Università degli Studi di Cagliari

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Il Teorema di Seifert - Van Kampen

Relatore:
Prof. Andrea Loi

Candidato:
Giuliana Boi

Anno Accademico 2016/2017

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi consiste nel fornire due diverse dimostrazioni del Teorema di Seifert-Van Kampen, il quale rappresenta un notevole risultato nell'ambito della topologia algebrica in quanto consente di calcolare il gruppo fondamentale di spazi topologici particolarmente complicati, attraverso la loro decomposizione in sottoinsiemi aperti per i quali il calcolo del gruppo fondamentale risulti più agevole.
Nel primo capitolo, saranno introdotti i concetti di omotopia tra applicazioni continue, di gruppo fondamentale di uno spazio topologico e di prodotto libero di gruppi, mettendone in evidenza le rispettive proprietà che utilizzeremo nel resto della trattazione.
Il secondo capitolo mette in luce l'interessante legame esistente tra il concetto di gruppo fondamentale e la teoria dei rivestimenti. Sarà data a tal proposito un'approfondita classificazione di questi ultimi mediante l'analisi di una serie di importanti risultati ed esempi riguardanti in particolar modo i rivestimenti universali e regolari, introducendo inoltre il concetto di spazio topologico semilocalmente semplicemente connesso.
Il terzo capitolo è interamente dedicato al Teorema di Seifert-Van Kampen, che sarà proposto in due differenti versioni. Nella prima parte, dopo aver introdotto alcune utili notazioni che metteranno in evidenza le proprietà del prodotto tra archi e classi di archi, enunceremo il Teorema nella sua versione più classica per poi esporlo anche nella sua versione universale. Dopo aver dimostrato la prima versione, mostreremo in che modo quest'ultima sia conseguenza della proprietà universale espressa nella seconda, per poi dedicare l'ultima sezione del capitolo all'analisi di alcune interessanti applicazioni del Teorema.
Nel quarto capitolo, sfruttando la teoria dei rivestimenti, proporremo la dimostrazione del Teorema di Seifert-Van Kampen dovuta a Grothendieck, nelle ipotesi che gli spazi topologici considerati siano "ragionevoli", ossia connessi, localmente connessi per archi e localmente semplicemente connessi. E' interessante osservare che tali ipotesi risultano soddisfatte dalla maggior parte degli spazi topologici di

uso comune ed in particolar modo dalle varietà topologiche; osserviamo inoltre che la dimostrazione di Grothendieck risulta essere molto più breve ed elegante rispetto a quella proposta nel terzo capitolo.

Indice

Capitolo 1

Omotopie e gruppo fondamentale

1.1 Omotopia tra funzioni continue

Siano X, Y due spazi topologici ed $f, g\colon X \to Y$ due applicazioni continue; diremo che f, g sono *omotope* se esiste un'applicazione continua

$$F\colon X \times I \to Y, \qquad I = [0,1],$$

detta detta *omotopia* tra f e g, tale che

$$F(x,0) = f(x), \quad F(x,1) = g(x), \qquad \forall x \in X.$$

Due applicazioni omotope f, g saranno denotate con la scrittura $f \sim g$. In particolare, l'omotopia tra funzioni continue induce una relazione d'equivalenza tra spazi topologici: diremo che due spazi topologici X, Y sono *omotopicamente equivalenti* se esistono due funzioni continue $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ tali che

$$g \circ f \sim id_X, \qquad f \circ g \sim id_Y$$

e scriveremo $X \sim Y$. Nel caso in cui $X = I$, un'applicazione $f\colon I \to Y$ è detta *arco* di estremi $f(0)$, $f(1)$; l'applicazione $\epsilon_y\colon I \to Y$, $\epsilon_y(I) = y = f(0)$ definisce l'*arco costante*. Il concetto di omotopia tra archi è banale, in quanto ogni arco è sempre omotopo all'arco costante mediante l'omotopia definita come

$$F\colon I \times I \to Y, \quad F(x,t) = f((1-t)x).$$

Pertanto, il concetto di omotopia viene esteso introducendo quello di *omotopia relativa*. Dati due spazi topologici X, Y ed un sottoinsieme $A \subseteq X$, diremo che due applicazioni continue f, g sono *omotope relativamente ad A* se esiste un'omotopia *(relativa ad A)* $F\colon X \times I \to Y$ definita in modo tale che $F(a,t)$ non dipenda da

t per ogni $a \in A$. L'omotopia relativa tra due funzioni f, g rispetto ad un dato sottoinsieme $A \subseteq X$, viene messa in evidenza dalla notazione $f \sim_A g$, la quale è giustificata dalla seguente

Proposizione 1.1.1. *Siano X, Y due spazi topologici e $A \subseteq X$. Allora $\sim_A$ definisce una relazione d'equivalenza sull'insieme $C(X, Y)$ delle applicazioni continue da X in Y.*

Dimostrazione. Sia $f \in C(X, Y)$. Per dimostrare che $\sim_A$ è una relazione d'equivalenza osserviamo che la riflessività si ottiene ponendo $F(x, t) = f(x), \quad \forall x \in X$. Per mostrare la simmetria, supponiamo che $f \sim_A g$ mediante l'omotopia $F(x, t)$; allora $g \sim_A f$ tramite l'omotopia definita da $G(x, t) = F(x, 1 - t)$. Sia infine $f \sim_A g$ tramite F e $g \sim_A h$ tramite G; definendo $H(x, t)$ come $F(x, 2t)$ per $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ e come $G(x, 2t - 1)$ per $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, si ottiene un'omotopia relativa ad A tra f ed h, che mostra la transitività. $\square$

Un'importante proprietà dell'omotopia è la sua stabilità rispetto alla composizione, come afferma la seguente proposizione:

Proposizione 1.1.2. *Siano X, Y, Z spazi topologici, $f_0, f_1 \colon X \to Y$, e $g_0, g_1 \colon Y \to Z$ applicazioni continue. Se $f_0 \sim f_1$ e $g_0 \sim g_1$, allora $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$.*

Dimostrazione. Sia $F \colon X \times I \to Y$ un'omotopia tra f_0 ed f_1 e $G \colon Y \times I \to Z$ un'omotopia tra g_0 e g_1. Allora l'applicazione $H \colon X \times I \to Z$, $H(x, t) = G(F(x, t), t)$ è un'omotopia tra $g_0 \circ f_0$ e $g_1 \circ f_1$. $\square$

Vale inoltre il seguente lemma:

Lemma 1.1. *Sia $F \colon I \times I \to X$ un'applicazione continua e siano f, g, h, k archi in X tali che: $f(s) = F(s, 0)$, $g(s) = F(1, s)$, $h(s) = F(0, s)$ e $k(s) = F(s, 1)$. Allora $f \cdot g \sim h \cdot k$.*

1.1.1 Retratti

Riportiamo ora alcune definizioni che legano uno spazio topologico X ad un suo sottoinsieme $A \subseteq X$ ed alcuni esempi:

- A è un *retratto* di X se esiste una funzione continua $r\colon X \to A$, detta *retrazione* di X su A, tale che $r \circ i = id_A$ o, equivalentemente, $r_{|A} = id_A$, dove $i\colon A \to X$ è l'inclusione;

- A è un *retratto di deformazione* di X se esiste una retrazione $r\colon X \to A$, tale che $id_X \sim i \circ r$ o, equivalentemente, se e solo se esiste $F\colon X \times I \to X$ tale che $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) \in A$, $\forall x \in X$, $F(a, 1) = a$, $\forall a \in A$;

- A è un *retratto forte di deformazione* di X se esiste una retrazione $r\colon X \to A$, tale che $id_X \sim_A i \circ r$, ossia se e solo se esiste $F\colon X \times I \to X$ tale che $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) \in A$, $\forall x \in X$, $F(a, t) = a$, $\forall a \in A$, $\forall t \in I$.

Esempio 1.1.1. *Il cerchio S^1 è un retratto forte di deformazione del cilindro.*

Consideriamo il cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$$

ed il cerchio

$$S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1, z = 0\}.$$

Osserviamo anzitutto che si tratta di due spazi omotopicamente equivalenti e, in particolare, S^1 è un retratto forte di deformazione del cilindro C. Si considerino le applicazioni seguenti:

$$r\colon C \to S^1, \quad r(x, y, z) = (x, y, 0)$$

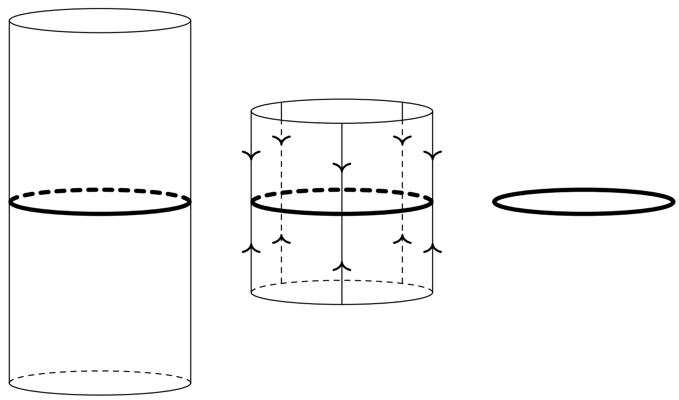
e l'inclusione naturale

$$i\colon S^1 \to C.$$

Si ha che $r \circ i = id_{S^1}$, uguaglianza immediata, ed $id_C \sim i \circ r$, la quale si dimostra nel seguente modo. Sia $F\colon C \times I \to C$, $F(x, y, z; t) = (x, y, (1 - t)z)$. Allora

$$F(x, y, z; 0) = (x, y, z) = id_C(x, y, z)$$

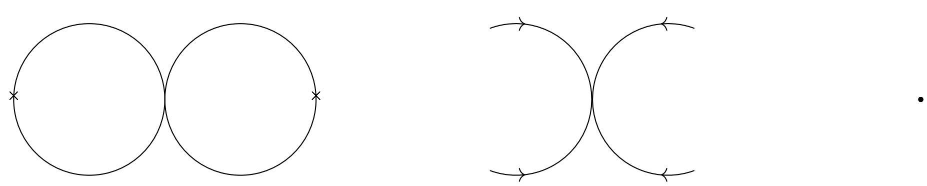
$$F(x, y, z; 1) = (x, y, 0) = (i \circ r)(x, y, z).$$



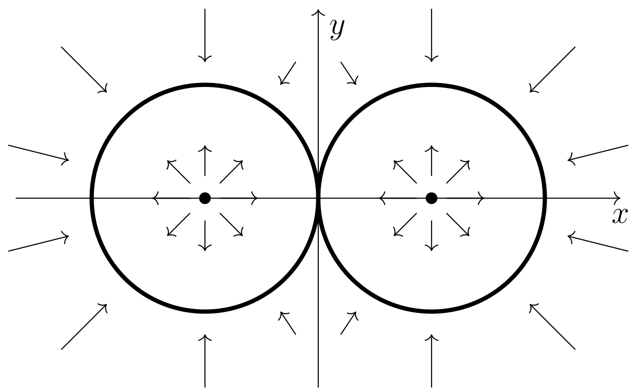
Esempio 1.1.2. *La figura* ∞

La figura ∞ è definita dall'unione dei due spazi $C_1 = \{x = (x_1, x_2) | (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\}$ e $C_2 = \{x = (x_1, x_2) | (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1\}$.
Lo spazio $X = \infty \setminus \{(-2, 0), (2, 0)\}$ si retrae per deformazione forte all'origine $(0, 0)$ tramite l'omotopia $F \colon X \times I \to X$ definita da

$$F(x,t) = \begin{cases} \frac{(1-t)x}{\|((1-t)x_1 - 1, (1-t)x_2)\|} & \text{se} \quad x = (x_1, x_2) \in C_1 \setminus \{(2,0)\} \\ \frac{(1-t)x}{\|((1-t)x_1 + 1, (1-t)x_2)\|} & \text{se} \quad x = (x_1, x_2) \in C_2 \setminus \{(-2,0)\} \end{cases}$$



Inoltre, la figura ∞ è un retratto forte di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$



1.2 Il gruppo fondamentale

Per poter introdurre il concetto di gruppo fondamentale di uno spazio topologico, occorre premettere la definizione di *prodotto tra archi*. Siano $f, g\colon I \to X$ due archi definiti in uno spazio topologico X; il prodotto, detto anche concatenzione, tra i due archi f, g è definito nella maniera seguente:

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Diremo che due archi f, g tali che $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ sono equivalenti se sono omotopi relativamente a $\{0,1\}$, denotando tale relazione d'equivalenza con $f \sim_{\{0,1\},F} g$, mettendo in evidenza in tal modo l'omotopia relativa F tra essi. La classe $[f]$ conterrà tutti gli archi omotopi ad f relativamente a $\{0,1\}$.
Il prodotto tra archi preserva l'omotopia, come mostra il lemma seguente:

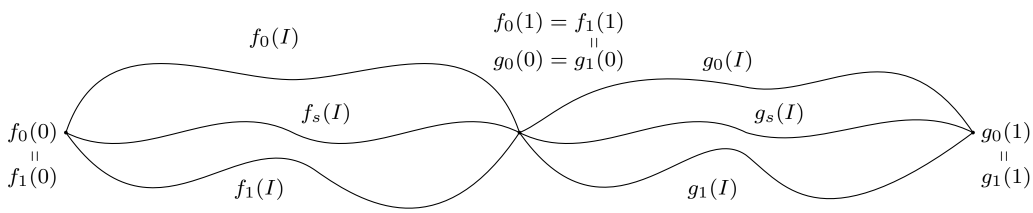
Lemma 1.2. *Sia X uno spazio topologico e siano f_0, f_1, g_0, $g_1\colon I \to X$ archi tali che*

$$f_0(0) = f_1(0), \quad f_0(1) = f_1(1) = g_0(0) = g_1(0), \quad g_0(1) = g_1(1).$$

Supponiamo che $f_0 \sim_{\{0,1\}} f_1$ e $g_0 \sim_{\{0,1\}} g_1$. Allora $f_0 \cdot g_0 \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdot g_1$.

Dimostrazione. Sia F un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra gli archi f_0 ed f_1 e consideriamo inoltre un'omotopia G relativa a $\{0,1\}$ tra gli archi g_0 e g_1. Definiamo l'applicazione H come segue:

$$H(t,s) = \begin{cases} F(2t,s) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t-1,s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$



Tale applicazione rappresenta un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra $f_0 \cdot g_0$ e $f_1 \cdot g_1$; infatti, in virtù del lemma di incollamento, è un'applicazione continua ed inoltre si verifica che $H(t,0) = (f_0 \cdot g_0)(t)$, $H(t,1) = (f_1 \cdot g_1)(t)$ e che $H(0,s) = F(0,s)$, $H(1,s) = G(1,s)$ non dipendono dal paramentro s. $\square$

A partire dal precedente lemma, otteniamo la definizione di un particolare "prodotto" tra classi di equivalenza di archi, dato da:

$$[f] \cdot [g] := [f \cdot g], \tag{1.2}$$

dove f, g sono archi in X tali che $f(1) = g(0)$. Riassumiamo le principali proprietà di tale prodotto nel seguente teorema, rinviando il lettore agli appunti del corso di Topologia Algebrica per la dimostrazione:

Teorema 1.1. *Siano $f, g, h \colon I \to X$ tre archi definiti in uno spazio topologico X tali che $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$. Sia $x = f(0)$ ed $y = f(1)$. Allora valgono le seguenti proprietà:*

1. $([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$;
2. $[\epsilon_x] \cdot [f] = [f], \quad [f] \cdot [\epsilon_y] = [f]$;
3. $[f] \cdot [i(f)]) = [\epsilon_x], \quad [i(f)] \cdot [f] = [\epsilon_y]$,

dove ϵ_x (rispettivamente $[\epsilon_y]$) è l'arco costante e $i(f) \colon I \to X$ è l'arco definito da $i(f)(t) = f(1-t)$ che inizia in y e finisce in x.

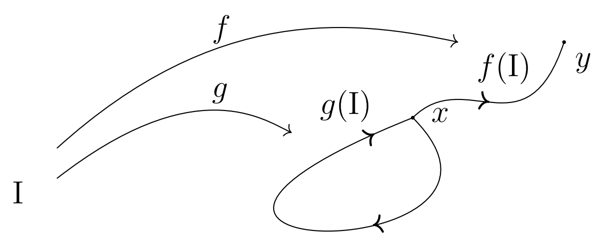
Possiamo ora definire il gruppo fondamentale di uno spazio topologico X. Dato uno spazio topologico X, sia $x \in X$ un punto fissato. Consideriamo l'insieme definito da $\{f \colon I \to X | f(0) = f(1) = x\}$, ossia l'insieme di tutti i lacci in X basati in x. Introduciamo su tale insieme la relazione d'equivalenza definita come segue:

$$f \sim g \Leftrightarrow f \sim_{\{0,1\}} g.$$

Si definisce *gruppo fondamentale* dello spazio topologico X, e si denota con $\pi_1(X,x)$, l'insieme delle classi d'equivalenza dei lacci chiusi di base x nello spazio X, dotato della struttura di gruppo topologico dall'operazione di prodotto definita in (1.2). Se consideriamo due punti distinti x, y in uno spazio topologico X, in generale non esiste alcun legame particolare tra i gruppi fondamentali di X basati rispettivamente in x e in y, ma è soddisfatta la seguente proprietà:

Proposizione 1.2.1. *Se esiste un arco che congiunge il punto x al punto y, allora esiste un isomorfismo tra $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$.*

Dimostrazione. Definiamo un arco $f\colon I \to X$ da $f(0) = x$ a $f(1) = y$ e un laccio $g\colon I \to X$ basato nel punto x. Se $i(f)$ è l'arco definito da $i(f)(t) = f(1-t)$, allora $i(f) \cdot g \cdot f$ è un laccio basato in y, come mostra la seguente figura:



L'applicazione

$$u_f\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y), \qquad u_f([g]) = [i(f) \cdot g \cdot f] \tag{1.3}$$

risulta essere ben definita, grazie al risultato espresso nel lemma 1.2. Inoltre, u_f è un omomorfismo invertibile di gruppi, e quindi un isomorfismo. Infatti, considerati $[g], [h] \in \pi_1(X, x)$, per il lemma 1.2, si ha

$$\begin{aligned} u_f([g] \cdot [h]) &= u_f([g \cdot h]) = [i(f) \cdot g \cdot h \cdot f] \\ &= [i(f) \cdot g \cdot f \cdot i(f) \cdot h \cdot f] \\ &= [i(f) \cdot g \cdot f] \cdot [i(f) \cdot h \cdot f] \\ &= u_f([g]) \cdot u_f([h]). \end{aligned}$$

L'inversa di u_f è definita da

$$u_{i(f)}\colon \pi_1(X, y) \to \pi_1(X, x), \qquad u_{i(f)} = [f \cdot k \cdot i(f)], \forall k \in \pi_1(X, y).$$

□

1.2.1 Omomorfismo indotto da applicazioni continue

Consideriamo un'applicazione continua $\varphi\colon X \to Y$ e $x \in X$, e definiamo la seguente applicazione:

$$\varphi_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, \varphi(x)), \quad \varphi_*([f]) = [\varphi \circ f], \tag{1.4}$$

dove f è un laccio di base x in X e $\varphi \circ f$ è un laccio di base $\varphi(x)$ in Y. L'applicazione risulta essere ben definita e costituisce un omomorfismo di gruppi, detto *omomorfismo indotto* dall'applicazione φ sui gruppi fondamentali. Per verificarlo, osserviamo che:

$$\varphi_*([f]\cdot[g]) = \varphi_*([f\cdot g]) = [\varphi\circ(f\cdot g)] = [(\varphi\circ f)\cdot(\varphi\circ g)] = [\varphi\circ f]\cdot[\varphi\circ g] = \varphi_*([f])\cdot\varphi_*([g]),$$

per ogni $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$. Le proprietà principali di tale omomorfismo sono espresse dal seguente teorema:

Teorema 1.2. *Siano X, Y, Z spazi topologici, $\varphi \in C(X, Y)$ e $\psi \in C(Y, Z)$. Sono allora soddisfatte le seguenti proprietà:*

1. $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$;
2. $(id_X)_* = id_{\pi_1(X,x)}, \quad \forall x \in X$;
3. *se φ è un omeomorfismo con inversa $\psi\colon Y \to X$, allora l'applicazione $\varphi_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, \varphi(x))$ è un isomorfismo con inversa $\psi_*\colon \pi_1(Y, \varphi(x)) \to \pi_1(X, x)$, per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. Sia $[f] \in \pi_1(X, x)$. Allora

$$(\psi\circ\varphi)_*([f]) = [(\psi\circ\varphi)\circ f] = [\psi\circ(\varphi\circ f)] = \psi_*([\varphi\circ f]) = \psi_*(\varphi_*)([f]) = (\psi_*\circ\varphi_*)([f])$$

e

$$(id_X)_*([f]) = [id_X \circ f] = [f],$$

le quali mostrano le prime due proprietà. Per dimostrare il terzo punto, applichiamo la 1. e la 2. alle uguaglianze $\psi \circ \varphi = id_X$ e $\varphi \circ \psi = id_Y$ e otteniamo che, per ogni $x \in X$, $\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = (id_X)_* = id_{\pi_1(X,x)}$ e $\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = (id_Y)_* = id_{\pi_1(Y,\varphi(x))}$. Quindi $\psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x)) \to \pi_1(X, x)$ è l'inversa di $\varphi_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, \varphi(x))$ e questo conclude la dimostrazione del punto 3. e del teorema. □

Tali risultati consentono di dimostrare che il gruppo fondamentale è un invariante omotopico. Premettiamo al teorema che mostrerà tale proprietà del gruppo fondamentale il seguente lemma, il quale mostra il legame tra gli omomorfismi indotti da due applicazioni omotope:

Lemma 1.3. *Siano X e Y due spazi topologici e siano $\varphi, \psi \in C(X,Y)$. Se $\varphi \sim_F \psi$ allora, per ogni $x \in X$, il seguente diagramma è commutativo:*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\psi_*"'] & \pi_1(Y,\varphi(x)) \arrow[d, "u_f"] \\ & \pi_1(Y,\psi(x)) \end{tikzcd}$$

dove $u_f : \pi_1(Y,\varphi(x)) \to \pi_1(Y,\psi(x))$ è l'isomorfismo (cfr. (1.3)) associato all'arco $f : I \to Y$ di estremi $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ definito da $f(t) := F(x,t)$.

Dimostrazione. Considerato un laccio g in X di base x, vorremmo dimostrare che

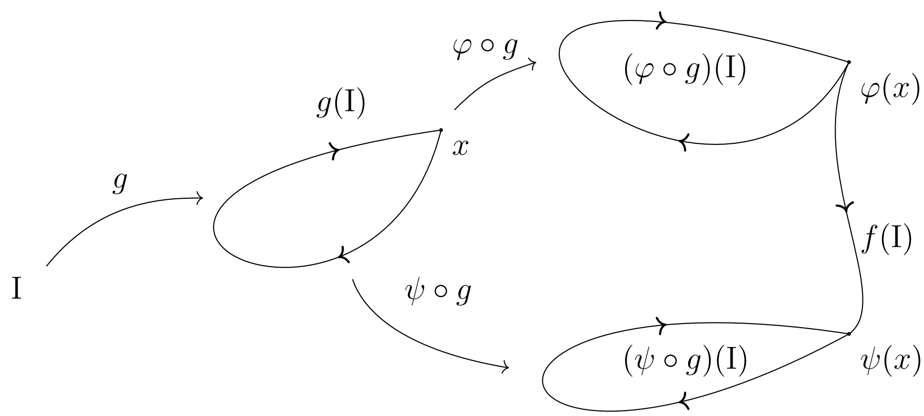
$$[\psi \circ g] = \psi_*([g]) = u_f(\varphi_*([g])) = [i(f) \cdot (\varphi \circ g) \cdot f]$$

o, equivalentemente,

$$((i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f \sim_{\{0,1\}} (\psi \circ g).$$

Osserviamo che $\psi \circ g : I \to Y$ è un arco chiuso di base $\psi(x)$. Sarà quindi sufficiente mostrare che

$$((i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f \sim_{\{0,1\}} \left(\epsilon_{\psi(x)} \cdot (\psi \circ g)\right) \cdot \epsilon_{\psi(x)}$$



Osserviamo che

$$((i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f)\,(t) = \begin{cases} f(1-4t) = F(x, 1-4t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (\varphi \circ g)(4t-1) = F(g(4t-1), 0) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t-1) = F(x, 2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

e

$$\left(\left(\epsilon_{\psi(x)} \cdot (\psi \circ g)\right) \cdot \epsilon_{\psi(x)}\right)(t) = \begin{cases} \psi(x) = F(x,1) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (\psi \circ g)(4t-1) = F(g(4t-1),1) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \psi(x) = F(x,1) & \text{se} \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Si verifica allora facilmente che l'applicazione

$$H(t,s) = \begin{cases} F\left(x,(1-4t)(1-s)+s\right) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F\left(g(4t-1),s\right) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F\left(x,(2t-1)(1-s)+s\right) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

definisce un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra $(i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f$ e $\left(\epsilon_{\psi(x)} \cdot (\psi \circ g)\right) \cdot \epsilon_{\psi(x)}$. □

Teorema 1.3. *(Invarianza omotopica del gruppo fondamentale) Siano X e Y due spazi topologici e $\varphi : X \to Y$ un'equivalenza omotopica. Allora $\varphi_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,\varphi(x))$ è un isomorfismo, per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. Sia $\psi : Y \to X$ tale che $\varphi \circ \psi \sim id_Y$ e $\psi \circ \varphi \sim id_X$. Sia $y \in Y$, allora per il Lemma 1.3 esiste un arco $f : I \to Y$ di estremi $\varphi(\psi(y))$ e y tale che

$$u_f(\varphi \circ \psi)_* = (id_Y)_* = id_{\pi_1(Y,y)}.$$

Siccome u_f è un isomorfismo segue che $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ è un isomorfismo e che quindi ψ_* è iniettiva e φ_* è suriettiva. In modo analogo si dimostra che $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ è un'isomorfismo e che quindi ψ_* è suriettiva e φ_* è iniettiva. □

Proponiamo di seguito alcuni esempi di calcolo del gruppo fondamentale di spazi topologici, rinviando il lettore agli appunti del corso di Topologia Algebrica per approfondimenti.

Esempio 1.2.1. *Il gruppo fondamentale della sfera S^n, $n \geq 2$.*

La sfera S^n, $n \geq 2$, è uno spazio topologico semplicemente connesso, ossia connesso per archi e tale che $\pi_1(S^n, x_0) = \{1\}$. Il fatto che il gruppo fondamentale della sfera sia banale, deriva da una particolare costruzione di un laccio $g\colon I \to S^n$ che non passi per il polo Nord e che sia omotopo relativamente a $\{0,1\}$ ad un laccio $f\colon I \to S^n$ basato in x_0. L'esistenza di un tale laccio g ed il fatto che $S^n \setminus \{N\}$ è semplicemente connesso, implica che $f \sim_{\{0,1\}} g \sim_{\{0,1\}} \sim_{\{0,1\}} \epsilon_{x_0}$, e quindi che $\pi_1(S^n, x_0) = \{1\}$.

Esempio 1.2.2. *Il gruppo fondamentale del prodotto di due spazi.*

Dati due spazi topologici X ed Y è possibile calcolare il gruppo fondamentale del loro prodotto $X \times Y$ secondo il risultato espresso dal seguente teorema:

Teorema 1.4. *Siano X ed Y due spazi topologici connessi per archi; allora il gruppo fondamentale del prodotto $X \times Y$ è isomorfo al prodotto diretto dei loro gruppi fondamentali.*

Dimostrazione. Siano $p : X \times Y \to X$ e $q : X \times Y \to Y$ le proiezioni canoniche, $x \in X$ e $y \in Y$. Definiamo

$$\Phi : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \to \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y), \;\; \Phi([f]) := (p_*([f]), q_*([f])).$$

Mostriamo che Φ è suriettiva. Sia $([f_1], [f_2]) \in \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$ e sia $f : I \to X \times Y$, $f(t) := (f_1(t), f_2(t))$, dove f_1 e f_2 sono due rappresentanti delle classi $[f_1]$ e $[f_2]$ rispettivamente. Segue che:

$$\Phi([f]) = (p_*([f]), q_*([f])) = ([p \circ f], [q \circ f]) = ([f_1], [f_2]).$$

Per dimostrare che Φ è iniettiva supponiamo che $\Phi([f]) = \Phi([g])$. Allora $[p \circ f] = [p \circ g]$ e $[q \circ f] = [q \circ g]$. Equivalentemente $(p \circ f) \sim_{\{0,1\},F_1} (p \circ g)$ e $(q \circ f) \sim_{\{0,1\},F_2} (q \circ g)$, dove $F_1 : I \times I \to X$ (risp. $F_2 : I \times I \to Y$) è un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra $p \circ f$ e $p \circ g$ (risp. $q \circ f$ e $q \circ g$). Segue allora che $f \sim_{\{0,1\},F} g$ dove $F : I \times I \to X \times Y$ è definita da $F(t, s) = (F_1(t, s), F_2(t, s))$.

Infine dimostriamo che Φ è un omomorfismo di gruppi. Infatti, per $[f], [g] \in \pi_1(X \times Y, x \times y)$ si ha:

$$\Phi([f] \cdot [g]) = \Phi([f \cdot g]) = (p_*([f \cdot g]), q_*([f \cdot g])) = (p_*([f]) \cdot p_*([g]), q_*([f]) \cdot q_*([g]))$$

$$= (p_*([f]), q_*([f])) \cdot (p_*([g]), q_*([g]))$$

dove "$\cdot$" nell'ultima riga rappresenta il prodotto del prodotto diretto in $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$. □

Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico può essere espresso, oltre che come prodotto diretto tra spazi topologici anche come prodotto libero di gruppi, argomento trattato nella prossima sezione.

1.3 Il prodotto libero di gruppi

Si consideri una famiglia $\{G_j\}_{j\in J}$ di gruppi nella quale sia definito il prodotto diretto a partire dal prodotto cartesiano $\prod_{j\in J} G_j$ con il prodotto componente per componente:

$$(g\cdot h)(j) := g(j)\cdot h(j), \quad g,h\in \prod_{j\in J} G_j.$$

Il prodotto diretto definito in questo modo, costituisce il prodotto categoriale nella categoria $\mathcal{G}$. In generale, data una famiglia di oggetti $\{X_j\}_{j\in J}$ appartenenti ad una certa categoria $\mathcal{C}$, si definisce prodotto categoriale degli oggetti $\{X_j\}_{j\in J}$ un oggetto P di $\mathcal{C}$, dotato di un insieme di morfismi $\pi_j\colon P\to X_j$, $j\in J$, che soddisfino la seguente *proprietà universale* : dati un qualunque oggetto Y della categoria $\mathcal{C}$ ed una famiglia di morfismi $\varphi_j\colon Y\to X_j$, esiste un unico morfismo $\varphi\colon Y\to P$ tale che $\pi_j\circ\varphi=\varphi_j$, cioè tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\pi_j"] \\ Y \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi_j"'] & X_j \end{tikzcd}$$

Nel caso della categoria $\mathcal{G}$, il prodotto categoriale è definito da $(\prod_{j\in J} G_j, \pi_j)$, dove la proiezione $\pi_k\colon \prod_{j\in J} G_j\to G_k$ è un omomorfismo di gruppi e G_k è un sottogruppo isomorfo a $\prod_{j\in J} G_j$. La proprietà universale del prodotto è soddisfatta mediante l'omomorfismo

$$\varphi\colon G\to \prod_{j\in J} G_j, \quad \varphi(g)(j)=\varphi_j(g),$$

per ogni $j\in J$, tale che $\pi_j\circ\varphi=\varphi_j$ e

$$\varphi(gh)(j)=\varphi_j(gh)=\varphi_j(g)\varphi_j(h)=\varphi(g)(j)\varphi(h)(j)=\varphi(g)\varphi(h))(j).$$

Ci interessa ora introdurre il concetto di *coprodotto categoriale*, che si ottiene semplicemente invertendo tutte le frecce nella definizione di prodotto. Diremo che un oggetto S di una data categoria $\mathcal{C}$ insieme ai morfismi $i_j\colon X_j\to S$, rappresentati dalle inclusioni, è un coprodotto categoriale della famiglia $\{X_j\}_{j\in J}$ di oggetti di $\mathcal{C}$, se è verificata la seguente proprietà universale: dati un qualunque oggetto Y della categoria $\mathcal{C}$ ed una famiglia di morfismi $\varphi_j\colon X_j\to Y$, esiste un unico morfismo $\varphi\colon S\to Y$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[dr, "\varphi"] & \\ X_j \arrow[u, "i_j"] \arrow[r, "\varphi_j"'] & Y \end{tikzcd}$$

e sia pertanto soddisfatta la *proprietà universale del coprodotto* per la quale

$$\varphi_j = \varphi \circ i_j. \tag{1.5}$$

Nella categoria dei gruppi $\mathcal{G}$, il coprodotto è dato dal cosiddetto *prodotto libero di gruppi*, denotato con $*_{j\in J}G_j$ e definito come un particolare insieme di classi di equivalenza ottenuto secondo la seguente procedura.
Chiameremo *parola* in $\{G_j\}_{j\in J}$ una stringa di lunghezza m,($m \geq 0$), di elementi dell'unione disgiunta $\bigcup_{j\in J}(G_j \times \{j\})$, ossia un m-upla $(g_1, \ldots, g_m)$, $g_i \in G_j$.
Sia ( ) la *parola vuota* e $\mathcal{W}$ l'insieme di tutte le parole nell'unione disgiunta, nel quale sia definito il seguente prodotto per giustapposizione:

$$(g_1, \ldots, g_m)(h_1, \ldots, h_n) = (g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n).$$

Introduciamo sull'insieme $\mathcal{W}$ la relazione d'equivalenza tra due parole $W, W' \in \mathcal{W}$ definita nel seguente modo: $W \sim W'$ se W' si ottiene a partire da W mediante un numero finito di *riduzioni elementari* o delle loro inverse, dove una riduzione elementare è un'operazione dei due tipi che seguono:

1. $(g_1, \ldots, g_i, g_{i+1}, \ldots, g_m) \mapsto (g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_m)$, se $g_i, g_{i+1} \in G_k$;

2. $(g_1, \ldots, g_{i-1}, 1_j, g_{i+1}, \ldots, g_m) \mapsto (g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_m)$, dove 1_j è l'elemento neutro in G_j.

L'insieme ottenuto quozientando $\mathcal{W}$ rispetto alla relazione d'equivalenza così definita è il prodotto libero $*_{j\in J}G_j$, il quale è dotato della struttura di gruppo dall'operazione di giustapposizione di parole e costituisce il coprodotto categoriale nella categoria $\mathcal{G}$, come mostrano i due seguenti risultati (cfr. corso di Topologia Algebrica).

Teorema 1.5. *Data una famiglia di gruppi $\{G_j\}_{j\in J}$ il loro prodotto libero $*_{j\in J}G_j$ è un gruppo rispetto al prodotto indotto dalla giustapposizione di parole. Equivalentemente, se $[V]$ e $[W]$ sono due elementi in $*_{j\in J}G_j$, allora $[V][W] = [VW]$ definisce la struttura di gruppo in $*_{j\in J}G_j$.*

Dimostrazione. Cominceremo verificando che il prodotto in $*_{j\in J}G_j$ rispetta la relazione d'equivalenza, cioè se $V \sim V'$ e $W \sim W'$ allora $VW \sim V'W'$. Osserviamo che se la parola V' si ottiene da V con una sola riduzione elementare allora $V'W$ si ottiene da VW con una sola riduzione elementare (che agisce su V e lascia invariata W). Quindi per induzione sul numero di operazioni elementari si ottiene che se $V \sim V'$ allora

$$VW \sim V'W.$$

Analogamente se la parola W' si ottiene da W con una singola riduzione elementare allora $V'W'$ si ottiene da $V'W$ con una sola riduzione elementare. Quindi, come prima, per induzione sul numero di operazioni elementari si ottiene che se $W \sim W'$, allora
$$V'W \sim V'W'.$$
Segue che se $V \sim V'$, $W \sim W'$, allora
$$VW \sim V'W \sim V'W'$$
che è quello che volevamo dimostrare.

L'associatività del prodotto segue dal fatto che la giustapposizione è associativa. La classe d'equivalenza delle parola vuota ( ) è chiaramente l'elemento neutro (sinistro e destro per quest'operazione). Infine, il fatto che
$$(g_1, \dots, g_m)(g_m^{-1}, \dots, g_1^{-1}) = (\ ) = (g_m^{-1}, \dots, g_1^{-1})(g_1, \dots, g_m)$$
mostra che la classe d'equivalenza della parola $(g_m^{-1}, \dots, g_1^{-1})$ è l'inversa della classe d'equivalenza della parola $(g_1, \dots, g_m)$. □

Per ogni $k \in J$, definiamo l'inclusione canonica
$$i_k : G_k \to *_{j\in J} G_j,\ \ g \mapsto [(g)],$$
che associa a $g \in G_k$ la classe d'equivalenza della parola (g) che lo rappresenta. Si dimostra facilmente che si tratta di un omomorfismo iniettivo di gruppi ed in particolare vale il seguente risultato:

Teorema 1.6. *Sia $\{G_j\}_{j\in J}$ una famiglia di gruppi. Allora il prodotto libero $*_{j\in J} G_j$ insieme alle inclusioni canoniche $i_k : G_k \to *_{j\in J} G_j$ è il coprodotto nella categoria $\mathcal{G}$.*

Dimostrazione. Occorre dimostrare che è soddisfatta la proprietà universale del coprodotto espressa in (1.5) e cioè che per ogni gruppo G e per ogni famiglia di omomorfismi $\varphi_k : G_k \to G$ esiste un unico omomorfismo $\varphi : *_{j\in J} G_j \to G$ tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} *_{j\in J} G_j \arrow[dr, "\varphi"] & \\ G_k \arrow[u, "i_k"] \arrow[r, "\varphi_k"'] & G \end{tikzcd}$$

Se una tale φ esiste è unica. Infatti dalla commutatività del diagramma si ha $\varphi \circ i_k = \varphi_k$. Allora
$$\varphi(g) = \varphi_k(g),\ \forall g \in G_k, \tag{1.6}$$

dove stiamo identificando G_k con la sua immagine tramite i_k. Il fatto che φ sia un omomorfismo ci dice che

$$\varphi(g_1 \cdots g_m) = \varphi(g_1) \cdots \varphi(g_m). \tag{1.7}$$

Le condizioni (1.6) e (1.7) implicano che φ è univocamente determinata.

Dimostriamo ora l'esistenza di φ. Data $g_1 \cdots g_m \in *_{j\in J} G_j$ definiamo $\varphi : *_{j\in J} G_j \to G$ usando le (1.6) e (1.7). Bisogna allora verificare che φ è ben definita sulle classi d'equivalenza ossia che il valore di φ non dipende dalle riduzioni elementari (il fatto che sia un omomorfismo che rende commutativo il diagramma segue da come φ è definita). Rispetto alla prima riduzione elementare dobbiamo verificare che se g_i e g_{i+1} appartengono allo stesso gruppo G_k allora $\varphi(g_i g_{i+1}) = \varphi(g_i)\varphi(g_{i+1})$. Infatti

$$\varphi(g_i g_{i+1}) = \varphi_k(g_i g_{i+1}) = \varphi_k(g_i)\varphi_k(g_{i+1}) = \varphi(g_i)\varphi(g_{i+1}).$$

Inoltre se 1_k denota l'elemento neutro in G_k e 1_G l'elemento neutro di G allora

$$\varphi(1_k) = \varphi_k(1_k) = 1_G$$

la quale mostra che φ non dipende da riduzioni elementari del secondo tipo e conclude la dimostrazione del teorema.

□

Capitolo 2

Classificazione dei rivestimenti

2.1 Rivestimenti

Siano $\tilde{X}$ e X due spazi topologici. Diremo che un'applicazione continua $p : \tilde{X} \to X$ è un *rivestimento* se valgono i seguenti fatti:

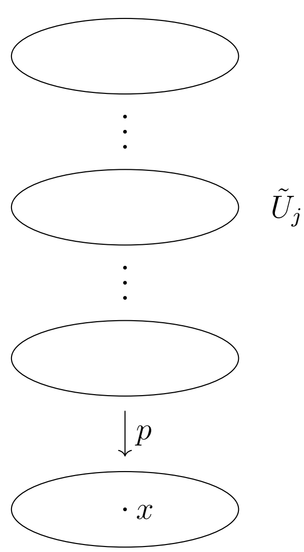
1. p è suriettiva;

2. per ogni $x \in X$ esiste un aperto U di X contenente x e una famiglia $\{\tilde{U}_j\}_{j \in J}$ di aperti di $\tilde{X}$ tali che:

   (a) $p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} \tilde{U}_j$;

   (b) $\tilde{U}_j \cap \tilde{U}_k = \emptyset$ per ogni $j, k \in J$ con $j \neq k$.

   (c) $p_{|\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \to U$ è un omeomorfismo per ogni $j \in J$.



L' applicazione $p : \tilde{X} \to X$ è detta anche proiezione, X spazio base e $\tilde{X}$ spazio totale del rivestimento. Dato $x \in X$ la sua controimmagine $p^{-1}(x)$ tramite p è detta fibra del punto x. Se le fibre $p^{-1}(x)$ hanno tutte la stessa cardinalità al variare di $x \in X$ la cardinalità della fibra viene detta grado del rivestimento p.

Data un'applicaizone continua $p : \tilde{X} \to X$ diremo che un aperto $U \subseteq X$ è *ben ricoperto* da p ovvero che U è un *aperto banalizzante* per p se la controimmagine $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta di sottoinsiemi aperti di $\tilde{X}$, ognuno dei quali è omeomorfo a U tramite p. Segue da tale definizione che un'applicazione continua e suriettiva $p : \tilde{X} \to X$ è un rivestimento se e solo se se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno aperto $U \subseteq X$ di x che sia ben ricoperto da p.

Osservazione 2.1.1. Se un aperto U è ben ricoperto da un rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ allora anche un aperto V contenuto in U è ben ricoperto da p.

Riportiamo di seguito alcuni esempi di rivestimenti, studiati nel corso di Topologia Algebrica.

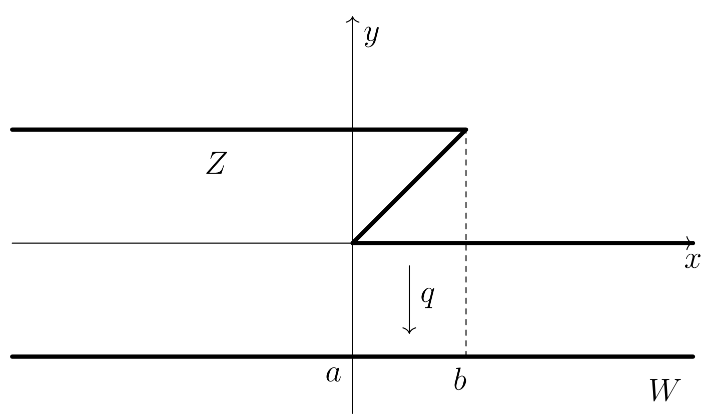
Esempio 2.1.1. Ogni omeomorfismo tra due spazi topologici è un rivestimento di grado 1.

Esempio 2.1.2. Sia Y uno spazio topologico discreto (la topologia su Y è quella discreta). Allora per ogni spazio topologico X la proiezione sul primo fattore $p : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x$ è un rivestimento. In questo caso il grado di p è uguale alla cardinalità di Y.

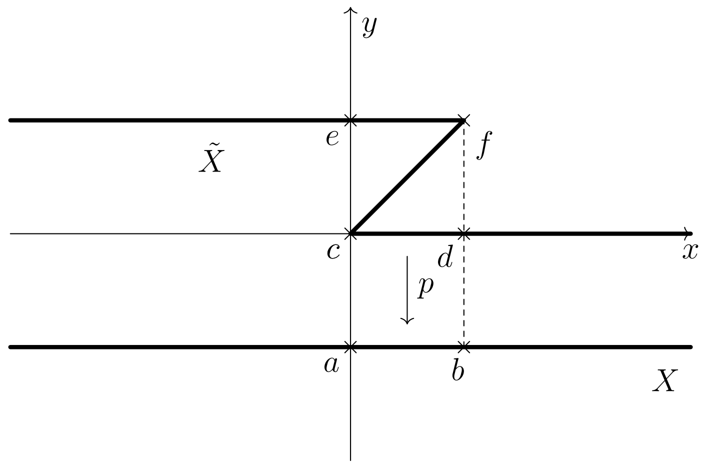
Esempio 2.1.3. Siano Z e W i sottoinsiemi dei punti (x, y) di $\mathbb{R}^2$ definiti da:

$$Z = \{(x, 1), x \le 1\} \cup \{x = y, 0 \le x \le 1\} \cup \{(x, 0), x \ge 0\}, \ W = \{(x, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

e sia $q : Z \to W$ definita $q(x, y) \mapsto (x, -1)$.



Allora q non è un rivestimento. Infatti si verifica facilmente che non esiste un intorno aperto ben ricoperto dei punti $a = (0, -1)$ e $b = (1, -1)$. Consideriamo la restrizione $p : \tilde{X} = Z \setminus \{c, d, e, f\} \to X = W \setminus \{a, b\}$ di q a $Z \setminus \{c, d, e, f\}$, dove $c = (0, 0), d = (1, 0), e = (0, 1), f = (1, 1)$.



Allora p è un rivestimento con spazio totale $\tilde{X}$ e base X.

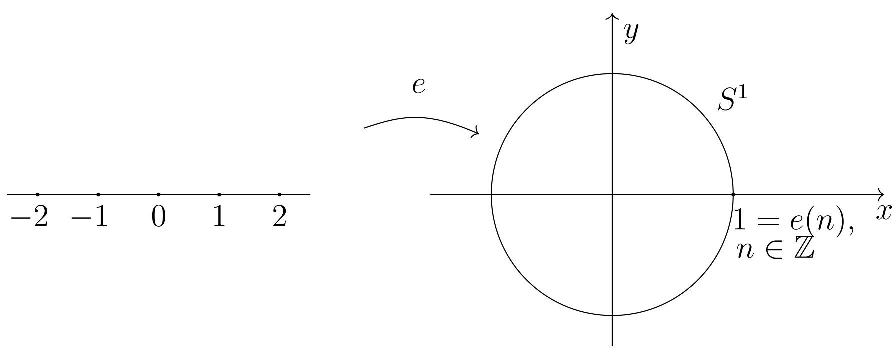
Esempio 2.1.4. Consideriamo l'applicazione continua definita nel seguente modo:

$$e : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t),$$

dove i denota l'unità immaginaria ed il cerchio unitario è definito come

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\}.$$

Da un punto di vista intuitivo, possiamo affermare che l'applicazione e "avvolge" la retta reale $\mathbb{R}$ sul cerchio S^1 e durante questo processo porta l'intervallo $[n, n+1]$ su S^1.



Dimostreremo che e è un rivestimento. Il fatto che e sia suriettiva è ovvio. Sia $x \in S^1$ e supponiamo che $x \neq 1$. Consideriamo l'aperto $U = S^1 \setminus \{1\}$ di S^1 contenente il punto x (nel caso $x = 1$ si prenderà, per esempio, l'aperto $V = S^1 \setminus \{-1\}$ e si procederà in modo analogo). La fibra del punto 1 è costituita da tutti gli interi, $e^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, inoltre

$$e^{-1}(U) = \cup_{n \in \mathbb{Z}}(n, n + 1).$$

Pertanto $e^{-1}(U)$ è l'unione disgiunta degli aperti $(n, n+1)$ di $\mathbb{R}$ al variare di $n \in \mathbb{Z}$. L'applicazione

$$e_n := e_{|(n,n+1)} : (n, n+1) \to S^1 \setminus \{1\} = U$$

è continua e bigettiva. Inoltre e_n è un'applicazione chiusa. Infatti dato $C \subseteq (n, n+1)$ chiuso in $(n, n+1)$ allora la sua chiusura $\overline{C}$ è un chiuso in $[n, n+1]$ e quindi compatto. Quindi la sua immagine $e(\overline{C})$ è un compatto e quindi chiuso in S^1. Dal momento che $e_n(C) = e(\overline{C}) \cap U$ segue che $e_n(C)$ è chiuso in U. Da ciò segue che e_n è un omeomorfismo, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e quindi e è un rivestimento. Il rivestimento e ha grado infinito numerabile.

La teoria dei rivestimenti possiede svariate applicazioni; ne derivano infatti importanti risultati che consentono di calcolare il gruppo fondamentale di diversi spazi topologici, come mostrano gli esempi che seguono (cfr. corso di Topologia Algebrica per approfondimenti).

Esempio 2.1.5. *Il gruppo fondamentale del cerchio* S^1.

Fissato come punto base $(1, 0)$, che in notazione complessa è il punto 1, si dimostra che $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. L'idea della dimostrazione consiste nel definire un isomorfismo esplicito $\Phi \colon \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$, che associ ad ogni $[f] \in \pi_1(S^1, 1)$ il numero intero che rappresenta il numero di giri compiuti dal laccio $f \colon I \to S^1$ basato in 1 attorno ad S^1. In particolare, per poter definire un tale isomorfismo è necessario applicare i risultati sui sollevamenti degli archi considerando il rivestimento $e \colon \mathbb{R} \to S^1$ definito nell'esempio 2.1.4.

Esempio 2.1.6. *Il gruppo fondamentale del toro* $\mathbb{T}^2$.

In virtù del precedente esempio e ricordando il Teorema 1.4 possiamo ora affermare che il gruppo fondamentale del toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ è dato dal prodotto diretto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2.2 Rivestimenti e gruppo fondamentale

Il legame tra la teoria dei rivestimenti ed il gruppo fondamentale, risiede inoltre nella possibilità di classificare i rivestimenti di spazi topologici che soddisfano particolari proprietà utilizzando il gruppo fondamentale ed i suoi sottogruppi. Supponiamo di considerare un rivestimento $p \colon \tilde{X} \to X$ tra gli spazi topologici

$\tilde{X}$ ed X ed i gruppi fondamentali $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ e $\pi_1(X, x_0)$. Possiamo definire la seguente applicazione, detta *lifting correspondence*

$$L\colon \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0), \qquad [f] \mapsto \tilde{f}(1), \tag{2.1}$$

dove $\tilde{f}\colon I \to \tilde{X}$ è l'unico sollevamento di f che inizia in $\tilde{x}_0$.

Teorema 2.1. *Se $\tilde{X}$ è uno spazio topologico connesso per archi, allora L è suriettiva. Se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso, allora l'applicazione L è una bigezione.*

Enunciamo ora il seguente risultato, il quale mette in evidenza alcune proprietà dell'omomorfismo indotto da un rivestimento e dalla lifting correspondence.

Teorema 2.2. *Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento. Valgono allora i seguenti fatti:*

1. *l'omomorfismo $p_*\colon \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ indotto da p è iniettivo;*

2. *la lifting correspondence induce un'applicazione iniettiva dall'insieme delle classi laterali destre di $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ alla fibra $p^{-1}(x_0)$ definita come segue:*

$$\Phi\colon \frac{\pi_1(X, x_0)}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)} \to p^{-1}(x_0), \tag{2.2}$$

che se $\tilde{X}$ è connesso per archi è bigettiva;

3. *se f è un laccio di X basato in x_0, allora $[f] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ se e solo se f si solleva a un laccio di $\tilde{X}$ basato in $\tilde{x}_0$.*

Dimostrazione. 1. Sia $\tilde{f}$ un laccio in $\tilde{X}$ basato in $\tilde{x}_0$; supponiamo che $p_*([\tilde{f}]) = [\epsilon_{x_0}]$, ossia che esista un'omotopia F relativa a $\{0, 1\}$ tra $p \circ \tilde{f}$ e l'arco costante basato in x_0. Se $\tilde{F}$ è un sollevamento di F in $\tilde{X}$ tale che $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{x}_0$, allora $\tilde{F}$ è un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra $\tilde{f}$ e $\epsilon_{\tilde{x}_0}$.

2. Dimostrare l'iniettività dell'applicazione Φ indotta da L, equivale a dimostrare che:

$$L([f]) = L([g]) \Leftrightarrow [f] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[g], \forall [f], [g] \in \pi_1(X, x_0). \tag{2.3}$$

Supponiamo che esistano $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ tali che $[f] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[g]$; ciò significa che esiste un laccio $\tilde{h}$ in $\tilde{X}$ basato in $\tilde{x}_0$ tale che se $h = p \circ \tilde{h}$ allora $[f] = [p \circ \tilde{h}][g] = [h] \cdot [g] = [h \cdot g]$. Il laccio $h \cdot g$ ammette un sollevamento $\tilde{h} \cdot \tilde{g}$ che inizia in $\tilde{x}_0$; ma, poichè $[f] = [h \cdot g]$, anche $\tilde{f}$ inizia in $\tilde{x}_0$, pertanto $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ terminano nello stesso punto e quindi le loro rispettive immagini tramite L coincidono. Per dimostrare il viceversa, supponiamo che $L([f]) = L([g])$, cioè che i due sollevamenti $\tilde{f}, \tilde{g}$ terminino nello stesso punto $\tilde{x}_0$ di $\tilde{X}$. Allora $\tilde{h} = \tilde{f} \cdot i(\tilde{g})$ è un laccio basato in $\tilde{x}_0$ e quindi $[\tilde{h} \cdot \tilde{g}] = [\tilde{f}]$. Ciò significa che $\tilde{h} \cdot \tilde{g}$ è omotopo relativamente a $\{0,1\}$ ad $\tilde{f}$ tramite una certa omotopia $\tilde{F}$ tale che $p \circ \tilde{F}$ sia un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra $h \cdot g$ ed f in X, con $h = p \circ \tilde{h}$. Segue che $[f] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[g]$. Infine, poichè se $\tilde{X}$ è connesso per archi la lifting correspondence è suriettiva, lo è anche la Φ.

3. Applicando la (2.1) al caso in cui g è il laccio costante basato in x_0, si ottiene che $L([f]) = \tilde{x}_0 \Leftrightarrow [f] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Ma $L([f]) = \tilde{x}_0$ se e solo se il sollevamento di f che inizia in $\tilde{x}_0$ termina in $\tilde{x}_0$.

□

Corollario 2.2.1. *Sia $p \colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento, $\tilde{X}$ connesso per archi. Allora p è un omeomorfismo se e solo se $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi_1(X, x_0)$.*

Corollario 2.2.2. *Sia $p \colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento, $\tilde{X}$ connesso per archi. Allora il grado del rivestimento è uguale a n se e solo se l'indice di $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$ è n, per ogni $x_0 \in X$ e $\tilde{x_0} \in \tilde{X}, p(\tilde{x}_0) = x_0$.*

Considerati i due gruppi $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ e $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, il loro legame per scelte diverse dei punti $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1$ tali che $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ è espresso dalla seguente proposizione:

Proposizione 2.2.1. *Sia $p \colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento, $\tilde{X}$ connesso per archi e $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1$ due punti di $\tilde{X}$ appartenenti alla fibra di $x_0 \in X$. Allora:*

1. *se $\tilde{f}$ è un arco che congiunge $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_1$ e $f = p \circ \tilde{f}$ è il corrispondente laccio in X basato in x_0, allora*
$$[f]^{-1} p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f] = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1), \tag{2.4}$$
ossia $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ e $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ sono sottogruppi coniugati di $\pi_1(X, x_0)$;

2. *viceversa, se H è un sottogruppo di $\pi_1(X, x_0)$ coniugato a $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ allora esiste $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}, p(\tilde{x}_1) = x_0$ tale che*
$$H = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1}).$$

Dimostrazione. 1. Sia $u_{\tilde{f}} \colon \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1), \quad [\tilde{g}] \mapsto [i(\tilde{f}) \cdot \tilde{g} \cdot f]$ l'isomorfismo definito come in (1.2.1). Si ha che $u_{\tilde{f}}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Applicando p_*, si ottiene che $p_* u_{\tilde{f}}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ ed inoltre
$$p_* u_{\tilde{f}}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = u_f p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = [i(f)] p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f] = \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1).$$

2. Se H è coniugato a $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, significa che, per un certo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, $H = [f]^{-1} p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f]$. Sia $\tilde{f}$ un sollevamento di f che inizia in $\tilde{x_0}$ e sia $\tilde{x}_1 = \tilde{f}(1)$. Allora, per quanto mostrato in 1., $H = p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

□

Osservazione 2.2.1. Le classi di coniugio di sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$ sono invarianti algebrici del rivestimento $p\colon \tilde{X} \to X$.

2.3 Teoremi di sollevamento per rivestimenti

Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Considerato uno spazio topologico Y, un punto $y_0 \in Y$ ed una funzione continua $f\colon Y \to X$ tale che $f(y_0) = x_0$, ci interessa individuare quali sono le condizioni che, in generale, garantiscono l'esistenza di un unico sollevamento $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ di f rispetto a p tale che $f = p \circ \tilde{f}$ e $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$. Riportiamo di seguito alcuni risultati che rispondono a tale esigenza nel caso in cui lo spazio Y soddisfi particolari proprietà (cfr. corso di Topologia Algebrica per le dimostrazioni).

Proposizione 2.3.1. *(Unicità del sollevamento) Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento ed $f\colon Y \to X$ una funzione continua da uno spazio topologico connesso Y in X. Siano inoltre $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ ed $\tilde{f}'\colon Y \to \tilde{X}$ due sollevamenti di f. Se esiste un punto $y_0 \in Y$ tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}'(y_0)$, si ha $\tilde{f} = \tilde{f}'$*

Proposizione 2.3.2. *(Sollevamento degli archi) Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ un punto sulla fibra si x_0. Allora ogni arco $f\colon I \to X$ tale che $f(0) = x_0$, ammette un unico sollevamento $\tilde{f}\colon I \to \tilde{X}$ tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$.*

Proposizione 2.3.3. *(Sollevamento delle omotopie) Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tale che $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Sia $F\colon I \times I \to X$ un'applicazione continua tale che $F(0,0) = x_0$. Allora F ammette un unico sollevamento $\tilde{F}\colon I \times I \to \tilde{X}$ tale che $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$. Se inoltre F è un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra i due archi $t \to F(t,0)$ e $t \to F(t,1)$ allora $\tilde{F}$ è un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra i due archi $t \to \tilde{F}(t,0)$ e $t \to \tilde{F}(t,1)$.*

Dopo aver enunciato tali risultati, torniamo ad analizzare il problema iniziale: quali sono, in generale, le condizioni che garantiscono l'esistenza del sollevamento $\tilde{f}$? Per capirlo, osserviamo che se esiste un sollevamento $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ di $f : Y \to X$ allora

$$f_* \pi(Y, y_0) = p_* \tilde{f}_* \pi_1(Y, y_0) \subseteq p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

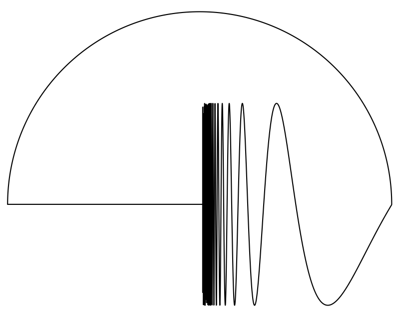
Quindi la condizione espressa dall'inclusione

$$f_*\pi_1(Y, y_0) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

è necessaria per l'esistenza di un sollevamento $\tilde{f}$ di f rispetto a p tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$. Tale condizione, senza l'aggiunta di ulteriori ipotesi sullo spazio topologico Y, non è però sufficiente; esistono infatti degli spazi topologici per i quali l'inclusione è valida, ma che non ammettono l'esistenza di un tale sollevamento, come mostra il seguente esempio:

Esempio 2.3.1. *Il cerchio polacco*

Il cerchio polacco è uno spazio Y ottenuto dall'unione $A \cup B \cup C$ degli insiemi $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 0, y = 0\}$ e $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x \leq 1, y = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{x}\}$.



Lo spazio Y così definito è semplicemente connesso, in quanto è contraibile. Consideriamo il rivestimento

$$exp \colon \mathbb{R} \to S^1, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t),$$

$y_0 = (1, 0) \in Y$, $\tilde{x}_0 = 0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = (1, 0) \in S^1$ e la funzione continua $f \colon Y \to S^1$ definita da:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{se } (x, y) \in A \\ (x, -\sqrt{1 - x^2}) & \text{se } (x, y) \in B \cup C. \end{cases} \tag{2.5}$$

Consideriamo inoltre una funzione continua $p \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tale che

$$\cos p(x) = x, \quad \sin p(x) \geq 0, \quad p(-1) = \pi, \quad p(1) = 0,$$

ed una funzione continua $q \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tale che

$$\cos q(x) = x, \quad \sin q(x) \leq 0, \quad q(-1) = -\pi, \quad q(1) = 0.$$

Se esistesse un sollevamento $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ si avrebbe, per ogni $(x, y) \in A$:

$$\exp \tilde{f}(x, y) = f(x, y) = (x, y) = (x, \sqrt{1 - x^2}) = (\cos p(x), \sin p(x)) = \exp p(x)$$

e quindi

$$\tilde{f}(x, y) = p(x) + 2\pi n(x, y),$$

dove n è una funzione a valori interi definita in A che risulta essere continua, in quanto differenza di funzioni continue, e pertanto costante; allora:

$$\tilde{f}(x, y) = p(x) + 2\pi n, \qquad \forall (x, y) \in A. \tag{2.6}$$

Ragionando in maniera analoga per ogni $(x, y) \in B \cup C$, otteniamo:

$$\exp \tilde{f}(x, y) = f(x, y) = (x, y) = (x, -\sqrt{1 - x^2}) = (\cos q(x), \sin q(x)) = \exp q(x)$$

da cui segue

$$\tilde{f}(x, y) = q(x) + 2\pi m, \qquad \forall (x, y) \in B \cup C \tag{2.7}$$

per una certa costante intera m. Valutando le equazioni (2.6) ed (2.7) nei punti $A \cap (B \cup C) = \{(-1, 0), (1, 0)\}$ otteniamo:

$$\tilde{f}(-1, 0) = p(-1) + 2\pi n = q(-1) + 2\pi m$$

$$\tilde{f}(1, 0) = p(1) + 2\pi n = q(1) + 2\pi m.$$

Tali uguaglianze conducono ad una contraddizione, in quanto implicano rispettivamente quanto segue:

$$2\pi = \pi - (-\pi) = p(-1) - q(-1) = 2\pi(n - m) \Rightarrow n = m + 1$$

$$0 = 0 - 0 = p(1) - q(1) = 2\pi(n - m) \Rightarrow n = m,$$

provando che il sollevamento $\tilde{f}$ non può esistere.
Il motivo topologico per il quale il sollevamento di f non esiste è che il cerchio polacco non è localmente connesso per archi nell'origine, condizione che consente di enunciare il seguente teorema:

Teorema 2.3. *Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Sia Y uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi, $y_0 \in Y$ e $f\colon Y \to X$ una funzione continua tale che $f(y_0) = x_0$. Allora esiste un unico sollevamento $\tilde{f}$ di f rispetto a p tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$, se e solo se $f_*\pi_1(Y, y_0) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.*

Dimostrazione. La condizione (2.3) è necessaria, come abbiamo già mostrato in precedenza, per l'esistenza del sollevamento. Occorre ora mostrare che tale condizione è anche sufficiente, sfruttando l'ipotesi che Y sia localmente connesso per archi. Vogliamo costruire un sollevamento $\tilde{f}$ tale che $\tilde{f}(\tilde{y}_0) = \tilde{x}_0$. Grazie all'ipotesi di connessione per archi, possiamo scegliere $y \in Y$ e considerare l'arco $\varphi\colon I \to Y$ tale che $\varphi(0) = y_0$ e $\varphi(1) = y$. Per il teorema 2.3.2, essendo $f \circ \varphi$ un arco che inizia in x_0, esiste un unico sollevamento $\widetilde{f \circ \varphi}$ che inizia in $\tilde{x}_0$. Definiamo l'applicazione $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ nel modo seguente:

$$\tilde{f}(y) := \widetilde{f \circ \varphi}(1), \tag{2.8}$$

ossia come il punto finale dell'arco $\widetilde{f \circ \varphi}$. Occorre dimostrare due fatti:

1. $\tilde{f}$ è ben definita;

2. $\tilde{f}$ è un'applicazione continua.

Cominciamo col provare che $\tilde{f}$ è ben definita, cioè che non dipende dall'arco φ scelto. Sia $\psi\colon I \to Y$ un altro arco tale che $\psi(0) = y_0$ e $\psi(1) = y$. Osserviamo allora che $\varphi \cdot i(\psi)$ rappresenta un laccio basato in y_0 e quindi $[\varphi \cdot i(\psi)] \in \pi_1(Y, y_0)$. Grazie all'ipotesi (2.3), esiste un laccio chiuso α in $\tilde{X}$ basato in $\tilde{x}_0$ tale che

$$f_*[\varphi \cdot i(\psi)] = [f \circ (\varphi \cdot i(\psi))] = [(f \circ \varphi) \cdot (f \circ i(\psi))] = p_*[\alpha] = [p \circ \alpha].$$

Segue che:

$$f \circ \varphi \sim_{\{0,1\}} (f \circ \varphi) \cdot \epsilon_{f(y)} \sim_{\{0,1\}} (f \circ \varphi) \cdot (f \circ i(\psi)) \cdot (f \circ \psi) \sim_{\{0,1\}} (p \circ \alpha) \cdot (f \circ \psi).$$

In virtù del teorema 2.3.3, i sollevamenti degli archi $f \circ \varphi$ e $(p \circ \alpha) \cdot (f \circ \psi)$ che iniziano in $\tilde{x}_0$ finiscono nello stesso punto. Osserviamo inoltre che il sollevamento di $f \circ \varphi$ è $\widetilde{f \circ \varphi}$, mentre quello di $(p \circ \alpha) \cdot (f \circ \psi)$ è $\alpha \cdot \widetilde{f \circ \psi}$, considerato il sollevamento di $f \circ \psi$ che inizia in $\alpha(1) = \tilde{x}_0$ dato da $\widetilde{f \circ \psi}$. Si ottiene allora:

$$\widetilde{f \circ \varphi}(1) = \widetilde{f \circ \psi}(1)$$

il che dimostra che la definizione di $\tilde{f}$ non dipende dalla scelta dell'arco.
Per dimostrare la continuità di $\tilde{f}$, consideriamo $y \in Y$ e $\tilde{U}$ un aperto arbitrario di $\tilde{X}$ contenente $\tilde{f}(y)$. Vogliamo trovare un aperto V di Y tale che $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}$. Osserviamo anzitutto che $p(\tilde{U})$ è un aperto di X, in quanto p è un'applicazione aperta. Esiste quindi $U \subseteq p(\tilde{U})$ ben ricoperto da p, cioè $p^{-1}(U) = \bigcup_j \tilde{U}_j$, dove ciascuno degli aperti $\tilde{U}_j$ è omeomorfo ad U. Segue che $\tilde{U}_k$ è un aperto contenente $\tilde{f}(y)$ tale che $p_{|\tilde{U}_k}\colon \tilde{U}_k \to U$ è un omeomorfismo e $f^{-1}(p(\tilde{U} \cap \tilde{U}_k))$ è un aperto di

Y che contiene y. Essendo Y localmente connesso per archi, esiste un aperto V connesso per archi e contenente y tale che

$$V \subseteq f^{-1}(p(\tilde{U} \cap \tilde{U}_k)).$$

Ci interessa dimostrare che

$$\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U} \cap \tilde{U}_k \subseteq \tilde{U}$$

che mostrerà la continuità di $\tilde{f}$. Scegliamo $y' \in V$. Sia $\psi\colon I \to Y$ un arco che congiunge y_0 e y e $\varphi\colon I \to V$ un arco tra y ed y'. Ora $\tilde{f}(y')$ è dato dal sollevamento di $f \circ (\psi \cdot \varphi) = (f \circ \psi) \cdot (f \circ \varphi)$ che comincia in $\tilde{x}_0$. Questo sollevamento è dato da $\widetilde{f \circ \psi} \cdot \beta$, dove $\widetilde{f \circ \psi}$ è il sollevamento di $f \circ \psi$ che inizia in $\tilde{x}_0$ e β quello di $f \circ \varphi$ che inizia nel punto $\widetilde{f \circ \psi}(0) = \tilde{f}(y)$. Per definizione si ha $\tilde{f}(y') = \beta(1)$. Rimane ora da dmostrare che $\beta(1) \in \tilde{U} \cap \tilde{U}_k$, mostrando che $\beta(I) \subset \tilde{U} \cap \tilde{U}_k$. Si ha:

$$\beta(I) \subset p^{-1}(f(\varphi(I))) \subset p^{-1}(f(V)) \subseteq p^{-1}(p(\tilde{U} \cap \tilde{U}_k)) \subseteq p^{-1}(U) = \bigcup_j \tilde{U}_j.$$

Poichè $\beta(0) \in \tilde{U}_k$, segue che $\beta(I) \subset \tilde{U}_k$ e inoltre

$$p(\beta(I)) = f(\varphi(I)) \subset f(V) \subseteq p(\tilde{U} \cap \tilde{U}_k),$$

da cui segue che $\beta(I) \subset \tilde{U} \cap \tilde{U}_k$, in quanto la restrizione $p_{|\tilde{U}_k}$ è iniettiva e $\beta(I) \subset \tilde{U}_k$. □

Corollario 2.3.1. *Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ e sia inoltre Y semplicemente connesso e connesso per archi, $y_0 \in Y$ ed $f\colon Y \to X$ un'applicazione continua tale che $f(y_0) = x_0$. Allora esiste un unico sollevamento $\tilde{f}$ di f rispetto a p tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.*

2.4 Omomorfismi ed Isomorfismi tra rivestimenti

Siano $p_1\colon \tilde{X}_1 \to X$ e $p_2\colon \tilde{X}_2 \to X$ due rivestimenti dello stesso spazio X, dove $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ e X sono spazi connessi e localmente connessi per archi. Un *omomorfismo* tra i rivestimenti p_1 e p_2 è un'applicazione continua $\varphi\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ tale che $p_1 = p_2 \circ \varphi$. Un omomorfismo $\varphi\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ tra due rivestimenti $p_1\colon \tilde{X}_1 \to X$ e $p_2\colon \tilde{X}_2 \to X$ è un *isomorfismo* ovvero un'*equivalenza* se esiste un omomorfismo $\psi\colon \tilde{X}_2 \to \tilde{X}_1$ tale che $\psi \circ \varphi = id_{\tilde{X}_1}$ e $\varphi \circ \psi = id_{\tilde{X}_2}$; segue che un omomorfismo tra rivestimenti è un isomorfismo se e solo se è un omeomorfismo. Due rivestimenti saranno detti isomorfi ovvero equivalenti se esiste un isomorfismo che li lega.

Teorema 2.4. *Siano* $p_1\colon \tilde{X}_1 \to X$ *e* $p_2\colon \tilde{X}_2 \to X$ *due rivestimenti e* $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ *e* $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ *tali che* $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$. *Esiste un unico isomorfismo* $\varphi\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ *tale che* $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ *se e solo se* $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$.

Dimostrazione. Sia $\varphi\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ un isomorfismo; allora, per il corollario 2.2.1, si ha

$$\varphi_*\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = \pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$$

e, poichè $p_1 = p_2 \circ \varphi$, si ha

$$p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\varphi_*\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2).$$

Per dimostrare il viceversa, supponiamo che $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ e applichiamo il teorema sui sollevamenti al rivestimento p_2; allora deduciamo che esiste un'unica applicazione continua $\varphi\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ tale che $p_1 = p_2 \circ \varphi$ e $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Applicando lo stesso ragionamento al caso in cui i ruoli di $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ si scambino, si ottiene un'applicazione continua $\psi\colon \tilde{X}_2 \to \tilde{X}_1$ tale che $p_1 = p_2 \circ \psi$ e $\psi(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_1$. La composizione $\psi \circ \varphi\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ è un sollevamento di p_1 e $\psi(\varphi(\tilde{x}_1)) = \tilde{x}_1$ e lo stesso vale per $id_{\tilde{X}_1}$. Pertanto $\psi \circ \varphi = id_{\tilde{X}_1}$. Lo stesso ragionamento vale per $\varphi \circ \psi = id_{\tilde{X}_2}$ □

E' interessante osservare che il risultato espresso da tale teorema non risolve però un altro problema: potrebbe infatti capitare che non esista un isomorfismo che mandi il punto $\tilde{x}_1$ su $\tilde{x}_2$ nonostante i due rivestimenti siano isomorfi. Il teorema seguente tiene conto di questo.

Teorema 2.5. *Siano* $p_1\colon \tilde{X}_1 \to X$ *e* $p_2\colon \tilde{X}_2 \to X$ *due rivestimenti e* $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ *e* $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ *punti tali che* $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2) = x_0$. *Esiste un isomorfismo* $\varphi\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ *se e solo se i sottogruppi* $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ *e* $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ *di* $\pi_1(X, x_0)$ *sono coniugati.*

Dimostrazione. Consideriamo un isomorfismo $\varphi\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ e sia $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}'_2$. Per il precedente teorema, si ha che $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}'_2)$ e per il primo punto 1. della Proposizione 2.2.1 si ottiene che $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}'_2)$ è coniugato a $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ e quindi $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ e $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ sono coniugati. Viceversa, se $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ e $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ sono coniugati, allora per il punto 2. della Proposizione 2.2.1, esiste un $\tilde{x}'_2$ tale che $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}'_2)$ e per il teorema precedente esiste un unico isomorfismo $\varphi\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ tale che $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}'_2$. □

2.5 Rivestimenti universali ed esistenza di rivestimenti

Un rivestimento $p\colon \tilde{X} \to X$ è detto *rivestimento universale* di X se lo spazio $\tilde{X}$ è semplicemente connesso. Grazie al Teorema 2.5, due rivestimenti universali sono isomorfi, in quanto $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\}$. L'aggettivo universale deriva dal risultato seguente:

Proposizione 2.5.1. *Siano $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ ed X tre spazi topologici connessi e localmente connessi per archi, $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento ed $\tilde{X}$ semplicemente connesso. Se $p_1\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}$ è un altro rivestimento allora esiste un rivestimento $\tilde{p}\colon \tilde{X} \to \tilde{X}_1$ tale che $p = p_1 \circ \tilde{p}$.*

Prima di dimostrare la proposizione, premettiamo il seguente lemma:

Lemma 2.1. *(Composizione di rivestimenti) Siano X, Y, Z spazi topologici connessi e localmente connessi per archi. Siano $q\colon X \to Y$ e $r\colon Y \to Z$ due applicazioni continue e $p = r \circ q\colon X \to Z$. Allora se p ed r sono rivestimenti, q è un rivestimento.*

Dimostrazione. Per dimostrare che l'applicazione continua $q\colon X \to Y$ è un rivestimento occorre dimostrare che è suriettiva e che ogni punto $y \in Y$ ammette un aperto ben ricoperto da q. Cominceremo col dimostrare la suriettività. Sia y un punto arbitario di Y; dimostreremo, sfruttando le proprietà dei sollevamenti di rivestimenti, che esiste un punto $x \in X$ tale che $q(x) = y$. Fissiamo i punti $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ e $z_0 \in Z$ tali che $q(x_0) = y_0$, $r(y_0) = z_0$ e $p(x_0) = z_0$. Poichè X, Y, Z sono connessi e localmente connessi per archi, sono anche connessi per archi; esiste pertanto un arco $\gamma\colon I \to Y$ tale che $\gamma(0) = y_0$ e $\gamma(1) = y$. Considerando la composizione $r \circ \gamma\colon I \to Z$, otteniamo un arco in Z tale che $r(\gamma(0)) = z_0$. Grazie alla proprietà di sollevamento degli archi, esiste un unico sollevamento dell'arco $r \circ \gamma$ in X, che denoteremo con $\widetilde{r \circ \gamma}$ e tale che $\widetilde{r \circ \gamma}(0) = x_0$. In modo analogo a quanto fatto precedentemente, consideriamo la composizione $q \circ \widetilde{r \circ \gamma}\colon I \to Y$, che sarà denotata nel seguito con $\tilde{\tilde{\gamma}}$. Vogliamo dimostrare che $\tilde{\tilde{\gamma}}$ è il sollevamento dell'arco $\widetilde{r \circ \gamma}$ rispetto al rivestimento r tale che $\tilde{\tilde{\gamma}}(0) = y_0$. In effetti $\tilde{\tilde{\gamma}}$ inizia nel punto y_0, in quanto:

$$\tilde{\tilde{\gamma}}(0) = q \circ \widetilde{r \circ \gamma}(0) = q(x_0) = y_0.$$

Inoltre

$$r \circ \tilde{\tilde{\gamma}} = r \circ q \circ \tilde{\gamma} = p \circ \tilde{\gamma} = r \circ \gamma,$$

da cui segue che $\tilde{\tilde{\gamma}}$ è il sollevamento di $r \circ \gamma$. Per completare la dimostazione della suriettività, dimostreremo che $\tilde{\tilde{\gamma}} = \gamma$; per il teorema 2.3.1, si ottiene che $\tilde{\tilde{\gamma}}(1) = \gamma(1) = y$, ma $\tilde{\tilde{\gamma}}(1) = q \circ \widetilde{r \circ \gamma}(1) = q(x) = y$, e ciò mostra che q è suriettiva. Resta da dimostrare che ogni punto $y_0 \in Y$ ammette un aperto banalizzante rispetto a q. Ricordando che p e q sono rivestimenti, possiamo scegliere un aperto banalizzante rispetto a p ed uno rispetto ad r, entrambi contenenti il punto $z_0 \in Z$; l'intersezione di tali aperti è un aperto banalizzante rispetto a p ed r contenente z_0, che chiameremo U. Grazie all'ipotesi di locale connessione per archi, supponiamo che U sia un aperto connesso di Z; si ha allora:

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} U_\alpha,$$

$$r^{-1}(U) = \bigcup_{\beta} V_\beta$$

dove U_α, V_β sono aperti disgiunti di X tali che $p_{|U_\alpha} \colon U_\alpha \to U$ e $r_{|V_\alpha} \colon V_\alpha \to U$ siano degli omeomorfismi. Sia ora V_{β_0} l'aperto contenente il punto y_0; vogliamo dimostare che si tratta di un aperto ben ricoperto da q. Osserviamo che, per le proprietà della controimmagine, si ha $q(p^{-1}(U)) \subset r^{-1}(U)$; segue allora che

$$q(U_\alpha) \subset r^{-1}(U) = \bigcup_{\beta} V_\beta.$$

Poichè i V_β sono aperti disgiunti, q è un'applicazione continua e U_α è connesso, si ha che $q(U_\alpha) \subset V_\beta$ per qualche β. Quindi $q^{-1}(V_{\beta_0}) = \{U_{\alpha'} | q(U_{\alpha'}) \subset V_{\beta_0})\}$. Inoltre, poichè $p_{|U_\alpha}$ e $r_{|V_\beta}$ sono entrambi omeomorfismi, segue che anche $q_{|U_{\alpha'}} \colon U_{\alpha'} \to V_{\beta_0}$ è un omeomorfismo e questo completa la dimostrazione. □

Possiamo ora dimostrare la Proposizione 2.5.1

Dimostrazione. Poichè $\{1\} = p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subseteq p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1)$, segue dal teorema di sollevamento che esiste $\tilde{p} \colon \tilde{X} \to \tilde{X}_1$ tale che $p = p_1 \circ \tilde{p}$. Per il precedente lemma, si ha che $\tilde{p}$ è un rivestimento. □

Ci interessa a questo punto individuare condizioni necessarie affinchè esista un rivestimento universale. Supponiamo che $p \colon \tilde{X} \to X$ sia un rivestimento universale, ossia che lo spazio $\tilde{X}$ sia semplicemente connesso. Scegliamo un punto $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 \in X$ tali che $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ ed un aperto U ben ricoperto da p e contenente x_0. Esiste allora un aperto V di $\tilde{X}$ contenente il punto $\tilde{x}_0$ omeomorfo ad U tramite la restrizione del rivestimento p a V. Le inclusioni $i \colon U \to X$ e $j \colon V \to \tilde{X}$, sono tali che $i \circ p_{|V} = p \circ j$. Passando alle applicazioni indotte sui gruppi fondamentali e usando il fatto che $\tilde{X}$ è semplicemente connesso si deduce che:

$$i_*\pi_1(U, x_0) = p_* j_* \pi_1(V, \tilde{x}_0) = \{1\}.$$

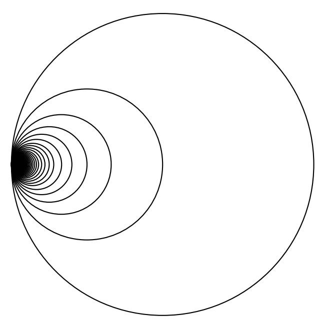
Equivalentemente $i_*([f]) = [\epsilon_{x_0}]$ per ogni $[f] \in \pi_1(U, x_0)$. Tali considerazioni consentono di dare la seguente definizione:

Definizione 2.5.1. Sia X uno spazio topologico che ammette un rivestimento universale e tale che ogni punto $x_0 \in X$ abbia un intorno aperto U in modo che l'omomorfismo indotto dall'inclusione $i_* \colon \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ sia banale. Diremo che lo spazio X è *semilocalmente semplicemente connesso.*

Detto diversamente, ciò significa che in uno spazio X semilocalmente semplicemente connesso, ogni laccio in U basato in x_0 è equivalente all'arco costante ϵ_{x_0}. Dalla definizione, deduciamo che si tratta di una proprietà locale e che uno spazio semplicemente connesso è anche semilocalmente semplicemente connesso. Esistono invece spazi connessi e localmente connessi per archi che non sono semilocalmente semplicemente connessi, come mostra il seguente esempio:

Esempio 2.5.1. *L'orecchino hawaiano*

Lo spazio topologico $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, dove C_n è la circonferenza di raggio $\frac{1}{n}$ e centro in $(\frac{1}{n}, 0)$ in $\mathbb{R}^2$, è chiamato orecchino hawaiano o orecchio infinito e, pur essendo connesso e localmente connesso per archi, non è semilocalmente semplicemente connesso per archi.



Fissati un intorno aperto U dell'origine $x_0 = (0, 0)$ di X ed n sufficientemente grande in modo che $C_n \subset U$, consideriamo la retrazione di X su C_n che invia tutti i cerchi C_m con $n \neq m$ nell'origine lasciando fisso C_n. L'inclusione $j \colon C_n \to X$ induce un omomorfismo iniettivo $j_* \colon \pi_1(C_n, x_0) \cong \mathbb{Z} \to \pi_1(X, x_0)$. Le inclusioni $i \colon U \to X$ e $k \colon C_n \to U$, sono tali che $i \circ k = j$ e quindi $i_* \circ k_* = j_*$. Se X fosse semilocalmente semplicemente connesso allora i_* dovrebbe essere l'omomorfismo banale e quindi anche j_* sarebbe banale, in contrasto con quello appena dimostrato.

In particolare, l'essere semilocalmente semplicemente connesso, è anche una condizione sufficiente per l'esistenza di un rivestimento universale:

Teorema 2.6. *Sia X uno spazio connesso e localmente connesso per archi. Allora X ammette un rivestimento universale se e solo se è semilocalmente semplicemente connesso.*

Tale teorema, se applicato al gruppo banale, può essere visto come un immediato corollario del risultato più generale espresso dal seguente teorema, che fornisce una risposta (algebrica) completa per l'esistenza di un rivestimento di uno spazio topologico dato.

Teorema 2.7. *Sia X uno spazio connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso e sia $x_0 \in X$. Sia H un sottogruppo di $\pi_1(X, x_0)$. Allora esiste un rivestimento $p\colon \tilde{X} \to X$ ed un punto $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ tale che $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$.*

Dimostrazione. Daremo un'idea della dimostrazione di tale risultato rinviando il lettore a [7] per dettagli. Sia $\mathcal{P}$ l'insieme costituito da tutti gli archi di X che iniziano in x_0 ed introduciamo su tale insieme una relazione d'equivalenza così definita: diremo che $f \sim g$ se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- $f(1) = g(1)$;
- $[f \cdot i(g)] \in H$.

Denotiamo la classe d'equivalenza del cammino $f \in \mathcal{P}$ con $f^{\#}$ e sia $\tilde{X}$ l'insieme delle classi d'equivalenza. Definiamo $p\colon \tilde{X} \to X$ come

$$p(f^{\#}) = f(1),$$

che è un'applicazione suriettiva in quanto X è connesso per archi. E' possibile dimostrare che, dotando l'insieme $\mathcal{P}$ della topologia dei compatto-aperti $\tilde{X}$ della topologia quoziente, l'applicazione p è un rivestimento e $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$. $\square$

Dai Teoremi 2.5 e 2.7 si deduce il seguente Corollario, il quale mostra una classificazione algebrica dei rivestimenti di uno spazio topologico:

Corollario 2.5.1. *Sia X uno spazio connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semolicemente connesso. Sia $x_0 \in X$. Esiste una corrispondenza biunivoca tra le classi di isomorfismo di rivestimenti di X e le classi di coniugio di sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$.*

2.6 Automorfismi di un rivestimento

Dato un rivestimento $p\colon \tilde{X} \to X$, un $automorfismo$ è un isomorfismo dal rivestimento in sè. L'insieme degli automorfismi di un rivestimento, detti anche trasformazioni di rivestimento o deck transformations, è dotato della struttura di gruppo dall'operazione di composizione e viene denotato con $Aut(\tilde{X}, p)$. Il gruppo degli automorfismi di un rivestimento p è determinato da $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$, come mostra il seguente teorema:

Teorema 2.8. *Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento, $\tilde{X}$ e X connessi e localmente connessi per archi. Dato $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, il gruppo $Aut(\tilde{X}, p)$ è isomorfo al gruppo quoziente $\dfrac{Norm(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)}$.*

Dimostrazione. Prima di procedere alla dimostrazione, è utile ricordare che se H è un sottogruppo di un gruppo G, il normalizzatore di H in G è il sottogruppo di G definito da:

$$Norm(H) = \{g \in G | gHg^{-1} = H\},$$

osservando che $Norm(H)$ è il più grande sottogruppo di G che contiene H come sottogruppo normale. Consideriamo l'applicazione bigettiva

$$\Phi\colon \frac{\pi_1(X, x_0)}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})} \to p^{-1}(x_0)$$

data da (2.2) e l'applicazione

$$\Psi\colon Aut(\tilde{X}, p) \to p^{-1}(x_0), \qquad \Psi(\varphi) = \varphi(\tilde{x}_0).$$

L'applicazione Ψ è iniettiva, poichè l'automorfismo φ è univocamente determinato dal valore che assume in $\tilde{x}_0$. Ricordiamo inoltre che, dato $[f]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \in \dfrac{\pi_1(X, x_0)}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)}$ con $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, si ha

$$\Phi([f]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \tilde{f}(1),$$

dove $\tilde{f}$ è l'unico sollevamento dell'arco f che inizia in $\tilde{x}_0$. Il primo passo consiste nel dimostrare che l'immagine di Ψ è uguale all'immagine del sottogruppo $\dfrac{Norm(p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))}{p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)}$ di $\dfrac{\pi_1(X,x_0)}{p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)}$ tramite Φ. Ciò equivale a dimostrare che $\varphi(\tilde{x_0}) = \tilde{f}(1)$ se e solo se $[f] \in Norm(p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0}))$. Per il Teorema 2.4 un tale automorfismo φ esiste se e solo se $p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) = p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1)$, dove $\tilde{x}_1 = \tilde{f}(0)$. Inoltre, in virtù della Proposizione 2.5, $[f]^{-1}p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)[f] = p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$, ossia $[f] \in N(p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$. Segue che l'applicazione

$$\Phi^{-1} \circ \Psi \colon Aut(\tilde{X},p) \to \frac{Norm(p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))}{p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)}$$

è una bigezione. Per concludere la dimostrazione occurre mostrare che tale applicazione è un omomorfismo di gruppi. Consideriamo due automorfismi φ_1 e φ_2 di $\tilde{X}$, tali che $\varphi_1(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ e $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_2$ e quindi $\Psi(\varphi_1) = \tilde{x}_1$ e $\Psi(\varphi_2) = \tilde{x}_2$. Sia $\tilde{f}_1$ (rispettivamente $\tilde{f}_2$) un arco in $\tilde{X}$ che congiunge $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}_1$ (rispettivamente $\tilde{x}_2$) e $f_1 = p \circ \tilde{f}_1$ (rispettivamente $f_2 = p \circ \tilde{f}_2$) il laccio chiuso in X basato in x_0. Allora $\Phi([f_1]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)) = \tilde{x}_1$ e $\Phi([f_2]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)) = \tilde{x}_2$. Sia $\tilde{x}_3 = \varphi_1(\varphi_2(\tilde{x_0})) = \varphi_1(\tilde{x_2})$; segue che $\Psi(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \tilde{x}_3$. Ci interessa dimostrare che

$$\Phi^{-1}(\Psi(\varphi_1 \circ \varphi_2)) = \Phi^{-1}(\Psi(\varphi_1))\Phi^{-1}(\Psi(\varphi_2))$$

il che dimostra che $\Phi^{-1} \circ \Psi$ è un omomorfismo. Si ottiene:

$$\Phi^{-1}(\tilde{x}_3) = \Phi^{-1}(\tilde{x}_1)\Phi^{-1}(\tilde{x}_2) = [f_1]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)[f_2]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) = [f_1 \cdot f_2]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0).$$

Equivalentemente, dobbiamo dimostrare che:

$$\Phi([f_1 \cdot f_2]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0})) = \tilde{x}_3.$$

Osserviamo che, poichè f_2 è un arco tra $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_2$, allora $\varphi_1 \circ \tilde{f}_2$ è un arco che congiunge $\varphi_1(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ a $\varphi_1(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_3$. Possiamo pertanto considerare l'arco $\tilde{f}_1 \cdot (\varphi_1 \circ \tilde{f}_2)$ in $\tilde{X}$, ossia il sollevamento di $f_1 \cdot f_2$ che inizia in $\tilde{x}_0$, in quanto $p \circ \tilde{f}_1 = \tilde{f}_1$ e $p \circ \varphi_1 \circ \tilde{f}_2 = p \circ \tilde{f}_2 = f_2$. Si ottiene allora

$$\Phi([f_1 \cdot f_2]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0})) = (\tilde{f}_1 \cdot (\varphi_1 \circ \tilde{f}_2))(1) = \varphi_1(\tilde{f}_2(1)) = \tilde{x}_3,$$

che conclude la dimostrazione. □

2.7 Rivestimenti e azioni di gruppi

2.7.1 Alcuni richiami sulle azioni di gruppi

Sia X un insieme non vuoto e G un gruppo. Diremo che G agisce a sinistra su X o che X è un *G-insieme sinistro* se è definita un'applicazione

$$G \times X \to X, \qquad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

tale che siano soddifatte le seguenti proprietà:

- $1 \cdot x = x, \qquad \forall x \in X$, con 1 elementro neutro di G;
- $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x, \qquad \forall g, h \in G.$

Diremo che G agisce a destra su X se esiste un'applicazione

$$X \times G \to X, \qquad (x, g) \mapsto x \cdot g$$

tale che

- $x \cdot 1 = x, \qquad \forall x \in X,$
- $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh), \qquad \forall g, h \in G.$

Considerato un gruppo G che agisce a sinistra su un insieme non vuoto X, è possibile definire una relazione d'equivalenza su X nel modo seguente: $x \sim y$ se e solo se esiste $g \in G$ tale che $g \cdot x = y$. Lo spazio quoziente sarà denotato con X/G e $\pi \colon X \to X/G$ è la proiezione sul quoziente. Si definisce *stabilizzatore* o *gruppo di isotropia* il sottoinsieme $G_x = \{g \in G | g \cdot x = x\}$. Fissato $x \in X$ definiamo inoltre l'*orbita* del punto x come $G \cdot x = \{g \cdot x | g \in G\}$. La seguente proposizione mette in luce il legame tra l'orbita ed il gruppo di isotropia:

Proposizione 2.7.1. *Sia X un G-insieme sinistro e $x \in X$. Allora esiste una bigezione equivariante tra $G \cdot x$ e l'insieme delle classi laterali sinistre G/G_x.*

Dimostrazione. Ricordiamo che un'applicazione $f \colon X \to Y$ è *G-equivariante* se

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x), \qquad \forall x \in X, \quad \forall g \in G.$$

Definiamo la seguente applicazione

$$\Phi \colon G \cdot x \to G/G_x, \qquad y = g \cdot x \mapsto [g], \tag{2.9}$$

dove $[g]$ denota la classe laterale destra di g in G/G_x. Tale Φ è ben definita, equivariante ed invertibile con inversa $\Psi([g]) = g \cdot x$. $\square$

Uno spazio topologico X è detto *G-spazio* rispetto al gruppo G se è un G-insieme sinistro e l'applicazione

$$L_g\colon X \to X, \qquad x \mapsto g \cdot x$$

è un omeomorfismo. Lo spazio quoziente X/G è dotato della topologia quoziente (nella quale U è aperto in X/G se e solo se π^{-1} è aperto in X) rispetto alla proiezione canonica $\pi\colon X \to X/G$, la quale soddisfa le proprietà espresse dalla seguente proposizione:

Proposizione 2.7.2. *Dato un G-spazio X e la proiezione $\pi\colon X \to X/G$ sul quoziente, valgono i tre seguenti fatti:*

1. *π è aperta;*
2. *se G è finito π è anche chiusa;*
3. *X/G è di Hausdorff se e solo se $K = \{(x, g\cdot x) \in X \times X | x \in X, g \in G\}$ è chiuso.*

Dimostrazione. 1. Sia U un aperto di X. Allora
$\pi^{-1}(\pi(U)) = \{x \in X | \pi(x) \in \pi(U)\}$
$= \{x \in X | \pi(x) = \pi(y)$, per qualche $y \in U\}$
$= \{x \in X | x = g \cdot y$, per qualche $y \in U$ e per qualche $g \in G\}$
$= \{x \in X | x \in g \cdot U$ per qualche $g \in G\} = \bigcup_{g\in G} g \cdot U = \bigcup_{g \in G} L_g(U)$.
Poichè L_g è un omeomorfismo e U è un aperto, segue che $L_g(U)$ è un aperto di X e quindi $\pi^{-1}(\pi(U))$ è aperto in quanto unione di aperti. Ciò mostra che π è aperta.

2. Si consideri ora un sottoinsieme chiuso A di G e sia G un gruppo finito; ragionando in maniera analoga al punto precedente si ottiene:

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g\in G} L_g(A)$$

che è un chiuso, in quanto unione finita di chiusi.

3. Per dimostrare il terzo punto osserviamo che l'applicazione definita da:

$$f\colon X \times X \to X/G \times X/G, \qquad (x, y) \mapsto (\pi(x), \pi(y))$$

è aperta e suriettiva, quindi un'identificazione. Sia $\Delta \subset X/G \times X/G$ la diagonale in X/G; allora X/G è di Hausdorff se e solo se Δ è un sottoinsieme chiuso di $X/G \times G/K$, cioè se e solo se

$$f^{-1}(\Delta) = \{(x, y) \in X \times X | \pi(x) = \pi(y)\} = \{(x, y) \in X \times X | y = g \cdot x\} = K$$

è chiuso in $X \times X$.

□

2.7.2 Rivestimenti e azioni propriamente discontinue

Dato un G-spazio X, diremo che l'azione di G su X è *propriamente discontinua* se $\forall x \in X$ esiste un aperto U contenente x tale che

$$(g_1 \cdot U) \cap (g_2 \cdot U) = \emptyset, \forall g_1, g_2 \in G \tag{2.10}$$

o, equivalentemente,

$$(g \cdot U) \cap (U) = \emptyset, \forall g \in G \tag{2.11}$$

Osserviamo infatti che la (2.10) implica la (2.11) ponendo $g_2 = 1$. Inoltre, supponendo che sia soddisfatta la (2.11), si ottiene:

$$(g_1 \cdot U) \cap (g_2 \cdot U) = g_2[(g_2^{-1} g_1 U) \cap U] = \emptyset, \quad \forall g_1, g_2 \in G,$$

cioè la (2.10).

Teorema 2.9. *Sia X un G-spazio. L'azione (sinistra) di G su X è propriamente discontinua se e solo se $\pi\colon X \to X/G$ è un rivestimento.*

Dimostrazione. Sia l'azione di G su X propriamente discontinua, $x \in X$ e U un aperto di X contenente x che soddisfi la (2.11). Per mostrare che π è un rivestimento, sarà sufficiente dimostrare che $\pi(U)$, il quale è un aperto di X grazie alle proprietà della proiezione descritte in 2.7.2, è ben ricoperto, cioè che la sua controimmagine tramite π è unione di aperti di $\tilde{X}$ ciascuno dei quali è omeomorfo a $\pi(U)$. Si ha

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_g L_g(U),$$

pertanto ci resta da dimostrare che $\pi_{|L_g(U)}\colon L_g(U) \to \pi(L_g(U))$ è un omeomorfismo. Tale restrizione si ottiene dalla composizione dei due omeomorfismi $L_{g^{-1}}\colon L_g(U) \to U$ e $\pi_{|U}\colon U \to \pi(U)$, quindi è un omeomorfismo. Per dimostrare il viceversa, supponiamo che $\pi\colon X \to X/G$ sia un rivestimento; allora esiste un aperto V di $\pi(x)$, dove $x \in X$, ben ricoperto da π. Ciò significa che $\pi^{-1}(V) = \bigcup U_j$ e $\pi_{|U_j}\colon U_j \to V$ è un omeomorfismo. Considerato l'aperto U_{j0} contenente x, se $(g \cdot U_{j0}) \cup U_{j0} \neq \emptyset, \forall g \in G$, due punti di U_{j0} dovrebbero appartenere alla stessa orbita rispetto all'azione di G, venendo meno l'iniettività della restrizione $\pi_{|U_{j0}}$. La (2.11) dev'essere pertanto soddisfatta.

□

Il teorema che segue offre un criterio che consente di stabilire se una data azione di un gruppo G su uno spazio X sia propriamente discontinua:

Teorema 2.10. *Sia G un gruppo finito che agisce liberamente su uno spazio di Hausdorff X. Allora l'azione di G su X è propriamente discontinua.*

Dimostrazione. Siano $g_0 = 1, g_1, \ldots, g_n$ gli elementi di G e sia $x \in X$. Ricordando che un gruppo G agisce liberamente su uno spazio X se per ogni $g \neq 1$ e per ogni $x \in X$, si ha $g \cdot x \neq x$, osserviamo che i punti $g_1 \cdot x, \ldots, g_n \cdot x$ sono tutti distinti da $g_0 \cdot x = x$. Poichè X è di Hausdorff, esistono $U_0, \ldots, U_n$ aperti contenenti rispettivamente x, $g_1 \cdot x, \ldots, g_n \cdot x$ e tali che $U_0 \cap U_j = \emptyset$ per ogni $j = 1, \ldots, n$. Allora

$$U = \bigcap_{j=0}^{n} g_j^{-1} \cdot U_j$$

è un aperto che contiene x e che soddisfa la (2.11). Infatti, se $g \in G$, $g \neq 1$, allora $g = g_k \in G, k \neq 0$, ottenendo:

$$g_k \cdot U = g_k \cdot (\bigcap_{j=0}^{n} g_j^{-1} \cdot U_j) = (\bigcap_{j=0}^{n} g_k g_j^{-1} \cdot U_j) \subset U_k,$$

poichè $g_j^{-1} \cdot U_j \subset U_0$ e $g_k \cdot U_0 \subset U_k$. Inoltre, poichè $U \subset U_0$, $g_k \cdot U \subset U_k$ e $U \cap U_k \neq \emptyset$, si ottiene $(g_k \cdot U) \cap U = \emptyset$. □

Esempio 2.7.1. *Lo spazio lenticolare*

Sia $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ la sfera unitaria in $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ e consideriamo l'applicazione definita come segue:

$$h\colon S^3 \to S^3, \qquad (z_1, z_2) \mapsto (e^{2\pi i/p} z_1, e^{2\pi i q/p} z_2),$$

dove p e q sono interi positivi primi tra loro e tali che $1 \leq q < p$. Tale applicazione è un omeomorfismo la cui inversa è data da

$$h^{-1}\colon S^3 \to S^3, \qquad (z_1, z_2) \mapsto (e^{-2\pi i/p} z_1, e^{-2\pi i q/p} z_2)$$

e $h^p = id_{S^3}$. Definiamo un'azione di $\mathbb{Z}_p$ su S^3 nel modo seguente:

$$\mathbb{Z}_p \times S^3 \to S^3, \quad [n]_p \cdot (z_1, z_2) := h^n(z_1, z_2) \mapsto (e^{2\pi i n/p} z_1, e^{2\pi i q n/p} z_2).$$

Si tratta di un'azione libera, in quanto se $e^{2\pi i n/p} z_1 = z_1$ e $e^{2\pi i q n/p} z_2 = z_2$ e $z_1 \neq 0$, si ha che $e^{2\pi i n/p} = 1$ e pertanto $p|q$; se invece $z_1 = 0$ allora $z_2 \neq 0$ e $e^{2\pi i q n/p} = 1$, e quindi $p|nq$; ma, essendo per ipotesi p e q primi tra loro, si ha $p|n$. Per il precedente teorema l'azione è propriamente discontinua e per il Teorema 2.9, esiste un rivestimento $S^3 \to S^3/\mathbb{Z}_p$, dove lo spazio topologico quoziente $S^3/\mathbb{Z}_p$ è detto *spazio lenticolare*.

2.7.3 Rivestimenti regolari

Un rivestimento $p\colon \tilde{X} \to X$ si dice *regolare* (normale o di Galois) se dato $x_0 \in X$ esiste $\tilde{x_0}$ tale che $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(X, x_0)$. Conseguenza immediata del Teorema 2.5 è il seguente corollario:

Corollario 2.7.1. *Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento, $\tilde{X}, X$ connessi e localmente connessi per archi, $x_0 \in X$. Il rivestimento p è regolare se e solo se per ogni $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$ esiste un automorfismo $\varphi \in Aut(\tilde{X}, p)$ tale che $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ ed inoltre $Aut(\tilde{X}, p)$ è isomorfo a $\dfrac{\pi_1(X, x_0)}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)}$. Se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso, il rivestimento è regolare e $Aut(\tilde{X}, p) \tilde{=} \pi_1(X, x_0)$.*

Osservazione 2.7.1. Un rivestimento $p\colon \tilde{X} \to X$ è un'applicazione aperta e quindi un'identificazione; esiste pertanto una relazione d'equivalenza su $\tilde{X}$ che identifica i punti che stanno sulle stesse fibre. Non è detto però che quest'identificazione avvenga tramite l'azione di un gruppo; ciò accade solo se il rivestimento è regolare e il gruppo che identifica i punti delle fibre è esattamente il gruppo degli automorfismi del rivestimento. Osserviamo che la prima parte del precedente corollario, si può esprimere in maniera alternativa, mettendone in evidenza il legame con l'azione del gruppo degli automorfismi sulla fibra, definita come

$$Aut(\tilde{X}) \times p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_0), \qquad (\varphi, x_0) \mapsto \varphi(\tilde{x_0}). \tag{2.12}$$

Possiamo affermare che il rivestimento $p\colon \tilde{X} \to X$ è regolare se e solo se l'azione (2.12) è transitiva.

Ricordando il Teorema 2.9 sappiamo che l'applicazione quoziente $\pi\colon X \to X/G$ associata ad un'azione di un gruppo G su uno spazio topologico X è un rivestimento se e solo se l'azione è propriamente discontinua. La proposizione che segue mostra, in particolare, che tale rivestimento è regolare e che G è il suo gruppo di automorfismi:

Proposizione 2.7.3. *Sia G un gruppo che agisce in modo propriamente discontinuo su uno spazio topologico X connesso e localmente connesso per archi. Allora $\pi\colon X \to X/G$ è un rivestimento regolare e $Aut(X, \pi) = G$.*

Dimostrazione. Abbiamo precedentemente dimostrato che π è un rivestimento. Per dimostrare che $Aut(X, \pi) = G$ consideriamo un elemento $g \in G$ ed osserviamo che si ha $\pi \circ g = \pi$, da cui segue che $G \subseteq Aut(X, \pi)$. La seconda inclusione si dimostra invece nel modo seguente: dato $\varphi \in Aut(X, \pi)$ si ha che $\pi \circ \varphi = \pi$, quindi $\varphi(x_1) = x_2$ e $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. Allora esiste $g \in G$ tale che $g \cdot x_1 = x_2$

e per l'unicità deve aversi $\varphi = g$, che dimostra $Aut(X, \pi) \subseteq G$. Resta ora da dimostrare che il rivestimento è regolare. Siano x_1 e x_2 tali che $\pi(x_1) = \pi(x_2)$; allora esiste $g \in G = Aut(X, \pi)$ tale che $g \cdot x_1 = x_2$ e quindi per il Corollario 2.7.1 il rivestimento è regolare. □

Dal Corollario 2.7.1 otteniamo quindi:

Corollario 2.7.2. *Siano G e X con le stesse ipotesi della Proposizione 2.7.3. Allora*

$$G \cong \pi_1(X/G, p(x_0))/p_*\pi_1(X, x_0).$$

Quindi se X è semplicemente connesso

$$G \cong \pi_1(X/G, p(x_0)).$$

In particolare, il nostro interesse è rivolto al fatto che i rivestimenti regolari nascono tutti da un'azione propriamente discontinua di un gruppo G. Prima di enunciare il teorema che dimostra tale affermazione, dimostriamo un fatto generale:

Proposizione 2.7.4. *Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento (non necessariamente regolare). Allora il gruppo $Aut(\tilde{X}, p)$ agisce in modo propriamente discontinuo su $\tilde{X}$.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{U}$ un aperto di $\tilde{X}$ tale che $p_{|\tilde{U}} \colon \tilde{U} \to p(\tilde{U})$ sia un omeomorfismo. Allora

$$\tilde{U} \cap \varphi(\tilde{U}) = \emptyset, \quad Aut(\tilde{X}, p), \quad \varphi \neq id_{\tilde{X}}.$$

Infatti, se esistesse $\tilde{x} \in \tilde{U}$ tale che $\varphi(\tilde{x}) \in \tilde{U}$, allora $p(\tilde{x}) = p(\varphi(\tilde{x}))$ e (grazie al fatto che $p_{|\tilde{U}}$ è iniettiva), si ha che $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$ e quindi $\varphi = id_{\tilde{X}}$. □

Teorema 2.11. *Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento regolare e $\pi\colon \tilde{X} \to \tilde{X}/Aut(\tilde{X}, p)$ il rivestimento dato dall'azione propriamente discontinua di $Aut(\tilde{X}, p)$ su $\tilde{X}$. Allora esiste un omeomorfismo $F\colon X \to \tilde{X}/Aut(\tilde{X}, p)$, tale che $F \circ p = \pi$.*

Dimostrazione. Sia $F\colon X \to \tilde{X}/Aut(\tilde{X}, p)$ definita come $F(x) = \pi(\tilde{x})$, dove $\tilde{x}$ è un punto della fibra su x. Si tratta di un'applicazione ben definita, in quanto non dipende dalla scelta del punto; infatti se $\tilde{x}' \in p^{-1}(x)$, esiste $\varphi \in Aut(\tilde{X}, p)$ tale che $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}'$, e quindi $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{x}')$. Inoltre $F \circ p = \pi$. Occorre ora dimostrare che F è iniettiva, suriettiva, continua e con inversa continua. Per dimostrare che è iniettiva, supponiamo che $F(x) = F(y)$. Ciò implica che $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$, con $\tilde{x}, \tilde{y}$ punti appartenenti rispettivamente alla fibra su x ed alla fibra su y. Si ha

$$x = p(\tilde{x}) = p(\varphi(\tilde{x})) = p(\tilde{y}) = y,$$

dove $\varphi \in Aut(\tilde{X}, p)$ tale che $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{y}$. F è anche suriettiva, in quanto

$$F(x) = \pi(x) = [\tilde{x}],$$

dove $[\tilde{x}] \in \tilde{X}/Aut(\tilde{X}, p)$, $\tilde{x}$ è un rappresentante di tale classe e $x = p(\tilde{x})$. Infine F risulta continua con inversa F^{-1} continua in quanto composizione dell'identificazione p e dell'applicazione continua π. □

La proposizione seguente mostra un'altra importante ed utile proprietà dei rivestimenti regolari.

Proposizione 2.7.5. *(Incollamento di rivestimenti regolari) Sia X uno spazio topologico e U_1, U_2 sottoinsiemi aperti di X tali che $X = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ e sia $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Siano*

$$f_1 \colon (\tilde{U}_1, \tilde{x}_1) \to (U_1, x_0) \tag{2.13}$$

$$f_2 \colon (\tilde{U}_2, \tilde{x}_2) \to (U_2, x_0)$$

due rivestimenti regolari. Consideriamo inoltre i rivestimenti regolari dati da:

$$f_1^{-1}(U_1 \cap U_2, \tilde{x}_1) \to (U_1, x_0) \tag{2.14}$$

$$f_2^{-1}(U_1 \cap U_2, \tilde{x}_2) \to (U_2, x_0).$$

Se esiste un omeomorfismo G-equivariante $F \colon f_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \to f_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$, esiste un rivestimento regolare $p \colon \tilde{X} \to X$ con fibra G.

Capitolo 3

Il teorema di Seifert-Van Kampen

3.1 Enunciato e alcune utili notazioni

Consideriamo uno spazio topologico X e due sottoinsiemi aperti U_1, $U_2 \subset X$ tali che $X = U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Supponiamo inoltre che U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ siano connessi per archi e sia $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Le inclusioni naturali $i_1\colon\ U_1 \cap U_2 \to\ U_1$, $i_2\colon\ U_1 \cap U_2 \to\ U_2$, $j_1\colon\ U_1 \to\ X$, $j_2\colon\ U_2 \to\ X$, descritte dal seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} & U_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\ U_1 \cap U_2 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & X \\ & U_2 \arrow[ur, "j_2"'] & \end{tikzcd}$$

inducono i seguenti omomorfismi tra i rispettivi gruppi fondamentali, secondo il diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & \pi_1(X, x_0) \\ & \pi_1(U_2, x_0) \arrow[ur, "\psi_2"'] & \end{tikzcd}$$

Inseriamo ora il prodotto libero $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ al centro del diagramma e denotiamo le iniezioni canoniche nel modo seguente:

$$i_{U_1} \colon \pi_1(U_1, x_0) \hookrightarrow \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$$

$$i_{U_2} \colon \pi_1(U_2, x_0) \hookrightarrow \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0).$$

Per la proprietà universale del prodotto libero (cfr. Teorema 1.6), le applicazioni ψ_1 ed ψ_2 inducono un omomorfismo

$$\Phi \colon \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \tag{3.1}$$

tale che la metà destra del seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "i_{U_1}"] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \arrow[r, "\Phi"] & \pi_1(X, x_0) \\
 & \pi_1(U_2, x_0) \arrow[u, "i_{U_2}"'] \arrow[ur, "\psi_2"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Definiamo l'applicazione

$$F \colon \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \to \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$$

ponendo $F(\gamma) = \varphi_1(\gamma)^{-1}\varphi_2(\gamma)$ (si osservi che F non è un omomorfismo) e sia $N = \overline{F(\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0))}$, ossia la chiusura normale dell'immagine di F in $\pi_1(U_1, x_0) * \pi(U_2, x_0)$. Possiamo ora enunciare il seguente teorema:

Teorema 3.1. *(Seifert-Van Kampen) Sia X uno spazio topologico. Supponiamo che U_1, $U_2 \subset X$ siano sottoinsiemi aperti la cui unione sia X e supponiamo che U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ siano connessi per archi.*
Allora, per ogni $x_0 \in U_1 \cap U_2$, l'omomorfismo Φ definito in (3.1) è suriettivo ed il suo nucleo è N. Di conseguenza, si ha

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)/N$$

Corollario 3.1.1. *Supponiamo che, in aggiunta alle ipotesi del Teorema di Seifert-Van Kampen, i gruppi fondamentali di U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ abbiano le seguenti presentazioni finite:*

$$\pi_1(U_1, x_0) \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m | \rho_1, \dots, \rho_r \rangle;$$

$$\pi_1(U_2, x_0) \cong \langle \beta_1, \dots, \beta_n | \sigma_1, \dots, \sigma_s \rangle;$$

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \cong \langle \gamma_1, \dots, \gamma_p | \tau_1, \dots, \tau_t \rangle;$$

Allora $\pi_(X, x_0)$ ha la seguente presentazione:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots \beta_n | \rho_1, \dots, \rho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s, u_1 = v_1, \dots, u_p = v_p \rangle,$$

dove per ogni $a = 1, \dots, p$, u_a è un'espressione di $\varphi_1 \gamma_a \in \pi_1(U_1, x_0)$ in termini dei generatori $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ e, allo stesso modo, v_a di $\varphi_2 \gamma_a \in \pi_1(U_2, x_0)$ in termini di $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$.

Notazioni.

Nella dimostrazione del teorema considereremo gli archi e le loro rispettive classi di omotopia in differenti spazi topologici; pertanto si rende necessario introdurre alcune utili notazioni. Se a e b sono archi in X che vivono in uno dei sottoinsiemi U_1, U_2 o $U_1 \cap U_2$, useremo la seguente notazione:

$$a \sim_{U_1} b, \quad a \sim_{U_2} b, \quad a \sim_{U_1 \cap U_2} b, \quad a \sim_X b$$

per indicare che a è omotopo relativamente a $\{0, 1\}$ a b in U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ o in X.

Scriveremo $[a]_{U_1}$, $[a]_{U_2}$, $[a]_{U_1 \cap U_2}$ o $[a]_X$ per indicare la classe di equivalenza di omotopia dell'arco a in $\pi_1(U_1, x_0)$, $\pi_1(U_2, x_0)$, $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ o $\pi_1(X, x_0)$ rispettivamente. Pertanto, secondo tale notazione, se a è un laccio in $U_1 \cap U_2$, gli omomorfismi indotti dalle inclusioni $i_1 \colon U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_1$ e $j_1 \colon U_1 \hookrightarrow X$ si possono esprimere come segue:

$$\varphi_1([a]_{U_1 \cap U_2}) = [a]_{U_1},$$

$$\psi_1([a]_{U_1}) = [a]_X.$$

Inoltre, è importante evidenziare il fatto che nel corso della dimostrazione faremo riferimento a due differenti tipi di prodotto: il prodotto tra classi di archi e moltiplicazione di parole nel gruppo libero. Denoteremo la moltiplicazione (concatenazione) tra archi e classi di archi con un punto nel seguente modo:

$$[a]_{U_1} \cdot [b]_{U_1} = [a \cdot b]_{U_1}.$$

La moltiplicazione nel prodotto libero sarà invece denotata con un asterisco:

$$[a]_{U_1} * [b]_{U_1} * [c]_{U_2} = [a \cdot b]_{U_1} * [c]_{U_2} \in \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0).$$

L'applicazione $\Phi \colon \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$, secondo tali notazioni, è data da

$$\Phi([a_1]_{U_1} * [a_2]_{U_2} * \cdots * [a_{m-1}]_{U_1} * [a_m]_{U_2})$$

$$\begin{aligned} &= \psi_1[a_1]_{U_1} \cdot \psi_2[a_2]_{U_2} \cdot \cdots \cdot \psi_1[a_{m-1}]_{U_1} \cdots \psi_2[a_m]_{U_2} \\ &= [a_1]_X \cdot [a_2]_X \cdot \cdots \cdot [a_{m-1}]_X \cdot [a_m]_X \\ &= [a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{m-1} \cdot a_m]_X. \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2 Dimostrazione del teorema

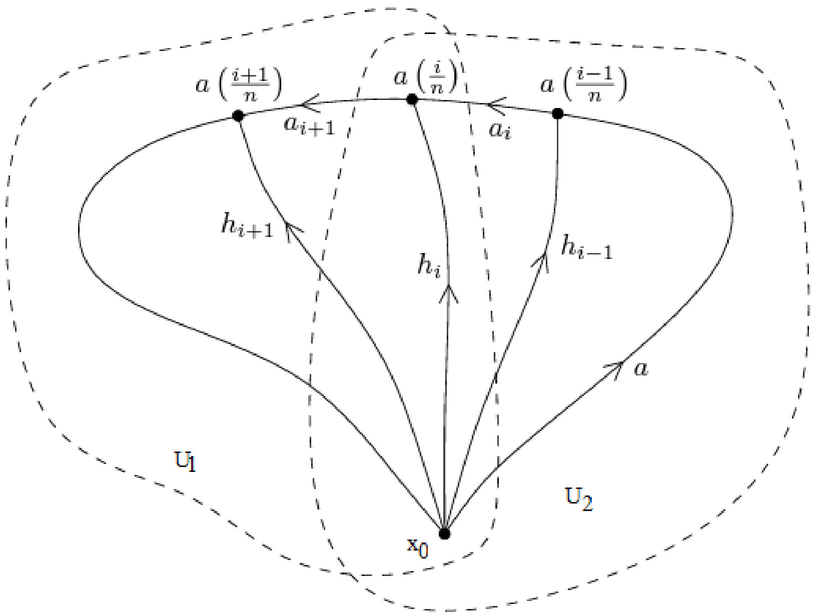
Sia N la chiusura normale di $F(\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ nel prodotto libero $\pi_1(U_1, x_0) * \pi(U_2, x_0)$. Nel corso della dimostrazione, dimostreremo tre fatti:

1. Φ è suriettiva;
2. $N \subseteq Ker\Phi$;
3. $Ker\Phi \subseteq N$.

Dimostrazione. STEP 1: Φ è suriettiva.
Sia $a \colon I \to X$ un laccio in X basato in x_0. In virtù del Lemma di Lebesgue (cfr. appunti del corso di Topologia Algebrica), possiamo scegliere un n sufficientemente grande in modo che a mappi ogni sottointervallo $[(i-1)/n, i/n]$ o in U_1 o in U_2. Sia a_i la restrizione di a al sottointervallo $[(i-1)/n, i/n]$, oppurtanamente riparametrizzato in modo che il suo intervallo di parametri sia I; allora, la classe del laccio a si esprime in X nel seguente modo:

$$[a]_X = [a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n]_X.$$

Una fattorizzazione di questo tipo, presenta però un problema: infatti, in generale, gli archi a_i non sono lacci basati in x_0. Per ovviare a tale inconveniente, scegliamo un arco h_i da x_0 ad $a(i/n)$, per ogni $i = 1, \ldots, n-1$, come mostrato nella seguente figura:



Se $a(i/n) \in U_1 \cap U_2$, scegliamo h_i in modo tale che viva interamente in $U_1 \cap U_2$; altrimenti, lo scegliamo in modo tale che si trovi in qualsiasi insieme U_1 o U_2 contenente $a(i/n)$ (possiamo farlo grazie alla fondamentale ipotesi di connessione per archi). Poniamo quindi $\tilde{a_i} = h_{i-1} \cdot a_i \cdot h_i^{-1}$, dove h_0 ed h_n sono il laccio costante ϵ_{x_0}, in modo tale che $\tilde{a_i}$ sia un laccio basato in x_0 che vive interamente in U_1 o in U_2. Da questo segue facilmente che a si può anche esprimere come

$$[a]_X = [\tilde{a_1} \cdot \dots \cdot \tilde{a_n}]_X.$$

Consideriamo ora l'elemento

$$\gamma = [\tilde{a_1}]_{U_1} * [\tilde{a_2}]_{U_2} * \dots * [\tilde{a_n}]_{U_2} \in \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0),$$

dove la scelta di U_1 o U_2 per ogni $\tilde{a_i}$ dipende dall'insieme che contiene la sua immagine. Allora, grazie alla (3.3), si ha:

$$\Phi(\gamma) = [\tilde{a_1} \cdot \dots \cdot \tilde{a_n}]_X = [a]_X.$$

e questo prova che Φ è suriettiva.

STEP 2: $N \subseteq Ker\Phi$.

Dimostrando che $F(\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0))$ è contenuto in $Ker\Phi$, si dimostra che la sua chiusura normale è contenuta in $Ker\Phi$, in quanto $Ker\Phi$ è normale.

Sia $[a]_{U_1 \cap U_2} \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ arbitrario. Allora

$$\begin{aligned}\Phi \circ F([a]_{U_1\cap U_2}) &= \Phi((\varphi_1[a]_{U_1\cap U_2})^{-1} * (\varphi_2[a]_{U_1\cap U_2}))\\ &= \Phi([a]_{U_1}^{-1} * [a]_{U_2})\\ &= [a^{-1} \cdot a]_X\\ &= 1.\end{aligned}$$

STEP 3: $Ker\Phi \subseteq N$. Si tratta del passaggio più delicato della dimostazione. Sia $\gamma = [a_1]_{U_1} * [a_2]_{U_2} * \cdots * [a_k]_{U_2} \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ un elemento arbitrario del prodotto libero e supponiamo che $\Phi(\gamma) = 1$. Per la (3.3), ciò implica che

$$[a_1 \cdot \cdots \cdot a_k]_X = 1,$$

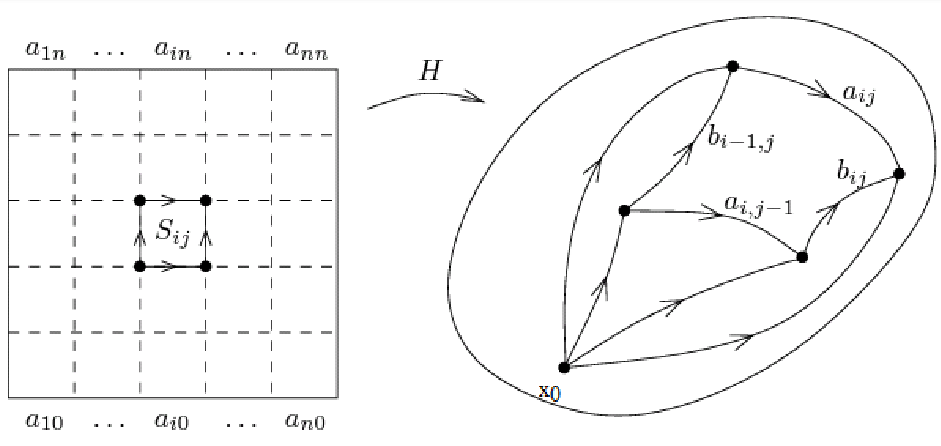
che è equivalente a

$$a_1 \cdot \cdots \cdot a_k \underset{X}{\sim} \epsilon_{x_0}.$$

Dobbiamo mostrare che $\gamma \in N$. Sia $H \colon I \times I \to X$ un'omotopia tra archi da $a_1 \cdot \cdots \cdot a_k$ a ϵ_{x_0} in X. Applicando il lemma di Lebesgue, è possibile suddividere $I \times I$ in quadrati di lato $1/n$ in modo tale che H mappi ogni sottoquadratino

$$S_{ij} = [(i-1)/n, i/n] \times [(j-1)/n, j/n]$$

o in U_1 o in U_2. Denotiamo con v_{ij} l'immagine tramite H del vertice $(i/n, j/n)$ e siano a_{ij} la restrizione di H al segmento orizzontale $[(i-1)/n, i/n] \times \{j/n\}$ e b_{ij} a quello verticale dato da $\{i/n\} \times [(j-1)/n, j/n]$, entrambi adeguatamente riparametrizzati in I, come mostrato in figura:



La restrizione di H al bordo inferiore di $I \times I$, è uguale al prodotto degli archi $a_1 \cdot \cdots \cdot a_k$. Supponendo di considerare una potenza n sufficientemente grande, possiamo garantire che i punti finali degli archi a_i in questo prodotto siano della forma i/n; pertanto, l'arco che si ottiene restringendo l'omotopia H al bordo inferiore del quadrato si può esprimere nel seguente modo:

$$H_0 \sim a_1 \cdot \dots \cdot a_k \sim (a_{10} \cdot \dots \cdot a_{p0}) \cdot \dots \cdot (a_{r0} \cdot \dots \cdot a_{n0}).$$

Nel prodotto libero, si ha $\gamma = [a_{10} \cdot \dots \cdot a_{p0}]_{U_1} * \dots * [a_{r0} \cdot \dots \cdot a_{n0}]_{U_2}$. L'idea è quella di ottenere una fattorizzazione nel prodotto libero della forma $[a_{10}]_{U_1} * [a_{20}]_{U_1} * \dots$ e così via, ma ci ritroviamo a dover risolvere un problema analogo a quello presentatosi in STEP 1, ovvero il fatto che tali lacci così espressi, in generale, non sono lacci basati in x_0. Risolviamo tale inconveniente in maniera del tutto simile a quella adottata in STEP 1: scegliamo un arco h_{ij} da x_0 a v_{ij}, per ogni i e j, in modo che viva in $U_1 \cap U_2$ se $v_{ij} \in U_1 \cap U_2$ oppure in U_1 o U_2 altrimenti; in particolare, se v_{ij} coincide con il punto base x_0, l'arco h_{ij} sarà il laccio costante ϵ_{x_0}. A questo punto possiamo definire i lacci

$$\tilde{a}_{ij} = h_{i-1,j} \cdot a_{ij} \cdot h_{ij}^{-1}, \qquad \tilde{b}_{ij} = h_{i,j-1} \cdot b_{ij} \cdot h_{ij}^{-1}, \tag{3.4}$$

ognuno dei quali si trova interamente o in U_1 o in U_2. L'elemento γ si può ora esprimere nella forma:

$$\gamma = [\tilde{a}_{10}]_{U_1} * [\tilde{a}_{20}]_{U_1} * \dots * [\tilde{a}_{n0}]_{U_2}. \tag{3.5}$$

L'idea centrale della dimostrazione è quella di dimostrare che, modulo N, l'espressione precedente di γ può essere sostituita dalla corrispondente espressione ottenuta restringendo H al bordo superiore della prima riga di quadratini, ottenendo dunque l'equivalenza seguente:

$$\gamma \equiv [\tilde{a}_{11}]_{U_1} * \dots * [\tilde{a}_{n1}]_{U_2} \quad (modN).$$

Ripetendo un ragionamento di questo tipo spostandoci nella fila di quadratini successiva e procedendo per induzione, alla fine otterremo:

$$\gamma \equiv [\tilde{a}_{1n}]_{U_1} * \dots * [\tilde{a}_{nn}]_{U_2} \quad (modN).$$

Il punto chiave è il lavoro compiuto dall'omotopia H, che porta l'intero bordo superiore di $I \times I$ nel punto x_0, in modo che ogni $\tilde{a}_{in}$ non sia altro che il laccio costante ϵ_{x_0} ed il precedente prodotto sia uguale all'identità, mostrando così che $\gamma \in N$ e completando la dimostrazione. Occorre però provare l'induzione. Supponiamo per induzione che

$$\gamma \equiv [\tilde{a}_{1,j-1}]_{U_1} * \dots * [\tilde{a}_{n,j-1}]_{U_2} \quad (modN); \tag{3.6}$$

vogliamo dimostrare che

$$\gamma \equiv [\tilde{a}_{1,j}]_{U_1} * \cdots * [\tilde{a}_{n,j}]_{U_2} \quad (modN).$$

Osserviamo innanzitutto che, se a è un laccio in $U_1 \cap U_2$, le classi $[a]_{U_1}$ e $[a]_{U_2}$ si trovano nella stessa classe laterale nel prodotto libero modulo N, in quanto

$$[a]_{U_2} * N = [a]_{U_1} * ([a]_{U_1}^{-1} * [a]_{U_2}) * N = [a]_{U_1} * F([a]_{U_1 \cap U_2}) * N = [a]_{U_1} * N.$$

Grazie all'ipotesi di normalità di N, ciò implica inoltre $x * [a]_{U_1} * y * N = x * [a]_{U_1} * N * y = x * [a]_{U_2} * N * y = x * [a]_{U_2} * y * N$ per ogni x, y nel prodotto libero. Ciò significa che possiamo scambiare $[a]_{U_1}$ e $[a]_{U_2}$, ogni volta che stiamo ragionando modulo N e stiamo considerando un laccio in $U_1 \cap U_2$. Consideriamo il sottoquadratino S_{ij} e supponiamo per definizione che H mandi S_{ij} in U_2. Il bordo di S_{ij} attraversato in senso orario a partire dall'angolo inferiore sinistro, viene mandato da H nell'arco ottenuto dalla concatenazione $(b_{i-1,j} \cdot a_{ij}) \cdot (b_{ij}^{-1} \cdot a_{i,j-1}^{-1})$.

Per il Lemma 1.1, si ottiene

$$a_{i,j-1} \underset{U_2}{\sim} b_{i-1,j} \cdot a_{i,j} \cdot b_{i,j}^{-1}. \tag{3.7}$$

Dalla definizione (3.4) dei lacci $\tilde{a}_{i,j}$ e $\tilde{b}_{i,j}$, segue

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i,j-1} &= h_{i-1,j-1} \cdot a_{i,j-1} \cdot h_{i,j-1}^{-1} \\ &\underset{U_2}{\sim} h_{i-1,j-1} \cdot b_{i-1,j} \cdot a_{ij} \cdot b_{ij}^{-1} \cdot h_{i,j-1}^{-1} \\ &\underset{U_2}{\sim} \tilde{b}_{i-1,j} \cdot \tilde{a}_{i,j} \cdot \tilde{b}_{i,j}^{-1}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ricordando ora l'ipotesi induttiva su γ data da (3.6), dobbiamo verificare se, per ogni fattore $[\tilde{a}_{i,j-1}]_{U_1}$, il quadratino S_{ij} viene mandato in U_1 o in U_2. Se fosse mappato in U_2, $[\tilde{a}_{i,j-1}]_{U_1}$ si troverebbe in $U_1 \cap U_2$, consentendoci di sostituire tale fattore con $[\tilde{a}_{i,j-1}]_{U_2}$ modulo N; si ragiona allo stesso modo anche per il caso in cui l'immagine si trovi in U_1. Dalla (3.8), possiamo sostituire ogni fattore della forma $[\tilde{a}_{i,j-1}]_{U_2}$ con $[\tilde{b}_{i-1,j}]_{U_2} * [\tilde{a}_{i,j}]_{U_2} * [\tilde{b}_{i,j}]_{U_2}^{-1}$, e ragionare allo stesso modo anche per i fattori in U_1. Allora

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv [\tilde{b}_{0,j}]_{U_1} * [\tilde{a}_{1j}]_{U_1} * [\tilde{b}_{1,j}]_{U_2}^{-1} * \cdots * [\tilde{b}_{n-1,j}]_{U_2} * [\tilde{a}_{n,j}]_{U_2} * [\tilde{b}_{n,j}]_{U_2}^{-1} \quad (modN) \\ &\equiv [\tilde{a}_{1j}]_{U_1} * \cdots * [\tilde{a}_{nj}]_{U_1} \quad (modN) \end{aligned}$$

ottenuta sfruttando il fatto che i fattori $\tilde{b}_{ij}$ si semplificano e $\tilde{b}_{0j}$ e $\tilde{b}_{nj}$ sono uguali al laccio costante ϵ_{x_0}. Ciò completa la dimostrazione. □

Osservazione 3.2.1. Poichè $N \subseteq Ker\Phi$, esiste un'applicazione $\hat{\Phi}$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1,x_0) * \pi_1(U_2,x_0) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"] & \pi_1(X,x_0) \\
\dfrac{\pi_1(U_1,x_0) * \pi_1(U_2,x_0)}{N} \arrow[ur, "\hat{\Phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

quindi $\Phi = \hat{\Phi} \circ \pi$, dove π è la proiezione sul quoziente; segue che anche il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U_1,x_0) \arrow[d, "\pi \circ i_{U_1}"'] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \dfrac{\pi_1(U_1,x_0) * \pi_1(U_2,x_0)}{N} \arrow[r, "\hat{\Phi}"] & \pi_1(X,x_0) \\
 & \pi_1(U_2,x_0) \arrow[u, "\pi \circ i_{U_2}"] \arrow[ur, "\psi_2"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.9}$$

Infatti, dal diagramma 3.2, si ha:

$$\Phi \circ i_{U_1} = \psi_1$$

$$\Phi \circ i_{U_2} = \psi_2$$

le quali implicano rispettivamente:

$$\hat{\Phi} \circ \pi \circ i_{U_1} = \psi_1$$

$$\hat{\Phi} \circ \pi \circ i_{U_2} = \psi_2.$$

3.3 Il Teorema di Seifert-Van Kampen in versione universale

In questa sezione mostreremo la versione universale del teorema, che mette in evidenza il suo legame con un dato gruppo G:

Teorema 3.2. *Sia X uno spazio topologico e U_1, U_2 due sottoinsiemi aperti e connessi per archi di X tali che $X = U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cap U_2$ sia un insieme non vuoto e connesso per archi, con $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Per ogni gruppo G e per ogni coppia di omomorfismi $h\colon \pi_1(U_1, x_0) \to G$, $k\colon \pi_1(U_2, x_0) \to G$ tali che $h \circ \varphi_1 = k \circ \varphi_2$, esiste un unico omomorfismo $\hat{\Psi}$ che soddisfa la proprietà universale, ossia che rende commutativo il seguente diagramma:*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & G & \pi_1(X, x_0) \arrow[l, "\hat{\Psi}"] \\
 & \pi_1(U_2, x_0) \arrow[u, "k"'] \arrow[ur, "\psi_2"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.10}$$

Ci interessa ora dimostrare in che modo la proprietà universale del teorema rappresentata dal diagramma 3.10 implica la versione data in 3.1, in particolare dimostreremo che $Ker\Phi \subseteq N$, ossia il terzo punto della dimostrazione del teorema 3.1. Per brevità, denoteremo nel seguito il teorema di Seifert-Van Kampen con SVK.

Dimostrazione: (SVK in versione universale $\implies$ SVK)
Supponiamo che esista un'applicazione $\Phi\colon \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ e che $N \subseteq ker\Phi$, cioè che risultino soddisfatti i primi due punti della dimostrazione di 3.1. Per l'osservazione 3.2.1, esiste un isomorfismo

$$\hat{\Phi}\colon \frac{\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)}{N} \to \pi_1(X, x_0). \tag{3.11}$$

tale che $\Phi = \hat{\Phi} \circ \pi$. Sia $G = \dfrac{\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)}{N}$ e definiamo gli omorfismi h, k nel modo seguente:

$$h = \pi \circ i_{U_1} \tag{3.12}$$

$$k = \pi \circ i_{U_2}, \tag{3.13}$$

dove

$$i_{U_1}\colon \pi_1(U_1, x_0) \to \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$$

$$i_{U_2} \colon \pi_1(U_1, x_0) \to \pi_1(U_2, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$$

sono le inclusioni. Otteniamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "h=\pi\circ i_{U_1}"'] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & G & \pi_1(X, x_0) \arrow[l, "\hat{\Psi}"'] \\
 & \pi_1(U_2, x_0) \arrow[u, "k=\pi\circ i_{U_2}"] \arrow[ur, "\psi_2"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.14}$$

Osserviamo che la parte sinistra è commutativa; infatti:

$$h \circ \varphi_1 = \pi \circ i_{U_1} \circ \varphi_1 = \pi \circ i_{U_2} \circ \varphi_2 = k \circ \varphi_2.$$

Dimostriamo ora che l'applicazione $\hat{\Psi}$ è iniettiva e suriettiva.

1. $\hat{\Psi}$ è suriettiva.
   Sia $\delta = [a_1]_{U_1} * [a_2]_{U_2} * \dots [a_m]_{U_1} * [b_m]_{U_2} N$ un elemento in G e sia

   $$\sigma = \psi_1([a_1]_{U_1})\psi_2([a_2]_{U_2}) \cdot \dots \cdot \psi_1([a_m]_{U_1})\psi_2([b_m]_{U_2}) \in \pi_1(X, x_0).$$

   Si ottiene:

   $$\begin{aligned}
   \hat{\Psi}(\sigma) &= \hat{\Psi}(\psi_1([a_1]_{U_1})\psi_2([a_2]_{U_2}) \cdot \dots \cdot \psi_1([a_m]_{U_1})\psi_2([b_m]_{U_2})) \\
   &= \hat{\Psi}(\psi_1[a_1]_{U_1}) * \hat{\Psi}(\psi_2[a_2]_{U_2}) * \dots * \hat{\Psi}(\psi_1[a_m]_{U_1}) * \hat{\Psi}(\psi_2[b_m]_{U_2})N \\
   &= h([a_1]_{U_1}) * k([a_2]_{U_2}) * \dots * h([a_m]_{U_1}) * k([b_m]_{U_2}) \\
   &= [a_1]_{U_1}N * [a_2]_{U_2}N * \dots [a_m]_{U_1}N * [b_m]_{U_2}N \\
   &= \delta.
   \end{aligned}$$

2. $\hat{\Psi}$ è iniettiva:
   Ricordando l'osservazione 3.2.1 ed in particolare il diagramma (3.9), osserviamo che il diagramma seguente è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \pi_1(X, x_0) & \pi_1(X, x_0) \arrow[l, "\hat{\Phi}\circ\hat{\Psi}"'] \\
 & \pi_1(U_2, x_0) \arrow[u, "\psi_2"] \arrow[ur, "\psi_2"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.15}$$

La parte sinistra è immediata per come abbiamo definito le applicazioni φ_1 e φ_2 nel diagramma 3.2, mentre per quanto riguarda la parte destra ricordiamo che:

$$\hat{\Psi} \circ \psi_1 = h = \pi \circ i_{U_1}$$
$$\hat{\Psi} \circ \psi_2 = h = \pi \circ i_{U_2},$$

dalle quali, sostituendo, si ottiene:

$$\hat{\Phi} \circ \hat{\Psi} \circ \psi_i = \hat{\Phi} \circ \pi \circ i_{U_i} = \Phi \circ i_{U_i} = \psi_i, \qquad i = 1, 2.$$

D'altra parte, anche il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \pi_1(X, x_0) & \pi_1(X, x_0) \arrow[l, "id"'] \\
 & \pi_1(U_2, x_0) \arrow[u, "\psi_2"] \arrow[ur, "\psi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Per l'unicità dell'omomorfismo $\hat{\Psi}$ espressa nella proprietà universale del Teorema 3.2 secondo il diagramma (3.10), si ha che $\hat{\Phi} \circ \hat{\Psi} = id_{\pi_1(X, x_0)}$ e da ciò segue che $\hat{\Psi}$ è iniettiva e ciò conclude la dimostrazione.

3.4 Applicazioni

Mostreremo in questa sezione alcuni esempi di calcolo del gruppo fondamentale, riferendoci a quanto studiato nel corso di Topologia Algebrica.

Primo caso: Intersezione semplicemente connessa

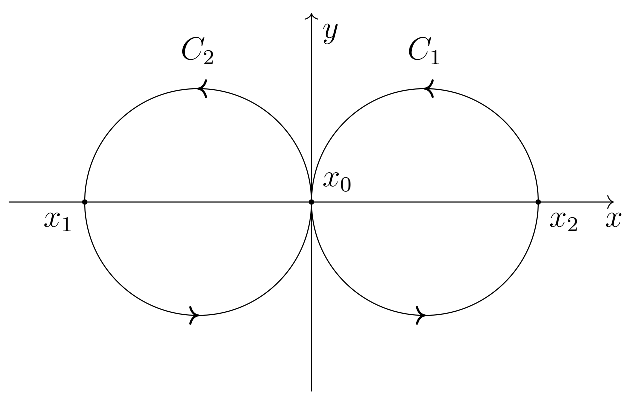
Corollario 3.4.1. *Siano U_1, U_2 due sottoinsiemi di uno spazio topologico X che soddisfino le ipotesi del Teorema di Seifert-Van Kampen e tali che la loro intersezione sia uno spazio semplicemente connesso. Allora l'omomorfismo*

$$\Phi \colon \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

è un isomorfismo.

Sfrutteremo il risultato espresso da tale Corollario per calcolare il gruppo fondamentale di alcuni spazi particolari.

Esempio 3.4.1. *Il gruppo fondamentale della figura* ∞
Sia X lo spazio topologico dato da $C_1 \cup C_2$, dove $C_1 = \{x = (x_1, x_2) | (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\}$ e $C_2 = \{x = (x_1, x_2) | (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1\}$ rappresentato dalla figura ∞. Per calcolare il suo gruppo fondamentale consideriamo due punti $x_1 \in C_1$ e $x_2 \in C_2$ che siano diversi dal punto x_0.

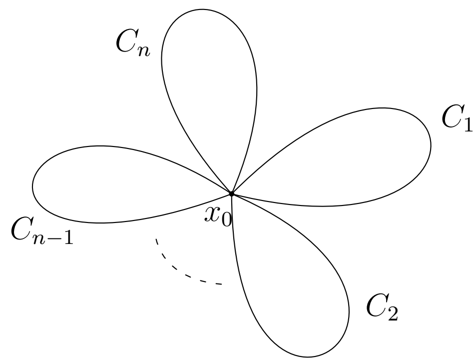


Gli insiemi $U_1 = X \setminus \{x_2\}$ e $U_2 = X \setminus \{x_1\}$ sono aperti e connessi per archi e la loro intersezione è uno spazio omotopicamente equivalente al punto x_0, in quanto può essere retratto per deformazione in x_0, e quindi è semplicemente connesso. Inoltre, i C_j, $j = 1, 2$ sono retratti per deformazione degli aperti U_1, U_2 e pertanto $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(C_j, x_0)$, $j = 1, 2$ e per il precedente Corollario

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) = \pi_1(C_2, x_0) * \pi_1(C_1, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Esempio 3.4.2. *Il bouquet di n cerchi* Definiamo il bouquet di n cerchi come lo spazio topologico X_n ottenuto dall'unione di un numero finito di spazi $C_1, \ldots, C_n$ che siano omeomorfi ad S^1 con un unico punto in comune x_0. Sfruttando il Corollario precedente e, ragionando per induzione sul numero $n \geq 2$ di circonferenze, mostreremo che il gruppo fondamentale del bouquet è il gruppo libero su

n generatori.



Infatti, dal precedente esempio sappiamo che ciò è vero per $n = 2$; supponiamo per ipotesi induttiva che l'affermazione sia vera per $2 \leq k < n$ e consideriamo $x_j \in C_j$ diversi dal punto x_0. In questo modo possiamo definire i due aperti U_1 e U_2 connessi per archi di X_n nel modo seguente: $U_1 = X_n \setminus \{x_n\}$, $U_2 = X_n \setminus \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Per poter applicare il Corollario, osserviamo che U_1 si retrae per deformazione a X_{n-1}, U_2 a C_n e l'intersezione $U_1 \cap U_2$ è un insieme semplicemente connesso. Segue dal Corollario e dall'ipotesi induttiva che

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X_{n-1}, x_0) * \pi_1(C_n, x_0) = (\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}) * \mathbb{Z} = \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$$

Secondo caso: U_2 semplicemente connesso

Corollario 3.4.2. *In aggiunta alle ipotesi del Teorema di Seifert-Van Kampen, supponiamo che l'insieme U_2 sia semplicemente connesso e siano*

$$\pi_1(U_2, x_0) = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m | \rho_1, \ldots, \rho_r \rangle;$$

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_p | \tau_1, \ldots, \tau_t \rangle$$

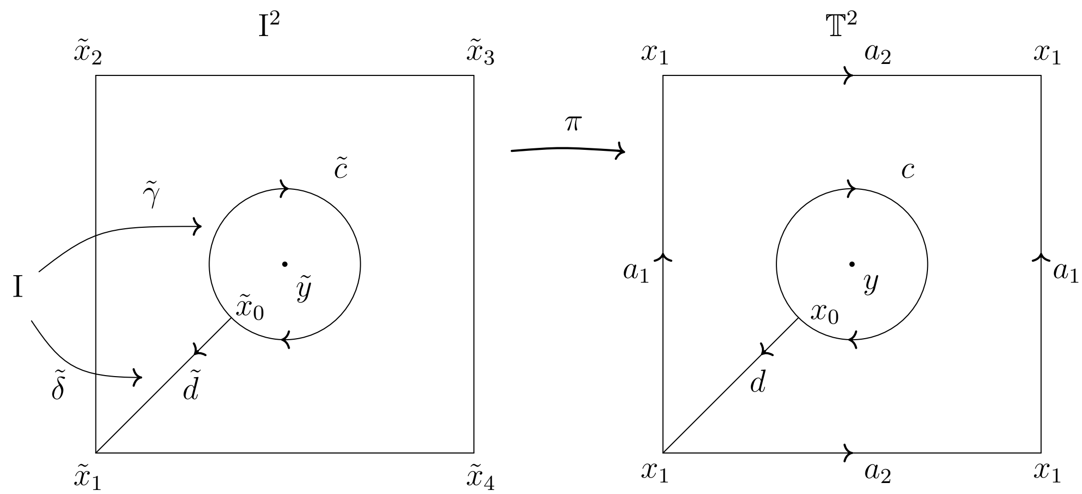
presentazioni finite dei gruppi fondamentali U_1 e $U_1 \cap U_2$. Allora $\pi_1(X, x_0)$ ha la presentazione finita

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m | \rho_1, \ldots, \rho_r, u_1, \ldots, u_p \rangle,$$

dove per ogni $\alpha = 1, \ldots, p$, u_α è un'espressione di $\varphi_1(\gamma_1 \alpha) \in \pi_1(U_1, x_0)$ rispetto ai generatori $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$.

Esempio 3.4.3. *Il gruppo fondamentale del toro.*

Sia $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ il toro pensato come quadrato I^2 avente i lati identificati come mostrato nella seguente figura e sia $\pi\colon\ I^2 \to \mathbb{T}^2$ la proiezione sullo spazio quoziente.



I vertici del quadrato I^2, come mostra la figura, si identificano tutti al punto $x_1 \in \mathbb{T}^2$, mentre ciascuno dei lati sia orizzontali che verticali corrisponde ad un laccio in $\mathbb{T}^2$ basato in x_1. Per poter costruire aperti opportuni che ci consentano di rispettare le ipotesi del Teorema e del Corollario3.4.2, consideriamo gli insiemi $\tilde{U}_1 = I^2 \setminus \{\tilde{y}\}$ e $\tilde{U}_2 = Int(I^2)$, che sono aperti e connessi per archi; in questo modo, gli insiemi $U_1 = \pi(\tilde{U}_1) = \mathbb{T}^2 \setminus \{\tilde{y}\}$ e $U_2 = \pi(\tilde{U}_2) = \mathbb{T}^2 \setminus \{a_1 \cup a_2\}$ soddisfano le ipotesi, in quanto sono aperti e connessi per archi la cui unione è $\mathbb{T}^2$ e la cui intersezione è un aperto connesso per archi. Inoltre, essendo l'aperto U_2 omeomorfo a $Int(I^2)$ (convesso), è semplicemente connesso e pertanto, per calcolare $\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0)$ applichiamo il corollario. L'aperto U_1 si retrae per deformazione forte ad un bouquet di due cerchi basati in x_1; allora, per l'esempio 3.4.2, si ottiene

$$\pi_1(U_1, x_1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle [\alpha_1, \alpha_2] \rangle,$$

dove abbiamo denotato con $[\alpha_j]$, $j = 1, 2$, la classe del laccio $\alpha_j\colon\ I \to\ U_1$ basato in x_1 ed ottenuto percorrendo a_j con un singolo giro. Consideriamo ora l'arco $\tilde{\delta}\colon I \to I^2$, ottenuto percorrendo il segmento di retta $\tilde{d}$ che unisce $\tilde{x_0}$ a $\tilde{x_1} = (0, 0)$, con $\tilde{x_0}$ unico punto di I^2 tale che $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$ e siano $\delta\colon I \to \mathbb{T}^2, \delta = \pi \circ \tilde{\delta}$ e $d = \pi(\tilde{d})$ le immagini sul quoziente. Denotata con

$$A_j = [\delta \cdot \alpha_j \cdot i(\delta)], \quad j = 1, 2$$

la classe in $\pi_1(U_1, x_0)$ del laccio $\delta \cdot \alpha_j \cdot i(\delta)$ basato in x_0, si ha

$$\pi_1(U_1, x_0) = \langle A_1, A_2 \rangle.$$

Inoltre, se $\tilde{c}$ è il cerchio di I^2 passante per $\tilde{x_0}$ e con centro in $\tilde{y}$, $\tilde{U} \cup \tilde{V}$ si retrae per deformazione forte a $\tilde{c}$, pertanto

$$\pi_1(U_1 \cup U_2, x_0) \cong \langle [\gamma] \rangle,$$

dove $\gamma \colon I \to \mathbb{T}^2$ è il laccio ottenuto da $\gamma = \pi(\tilde{\gamma})$ e $\tilde{\gamma} \colon I \to I^2$ si ottiene percorrendo $\tilde{c}$ mediante un singolo giro. Possiamo ora applicare il Corollario 3.4.2, dopo aver opportunamente espresso $\varphi_1([\gamma])$ in termini di generatori A_1, A_2, ottenendo che

$$\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) \cong \langle A_1, A_2 | A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1} \rangle$$

che è omeomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, (cfr. esempio 2.1.6).

Terzo caso: U_1 e U_2 semplicemente connessi

Corollario 3.4.3. *Sia X uno spazio topologico esprimibile mediante unione di due aperti semplicemente connessi U_1 e U_2 tali che $U_1 \cap U_2$ sia non vuota e connessa per archi. Allora X é semplicemente connesso.*

Esempio 3.4.4. *La sfera S^n, $n \geq 2$, è semplicemente connessa.*

Gli aperti $U_1 = S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$ e $U_2 = S^n \setminus \{S\} \cong \mathbb{R}^n$, dove i punti N, S rappresentano rispettivamente il polo Nord ed il polo Sud della sfera, soddisfano le ipotesi del precedente corollario, in quanto sono semplicemente connessi e la loro intersezione $U_1 \cap U_2 \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è connessa per archi. Pertanto, la sfera è semplicemente connessa (cfr. esempio 1.2.1).

Capitolo 4

La dimostrazione di Grothendieck

4.1 Monodromia di un rivestimento

Dato un rivestimento $p \colon \tilde{X} \to X$ ed un punto $x_0 \in X$, si definisce monodromia del rivestimento p l'applicazione

$$p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0), \qquad (\tilde{x}_0, [f]) \mapsto \tilde{f}(1), \tag{4.1}$$

dove $\tilde{f}$ è il sollevamento del rappresentante $f \in [f]$ che inizia in $\tilde{x}_0$ (cfr.(2.1)).

Lemma 4.1. *L'applicazione di monodromia di un rivestimento definita in* (4.1) *definisce un'azione destra di $\pi_1(X, x_0)$ sulla fibra $p^{-1}(x_0)$.*

Dimostrazione. Per dimostrare che $\pi_1(X, x_0)$ agisce sulla destra della fibra $p^{-1}(x_0)$ occorre dimostrare che:

$$\tilde{x}_0 \cdot [\epsilon_{x_0}] = \tilde{x}_0, \qquad \forall \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0),$$

la quale è immediata in quanto un qualsiasi sollevamento dell'arco costante è un laccio, e che

$$(\tilde{x}_0 \cdot [f]) \cdot [g] = \tilde{x}_0([f] \cdot [g]), \qquad \forall [f], [g] \in \pi_1(X, x_0).$$

Per dimostrare quest'ultima osserviamo che si tratta di sollevamenti che finiscono nello stesso punto della fibra:

$$(\tilde{x}_0 \cdot [f]) \cdot [g] = (l_{\tilde{x}_0}(f)(1)) \cdot [g] = (l_{\tilde{f}(1)}(g))(1),$$

dove $l_{\tilde{x}_0}(f)$ rappresenta l'unico sollevamento di f che inizia in $\tilde{x}_0$ e $l_{\tilde{f}(1)}(g)$ l'unico sollevamento di g che inizia nel punto $\tilde{f}(1)$. D'altra parte, grazie alle proprietà dei sollevamenti rispetto all'operazione di concatenazione tra classi definita in (1.2), si ha:

$$\tilde{x}_0([f]\cdot[g]) = \tilde{x}_0([f\cdot g]) = (l_{\tilde{x}_0}(f\cdot g))(1) = l_{\tilde{x}_0}(f)(1)\cdot l_{\tilde{f}(1)}(g)(1) = l_{\tilde{f}(1)}(g))(1).$$

Da ciò segue che il punto finale sollevamento dell'arco g che inizia in $\tilde{f}(1)$ ed il punto finale del sollevamento di $f\cdot g$ che inizia in $\tilde{x}_0$ coincidono e questo conclude la dimostrazione del lemma. □

L'azione di monodromia di un rivestimento soddisfa inoltre le proprietà riportate nella seguente proposizione:

Proposizione 4.1.1. *Sia $p\colon \tilde{X}\to X$ un rivestimento e $x_0\in X$. Valgono allora i seguenti fatti:*

1. *l'azione di monodromia è transitiva se e solo se la fibra $p^{-1}(x_0)$ appartiene alla stessa componente connessa per archi di $\tilde{X}$ (in particolare se $\tilde{X}$ è connesso per archi allora l'azione di monodromia è transitiva su qualunque punto di X);*
2. *il gruppo di isotropia di $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ è $p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$;*
3. *esiste una bigezione equivariante tra $p^{-1}(x_0)$ e $\pi_1(X,x_0)/p_*\pi^{-1}(\tilde{X},\tilde{x}_0)$.*

Dimostrazione.

1. Per dimostrare la transitività dell'azione, occore mostrare che, per ogni $\tilde{x}_0,\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_0)$, esiste $[f]\in\pi_1(X,x_0)$ tale che $\tilde{x}_0\cdot[f]=\tilde{x}_1$. Grazie all'ipotesi di connessione per archi, esiste un arco $\tilde{f}\colon I\to\tilde{X}$ tale che $\tilde{f}(0)=\tilde{x}_0$ e $\tilde{f}(0)=\tilde{x}_0$. Ma tale arco non è altro che il sollevamento del laccio $f\colon I\to X$ basato in x_0, in quanto $p\circ\tilde{f}=f$.
2. La classe $[f]$ appartiene al gruppo di isotropia se e solo se $[f](\tilde{x}_0)=\tilde{f}(1)=\tilde{x}_0$. Segue che $\tilde{f}$ è un laccio basato in $\tilde{x}_0$ e la conclusione segue dal Teorema 2.2.
3. E' conseguenza della Proposizione 2.7.1.

□

La monodromia di un rivestimento determina il rivestimento, secondo il seguente teorema:

Teorema 4.1. *Sia X uno spazio topologico connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso e $x_0 \in X$. Per ogni insieme G e per ogni azione destra di $\pi_1(X, x_0)$ su G, esiste un rivestimento $p\colon \tilde{X} \to X$ ed una bigezione $\Phi\colon G \to p^{-1}(x_0)$ tale che*

$$\Phi(g \cdot [f]) = \Phi(g) \cdot [f], \forall g \in G, \forall [f] \in \pi_1(X, x_0).$$

Inoltre la coppia (p, Φ) è unica a meno di isomorfismi, cioè per ogni altra coppia $(\hat{p}, \hat{\Phi})$ esiste un isomorfismo di rivestimenti che estende $\hat{\Phi} \circ \Phi^{-1}$.

Corollario 4.1.1. *Sia Z uno spazio topologico connesso, localmente connesso per archi e localmente semplicemente connesso, $z_0 \in Z$ e sia G un gruppo. Allora:*

1. *esiste una bigezione naturale*

$$\{\pi_1(Z, z_0) \to G\} \leftrightarrow \{(\tilde{Z}, \tilde{z}_0) \to (Z, z_0)\}/ \sim, \tag{4.2}$$

   che associa ad ogni omomorfismo $\alpha\colon \pi_1(Z, z_0) \to G$ un rivestimento regolare $f(\alpha)\colon (\tilde{Z}, \tilde{z}_0) \to (Z, z_0)$ con fibra G.

2. *Se U è un aperto connesso per archi contenuto in Z, $j\colon U \to Z$ l'inclusione e $j_*\colon \pi_1(U, z_0) \to \pi_1(Z, z_0)$ l'applicazione indotta, allora si ha che $f(\alpha \circ j_*) = f(\alpha)_{|U}$, dove α è definita in (4.2).*

La relazione d'equivalenza introdotta sull'insieme dei rivestimenti regolari con fibra G è definita come segue:
$(\tilde{Z}, \tilde{z}_0) \sim (\tilde{W}, \tilde{w}_0)$ se e solo se esiste un omeomorfismo F tale che, per ogni coppia di rivestimenti regolari $p\colon (\tilde{Z}, \tilde{z}_0) \to Z$ e $q\colon (\tilde{W}, \tilde{w}_0) \to Z$ il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{Z}, \tilde{z}_0) \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "p"'] & & (\tilde{W}, \tilde{w}_0) \arrow[dl, "q"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

e che sia G-equivariante:

$$F(g \cdot \tilde{Z}) = g \cdot F(\tilde{Z}). \tag{4.3}$$

Osservazione 4.1.1. Il rivestimento regolare associato ad un omomorfismo come nel precedente teorema, non è necessariamente connesso; basti pensare infatti all'omomorfismo banale $id\colon \pi_1(Z, z_0) \to \pi_1(Z, z_0)$ che corrisponde al rivestimento regolare $Z \times G \to Z, \quad (z, g) \mapsto z$, nel quale $Z \times G$ non è connesso.

4.2 La dimostrazione di Grothendieck

In questa sezione analizzeremo la dimostrazione di Grothendieck del Teorema di Seifert-Van Kampen, seguendo lo schema proposto da Fulton. Tale dimostrazione, basata sulla teoria dei rivestimenti, richiede in particolare che gli spazi topologici coinvolti siano connessi, localmente connessi per archi e localmente semplicemente connessi; rispetto a quella proposta nel terzo capitolo risulta essere molto più breve, elegante e facile da memorizzare. Inoltre, è interessante osservare che le ipotesi richieste sono soddisfatte dalla maggior parte degli spazi topologici usati più comunemente.

Teorema 4.2. *Sia X uno spazio topologico connesso, localmente connesso per archi e localmente semplicemente connesso e siano U_1 e U_2 due sottoinsiemi aperti di X tali che $X = U_1 \cup U_2$. Assumiamo inoltre che U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ siano spazi topologici non vuoti, connessi per archi e semilocalmente semplicemente connessi. Allora per ogni $x_0 \in U_1 \cap U_2$, il diagramma seguente*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U, x_0) \arrow[dr] & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \pi_1(X, x_0) \\
 & \pi_1(U_2, x_0) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

soddisfa la proprietà universale.

Dimostrazione. Ricordando il Teorema (3.2), consideriamo il diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & G & \pi_1(X, x_0) \\
 & \pi_1(U_2, x_0) \arrow[u, "k"'] \arrow[ur, "\psi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Per il Corollario 4.1.1, esistono un rivestimento associato ad h dato da:

$$f_1(h)\colon (\tilde{U}_1, \tilde{x}_1) \to (U_1, x_0) \tag{4.4}$$

ed un rivestimento associato a k :

$$f_2(k)\colon (\tilde{U}_2, \tilde{x}_2) \to (U_2, x_0). \tag{4.5}$$

Consideriamo inoltre i seguenti rivestimenti regolari:

$$f_1(h \circ \varphi_1)\colon (f_1^{-1}(U_1 \cap U_2), \tilde{x}_1) \to (U_1 \cap U_2, x_0) \tag{4.6}$$

$$f_2(k \circ \varphi_2)\colon (f_2^{-1}(U_1 \cap U_2), \tilde{x}_2) \to (U_1 \cap U_2, x_0). \tag{4.7}$$

Osserviamo che, poichè $h \circ \varphi_1$ e $k \circ \varphi_2$, grazie alla commutatività della parte sinistra del diagramma, sono esattamente lo stesso omomorfismo; segue pertanto dal Corollario 4.1.1 che esiste un'applicazione $F\colon f_1^{-1}(U_1 \cap U_2, \tilde{x}_1) \to f_2^{-1}(U_1 \cap U_2, \tilde{x}_2)$ che sia un isomorfismo di rivestimenti regolari. In particolare F è un omeomorfismo G-equivariante e possiamo utilizzarlo per applicare la Proposizione 2.7.5 ed incollare i due rivestimenti ottenendo un rivestimento $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ che sia G-regolare. Applicando il Corollario 4.1.1 a tale rivestimento, otteniamo l'omomorfismo $\hat{\Psi}\colon \pi_1(X, x_0) \to G$ desiderato, ma per concludere la dimostrazione occorre mostrare che tale $\hat{\Psi}$ rende commutativo il diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur] \arrow[dr] & G & \pi_1(X, q) \arrow[l, "\hat{\Psi}"'] \\
 & \pi_1(U_2, x_0) \arrow[u, "k"'] \arrow[ur, "\psi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

cioè che

$$\hat{\Psi} \circ \psi_1 = h \tag{4.8}$$

$$\hat{\Psi} \circ \psi_2 = k.$$

Ma tali relazioni risultano soddisfatte in virtù del secondo punto del Corollario 4.1.1. $\square$

Bibliografia

[1] Hatcher A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[2] Kosnioswski C., *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli 1989.

[3] Lee J. M., *Introduction to Topological Manifolds*, Springer 2000.

[4] Loi A., *Introduzione alla Topologia Generale*, Aracne Editrice (2013).

[5] Manetti M., *Topologia*, Springer-Verlag Italia, 2008.

[6] Massey W., *A basic course in algebraic topology*, Springer-Verlag, 1991.

[7] Munkres J. R., *Topology, A First Course*, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J. 1975.

[8] Sernesi E., *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, Torino 1994.

[9] W. Fulton, *Algebraic topology*, Springer, New York 1995.