**PROGRAMMA DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE**
**Corso di Laurea in Matematica A.A. 2021-2022, primo semestre**
**Docente: Andrea Loi**

**1. Geometria differenziale negli spazi euclidei.**

**1.1 Funzioni lisce e reali analitiche.** Richiami sulle funzioni lisce e reali analitiche su aperti di $\mathbb{R}^n$; s funzioni $C^k$ ma non $C^{k+1}$; esempi di funzioni lisce che non sono reali analitiche.

**1.2 Diffeomorfismi.** Diffeomorfismi tra aperti di $\mathbb{R}^n$ (applicazioni lisce, bigettive con inversa liscia); esistono funzioni bigettive e lisce che non sono diffeomorfismi; gli intervalli aperti limitati o illimitati di $\mathbb{R}$ sono diffeomorfi; il prodotto di $n$ intervalli aperti di $\mathbb{R}$ risulta diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$; una palla aperta di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$ sono diffeomorfi; sviluppo di Taylor con resto intorno ad un punto $p$ di una funzione liscia definita su un aperto stellato di $\mathbb{R}^n$.

**1.3 Vettori tangenti.** Vettori tangenti in un punto $p \in \mathbb{R}^n$; lo spazio $T_p\mathbb{R}^n$ come insieme dei vettori colonna; derivata direzionale di una funzione liscia rispetto ad un vettore $v \in T_p\mathbb{R}^n$; il germe di una funzione in un punto $p$; l'insieme dei germi di funzioni $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ definite in un intorno di un punto $p \in \mathbb{R}^n$ é un algebra su $\mathbb{R}$; derivazioni puntuali in un punto $p \in \mathbb{R}^n$ (applicazioni $\mathbb{R}$-lineari $D : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ che soddisfano la regola di Leibniz $D(fg) = (Df)g(p) + f(p)Dg$); la derivata direzionale $D_v : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ rispetto ad un vettore $v \in T_p\mathbb{R}^n$ definisce una derivazione puntuale in $p$; l'insieme $Der(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ delle derivazioni puntuali risulta uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; l'applicazione $\Phi : T_p\mathbb{R}^n \to Der(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)), v \mapsto D_v$ è un isomorfismo tra spazi vettoriali; base canonica di $Der(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$.

**1.4 Campi di vettori.** Campi di vettori su un aperto $U$ di $\mathbb{R}^n$ (funzione che assegna ad un punto $p \in U$ un vettore $X_p \in T_p\mathbb{R}^n$); l'insieme dei campi di vettori lisci $\chi(U)$ su un aperto $U$ di $\mathbb{R}^n$ formano un $C^\infty(U)$-modulo; derivata di una funzione liscia $f$ rispetto ad un campo di vettori liscio $X$; campi di vettori lisci su un aperto $U$ di $\mathbb{R}^n$ come derivazioni dell'algebra $C^\infty(U)$.

**2. Varietà differenziabili.**

**2.1 Varietà topologiche e differenziabili.** Richiami sulle varietà topologiche; dimensione di una varietà topologica e teorema dell'invarianza della dimensione topologica (solo enunciato); esempi e non esempi; carte compatibili; atlanti differenziabili su uno spazio topologico; osservazione che l'essere compatibile non è una proprietà transitiva; se due carte sono compatibili con tutte le carte di un atlante differenziabile allora sono compatibili tra loro; atlanti massimali (strutture differenziabili); ogni atlante è contenuto in un unico atlante massimale; varietà differenziabili (varietà topologiche dotate di una struttura differenziabile); esempi di varietà: $\mathbb{R}^n$, aperti di varietà; varietà di dimensione zero; grafici di funzioni; curve e superfici in $\mathbb{R}^3$; il gruppo lineare; il cerchio unitario $S^1$; la sfera $S^n$; il prodotto di varietà differenziabili (il toro); quozienti: il proiettivo reale e la Grassmanniana come varietá differenziabili.

**2.2 Funzioni su e tra varietà.** Funzioni lisce a valori in $\mathbb{R}$ su una varietà; funzione lisce tra varietà; composizione di applicazioni lisce tra varietà; esempi; diffeomorfismi tra varietà; cenni sull'esistenza e unicità delle strutture differenziabili su una varietà topologica; esempi di strutture differenziabili diverse su $\mathbb{R}$; le funzioni coordinate sono diffeomorfismi; ogni diffeomorfismo da un aperto di una varietà in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione coordinata; esempi di applicazioni lisce: le proiezioni; applicazioni sul prodotto di varietà; gruppi di Lie e qualche esempio; derivate parziali; la matrice Jacobiana per applicazioni lisce tra varietà; Jacobiano dell'applicazione di transizione; il teorema delle funzione inversa per applicazioni lisce tra varietà.

**2.3 Lo spazio tangente e il differenziale di un'applicazione liscia.** Lo spazio tangente $T_pM$ ad una varietà $M$ in un suo punto $p$ come insieme delle derivazioni puntuali $Der_p(C_p^\infty(M))$ in $p$ dei germi di funzioni lisce intorno a $p$; $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, $i = 1, \ldots, n$ come elementi della base dello spazio tangente in $p$ ad una varietà differenzibile $M$ di dimensione $n$; il differenziale di un'applicazione liscia tra varietà differenziabili; la regola della catena per applicazioni lisce tra varietà; il teorema di invarianza della dimensione nel caso liscio; espressione locale per il differenziale; definizione di categorie e funtori; proprietà funtoriali del differenziale; curve su una varietà e vettore tangente ad una curva in un suo punto; derivata direzionale in termini di curve; spazio tangente ad una varietà in un suo punto come insieme dei vettori tangenti a curve lisce sulla varietà pasanti per il punto; calcolo del differenziale di un'applicazione liscia tra varietà in termini di curve; esempi: il differenziale della traslazione a sinistra in $GL_n(\mathbb{R})$; differenziale della moltiplicazione e dell'inversione in un gruppo di Lie.

**2.4 Immersioni, summersioni e sottovarietà**. Inclusione canonica e proiezione canonica; rango in un punto di un'applicazione liscia tra varietà differenziabili; punti regolari e punti critici, valori regolari e valori critici; esempi; massimi e minimi locali e punti ciritici; carte adattate e sottovarietà; sottovarietà di una varietà é essa stessa una varietà; il teorema della preimmagine di un valore regolare; esempi: la sfera, i grafici, ipersuperfici dello spazio proiettivo reale, il gruppo lineare speciale; il teorema del rango costante in analisi; il teorema del rango costante per applicazioni lisce tra varietà differenziabili; preimmagine di un'applicazione di rango costante; dimostrazione che il gruppo ortogonale è una sottovarietà del gruppo lineare; dimostrazione che avere rango massimale in un punto è una condizione aperta; il teorema di immersione e di summersione; una summersione è un'applicazione aperta; ogni summersione da una varietà campatta ad una varietà connessa è suriettiva; il teorema della preimmagine si deduce anche dal teorema della preimmagine di un'applicazione di rango costante; immagine di applicazioni lisce: esistono immersioni iniettive la cui immagine non è una sottovarietà (figura a otto e curva di pendenza irrazionale sul toro); sottovarietà immerse; embedding e sottovarietà; teorema di Whitney (senza dimostrazione); l'inclusione di una sottovarietà è un embedding; applicazioni lisce la cui immagine è contenuta in una (sotto)varietà; la motiplicazione in $SL_n(\mathbb{R})$ è liscia; legami con il corso di curve e superfici.

**2.5 Il fibrato tangente e i campi di vettori.** Topologia e struttura differenziabile sul fibrato tangente di una varietà differenziabile; funzioni a campana su una varietà ed estensioni di funzioni lisce; campi di vettori su un varietà; criteri affinchè un campo di vettori su una varietà sia liscio; uguaglianza tra campi di vettori; campi di vettori come derivazioni dell'algebra delle funzioni lisce; esempi di campi di vettori sulle sfere; curve integrali di un campo di vettori; flussi locali e globali; il teorema di Frobenius (senza dimostrazione); il commutatore (o bracket) di Lie di due campi di vettori; algebre di Lie; pushforward di un campo di vettori tramite un diffeomorfismo; campi di vettori $F$-related tramite un'applicazione liscia $F$ tra varietà; campi di vettori $F$-related e commutatore di Lie.

**3. Gruppi e algebre di Lie.**

**3.1 Gruppi e sottogruppi di Lie.** Definizione di gruppo di Lie; le traslazioni a sinistra e a destra; omomorfismi e isomorfismi tra gruppi di Lie e le loro principali proprietà; esempi di gruppi di Lie: $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$ e calcolo della dimensione di $O(n)$ usando il teorema della preimmagine di un valore regolare. Sottogruppi di Lie (sottogruppi algebrici, sottovarietà immerse con moltiplicazione e inversione lisce); se $H$ è un sottogruppo algebrico e una sottovarietà di un gruppo di Lie $G$ allora $H$ è un sottogruppo di Lie di $G$; sottogruppi di Lie embedded; $SL_n(\mathbb{R})$ e $O(n)$ sono sottogruppi di Lie embedded di $GL_n(\mathbb{R})$ e $SL_n(\mathbb{C})$ è un sottogruppo di Lie embedded di $GL_n(\mathbb{C})$; teorema del sottogruppo chiuso (un sottogruppo chiuso (come sottospazio topologico) di un gruppo di Lie è un sottogruppo di Lie embedded); l'immagine della retta di pendenza irrazionale è un sottogruppo di Lie (non embedded) del toro.

**3.3 L'esponenziale di una matrice.** Spazi vettoriali normati; $M_n(\mathbb{R})$ come spazio vettoriale normato; definizione dell'esponenziale di una matrice; algebre normate e loro proprietà; $M_n(\mathbb{R})$ come algebra normata; spazi di Banach e algebre di Banach; $M_n(\mathbb{R})$ é un'algebra di Banach; in uno spazio di Banach una successione assolutamente convergente è convergente e quindi l'esponenziale di una matrice risulta ben definito; alcune proprietá dell'esponenziale di una matrice.

**3.4 Richiami di algebra lineare.** Matrici simili e unitariamente simili; teorema di Schur: ogni matrice a entrate complesse é simile ad una matrice triangolare; basi di Schur; matrici normali; il teorema spettrale per matrici normali: ogni matrice normale é unitariamente simile ad una matrice diagonale; forma canonica ortogonale (senza dimostrazione); matrici elementari e operazioni elementari sulle righe e sulle colonne di una matrice; per ogni campo $\mathbb{K}$ e per ogni $n \geq 1$, $SL_n(\mathbb{K})$ é generato da matrici elementari.

**3.5 Traccia, determinante e esponenziale di una matrice.** Il determinante dell'esponenziale di una matrice é uguale all'esponenziale della traccia della matrice; il differenziale del determinante; ll gruppo lineare speciale $SL_n(\mathbb{R})$ è un sottogruppo di Lie connesso e non compatto di $GL_n(\mathbb{R})$; il gruppo lineare speciale complesso $SL_n(\mathbb{C})$ è un sottogruppo di Lie connesso e non compatto di $GL_n(\mathbb{C})$; il gruppo unitario $U(n)$ è un sottogruppo di Lie compatto e connesso di $GL_n(\mathbb{C})$ di dimensione $n^2$; il gruppo unitario speciale $SU(n)$ è un sottogruppo di Lie compatto e connesso di $U(n)$ di dimensione $n^2 - 1$; il gruppo ortogonale speciale $SO(n)$ è un sottogruppo di Lie compatto e connesso di $O(n)$; $SO(n)$ è una componente connessa di $O(n)$; esiste un diffeomorfismo tra $GL_n(\mathbb{R})$ e $SL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$; se $n$ è pari allora $GL_n(\mathbb{R})$ e $SL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ non sono isomorfi come gruppi di Lie; se $n$ è dispari allora $GL_n(\mathbb{R})$ e $SL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sono isomorfi come gruppi di Lie.

**3.6 Algebra di Lie** Campi di vettori invarianti a sinistra; isomorfismo tra lo spazio tangente ad un gruppo di Lie nell'identità e i campi di vettori invarianti a sinistra di $G$; definizione di algebra di Lie di un gruppo; calcolo dell'algebra di Lie di $\mathbb{R}^n$, $T^n$ e $GL_n(\mathbb{R})$; push-forward di campi di vettori invarianti a sinistra tramite un omomorfismo di gruppi di Lie; omomorfismo di algebra di Lie indotto da un omomorfismo di gruppi di Lie; calcolo dell'algebra di Lie dei gruppi matriciali: $T_IO(n)$ sono le matrici antisimmetriche di $M_n(\mathbb{R})$ con il bracket usuale; $T_ISL_n(\mathbb{R})$ sono le matrici con traccia nulla di $M_n(\mathbb{R})$ con il bracket usuale; $T_IU(n)$ sono le matrici antihermitiane di $M_n(\mathbb{C})$ con il bracket usuale; $T_ISU(n)$ sono le matrici antihermitiane di $M_n(\mathbb{C})$ di traccia nulla con il bracket usuale; $T_I SL_n(\mathbb{C})$ sono le matrici con traccia nulla di $M_n(\mathbb{C})$ con il bracket usuale; flussi di campi di vettori invarianti a sinistra su un gruppo di Lie; dimostrazione che ogni campo di vettori inviariante a sinistra su un gruppo di Lie è completo; applicazione esponenziale $\exp : T_e G \to G$ di un gruppo di Lie $G$; l'esponenziale è un'applicazione liscia; $\exp 0 = e$; sottogruppi di Lie ad un parametro di un gruppo di Lie; un sottogruppo ad un parametro è determinato dal suo vettore tangente in $e$; $\exp(t\xi)$ è un sottgrouppo ad un parametro; l'esponenziale invia un intorno dell' origine di $T_e G$ diffeomorficamente in un intorno di $e \in G$; omomorfismi di gruppi di Lie e applicazione esponenziale; un omomorfismo continuo tra gruppi di Lie è liscio; l'applicazione esponenziale di un sottogruppo $H$ di Lie di un gruppo $G$ è la restrizione dell'esponenziale di $G$; l'applicazione esponenziale di un gruppo matriciale coincide con l'esponenziale di matrici; sulla suriettività dell' applicazione esponenziale; l'applicazione esponenziale di $SL_2(\mathbb{R})$ non é suriettiva; ogni elemento di un gruppo di Lie $G$ può scriversi come prodotto di un numero finito di immagini di elementi dell'algebra di Lie tramite l'applicazione esponenziale; l'applicazione esponenziale di un gruppo di Lie connesso e abeliano è suriettiva; l'applicazione esponenziale di un gruppo di Lie compatto e connesso è suriettiva (senza dimostrazione); l'applicazione esponenziale di $GL_n(\mathbb{C})$ è suriettiva (senza dimpostrazione); il funtore di Lie; il teorema di corrispondenza di Lie (senza dimostrazione); esempio di omomorfismo suriettivo tra $SU(2)$ e $SO(3)$ e isomorfismo tra le loro algebre di Lie; difffeomorfismo tra $SO(3)$ e $\mathbb{R}P^3$; corrispondenza tra i sottogruppi connessi del toro bidimensionale e le sottolagebre della sua algebra di Lie.

**Testi di riferimento**

**Lorin, W. Tu**, *An Introduction to Manifolds*, Springer Verlag.
**J. Lee**, *Introduction to Manifolds*, Springer Verlag.
**W. Boothby**, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press.

**M. Spivak**, *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company.

**F.W. Warner**, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie grous*, Springer Verlag.