**Algebra di Lie**
**Corso di Laurea in Matematica A.A. 2024-2025**
**Docente: Andrea Loi**

1. Sia $G = G_1 \times \cdots \times \cdots \times G_k$ il prodotto di $k$ gruppi di Lie $G_1, \dots, G_k$. Dimostrare che $\exp_{Lie(G)} = \exp_{Lie(G_1)} \times \cdots \times \exp_{Lie(G_k)}$.

2. Si dimostri che se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore per una matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$ allora $e^\lambda$ è un autovalore per $e^B$. Si deduca che se $G = SL_2(\mathbb{R})$ il gruppo lineare speciale allora l'applicazione esponenziale $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ non è suriettiva (Suggerimento per la seconda parte: si usi la prima parte per dimostrare che se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ allora non esiste $B$ tale che $e^B = A$).

3. Dimostrare che l'applicazione $\exp : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{T}^2, (t, s) \mapsto (e^{2\pi it}, e^{2\pi is})$ induce una bigezione tra le sottolagebre di Lie di $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Lie}(\mathrm{T}^2)$ (con il bracket nullo) e i sottogruppi di Lie connessi del toro $\mathrm{T}^2$.

4. Dimostrare che il gruppo $SU(2) = \{A \in GL_2(\mathbb{C}) \mid A^* = A^{-1} \ \wedge \ \det A = 1\}$ è diffeomorfo a $S^3$ e $\mathrm{Lie}(SU(2)) = \{\begin{pmatrix} iv_1 & v_2 + iv_3 \\ -v_2 + iv_3 & -iv_1 \end{pmatrix} \mid v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3\}$. (Suggerimento per la prima parte: mostrare che per ogni $A \in SU(2)$ esistono $a, b \in \mathbb{C}$ tali che $|a|^2 + |b|^2 = 1$ tali che $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ ).

5. Dimostrare che l'applicazione
$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{Lie}(SU(2)), v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto M_v := \begin{pmatrix} iv_1 & v_2 + iv_3 \\ -v_2 + iv_3 & -iv_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$
è un isomorfismo tra spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Verificare inoltre che
$$[M_u, M_v] = 2M_{u\times v}, \forall u, v \in \mathbb{R}^3 \tag{2}$$
e
$$\mathrm{tr}(M_u M_v) = -2u \cdot v, \forall u, v \in \mathbb{R}^3, \tag{3}$$
dove $u \times v$ (risp. $u \cdot v$) denota il prodotto vettoriale (risp. scalare) in $\mathbb{R}^3$.

   Dedurre che $(\mathrm{Lie}(SU(2)), -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\cdot, \cdot))$ è uno spazio euclideo isometrico a $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ e che l'algebra di Lie $(\mathbb{R}^3, 2\times)$ è isomorfa all'algebra $\mathrm{Lie}(SU(2))$.

6. Dimostrare che dati $A \in SU(2)$ e $v \in \mathbb{R}^3$ esiste $w \in \mathbb{R}^3$ tale che $AM_vA^{-1} = M_w$, dove $M_v$ è definita nell'Esercizio 5. Dedurre che per ogni $A \in SU(2)$ esiste una matrice $F(A) \in GL_3(\mathbb{R})$ tale che $w = F(A)v$ e quindi
$$AM_vA^{-1} = M_{F(A)v}. \tag{4}$$
Dimostrare che in effetti $F(A) \in O(3)$. (Suggerimento per l'ultima parte: usare la (3) nell'Esercizio 5 per verificare che $F(A) \cdot u = F(A) \cdot v$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$).

7. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$ con $a, b \in \mathbb{C}$ e $|a|^2 + |b|^2 = 1$ (cfr. Esercizio 4). Dimostrare che la matrice $F(A)$ definita nell'Esercizio 6 si scrive come:

$$F(A) = \begin{pmatrix} |a|^2 - |b|^2 & 2Im(a\bar{b}) & 2Re(a\bar{b}) \\ -2Re(iab) & Re(a^2 + b^2) & Re[i(a^2 - b^2)] \\ -2Im(iab) & Im(a^2 + b^2) & Im[i(a^2 - b^2)] \end{pmatrix}. \tag{5}$$

8. Si consideri l'applicazione

$$F : SU(2) \to O(3), A \mapsto F(A), \tag{6}$$

dove $F(A) \in O(3)$ è definita nell'Esercizio 6. Si dimostri che $F$ è un omomorfismo algebrico e che $\mathrm{Ker}(F) = \{\pm I\}$. Si dimostri inoltre che $F$ è continua e si deduca che $F(SU(2)) \subseteq SO(3)$. (Suggerimento per il calcolo del $\mathrm{Ker}\, F$: si usi il fatto che se $A \in SU(2) \in \mathrm{Ker}\, F$ se e solo se $A$ commuta con ogni elemento di $\mathrm{Lie}(SU(2))$ e, in particolare, commuta con le matrici $E_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$).

9. Sia $F : SU(2) \to SO(3)$ l'applicazione (6). Si dimostri che $F_{*I}(M_u)(v) = 2M_{u \times v}$, per ogni $u, v \in \mathbb{R}^3$ e che quindi $F_{*I}(M_u) = 2 \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$). Si deduca che $F_{*I} : \mathrm{Lie}(SU(2)) \to \mathrm{Lie}(SO(3))$ è un isomorfismo di algebre di Lie e che $F$ è un diffeomorfismo locale.

10. Dedurre dagli Esercizi 8 e 9 che l'applicazione $F : SU(2) \to SO(3)$ è un omomorfismo suriettivo di gruppi di Lie e che quindi $\frac{SU(2)}{\pm I}$ è un gruppo di Lie isomorfo a $SO(3)$.

11. Dimostrare che $SO(3)$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}P^3$. (Suggerimento: si usi l'Esercizio 4 e l'Esercizio 10).