Esercizi geometria analitica nel piano 3

Corso di Laurea in Informatica

Docente: Andrea Loi

Correzione

1. Che cosa rappresentano le seguenti equazioni di secondo grado?

   (a) $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$

   (b) $x^2 + y^2 - 2y + 3 = 0$

   (c) $2x^2 + 2y^2 + 3x + y - 9 = 0$

   (d) $x^2 - 4y^2 = 0$

   (e) $x^2 - y^2 + 3x + y + 2 = 0$

   (f) $x^2 - y - 2x + 3 = 0$

   (g) $(x - 2y)^2 + y^2 = -\sqrt{2}$

   (h) $2x^2 - 3y^2 = 3$

   (i) $x = (y - 1)^2 + 3$

   (j) $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

   (k) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23 = 0$

   (l) $2y^2 - x^2 - 4x - 4y - 5 = 0$

   Soluzione:

   (a) Col metodo del completamento dei quadrati, possiamo scrivere l'equazione nella forma: $(x+y-1)(x+y+1) = 0$, cioè la conica degenera nel prodotto di due rette: $x + y = 1$ e $x + y = -1$.

   (b) Scrivendo l'equazione nella forma: $\frac{x^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{2} = -1$ otteniamo un'ellisse immaginaria.

(c) Scrivendo l'equazione nella forma: $(x + \frac{3}{4})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{41}{8}$ otteniamo l'equazione di una circonferenza.

(d) L'equazione può essere scritta nella forma: $(x + 2y)(x - 2y) = 0$ che è l'equazione di una conica degenere.

(e) Scrivendo l'equazione nella forma: $(x + \frac{3}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2 = 0$ otteniamo una conica degenere in quanto si spezza nel prodotto di due rette: $(x + y + 1)(x - y + 2) = 0$.

(f) L'equazione $y - 2 = (x - 1)^2$ rappresenta una parabola, e con la traslazione

$$\begin{cases} x' &= x - 1 \\ y' &= y - 2 \end{cases}$$

otteniamo la forma canonica.

(g) L'equazione $(x - 2y)^2 + y^2 = -\sqrt{2}$ è quella di un'ellisse immaginaria.

(h) Possiamo scrivere l'equazione $2x^2 - 3y^2 = 3$ nella forma: $\frac{x^2}{\frac{3}{2}} - y^2 = 1$ che rappresenta un'iperbole.

(i) L'equazione $x - 3 = (y - 1)^2$ rappresenta una parabola, la sua forma canonica si ottiene con la traslazione

$$\begin{cases} x' &= x - 3 \\ y' &= y - 1 \end{cases}$$

.

(j) Scrivendo l'equazione nella forma: $\frac{(x-2)^2}{7} - \frac{(y-3)^2}{7} = 1$ e facendo la traslazione

$$\begin{cases} x' &= x - 2 \\ y' &= y - 3 \end{cases}$$

otteniamo un'iperbole in forma canonica.

(k) Scrivendo l'equazione nella forma: $\frac{1}{4}(x - 1)^2 + \frac{1}{9}(y - 1)^2 = 1$ e facendo la traslazione

$$\begin{cases} x' &= x - 1 \\ y' &= y - 1 \end{cases}$$

otteniamo un'ellisse in forma canonica.

(l) Sempre col metodo del completamento dei quadrati, possiamo scrivere l'equazione nella forma: $\frac{(y-1)^2}{\frac{3}{2}} - \frac{(x+2)^2}{3} = 1$ e facendo la traslazione

$$\begin{cases} x' &= x + 2 \\ y' &= y - 1 \end{cases}$$

otteniamo un'iperbole in forma canonica.

2. Dimostrare che l'equazione

$$x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy - 2 = 0$$

rappresenta un'iperbole, considerando un nuovo sistema di riferimento ottenuto con una rotazione di $\frac{\pi}{6}$ in senso antiorario.

Soluzione: Indichiamo con x', y' le nuove coordinate e con x, y le vecchie, allora le formule che per il cambiamento di riferimento dovuto ad una rotazione di $\frac{\pi}{6}$ in senso antiorario, sono:

$$\begin{cases} x &= \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ y &= \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$$

Sostituendo le espressione delle x, y in funzione delle nuove coordinate x', y' nell'equazione

$$x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy - 2 = 0$$

otteniamo:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 + 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) = 2$$

da cui si ricava:

$$x'^2 - y'^2 = 1$$

che rappresenta un'iperbole equilatera.

3. Dimostrare che l'equazione

$$5x^2 + 7y^2 + 2\sqrt{3}xy = 2$$

rappresenta un'ellisse, considerando un nuovo sistema di riferimento ottenuto con una rotazione di $\frac{\pi}{3}$ in senso antiorario.

Soluzione: Indichiamo con x', y' le nuove coordinate e con x, y le vecchie, allora le formule che per il cambiamento di riferimento dovuto ad una rotazione di $\frac{\pi}{3}$ in senso antiorario, sono:

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \end{cases}$$

Sostituendo le espressione delle x, y in funzione delle nuove coordinate x', y' nell'equazione

$$5x^2 + 7y^2 + 2\sqrt{3}xy = 2$$

otteniamo:

$$5\left(\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 + 7\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right)^2 + 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right) = 2$$

da cui si ricava:

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y'^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

che rappresenta un'ellisse.