

Gruppi algebre di Lie
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2021-2022
Docente: Andrea Loi

1. Dimostrare che il prodotto diretto di due gruppi di Lie è un gruppo di Lie.
2. Sia $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1, (t, s) \mapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s})$, $L = \{(t, \alpha t) \mid \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ e $f = \pi|_L : L \rightarrow S^1 \times S^1$. Sia τ_f la topologia indotta da f su $H = \pi(L)$ e τ_s quella indotta dall'inclusione $H \subset S^1 \times S^1$. Dimostrare che $\tau_s \subset \tau_f$. (Suggerimento: si usi il fatto, menzionato a lezione, che $f(L)$ è denso in $S^1 \times S^1$).
3. Sia $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dimostrare che $e^X = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$.
4. Trovare due matrici A e B tali che $e^{A+B} \neq e^A e^B$.
5. Dimostrare che il gruppo unitario $U(n)$ è compatto per ogni $n \geq 1$.
6. Sia G un gruppo di Lie e sia G_0 la componente connessa di G che contiene e (elemento neutro di G). Se μ e i denotano la moltiplicazione e l'inversione in G , provare che
 1. $\mu(\{x\} \times G_0) \subset G_0, \forall x \in G_0$;
 2. $i(G_0) \subset G_0$;
 3. G_0 è un sottoinsieme aperto di G
 4. G_0 è un sottogruppo di Lie di G .
7. Sia G un gruppo di Lie e $\mu : G \times G \rightarrow G$ la moltiplicazione. Dimostrare che
$$\mu_{*(a,b)}(X_a, Y_b) = (R_b)_*(X_a) + (L_a)_*(Y_b), \quad \forall (a, b) \in G \times G, \quad \forall X_a \in T_a G, \quad \forall Y_b \in T_b G,$$
dove L_a (risp. R_b) denota la traslazione a sinistra (risp. a destra) associata ad a (risp. b).
8. Sia G un gruppo di Lie con inversione $i : G \rightarrow G, a \mapsto i(a) = a^{-1}$. Dimostrare che
$$i_{*a}(Y_a) = -(R_{a^{-1}})_*(L_{a^{-1}})_*(Y_a), \quad \forall a \in G, \quad \forall Y_a \in T_a G.$$
9. Verificare che il commutatore tra matrici $[A, B] = AB - BA$ definisce un'algebra di Lie sullo spazio tangente all'identità dei gruppi $O(n), SO(n), U(n), SU(n), SL_n(\mathbb{R})$ e $SL_n(\mathbb{C})$.
10. Verificare che l'esponenziale di una matrice definisce un'applicazione $e : T_{I_n} G \rightarrow G, A \mapsto e^A$ per $G = GL_n(\mathbb{R}), GL_n(\mathbb{C}), O(n), SO(n), U(n), SU(n), SL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{C})$.

11. Sia $G = G_1 \times \cdots \times G_s$ il prodotto diretto di gruppi di Lie. Dimostrare che l'algebra di Lie di G è isomorfa alla somma diretta delle algebre di Lie dei G_i .
12. Dimostrare che ogni gruppo di Lie è parallelizzabile.