Esercizi di topologia algebrica
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2010-2011
Docente: Andrea Loi

1. Siano X e Y due spazi omotopicamente equivalenti e sia $f : X \to Y$ un'equivalenza omotopica. Un'applicazione $g : Y \to X$ tale che $f \circ g \sim id_y$ e $g \circ f \sim id_X$ è detta un'inversa omotopica di f. Dimostrare che l'inversa omotopica di f è unica a meno di omotopia.

2. Dimostrare che nel nastro di Möbius N esiste una circonferenza che risulta essere un retratto forte di deformazione di N. Dedurne che N è omotopicamente equivalente al cilindro.

3. Dimostrare che uno spazio X è contraibile se e solo se l'identità di X è omotopa ad una funzione costante.

4. Dimostrare che uno spazio omotopicamente equivalente ad uno spazio connesso (risp. connesso per archi) è connesso (risp. connesso per archi).

5. E' vero che uno spazio omotopicamente equivalente ad uno spazio compatto è compatto?

6. Dimostare che un retratto di uno spazio compatto (risp. connesso, connesso per archi) è compatto (risp. connesso, connesso per archi).

7. Si dimostri che un retratto di uno spazio semplicemente connesso (risp. contraibile) è semplicemente connesso (risp. contraibile).

8. Dimostare che un retratto di uno spazio di Hausdorff è chiuso. (Suggerimento: utilizzare il fatto (dopo averlo dimostrato) che l'insieme dei punti fissi di un'applicazione continua da uno spazio di Hausdorff X in se stesso è un sottoinsieme chiuso di X).

9. Sia T^2 il toro e X il complementare di un suo punto. Dimostrare che X è omotopicamente equivalente alla figura "∞". Dedurne che il complementare di tre punti distinti in S^2 è omotopicamente equivalente a X.

10. Dimostrare che la sfera S^n è un retratto forte di deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. (Suggerimento: generalizzare l'esercizio precedente).

11. Sia X uno spazio topologico e $f, g : X \to S^n$ due funzioni continue tali che $f(x) \neq -g(x)$, per ogni $x \in X$. Dimostrare che f è omotopa a g. (Suggerimento: pensare $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, costruire un'omotopia in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ tra f e g e "trasportarla" su S^n usando l'esercizio precedente).

12. Dimostrare che $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ (le matrici $n \times n$ con determinante uguale a 1) è un retratto forte di deformazione di $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ (le matrici $n \times n$ con determinante strettamente positivo).

13. Sia $A \subset X$ un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Supponiamo che A sia un retratto (forte) di deformazione di X. Sia $r : X \to A$ una qualsiasi retrazione (cioè $r \circ i = id_A$) allora r è una retrazione (forte) per deformazione di X su A (cioè $i \circ r \sim_A id_X$).

14. Dimostrare che il bicchiere vuoto A è un retratto forte di deformazione del bicchiere vuoto X. In termini matematici dimostrare che $A = (D^2 \times \{0\}) \cup S^1 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ è un retratto forte di deformazione di $X = D^2 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$.

15. Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 > 4xz\}$. Dimostrare che X ha lo stesso tipo di omotopia di S^1. (Suggerimento: potrebbe essere utile considerare l'omeomorfismo

$$(x, y, z) \mapsto (\xi = x + z, \eta = y, \zeta = x - z)$$

per dimostrare che X è omeomorfo a $Y = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid \eta^2 + \zeta^2 > \xi^2\}$).

16. Dare un esempio di un sottoinsieme di uno spazio topologico X che sia un retratto di deformazione di X ma non un retratto forte di deformazione di X.

17. Dimostrare che se uno spazio ha la topologia discreta allora $\pi_1(X, x) = \{1\}$ per ogni $x \in X$.

18. Dimostrare che due archi $f, g : I \to X$ da x a y danno luogo allo stesso isomorfismo da $\pi_1(X, x)$ a $\pi_1(X, y)$ (cioè $u_f = u_g$) se e solo se $[g * i(f)]$ appartiene al centro di $\pi_1(X, x)$. Dedurre che l'isomorfismo $u_f : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$ (associato ad un arco f da x a y) è indipendente da f se e solo se $\pi_1(X, x)$ è un gruppo abeliano.

19. Trovare due spazi topologici X e Y e una funzione continua $\varphi : X \to Y$ tale che φ_* non sia iniettiva (risp. non sia suriettiva). Suggerimento: usare il fatto che $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

20. Dimostrare che se A è un retratto forte di deformazione di uno spazio X, allora l'inclusione $i : A \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ per ogni $a \in A$.

21. Calcolare il gruppo fondamentale dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$: $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| > 1\}$; $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$; $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \geq 1\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$; $S^1 \cup (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$; $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$, dove $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

22. Calcolare il gruppo fondamentale dei seguenti spazi topologici: il toro solido $D^2 \times S^1$; $S^1 \times S^n$; Il cilindro $S^1 \times I$; Il cilindro infinito $S^1 \times \mathbb{R}$; il nastro di Möbius.

23. Dimostrare che $\mathbb{R}^2$ non è omeomorfo a $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$.

24. Si dimostri che uno spazio topologico non può essere contemporaneamente una 2-varietà e una n-varietà per $n > 2$.

25. Sia A un retratto di D^2. Dimostrare che un'applicazione continua $f : A \to A$ ha un punto fisso.

26. Dimostrare che il gruppo $G =< a, b \mid a^4, b^2, aba^{-1}b^{-1} >$ è isomorfo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

27. Sia $G =< S \mid R >$ e definiamo il gruppo

$$AG =< S \mid AR >, \quad AR = R \cup \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in S\}.$$

Dimostrare che AG è un gruppo abeliano (*l' abelianizzazione* di G) e che esiste un omomorfismo suriettivo $G \to AG$. Determinare inoltre il nucleo di tale omomorfismo.

28. Dimostrare che il gruppo $G =< a, b \mid a^4ba^{-3}b^{-1}, a^5b^2a^{-4}b^{-2} >$ non è il gruppo banale.

29. Trovare un controesempio all'Esercizio 23.11 del libro di testo.

30. Calcolare il gruppo fondamentale degli spazi di identificazione della figura 25.10 e 25.11 del libro di testo.

31. Sia $X = U_1 \cup U_2$ uno spazio topologico connesso per archi unione di due aperti U_1 e U_2. Dimostrare che se $U_1 \cap U_2$ è connesso per archi allora U_1 e U_2 sono connessi per archi.

32. Dimostrare che la "salsiccia" $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \sin^2(\pi z)\}$ e la "collana" $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = \max(0, \sin(\pi z))\}$ sono semplicementi connessi.

33. Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in $\mathbb{R}^3$ dell'unione dei 3 semiassi coordinati

$$\{y = z = 0,\ x \geq 0\} \cup \{z = x = 0,\ y \geq 0\} \cup \{y = x = 0,\ z \geq 0\}.$$

34. Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in $\mathbb{R}^3$ dell'unione dei 3 semiassi positivi coordinati

$$\{y = z = 0,\ x > 00\} \cup \{z = x = 0,\ y > 00\} \cup \{y = x = 0,\ z\, 00\}.$$

35. Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in $\mathbb{R}^3$ di

$$\{z = y = 0,\ x \geq 1\} \cup \{y = 0,\ x^2 + z^2 = 1\}.$$

36. Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in $\mathbb{R}^3$ di una retta e di un cerchio distinguendo tutte le possibilità che si possono presentare.

37. Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in $\mathbb{R}^3$ di due rette (risp. due cerchi) distinguendo tutte le possibilità che si possono presentare.

38. Dimostrare che per ogni intero $n > 0$ il quoziente $\mathbb{R}^n/GL(n, \mathbb{R})$ non è di Hausdorff.

39. Sia G un gruppo che agisce in modo libero su uno spazio topologico di Hausdorff X e per ogni $x \in X$ esiste un aperto U contenente x tale che $gU \cap U \neq \emptyset$ per al più un numero finito di $g \in G$. Allora G agisce in modo propriamente discontinuo.

40. Sia $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ z \neq 0\}$ e sia G il sottogruppo degli omeomorfismi di X generato da $a(x, y, z) = (-x, -y, z)$ e $b(x, y, z) = (x, y, -z)$. Dimostrare che G è isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ed agisce in modo propriamente discontinuo su X. Dire inoltre se il quoziente X/G è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

41. Dimostrare che per ogni $n \geq 2$ non esiste un'applicazione continua $f : S^n \to S^1$ tale che $f(-x) = -f(x)$. (Suggerimento: imitare la dimostrazione del Teorema di Borsuk–Ulam ($n = 2$)).

42. Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento e $q : I^2 \to Y$ una identificazione tale che $q^{-1}(y)$ è connesso per ogni $y \in Y$. Allora ogni applicazione continua $f : Y \to X$ possiede un sollevamento (Suggerimento: imitare la dimostrazione svolta a lezione del fatto che un'applicazione continua $f : S^2 \to X$ possiede un sollevamento).

43. Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento con $\tilde{X}$ connesso per archi. Trovare il gruppo fondamentale di $\tilde{X}$ supponendo che il gruppo fondamentale di X sia isomorfo a $\mathbb{Z}$ e che la fibra abbia cardinalità finita.

44. Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento con $\tilde{X}$ connesso per archi. Dimostrare che se $\tilde{X} = X$ e il gruppo fondamentale di X è finito allora p è un omeomorfismo. Determinare poi se l'ipotesi di finitezza su X sia effettivamente necessaria.

45. Determinare tutti i rivestimenti di S^1 e dedurne che due rivestimenti di S^1 dello stesso grado finito sono isomorfi.

46. Sia $f : S^1 \to T^2 = S^1 \times S^1$ data da $f(z) = (z^2, 1)$. Trovare un rivestimento non banale di T^2 tale che f ammetta (risp. non ammetta) un sollevamento.

47. Sia $n \geq 2$ un intero. Dimostrare che ogni applicazione continua $f : S^n \to S^1$ (risp. $f : \mathbb{R}P^2 \to S^1$) è omotopa ad un'applicazione costante.

48. Sia X il quoziente della sfera S^2 ottenuto identificando il polo nord con il polo sud. Determinare il rivestimento universale e il gruppo fondamentale di X. (Suggerimento: usare le salsiccia dell'Esercizio 32).