo descrivere alcuni tipi di trasformazioni del piano euclideo $\mathbb{R}^2$ che vanno sotto il nome di movimenti rigidi.

Le (2.37),(2.38) o i loro casi particolari (2.43) (2.44),(2.40) si possono interpretare anche nel seguente modo.

Supponiamo fissato un solo sistema di riferimento $\mathcal{R}$, associamo ad un punto $P(x, y)$ il punto $P^{'}(x^{'}, y^{'})$ le cui coordinate $x^{'}, y^{'}$ sono individuate dalle (2.37).

In tal modo viene stabilita una corrispondenza biunivoca

$$m : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tra i punti del piano.

Inoltre si ottiene (esercizio!)

$$\overline{m(P)m(Q)} = \overline{PQ}. \qquad (2.50)$$

Un'applicazione

$$m : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tale che la (2.50) sia soddisfatta si chiama un movimento rigido di $\mathbb{R}^2$. Quindi m è un movimento rigido se e solo se preserva le distanze.

Definiamo ora il concetto di traslazione come applicazione dal piano euclideo in se.

Definizione 26 *Sia $v = (a, b)$ un vettore in $\mathbb{R}^2$. Si dice traslazione individuata dal vettore v, l'applicazione $t_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che ad ogni vettore (o punto) $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associa il vettore $(x + a, y + b)$:*

$$t_v(P) = v + P.$$

Osserviamo che:

- ogni traslazione è una bigezione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$;
- se $v \neq 0$, t_v non è un'applicazione lineare;
- $t_v \circ t_w = t_{v+w} = t_w \circ t_v, \forall v, w \in \mathbb{R}^2$

Definizione 27 *Un'applicazione lineare* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *si chiama una* trasformazione ortogonale *se conserva la lunghezza dei vettori cioè:*

$$\|f(v)\| = \|v\|, \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

Osserviamo che:

- ogni trasformazione ortogonale è una bigezione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$. Infatti $f(v) = 0 \Rightarrow v = 0$;
- ogni trasformazione ortogonale è un movimento rigido. Infatti, applicando f ai punti P di $\mathbb{R}^2$ pensati come vettori, si ha:

  $$\overline{f(P)f(Q)} = \|f(P) - f(Q)\| = \|f(P - Q)\| = \|P - Q\| = \overline{PQ};$$
- ogni trasformazione ortogonale, conserva i prodotti scalari (e in particolare gli angoli tra vettori), cioè:

  $$f(v_1) \cdot f(v_2) = v_1 \cdot v_2, \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2. \tag{2.51}$$

  La (2.51) si dimostra osservando che:

  $$2v_1 \cdot v_2 = \|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1\|^2 - \|v_2\|^2$$

  $$2f(v_1) \cdot f(v_2) = \|f(v_1 + v_2)\|^2 - \|f(v_1)\|^2 - \|f(v_2)\|^2.$$

- Un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che preserva i prodotti scalari è una trasformazione ortogonale. Infatti ponendo nella (2.51) $v = v_1 = v_2$ si ottiene $\|f(v)\| = \|v\|$.

Dalla discussione precedente risulta chiaro che la composizione di due movimenti rigidi è ancora un movimento rigido.

In particolare se $t_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sono una traslazione e una trasformazione ortogonale, allora la loro composizione

$$t_v \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

è ancora un movimento rigido.

Osserviamo anche che

$$t_v \circ f = f \circ t_w, \ \ w = f^{-1}(v).$$

Sia infatti $u \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$(t_v \circ f)(u) = v + f(u).$$

Mentre

$$(f \circ t_w)(u) = f(w+u) = f(f^{-1}(v)+u) = v + f(u).$$

Il seguente teorema mostra che ogni movimento rigido si ottiene in questo modo, più precisamente vale il seguente:

Teorema 28 *Sia* $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *un movimento rigido. Allora esiste* $v \in \mathbb{R}^2$ *e una trasformazione ortogonale* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tale che:*

$$m = t_v \circ f.$$

Come conseguenza del teorema precedente per classificare i movimenti rigidi di $\mathbb{R}^2$ dobbiamo capire quali sono le trasformazioni ortogonali $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Il seguente teorema ci viene in aiuto.

Teorema 29 *Ogni trasformazione ortogonale* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *si può rappresentare rispetto ad un'opportuna base* *ortogonale con una matrice dei seguenti tre tipi:*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} cos\,\varphi & -\,sin\,\varphi \\ sin\,\varphi & cos\,\varphi \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dove si suppone $cos\,\varphi \neq 1$.

Osserviamo che le matrici del teorema sono l'identità, la rotazione antioraria R di angolo φ intorno all'origine e la simmetria S rispetto all'asse delle ascisse.

Se $v = (a, b)$ rappresenta il vettore di traslazione, mettendo insieme i teoremi 28 e 29 si distinguono tre tipi di movimenti rigidi:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \tag{2.52}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b \end{cases} \tag{2.53}$$

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = -y + b \end{cases} \tag{2.54}$$

Il movimento (2.52) è una traslazione ed è un movimento privo di punti uniti cioè di punti tali che $m(P) = P$, a meno che $a = b = 0$, caso in cui il movimento si riduce all'identità.

Il movimento (2.53) ha solo un punto unito $P_0(x_0, y_0)$ come si verifica facilmente (in quanto $\cos\varphi \neq 1$).

Ne segue che $a = x_0(1 - \cos\varphi) + y_0 \sin\varphi, b = -x_0 \sin\varphi + y_0(1 - \cos\varphi)$ e (2.53) diventa:

$$\begin{cases} x' = x_0 + (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi \\ y' = y_0 + (x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi \end{cases}$$

Equivalentemente

$$m(P) = P_0 + r(P - P_0)$$

dove

$$r = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Quindi il movimento dato da (2.53) è la rotazione (in senso antiorario) di un angolo φ intorno al punto P_0.

Per quanto riguarda il movimento (2.54) osserviamo che l'immagine del punto $(x, \frac{b}{2})$ è il punto $(x+a, \frac{b}{2})$ cioè i punti della retta $y = \frac{b}{2}$ sono trasformati in punti della retta stessa.

Se $a = 0$, tutti i punti della retta sono uniti ed il movimento (2.54) è una simmetria rispetto alla retta $y = \frac{b}{2}$.

Se $a \neq 0$, non ci sono punti uniti e il movimento (2.54) è la composizione delle seguenti applicazioni:

$$s : (x, y) \to (x, -y + b)$$

e

$$t : (x, y) \to (x + a, y),$$

cioè una simmetria s rispetto alla retta $y = \frac{b}{2}$ composta con una traslazione t parallela alla retta stessa.

Abbiamo quindi il seguente risultato

Teorema 30 *I movimenti rigidi di $\mathbb{R}^2$ sono:*

1. *o una trslazione;*
2. *o una rotazione intorno ad un punto;*
3. *o una simmetria rispetto ad una retta, o la composizione di una tale simmetria per una traslazione*

parallela alla retta stessa.

2.7 I numeri complessi come trasformazioni del piano

Consideriamo la rotazione di un angolo di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario.

Questa può essere rappresentata dalla matrice

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa porta il vettore $v = (x, y)$ sul vettore $(-y, x)$.

Identifichiamo i vettori del piano $v = (x, y)$ con i punti di $\mathbb{R}^2$ che a loro volta possono essere identificati con i numeri complessi $z = x + iy$.

E' immediato verificare che l'effetto di R è dato dalla moltiplicazione per l'unità immaginaria i.

In particolare se $\{i, j\}$ è una base ortonormale positiva allora:

$$ii = j, \;\; ij = -i.$$

Più in generale se $v = v_1 + iv_2$ allora

$$iv = -v_2 i + v_1 j.$$

Se estendiamo le considerazioni precedenti, allora ogni numero complesso $z = a + ib$ si può considerare come una trasformazione del piano, definendo l'operazione, chiamata *moltiplicazione del numero complesso z per il vettore v*:

$$zv = av + biv. \tag{2.55}$$

Vale la pena di osservare che in generale una trasformazione del piano data da (2.55) non è un movimento rigido a meno che la lunghezza di z non si uguale a 1. In questo caso si tratta di una rotazione intorno all'origine, come si verifica immediatamente.

E' lasciato come esercizio al lettore di verificare il seguente fatto: *Se identifichiamo il vettore v con il numero com-*

plesso v_1+iv_2 *allora la moltiplicazione (2.55) del numero complesso* z *per il vettore* v *equivale alla moltiplicazione di* z *per il numero complesso* v.

Chapter 3

Le coniche

3.1 Le coniche in forma canonica

Definiamo una conica $\mathcal{C}$ come *il luogo dei punti del piano per i quali è costante il rapporto delle distanze da un punto e da una retta assegnati.*

Indichiamo con F il punto, detto *fuoco*, d la retta, detta *direttrice*, $e > 0$ il valore costante del rapporto detto *eccentricità* della conica.

Se fissiamo un sistema di riferimento ortonormale del piano e poniamo $F(x_0, y_0)$, $d : ax + by + c = 0$, il punto $P(x, y)$

appartiene a $\mathcal{C}$ se e solo se:

$$\frac{\overline{PF}}{d(P,d)} = e.$$

La quale scritta in coordinate è equivalente a:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = e^2 \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}. \tag{3.1}$$

Vogliamo scrivere l'equazione (3.1) rispetto ad un sistema di riferimento opportuno.

Distinguiamo il caso in cui F appartiene alla direttrice d dal caso in cui non gli appartiene.

Se $F \in d$, scegliamo il sistema di riferimento in modo che $F(0,0)$ e la retta $d : x = 0$ (asse y).

Dalla (3.1) otteniamo

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = 0. \tag{3.2}$$

In questo caso la conica si dice degenere e si presentano tre possibilità:

1. se $e < 1$ l'unico punto con coordinate reali che soddisfa la (3.2) è F;
2. se $e = 1$, $\mathcal{C}$ è costituita dall'asse x contato due volte;
3. se $e > 1$, $\mathcal{C}$ si spezza nelle due rette $y = x\sqrt{e^2 - 1}$ e $y = -x\sqrt{e^2 - 1}$.

Consideriamo il caso in cui F non appartiene a d.

Scegliamo il fuoco sull'asse delle x cioè della forma $F(c, 0)$ e la retta d con equazione parallela all'asse delle y cioè con equazione $x = h, h \neq c$.

Quindi la (3.1) si scrive come:

$$(x - c)^2 + y^2 = e^2(x - h)^2$$

cioè:

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2(c - e^2h)x + c^2 - e^2h^2 = 0 \qquad (3.3)$$

Distinguiamo i casi seguenti

Supponiamo $e \neq 1$.

L'asse delle x interseca la conica $\mathcal{C}$ in due punti A e $A^{'}$, le cui prime coordinate sono le soluzioni dell'equazione:

$$(1-e^2)x^2 - 2(c-e^2h)x + c^2 - e^2h^2 = 0 \tag{3.4}$$

Il fatto che l'equazione precedente ammetta due soluzioni reali si verifica immediatamente in quanto il suo discriminante è $4e^2(h-c)^2 > 0$, essendo $h \neq c$.

Se si sceglie l'origine del riferimento nel punto medio tra A e $A^{'}$ otteniamo

$$c - e^2h = 0 \tag{3.5}$$

Se indichiamo con $A(a,0)$ e $A^{'}(-a,0)$ si ottiene:

$$e^2h^2 - c^2 = a^2(1-e^2). \tag{3.6}$$

Dall'equazione (3.5) segue che $c^2 = e^4 h^2$

che sostituita nella (3.6) ci da:

$$e^2 h^2 = a^2. \tag{3.7}$$

Dalle equazioni (3.5) e (3.7) si ottiene:

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2}. \tag{3.8}$$

Possiamo quindi scrivere la (3.3) come:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{3.9}$$

Se $e < 1$ cioè $c^2 < a^2$, ponendo nella (3.9) $a^2 - c^2 = b^2$, si ottiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se $e > 1$ cioè $a^2 < c^2$ ponendo nella (3.9) $c^2 - a^2 = b^2$, si ottiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se $e = 1$ allora l'equazione (3.3) diventa:

$$y^2 - 2(c-h)x + c^2 - h^2 = 0 \tag{3.10}$$

Osserviamo che l'asse x incontra $\mathcal{C}$ in un solo punto V.

Scegliendo V come origine del nostro sistema di riferimento otteniamo nella (3.10) $c^2 = h^2$ cioè $c = -h$ ($h \neq c$).

Ponendo $2c = p$ otteniamo dalla (3.10)

$$y^2 = 2px.$$

Riassumendo, se il fuoco F non appartiene alla direttrice d si hanno tre tipi di coniche a seconda che l'eccentricità e sia maggiore, uguale o minore di 1:

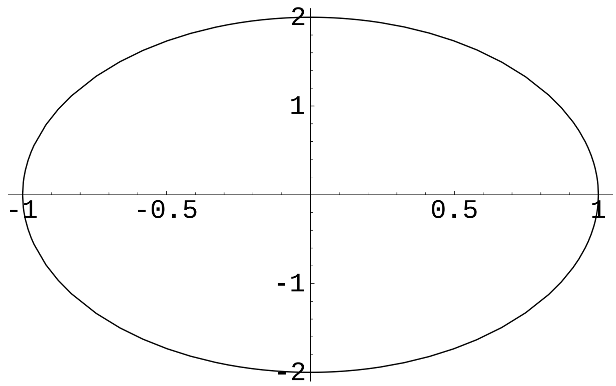
1. se $e < 1$ la conica si dice *ellisse* e la sua equazione canonica è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Scrivendo

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

si ottiene il seguente grafico:



Si parla di ellisse di semiassi a e b. Chiaramente se $a = b$ si tratta di una circonferenza di centro l'origine e raggio a.

Le rette $x = 0$ e $y = 0$ si chiamano assi dell'ellisse.

I punti di coordinate $(a, 0)$,$(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ si chiamano i vertici dell'ellisse.

2. se $e > 1$ la conica si dice *iperbole* e la sua equazione

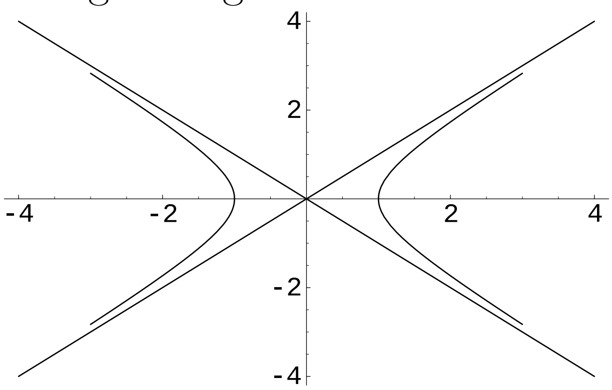
canonica è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Scrivendo

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

si ottiene il seguente grafico:



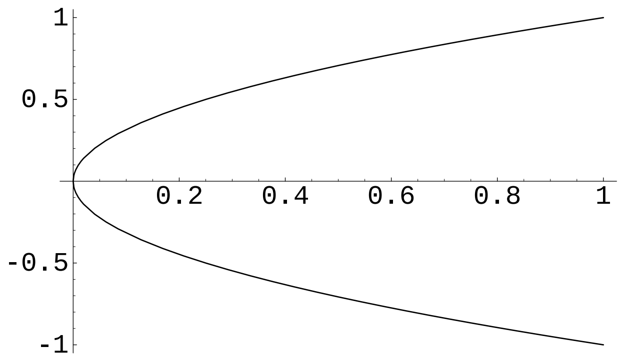
Le rette $x = 0$ e $y = 0$ si chiamano gli assi dell'iperbole e i punti di coordinate $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ si chiamano i vertici dell'iperbole.

3. se $e = 1$ la conica si dice *parabola* e la sua equazione

canonica è:

$$y^2 = 2px,$$

Il cui grafico è (se $p > 0!$):



Il punto di coordinate $(0, 0)$ si chiama il vertice della parabola.

La retta $y = 0$ e l'asse di simmetria e l'asse $x = 0$ è la tangente alla parabola nel vertice.

3.2 Le coniche come curva algebriche del secondo ordine

Nel paragrafo precedente abbiamo scelto un particolare sistema di riferimento per ottenere le equazioni canoniche delle coniche (non degeneri).

In generale l' equazione di una conica non è così semplice, come mostrano i seguenti esempi:

Esempio 31 Consideriamo l'equazione di un'ellisse di semiassi $a = 1$ e $b = 2$ ma traslata di due unità lungo l'asse delle x e di tre unità lungo l'asse delle y. Cioè:

$$(x-2)^2 + \frac{(y-3)^2}{4} = 1 \tag{3.11}$$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$4x^2 + y^2 - 16x - 6y + 21 = 0.$$

Che non è in forma canonica ma dalla quale, completando i quadrati si ottiene facilmente la (**??**).

Risulta anche chiaro che con il cambiamento di riferimento

$$x^{'} = x - 2, \;\; y^{'} = y - 3$$

si ottiene la forma canonica

$$x^{'2} + \frac{y^{'2}}{4} = 1.$$

Altri esempi del genere si possono costruire traslando parabole o iperboli.

In generale la situazione non è così felice come mostrano idue esempi che seguono.

Esempio 32 Scriviamo l'equazione della canica avente eccentricità $\frac{1}{2}$, un fuoco nel punto $F(-2, 0)$ e direttrice r : $x + y + 1 = 0$.

Osserviamo che si tratta di un'ellisse in quanto l'eccentricità è più piccola di 1.

Imponiamo che la distanza di un punto $P(x, y)$ da F diviso la distanza di P da r sia $\frac{1}{2}$.

Si ottiene immediatamente:

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \frac{1}{2}\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}.$$

Elevando al quadrato si ottiene:

$$7x^2 - 2xy + 7y^2 + 34x + 2y + 31 = 0 \qquad (3.12)$$

Esempio 33 Mostriamo che l'equazione

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2\sqrt{2}(x-y) = 0 \qquad (3.13)$$

rappresenta una parabola $\mathcal{P}$.

Consideriamo infatti il nuovo sistema di riferimento positivo $\mathcal{R}(O = O', i'j')$ ottenuto con una rotazione di $\frac{\pi}{4}$ in senso antiorario.

Le equazioni che rappresentano il cambiamento di riferimento sono le seguenti:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{cases}$$

Le loro inverse sono date da:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$$

Queste, sosituite nell'equazione (**??**), forniscono l'equazione:

$$x'^2 + 2y' = 0.$$

che rappresentano chiaramente una parabola.

Le equazioni (**??**) e (**??**) presentano delle caratteristiche diverse dalle equazioni in forma canonica. Si osservi per esempio la presenza del termine in xy.

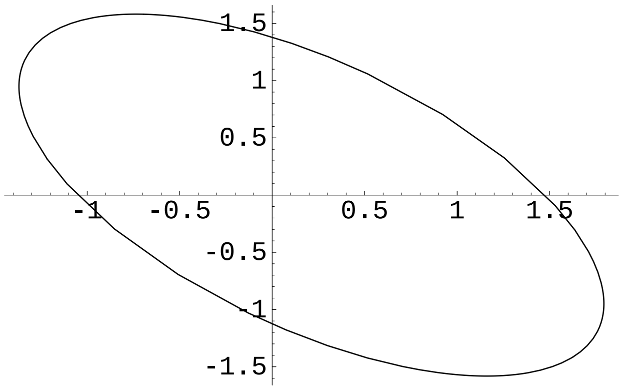
In generale non è difficile vedere che l'equazione di una conica ha la seguente forma:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (3.14)$$

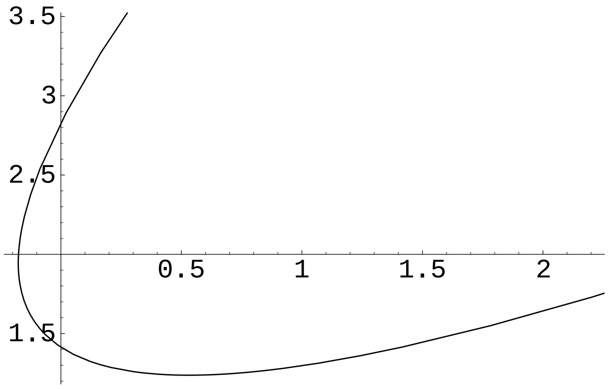
dove gli a_{ij} sono numeri reali.

Quindi una conica può essere vista come *la totalità dei punti del piano* (x, y) *che soddisfano un'equazione di secondo grado a coefficienti costanti.*

Chiaramente otteniamo dei grafici diversi da quelli visti in precedenza. Come ad esempio:



oppure



3.3 Le idee per semplificare un'equazione di secondo grado mediante cambiamenti di riferimento e ottenere la forma canonica

Data un'equazione di secondo grado come la (**??**) vogliamo capire di che tipo di conica si tratta e trovare il sistema di riferimento rispetto al quale l'equazione della conica è in forma canonica.

La nostra tecnica generale di studio sarà la seguente:

- se l'equazione di secondo grado non contiene il termine in

xy, basterà applicare eventualmente un completamento dei quadrati, da interpretarsi poi come traslazione;

- se l'equazione di secondo grado contiene il termine in xy, si cercherà di farlo sparire con un cambiamento di coordinate.

I nostri cambiamenti di coordinate avranno dunque come obiettivo la trasformazione dell'equazione di una conica in un'equazione "più semplice " della stessa conica.

Definiamo rigorosamente cosa intendiamo per equazione "più semplice".

Un'equazione polinomiale di secondo grado rappresenta una conica in *forma canonica* se ha la forma seguente:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma \tag{3.15}$$

oppure

$$\beta y^2 = 2\gamma x \quad \alpha x^2 = 2\gamma y. \tag{3.16}$$

Chiaramente nelle forme cononiche manca sempre il termine in xy.

Dalla discussione del paragrafo precedente, quando tutti i coefficienti in forma canonica sono diversi da 0 si tratta di una ellisse, iperbole (nel caso (**??**)) o di una parabola (nel caso (**??**)).

Attenzione: se in (**??**) α e β hanno lo stesso segno, mentre γ ha segno opposto, si ottiene un'equazione priva di soluzioni reali. Questo luogo si chiama *ellisse immaginaria*.

Esempio 34

- L'equazione $x^2 + 8y^2 = -1$ rappresenta una ellisse immaginaria.
- Quando uno solo dei coefficienti in (**??**) si annulla, si tratta di una conica degenere (punto, rette reali e distinte, rette coincidenti).

3.4 L'algebra lineare nello studio delle coniche

Sia $\mathcal{C}$ una conica di equazione

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Associamo a questa equazione due matrici simmetriche:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

che si chiamano *matrice associata* a f e *matrice dei termini di secondo grado* rispettivamente.

Usando queste matrici otteniamo:

$$f(x, y) = (x, y, 1)B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Le matrici di una conica in forma canonica

Se $\mathcal{C} : \alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$ le matrici di $\mathcal{C}$ sono:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

Se $\mathcal{C} : \beta y^2 = 2\gamma x$ le matrici di $\mathcal{C}$ sono:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

Se $\mathcal{C} : \alpha x^2 = 2\gamma y$ le matrici di $\mathcal{C}$ sono:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

Osservazione 35 Se $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ è una conica, allora $\mathcal{C}$ ha infinite equazioni $kf(x, y) = 0$ con $k \neq 0$. Pertanto ad ogni conica sono associate infinite matrici B ed infinite matrici A, che differiscono fra loro per un fattore di proporzionalità.

3.5 Come cambiano le matrici dell'equazione di una conica cambiando le coordinate

Consideriamo nel piano due sistemi di riferimento (positivi) $\mathcal{R}(O, i, j)$ e $\mathcal{R}^{'}(O^{'}, i^{'}, j^{'})$

Le equazioni del cambiamento di coordinate in forma matriciale si scrivono:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

Qui $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale con determinante uguale a 1.

Considerando la matrice:

$$Q = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & a \\ p_{12} & p_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la (**??**) è equivalente a

$$(x, y, 1)^T = Q(x^{'}, y^{'}, 1)^T \tag{3.28}$$

o equivalentemente

$$(x, y, 1) = (x^{'}, y^{'}, 1)Q^T. \tag{3.29}$$

Sia ora $f(x, y) = 0$ l'equazione di una conica (nelle coordinate xy) e siano B e A le corrispondenti matrici.

Siano $B^{'}$ e $A^{'}$ le matrici della stessa equazione trasformata col cambiamento di coordinate (**??**).

Allora si ha

$$(x, y, 1)B(x, y, 1)^T = 0$$

e

$$(x^{'}, y^{'}, 1)B^{'}(x^{'}, y^{'}, 1)^T = 0.$$

Usando la (**??**) si ottiene:

$$(x, y, 1)B(x, y, 1)^T = (x^{'}, y^{'}, 1)Q^T BQ(x^{'}, y^{'}, 1)^T$$

da cui risulta $B^{'} = Q^T BQ$.

In modo analogo si vede che $A^{'} = P^{-1}AP = P^T AP$.

Usando le nozioni viste nel corso di algebra lineare, abbiamo ottenuto il seguente:

Teorema 36 *Con le notazioni usate finora:*

- $B^{'} = Q^T BQ$;
- $A^{'} = P^{-1}AP = P^T AP$;
- $det\, B = det\, B^{'}$;
- $rank(B) = rank(B^{'})$;
- A *e* $A^{'}$ *sono simili (in particolare hanno lo stesso determinante, lo stesso polinomio caratteristico e gli stessi autovalori).*

3.6 Come si riduce una conica in forma canonica

Tutto quello che abbiamo visto nel paragrafo precedente ci permette di trasformare l'equazione di secondo grado $f(x, y) = 0$ che rappresenta una conica $\mathcal{C}$ in un'equazione più semplice cioè in forma canonica.

Come far scomparire il termine in xy in un'equazione di secondo grado

Sia

$\mathcal{C} : f(x,y) = a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33} = 0$

una conica.

Supponiamo che $a_{12} \neq 0$.

Per quello visto in precedenza i termini di secondo grado possono essere scritti come segue:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = (x,y)A(x,y)^T.$$

Noi cerchiamo una trasformazione di coordinate

$(x,y)^T = P(x^{'},y^{'})$ tale che i termini di secondo grado diventino:

$$a_{11}^{'}x^{'2} + 2a_{12}^{'}x^{'}y^{'} + a_{22}^{'}y^{'2} = (x^{'},y^{'})A^{'}(x^{'},y^{'})^T,$$

dove $A^{'}$ e la nuova matrice dei termini di secondo grado.

Siccome si ha:

$$A^{'} = P^{-1}AP$$

è sufficiente che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.

Poichè A è una matrice simmetrica reale esiste una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale e abbia sulla diagonale i suoi due autovalori reali

$$\lambda_1 = a_{11}^{'} \ \ \lambda_2 = a_{22}^{'}.$$

Inoltre la matrice P può essere scelta in modo tale che le sue colonne siano componenti di versori fra loro ortogonali e il determinante valga 1 (se necessario si cambia il segno di una colonna oppure si scambiano le colonne).

Chiamiamo $i^{'}$ il versore avente come componenti gli elementi della prima colonna di P rispetto alla base (i, j).

Chiamiamo $j^{'}$ il versore avente come componenti gli elementi della seconda colonna di P rispetto alla base (i, j).

Di conseguenza $(i^{'}, j^{'})$ definisce una base ortonormale positiva.

Consideriamo allora il nuovo sistema di coordinate $\mathcal{R}^{'}(O, i^{'}, j^{'})$.

Rispetto a questo nuovo sistema di riferimento l'equazione della conica diventa:

$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 +$ termini di primo grado $+$ termine noto $= 0$.

In conclusione scompare il termine nel prodotto xy operando poi una traslazione abbiamo dimostrato il seguente:

Teorema 37 *(riduzione a forma canonica) Sia* $\mathcal{C} : f(x,y) = 0$ *una conica nel piano riferita al sistema di riferimento* $\mathcal{R}(0,i,j)$. *Allora esiste un riferimento* $\mathcal{R}'(0',i',j')$ *con coordinate* (x',y') *rispetto al quale l'equazione di* $\mathcal{C}$ *assume una delle forme canoniche (**??**) oppure (**??**) cioè*

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 = \gamma$$

oppure

$$\beta y'^2 = 2\gamma x'$$

oppure

$$\alpha x'^2 = 2\gamma y'.$$

Gli assi x' e y' sono paralleli ai due autovettori dell'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associata alla matrice A. Se A ha due autovalori distinti gli assi x' e y' sono paralleli ai due autospazi di φ.

Se $\mathcal{C}$ è una iperbole o una ellisse gli assi x' e y' coincidono con gli assi di simmetria di $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C}$ è una parabola gli assi x' e y' coincidono, nell'ordine, con l'asse di $\mathcal{C}$ e la tangente al vertice di $\mathcal{C}$ o viceversa.

Otteniamo il seguente:

Corollario 38 *Sia $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ una conica e A e B le matrici associate a f.*

Allora:

(a) se $\alpha x'^2 + \beta y'^2 = \gamma$ è una forma canonica per f si ha:

α *e* β *sono gli autovalori di A, $det\, A = \alpha\beta$, $det\, B = -\alpha\beta\gamma = -(det\, A)\gamma$.*

Conseguentemente se $det A \neq 0$ *allora la forma canonica è:*

$$\boxed{\alpha x'^2 + \beta y'^2 = -\frac{det_B}{det_A}.} \qquad (3.30)$$

(b) Se $\beta y'^2 = 2\gamma x'$ *è una forma canonica per* f *si ha:*

gli autovalori di A *sono* 0 *e* β*;* $det A = 0$, $det B = -\beta\gamma^2$.

Conseguentemente se $\beta \neq 0$ *allora la forma canonica è:*

$$\boxed{\beta y'^2 = \pm 2\sqrt{\frac{-det_B}{\beta}}x'.} \qquad (3.31)$$

(c) Se $\alpha x'^2 = 2\gamma y'$ *è una forma canonica per* f *si ha:*

gli autovalori di A *sono* α *e* 0*;* $det A = 0$, $det B = -\alpha\gamma^2$.

Conseguentemente se $\alpha \neq 0$ *allora la forma canonica è:*

$$\boxed{\alpha x'^2 = \pm 2\sqrt{\frac{-\,det B}{\alpha}}y'.} \qquad (3.32)$$

Per quanto riguarda le coniche degeneri usando le forme canoniche si dimostra il seguente:

Corollario 39 *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- *La conica $f(x,y)=0$ è degenere cioè*
$$f(x,y)=(ax+by+c)(a^{'}x+b^{'}y+c^{'});$$
- $det B = 0.$

Esempio 40 Verifichiamo che la conica di equazione:

$$x^2+2y^2+3xy+y-1=0$$

è degenere.

La matrice B associata alla conica è:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \qquad (3.33)$$

Il cui determinante è zero. Per il Corollario **??** la conica in questione è degenere.

In effetti si ricava facilmente:

$$x^2 + 2y^2 + 3xy + y - 1 = (x + y + 1)(x + 2y - 1) = 0.$$

Per le coniche non degeneri abbiamo il seguente:

Corollario 41 *Sia $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ una conica non degenere. Se B e A sono le matrici associate a f. Si ha $det\, B \neq 0$ (per il corollario precedente) e inoltre:*

- *$det\, A > 0$ se e solo se $\mathcal{C}$ è un'ellisse;*
- *$det\, A = 0$ se e solo se $\mathcal{C}$ è una parabola;*
- *$det\, A < 0$ se e solo se $\mathcal{C}$ è un'iperbole.*

3.7 Esempi di riduzione in forma canonica

Esempio 42 Consideriamo la conica di equazione:

$\mathcal{C} : x^2+y^2+2xy+2(1-\sqrt{2})x+2(1+\sqrt{2})y+1-2\sqrt{2}=0.$

La matrice B associata alla conica è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & 1-2\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

Il cui determinante è -8 come si può verificare facilmente.

La matrice dei termini al quadrato è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Il cui determinante è uguale a zero. Quindi dal Corollario **??** la conica in questione è una parabola.

Vogliamo scrivere la forma canonica di $\mathcal{C}$.

Gli autovalori della matrice A sono le soluzioni del polinomio caratteristico, ciè del polinomio

$$(\lambda - 1)^2 - 1 = 0.$$

Otteniamo i due valori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$.

Si osservi che il essendo il determinante di A uguale a 0 era naturale aspettarsi di trovare un autovalore nullo.

Dalla formula (**??**) la forma canonica cercata è la seguente:

$$2y'^2 = \pm 4x'. \tag{3.36}$$

Il segno $+$ oppure $-$ se la si vuole con la concavità verso sinistra o verso destra.

Se avessimo utilizzato la formula (**??**) la forma canonica cercata sarebbe la seguente:

$$2x'^2 = \pm 4y'. \tag{3.37}$$

Il segno $+$ oppure $-$ se la si vuole con la concavità verso l'alto o verso il basso.

Vogliamo adesso trovare le formule del cambiamento di riferimento che portano la nostra parabola nella forma canonica (**??**) o nella forma canonica (**??**).

Corrispondentemente ai due autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$ si trovano gli autovettori $v_1 = i^{'} = i - j$ e $v_2 = j^{'} = i + j$.

La matrice P del cambiamento di riferimento ha come colonne le componenti dei due autovettori normalizzati, cioè:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Le formule del cambiamento di riferimento ottenuto tramite la matrice P sono:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{'} + y^{'}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x^{'} + y^{'}) \end{cases}$$

O le inverse:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{cases}$$

Osserviamo che il nuovo sistema di riferimento $\mathcal{R}'(O = O', i', j')$ è ottenuto con una rotazione oraria di $\frac{\pi}{4}$ del sistema di riferimento $\mathcal{R}(O, i, j)$.

Sappiamo che questo cambiamento di riferimento fa sparire il termine in xy.

In effetti un calcolo immediato mostra che l'equazione della conica nelle coordinate $x'y'$ diventa:

$$2y'^2 - 4x' + 2\sqrt{2}y' + 1 - 2\sqrt{2} = 0.$$

Completando i quadrati:

$$2(y' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 4(x' + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0.$$

Deduciamo quindi che il cambiamento di riferimento (roto-traslazione):

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \tag{3.38}$$

porta la nostra parabola nella forma canonica

$$y'^2 = 2x'.$$

Osservazione 43 La forma canonica

$$y'^2 = -2x'$$

la si sarebbe ottenuta prendendo la come matrice:

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

Cioè invertendo l'orientazione dell'asse di simmetria e della tangente al vertice.

Per ottenere le forma canonica

$$x'^2 = \pm 2y'$$

bisogna considerare gli autovalori nell'ordine opposto e scambiare conseguentemente anche gli autovettori e per avere un matrice ortogonale speciale cambiare di segno uno dei due. Cioè la matrice P del cambiamento di riferimento sarebbe stata:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

Oppure

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

Si lascia come esercizio quello di trovare le equazioni del cambiamento di riferimento (rototraslazione) nei casi in cui la matrice P data da (**??**), (**??**) e da (**??**).

Dalle formule del cambiamento di riferimento (**??**) possiamo ottenere l'equazione cartesiana dell'asse di simmetria e della tengente al vertice della parabola.

Infatti nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'(O', x', y')$ l'asse di simmetria ha equazione $y' = 0$ e la tangente al vertice ha equazione $x' = 0$.

Quindi nel sistema di riferimento $\mathcal{R}(O, x, y)$ l'equazione dell'asse di simmetria è: $r : x + y + 1 = 0$.

Mentre l'equazione della tangente al vertice è: $s : x - y + 1 = 0$.

Il vertice V della parabola, che è l'intersezione tra r e s ha coordinate $(-1, 0)$.

Esempio 44 Consideriamo la conica di equazione:

$$\mathcal{C} : 5x^2 + 7y^2 + 2\sqrt{3}xy + 2\sqrt{3}x + 14y + 5 = 0.$$

La matrice B associata alla conica è:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 7 & 7 \\ \sqrt{3} & 7 & 5 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

Il cui determinante è -64 come si può verificare facilmente.

La matrice dei termini al quadrato è:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

Il cui determinante è uguale a 32. Quindi dal Corollario **??** la conica in questione è un'ellisse.

Vogliamo scrivere la forma canonica di $\mathcal{C}$.

Gli autovalori della matrice A sono le soluzioni del polinomio caratteristico, ciè del polinomio

$$\lambda^2 - 12\lambda + 32 = 0.$$

Otteniamo i due valori $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 8$.

Dalla formula (**??**) la forma canonica cercata è la seguente:

$$2x^{'2} + 4y^{'2} = 1. \tag{3.44}$$

Vogliamo adesso trovare le formule del cambiamento di riferimento che portano la nostra ellisse nella forma canonica

(**??**).

Corrispondentemente ai due autovalori $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 8$ si trovano gli autovettori $v_1 = i^{'} = -\sqrt{3}i + j$ e $v_2 = j^{'} = i + \sqrt{3}j$.

La matrice P del cambiamento di riferimento ha come colonne le componenti dei due autovettori normalizzati (abbiamo cambiato il segno a v_1 per ottenere una matrice ortogonale speciale), cioè:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Le formule del cambiamento di riferimento ottenuto tramite la matrice P sono:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x^{'} + y^{'}) \\ y = \frac{1}{2}(-x^{'} + \sqrt{3}y^{'}) \end{cases}$$

O le inverse:

$$\begin{cases} x^{'} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y) \\ y^{'} = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y) \end{cases}$$

Osserviamo che il nuovo sistema di riferimento $\mathcal{R}^{'}(O = O^{'}, i^{'}, j^{'})$ è ottenuto con una rotazione oraria di $\frac{\pi}{6}$ del sistema di riferimento $\mathcal{R}(O, i, j)$.

Sappiamo che questo cambiamento di riferimento fa sparire il termine in xy.

In effetti un calcolo immediato mostra che l'equazione della conica nelle coordinate $x^{'}y^{'}$ diventa:

$$4x^{'2} + 8y^{'2} - 4x^{'} + 8\sqrt{3}y^{'} + 5 = 0.$$

Completando i quadrati:

$$4(x^{'} + \frac{1}{2})^2 + 8(y^{'} + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 2 = 0.$$

Deduciamo quindi che il cambiamento di riferimento (roto-traslazione):

$$\begin{cases} x^{'} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y) + \frac{1}{2} \\ y^{'} = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y) + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \tag{3.45}$$

porta la nostra ellisse nella forma canonica

$$2x^{'2} + 4y^{'2} = 1.$$

Osservazione 45 La forma canonica

$$4x^{'2} + y^{'2} = 1.$$

la si sarebbe ottenuta prendendo la come matrice:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.46}$$

Cioè invertendo l'orientazione scambiando i due autovettori e cambiando di segno uno dei due.
Si lascia come esercizio quello di trovare le equazioni del cambiamento di riferimento (rototraslazione) nei casi in cui la matrice P data da (**??**).

Dalle formule del cambiamento di riferimento (**??**) possiamo ottenere l'equazione cartesiana degli assi e del centro dell'ellisse.

Infatti nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'(O', x', y')$ gli assi di simmetria hanno equazione $y' = 0$ e $x' = 0$.

Quindi nel sistema di riferimento $\mathcal{R}(O, x, y)$ l'equazione degli assi di simmetria è: $r : \sqrt{3}x - y + 1 = 0$ e $s : x + \sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$.

Il centro C dell'ellisse, che è l'intersezione tra r e s ha coordinate $(0, 1)$.

Osserviamo che i vertici dell'ellisse A, A', B, B' nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'(O', x', y')$ hanno coordinate $(0, -\frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}), (-1, 0), (1, 0)$.

Lasciamo al lettore il compito di ricavare le coordinate di A, A', B, B' nel sistema di riferimento $\mathcal{R}(O, x, y)$.

Esempio 46 Consideriamo la conica di equazione:

$\mathcal{C} : x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy + 2(1-\sqrt{3})x + 2(1+\sqrt{3})y - 2(1+\sqrt{3}) = 0.$

La matrice B associata alla conica è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{3}-1 \\ 1-\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & -2-2\sqrt{3} \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

Il cui determinante è 8 come si può verificare facilmente.

La matrice dei termini al quadrato è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

Il cui determinante è uguale a -4. Quindi dal Corollario **??** la conica in questione è un'iperbole.

Vogliamo scrivere la forma canonica di $\mathcal{C}$.

Gli autovalori della matrice A sono le soluzioni del polinomio caratteristico, ciè del polinomio

$$\lambda^2 - 4 = 0.$$

Otteniamo i due valori $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$.

Dalla formula (**??**) la forma canonica cercata è la seguente:

$$x'^2 - y'^2 + 1 = 0. \tag{3.49}$$

Vogliamo adesso trovare le formule del cambiamento di riferimento che portano la nostra ellisse nella forma canonica (**??**).

Corrispondentemente ai due autovalori $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$ si trovano gli autovettori (normalizzati) $v_1 = i' = \frac{1}{2}(i - \sqrt{3}j)$ e $v_2 = j' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}i + j)$.

La matrice P del cambiamento di riferimento ha come colonne le componenti dei due autovettori normalizzati cioè:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Le formule del cambiamento di riferimento ottenuto tramite la matrice P sono:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x^{'} + \sqrt{3}y^{'}) \\ y = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}x^{'} + y^{'}) \end{cases}$$

O le inverse:

$$\begin{cases} x^{'} = \frac{1}{2}(x - \sqrt{3}y) \\ y^{'} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) \end{cases}$$

Osserviamo che il nuovo sistema di riferimento $\mathcal{R}^{'}(O = O^{'}, i^{'}, j^{'})$ è ottenuto con una rotazione oraria di $\frac{\pi}{3}$ del sistema di riferimento $\mathcal{R}(O, i, j)$.

Sappiamo che questo cambiamento di riferimento fa sparire il termine in xy.

In effetti un calcolo immediato mostra che l'equazione della conica nelle coordinate $x^{'}y^{'}$ diventa:

$$-2x^{'2} + 2y^{'2} - 2(1+\sqrt{3})x^{'} + 2(\sqrt{3}-1)y^{'} - 2(1+\sqrt{3}) = 0.$$

Completando i quadrati:

$$-2(x^{'} + \frac{1+\sqrt{3}}{2})^2 + 2(y^{'} + \frac{\sqrt{3}-1}{2})^2 - 2 = 0.$$

Deduciamo quindi che il cambiamento di riferimento (roto-traslazione):

$$\begin{cases} x^{'} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y) + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y^{'} = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y) + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases} \tag{3.50}$$

porta la nostra iperbole nella forma canonica

$$y^{'2} - x^{'2} = 1.$$

Osservazione 47 La forma canonica

$$x^{'2} - y^{'2} = 1.$$

la si sarebbe ottenuta prendendo la come matrice:

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.51}$$

Cioè scambiando i due autovettori e cambiando il segno a uno di essi (nel nostro caso al primo).
Si lascia come esercizio quello di trovare le equazioni del cambiamento di riferimento (rototraslazione) nei casi in cui la matrice P data da (**??**).

Dalle formule del cambiamento di riferimento (**??**) possiamo ottenere l'equazione cartesiana degli assi, degli asintoti e le coordinate del centro dell'iperbole.

Infatti nel sistema di riferimento $\mathcal{R}^{'}(O^{'}, x^{'}, y^{'})$ gli assi di simmetria hanno equazione $y^{'} = 0$ e $x^{'} = 0$.

Quindi nel sistema di riferimento $\mathcal{R}(O, x, y)$ le equazioni degli assi di simmetria sono: $r : \sqrt{3}x - y + 1 + \sqrt{3} = 0$ e $s : x + \sqrt{3}y + \sqrt{3} - 1 = 0$.

Nel sistema di riferimento $\mathcal{R}^{'}(O^{'}, x^{'}, y^{'})$ gli asintoti hanno equazioni $x^{'} + y^{'} = 0$ e $x^{'} - y^{'} = 0$.

Quindi nel sistema di riferimento $\mathcal{R}(O, x, y)$ l'equazione degli asintoti sono: $r : (\sqrt{3} - 1)x - (1 + \sqrt{3})y + 2 = 0$ e $s : (1 + \sqrt{3})x + (\sqrt{3} - 1)y + 2\sqrt{3} = 0$.

Il centro C dell'iperbole, che è l'intersezione tra gli assi r e s (o degli asintoti). Il calcolo delle sue coordinate è lasciato al lettore.

Chapter 4

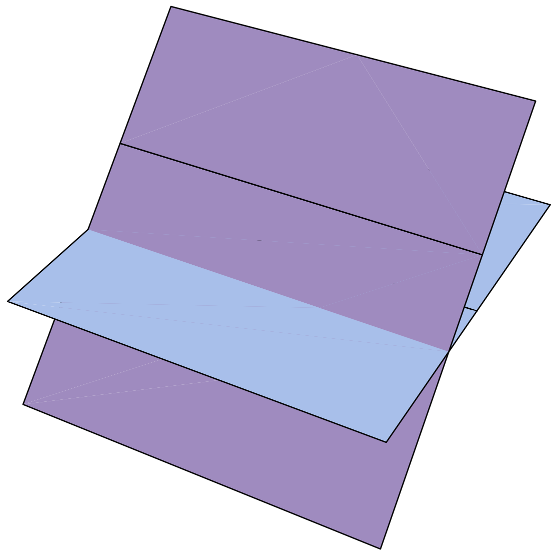
Geometria analitica nello spazio

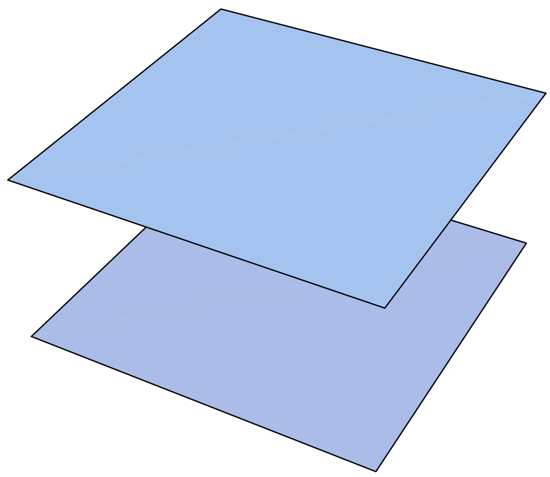
4.1 Richiami di geometria euclidea spaziale

In questa sezione richiamiamo alcuni concetti di base della geometria dello spazio.

A. Proprietà di appartenenza

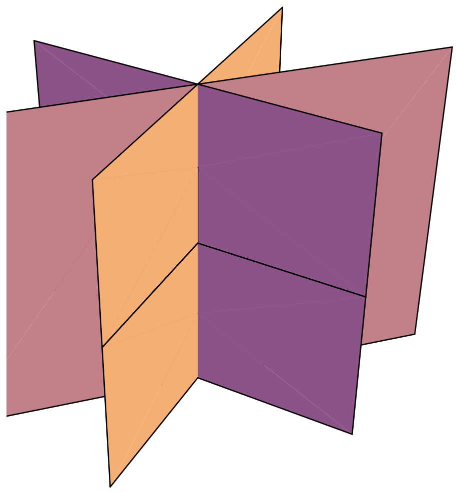
- Due punti distinti individuano una e una sola retta.
- Due piani distinti individuano una retta oppure sono paralleli.





- Una retta r e un punto P tale che $P \notin r$ individuano uno e un solo piano.

- Tre punti non allineati individuano uno e un solo piano.
- Una retta r e un piano π tale chi $r \notin \pi$ individuano un punto oppure sono paralleli.
- Se una retta r e un piano α sono paralleli esiste su α una retta s parallela a r; viceversa, se su un piano α esiste una retta s parallela alla retta r, allora α e r sono paralleli.
- Un fascio (proprio) di piani è l'insieme di tutti i piani che passano per una retta fissa s (asse del fascio).



- Un fascio improprio di piani è l'insieme di tutti i piani che sono paralleli a un piano dato α.
- Tre piani che non contengono una stessa retta individuono un punto oppure nessun punto (quest'ultimo caso si verifica se uno dei piani è parallelo alla retta intersezione degli altri, ovvero i tre piani sono paralleli).
- Due rette distinte sono:
  - complanari, se esiste un piano che contiene entrambe; ciò accade se sono incidenti in un punto o parallele;
  - sghembe, se non esiste un piano che contiene entrambe; ciò accade se non sono parallele e non hanno punti in comune.
- Dato un punto P e un piano α tali che $P \notin \alpha$, esiste uno e un solo piano β parallelo a α e passante per P.
- Dati un punto P e una retta r tali che $P \notin r$ esiste una e una sola retta s parallela a r e passante per P.

B. Sfere e circonferenze

- Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza, circoscritta al triangolo avente i tre punti come vertici.
- Per quattro punti, a tre a tre non allineati, passa una e una sola sfera, circoscritta al tetraedro avente tali punti come vertici.
- Una sfera S e un piano α si tagliano in:
  - una circonferenza se la distanza del centro di S da α è minore del raggio;
  - un solo punto se la distanza del centro di S da α è uguale al raggio (piano tangente a S);
  - nessun punto se la distanza del centro di S da α è maggiore del raggio.
- Una sfera S e una retta r si tagliano in:
  - due punti distinti se la distanza del centro di S da r e minore del raggio;

- un solo punto se la distanza del centro di S da r è uguale al raggio (retta tangente a S);
- nessun punto se la distanza del centro di S da r e maggiore del raggio.

• Due sfere S e S' si tagliano in:

- una circonferenza se la distanza dei centri è minore della somma dei raggi e maggiore della differenza;
- un punto se la distanza dei centri è uguale alla somma o alla differenza dei raggi (sfere tangenti internamente o esternamente) e maggiore della differenza;
- in nessun punto se la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi o minore della differenza.

4.2 Riferimento ortonormale nello spazio e applicazioni

Indichiamo l'insieme dei vettori dello spazio con V_3. Fissata una base nello spazio possiamo identificare V_3 con $\mathbb{R}^3$ ponendo:

$$u = (u_1, u_2, u_3).$$

Una base $\{i, j, k\}$ dello spazio si dice <u>ortonormale</u> se è costituita da versori ortogonali.

Una base ortonormale $\{i, j, k\}$ si dice <u>positiva</u> (rispettivamente <u>negativa</u>) se la più piccola rotazione nel piano individuato da i, j, che sovrappone i a j è vista dal semispazio individuato da k in senso antiorario (rispettivamente antiorario).

Fissiamo una base ortonomale positiva $\{i, j, k\}$ e ricordiamo le operazioni di prodotto scalare, lunghezza di un vettore e angolo tra due vettori nelle componenti rispetto alla base $\{i, j, k\}$.

Se

$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$

e

$$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

il prodotto scalare è dato da:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \tag{4.1}$$

mentre la lunghezza del vettore u è:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \tag{4.2}$$

mentre il coseno dell'angolo $\hat{uv}$ soddisfa:

$$\cos \hat{uv} = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}. \tag{4.3}$$

Ricordiamo brevemente il concetto di *prodotto vettoriale* tra due vettori u e v.

Il prodotto vettoriale è una legge che associa ad ogni coppia di vettori u, v il vettore $u \wedge v$ definito come segue:

1. se u e v sono paralleli

$$u \wedge v = 0;$$

2. se se u e v non sono paralleli:

   – $u \wedge v$ è ortogonale sia ad u che a v;

   – il verso di $u \wedge v$ è tale che la terna $(u, v, u \wedge v)$ è positiva;

   – il modulo è dato da:

$$\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sin \hat{uv}$$

Se $\{i, j, k\}$ è una base ortonormale positiva si ha:

$$i \wedge i = j \wedge j = k \wedge k = 0$$

$$i \wedge j = -j \wedge i = k, \;\; j \wedge k = -k \wedge j = i, \;\; k \wedge i = -i \wedge k = j.$$

Se $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ e $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ sono due vettori qualsiasi il prodotto vettoriale si può rappresentare in componenti mediante il simbolo di determinante:

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{4.4}$$

Il prodotto misto della terna ordinata di vettori u, v, w è il numero reale

$$u \wedge v \cdot w.$$

Il valore assoluto del prodotto misto dei tre vettori u, v, w rappresentati dai tre segmenti orientati $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ è il volume del parallelepipedo avente come spigoli concorrenti nello stesso vertice i rappresentanti dei tre vettori.

Se $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$, $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ e $w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$ sono tre vettori il loro prodotto misto si può rappresentare mediante il determinante:

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{4.5}$$

Un <u>riferimento ortonormale</u> dello spazio è costituito da un punto O, detta *origine*, e da una base ortonormale $\mathcal{B}\{i, j, k\}$ dei vettori dello spazio.

Il riferimento si dirà *positivo* o *negativo* a seconda che la base $\mathcal{B}$ sia positiva oppure negativa.

Le rette orientate per O individuate dai rappresentanti di $\{i, j, k\}$ applicati in O si dicono *assi coordinati*, rispettivamente ass x, asse y e asse z (o delle quote).

I piani individuati da due assi si dicono piani coordinati e si indicano con $[xy]$, $[xz]$ e $[yz]$.

Le coordinate cartesiane ortgonali (x, y, z) del punto P dello spazio sono le componenti del vettore $P - O$ rispetto alla base $\{i, j, k\}$ cioè

$$P(x, y, z) \Leftrightarrow P - O = xi + yj + zk.$$

Le <u>componenti del vettore</u> u di rappresentante $\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1$ rispetto alla base $\{i, j, k\}$ sono la differenza tra le coordinate omonime di P_2 e di P_1 cioè:

$$P_2 - P_1 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k. \qquad (4.6)$$

Il <u>punto medio</u> $M = (x_M, y_M, z_M)$ del segmento di estremi $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ è l'unico punto tale che

$$M - P_1 = P_2 - M$$

e dalla (**??**) segue:

$$(x_M - x_1)i + (y_M - y_1)j + (z_M - z_1)k = (x_2 - x_M)i + (y_2 - y_M)j + (z_2 - z_M)k$$

e quindi

$$\boxed{x_M = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \;\; y_M = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), z_M = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).}$$

Denoteremo con $\overline{P_1P_2}$ la <u>distanza</u> dei punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

Questa è data dalla lunghezza del vettore $P_2 - P_1$:

$$\boxed{\overline{P_1P_2} = \|P_2 - P_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.}$$

La *sfera* di centro C e raggio R è l'insieme dei punti P dello spazio aventi distanza R da C, ossia

$$\|P - C\|^2 = R^2$$

Posto $P(x, y, z)$, $C(\alpha, \beta, \gamma)$ si ha:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2.$$

Equivalentemente

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0 \qquad (4.7)$$

con

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}. \qquad (4.8)$$

Quindi l'equazione (**??**) rappresenta una sfera di centro $C(\alpha, \beta, \gamma)$ purchè la quantità sotto radice (**??**) sia positiva.

Dati tre punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e $P_3(x_3, y_3, z_3)$ l'area A del triangolo da essi individuato è la metà del modulo di $(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1)$, cioè:

$$A = \frac{1}{2} \| \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \| \tag{4.9}$$

Dati i quattro punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ $P_3(x_3, y_3, z_3)$ e $P_4(x_4, y_4, z_4)$ il volume V del parallelepipedo da essi individuato è dato da:

$$V = |(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1) \cdot (P_4 - P_1)| = | \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} |$$

Il volume del tetraedro di vertici P_1, P_2, P_3, P_4 è $\frac{1}{6}V$.

4.3 Rappresentazioni del piano e della retta

Un piano α può essere individuato geometricamente assegnando:

- un suo punto P_0 ed un vettore $n \neq 0$ perpendicolare al piano;
- un suo punto P_0 e due vettori w e w' linearmente indipendenti e paralleli al piano. In questo caso rientra anche quello in cui il piano sia individuato da tre suoi punti P_0, P_1 e P_2, non allineati, ponendo $w = P_1 - P_0$ e $w' = P_2 - P_0$.

Le diverse rappresentazioni del piano si ottengono traducendo mediante l'uso delle coordinate le precedenti condizioni geometriche.

Sia $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ed $n = ai + bj + ck$: Un punto $P(x, y, z)$ appartiene al piano se e solo se:

$$(P - P_0) \cdot n = 0.$$

Passando in componenti, poichè

$$P - P_0 = (x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k,$$

si ottiene l'equazione del piano

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{4.10}$$

cioè un'equazione del tipo

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0.} \tag{4.11}$$

Deduciamo che un piano α si rappresenta con un'equazione di primo grado nelle incognite (x, y, z), in cui i coefficienti delle incognite rappresentano le componenti di un vettore perpendicolare ad α.

Se si moltiplica l'equazione (**??**) per un fattore $\rho \neq 0$ arbitrario, si ottiene una nuova equazione che rappresenta lo stesso piano; pertanto l'equazione di un piano è definita a meno di un fattore di proporzionalità.

Inoltre la (**??**), al variare di (a, b, c) rappresenta la totalità dei piani passanti per P_0, detta anche *stella di piani di centro* P_0.

Osserviamo che se $d = 0$ nella (**??**) allora il piano α passa per l'origine.

L'equazioni $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ rappresentano il piano $[yz]$, $[xz]$ e $[xy]$ rispettivamente.

Il piano α passante per il punto P_0 e parallelo ai vettori indipendenti w e $w^{'}$ è l'insieme dei punti dello spazio tali che i vettori $P - P_0, w, w^{'}$ siano complanari, ossia:

$$\boxed{(P - P_0) \cdot w \wedge w^{'} = 0.} \tag{4.12}$$

Tale condizione è equivalente a quella precedente con $n = w \wedge w^{'}$.

Supposto che $w = li + mj + nk$ e $w^{'} = l^{'}i + m^{'}j + n^{'}k$, la (**??**) si scrive:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l^{'} & m^{'} & n^{'} \end{vmatrix} = 0} \tag{4.13}$$

che è un'equazione della forma (**??**).

Se il piano è α è individuato da tre punti non allineati $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ si possono usare le (**??**) con $w = P_1 - P_0$ e $w^{'} = P_2 - P_0$ e quindi:

$$l = x_1 - x_0,\ m = y_1 - y_0,\ n = z_1 - z_0$$

e

$$l' = x_2 - x_0,\ m' = y_2 - y_0,\ n' = z_2 - z_0.$$

Consideriamo due piani α e α' di equazioni cartesiane:

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0$$

e

$$\alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Se essi sono paralleli, i vettori $n = (a, b, c)$ e $n' = (a', b', c')$ normali ad α e α', sono paralleli.

Conseguentemente abbiamo la seguente *condizione di parallelismo tra piani*:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Ne segue che due piani paralleli si possono rappresentare con equazioni che differiscono per il termine noto e che l'equazione:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

rappresenta al variare di $d \in \mathbb{R}$, tutti i piani ortogonali al vettore (a, b, c).

Se poi

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$$

i due piani α e $\alpha^{'}$ coincidono.

Se i piani α e $\alpha^{'}$ non sono paralleli, hanno come intersezione una retta r. Le coordinate dei punti di r sono le soluzioni del sistema lineare:

$$\boxed{\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a^{'}x + b^{'}y + c^{'}z + d^{'} = 0 \end{cases}} \tag{4.14}$$

e quindi r può essere rappresentata mediante le equazioni (**??**) che si dicono *equazioni cartesiane della retta r.*

La totalità dei piani paralleli ad uno stesso piano si dice *fascio improprio di piani.* La totalità dei piani passanti per una retta r si dice *fascio proprio di piani*di asse r.

Abbiamo già visto che tutti i piani paralleli ad uno stesso piano α sono rappresentabili mediante equazioni che si ottengono da quella di α facendo variare il termine noto.

La totalità dei piani passanti per la retta r intersezione dei piani: $\alpha : ax+by+cz+d=0$ e $\alpha' : a'x+b'y+c'z+d'=0$ è rapprentata dall'equazione

$$\lambda(ax+by+cz+d)+\mu(a'x+b'y+c'z+d')=0 \quad (4.15)$$

al variare di λ e μ in $\mathbb{R}$.

Infatti la (**??**) rappresenta un piano per ogni valore della coppia (λ,μ) definita a meno di un fattore di proporzionalità e distinta da $(0,0)$. Inoltre ogni punto di r ha coordinate che soddisfano la (**??**) e per ogni punto dello spazio, che non appartenga a r, passa uno ed un solo piano di equazione (**??**). Diremo che la (**??**) rappresenta il *fascio di piani individuato da α e α'*.

Osserviamo che per rappresentare la retta r come intersezione di due piani α e α' si possono utilizzare due qualsiasi piani distinti del fascio individuato da α e α'.

Una retta r nello spazio, può essere individuata assegnando un suo punto P_0 ed un vettore non nullo u a cui la retta sia parallela, o anche mediante due punti P_0 e P_1 ponendo

$u = P_1 - P_0$.

Un punto P dello spazio appartiene a r se e solo se i vettori $P - P_0$ e u sono paralleli.

Posto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P(x, y, z)$, $u = li + mj + nk$ passando alle componenti deve essere:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{4.16}$$

con la convenzione che, se è nullo qualche denominatore della (**??**), deve essere posto uguale a zero il corrispondente numeratore.

La totalità delle rette passanti per P_0, detta *stella propria di rette di centro* P_0, si ottiene dalle (**??**) al variare di (l, m, n).

I numeri (l, m, n), componenti di un vettore parallelo alla retta r, si dicono i *parametri direttori* di r e sono ovviamente definiti a meno di un fattore di proporzionalità.

Un altro modo per esprimere il parallelismo tra i vettori

$P - P_0$ e u è dato da:

$$P - P_0 = tu, \ t \in \mathbb{R}$$

da cui si deducono le *equazioni parametriche* di r:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}} \tag{4.17}$$

Se r è individuata dai due punti $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$, valgono le rappresentazioni (**??**) e (**??**) con

$$l = x - x_0, \ m = y_1 - y_0, \ n = z_1 - z_0.$$

Esempio 48 Vogliamo trovare l'equazione parametrica della retta r intersezione dei due piani $\alpha : x + y - z = 0$ e $\alpha^{'} : 2x - y - z + 1 = 0$.

Possiamo, per esempio, porre $z = t$, e ottenere le equazioni parametriche per la retta r:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$$

Potevamo anche porre $y = t$ e ottenere le equazioni parametriche per la retta r:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

Viene lasciato come esercizio allo studente quello di verificare che le due equazioni parametriche trovate rappresentano infatti la stessa retta r.

Esempio 49 Scriviamo l'equazione cartesiana del piano passante α passante per il punto $P_0(1, 2, 3)$ e perpendicolare al vettore $n = i + j + k$. Osserviamo che un punto $P(x, y, z)$ appartiene a α se e solo se:

$$(P - P_0) \cdot n = 0,$$

o, equivalentemente,

$$1(x - 1) + 1(y - 2) + 1(z - 3) = 0.$$

Il piano α ha quindi equazione cartesiana:

$$x + y + z - 6 = 0.$$

Esempio 50 Scriviamo l'equazione cartesiana del piano passante α passante per il punto $P_0(1, 2, 3)$ e parallelo ai vettori $u = i + j$ e $v = i - j + k$.

L'equazione cartesiana si ottiene dalla (**??**)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.18}$$

Un calcolo immediato mostra che α ha equazione cartesiana:

$$x - y - 2z + 7 = 0. \tag{4.19}$$

Esempio 51 Vogliamo scrivere l'equazione cartesiana del piano α passante per $P_0(1, 2, 3)$ e contenente la retta r : $x - 2y = 0,\ z + 1 = 0.$

Consideriamo il fascio di piani di asse la retta r:

$$\lambda(x-2y)+\mu(z+1)=0. \tag{4.20}$$

Imponendo il passaggio per il punto P_0 si ottiene:

$$-3\lambda+4\mu=0.$$

Una soluzione è data da $\lambda=4$ e $\mu=3$.

Sostituendo nell'equazione (**??**) si ottiene il piano cercato:

$$4x-8y+3z+3=0.$$

Posizione di due rette nello spazio

Due rette distinte r e s possono essere *sghembe* cioè non contenute in uno stesso piano oppure *complanari* e in tal caso possono essere *parallele* e *incidenti*.

Se i parametri direttori delle rette r e s sono rispettivamente (l,m,n) e (l',m',n') allora la *condizione di parallelismo* è

espressa da:
$$\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}.$$

Per controllare se due rette sono incidenti è necessario controllare se il sistema costituito dalle equazioni delle due rette è compatibile.

Si può anche determinare una condizione che esprime la complanarità delle due rette come segue.

Supposto che $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$ siano due punti qualsiasi di r e s e siano r e s due vettori paralleli alle due rette.

Le rette r e s sono complanari se lo sono i vettori $P_1 - P_0$, r, s cioè se e solo se:

$$(P_1 - P_0) \cdot r \wedge s = 0$$

ossia se e solo se:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0 \tag{4.21}$$

Chiaramente la (**??**) non è soddisfatta se le rette r e s sono sghembe.

Posizione di una retta e un piano

Una retta r si può trovare in relazione ad un piano α, nelle seguenti posizioni:

- r è incidente α in un punto;
- r è parallela ad α, ossia α non ha punti in comune oppure è contenuta nel piano.

Se α è rappresentato dall'equazione

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{4.22}$$

e la retta r ha la forma parametrica

$$x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + nt \tag{4.23}$$

le eventuali intersezioni tra la retta α e r si ottengono imponendo che le (**??**) verifichino la (**??**), cioè in corrispondenza ai valori di t che soddisfano l'equazione:

$$(al + bm + cn)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0. \tag{4.24}$$

Si presentano quindi i seguenti casi:

1) se $al + bm + cn \neq 0$ allora α e r hanno una sola intersezione;

2) se $al + bm + cn = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$ allora (**??**) è incompatibile e quindi r e α non hanno punti in comune;

3) se $al + bm + cn = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ allora la (**??**) è una identità e la retta r è contenuta nel piano α.

Dai casi 2) e 3) si ha pertanto che la *condizione di parallelismo tra retta e piano* è data da:

$$al + bm + cn = 0$$

la quale esprime anche l'ortogonalità tra un vettore parallelo a r ed un vettore perpendicolare a α.

4.4 Angoli e distanze

Consideriamo due rette r e s eventualmente sghembe. Prendiamo due vettori non nulli r e s paralleli alle rette r e s esse e sia φ l'angolo (orientato) tra questi vettori. Osserviamo che se cambiamo il segno ad uno di questi vettori l'angolo individuato è il supplementare di φ.

Si definiscono come *angoli di due rette* r e s e si indicano con $\hat{rs}$ gli angoli dei due vettori r e s.

Se $r = (l, m, n)$ e $r^{'} = (l^{'}, m^{'}, n^{'})$ sono tali vettori i due valori di $\hat{rs}$ sono dati da $\hat{rs} = \hat{rs}$ oppure $\hat{rs} = \pi - \hat{rs}$.

Per la formula (**??**) otteniamo:

$$\cos \hat{rs} = \pm \frac{ll^{'} + mm^{'} + nn^{'}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{l^{'2} + m^{'2} + n^{'2}}} \tag{4.25}$$

In particolare due rette sono ortogonali se:

$$ll^{'} + mm^{'} + nn^{'} = 0. \tag{4.26}$$

Osservazione 52 Si noti che vi sono infinite rette passanti per un punto P_0 e perpendicolari ad una retta r assegnata. Queste sono tutte le rette del piano passante per P_0 e perpendicolare a r.

Definiamo l'angolo tra due piani α e $\alpha^{'}$ come l'angolo tra due qualsiasi rette ortgonali ai due piani.

Se i due piani hanno equazioni cartesiane $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha^{'} : a^{'}x + b^{'}y + c^{'}z + d^{'} = 0$ segue dalla (**??**):

$$\cos \hat{\alpha\beta} = \pm \frac{aa^{'} + bb^{'} + cc^{'}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a^{'2} + b^{'2} + c^{'2}}}.$$

Una retta r di parametri direttori (l, m, n) e un piano α : $ax + by + cz + d = 0$ sono ortogonali se e solo se r e parallela la vettore (a, b, c) (vettore ortogonale al piano), ossia se e solo se:

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n},$$

che esprime la *condizione di perpendicolarità di una retta e di un piano.*

Ossia una retta ed un piano sono ortogonali se i parametri direttori della retta coincidono, a meno di un fattore di proporzionalità, coi coefficienti dell'equazione del piano.

Distanza di un punto da un piano

Vogliamo determinare la distanza di un punto P_0 da un piano α.

Supponiamo che P_0 abbia coordinate $(x_0, y_0.z_0)$ e il piano α abbia equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$.

Sia H il punto di intersezione di α con la retta n ad esso perpendicolare passante per P_0. La distanza di P_0 da α è la lunghezza del segmento P_0H.

La retta n ha equazioni parametriche $x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct$ ed il punto H intersezione con α si ottiene in corrispondenza del valore di t dato da:

$$t_H = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}. \qquad (4.27)$$

Ne segue che i punti $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $H(x_0+at_H, y_0+bt_H, z_0+ct_H)$ hanno distanza:

$$\overline{P_0H} = \sqrt{a^2t_H^2 + b^2t_H^2 + c^2t_H^2} = |t_H|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

e quindi tenuto conto della (**??**) si ha:

$$\boxed{d(P_0, H) = \overline{P_0H} = \frac{|ax_o+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.} \qquad (4.28)$$

La formula (**??**) può venire utilizzata anche per calcolare la distanza da α di un piano β o di una retta r paralleli ad α; basta prendere P_0 appartenente a β o r.

Distanza di un punto da una retta

Per determinare la distanza di un punto P_0 da una retta r nello spazio si calcola la distanza di P_0 dal punto H, intersezione della retta r con il piano α ad essa perpendicolare e passante per P_0.

Esempio 53 Vogliamo trovare la distanza di $P_0(1,-1,2)$ dalla retta di equazioni parametriche:

$$r : x = 1 + t,\ y = t,\ z = -t + 3.$$

Il piano passante per P_0 e perpendicolare a r ha equazione:

$$x + y - z + 2 = 0.$$

L'intersezione H tra questo piano e la retta r si ottiene quando:

$$x + y - z + 2 = 1 + t + t + t - 3 + 2 = 0$$

cioè per $t = 0$. Il punto H ha quindi coordinate $(1, 0, 3)$.

Conseguentemente

$$d(P_0, r) = d(P_0.H) = \sqrt{2}.$$

Distanza tra due rette

Consideriamo due rette r e s se sono incidenti la loro distanza è zero; se sono parallele la distanza di r da s è la distanza di un punto qualsiasi di una retta dall'altra che si calcola come nel caso precedente. Se r e s sono sghembe, ci sono due punti $P_1 \in r$ e $P_2 \in s$ tali che la retta passante per P_1 e per P_2 è perpendicolare e incidente ad r e s.

Il segmento che congiunge P_1 a P_2 è il segmento di lunghezza minima tra tutti i segmenti aventi un estremo su r ed un estremo su s.

La lunghezza di tale segmento è la distanza, o anche la *minima distanza* tra r e s.

Per calcolare la distanza di r con s (ossia il segmento di minima distanza) si calcola la distanza di un punto qualsiasi P di s dal piano α passante per r e parallelo ad s.

Esempio 54 Calcoliamo la distanza tra le rette $r : x - y - 1,\ x + y - z = 0$ e $s : x = u,\ y = -2 + u,\ z = u$.

Perchè abbia senso calcolare la minima distanza tra le rette r e s devono essere sghembe. Una rappresentazione parametrica di r è $r : x = t,\ y = -1 + t,\ z = -1 + 2t$. L'eventuale intersezione tra r e s si trova per quei valori di s e u che soddisfano le equazioni: $t = u,\ -1 + t = 2 + u,\ -1 + 2t = u$.

Queste equazioni sono chiaramente incompatibili (la prima e la seconda implicano per esempio che $-1 = 2$). Quindi r e s sono sghembe. (Lo studente potrebbe verificare che le rette r e s sono sghembe usando la formula (**??**).

Per calcolare la minima distanza tra r e s troviamo, prima di tutto il piano α passante per r e parallelo a s. Il fascio proprio contenente la retta r ha equazione:

$$\lambda(x - y - 1) + \mu(x + y - z) = 0.$$

Imponendo che il piano del fascio sia parallelo a s, ossia che il suo vettore normale sia perpendicolare al vettore direttore della retta s si ottiene $(\lambda + \mu) + (\mu - \lambda) - \mu = \mu = 0$.

Il piano α ha quindi equazione cartesiana:

$$\alpha : x - y - 1 = 0.$$

Prendiamo il punto $P(0, -2, 0) \in s$ e calcoliamo la distanza con il piano α. Si ottiene facilmente:

$$d(p, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{4.29}$$

che rappresenta la minima distanza tra le rette r e s.

4.5 Posizione tra piano e sfera. Circonferenza nello spazio

Sia α il piano di equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ e sia S la sfera di equazione cartesiana:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0 \tag{4.30}$$

dove il centro della sfera è $C(\alpha, \beta, \gamma)$ ed il raggio è dato da

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}.$$

Per valutare la posizione di α rispetto a S, bisogna calcolare la distanza di α da C. Si hanno i seguenti casi:

1) $d(\alpha, C) > R$: il piano è esterno a S;

2) $d(\alpha, C) = R$: il piano α ha in comune con S un punto e si dice tangente alla sfera;

3) $d(\alpha, C) < R$: il piano α interseca S secondo una circonferenza σ il cui centro C_1 è l'intersezione di α con la retta ad esso perpendicolare passante per C; il raggio r di σ è dato, per il Teorema di Pitagora, da:

$$r = \sqrt{R^2 - \overline{CC_1}^2}.$$

Nel caso 3) la circonferenza σ è rappresentata dal sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \tag{4.31}$$

Osservazione 55 Si tenga presente che σ può anche essere rappresentata come intersezione di due sfere S e $S^{'}$ di centri C, $C^{'}$ e raggi R e $R^{'}$ tali che

$$|R - R^{'}| < \overline{CC'} < R + R^{'}.$$

Piano tangente a una sfera Concludiamo determinando il piano tangente alla sfera S di equazione (**??**) in un suo punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Tale piano è il piano passante per P_0 e ortogonale al vettore $P_0 - C$ ed ha perciò equazione:

$$(x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) + (z_0 - \gamma)(z - z_0) = 0.$$