

**Esercizi sulle circonferenze**  
**Geometria 3, Corso di Laurea in Matematica A.A. 2007-2008**  
**Docente: Andrea Loi**

1. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nel piano, Dimostrare che l'intersezione di due rette complesse coniugate e un punto reale e che la retta che unisce due punti complessi coniugati è reale.
2. Descrivere i fasci di circonferenze, specificando le posizioni dell'asse radicale e dell'asse centrale.
3. Sia  $\sigma$  una circonferenza nel piano. Definire la polarità rispetto alla circonferenza. Può capitare che due rette distinte abbiano lo stesso polo?
4. Sia  $\sigma$  una circonferenza nel piano. Descrivere un significato geometrico della polare rispetto ad un punto. Dimostrare geometricamente che una retta per l'origine non ha polo.
5. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nel piano, sia  $\sigma$  la circonferenza di centro l'origine e raggio 2. Trovare la polare del punto  $P_0(1, 1)$ .
6. Denotiamo con  $(\rho, \theta)$  le coordinate polari nel piano. Che cosa rappresenta l'equazione  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ? Più in generale  $\theta = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ?
7. Sia  $\sigma$  una circonferenza del piano di centro  $C$ . Definire l'inversione

$$inv : \mathbb{R}^2 \setminus \{C\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{C\}$$

rispetto alla circonferenza e descrivere le sue proprietà principali.

8. Sia  $\sigma$  la circonferenza di centro  $C(-1, 1)$  e raggio 1 e sia

$$inv : \mathbb{R}^2 \setminus \{C\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{C\}$$

l'inversione determinata da  $\sigma$ . Quale è l'immagine della retta  $r : x + y = 0$  rispetto a  $inv$ ? E della retta  $s : x + y + 1 = 0$ ?

9. Descrivere geometricamente il fascio di circonferenze che hanno centro in una retta  $r$  e che passano per un punto  $A \notin r$ . Fissato un sistema di riferimento cartesiano nel piano, scrivere l'equazione di questo fascio nel caso  $A(1, -1)$  e  $r : x - 2y + 3 = 0$ . Trovare, inoltre la circonferenza del fascio passante per l'origine.
10. Descrivere geometricamente il fascio di circonferenze tangenti ad una retta  $r$  e passanti per un punto  $A \in r$ . Fissato un sistema di riferimento cartesiano nel piano, scrivere l'equazione di questo fascio nel caso  $A(-1, 1)$  e  $r : x - 2y + 3 = 0$ . Trovare, inoltre la circonferenza del fascio passante per l'origine.