

Nome e mail
Matricola

**Esercizio 1** Sia  $G$  l'insieme dei numeri complessi del tipo  $a + ib$  con  $a, b \in \mathbb{Q}$  non entrambi nulli;

(1) si provi che  $G$  un gruppo rispetto alla moltiplicazione;

(2) si calcoli il periodo di  $1 + i$ ,  $1/2i$  e  $-1$ ;

(3) si provi che l'applicazione  $f : G \rightarrow G$  definita da  $f(z) = z^2$  per ogni  $z \in G$  un endomorfismo di  $G$  non suriettivo.





**Esercizio 2** Sia  $p$  un primo e  $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid n\}$ .

- (1) Provare che  $\mathbb{Z}_{(p)}$  un sottoanello di  $\mathbb{Q}$ .
- (2) Determinare gli elementi invertibili di  $\mathbb{Z}_{(p)}$ .
- (3) Determinare gli ideali di  $\mathbb{Z}_{(p)}$ .
- (4) Determinare gli ideali primi e massimali di  $\mathbb{Z}_{(p)}$ .
- (5) Provare che  $\mathbb{Z}_{(p)}$  un anello locale.



