Esercizi geometria analitica nello spazio

Corso di Laurea in Informatica

Docente: Andrea Loi

Correzione

1. Denotiamo con $P'_{12}, P'_{13}, P'_{23}, P'_1, P'_2, P'_3, P'$ i simmetrici di un punto P rispetto ai piani coordinati $[xy], [xz], [yz]$, agli assi coordinati x, y, z e all'origine del sistema di riferimento. Calcolare $P'_{12}, P'_{13}, P'_{23}, P'_1, P'_2, P'_3, P'$ quando $P(1, 2, 3)$.

   Soluzione: Il punto P'_{12} sarà, rispetto al piano $[xy]$, dalla parte opposta del punto P ma alla stessa distanza, quindi $P'_{12}(1, 2, -3)$. Analogamente si ricava che $P'_{13}(1, -2, 3)$ e $P'_{23}(-1, 2, 3)$. Il punto P'_1, simmetrico di P rispetto alle x, avrà la stessa ascissa del punto P mentre le altre due coordinate avranno segno opposto, ossia $P'_1(1, -2, -3)$. In modo analogo si ottiene $P'_2(-1, 2, -3)$e $P'_3(-1, -2, 3)$. Infine si ha $P(-1, -2, -3)$.

2. Verificare che i punti $A(1, 1, 1), B(2, -1, 3), C(0, 1, 4)$ non sono allineati.

   Soluzione: Considero i due vettori $\boldsymbol{v} = B - A$ e $\boldsymbol{w} = C - A$. I tre punti sono allineati se i vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono paralleli tra loro. In questo caso $\boldsymbol{v} = (1, -2, 2)$ e $\boldsymbol{w} = (-1, 0, 3)$ e poiché non sono paralleli segue che i tre punti A, B, C non sono allineati.

3. Il baricentro G di un sistema di n punti $A_i(x_i, y_i, z_i)$ ha coordinate:

$$x_G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ y_G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ z_G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i.$$

   Calcolare il baricentro G del triangolo di vertici $A_1(1, 1, 1), A_2(-1, 1, 2)$, $A_3(0, 0, 1)$. Calcolare inoltre il baricentro G del quadrilatero di vertici

$A_1(1,1,1), A_2(-1,1,2), A_3(0,0,1), A_4(0,0,0)$.

Soluzione: Il baricentro G del triangolo di vertici $A_1(1,1,1), A_2(-1,1,2)$, $A_3(0,0,1)$ è $G(0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, mentre il baricentro del quadrilatero con vertici $A_1(1,1,1), A_2(-1,1,2), A_3(0,0,1), A_4(0,0,0)$ è $G(0, \frac{1}{2}, 1)$.

4. Scrivere l'equazione del piano α passante per la retta $r: \; x + y - 1 = 0, \; y - 2z = 0$ e parallelo alla retta $s: \; y - z = 0, \; 3y - 2z + 2 = 0$.

   Soluzione: La totalità dei piani passanti per la retta r è rappresentata dall'equazione

$$\lambda(x + y - 1) + \mu(y - 2z) = 0$$

   che possiamo scrivere nel seguente modo:

$$\lambda x + (\lambda + \mu)y - 2\mu z - \lambda = 0$$

   Tra tutti questi piani cerchiamo quello parallelo alla retta s. Un vettore direzione delle retta s è $(1,0,0)$ (ossia la retta s è parallela all'asse delle x) mentre il vettore $(\lambda, \lambda + \mu, -2\mu)$ è ortogonale al piano cercato. Imponendo che il prodotto scalare tra questi due vettori sia nullo otteniamo $\lambda = 0$, che sostituito nell'equazione del fascio di piani ci da l' equazione del piano $\alpha: \; y - 2z = 0$.

5. Sia r la retta intersezione dei due piani, non paralleli, $\alpha: \; ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha': \; a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

   Dimostrare che le componenti di un vettore direttore $\boldsymbol{v} = (l, m, n)$ della retta r sono date da:

$$l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad m = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

   Soluzione: Ricordando che il vettore $\boldsymbol{w} = (a, b, c)$ è ortogonale al piano α e che il vettore $\boldsymbol{w'} = (a', b', c')$ è ortogonale al piano α', si ha che un vettore della retta r è $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{w'}$, perché la retta r è contenuta in entrambi i piani, perciò le sue componenti (l, m, n) sono date da:

$$l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \; m = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \; n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix},$$

come dovevamo dimostrare.

6. Scrivere l'equazione cartesiana del piano α passante per $P_0(1, 2, 3)$ e contenente la retta $r: \; x = 2, \, y = 1 - t, \, z = 3t + 1$.

   Soluzione: Per prima cosa scriviamo la retta r come intersezione di due piani. Osserviamo che la retta r è contenuta nel piano β di equazione $x = 2$ (si vede dall'espressione parametrica di r), per ottenere l'equazione di un altro piano contenente la retta r ricavo il parametro t dall'equazione $y = 1 - t$, ossia $t = 1 - y$ e lo sostituisco nell'equazione $z = 3t + 1$ ottenendo il piano β' di equazione $3y + z - 4, = 0$. Quindi la retta r può essere rappresentata nel seguente modo:

$$\begin{cases} x = 2\,, \\ 3y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

   L'equazione del fascio proprio di piani contenente la retta r è:

$$\lambda(x - 2) + \mu(3y + z - 4) = 0$$

   Sostituendo le coordinate del punto P_0 nell'equazione del fascio troviamo $\lambda = 5\mu$, scegliendo poi $\mu = 1$ ricaviamo che α ha equazione: $5x + 3y + z - 14 = 0$

7. Dato il punto $P_0(1, 2, -1)$ ed il piano $\alpha : \; x + y - z + 1 = 0$. Determinare l'equazione del piano α' passante per P_0 e parallelo ad α.

Soluzione: Il piano α' è parallelo ad α, quindi è ortogonale al vettore $(1, 1, -1)$ ed ha equazione cartesiana $x + y - z + d = 0$. Imponendo che il punto P_0 appartenga al piano α troviamo che il termine noto $d = -4$, perció $\alpha : \; x + y - z - 4 = 0$.

8. Scrivere le equazioni cartesiane e le equazioni parametriche della retta passante per i punti A e B nei seguenti casi:

   (a) $A(1, 1, 0), B(1, 1, -1)$;

   (b) $A(0, 0, 0), B(1, 2, 0)$;

   (c) $A(-1, 1, 1), B(2, 2, 2)$.

   Soluzione:

   (a) Prendiamo come vettore direzione della retta $\boldsymbol{v} = B - A = (0, 0, -1)$, le equazioni parametriche della retta per A e per B sono: $x = 1$, $y = 1$, $z = -t$, mentre le equazioni cartesiane sono: $x = 1$, $y = 1$;

   (b) Prendiamo come vettore direzione della retta $\boldsymbol{v} = B - A = (1, 2, 0)$, le equazioni parametriche sono: $x = u$, $y = 2u$, $z = 0$. Dalle equazioni parametriche segue che le equazioni cartesiane della retta sono: $2x - y = 0$, $z = 0$;

   (c) Prendiamo come vettore direzione della retta $\boldsymbol{v} = B - A = (3, 1, 1)$, le equazioni parametriche della retta per A e per B sono: $x = -1 + 3t$, $y = 1 + t$, $z = 1 + t$, mentre le equazioni cartesiane sono: $y - z = 0$, $x - 3y + 4 = 0$.

9. Determinare i parametri direttori e dare una rappresentazione parametrica delle seguenti rette:

   (a) $x = y = \frac{z+1}{2}$;

(b) $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$;

(c) $x - 2y + z - 1 = 0$, $x + 3y - 2z + 2 = 0$.

Soluzione:

(a) Per ottenere una rappresentazione parametrica della retta, per prima cosa la si scrive come intersezione di due piani, ottenendo: $x - y = 0$, $y - \frac{z+1}{2} = 0$. Poi si sceglie una variabile da porre uguale al parametro, ad esempio $x = t$ e sostituendola nelle equazioni cartesiane della retta si ottiene la rappresentazione parametrica: $x = t$, $y = t$, $z = 2t - 1$. Un vettore direzione della retta è $\boldsymbol{v} = (1, 1, 2)$.

(b) Scriviamo la retta come intersezione di due piani: $x - y + 1 = 0$, $3y - 2z + 2 = 0$. Ponendo $x = u$ otteniamo la rappresentazione parametrica: $x = u$, $y = 1 + u$, $z = \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}$. Un vettore direzione della retta è $\boldsymbol{v} = (2, 2, 3)$.

(c) Ponendo $x = t$ otteniamo la rappresentazione parametrica: $x = t$, $y = 3t$, $z = 5t + 1$. Un vettore direzione della retta è $\boldsymbol{v} = (1, 3, 5)$.

10. Scrivere come intersezione di due piani le rette r e s aventi le seguenti equazioni parametriche: $r : x = 1 - 2t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - 3t$, $s : x = 1 - u$, $y = 3$, $z = 2 + 3u$.

    Soluzione: Per poter scrivere una retta come intersezione di due piani si ricava il parametro da un'equazione dell'espressione parametrica e si sostituisce nelle restanti due che rappresentano i due piani cercati.

    Per la retta r otteniamo: $x + 2y - 3 = 0$, $3y + z - 1 = 0$.

    Per la retta s otteniamo: $y = 3$, $3x + z - 5 = 0$.

11. Determinare la posizione reciproca delle seguenti coppie di rette:

(a) $r : x + y + z = 0,\ x = 0,\ s : x = 0,\ x - 2y = 1;$

(b) $r : x = 1 + t,\ y = t,\ z = -t,\ s : x = 1 + u,\ y = u,\ z = -2 + u;$

(c) $r : x + y + z - 1 = 0,\ x - y = 0,\ s : x = t,\ y = 1 + t,\ z = -t;$

(d) $r : x = 2+t, y = -1-t, z = 4+3t, s : x = 3+u, y = 2+u, z = 4+u.$

Soluzione:

(a) Entrambe le rette appartengono al piano di equazione $x = 0$ perció le rette sono complanari. Vediamo ora se sono parallele oppure se sono incidenti. considerando il sistema:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

otteniamo che le rette sono incidenti nel punto $P(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(b) Date due rette r ed s, passanti per i punti $P_r(x_r, y_r, z_r)$ e $P_s(x_s, y_s, z_s)$ e aventi direzione $\boldsymbol{v}_r = (l_r, m_r, n_r)$ e $\boldsymbol{v}_s = (l_s, m_s, n_s)$ rispettivamente, esse sono complanari se e solo se

$$\begin{vmatrix} x_r - x_s & y_r - y_s & z_r - z_s \\ l_r & m_r & n_r \\ l_s & m_s & n_s \end{vmatrix} = 0,$$

altrimenti sono sghembe. In questo caso si ha: $P_r(1, 0, 0)$, $P_s(1, 0, -2)$, $\boldsymbol{v}_r = (1, 1, -1)$ e $\boldsymbol{v}_s = (1, 1, 1)$, da cui

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

segue che le rette r e s sono complanari,inoltre poiché non sono parallele sono incidenti esattamente nel punto $P(2, 1, -1)$.

(c) La retta r ha rappresentazione parametrica: $x = u\,, y = u, z = 1 - 2t$, quindi $P_r(0,0,1)$, $P_s(0,1,0)$, $\boldsymbol{v}_r = (1,1,-2)$ e $\boldsymbol{v}_s = (1,1,-1)$, da cui

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

segue che le rette r e s sono sghembe.

(d) Abbiamo: $P_r(2,-1,4)$, $P_s(3,2,4)$, $\boldsymbol{v}_r = (1,-1,3)$ e $\boldsymbol{v}_s = (1,1,1)$, da cui

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

segue che le rette r e s sono sghembe.

12. Trovare la distanza del punto $P_0(1,1,0)$ dalla retta $r : x + y = 0, x - z = 0$.

Soluzione: Per determinare la distanza di un punto P da una retta r, si calcola la distanza di P dal punto H, intersezione della retta r col piano per P ortogonale ad r.

La rappresentazione parametrica di r è: $x = t, y = -t, z = t$ mentre il piano α, ortogonale ad r e passante per il punto P_0, ha equazione: $x - y + z = 0$. Il punto H, intersezione tra la retta r ed il piano α si ottiene da r per $t = 0$, ossia $H(0,0,0)$. La distanza del punto P_0 dalla retta r è:

$$d(P_0, r) = d(P_0, H) = \sqrt{2}\,.$$

13. Calcolare la distanza tra le rette $r : 2x + z = 0,\ x - y = 0,\ s : x = t,\ y = 1 + t,\ z = -t$.

Soluzione: La rappresentazione parametrica della retta r è: $x =$

$u\,, y \,=\, u, z \,=\, -2u$, vediamo quale è la posizione reciproca delle rette r ed s. Abbiamo $P_r(0,0,0)$, $P_s(0,1,0)$, $\boldsymbol{v}_r \,=\, (1,1,-2)$ e $\boldsymbol{v}_s \,=\, (1,1,-1)$, da cui

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

segue che le rette r e s sono sghembe. In questo caso la distanza tra le due rette può essere calcolata come la distanza di un punto qualunque P di s dal piano α passante per r e parallelo ad s. Il fascio proprio contente la retta r ha equazione: $\lambda(2x \,+\, z\,) +,\ mu(x \,-\, y) \,=\, 0,$. Imponendo che il piano del fascio sia parallelo ad s si ottiene: $2\lambda + \mu - \mu - \lambda \,=\, \lambda \,=\, 0$. Il piano α ha quindi equazione cartesiana:

$$x \,-\, y \,=\, 0.$$

Prendiamo il punto $P(0,1,0) \in s$ la distanza tra le due rette è:

$$d/(r,s) \,=\, (P,\alpha) \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

14. Determinare centro e raggio della sfera di equazione:

$$x^2 \,+\, y^2 \,+\, z^2 \,-\, 2y \,-\, 6z \,+\, 1 \,=\, 0.$$

Trovare, inoltre l'equazione del piano tangente ad S nel punto $P_0(0,1,0)$.

Soluzione: Scrivendo l'equazione della sfera nel seguente modo:

$$x^2 \,+\, (y \,-\, 1)^2 \,+\, (z \,-\, 3)^2 \,=\, 9$$

ricaviamo che il centro della sfera è $C(0,1,3)$, mentre il raggio è $R \,=\, 3$. Il piano tangente alla sfera nel punto P_0 è passante per il punto P_0 e ortogonale al vettore $C \,-\, P_0$ ed ha perció equazione: $z \,=\, 0$.

15. Trovare centro e raggio della circonferenza σ intersezione della sfera S dell'esercizio precedente con il piano $\pi : x + y + z - 1 = 0$.

Soluzione: Il centro C_1 della circonferenza σ è l'intersezione tra il piano α e la retta r ortogonale ad esso passante per il centro $C(0, 1, 3)$ della sfera. La retta ha rappresentazione parametrica: $x = t, y = 1 + t, z = 3 + t$, sostituendo questi valori nell'equazione di α otteniamo il valore del parametro t relativo al punto C_1, ossia

$$t + 1 + t + 3 + t - 1 = 0 \Longrightarrow t = -1$$

quindi $C_1(-1, 0, 2)$. Per quanto riguarda il raggio r di σ, esso si ottiene dal Teorema di Pitagora, da:

$$r = \sqrt{R^2 - \overline{CC_1}^2} = \sqrt{6}$$