Esercizi su indipendenza lineare, basi e dimensione
Corso di Laurea in Informatica A.A. 2007-2008
Docente: Andrea Loi

0. Per quali valori di λ i vettori $v_1 = 2\lambda\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $v_2 = \mathbf{j}$ sono linearmente indipendenti?

1. Provare che i vettori $\mathbf{v_1} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v_2} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v_3} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ sono linearmente indipendenti. Dire, inoltre se il vettore $\mathbf{j}$ è esprimibile come combinazione lineare di $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$, e se lo è, dire in quanti modi.

2. Vero o falso:
   - 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti;
   - 6 vettori in $\mathbb{R}^4$ sono linearmente dipendenti;
   - 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti.

3. Dire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti; scrivere, quando possibile, un vettore come combinazione lineare dei rimanenti:
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Stessa domanda per i vettori
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Provare che i vettori:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$.

5. Siano $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1, 3)$ e $v_3 = (0, 1, 1, 1)$ tre vettori di $\mathbb{R}^4$. Trovere la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori v_1, v_2 e v_3.

6. Trovare i valori del parametro reale λ per i quali i vettori $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ e $v_3 = (0, -1, \lambda)$ di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti.

7. Trovare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1, 3)$ e $v_3 = (2, 2, -1, -1)$.

8. Trovare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^7$ generato dai seguenti vettori

   $v_1 = (1, 2, -1, 1, 5, 0, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1, 3, \sqrt{2}, \pi, -3)$ e $v_3 = (2, 4, -2, 2, 10, 0, 2)$.

9. Trovare i valori del parametro reale λ per i quali i tre vettori $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 0)$ e $v_3 = (0, -1, \lambda, 1)$ di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti.

10. Trovare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^8$ generato dai seguenti vettori:

    $v_1 = (1, 2, -1, 1, 5, 0, 1, 2)$ $v_2 = (0, 2, 1, 3, \sqrt{2}, \pi, -3, e)$

    $v_3 = (2, 4, -2, 2, 10, 0, 2, 4)$ $v_4 = (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{e}{2})$