Gruppi di Lie
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2023-2024
Docente: Andrea Loi

1. Sia $\pi : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1, (t, s) \mapsto (e^{2\pi it}, e^{2\pi is}),\ L = \{(t, \alpha t) \mid \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ e $f = \pi_{|L} : L \to S^1 \times S^1$. Sia τ_f la topologia indotta da f su $H = \pi(L)$ e τ_s quella indotta dall'inclusione $H \subset S^1 \times S^1$. Dimostrare che $\tau_s \subset \tau_f$. (Suggerimenrto: si usi il fatto, menzionato a lezione, che $f(L)$ è denso in $S^1 \times S^1$).
2. Sia $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dimostrare che $e^X = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$.
3. Trovare due matrici A e B tali che $e^{A+B} \neq e^A e^B$.
4. Dimostrare il teorema della forma canonica ortogonale per una matrice in $O(n)$, per n arbitrario.
5. Dimostrare che il gruppo unitario $U(n)$ é compatto per ogni $n \geq 1$.
6. Sia G un gruppi di Lie e sia G_0 la componente connessa di G che contiene e (elemento neutro di G). Se μ e i denotano la moltiplicazione e l'inversione in G, provare che
    1. $\mu(\{x\} \times G_0) \subset G_0, \forall x \in G_0$;
    2. $i(G_0) \subset G_0$;
    3. G_0 é un sottoinsieme aperto di G
    4, G_0 é un sottogruppo di Lie di G.
7. Sia G un gruppo di Lie e $\mu : G \times G \to G$ la moltiplicazione. Dimostrare che
$$\mu_{*(a,b)}(X_a, Y_b) = (R_b)_{*a}(X_a) + (L_a)_{*b}(Y_b),\ \forall (a, b) \in G \times G,\ \forall X_a \in T_aG,\ \forall Y_b \in T_bG,$$
dove L_a (risp. R_b) denota la traslazione a sinistra (risp. a destra) associata ad a (risp. b).
8. Sia G un gruppo di Lie con inversione $i : G \to G, a \mapsto i(a) = a^{-1}$. Dimostrare che
$$i_{*a}(Y_a) = -(R_{a^{-1}})_{*e}(L_{a^{-1}})_{*a}(Y_a),\ \forall a \in G,\ \forall Y_a \in T_aG.$$
9. Dimostrare che ogni gruppo di Lie é parallelizzabile.