

**PROGRAMMA DI ALGEBRA 2 PRIMA PARTE**  
**Corso di Laurea in Matematica A.A. 2024-2025, primo semestre 6CFU**  
**Docente: Andrea Loi**

**1. Semigrupperi, monoidi e gruppi.** Semigrupperi; esempi di semigrupperi; legge di cancellazione in un semigruppero; elementi idempotenti in un semigruppero; in un semigruppero finito esiste almeno un elemento idempotente; monoidi (semigrupperi con elemento neutro); esempi di monoidi; un elemento idempotente in un monoide dove vale la legge di cancellazione a sinistra (o a destra) è l'elemento neutro; un elemento idempotente in un semigruppero dove vale la legge di cancellazione è l'elemento neutro; definizione di elemento invertibile in un monoide; unicità dell'inverso; definizione di gruppo: monoide dove tutti gli elementi sono invertibili; un semigruppero con elemento neutro a destra (risp. sinistra) e inverso a destra (risp. sinistra) è un gruppo; alcuni esempi di gruppi: gli esempi numerici; il cerchio unitario come gruppo; il gruppo lineare  $GL_n(\mathbb{K})$  su un campo  $\mathbb{K}$ ; gli elementi invertibili  $U(M)$  di un monoide formano un gruppo; legge di cancellazione in un gruppo; un monoide finito dove vale la legge di cancellazione a destra (oppure a sinistra) è un gruppo; un semigruppero finito dove vale la legge di cancellazione è un gruppo; proprietà elementari dei gruppi: inverso del prodotto; proprietà delle potenze in un gruppo; confronto tra la notazione addittiva e moltiplicativa; elementi permutabili in un gruppo e commutatore tra due elementi; ordine di un elemento e le sue proprietà.

**2. Due gruppi importanti.** Il gruppo diedrale  $D_n$ ,  $n \geq 3$ , delle isometrie del piano che fissano un poligono regolare di  $n$ -lati; esempi nel caso  $n = 3$  e  $n = 4$ ; le permutazioni come gruppo; prodotto di permutazioni finite; supporto di una permutazione; permutazioni disgiunte; due permutazioni disgiunte commutano; cicli; ordine, supporto e inverso di un ciclo; potenze di un ciclo; il teorema fondamentale delle permutazioni: ogni permutazione  $f$  non identica con supporto finito può scriversi in modo unico (a meno dell'ordine) come prodotto di cicli disgiunti  $f = \sigma_1 \cdots \sigma_t$  e l'ordine di  $f$  è uguale al minimo comune multiplo della lunghezza dei cicli  $\sigma_j$ ; una permutazione ha ordine un primo  $p$  se e solo se si può scrivere come prodotto di cicli tutti di lunghezza  $p$ ; definizione di  $N(f)$ ; segno di una permutazione  $sgn(f) = (-1)^{N(f)}$ ; permutazioni di classe pari e dispari; ogni permutazione  $f$  si può scrivere come prodotto di  $N(f)$  trasposizioni; il  $sgn$  è una funzione moltiplicativa  $sgn(f \circ g) = sgn(f)sgn(g)$ ; una permutazione è di classe pari se e solo se si può scrivere come prodotto di un numero pari di trasposizioni.

**3. Sottogruppi e classi laterali.** Sottogruppi: stabilità e inverso; esempi di sottogruppi; se un insieme finito  $A$  di un gruppo  $G$  è stabile allora  $A$  è un sottogruppo di  $G$ ; il gruppo alterno  $A_n$ ; criterio per riconoscere un sottogruppo (un sottoinsieme non vuoto  $H$  di un gruppo  $G$  è un sottogruppo se e solo se  $x^{-1}y \in H$  per ogni  $x, y \in H$ ); l'intersezione di una famiglia qualsiasi di sottogruppi è un sottogruppo; sottogruppo  $\langle X \rangle$  di un gruppo  $G$  generato da un sottoinsieme  $X \subseteq G$ ; sottogruppo  $\langle x \rangle$  generato da un elemento; gruppi ciclici; i sottogruppi di  $\mathbb{Z}$  sono tutti ciclici e della forma  $m\mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ; se  $G$  è un gruppo e  $x$  un suo elemento allora  $|\langle x \rangle| = o(x)$ ; siano  $H$  e  $K$  sottogruppi di un gruppo  $G$  allora  $H \cup K$  è un sottogruppo di  $G$  se solo se  $H \subseteq K$  oppure  $K \subseteq H$ ; un gruppo  $G$  non può essere unione di due suoi sottogruppi propri; l'unione di una catena di sottogruppi è ancora un sottogruppo; sottogruppo  $\langle H, K \rangle = \langle H \cup K \rangle$  generato da due sottogruppi  $H, K \subseteq G$ ; prodotto  $HK$  di due sottogruppi  $H$  e  $K$  di un gruppo  $G$ ; siano  $H$  e  $K$  sottogruppi di un gruppo  $G$  allora  $HK = KH$  (ossia  $H$  e  $K$

sono permutabili) se e solo se  $\langle H, K \rangle = HK$ ;  $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$ ; se  $H = m\mathbb{Z}$  e  $K = n\mathbb{Z}$  sono sottogruppi  $(\mathbb{Z}, +)$  allora  $H + K = (m, n)\mathbb{Z}$  e  $H \cap K = [m, n]\mathbb{Z}$ ; classi laterali di un sottogruppo; sia  $G$  un gruppo e  $H$  un suo sottogruppo allora ogni classe laterale (sinistra o destra) di  $H$  in  $G$  ha la stessa cardinalità di  $H$ ; sia  $G$  un gruppo e  $H$  un suo sottogruppo allora la cardinalità delle classi laterali sinistre di  $H$  in  $G$  coincide con la cardinalità delle classi laterali destre di  $H$  in  $G$ ;  $[G : H]$  indice di  $H$  in  $G$ ; teorema di Lagrange (sia  $G$  un gruppo finito e  $H$  un suo sottogruppo allora  $|G| = [G : H]|H|$ ); sia  $G$  un gruppo finito e  $x$  un elemento di  $G$  allora  $o(x)$  divide  $|G|$  e  $x^{|G|} = 1$ ; in un gruppo finito  $G$  di ordine  $p$  primo gli unici sottogruppi sono quelli banali,  $G$  è ciclico e tutti gli elementi non nulli di  $G$  hanno ordine  $p$  e generano  $G$ ; dimostrazione del piccolo teorema di Fermat usando la teoria dei gruppi: ordine del prodotto di due elementi: se due elementi di un gruppo commutano e hanno ordini coprimi allora l'ordine del loro prodotto è uguale al prodotto dei loro ordini.

**4. Sottogruppi normali e quozienti** Definizione di sottogruppo normale di un gruppo  $G$ :  $N$  è un sottogruppo normale di  $G$  ( $N \trianglelefteq G$ ) se le classi laterali sinistre e destre coincidono  $xN$  e  $Nx$  coincidono per ogni  $x \in G$ ; criteri per la normalità di un sottogruppo:  $N$  sottogruppo di  $G$  è normale se e solo se il coniugato di ogni elemento di  $N$  appartiene a  $N$ ; il coniugato di un sottogruppo  $H^x = x^{-1}Hx$ ; condizione di normalità ( $H \trianglelefteq G$  se e solo se  $H^x \leq H$  se e solo se  $H^x = H$  per ogni  $x \in G$ ); il gruppo alterno  $A_n$  è un sottogruppo normale di  $S_n$ ; un sottogruppo  $N$  di indice due in un gruppo  $G$  è normale (non è vero se l'indice è tre); gruppi semplici (gruppi che non hanno sottogruppi normali non banali); il centro  $Z(G)$  di un gruppo  $G$ ; il centro di un gruppo  $G$  è un sottogruppo abeliano normale del gruppo  $G$  e ogni sottogruppo contenuto in  $Z(G)$  è normale in  $G$ ;  $G$  è abeliano se e solo se  $Z(G) = G$ ; se  $G$  è un gruppo semplice non abeliano allora  $Z(G) = \{1\}$ ; non vale la proprietà transitiva per sottogruppi normali: se  $H$  è normale in  $K$  e  $K$  è normale in  $G$  non è detto che  $H$  sia normale in  $G$ ; operazioni con i sottogruppi normali; l'intersezione di una famiglia di sottogruppi normali è un sottogruppo normale; l'unione di una catena di sottogruppi normali è normale: il sottogruppo generato da una famiglia qualsiasi di sottogruppi normali è un sottogruppo normale sia  $H$  un sottogruppo di  $G$  e  $K$  un sottogruppo normale di  $G$  allora  $HK = KH$  (e quindi  $HK$  è un sottogruppo di  $G$ ) se anche  $H$  è normale allora  $HK$  è un sottogruppo normale di  $G$ ; il gruppo lineare speciale  $SL_n(\mathbb{K})$  (sottogruppo normale di  $GL_n(\mathbb{K})$ ); il sottogruppo  $T_n^+(\mathbb{K})$  delle matrici triangolari superiori invertibili (non è normale in  $GL_n(\mathbb{K})$ , per ogni  $n \geq 2$  e per ogni campo  $\mathbb{K}$ ); il gruppo  $D_n(\mathbb{K})$  delle matrici diagonali (non è un sottogruppo normale di  $GL_n(\mathbb{K})$  se  $|\mathbb{K}| \geq 3$  e  $n \geq 2$ ); le matrici scalari  $Z$  sono il centro di  $GL_n(\mathbb{K})$ ; il gruppo ortogonale  $O_n(\mathbb{K})$  è un sottogruppo (non normale) di  $GL_n(\mathbb{K})$  per  $n \geq 2$ ; le matrici simmetriche invertibili non sono un sottogruppo di  $GL_n(\mathbb{K})$ ; il gruppo  $Q_8$  dei quaternioni unitari e le sue proprietà; il gruppo quoziente di un gruppo  $G$  tramite un sottogruppo normale  $N$ ; il gruppo degli interi modulo  $\mathbb{Z}_m$  come quoziente:  $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ; se  $N$  è un sottogruppo normale di un gruppo finito  $G$  allora  $|G| = |G/N||N|$ .

**5. Omomorfismi e isomorfismi.**; Omomorfismi di gruppi; principali proprietà degli omomorfismi (l'identità va nell'identità, l'inverso va nell'inverso e le potenze si preservano); la composizione di omomorfismi è un omomorfismo; isomorfismi di gruppi (omomorfismi invertibili); ogni gruppo ciclico finito di ordine  $n$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}_n$ ; l'immagine di un gruppo ciclico tramite un omomorfismo è ancora ciclico; nucleo di un omomorfismo (sottogruppo normale del dominio); immagine di un omomorfismo (sottogruppo del codominio); un omomorfismo di gruppi è iniettivo se solo se il suo nucleo è banale;

omomorfismo canonico  $\pi : G \rightarrow G/N$  (ogni sottogruppo normale è il nucleo di un omomorfismo); il primo teorema di isomorfismo (sia  $\varphi : G \rightarrow H$  un omomorfismo di gruppi e  $\pi : G \rightarrow G/\ker \varphi$  l'omomorfismo canonico allora esiste un unico omomorfismo iniettivo  $\tilde{\varphi} : G/\ker \varphi \rightarrow H$  tale che  $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$  che risulta essere un isomorfismo se e solo se  $\varphi$  è suriettivo); sia  $\varphi : G \rightarrow H$  un omomorfismo di gruppi allora  $G/\ker \varphi \cong \text{Im}(\varphi)$ ; sia  $\varphi : G \rightarrow H$  un omomorfismo suriettivo di gruppi allora  $H \cong G/\ker \varphi$ ; sia  $\varphi : G \rightarrow H$  un omomorfismo suriettivo di gruppi se  $G$  è finito allora  $|\ker \varphi|$  e  $|H|$  dividono  $|G|$ ;  $\text{GL}_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^*$ , per ogni  $n \geq 1$ , e  $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$ , per ogni  $n \geq 2$ ;  $\mathbb{C}^*/S^1 \cong \mathbb{R}^+$ ; sia  $\varphi : G \rightarrow H$  un omomorfismo di gruppi allora (a) per ogni  $K \leq G$  risulta  $\varphi(K) \leq H$  e se  $K \trianglelefteq G$  allora  $\varphi(K) \trianglelefteq \varphi(G)$ , (b) per ogni  $L \leq H$  risulta  $\ker \varphi \leq \varphi^{-1}(L) \leq G$  e inoltre  $L \trianglelefteq H$  allora  $\varphi^{-1}(L) \trianglelefteq G$ , (c) per ogni  $K \leq G$  si ha  $\varphi^{-1}(\varphi(K)) = K \ker \varphi$ , (d)  $\varphi(\varphi^{-1}(L)) = L \cap \varphi(G)$  per ogni  $L \leq H$ ; esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei sottogruppi (normali) di  $G$  contenenti  $\ker \varphi$  e l'insieme dei sottogruppi (normali) di  $H$  contenuti in  $\varphi(G)$ ; sottogruppi di  $\mathbb{Z}_m$  ( $L \leq \mathbb{Z}_m$  se e solo se  $L = \frac{n\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$  tale che  $n|m$ ); il gruppo degli automorfismi  $\text{Aut}(G)$  di un gruppo  $G$ ; il gruppo  $\text{Inn}(G)$  degli automorfismi interni;  $\text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$  e  $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$ ; il teorema di Cayley (ogni gruppo è isomorfo ad un sottogruppo di un gruppo di permutazioni); ogni gruppo finito di cardinalità  $n$  è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo lineare  $GL_n(\mathbb{K})$  per un qualsiasi campo  $\mathbb{K}$ .

**6. Prodotto diretto di gruppi.** Prodotto diretto di un numero finito di gruppi; proprietà commutativa e associativa del prodotto diretto; l'ordine di un elemento  $z = (x, y)$  del prodotto diretto  $H \times K$  è finito se solo se sono finiti gli ordini di  $x \in H$  e  $y \in K$  e in tal caso l'ordine di  $z$  è il minimo comune multiplo degli ordini di  $x$  e  $y$ ; sia  $G = H \times K$  allora esistono due sottogruppi normali  $\tilde{H}$  e  $\tilde{K}$  isomorfi a  $H$  e  $K$  tali che  $\tilde{H} \cap \tilde{K} = \{1\}$  e  $G = \tilde{H}\tilde{K}$ ; sia  $G$  un gruppo e  $H$  e  $K$  due sottogruppi normali di  $G$  tali che  $H \cap K = \{1\}$  e  $G = HK$  allora  $G \cong H \times K$ ; sia  $G$  un gruppo abeliano e  $H$  e  $K$  due sottogruppi di  $G$  tali che  $H \cap K = \{1\}$  e  $G = H + K$  allora  $G \cong H \times K$ ; sia  $G$  un gruppo finito e  $H$  e  $K$  due sottogruppi normali di  $G$  tali che  $|H| = m$  e  $|K| = n$ ,  $(m, n) = 1$  e  $|G| = mn$  allora  $G \cong H \times K$ ; se in un gruppo  $G$  tutti gli elementi hanno ordine 2 allora  $G$  è abeliano; se  $G$  ha ordine 4 allora è isomorfo a  $\mathbb{Z}_4$  oppure a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ; se  $G$  è un gruppo abeliano cardinalità 6 con due elementi di ordine 2 e 3 allora  $G \cong \mathbb{Z}_6$ ; a meno di isomorfismi un gruppo con 6 elementi è isomorfo a  $\mathbb{Z}_6$  oppure a  $S_3$ ; se  $H$  e  $K$  sono gruppi finiti con cardinalità prime fra loro allora  $\text{Aut}(H \times K) \cong \text{Aut}(H) \times \text{Aut}(K)$ .

**7. Gruppi abeliani finiti.** classificazione dei gruppi ciclici: un gruppo ciclico finito è isomorfo a  $\mathbb{Z}_m$  mentre un gruppo ciclico infinito è isomorfo a  $\mathbb{Z}$ ; generatori di un gruppo ciclico: un gruppo ciclico finito ha  $\phi(m)$  generatori dove  $\phi(m)$  è la funzione di Eulero mentre un gruppo ciclico infinito ha due generatori; un sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico; il quoziente di un gruppo ciclico è ciclico; se  $C$  è un gruppo ciclico finito allora per ogni divisore  $d$  di  $|C|$  esiste un unico sottogruppo di  $C$  di ordine  $d$ ; esiste una corrispondenza biunivoca tra i divisori positivi della cardinalità di un gruppo ciclico finito e i suoi sottogruppi; se  $K$  è ciclico e normale in  $G$  e  $H$  è un sottogruppo di  $K$  allora  $H$  è normale in  $G$ ; se tutti i sottogruppi di un gruppo  $G$  sono solo quelli banali, allora  $G$  è ciclico di ordine  $p$ ; il prodotto diretto  $C_1 \times C_2$  di due gruppi ciclici (non banali) è ciclico se e solo se  $C_1$  e  $C_2$  hanno cardinalità finite prime fra loro (quindi  $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  se e solo se  $(m, n) = 1$ ); il gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico:  $\text{Aut}(C) \cong \mathbb{Z}_2$  se  $C$  ha infiniti elementi e  $\text{Aut}(C) \cong U(\mathbb{Z}_m)$  se  $|C| = m$ ; il Lemma di Gauss: se  $p$  è un primo dispari allora  $\mathbb{Z}_{p^m}$  è ciclico per ogni  $m \geq 1$  (dimostrazione

solo nel caso  $m = 1$ ); il Teorema di Gauss: il gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico finito  $C$  è ciclico se e solo se  $|C| = 1, 2, 4, p^m, 2p^m$  con  $p$  primo dispari; sia  $G$  un gruppo abeliano,  $H$  un sottogruppo di  $G$  e  $a \in G$  siano  $m$  e  $n$  interi primi tra loro tali che  $ma \in H$  e  $na \in K$  allora  $a \in H$ ; lemma di Cauchy nel caso abeliano): sia  $p$  un numero primo e  $G$  un gruppo abeliano finito tale che  $p$  divide  $|G|$  allora  $G$  ha elementi di ordine  $p$ ; sia  $G$  un gruppo abeliano finito e  $m$  un intero positivo tale che  $mx = 0$  per ogni  $x \in G$  allora  $|G|$  divide qualche potenza di  $m$ ; siano  $m$  e  $n$  due interi positivi primi tra loro e  $G$  un gruppo abeliano di ordine  $mn$  allora: (a)  $H = \{x \in G \mid mx = 0\}$  è un sottogruppo di  $G$  di ordine  $m$ ; (b)  $K = \{x \in G \mid nx = 0\}$  è un sottogruppo di  $G$  di ordine  $n$ , (c)  $G \cong H \times K$ ; lemma di scomposizione primaria; sia  $p$  un numero primo e  $G$  un gruppo abeliano di ordine  $p^n$  allora  $G$  è isomorfo ad un prodotto diretto di gruppi ciclici; teorema di Frobenius–Stickelberger (ogni gruppo abeliano finito è isomorfo al prodotto di gruppi ciclici).

#### **Testo di riferimento**

**D. Dikranjan, M. L. Lucido**, *Aritmetica e Algebra*, Liguori Editore 2007.

#### **Altri testi consigliati**

**C.C. Pinter**, *A book of abstract algebra*, Dover Publications Inc.

**I.N. Herstein**, *Algebra*, Editori Riuniti.

**M. Artin**, *Algebra*, Bollati Boringhieri.