Esercizi geometria analitica nel piano

Corso di Laurea in Informatica A.A.

Docente: Andrea Loi

Correzione

1. Scrivere le equazioni parametriche delle rette r e s di equazioni cartesiane

$$r : 2x - 3y + 3 = 0 \text{ e } s : x + 4 = 0 .$$

Soluzione: Poniamo $x = t$ e sostituendo nell'equazione cartesiana di r troviamo $y = \frac{2}{3}t + 1$, perciò le equazioni parametriche di r sono:

$$\begin{cases} x &= t \, , \\ y &= \frac{2}{3}t + 1 \end{cases}$$

In modo analogo si ottiene che le equazioni parametriche di s sono:

$$\begin{cases} x &= -4 \, , \\ y &= t \end{cases}$$

2. Trovare i parametri direttori della retta $r : 5x - 3y + 1 = 0$.

Soluzione: $(3, 5)$, a meno di un fattore di proporzionalità.

3. Scrivere l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche della bisettrice del primo e del terzo quadrante. Fare lo stesso per la bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Soluzione: La bisettrice del primo e terzo quadrante ha equazione cartesiana: $x = y$ ed equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= t \, , \\ y &= t \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$, mentre la bisettrice del secondo e quarto quadrante ha equazione cartesiana: $x = -y$ ed equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= u\,, \\ y &= -u \end{cases}$$

con $u \in \mathbb{R}$.

4. Scrivere l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche di una generica retta parallela all'asse delle ascisse. Fare lo stesso per una retta parallela all'asse delle ordinate.

   Soluzione: Una generica retta parallela all'asse delle ascisse ha equazione cartesiana $y = c$ ed equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= t\,, t \in \mathbb{R} \\ y &= c \end{cases}$$

   Analogamente una generica retta parallela all'asse delle ordinate ha equazione cartesiana $x = d$ ed equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= d\,, \\ y &= u\,, u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

5. Scrivi in forma cartesiana e parametrica la retta passante per $P_0 = (5, -3)$ e $P_1 = (2, 1)$.

   Soluzione: L'equazione cartesiana è: $4x + 3y - 11 = 0$, mentre quelle parametriche sono:

$$\begin{cases} x &= t\,, \\ y &= -\frac{4}{3}t + \frac{11}{3} \end{cases}$$

   con $t \in \mathbb{R}$.

6. Usando un determinante 3×3 scrivere in forma cartesiana e parametrica la retta passante per $P_0 = (1, 3)$ e $P_1 = (4, -3)$.

   Soluzione: L'equazione cartesiana

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

   ossia $2x + y - 5 = 0$, mentre quelle parametriche sono:

$$\begin{cases} x & = t\,, \\ y & = -2t + 5 \end{cases}$$

   con $t \in \mathbb{R}$.

7. I punti $P_0 = (1, 3)$, $P_1 = (2, -1)$ e $P_2 = (4, 0)$ sono allineati?

   Soluzione: I punti $P_0 = (1, 3)$, $P_1 = (2, -1)$ e $P_2 = (4, 0)$ non sono allineati.

8. Trovare la retta s passante per $P_0 = (1, 2)$ e parallela ad $r: \ 2x - 3y = 0$.

   Soluzione: Poiché la retta r è parallela alla retta s, si ha che una coppia di parametri direttori per s è: $(3, 2)$, imponendo che il punto P_0 appartenga ad s si ottiene:

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 1}{2}$$

   ossia $s: \ 2x - 3y + 4 = 0$.

9. Determinare $h \in \mathbb{R}$ in modo tale che le rette $r: \ hx - 3y = 0$ e $s: \ (x, y) = (1, 2) + t(1, h)$ siano parallele.

   Soluzione: I parametri direttori della retta r sono: $(3, h)$, mentre quelli della retta s sono: $(1, h)$. Poiché le rette r ed s devono essere parallele, i parametri direttori dell'una devono essere proporzionali a quelli dell'altra, cioè $\frac{3}{h} = \frac{1}{h}$ da cui ricaviamo $3h = h$ e quindi $h = 0$.

10. Dimostrare che le rette $r: \ x + y - 3 = 0$ e $s = 3x - 3y + 1 = 0$ sono ortogonali.

    Soluzione: I parametri direttori della retta r sono: $(-1, 1)$, mentre quelli della retta s sono: $(3, 1)$. Facendo il prodotto scalare tra i due vettori $(1, -1)$ e $(3, 3)$ otteniamo zero, ossia le rette r ed s sono tra ortogonali tra loro.

11. Scrivere in forma parametrica la retta r passante per $P_0 = (1, -1)$ e ortogonale alla retta $s: \ (x, y) = (2, 0) + t(1, 2)$.

    Soluzione: Una coppia di parametri direttori per r sono: $(2, -1)$ perciò le equazioni parametriche di r sono:

$$\begin{cases} x & = 1 + 2t\,, \\ y & = -1 - t \end{cases}$$

    con $t \in \mathbb{R}$.

12. Scrivere l'equazione cartesiana della retta s passante per $P_0 = (2, 2)$ e ortogonale alla retta $r: \ 8x, y) = (1, 2) + t(1, h)$.

    Soluzione: Una coppia di parametri direttori per r sono: $(h, -1)$ perciò l'equazione cartesiana di r è: $\frac{x-2}{h} = \frac{y-2}{-1}$ ossia $x + hy - 2 - 2h = 0$.

13. Trovare l'intersezione tra le due rette $r: \ (x, y) = t(1, -1)$ e $s: (x, y) = (1, 1) + t(1, 2)$.

    Soluzione: Considero il sistema tra le equazioni parametriche delle rette, indicando con t' il parametro della seconda retta:

$$\begin{cases} t & = 1 + 2t', \\ -t & = 1 + 2t' \end{cases}$$

otteniamo

$$\begin{cases} t & = \frac{1}{3}, \\ t' & = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

quindi le rette si intersecano nel punto $P = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

14. Trovare le eventuali intersezioni tra le rette $r:\ 2x - 3y + 7 = 0$ e $s:\ (x, y) = (2, 1) + t(1, 2)$.

    Soluzione: Scriviamo l'equazione cartesiana di $s: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2}$ e consideriamo il sistema tra le equazioni cartesiane delle rette, otteniamo:

    $$\begin{cases} 2x - 3y + 7 & = 0, \\ 2x - y - 3 & = 0 \end{cases}$$

    ossia

    $$\begin{cases} x & = 4, \\ y & = 5 \end{cases}$$

    Il problema si può risolvere anche nel seguente modo:

    sostituire $x = 2 + t$ e $y = 1 + 2t$ nell'equazione della retta r, in questo modo si ottiene $t = 2$ che sostituito nelle equazioni parametriche della retta s ci dá le coordinate del punto d'intersezione.

15. Trovare le eventuali intersezioni tra le rette $r:\ 2x - 3y + 7 = 0$ e $s:\ (x, y) = (4, 5) + t(3, 2)$.

    Soluzione: Le rette r e s coincidono.

16. Calcolare la distanza tra il punto $Q = (1, 2)$ e $r : x + y - 5 = 0$.

    Soluzione: Ricordiamo che la distanza tra un punto $P = (x_0, y_0)$ e la retta r di equazione cartesiana $ax + by + c = 0$ è:

    $$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

    Nel nostro caso si ha:

    $$d(Q, r) = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

17. Trovare il punto simmetrico dell'origine rispetto alla retta $r : 4x + 3y - 5 = 0$.

    Soluzione: La retta s passante per l'origine e perpendicolare ad r ha equazioni parametriche

    $$\begin{cases} x &= 4t\,, \\ y &= 3t \end{cases}$$

    con $t \in \mathbb{R}$. L'intersezione H tra la retta s e la retta r si ottiene dall'equazione di s per $t = \frac{1}{5}$ e quindi $H = (\frac{4}{5}, \frac{7}{5})$, mentre il punto simmetrico dell'origine rispetto a r corrisponde al parametro $t = \frac{2}{5}$ ossia $S = \frac{8}{5}, \frac{6}{5}$.

18. Dopo aver verificato che le due rette $r : 5x - 6y + 6 = 0$ ed $s : 10x - 12y + 3 = 0$ sono parallele calcolarne la distanza.

    Soluzione: I parametri direttori delle due rette sono $(6, 5)$ e $(12, 10)$ e poiché sono proporzionali segue che le rette sono parallele. Per calcolare la distanza tra le due rette sia $P = (0, \frac{1}{4})$ un punto della retta s allora si ha

    $$d(r, s) = d(r, P) = \frac{9}{2\sqrt{61}}$$

19. Per quali valori del parametro reale h le due rette $r:\ hx - y = 0$ e $s:\ x - hy = 2$ sono parallele? Per quali valori sono perpendicolari?

Soluzione: Le due rette sono parallele se i parametri direttori sono direttamente proporzionali, ossia

$$\frac{1}{h} = \frac{h}{1} \Longrightarrow h^2 = 1$$

quindi $h = 1$ e $h = -1$. Le rette r ed s sono invece perpendicolari se

$$< (1,h),(h,1) >= 0 \Longrightarrow h = 0\,.$$

20. Si consideri la retta $r:\ (x,y) = (1 - 3t, 2t)$. Trovare:

a la perpendicolare a r passante per l'origine;

b la parallela ad r per $P = (1,0)$;

c una coppia di parametri direttori.

Soluzione:

a La retta perpendicolare a r passante per l'origine ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x & = 2t\,, \\ y & = 3t \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$;

b la retta r passa per $P = (1,0)$;

c una coppia di parametri direttori è $(-3,2)$.

21. Trovare le equazioni cartesiane delle bisettrici alle rette $r:\ y - 3 = 0$ e $s:\ x - y + 2 = 0$.

Soluzione: Le bisettrici alle rette r ed s hanno equazioni cartesiane:

$$b_1\ x - (1 + \sqrt{2})y + 2 + 3\sqrt{2} = 0$$

$$b_1 \; x + (\sqrt{2} - 1)y + 2 - 3\sqrt{2} = 0$$

22. Stabilire per quali valori del parametro reale t l'equazione $3x^2 + 3y^2 - tx + 2t = 0$ rappresenta una circonferenza.

    Soluzione: Scriviamo l'equazione nella forma:

    $$(x - \frac{t}{6})^2 + y^2 = \frac{t}{36} - \frac{2}{3}t$$

    Questa equazione rappresenta una circonferenza se

    $$\frac{t}{36} - \frac{2}{3}t = \frac{t}{3}(\frac{t}{12} - 2) > 0$$

    da cui ricaviamo $t < 0$ e $t > 24$.

23. Sia γ la circonferenza di centro $C = (1, 2)$ e raggio 5. Stabilire se la retta $r : \; x - 2y = 0$ interseca γ.

    Soluzione: La distanza tra la retta r e il centro della circonferenza è:

    $$d(C, r) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

    e poiché essa è minore del raggio possiamo dire che la retta interseca γ in due punti.

24. Stabilire se le seguenti equazioni rappresentano delle circonferenze e in caso affermativo trovare il centro e il raggio di tali circonferenze:

    $$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 7 = 0 \tag{1}$$

    $$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 3 = 0 \tag{2}$$

    $$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0 \tag{3}$$

    $$x^2 - y^2 + 2x + 2y + 7 = 0 \tag{4}$$

    $$2x^2 + 2y^2 + x + y + 7 = 0 \tag{5}$$

    $$x^2 + 2y^2 + x + 2y + 7 = 0 \tag{6}$$

Soluzione: Nessuna equazione rappresenta una circonferenza.

25. Sia $\gamma: \; x^2 + y^2 + tx + 2y = 0$. Determinare t in modo tale che la tangente a γ nell'origine sia ortogonale a $r: \; x - 2y = 0$.

    Soluzione: Ricordiamo che data una circonferenza di equazione: $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$, e un suo punto $P = (x_0, y_0)$ la retta tangente alla circonferenza nel punto P ha equazione:

$$x_0 x + y_0 y - \alpha(x_0 + x) - \beta(y_0 + y) + \gamma = 0 \tag{7}$$

    Nel nostro caso si ha: $\gamma = 0, \alpha = -\frac{t}{2}$ e $\beta = -1$, sostituendo nell'equazione (7) si ottiene:

$$tx + 2y = 0$$

    imponendo che tale retta si ortogonale a $r: \; x - 2y = 0$, si ricava $t = 4$.

26. Sia $\gamma: \; (x - 1)^2 + y^2 = 4$ e sia $P_0 = (-3, 0)$. Trovare le tangenti a γ passanti per P_0.

    Soluzione: Consideriamo l'equazione del fascio di rette passanti per il punto P_0, $r: \; y = m(x + 3)$, tale retta sarà tangente alla circonferenza se la sua distanza dal centro è uguale al raggio. Il raggio di γ è $r = 2$, mentre il centro è $C = (1, 0)$ imponendo che la distanza del fascio dal centro sia uguale al raggio si ha:

$$|-4m| = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

    elevando al quadrato ambo i membri si ottiene

$$16m^2 = 4m^2 + 4 \implies m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Quindi le tangenti a γ per il punto P_0 sono:

$$r_1 : \; y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 3)$$

$$r_1 : \; y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x + 3)$$

27. Dato il punto $P = (0, 4)$ e la circonferenza $x^2 + y^2 = 9$, determinare le tangenti alla circonferenza uscenti da P.

    Soluzione: Consideriamo l'equazione del fascio di rette passante per il punto P, $y = mx + 4$ e imponiamo che la distanza di tale retta dal centro della circonferenza $C = (0, 0)$ sia uguale al raggio $r = 3$. Si ha

$$\frac{|4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$$

    elevando ambo i membri al quadrato si ottiene

$$m^2 = \frac{7}{9} \implies m_1 = \frac{\sqrt{7}}{3}, m_2 = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

    Le tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 = 9$ uscenti da $P = (0, 4)$ sono:

$$r_1 : \; y = \frac{\sqrt{7}}{3}x + 4$$

$$r_2 : \; y = -\frac{\sqrt{7}}{3}x + 4$$

28. Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (1, 1)$. Fare lo stesso con i punti $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (\sqrt{2}, -1)$.

    Soluzione: Consideriamo l'equazione generica di una circonferenza $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$, imponendo che i punti P_0, P_1 e P_2 appartengano alla circonferenza si ricavano i coefficienti α, β e γ. Otteniamo:

$$\gamma = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$
$$\beta = \frac{1}{2}$$

da cui si ricava l'equazione della circonferenza: $x^2 + y^2 - x - y = 0$.

In maniera analoga si trova che l'equazione della circonferenza passante per i punti $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (\sqrt{2}, -1)$ è:

$$x^2 + y^2 - 5(\sqrt{2} - 1)x - (7 - 5\sqrt{2})y = 0$$

29. Trovare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + \lambda x = 0$ è tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Fare lo stesso per la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + \lambda y = 0$.

    Soluzione: Ricordiamo che due circonferenze sono tangenti se:

    - la distanza tra i due centri è pari alla somma dei raggi;
    - la distanza tra i centri è uguale alla differenza dei raggi.

    I centri delle due circonferenze sono: $C_1 = (\frac{-\lambda}{2}, 0), C_2 = (0,0)$, mentre loro raggi sono: $r_1 = \frac{\lambda}{2}, z_2 = 1$. Imponiamo ora che la distanza tra C_1 e C_2 sia pari alla somma dei raggi, si ha:

    $$\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}} = 1 + \frac{\lambda}{2} \implies \pm\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2} + 1$$

    da cui segue $\lambda = -1$. Imponendo che la distanza tra C_1 e C_2 sia pari alla differenza dei raggi, si ha:

    $$\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}} = |1 - \frac{\lambda}{2}| \implies \pm\frac{\lambda}{2} = |1 - \frac{\lambda}{2}|$$

    da cui segue $\lambda = 1$. Riepilogando: le due circonferenze sono tangenti per $\lambda = 1$ e per $\lambda = -1$.

    In maniera analoga si trova che la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + \lambda y = 0$ è tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$, per $\lambda = 1$ e per $\lambda = -1$.

30. Stabilire le posizioni delle due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 3 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2(2 + \sqrt{2})x - 2(2 + \sqrt{2})y + 11 + 8\sqrt{2} = 0$

    Soluzione: Per stabilire le posizioni delle due circonferenze considero la distanza tra i due centri e vedo che relazione c'è con la somma dei raggi e con la loro differenza.

    I centri delle circonferenze sono $C_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $C_2 = (2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, mentre i raggi sono $r_1 = \sqrt{7}$ e $r_2 = 1$. La distanza tra i punti C_1, C_2 è: $d(C_1, C_2) = 2\sqrt{2}$ e poiché $r_1 - r_2 < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$ si ha che le due circonferenze si intersecano.

31. Dimostrare che l'equazione della circonferenza passante per i tre punti $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ si può ottenere calcolando il seguente determinante 4×4:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ {x_0}^2 + {y_0}^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ {x_1}^2 + {y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2 + {y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

    Soluzione: Sviluppando il determinante secondo la prima riga si ricava immediatamente un'equazione di secondo grado in x e y, con i coefficienti di x^2 e y^2 uguali e soddisfatta dalle coordinate dei punti $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. L'equazione ottenuta risulta quella di una circonferenza perché soddisfa le condizioni di sopra.