Esercizi sui vettori nel piano, nello spazio e $\mathbb{R}^n$
Corso di Laurea in Informatica A.A. 2006-2007
Docente: Andrea Loi

0. Sia $\lambda = 3$, $\mu = 2$ $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Calcolare:

$$\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w},\ \ \mathbf{t} = \mu\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}.$$

   Calcolare inoltre il loro prodotto scalare cioè $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}$.

1. Calcolare il prodotto scalare e vettoriale tra i vettori $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Verificare inoltre la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz, cioè: $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|$.

2. Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$ a λ e μ due numeri reali. Dimostrare che:

$$(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) \wedge \mathbf{u} = \lambda(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) + \mu(\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}).$$

3. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$. Definiamo

$$S^{perp} = \{v \in \mathbb{R}^3 |\ v \cdot s = 0, \forall s \in S\}$$

   Descrivere S^{perp} nel caso $S = \{\mathbf{v} = (1,1,1), w = (2,2,2)\}$.

4. Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vettori non nulli di $\mathbb{R}^3$. E sia

$$pr_w(v) = \frac{v \cdot w}{\|w\|^2} w$$

   la proiezione di v su w.

   a. Se $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$ quanto vale $pr_w(v)$?
   b. Se $ang(v,w) = \theta$, calcolare $pr_w(v)$ e $pr_v(w)$.

5. Siano $\mathbf{v} = (1,4,5)$ e $\mathbf{w} = (0,-2,-1)$. Calcolare l'area del parallelogramma di vertici $O, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w} + \mathbf{v}$. Tale parallelogramma è un rombo, un rettangolo e(o) un quadrato?

6. Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vettori di $\mathbb{R}^n$ e λ un numero reale.

   a) Dimostrare che $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\|$.

   b) Dimostrare che se $\mathbf{w}$ è ortogonale a $\mathbf{v}$, allora è ortogonale anche a tutti i multipli di $\mathbf{v}$.

6. Dimostrare che $\mathbf{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$ e $\mathbf{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}+\mathbf{j})$ è una base ortonormale nel piano (cioè $\mathbf{e_1}$ e $\mathbf{e_2}$ sono due versori ortogonali). Scrivere le componenti del vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ rispetto alla base $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$. Come si scrivono le componenti di un vettore $v = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ rispetto alla base $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$.