Esercizi sulle matrici
Corso di Laurea in Informatica A.A. 2007-2008
Docente: Andrea Loi

-1. a) Dire quali sono le dimensioni delle matrici seguenti.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Quali delle matrici precedenti possono essere moltiplicate fra loro.

0. Moltiplicare le seguenti matrici quando possibile.

$a)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $c)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,
$d)\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $e)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $f)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

1. Siano date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Calcolare le terza colonna di AB senza calcolare la matrice AB.

   b) Calcolare la seconda riga di AB, senza calcolare la matrice AB.

2. Calcolare i seguenti prodotti

$a)\begin{pmatrix} 7 & 2 & \sqrt{3} & 4 \\ 6 & 8 & a^2 & 2 \\ 3 & \sqrt{5} & a & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b)\begin{pmatrix} 6a & 2 & 3a^2 \\ 4 & 2\sqrt{a} & 2 \\ 5 & 12 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{j}$, $c)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 6 \\ 3 & 2\sqrt{3} & 4 & \end{pmatrix}\mathbf{k}$.

3. Siano A e B due matrici $n \times n$ e supponiamo che A sia simmetrica. Quale delle seguenti equazioni è vera e quale è falsa?

$$a)\ (AB)^T = B^T A, \quad b)\ (A^T B)^T = B^T A^T$$
$$c)\ (A^T B)^T = BA,\ d)\ (AB)^T = A^T B^T.$$

4. Quali delle seguenti matrici sono diagonali? simmetriche? Triangolari? Antisimmetriche?

$a) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $b) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2$, $c) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{pmatrix}$, $d) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2$ $e) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix}^2$,
$f) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix}^3$, $g) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $h) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $i) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3$,
$l) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$, $m) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$, $n) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^4$.

5. Per quali valori di a le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ commutano?

6. Determinare le matrici 2×2 che commutano con la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

7. Siano $A \in M_{1,5}$ e $B \in M_{5,1}$ definte come segue: $A = (1,\ -1,\ 0,\ \sqrt{2},\ 1)$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcolare AB e BA.

8. Calcolare il determinante e il rango delle seguenti matrici. $a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $c)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

9. Determinare il rango delle seguenti matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = (1,\ 0,\ 2)$.

10. Quale è l'inversa delle matrici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$?

11. Per quali valori del parametro λ le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \lambda & 0 & -1 \\ 5 & 4 & h \end{pmatrix}$ sono invertibili.

12. Trovare l'inversa (se possibile) della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

13. Sia S l'insieme delle matrici $n \times n$ simmetriche, T l'insieme delle matrici triangolari, D l'insieme delle matrici $n \times n$ diagonali. Dimostrare che $S \cap T = D$.

14. Vero o Falso:

   1. Se $A \in M_{n,n}$ ha due righe uguali allora, $\det A = 0$.
   2. Se $A, B \in M_{n,n}$, $\det(AB) = \det(BA)$.
   3. Se $A \in M_{n,n}$ e $k \in \mathbb{R}$, $\det(kA) = k \det A$.

4. Se $A \in M_{n,n}$ e $k \in \mathbb{R}$, $\det(kA) = k^n \det A$.
5. Se $A \in M_{n,n}$, n dispari $\det A = -\det(-A)$.
6. Se $A \in M_{n,n}$, n pari $\det A = \det(-A)$. Giustificare le risposte.

15. Sia A una matrice antisimmetrica $n \times n$ con n dispari: dimostare che $\det A = 0$.

16. Sia A una matrice ortogonale $n \times n$, cioè una matrice che soddisfa $A^T = A^{-1}$. Dimostare che $\det A = \pm 1$.