

Nome e mail
Matricola

**Esercizio 1** Sia  $G$  il prodotto cartesiano  $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$ . Definiamo un'operazione su  $G$  nel modo seguente:

$$(a,b)(a',b') = (aa', ab' + \frac{b}{a'}).$$

Si provi che  $G$  é un gruppo e si dica se  $G$  abeliano.





**Esercizio 2** Sia  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ .

- (1) Provare che  $A$  é un anello commutativo unitario, ma non é un dominio.
  - (2) Determinare l'ideale  $N(A)$  degli elementi nilpotenti di  $A$ .
  - (3) Mostrare che ogni ideale proprio di  $A$  é contenuto in  $N(A)$  e dedurre che  $A$  é un anello locale.
  - (4) Determinare tutti gli ideali di  $A$ .
- 

