Appunti sulla teoria elementare dei gruppi

Andrea Loi

Indice

Capitolo 1

Semigruppi, monoidi e gruppi

1.1 Semigruppi

Sia X un insieme diverso dal vuoto. Un' *operazione binaria* $\cdot$ su X è un'applicazione

$$\cdot : X \times X \to X, (x, y) \mapsto x \cdot y.$$

Diremo che un'operazione binaria $\cdot$ su un insieme X è associativa se

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y, z \in X.$$

Osservazione 1.1.1 Indicheremo con xy il prodotto $x \cdot y$ rta due elementi x, y quando l'operazione binaria $\cdot$ sarà chiara dal contesto. Inoltre se vale la proprietà associativa, dati tre elementi x, y, z potremo scrivere senza ambiguità xyz per indicare $(xy)z = x(yz)$

Definizione 1.1.2 *Un* semigruppo *è una coppia* $(S, \cdot)$*, dove* $S \neq \emptyset$ *e* $\cdot$ *è un'operazione binaria su* S *associativa.*

Dato un semigruppo $(S, \cdot)$ diremo che S è il *supporto* del semigruppo $(S, \cdot)$ e indichieremo la sua cardinalità con $|S|$. A volte chiameremo $|S|$ *l' ordine* del semigruppo $(S, \cdot)$. Diremo anche che un semigruppo è *finito* (risp. *infinito*) se il suo ordine è finito (risp. infinito).

Un'operazione binaria su un insieme $X \neq \emptyset$ è detta *commutativa* se

$$x \cdot y = y \cdot x, \forall\, x, y \in X.$$

Un semigruppo $(S, \cdot)$ nel quale l'operazione binaria $\cdot$ è commutativa verrà chiamato *semigruppo abeliano o commutativo*.

Esempio 1.1.3 Le coppie $(S,+)$ dove $S = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, dove $+$ è la somma usuale sono semigruppi abeliani infiniti.

Esempio 1.1.4 Le coppie $(S^+,+)$ dove $S^+ = \mathbb{N}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$ sono semigruppi abeliani infiniti. In quest'esempio $S^+ = \{x \in S \mid x > 0\}$.

Esempio 1.1.5 Le coppie $(S,\cdot)$ dove $S = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, dove $\cdot$ è la moltiplicazione usuale sono semigruppi abeliani infiniti.

Esempio 1.1.6 Le coppie $(S,\cdot)$ dove $S = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ sono semigruppi abeliani infiniti. In queste note indicheremo con $S^* = S \setminus \{0\}$ se S è un insieme numerico contenente 0 (si noti che $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N}^*$).

Esempio 1.1.7 Sia P l'insieme dei numeri interi pari allora $(P,+)$, $(P^+,+)$, $(P,\cdot)$, e $(P^*,\cdot)$ sono semigruppi abeliani infiniti, dove la somma e la motiplicazione sono quelle usuali.

Esempio 1.1.8 Sia $m \geq 2$ un numero naturale allora $(\mathbb{Z}_m,+)$ e $(\mathbb{Z}_m,\cdot)$ con le operazioni definite sulle classi modulo m come

$$[x]_m + [y]_m = [x+y]_m \tag{1.1}$$

e

$$[x]_m \cdot [y]_m = [xy]_m \tag{1.2}$$

sono semigruppi abeliani di ordine m.

Esempio 1.1.9 Sia $P(X)$ l'insieme delle parti di un insieme $X \neq \emptyset$. Sia $\cup$ (risp. $\cap$) l'operazione binaria su $\mathrm{P}(X)$ che a due elementi $A, B \in \mathrm{P}(X)$ ($A, B \subset X$) associa la loro unione (risp. intersezione) $A \cup B$ (risp. $A \cap B$). Allora $(\mathrm{P}(X),\cup)$ (risp. $(\mathrm{P}(X),\cap)$) è un semigruppo abeliano. L'ordine di $\mathrm{P}(X)$ è finito se e solo se X ha cardinalità finita.

Esempio 1.1.10 Sia X un insieme, $X \neq \emptyset$. Definiamo un'operazione binaria $\cdot$ su X come

$$x \cdot y = x, \forall x, y \in X. \tag{1.3}$$

Si verifica immediatamente che $(X,\cdot)$ è un semigruppo. non abeliano se X ha almeno due elementi. Analogamente possiamo definire su X l'operzione binaria

$$x \cdot y = y, \forall x, y \in X. \tag{1.4}$$

Esempio 1.1.11 Sia X un insieme, $X \neq \emptyset$. Consideriamo l'insieme $S = X^X$ costituito da tutte le applicazioni da X in se stesso con operazione binaria

$$f \circ g, \forall f, g \in S,$$

dove $\circ$ denota la composizione di applicazioni. Si verifica immediatamente che $(S, \circ)$ è un semigruppo. Inoltre questo semigruppo non è abeliano se X ha almeno due elementi. Infatti se $a, b \in X$, $a \neq b$ allora le applicazioni (costanti) $f, g \in S$ definite da $f(x) = a$ e $g(x) = b$, per ogni $x \in X$, sono tali che $f(g(a)) = a$ e $g(f(a)) = b$ e quindi $f \circ g \neq g \circ f$.

Sia $\cdot$ un'operazione binaria su un insieme $X \neq \emptyset$. Diremo che $x \in X$ è *cancellabile a sinistra (risp. a destra)* se

$$x \cdot y = x \cdot z \ \Rightarrow \ y = z, \ \forall y, z \in X \tag{1.5}$$

$$(\text{risp. } y \cdot x = z \cdot x \ \Rightarrow \ y = z, \ \forall y, z \in X). \tag{1.6}$$

Un'operazione binaria $\cdot$ su un insieme X soddisfa la *legge di cancellazione a sinistra (risp. a destra)* se ogni elemento di X è cancellabile a sinistra (risp. a destra), cioè

$$x \cdot y = x \cdot z \ \Rightarrow \ y = z, \ \forall x, y, z \in X \tag{1.7}$$

$$(\text{risp. } y \cdot x = z \cdot x \ \Rightarrow \ y = z, \ \forall x, y, z \in X). \tag{1.8}$$

Diremo che un'operazione binaria su $X \neq \emptyset$ soddisfa la *legge di cancellazione* se soddisfa la legge di cancellazione sia a sinistra che a destra.

Osservazione 1.1.12 Se l'operazione binaria è commutativa allora ogni $x \in X$ è cancellabile a sinistra se e solo se è cancellabile a destra e quindi vale la legge di cancellazione a sinistra se e solo se vale la legge di cancellazione a destra se e solo se vale la legge di cancellazione.

Esempi 1.1.13 Il lettore è invitato a convincerci fornendo se necessario una dimostrazione della validità delle affermazioni seguenti.

1. nei semigruppi abeliani $(S, +)$ e $(S^+, +)$ degli Esempi 1.1.3 e 1.1.4 vale la legge di cancellazione.

2. Nei semigruppi $(S, \cdot)$ dell'Esempio 1.1.5 non vale la legge di cancellazione: infatti $0 \cdot 2 = 0 \cdot 3$ ma $2 \neq 3$. Un elemento è cancellabile se e solo se è diverso da 0.

3. nei semigruppi $(S, \cdot)$ dell'Esempio 1.1.6 vale la legge di cancellazione.

4. nei semigruppi abeliani $(P, +)$, $(P^+, +)$ e $(P^*, \cdot)$ dell'Esempio 1.1.7 vale la legge di cancellazione. Mentre nel semigruppo abeliano $(P, \cdot)$ dello stesso esempio non vale la legge di cancellazione (un elemento è cancellabile se e solo se è diverso da 0).

5. l'operazione binaria (1.1) soddisfa la legge di cancellazione. Mentre l'operazione binaria (1.2) non la soddisfa. Infatti $[0]_m[0]_m = [0]_m[1]_m = [0]_m$ ma $[0]_m \neq [1]_m$. Lo studio degli elementi cancellabili nel semigruppo $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ è legato ai divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$, argomento non trattato in queste note.

6. il semigruppo abeliano $(\mathrm{P}(X), \cup)$ (risp. $(\mathrm{P}(X), \cap)$) non soddisfa la legge di cancellazione. Per esempio se $A \subset B$ e $A \subset C$ e $B \neq C$ allora $A = A \cap B = A \cap C$ non implica $B = C$.

7. sia X un insieme con almeno due elementi. Allora l'operazione binaria (1.3) (risp. (1.4)) soddisfa la legge di cancellazione a destra (risp. sinistra) ma non a sinistra (risp. destra).

8. nel semigruppo $(S, \circ)$ dell'Esempio 1.1.11 un elemento $f \in S$ è cancellabile a sinistra (risp. a destra) se e solo se f è iniettiva (risp. suriettiva).

Sia $\cdot$ un'operazione binaria su un insime $X \neq \emptyset$. Diremo che $b \in X$ è *idempotente* se

$$b^2 := b \cdot b = b.$$

Esempi 1.1.14 Il lettore è invitato a convincersi fornendo se necessario una dimostrazione della validità delle affermazioni seguenti.

1. nei semigruppi $(S, +)$ dell' Esempio 1.1.3 l'unico elemento idempotente è 0.

2. nei semigruppi $(S^+, +)$ dell' Esempio 1.1.4 non ci sono elementi idempotenti.

3. nei semigruppi $(S, \cdot)$ dell'Esempio 1.1.5 ci sono due elementi idempotenti, 0 e 1.

4. nei semigruppi $(S, \cdot)$ dell'Esempio 1.1.6 l'unico elemento idempotente è 0.

5. nei semigruppo $(P,+)$ e $(P,\cdot)$ l'unico elemento idempotente è 0. Nei semigruppo $(P^+,+)$ e $(P^*,\cdot)$ non ci sono elementi idempotenti.

6. nel semigruppo $(\mathbb{Z}_m,+)$, $[0]_m$ è l'unico elemento idempotente se m è dispari. Cosa succede se m è pari?

7. nei semigruppi degli Esempi 1.1.9 e 1.1.10 tutti gli elementi sono idempotenti.

Osservazione 1.1.15 Nel semigruppo $(S,\circ)$ dell'Esempio 1.1.11 ci possono essere tanti elementi idempotenti e la loro classificazione varia al variare dell'insieme X. Il lettore è inviato a riflettere sul caso $X = \mathbb{R}$.

Concludiamo questa sezione dimostrando l'esistenza di un elemento idempotente in un semigruppo finito.

Proposizione 1.1.16 *Sia $(S,\cdot)$ un semigruppo finito. Allora esiste almeno un elemento idempotente di S.*

Dimostrazione: Sia $x \in S$ un elemento arbitrario. Per la proprietà associativa dell'operazione binaria $\cdot$ possiamo definire

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ volte}},\ \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Segue che

$$x^{n+1} = x^n x = x x^n,\ \forall n \in \mathbb{N}^+ \tag{1.9}$$

e, per induzione su n (fissato m) si ha:

$$x^{m+n} = x^n x^m = x^m x^n,\ \forall m,n \in \mathbb{N}^+. \tag{1.10}$$

La (1.10) segue facilmente fissando $m \in \mathbb{N}_+$, usando l'induzione su n e la (1.9). Sia

$$C(x) = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}^+\}.$$

Poichè $C(x) \subset S$ e $|S| < \infty$ anche $|C(x)| < \infty$. Consideriamo ora l'applicazione

$$f : \mathbb{N}^+ \to C(x),\ n \mapsto x^n.$$

Poiche la cardinalità di $\mathbb{N}^+$ è infinita, l'applicazione f non è iniettiva. Esisteranno quindi $i,j \in \mathbb{N}^+$, con $i > j$ tali che:

$$x^i = x^j. \tag{1.11}$$

Dalla (1.10) segue allora che

$$x^i = x^{i-j}x^j = x^j. \tag{1.12}$$

Inoltre, abbiamo che

$$x^i = x^{n(i-j)}x^j,\ \forall n \in \mathbb{N}^+. \tag{1.13}$$

La (1.13) si dimostra per induzione come segue. Per $n = 1$ è vera per la (1.12). Supponiamola vear per n, cioè supponiamo la validità di (1.13). Allora da (1.10), (1.11) e (1.12) si ottiene

$$\begin{aligned} x^{(n+1)(i-j)}x^j = x^{n(i-j)+(i-j)}x^j = x^{n(i-j)}x^{i-j}x^j = \\ = x^{n(i-j)}x^jx^{i-j} = x^ix^{i-j} = x^jx^{i-j} = x^i, \end{aligned}$$

che mostra la validità di (1.13) per $n + 1$.

Scegliamo ora $k \in \mathbb{N}^+$ tale che $k(i - j) > j$ e definiamo $b \in S$ come

$$b := x^{k(i-j)}.$$

Mostriamo che b è un elemento idempotente. Infatti

$$\begin{aligned} b^2 = b \cdot b = x^{k(i-j)}x^{k(i-j)} = x^{k(i-j)}x^{k(i-j)-j}x^j = x^{k(i-j)}x^jx^{k(i-j)-j} = \\ = x^ix^{k(i-j)-j} = x^jx^{k(i-j)-j} = x^{k(i-j)} = b. \end{aligned}$$

□

Osservazione 1.1.17 I semigruppi $(S^+, +)$ dell' Esempio 1.1.4 mostrano che l'ipotesi che S sia finito è necessaria per la validità della proposizione precedente.

1.2 Monoidi

Sia $\cdot$ un'operazione binaria su un insieme $X \neq \emptyset$. Un elemento $1 \in M$ si dice *elemento neutro a destra (risp. sinistra)* per l'operazione binaria $\cdot$, se

$$x \cdot 1 = x\ (\text{risp. } 1 \cdot x = x),\ \forall x \in X.$$

Diremo che 1 é un elemento neutro per l'operazione binaria $\cdot$ se 1 é un elemento neutro sia a destra che a sinistra.

Se l'operazione binaria è chiara dal constesto, parleremo di elemento neutro (a destra oppure sinistra) senza specificare l'operazione binaria.

Osservazione 1.2.1 Se l'operazione binaria su un insieme X è commutativa allora 1 é un elemento neutro a destra se e solo se 1 é un elemento neutro a sinistra se e solo se 1 è un elemento neutro.

Osserviamo che se esiste un elemento neutro 1 per un'operazione binaria su un insieme X, allora 1 é l'unico elemento neutro, e parleremo quindi di 1 come l'elemento neutro. Infatti, se $\tilde{1} \in X$ é un altro elemento neutro allora

$$\tilde{1} = \tilde{1} \cdot 1 = 1,$$

dove nella prima uguaglianza stiamo usando il fatto che 1 é un elemento neutro a destra, mentre nella seconda che $\tilde{1}$ é un elemento neutro a sinistra.

Definizione 1.2.2 *Un semigruppo $(M, \cdot)$ é un* monoide *se esiste l'elemento neutro $1 \in M$.*

Equivalentemente, un monoide è un tripletta $(M, \cdot, 1)$, dove $(M, \cdot)$ é un semigruppo ed 1 é l'elemento neutro. Un monoide $(M, \cdot, 1)$ é detto *abeliano o commutativo* se il semigruppo $(M, \cdot)$ é abeliano.

Notazione 1.2.3 Nel caso di un monoide abeliano scriveremo l'operazione binaria con $+$ e l'elemento neutro con 0. Quindi un monoide abeliano sará indicato con $(M, +, 0)$. Un monoide arbitrario sará indicato con $(M, \cdot, 1)$.

Esempio 1.2.4 Le coppie $(S, +)$ dell' Esempio 1.1.3 sono monoidi abeliani infiniti dove l'elemento neutro é lo 0.

Esempio 1.2.5 Nessuna delle coppie $(S^+, +)$ dell'Esempio 1.1.4 é un monoide.

Esempio 1.2.6 Le coppie $(S, \cdot)$ dell'Esempio 1.1.5 sono monoidi abeliani infiniti con elemento neutro 1.

Esempio 1.2.7 Le coppie $(S, \cdot)$ dell'Esempio 1.1.6 sono monoidi sabeliani infiniti con elemento neutro 1.

Esempio 1.2.8 Sia P l'insieme dei numeri interi pari come nell'Esempio 1.1.7. Allora $(P, +, 0)$ è un monoide abeliano infinito. Mentre nessuna delle coppie $(P^+, +)$, $(P, \cdot)$ e $(P^*, \cdot)$ é un monoide.

Esempio 1.2.9 In riferimento all'Esempio 1.1.8, $(\mathbb{Z}_m, +, [0]_m)$ e $(\mathbb{Z}_m, \cdot, [1]_m)$ sono entrambi monoidi abeliani di ordine m.

Esempio 1.2.10 In riferimento all'Esempio 1.1.9 $(P(X), \cup, \emptyset)$ (risp. $(P(X), \cap, X)$) sono monoidi abeliani.

Esempio 1.2.11 In riferimento all'Esempio 1.2.11, $(X, \cdot)$ non é mai un monoide per $|X| \geq 2$.

Esempio 1.2.12 In riferimento all'Esempio 1.1.11, $(S = X^X, \circ)$ é un monoide con elemento neutro id_X ($\mathrm{id}_X(x) = x$ per ogni $x \in X$).

Dato un monoide $(M, \cdot, 1)$ allora l'elemento neutro è chiaramente un elemento idempotente ($1 \cdot 1 = 1$).

Proposizione 1.2.13 *Sia $(M, \cdot, 1)$ un monoide dove vale la legge di cancellazione a destra oppure a sinistra. Allora 1 é l'unico elemento idempotente.*

Dimostrazione: Supponiamo che $b \in M$ sia un idempotente e che valga la legge di cancellazione a destra. Allora dalla relazione

$$b \cdot b = b^2 = b = 1 \cdot b$$

si ottiene (b é cancellabile a destra) $b = 1$. Analogamente, se vale la legge di cancellazione a sinistra da

$$b \cdot b = b^2 = b = b \cdot 1$$

si ottiene (b é cancellabile a sinistra) $b = 1$. □

Senza l'ipotesi della legga di cancellazione la proposizione precedente non è valida come mostra il monoide dell'Esempio 1.2.10, dove tutti gli elementi sono idempotenti. La Proposizione 1.2.13 non si estende a semigruppi. Si pensi, per esempio, ad un insieme X con operazione binaria $x \cdot y = x$ (cf. Esempio 1.1.10). Come abbiamo osservato in quest'esempio vale la legge di cancellazione a destra ma non a sinistra e tutti gli elementi sono idempotenti.

D'altra parte la Proposizione 1.2.13 si estende a semigruppi se si richiede che valga la legge di cancellazione (sia a destra che a sinistra).

Proposizione 1.2.14 *Sia $(S, \cdot)$ un semigruppo dove vale la legge di cancellazione e sia $b \in S$ un elemento idempotente. Allora b é l'elemento neutro e quindi $(S, \cdot, b)$ é un monoide.*

Dimostrazione: Supponiamo che $b \in M$ sia un idempotente. Allora

$$b \cdot b \cdot x = b^2 x = bx, \ \forall x \in S.$$

Usando la legge di cancellazione a sinistra si ottiene quindi che $b \cdot x = x$ per ogni $x \in S$ e quindi b é un elemento neutro a sinistra. In modo analogo, dalla relazione

$$x \cdot b \cdot b = x \cdot b^2 = x \cdot b, \ \forall x \in S$$

e usando la legge di cancellazione a destra si ottiene $b \cdot x = x$ per ogni $x \in S$. Quindi b é l'elemento neutro e $(S, \cdot, b)$ é un monoide. □

Combinando la Proposizione 1.1.16 con la Proposizione 1.2.14 si ottiene:

Corollario 1.2.15 *Un semigruppo finito dove vale la legge di cancellazione è un monoide.*

1.3 Gruppi

Sia $(M, \cdot, 1)$ un monoide e sia $x \in M$. Diremo che $a \in M$ é un inverso destro di x se

$$x \cdot a = 1. \tag{1.14}$$

Diremo che $a \in M$ é un inverso sinistro di x se

$$a \cdot x = 1. \tag{1.15}$$

Diremo che a è un'inverso di x se, a é sia inverso destro che inverso sinistro. Se x ha un'inverso allora diremo che x é *invertibile*.

Proposizione 1.3.1 *Sia x un elemento di un monoide $(M, \cdot, 1)$. Se x é invertibile allora il suo inverso è unico.*

Dimostrazione: Siano a e b due inversi di x. Per la proprietá associativa possiamo scrivere

$$a = a \cdot 1 = a \cdot (x \cdot b) = (a \cdot x) \cdot b = 1 \cdot b = b,$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato il fatto che b é l'inverso destro di x e nella terza che a é l'inverso sinistro di x. □

In virtú della proposizione precedente dato un elemento inveritibile $x \in M$ parleremo *del* suo inverso che indicheremo (momentaneamente) con $i(x)$.

Definizione 1.3.2 *Una tripletta $(G, \cdot, 1)$ é un* gruppo *se é un monoide e tutti gli elementi di G sono invertibili.*

Quindi un gruppo é una tripletta $(G, \cdot, 1)$ dove $(G, \cdot)$ é un semigruppo (cioé l'operazione binaria $\cdot : G \times G \to G$ é associativa) tale che:

$$x \cdot 1 = x, \forall x \in G \ \ (1 \text{ è elemento neutro a destra}); \tag{1.16}$$

$$1 \cdot x = x, \forall x \in G \ \ (1 \text{ è elemento neutro a sinistra}); \tag{1.17}$$

e per ogni $x \in G$ esiste $i(x)$ tale che:

$$x \cdot i(x) = 1 \ \ (i(x) \ \text{ è inverso destro di } x); \tag{1.18}$$

$$i(x) \cdot x = 1 \ \ (i(x) \ \text{ è inverso sinistro di } x). \tag{1.19}$$

Osservazione 1.3.3 Come conseguenza dell'esistenza di un inverso per ogni elemento otteniamo che ogni equazione di primo grado in un gruppo G ha sempre un'unica soluzione: dati $a, b \in G$. esiste un unico $x \in G$ che soddisfa l'equazione.

$$ax = b. \tag{1.20}$$

Infatti moltiplicando a sinistra (risp. destra) per a^{-1} l'equazione precedente si ottiene $a^{-1} \cdot (a \cdot x) = (a^{-1} \cdot a) \cdot x = x$ (risp. $a^{-1}b$). E quindi l'unica soluzione dell'equazione (1.20) è $x = a^{-1}b$.

Notiamo che alcune delle proprietá nella definizione di gruppo sono ridondanti. Infatti, come mostra la seguente proposizione, basta richiedere la validitá del'esistenza di un elemento neutro a destra (risp. sinistra) e di un inverso destro (risp. sinistro) per ogni elemento di un semigruppo per essere sicuri che il semigruppo sia in effetti un gruppo.

Proposizione 1.3.4 *Sia $(S, \cdot)$ un semigruppo. Supponiamo che le* (1.16) *e* (1.18) *(risp.* (1.17) *e* (1.19)*) siano soddisfatte. . Allora $(S, \cdot, 1)$ é un gruppo.*

Dimostrazione: Sia $x \in S$. Per la (1.18) esiste $i(x) \in S$ tale che $x \cdot i(x) = 1$. Vogliamo mostrare che $i(x)$ é anche inverso sinistro di x. Osserviamo che

$$b := i(x) \cdot x$$

é idempotente. Infatti

$$b^2 = b \cdot b = (i(x) \cdot x) \cdot (i(x) \cdot x) = i(x) \cdot (x \cdot i(x)) \cdot x = (i(x) \cdot 1) \cdot x = i(x) \cdot x = b,$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo usato la (1.16). Sia ora $i(b)$ l'inverso destro di b che esiste sempre per la (1.18). Allora

$$1 = b \cdot i(b) = b^2 \cdot i(b) = b \cdot (b \cdot i(b)) = b \cdot 1 = b$$

e quindi $i(x) \cdot x = 1$ e $i(x)$ é inverso sinistro di x. Inoltre 1 è un elemento neutro a sinistra. Infatti

$$1 \cdot x = (x \cdot i(x)) \cdot x = x \cdot (i(x) \cdot x) = x \cdot 1 = x.$$

In modo analogo si dimostra che un semigruppo dove valgono le (1.17) e (1.19) é un gruppo. □

Osservazione 1.3.5 Le conclusioni della Proposizione 1.3.4 non sono valide se si richiede che valgano le (1.16) e (1.19) (risp. (1.17) e (1.18)). Per esempio sia $(X, \cdot)$ il semigruppo dato da un insieme $X \neq \emptyset$ con operazione binaria $x \cdot y = x$ per ogni $x, y \in X$ (si veda l'Esempio 1.1.10). Allora ogni elemento di X è un elemento neutro a destra e ogni elemento di X ha un inverso sinistro e come abbiamo già osservato $(X, \cdot)$ non é un monoide (si veda Esempio 1.2.11). Un altro esempio è fornito dal semigruppo $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ con operazione binaria

$$x \cdot y = |x|\, y,$$

dove $|x|$ denota il valore assoluto di $x \in \mathbb{R}^*$. In questo caso 1 é un elemento neutro sinistro (ma non destro $|x| = x \cdot 1 \neq x$, se $x < 0$) e ogni elemento x ha inverso destro dato da $|x|^{-1}$. D'altra parte, un qualunque $y \in \mathbb{R}^*$, con $y < 0$ non ha inverso sinistro. Notiamo che in questo esempio esistono due elementi neutri a sinistra ± 1 e se si fosse scelto -1 come elemento neutro sinistro allora ogni $y \in \mathbb{R}^*$ con $y > 0$ non avrebbe avuto inverso sinistro.

Notazione 1.3.6 Nel resto di queste note indicheremo con G invece che con $(G, \cdot, 1)$ un gruppo, quando l'operazione binaria e l'elemento neutro saranno chiari dal contesto. Inoltre indicheremo con x^{-1} l'inverso di un elemento $x \in G$ ($x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$). Se il gruppo G é abeliano useremo anche la notazione $+$ per l'operazione binaria, 0 per l'elemento neutro e $-x$ per l'inverso di $x \in G$ (e scrivermo $x + (-x) = x - x = 0$).

1.3.1 Alcuni esempi di gruppi

Il lettore è invitato a convincersi che gli esempi che seguono sono effettivamente gruppi e di capire perchè alcuni dei monoidi degli Esempi 1.2.4-1.2.12 non appartengono a questa lista.

Esempio 1.3.7 Le coppie $(S, +, 0)$, dove $S = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $+$ è la somma usuale sono gruppi abeliani infiniti.

Esempio 1.3.8 Le coppie $(S, \cdot, 1)$, dove $S = \mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ e $\cdot$ è la moltiplicazione usuale sono gruppi abeliani infiniti.

Esempio 1.3.9 (il cerchio unitario) L'insieme

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

è un gruppo abeliano infinito con la moltiplicazione $\cdot$ usuale tra numeri complessi. Ricordiamo che se $z = x + iy$ allora il suo modulo è definito come $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Infatti, il prodotto di due numeri complessi di modulo unitario è un numero complesso di modulo unitario, in quanto

$$|zw| = |z||w| = 1, \forall z, w \in S^1,$$

e quindi la moltiplicazione è un'operazione binaria su S^1. $(S^1, \cdot)$ è un semigruppo perchè la legge associativa vale in $\mathbb{C}^*$ e a fortiori in S^1. Inoltre $1 \in S^1$ è l'elemento neutro in $\mathbb{C}^*$ e quindi in S^1. Segue che $(S^1, \cdot, 1)$ è un monoide abeliano. Infine se $z \in S^1$ allora $z^{-1} \in S^1$. Infatti

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z} \in S^1,$$

dove $\bar{z}$ è il coniugato di z (se $z = x + iy$ allora $\bar{z} = x - iy$).

Per descrivere altri esempi di gruppi definiamo il concetto di campo. Una cinquina $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$, $0, 1 \in \mathbb{K}$, $0 \neq 1$, è un campo se $(\mathbb{K}, +, 0)$ e $(\mathbb{K}^*, \cdot, 1)$ ($K^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$) sono gruppi abeliani e vale la seguente proprietè distributiva del prodotto $\cdot$ rispetto alla somma $+$:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \ \forall x, y, x \in \mathbb{K}.$$

Segue dagli Esempi 1.3.7 e 1.3.8 che $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ con le operazioni usuali di somma e prodotto sono campi infniti. Esistono anche campi finiti. Quello a cui siamo interessati in questo corso è il campo $\mathbb{Z}_p = (\mathbb{Z}_p, +, \cdot, [0]_p, [1]_p)$ degli interi modulo p, con p numero primo, con somma e moltiplicazione definite da (1.1) e (1.2). Il fatto che $\mathbb{Z}_p$ sia un campo (con p elementi) segue dal fatto che $(\mathbb{Z}_p, +, [0]_p)$ è un gruppo abeliano (cf. l'Esempio 1.1.8), che $(\mathbb{Z}_p, +, [1]_p)$ è un monoide (cf. l'Esempio 1.2.9) e ogni $[a]_p \neq [0]_p$ è invertibile. Quest'ultimo fatto si dimostra come segue: per il teorema di Bezout essendo a coprimo con p esistono $u, v \in \mathbb{Z}$ tali che $ua + vp = 1$. Segue che

$$[ua]_p = [a]_p \cdot [u]_p = [u]_p \cdot [a]_p = [1]_p$$

e quindi $[u]_p$ è l'inverso di $[a]_p$.

Si noti che un campo ha almeno 2 elementi ($0 \neq 1$) e che $\mathbb{Z}_2$ è un campo con 2 elementi.

Esempio 1.3.10 (il gruppo lineare) Sia $n \in \mathbb{N}^+$ un intero positivo e sia $\mathbb{K}$ un campo. Definiamo $M_n(\mathbb{K})$ come l'insieme delle matrici quadrate di ordine n, ovvero $n \times n$, a coefficienti in $\mathbb{K}$. Un elemento $A \in M_n(\mathbb{K})$ può essere scritto come

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{K}$ rappresenta l'elemento della i-esima riga e j-esima colonna.

Possiamo definire una somma tra due matrici: se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sono due matrici in $M_n(\mathbb{K})$, la matrice somma $C := A + B \in M_n(\mathbb{K})$ è definita come

$$C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Questa operazione è una somma componente per componente.

Inoltre, $(M_n(\mathbb{K}), +, O_n)$ è un *monoide*, dove O_n denota la *matrice nulla*, cioè la matrice $n \times n$ le cui entrate sono tutte uguali a 0, ossia:

$$O_n = (0_{ij}), \quad 0_{ij} = 0, \ \ \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Possiamo anche definire il prodotto tra due matrici: se $A = (a_{ik})$ e $B = (b_{kj})$ sono due matrici in $M_n(\mathbb{K})$, la matrice prodotto $C := A \cdot B \in M_n(\mathbb{K})$ è definita mediante il prodotto righe per colonne, ossia:

$$C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Anche questa è un'operazione binaria. Inoltre, $(M_n(\mathbb{K}), \cdot, I_n)$ è un *monoide* rispetto al prodotto, dove I_n denota la *matrice identità*, definita come:

$$I_n = (\delta_{ij}), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

La matrice identità ha 1 su tutta la diagonale principale e 0 altrove.

La dimostrazione che $(M_n(\mathbb{K}), \cdot, I_n)$ è un monoide segue gli stessi passaggi visti nei corsi di algebra lineare, con l'ipotesi che il campo $\mathbb{K}$ sia $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Per $n \in \mathbb{N}^+$, il *gruppo lineare generale* su un campo $\mathbb{K}$ è definito come

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ è invertibile}\},$$

dove una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ è detta *invertibile* se esiste una matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ tale che

$$AB = BA = I_n.$$

Una tale matrice B è chiamata *inversa* di A ed è anch'essa un elemento di $GL_n(\mathbb{K})$, ossia invertibile. La condizione che A sia invertibile è equivalente al fatto che il suo *determinante*, $\det(A)$, sia diverso da 0, dove $0 \in \mathbb{K}$ è l'elemento nullo del campo. Il determinante di una matrice quadrata A su un campo $\mathbb{K}$ si definisce nello stesso modo che per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Si invitano i lettori a verificare che tutte le proprietà del determinante viste nei corsi di algebra lineare si estendono al caso generale di un campo arbitrario. Ad esempio, la formula di Binet, che afferma che

$$\det(AB) = \det(A)\det(B),\ \forall A, B \in M_n(\mathbb{K}),$$

vale in qualsiasi campo $\mathbb{K}$.

Usando la formula di Binet, si può concludere che $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot, I_n)$ è un *gruppo*, che in generale non è abeliano per $n \geq 2$. Tuttavia, è un gruppo abeliano per $n = 1$, poiché $GL_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^*$.

Concludiamo questa sezione mostrando come, a partire da un monoide, si possa costruire un gruppo considerando i suoi elementi invertibili.

Proposizione 1.3.11 *Sia $M = (M, \cdot, 1)$ un monoide. Definiamo l'insieme degli elementi invertibili di M come:*

$$U(M) = \{x \in M \mid x \text{ è invertibile}\}.$$

Allora $(U(M), \cdot, 1)$ è un gruppo.

Dimostrazione: Siano $x, y \in U(M)$, cioè x e y sono invertibili. Dimostriamo che anche il loro prodotto è invertibile. In particolare, mostriamo che l'inverso di $x \cdot y$ è dato da:

$$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}. \tag{1.21}$$

Infatti:

$$(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = x \cdot (y \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} = x \cdot 1 \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1,$$

e, analogamente:

$$(y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot (x \cdot y) = y^{-1} \cdot (x^{-1} \cdot x) \cdot y = y^{-1} \cdot 1 \cdot y = y^{-1} \cdot y = 1.$$

Pertanto, $x \cdot y$ è invertibile e l'inverso è $y^{-1} \cdot x^{-1}$. Da ciò si deduce che la moltiplicazione definita su M induce un'operazione binaria su $U(M)$. Ora, osserviamo che $(U(M), \cdot)$ è un semigruppo, poiché la proprietà associativa vale in

M e, quindi, anche nel sottoinsieme $U(M)$. Inoltre, $(U(M), \cdot, 1)$ è un monoide, in quanto 1 è invertibile (essendo il suo stesso inverso). Infine, per costruzione, tutti gli elementi di $U(M)$ sono invertibili, il che dimostra che $(U(M), \cdot, 1)$ è un gruppo. □

Osservazione 1.3.12 Segue immediatamente dalla definizione di gruppo che, se G è un gruppo, allora $U(G) = G$, poiché per definizione tutti gli elementi di un gruppo sono invertibili.

Osservazione 1.3.13 La formula (1.21) si estende facilmente a più elementi: se $x_1, \ldots, x_k$, $k \geq 2$ sono elementi di G, allora

$$(x_1 \cdots x_k)^{-1} = x_k^{-1} \cdots x_1^{-1}.$$

Non è detto che il gruppo $U(M)$ sia sempre interessante. Ad esempio, nel caso del monoide $(\mathbb{Z}, +, 0)$ (rispettivamente $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$), l'insieme degli elementi invertibili è costituito solo da 0 (rispettivamente 1). Un altro esempio è dato dal monoide $(\mathbb{Q}, \cdot, 1)$ (rispettivamente $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$ e $(\mathbb{C}, \cdot, 1)$), in cui l'insieme degli elementi invertibili è $\mathbb{Q}^*$ (rispettivamente $\mathbb{R}^*$ e $\mathbb{C}^*$).

Un esempio rilevante è dato da $U(M_n(\mathbb{K}), \cdot, I_n) = GL_n(\mathbb{K})$, l'insieme delle matrici invertibili di ordine n su un campo $\mathbb{K}$.

Esempio 1.3.14 Consideriamo il monoide $(\mathbb{Z}_m, \cdot, [1]_m)$, dove $\mathbb{Z}_m$ sono gli interi modulo m e $[1]_m$ è l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione modulo m. L'insieme degli elementi invertibili di $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ è dato da:

$$U(\mathbb{Z}_m, \cdot) = \{[a]_m \in \mathbb{Z}_m \mid (a, m) = 1\}, \tag{1.22}$$

dove (a, m) indica il massimo comun divisore tra a e m. Infatti, se a è coprimo con m, esistono $u, v \in \mathbb{Z}$ tali che $ua + vm = 1$. Questo implica che:

$$[ua]_m = [a]_m \cdot [u]_m = [u]_m \cdot [a]_m = [1]_m, \tag{1.23}$$

e quindi $[u]_m$ è l'inverso di $[a]_m$. Viceversa, se $[a]_m \in U(\mathbb{Z}_m, \cdot)$, esiste $[u]_m \in \mathbb{Z}_m$ tale che valga la relazione (1.23), il che implica che $au + km = 1$ per un intero k, e quindi $(a, m) = 1$. Osserviamo che questo ragionamento mostra che $\mathbb{Z}_m$ è un campo se e solo se m è un numero primo.

1.3.2 La legge di cancellazione in un gruppo

Un risultato fondamentale nei gruppi è espresso dalla seguente proposizione.

Proposizione 1.3.15 *In un gruppo G vale la legge di cancellazione.*

Dimostrazione: Siano $x, y, z \in G$ tali che $xy = xz$. Moltiplicando a sinistra per x^{-1} (l'inverso di x) il primo e secondo membro di quest'equazione si ottiene $x^{-1}(xy) = x^{-1}(xz)$. Per la proprietà associativa il primo (risp. secondo) membro si scrive come $x^{-1}(xy) = (x^{\cdot -1}x)y = 1y = y$ (risp. $x^{-1}(xz) = (x^{\cdot -1}x)z = 1z = z$). Segue dunque che $y = z$, il che mostra la validità dellla legge di cancellazione a sinistra. Analogamente da $yx = zx$ si ottiene $y = z$ moltiplicando a destra per x^{-1}. □

A questo punto sorge spontanea una domanda: in un semigruppo o in un monoide in cui vale la legge di cancellazione, l'insieme è necessariamente un gruppo? Le due proposizioni seguenti esplorano questa questione.

Proposizione 1.3.16 *Sia M un monoide finito. Se vale la legge di cancellazione a destra o a sinistra, allora M è un gruppo.*

Dimostrazione: Sia $x \in M$. Dimostriamo che x è invertibile. Se vale la legge di cancellazione a sinistra consideriamo la *traslazione a sinistra* definita da:

$$L_x : M \to M,\ y \mapsto xy.$$

Questa funzione è iniettiva: se $L_x(y) = L_x(z)$ allora $xy = xz$ e, cancellando x a sinistra si ottiene $y = z$. Poichò M è finito, L_x è anche suriettiva. Quindi esiste un elemento $i(x) \in M$ tale che $= x \cdot i(x) = L_x(i(x)) = 1$, dimostrando che $i(x)$ è un inverso destro di x. Dal momento che 1 è l'elemento neutro a destra, segue dalla Proposizione 1.3.4 che $i(x)$ è anche inverso sinistro di x e quindi x è invertibile. Se invece vale la legge di cancellazione a destra, consideriamo la *traslazione a destra*:

$$R_x : M \to M,\ y \mapsto yx$$

che si dimostra essere iniettiva, e quindi suriettiva, da cui si deduce che x è invertibile. □

Osservazione 1.3.17 Il fatto che M sia finito è essenziale per la validità della proposizione precedente. Consideriamo, infatti, l'insieme infinito X e il monoide $(\mathrm{Inj}(X), \circ, id_X)$ delle applicazioni iniettive da X in se stesso, con l'operazione di composizione. In questo monoide vale la legge di cancellazione a

sinistra, ma non è un gruppo poiché esistono applicazioni iniettive non invertibili. Analoghe considerazioni valgono per il monoide $(\mathrm{Surj}(X), \circ, id_X)$ delle applicazioni suriettive, dove vale la legge di cancellazione a destra ma non si tratta di un gruppo.

Corollario 1.3.18 *Sia S un semigruppo finito. Se vale la legge di cancellazione, allora S è un gruppo.*

Dimostrazione: Dal Corollario 1.2.15 $(S, \cdot, b)$ è un monoide, e quindi la conclusione segue dalla Proposizione 1.3.16. □

Osservazione 1.3.19 Anche nel caso del Corollario 1.3.18, la finitezza di S è fondamentale. Ad esempio, $(\mathbb{N}^+, +)$ è un semigruppo con infiniti elementi in cui vale la legge di cancellazione, ma non è un monoide e tantomeno un gruppo.

Osservazione 1.3.20 Nel Corollario 1.3.18, l'ipotesi della legge di cancellazione non può essere indebolita richiedendo solo la validità della legge di cancellazione a destra (o a sinistra), anche se il semigruppo è finito. Infatti, se X è un insieme finito con almeno due elementi, l'operazione binaria (1.3) (rispettivamente, (1.4)) soddisfa la legge di cancellazione a destra (rispettivamente, a sinistra), ma $(X, \cdot)$ non è un monoide e tantomeno un gruppo.

1.3.3 Potenze, il commutatore e l'ordine di un elemento

Sia $(G, \cdot, 1)$ un gruppo, $x \in G$ e $m \in \mathbb{Z}$. Definiamo

(a) $x^0 := 1$;

(b) $x^n := \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ volte}}$, se $n > 0$ (definizione per induzione);

(c) $x^n := (x^{-1})^{-n}$, se $n < 0$.

Osservazione 1.3.21 La relazione (c) con $n = -1$, mostra che x alla potenza -1 è proprio x^{-1}, l'inverso di x. Inoltre la (c) vale anche se $n > 0$. Infatti, applicando la (3) si ottiene

$$(x^{-1})^{-n} = \left(x^{-1}\right)^{-1}\Big)^{n} = x^n,$$

dove si è usato il fatto che

$$(x^{-1})^{-1} = x.$$

La seguente proposizione descrive le proprietà delle potenze con esponente intero in un gruppo.

Proposizione 1.3.22 *Sia G un gruppo. Allora per ogni $x \in G$ e per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$ si ha:*

(1) $x^n = x^{n-1}x = xx^{n-1}$;

(2) $x^{m+n} = x^n x^m = x^m x^n$;

(3) $(x^n)^{-1} = x^{-n}$;

(4) $x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m$.

Dimostrazione: Se n è un numero naturale la formula

$$x^n = x^{n-1}x = xx^{n-1} \tag{1.24}$$

ossia la (1) per $n \geq 0$, segue dalla proprietà associativa. Se $n < 0$:

$$x^n = (x^{-1})^{-n} = (x^{-1})^{-n} \cdot 1 = (x^{-1})^{-n}x^{-1}x = (x^{-1})^{-n+1}x = x^{n-1}x$$

dove nella penultima uguaglianza si è usato la (1.24) in quanto $-n > 0$ e nella prima e ultima uguaglianza la (c). Analogamente

$$x^n = (x^{-1})^{-n} = 1 \cdot (x^{-1})^{-n} = xx^{-1}(x^{-1})^{-n} = x(x^{-1})^{-n+1} = xx^{n-1}.$$

Per dimostare la (2) è sufficiente dimostrare la prima uguaglianza $x^m x^n = x^{m+n}$, poiché $m + n = n + m$. Fissiamo m e supponiamo innanzitutto che n sia un numero naturale. Procediamo per induzione su n. Se $n = 0$, l'uguaglianza è vera. Supponiamo che sia vera per $n - 1$, allora usando la (1), si ha:

$$x^m x^n = x^m x^{n-1}x = x^{m+n-1}x = x^{m+n-1+1} = x^{m+n} \tag{1.25}$$

ossia la (2) quando $n > 0$. Se invece $n < 0$, allora dalla (c) e dalla (1.25) ($-n > 0$) si ha:

$$x^m x^n = (x^{-1})^{-m}(x^{-1})^{-n} = (x^{-1})^{-m-n} = x^{m+n}.$$

Dalla (2) e dalla (a) si ottiene:

$$x^n x^{-n} = x^{n-n} = x^0 = 1$$

dalla quale segue la (3) per l'unicità dell'inverso. Infine, per dimostare la (4), è sufficiente dimostrare la prima uguaglianza $(x^m)^n = x^{mn}$, poiché $mn = nm$.

Fissiamo m e supponiamo inizialmente che n sia un numero naturale. Procediamo per induzione su n. Se $n = 0$, l'uguaglianza è vera. Supponiamo che sia vera per $n-1$, ossia $(x^m)^{n-1} = x^{m(n-1)}$, allora, usando la (1) otteniamo:

$$(x^m)^n = (x^m)^{n-1}x^m = x^{m(n-1)}x^m = x^{mn-m+m} = x^{mn}, \tag{1.26}$$

ossia la (4) quando $n > 0$.

Se invece $n < 0$, allora:

$$(x^m)^n = ((x^m)^{-1})^{-n} = (x^{-m})^{-n} = x^{(-m)(-n)} = x^{mn},$$

dove nella prima uguaglianza si è usata la (c), nella seconda la (3) e nella terza la (1.26). □

Notazione 1.3.23 Supponiamo G abeliano e usiamo la notazione additiva $G = (G, +, 0)$. Allora le (a), (b), (c), (1), (2), (3), (4) si scrivono come segue.

- $0 \cdot x = 0$;
- $nx = \underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ volte}}$, se $n > 0$;
- $nx = (-n)(-x)$ se $n < 0$;
- $nx = (n-1)x + x = x + (n-1)x$;
- $(m+n)x = nx + mx = mx + nx$;
- $-(nx) = (-n)x$;
- $(mn)x = n(mx) = m(nx)$.

Definizione 1.3.24 *Sia G un gruppo. Diremo che $x, y \in G$* commutano *o sono* permutabili *se*

$$xy = yx.$$

Dati due elementi qualunque $x, y \in G$, chiameremo il commutatore *tra x e y il seguente elemento di G:*

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Segue immediatamente che $x, y \in G$ sono permutabili se e solo se $[x, y] = 1$. Chiaramente l'elemento neutro commuta con ogni altro elemento del gruppo.

Proposizione 1.3.25 *Siano $x, y \in G$ due elementi permutabili, cioè $[x, y] = 1$. Allora, per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$, valgono i seguenti fatti:*

(i) $[x^n, y^m] = 1$;

(ii) $(xy)^n = x^n y^n$.

Dimostrazione: La (i) per $n = -1$ e $m = 1$ e per $n = m = -1$ e cioè

$$[x^{-1}, y] = 1 \tag{1.27}$$

e

$$[x^{-1}, y^{-1}] = 1 \tag{1.28}$$

seguono facilmente da $[x, y] = 1$ e sono lasciate come semplice verifica.

Per dimostrare la (i) supponiamo prima $n \in \mathbb{N}$ e lavoriamo per induzione su n. La base dell'induzione è chiara: se $n = 0$ allora $[x^0, y^m] = [1, y^m] = 1$. Supponiamo che la (i) sia vera per tutti i naturali strettamente minori di $n \geq 1$. In particolare

$$[x^{n-1}, y^m] = 1 \tag{1.29}$$

e

$$[x, y^m] = 1 \tag{1.30}$$

Allora

$$x^n y^m = x x^{n-1} y^m = x y^m x^{n-1} = y^m x x^{n-1} = y^m x^n,$$

dove nella seconda uguaglianza si è usata la (1.29), nella terza la (1.30) e nella prima e ultima la (1) della Proposizione 1.3.22. La (i) è quindi dimostrata quando $n \in \mathbb{N}$.

Se $n < 0$ allora essendo $-n > 0$ possiamo scrivere

$$x^n y^m = (x^{-1})^{-n} y^m = y^m (x^{-1})^{-n} = y^m x^n,$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato la (1.27).

Per dimostrare la (ii), supponiamo $n \in \mathbb{N}$ e lavoriamo per induzione su n. Se $n = 0$: $(xy)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = x^0 y^0$. Supponiamo la (ii) valga per $n - 1$ e cioè $(xy)^{n-1} = x^{n-1} y^{n-1}$. Allora

$$(xy)^n = (xy)^{n-1} xy = x^{n-1} y^{n-1} xy = x^{n-1} x y^{n-1} y = x^n y^n,$$

dove nella prima e nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la la (1) della Proposizione 1.3.22 e nella terza uguaglianza abbiamo usato $[x, y^{n-1}] = 1$ la cui validità segue dalla (i). Se $n < 0$ allora

$$(xy)^n = ((xy)^{-1})^{-n} = (x^{-1} y^{-1})^{-n} = (x^{-1})^{-n} (y^{-1})^{-n} = x^n y^n,$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato la (1.28) e nella terza la (ii) per $-n > 0$. □

Osservazione 1.3.26 In un gruppo abeliano G le (i) e (ii) valgono per ogni coppia di elementi e in effetti si dimostra che se $x_1, \dots, x_k$, $x_j \in G$ e $[x_l, x_m] = 1$ per ogni $l, m = 1, \dots, k$, allora

$$(x_1 \cdots x_k)^n = x_1^n \cdots x_k^n. \tag{1.31}$$

Osservazione 1.3.27 Se in gruppo G vale che

$$(xy)^2 = x^2y^2$$

per ogni coppia di elementi $x, y \in G$. Allora il gruppo è abeliano. Infatti

$$xyxy = (xy)^2 = x^2y^2 = xxyy$$

e cancelando x a sinistra e y a destra si ottiene $xy = yx$. Essendo x e y arbitrari segue che il gruppo è abeliano. Viene spontaneo chiedersi: se in gruppo G vale

$$(xy)^3 = x^3y^3, \tag{1.32}$$

per ogni coppia di elementi $x, y \in G$. Possiamo affermare che il gruppo G è abeliano? La risposta è negativa in generale (si veda l'Esercizio 1.8).

Concludiamo questo paragrafo (e questo capitolo) definendo l'ordine di un elemento in un gruppo e le sue principali proprietà.

Sia dunque G un gruppo e sia $x \in G$.

Consideriamo l'insieme

$$A_x = \{n \in \mathbb{N}^+ \mid x^n = 1\}.$$

Se $A_x \neq \emptyset$ allora, per il principio del buon ordinamento, esiste $o(x) \in \mathbb{N}^+$ tale che $o(x)$ è il più piccolo naturale tale che

$$x^{o(x)} = 1.$$

Definizione 1.3.28 *Sia $A_x \neq \emptyset$. Chiameremo $o(x)$ l'*ordine *dell'elemento x. Se invece $A_x = \emptyset$ diremo che l'ordine di x è infinito e scriveremo $o(x) = \infty$.*

Esempio 1.3.29 Se $G = (\mathbb{Z}, +, 0)$ e $x \in \mathbb{Z}$. Allora $o(x) = \infty$ per ogni $x \neq 0$. Mentre $o(x) = 1$ se $x = 0$.

Esempio 1.3.30 Se $G = (\mathbb{Z}_m, +, [0]_m)$. Allora $o([1]_m) = m$.

Osservazione 1.3.31 In un gruppo arbitrario $o(x) = 1$ se e solo se $x = 1$.

Osservazione 1.3.32 Se G ha ordine finito, allora $o(x) < \infty$ per ogni $x \in G$. Infatti l'applicazione

$$f : \mathbb{N}^+ \to G, d \mapsto x^d$$

non può essere iniettiva ed esistono quindi $u, v \in \mathbb{N}^+$, $u > v$ tali che $x^u = x^v$. Se $u = v + n$, $n \in \mathbb{N}^+$, possiamo scrivere $x^u = x^{v+n} = x^v$ da cui $x^n = 1$ e quindi l'insieme $A_x \neq \emptyset$.

Ricordiamo che il massimo comun divisore tre due interi a e b si denota con (a, b).

Proposizione 1.3.33 *Sia G un gruppo, $x \in G$ tale che $o(x) = m \in \mathbb{N}^+$. Allora*

(i) $x^k = 1$ *se e solo se* $m \mid k$;

(ii) $x^k = x^n$ *se e solo se* $n - k \equiv 0 \mod m$;

(iii) $o(x^k) = \frac{m}{(m,k)}$;

(iv) $o(x^{-1}) = m$.

Dimostrazione: dimostrazione della (i): se $m \mid k$ allora $k = mq$, $q \in \mathbb{Z}$. Quindi

$$x^k = x^{mk} = (x^m)^k = 1^k = 1$$

Viceversa, se supponiamo $x^k = 1$. Per la divisione euclidea possiamo scrivere

$$k = mq + r,\ 0 \leq r < m.$$

Segue che

$$x^k = x^{mq+r} = x^{mq}x^r = (x^m)^q x^r 1 \cdot x^r = x^r.$$

Essendo $m = o(x)$ il più piccolo naturale positivo tale che $x^m = 1$ si ottiene $r = 0$ e quindi $k = mq$, ossia $m \mid q$.
Dimostrazione della (ii): $x^k = x^n$ se e solo se $x^{k-n} = 1$. Quindi, per la (i), $m \mid k - n$ e quindi la tesi.
Dimostrazione della (iii): siano $s := o(x^k)$ e $d = (m, k)$. Quindi $d \mid m$ e $d \mid k$, ossia $m = dm_1$ e $k = dk_1$. Inoltre $(m_1, k_1) = 1$. La dimostrazione sarà conclusa se mostriamo che $m_1 = s$. Sfruttando prima la condizione che $(x^k)^s = 1$ si ottiene

$$1 = (x^k)^s = x^{ks} = x^{dk_1 s}$$

Per la (i) segue che $m = dm_1 \mid dk_1 s$, cioè $m_1 \mid k_1 s$. Essendo $(m_1, k_1) = 1$ si ottiene

$$m_1 \mid s. \tag{1.33}$$

D'altra parte

$$(x^k)^{m_1} = x^{km_1} = x^{dk_1m_1} = x^{dm_1k_1} = x^{mk_1} = (x^m)^{k_1} = 1^{k_1} = 1.$$

Sempre dalla (i) si deduce che

$$s \mid m_1. \tag{1.34}$$

Mettendo insieme le (1.33) e la (1.34) si ottiene $s = m_1$. La (iv) segue dalla (iii) per $k = -1$. □

Esempio 1.3.34 Calcoliamo l'ordine di $[15]_{24}$ in $\mathbb{Z}_{24}$. Osserviamo che $o([1]_{24}) = 24$ e $[15]_{24} = 15[1]_{24}$. Dalla (iii) della Proposizione 1.3.25 si deduce dunque che:

$$o([15]_{24}) = \frac{24}{(15, 24)} = \frac{24}{3} = 8.$$

Esempio 1.3.35 Calcoliamo l'ordine di $[4]_9$ in $U(\mathbb{Z}_9, \cdot)$ Osserviamo

$$U(\mathbb{Z}_9) = \{[1]_9, [2]_9, [4]_9, [5]_9, [7]_9, [8]_9\}$$

$([2]_9)^2 = [4]_9$, $([2]_9)^3 = [8]_9$, $([2]_9)^4 = [7]_9$, $([2]_9)^5 = [5]_9$, $([2]_9)^6 = [1]_9$ quindi $o([2]_9) = 6$. Analogamente si verifica facilmente o con un calcolo diretto che $o([4]_9) = 3$, oppure suando la (iii) della Proposizione 1.3.25

$$o([4]_9) = o([2]_9^2) = \frac{6}{(6, 2)} = \frac{6}{2} = 3.$$

1.4 Esercizi

Esercizio 1.1 Si dica quali delle seguenti operazioni binarie sull'insieme indicato é associativa e commutativa. Si dica inoltre per quali di queste operazioni esiste un elemento neutro e quali $x \in \mathbb{R}$ sono invertibili. In particolare si identifichino i semigruppi, i monoidi e i gruppi.

1. $x \cdot y = x + y + k$, $x, y \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$ una costante fissata;
2. $x \cdot y = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x, y \in \mathbb{R}$;
3. $x \cdot y = |x + y|$, $x, y \in \mathbb{R}$;
4. $x \cdot y = x - y$, $x, y \in \mathbb{R}$;
5. $x \cdot y = \max\{x, y\}$, $x, y \in \mathbb{R}$;
6. $x \cdot y = \frac{xy}{2}$, $x, y \in \mathbb{R}^*$;

7. $x \cdot y = x + y + xy, , x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

8. $x \cdot y = \frac{x+y}{x+y+1}, x \in (0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

Esercizio 1.2 Sia G il prodotto cartesiano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}^*$. Definiamo un'operazione su G nel modo seguente:

$$(q, m) \cdot (q', m') = (q + mq', mm').$$

Si provi che $(G, \cdot)$ é un monoide e si calcolino gli elementi invertibili. Si dica se G é un gruppo e se G é abeliano.

Esercizio 1.3 Sia G il prodotto cartesiano $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$. Definiamo un'operazione su G nel modo seguente:

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', ab' + \frac{b}{a'}).$$

Si provi che G é un gruppo e si dica se G é abeliano.

Esercizio 1.4 Si dica quali delle seguenti applicazioni definisce un'operazione binaria e quale di queste definisce un' operazione di gruppo sull'insieme indicato.

1. $(a, b) \cdot (c, d) = (ad + bc, bd)$ su $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \neq 0\}$;

2. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bc + d)$ su $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$;

3. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bc + d)$ su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

4. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ su $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$;

5. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Esercizio 1.5 Sia $A = \{a, b\}$ un insieme con due elementi. Descrivere tutte le operazioni binarie su A. In particolare si dica quali di queste operazioni é commutativa e associativa. Si dica inoltre per quali di queste operazioni esiste un elemento neutro e quali elementi di A sono invertibili. Mostrare infine che ci sono 8 strutture di semigruppo di cui 6 non abeliane e 2 abeliane e che di queste solo 2 risultano un gruppo.

Esercizio 1.6 Sia $(M, \cdot, 1)$ un monoide e sia S un sottoinsieme di M tale che $(S, \cdot)$ risulta un semigruppo e $1 \notin S$. Si puó affermare che $(S, \cdot)$ non é un monoide?

Esercizio 1.7 Sia G un gruppo finito e sia S l'insieme degli elementi di G diversi dal proprio inverso $S = \{x \in G | \mid x \neq x^{-1}\}$. Dimostrare che:

1. S ha un numero pari di elementi;
2. $|G| \equiv |G \setminus S| \mod 2$;
3. se G ha un numero pari di elementi allora esiste $x \in G \setminus S$, $x \neq 1$ (quindi un gruppo di ordine pari ha almeno un elemento di ordine 2).

Esercizio 1.8

1. Sia G il gruppo costituito dalle matrici a entrate in $\mathbb{Z}_3$ della forma
$$\begin{bmatrix} [1]_3 & [a]_3 & [b]_3 \\ 0 & [1]_3 & [c]_3 \\ 0 & 0 & [1]_3 \end{bmatrix}$$
Si dimostri che G è un gruppo non abeliano dove tutti gli elementi diversi dall'elemento neutro hanno ordine 3.
2. Sia G un gruppo che non ha elementi di ordine 3. Supponiamo che
$$(xy)^3 = x^3y^3, \forall x, y \in G. \tag{1.35}$$
Dimostrare che G é abeliano.

(Suggerimento per la seconda parte: si osservi che
$$[x,y]^3 = ((xyx^{-1})y^{-1})^3 \overset{(1.35)}{=} xy^3x^{-1}y^{-3} = [x,y^3],\ \forall x, y \in G \tag{1.36}$$
e che
$$xy^3x^{-1} = (xyx^{-1})^3 = ((xy)x^{-1})^3 \overset{(1.35)}{=} (xy)^3x^{-3} \overset{(1.35)}{=} x^3y^3x^{-3},\ \forall x, y \in G$$
dalla quale segue
$$[x^2, y^3],\ \forall x, y \in G, \tag{1.37}$$
la quale ci dice che i quadrati sono permutabili con tutti i cubi. Dalla (1.8) e dalla (1.36) si ottiene dunque
$$[x^2, y],\ \forall x, y \in G, \tag{1.38}$$
la quale ci dice che i quadrati sono permutabili con ogni elemento del gruppo. Dalla (1.36) e dalla (1.37) si ottiene
$$[x,y]^3 = [x,y^3] = xy^3x^{-1}y^{-3} = xyx^{-1}y^{-1} = [x,y],\ \forall x, y \in G$$
e quindi
$$1 = [x,y]^2 = xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1} \overset{(1.37)}{=} xyxyxyx^{-3}y^{-3} = (xy)^3x^{-3}y^{-3} \overset{(1.35)}{=}$$
$$= x^3y^3x^{-3}y^{-3} \overset{(1.38)}{=} xyx^{-1}y^{-1} = [x,y]).$$

Esercizio 1.9 Sia $n \in \mathbb{N}_+$ e p un primo. Si dimostri che

$$|GL_n(\mathbb{Z}_p)| = (p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \cdots (p^n - p^{n-1}).$$

(Suggerimento: le righe di una matrice di $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ sono linearmente indipendenti. Quindi la prima riga r_1 di una tale matrice puó essere qualsiasi cosa tranne il vettore nullo, quindi ci sono $p^n - 1$ possibilitá per la prima riga. Per ognuna di queste possibilitá, la seconda riga r_2 puó essere qualsiasi cosa tranne un multiplo della prima riga, il che dá $p^n - p$ possibilitá. Per qualsiasi scelta di r_1 e r_2 delle prime due righe, la terza riga puó essere qualsiasi cosa trana combinazione lineare di r_1 e r_2. Il numero di combinazioni lineari $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$ é p^2 cioé il numero di scelte per la coppie λ_1 e λ_2. Ne consegue che per ogni r_1 e r_2 ci sono $p^n - p^2$ possibilitá per la terza riga. Procedendo allo stesso modo sulle rimanenti righe si ottiene il risultato).

Esercizio 1.10 Dieci uomini vengono condannati a morte e rinchiusi nella stessa cella la notte precedente all'esecuzione. Gli viene data peró una possibilitá per salvarsi la vita. La mattina dell'esecuzione i dieci condannati verranno messi in fila indiana e verrá messo sulla testa di ognuno di essi un cappello di colore o bianco o nero. Nessuno dei condannati potrá vedere il colore del proprio cappello (quello che ha nella propria testa) ma solo, eventualmente, quello dei condannati che si trovano di fronte a lui. Per salvarsi, ognuno di loro, a turno potrá dire la parola "nero" oppure la parola "bianco". Se la parola detta da un condannato corrisponde al colore del proprio cappello allora il condannato sará graziato e quindi liberato. In caso contrario sará ucciso. Quale é la strategia che i dieci condannati dovranno escogitare la notte prima dell'esecuzione per essere sicuri che almeno 9 di loro siano graziati? Generalizzare a n condannati e k colori.

Capitolo 2

Due gruppi importanti: D_n e S_n

Questo capitolo è dedicato a due gruppi di ordine finito che rivestono un ruolo importante nella teoria dei gruppi: il gruppo diedrale e il gruppo simmetrico.

2.1 Il gruppo diedrale

Sia $n \geq 3$ e sia P_n un poligono regolare di n lati in un piano euclideo $\mathcal{E}$. Consideriamo l'insieme D_n costituito dalle isometrie f di $\mathcal{E}$ che lasciano invariato P_n, cioè $f(P_n) = P_n$.

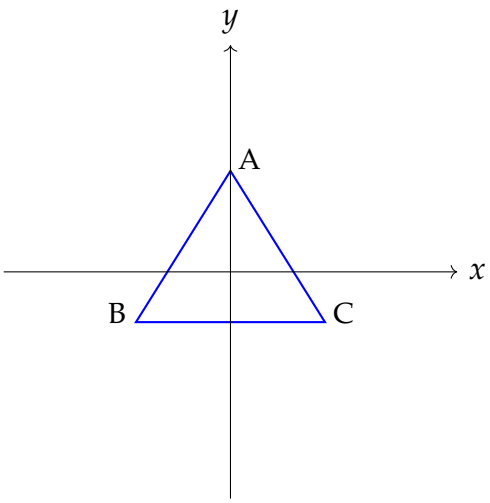
Possiamo allora definire un'operazione binaria associativa su D_n data dalla composizione ($f \circ g$, per ogni $f, g \in D_n$) che rende $D_n = (D_n, \circ, 1)$ un monoide, dove 1 denota l'applicazione identità da $\mathcal{E}$ in se stesso.

Essendo le isometrie di $\mathcal{E}$ applicazioni invertibili deduciamo anche che D_n è un gruppo, chiamato il *gruppo diedrale*. Infatti l'inverso f^{-1} di un isometria f di $\mathcal{E}$ soddisfa $f^{-1}(P_n) = P_n$.

Per capire meglio la natura del gruppo diedrale D_n, analizziamo in dettaglio i casi $n = 3$ e $n = 4$.

Il gruppo D_3

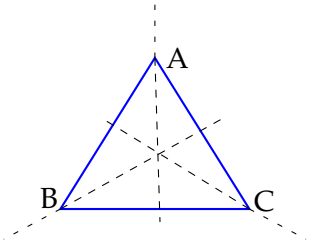
In questo caso il poligono regolare P_3 è un triangolo equilatero di vertici A, B e C che possiamo pensare centrato nell'origine degli assi di un sistema di riferimento cartesiano e tale che il vertice A appartenga all'asse positiva delle ordinate.



Le isometrie distinte del piano che fissano il triangolo sono 6:

- l'applicazione identica, denotata con 1;
- la rotazione $r_{\frac{2\pi}{3}}$ in senso antiorario intorno all'origine di angolo $\frac{2\pi}{3} = 120^0$;
- la rotazione $r_{\frac{4\pi}{3}}$ in senso antiorario intorno all'origine di angolo $\frac{4\pi}{3} = 240^0$;
- la riflessione s_A rispetto alla bisettrice dell'angolo A;
- la riflessione s_B rispetto alla bisettrice dell'angolo B;
- la riflessione s_C rispetto alla bisettrice dell'angolo C.

Le bisettrici sono rappresentati in figura.



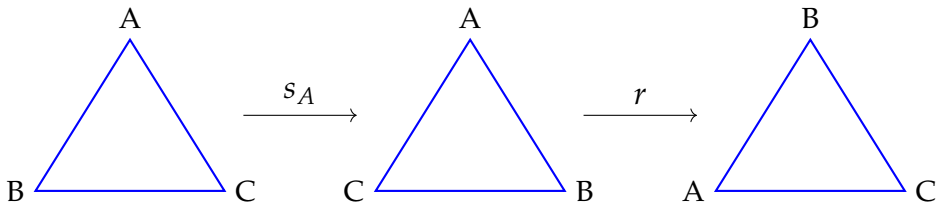
Quindi D_3 è un gruppo di ordine 6. Se indichiamo con $r = r_{\frac{2\pi}{3}}$ allora $r_{\frac{4\pi}{3}} = r^2 = r \circ r$, $r^3 = r \circ r \circ r = 1$ (osserviamo che le rotazioni in senso antiorario di angolo $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ sono date rispettivamente da r^2 e r). Possiamo quindi scrivere

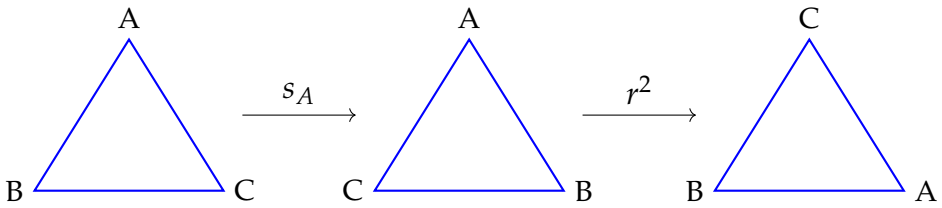
$$D_3 = \{1, r, r^2, s_A, s_B, s_C\}$$

Vediamo più a fondo la struttura di gruppo. Chiaramente

$$r^3 = s_A^2 = s_B^2 = s_C^2 = 1.$$

Quindi r ha ordine 3 e le riflessioni hanno ordine 2. Si può facilmente verificare che che $r \circ s_A = s_C$, $r^2 \circ s_A = s_B$, come mostrato dai seguenti disegni:





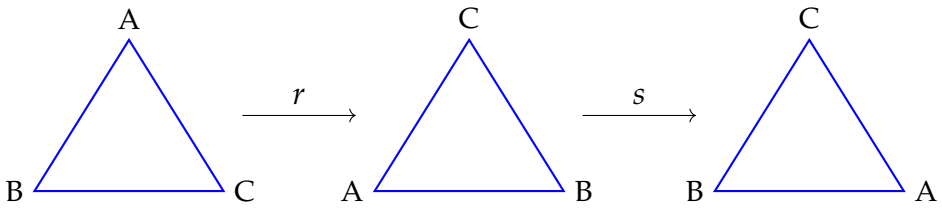
Possiamo quindi esprimere gli elementi di D_3 in funzione di r e di $s := s_A$ come

$$D_3 = \{1, r, r^2, s, r \circ s, r^2 \circ s\}$$

Osserviamo anche che la rotazione r e la riflessione s non commutano. Più precisamente

$$s \circ r = r^2 \circ s = s_B, \tag{2.1}$$

come si evince dal seguente disegno e da quello precedente:



Quindi D_3 è un gruppo non abeliano. Usando la relazione (2.1) possiamo quindi calcolare i prodotti in D_3

Per esempio

$$s \circ r^2 = s \circ r \circ r = r^2 \circ s \circ r = r^4 \circ s = r \circ s$$

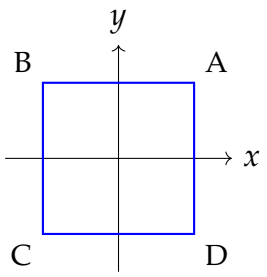
e analogamente per gli altri elementi.

Si ottiene quindi facilmente la seguente tavola moltiplicativa per il gruppo D_3.

$\cdot$	1	r	r^2	s	rs	r^2s
1	1	r	r^2	s	rs	r^2s
r	r	r^2	1	rs	r^2s	s
r^2	r^2	1	r	r^2s	s	rs
s	s	r^2s	rs	1	r^2	r
rs	rs	s	r^2s	r	1	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^2	r	1

Il gruppo D_4

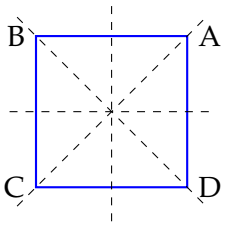
In questo caso il poligono regolare P_4 è un quadrato di vertici A, B, C e D come in figura, che possiamo pensare centrato nell'origine degli assi di un sistema di riferimento cartesiano xy e simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.



Le isometrie distinte del piano che fissano il quadrato sono 8:

- l'applicazione identica, denotata con 1;
- la rotazione $r_{\frac{\pi}{2}}$ in senso antiorario intorno all'origine di angolo $\frac{\pi}{2}$;
- la rotazione r_{π} in senso antiorario intorno all'origine di angolo π;
- la rotazione $r_{\frac{3\pi}{2}}$ in senso antiorario intorno all'origine di angolo $\frac{3\pi}{2}$;
- la riflessione s_{AC} rispetto alla diagonale AC;
- la riflessione s_{BD} rispetto alla diagonale BD;
- la riflessione s_x rispetto all'asse delle ascisse;
- la riflessione s_y rispetto all'asse delle ordinate.

Gli assi di simmetria sono rappresentati come segue.



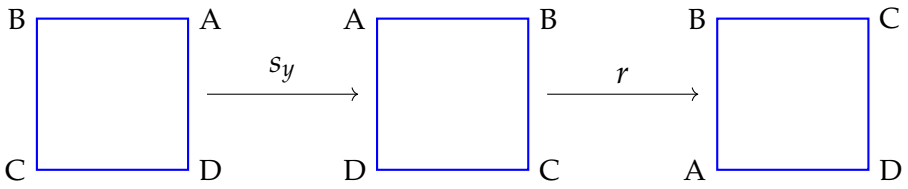
Quindi D_4 è un gruppo di ordine 8. Se indichiamo con $r = r_{\frac{\pi}{2}}$ allora $r_\pi = r^2, r^3 = r_{\frac{3\pi}{2}}$ e $r^4 = 1$. Possiamo quindi scrivere

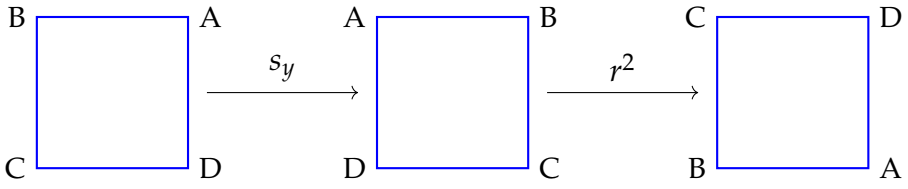
$$D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s_{AC}, s_{BD}, s_x, s_y\}$$

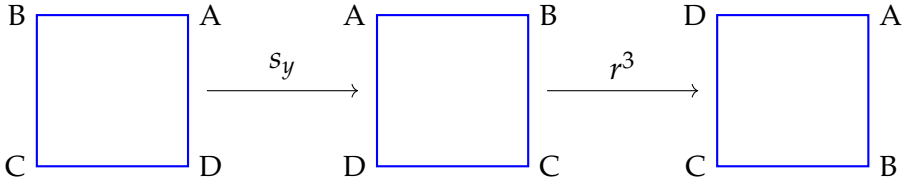
Osserviamo che

$$r^4 = s_{AC}^2 = s_{BD}^2 = s_x^2 = s_y^2 = 1$$

e che $r \circ s_y = s_{BD}$, $r^2 \circ s_y = s_x$, $r^3 \circ s_y = s_{AC}$ come mostrano i seguenti disegni:







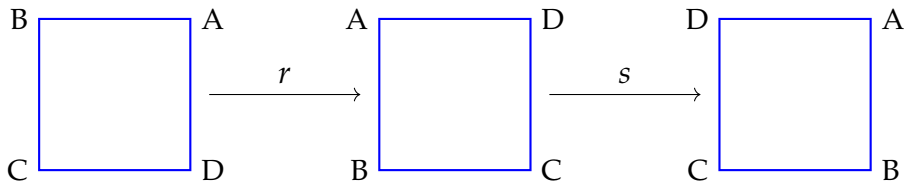
Possiamo quindi esprimene gli elementi di D_4 in funzione di r e di $s := s_y$ come

$$D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, r \circ s, r^2 \circ s, r^3 \circ s\}$$

Osserviamo anche che la rotazione r e la riflessione s non commutano. Più precisamente

$$s \circ r = r^3 \circ s = s_{AC}, \tag{2.2}$$

come si evince dal seguente disegno e dal disegno precedente:



Quindi D_4 è un gruppo non abeliano. Usando la relazione (2.2) possiamo quindi calcolare i prodotti in D_4 e ottenere la seguente tavola moltiplicativa per questo gruppo.

$\cdot$	1	r	r^2	r^3	s	rs	r^2s	r^3s
1	1	r	r^2	r^3	s	rs	r^2s	r^3s
r	r	r^2	r^3	1	rs	r^2s	r^3s	s
r^2	r^2	r^3	1	r	r^2s	r^3s	s	rs
r^3	r^3	1	r	r^2	r^3s	s	rs	r^2s
s	s	r^3s	r^2s	rs	1	r^3	r^2	r
rs	rs	s	r^3s	r^2s	r	1	r^3	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^3s	r^2	r	1	r^3
r^3s	r^3s	r^2s	rs	s	r^3	r^2	r	1

Il caso generale

Assumiamo che il poligono regolare P_n sia centrato nell'origine di un sistema di riferiemento cartesiano. Come osservato nei casi $n = 3$ e $n = 4$ gli assi di simmetria del poligono P_n sono disposti in maniera diversa, a seconda che il numero dei suoi lati sia pari (metá degli assi passano per i vertici opposti e metá passano per il centro dei lati opposti) oppure dispari (ogni asse passa per un vertice e il centro del lato opposto). Ovviamente tutti gli assi di simmetria passano per l'origine.

Quindi

$$D_n = \{1, r, \ldots, r^{n-1}, s_1, \ldots, s_n\},$$

dove r é la rotazione intorno all'origine in senso antiorario di angolo $\frac{2\pi}{n}$, $r^n = 1$ e s_h, $h = 1, \ldots, n$ é la riflessione rispetto al h-esimo asse di simmetria del

poligono, $s_h^2 = 1$. Dunque D_n è un gruppo di ordine $2n$. Il seguente lemma segue dai corsi di geometria (si veda anche l'Osservazione 2.1.5).

Lemma 2.1.1 *Sia O un punto fissato del piano. Sia $\mathcal{R}$ l'insieme delle rotazioni piane intorno a O e sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle riflessioni piane rispetto a rette passanti per O. Allora*

1. $r_1 \circ r_2 \in \mathcal{R}$, $\forall r_1, r_2 \in \mathcal{R}$;
2. $s \circ t \in \mathcal{R}$, $\forall s, t \in \mathcal{S}$;
3. $r \circ s \in \mathcal{S}, s \circ r \in \mathcal{S}$, $\forall r \in \mathcal{R}, \forall s \in \mathcal{S}$.

A parole: la composizione di due rotazioni o di due riflessioni è una rotazione, mentre la composizione di una riflessione e di una rotazione o di una rotazione e di una riflessione è una riflessione.

Teorema 2.1.2 *D_n, $n \geq 3$ è un gruppo non abeliano di ordine $2n$. Sia s una qualunque riflessione in D_n, alllora*

$$D_n = \{1, r, \ldots, r^{n-1}, s, r \circ s, \ldots, r^{n-1} \circ s\}. \tag{2.3}$$

Inoltre,

$$s \circ r = r^{n-1} \circ r. \tag{2.4}$$

Dimostrazione: Abbiamo già osservato che D_n è un gruppo con $2n$ elementi. Per il lemma precedente, $\{r, \ldots, r^{n-1}\}$ sono tutte rotazioni distinte e conseguentemente $r^k \circ s$ sono n riflessioni distinte per $k = 1, \ldots, n-1$. Segue che $\{s, r \circ s, \ldots, r^{n-1} \circ s\} = \{s_1, \ldots, s_n\}$ e quindi vale la (2.3). Osserviamo ora che $s \circ r$ è una riflessione per il Lemma 2.1.1. Quindi

$$s \circ r \circ s \circ r = (s \circ r)^2 = 1$$

che implica $s \circ r = r^{-1} \circ s^{-1} = r^{n-1} \circ s$ ossia la (2.4) la quale mostra anche che D_n non è abeliano. □

Per induzione su n dalla (2.4) si ottiene facilmente il seguente corollario

Corollario 2.1.3 *Siano r e s come nel Teorema 2.1.2. Allora*

$$s \circ r^{n-k} = r^k \circ s, \ \forall k = 1, \ldots, n-1. \tag{2.5}$$

Notazione 2.1.4 Per esprimere in maniera concisa il gruppo diedrale si usa la notazione

$$D_n = \langle r, s \mid r^n = s^2 = 1, sr = r^{n-1}s \rangle$$

che viene chiamata una *presentazione* del gruppo diedrale con *generatori* r e s (non tratteremo le presentazioni di gruppi in queste note). Questa scrittura significa semplicemente che gli elementi del gruppo D_n si ottengono moltiplicando gli elementi di r e di s e tenendo conto del fatto che r ha ordine n, s ha ordine 2 e che vale la relazione $sr = r^{n-1}s = r^{-1}s$.

Osservazione 2.1.5 Sia P_n un poligono regolare inscritto nella circonferenza unitaria e simmetrico rispetto all'asse delle ascisse. Sia r la rotazione di angolo $\frac{2\pi}{n}$ in senso antiorario rispetto all'origine; allora

$$r^k = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{bmatrix}, \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Le n riflessioni del gruppo diedrale si descrivono in modo uniforme come riflessioni rispetto alle rette che formano un angolo $\alpha = \frac{h\pi}{n}$ con l'asse positivo delle ascisse, per $h = 0, 1, \ldots, n-1$. Ponendo $s_h := s_{\frac{h\pi}{n}}$, si ha

$$s_h = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi h}{n} & \sin\frac{2\pi h}{n} \\ \sin\frac{2\pi h}{n} & -\cos\frac{2\pi h}{n} \end{bmatrix}, \qquad h = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Scegliamo in particolare

$$s := s_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

cioè la riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Con questa scelta, le relazioni fondamentali del gruppo diedrale (come, ad esempio, $r^n = I$, $s^2 = I$ e $srs = r^{-1}$) si verificano direttamente per moltiplicazione di matrici.

Più in generale, per $\alpha \in \mathbb{R}$ la rotazione r_α in senso antiorario intorno all'origine di angolo α è data da

$$r_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

mentre la riflessione s_α rispetto alla retta passante per l'origine che forma un angolo α con l'asse positivo delle ascisse è

$$s_\alpha = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$

Usando le usuali identità trigonometriche si ottengono facilmente le seguenti composizioni:

1. $r_\alpha \circ r_\beta = r_{\alpha+\beta}$ (in particolare $r_\alpha r_\beta = r_\beta r_\alpha$);
2. $s_\alpha \circ s_\beta = r_{2(\alpha-\beta)}$ (quindi $s_\beta \circ s_\alpha = r_{2(\beta-\alpha)}$);
3. $r_\alpha \circ s_\beta = s_{\beta+\frac{\alpha}{2}}$ e simmetricamente $s_\beta \circ r_\alpha = s_{\beta-\frac{\alpha}{2}}$.

2.2 Il gruppo delle permutazioni

Sia X un insieme non vuoto. Definiamo

$$S_X = \{f : X \to X \mid f \text{ è invertibile}\}$$

e consideriamo l'operazione binaria $\circ$ su S_X, data dalla composizione di funzioni. Si tratta effettivamente di un'operazione binaria, in quanto la composizione di due funzioni invertibili è ancora invertibile. Inoltre, è immediato verificare che $(S_X, \circ, \mathrm{id}_X)$ risulta essere un gruppo, chiamato *gruppo delle permutazioni* dell'insieme X. Usando la notazione del capitolo precedente posssiamo scrivere che $U((X^x, \circ)) = S_X$. Nel caso in cui X sia finito con $|X| = n \in \mathbb{N}^+$, indicheremo S_X con S_n, chiamato anche *gruppo simmetrico su n elementi*. Il suo ordine è $|S_n| = n!$. Osserviamo che se $|X| \geq 3$, allora S_X è un gruppo non abeliano. Infatti, se $x, y, z \in X$ sono tre elementi distinti, le due permutazioni $f, g \in S_X$, definite come segue:

$$f(x) = y, \quad f(y) = x, \quad f(t) = t \text{ per ogni } t \neq x, y$$

e

$$g(x) = z, \quad g(z) = x, \quad g(t) = t \text{ per ogni } t \neq x, z$$

non commutano tra loro. Infatti, abbiamo:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(z) = z, \quad \text{mentre} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = y$$

e poiché $y \neq z$, concludiamo che $f \circ g \neq g \circ f$.

Dato $f \in S_X$, definiamo il *supporto di* f come

$$\mathrm{supp}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq x\},$$

ovvero il sottoinsieme di X costituito dagli elementi che vengono "mossi" dalla permutazione f. Chiaramente $\mathrm{supp}(f) = \emptyset$ se e solo se $f = \mathrm{id}_X$. Vediamo alcune proprietà del supporto.

Proposizione 2.2.1 *Sia $f \in S_X$. Allora:*

1. *$supp(f^{-1}) = supp(f)$;*
2. *$f(x) \in supp(f)$, per ogni $x \in supp(f)$.*

Dimostrazione. La (1) si dimostra sfruttando il fatto che f^{-1} è iniettiva:

$$x \in \text{supp}(f) \iff f(x) \neq x \iff x = f^{-1}(f(x)) \neq f^{-1}(x) \iff x \in \text{supp}(f^{-1}).$$

Per dimostrare la (2), supponiamo per assurdo che esista $x \in \text{supp}(f)$ tale che $f(x) \notin \text{supp}(f)$. Allora $f(f(x)) = f(x)$ e applicando l'inversa a entrambi i membri si ottiene $f(x) = x$, in contraddizione con il fatto che $x \in \text{supp}(f)$. □

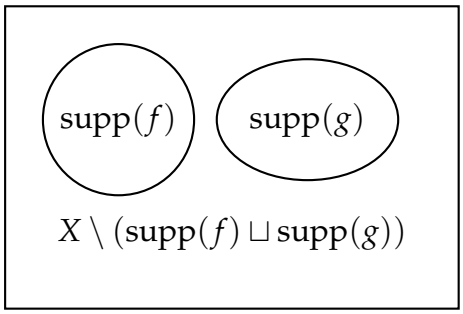
Due permutazioni $f, g \in S_X$ si dicono *disgiunte* se

$$\text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \emptyset.$$

Proposizione 2.2.2 *Se $f, g \in S_X$ sono disgiunte, allora f e g commutano tra loro.*

Dimostrazione. Scriviamo X come unione di tre insiemi disgiunti:

$$X = \text{supp}(f) \sqcup \text{supp}(g) \sqcup (X \setminus (\text{supp}(f) \sqcup \text{supp}(g))).$$



Consideriamo i seguenti casi:

- Se $x \in \text{supp}(f)$, allora:

  $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x),$$

  dove nella seconda e terza uguaglianza abbiamo usato il fatto che $x, f(x) \in \text{supp}(f)$ e l'ipotesi che f e g siano disgiunte, quindi $f(x) \notin \text{supp}(g)$ (per la (2) della Proposizione 2.2.1);

- Se $x \in \text{supp}(g)$, ragionando in modo analogo, otteniamo:

  $$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x).$$

- Se $x \in X \setminus (\text{supp}(f) \sqcup \text{supp}(g))$, allora $f(x) = g(x) = x$, e quindi:

  $$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = x.$$

Segue che $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ per ogni $x \in X$, e quindi $f \circ g = g \circ f$. □

Per rappresentare una permutazione $f \in S_n$ possiamo usare una matrice 2×1 della forma

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix},$$

dove nella prima riga compaiono i numeri da 1 a n e nella seconda riga le loro immagini tramite f (la seconda riga consiste di tutti e solo i numeri da 1 a n essendo f una bigezione).

Esempio 2.2.3 I 6 elementi di S_3 possono quindi essere descritti come segue.

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Con questa notazione possiamo anche calcolare il prodotto (composizione) di due permutazioni in modo agevole.

Esempio 2.2.4 Siano

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5.$$

Allora, siccome $f(1) = 3$ e $g(3) = 4$, possiamo scrivere 4 come primo elemento della seconda riga; siccome $f(2) = 2$ e $g(2) = 3$ possiamo scrivere 3 come secondo elemento della seconda riga e così via ottenendo la permutazione

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 I cicli e il teorema fondamentale delle permutazioni

Sia $f \in S_X$ e $a \in \text{supp}(f)$. Definiamo l'*orbita di a tramite f* come

$$\text{orb}_f(a) = \{f^j(a) \mid j \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.6}$$

Per comprendere meglio come sia fatto questo insieme, definiamo una relazione d'equivalenza su X:

$$a \sim_f b \iff \exists\, j \in \mathbb{Z} \text{ tale che } b = f^j(a).$$

Si verifica immediatamente che $\sim_f$ è effettivamente una relazione d'equivalenza:

- **Riflessività**: $a \sim_f a$ in quanto $a = f^0(a) = \mathrm{id}_X(a) = a$;
- **Simmetria**: se $a \sim_f b$, allora esiste $j \in \mathbb{Z}$ tale che $b = f^j(a)$, quindi $a = f^{-j}(b)$, cioè $b \sim_f a$;
- **Transitività**: siano $a \sim_f b$, cioè $b = f^j(a)$ per qualche $j \in \mathbb{Z}$, e $b \sim_f c$, cioè $c = f^k(b)$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Allora $c = f^k(b) = f^k(f^j(a)) = f^{j+k}(a)$, per cui $a \sim_f c$.

Si deduce allora che se $a \in \mathrm{supp}(f)$ si ha

$$\mathrm{orb}_f(a) = [a]_{\sim_f},$$

dove $[a]_{\sim_f}$ denota la classe d'equivalenza dell'elemento a rispetto alla relazione d'equivalenza $\sim_f$. Se il supporto di f è finito, l'orbita di un suo elemento può essere descritta come segue.

Proposizione 2.3.1 *Sia $f \in S_X$ tale che $|\,supp(f)| < \infty$ e sia $a \in supp(f)$. Allora esiste un naturale $d \geq 2$ tale che*

$$f^d(a) = a$$

e

$$orb_f(a) = \{a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{d-1}(a)\}. \tag{2.7}$$

Dimostrazione: Consideriamo l'applicazione

$$F : \mathbb{N}^+ \to \mathrm{orb}_f(a) = [a]_{\sim_f}, \quad i \mapsto f^i(a).$$

Quest'applicazione non può essere iniettiva, in quanto

$$\mathrm{orb}_f(a)| \leq |\,\mathrm{supp}(f)| < \infty = |\mathbb{N}^+|.$$

Esistono quindi $i, j \in \mathbb{N}^+$, con $i > j$, tali che $f^i(a) = f^j(a)$, e quindi

$$f^{i-j}(a) = a, \quad i - j > 0.$$

Segue che l'insieme

$$A := \{n \in \mathbb{N}^+ \mid f^n(a) = a\} \neq \emptyset$$

e, per il principio del buon ordinamento, esiste $d \in \mathbb{N}^+$ tale che $f^d(a) = a$ e per ogni $h \in A$ con $h \neq d$ si ha $d < h$. Segue allora che gli elementi $a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{d-1}(a)$ sono tutti distinti e che

$$\{a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{d-1}(a)\} \subseteq \{f^j(a) \mid j \in \mathbb{Z}\} = \mathrm{orb}_f(a)$$

(infatti, se $f^p(a) = f^q(a)$ con $p > q$, $0 \leq p, q \leq d-1$, allora $f^{p-q}(a) = a$, con $0 < p - q \leq d - 1$, in contrasto con la minimalità di d). Osserviamo anche che $d \geq 2$; altrimenti, se $d = 1$, allora $f(a) = a$, in contrasto con la scelta di $a \in \mathrm{supp}(f)$. Resta quindi da dimostrare che

$$\mathrm{orb}_f(a) \subseteq \{a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{d-1}(a)\}.$$

Sia dunque $f^j(a) \in \mathrm{orb}_f(a)$, $j \in \mathbb{Z}$. Dividendo j per d possiamo scrivere

$$j = dq + r, \quad 0 \leq r \leq d - 1$$

e ottenere

$$f^j(a) = f^{dq+r}(a) = f^r(f^{dq}(a)) = f^r(a) \in \{a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{d-1}(a)\},$$

il che mostra l'inclusione desiderata e conclude la dimostrazione. (Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che $f^{dq}(a) = a$ per ogni $q \in \mathbb{Z}$. Questa si può dimostrare prima per induzione su q, supponendo $q \in \mathbb{N}$ e usando $f^d(a) = a$; se invece $q < 0$ allora $f^{dq}(a) = f^{(-d)(-q)}(a) = a$ che si ottiene dal caso precedente e da $f^{-d}(a) = a$). □

Siano $a \in X$ e $f \in S_X$ come nella proposizione precedente. Usando la notazione precedente, deduciamo che se restringiamo f all'orbita $\mathrm{orb}_f(a) = \{a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{d-1}(a)\}$ di a possiamo scrivere

$$f_{|\mathrm{orb}_f(a)} = \begin{pmatrix} a & f(a) & f^2(a) & \cdots & f^{d-1}(a) \\ f(a) & f^2(a) & f^3(a) & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

Chiameremo una tale permutazione un *ciclo di lunghezza d* o *d-ciclo*. Useremo anche la notazione

$$(a\ f(a)\ f^2(a)\ \ldots f^{d-1}(a))$$

per indicare un tale ciclo. Più in generale un l-ciclo, $l \in \mathbb{N}^+$, $l \geq 2$, è una permutazione di l elementi $\{a_1, \ldots, a_l\}$ della forma

$$(a_1\ a_2 \cdots a_l) := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_l \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Un ciclo di lunghezza 2 è chiamato *trasposizione*. Si osservi che usando questa notazione possiamo cambiare l'ordine degli elementi *ciclicamente* per descrivere lo stesso elemento. Quindi

$$(a_1\ a_2 \cdots a_l) = (a_i\ a_{i+1} \cdots a_1), \forall i = 1, \ldots, l. \tag{2.9}$$

Esempio 2.3.2 Le trasposizioni e i 3-cicli di S_3 (cfr. Esempio 2.2.3) sono:

$$\tau_1 = (1\ 2),\ \tau_2 = (1\ 3),\ \tau_3 = (2\ 3),\ \sigma_1 = (1\ 2\ 3),\ \sigma_2 = (1\ 3\ 2).$$

La notazione (2.9) è molto utile per calcolare il prodotto di due cicli come mostrano i seguenti esempi.

Esempio 2.3.3 Si considerino in S_4 i due cicli $g = (1234)$ e $f = (123)$. Allora il loro prodotto (composizione) $g \circ f$ si calcola come segue. Osserviamo che $(g \circ f)(1) = 3$, $(g \circ f)(3) = 2$, $(g \circ f)(2) = 4$ e $(g \circ f)(4) = 1$. Siamo giunti al punto iniziale 1 e quindi

$$g \circ f = (1324)$$

che è ancora un ciclo.

Esempio 2.3.4 Non sempre la composizione di cicli è un ciclo. Per esempio siano $g = (12345)$ e $f = (13)$ in S_5. Allora $(g \circ f)(1) = 4$, $(g \circ f)(4) = 5$, $(g \circ f)(5) = 1$ siamo tornati all'elemento 1 e quindi $g \circ f$ ristretta all'insieme $\{1, 4, 5\}$ è il ciclo (145). Osserviamo che $(g \circ f)(2) = 3$, $(g \circ f)(3) = 2$ siamo tornati all'elemento 2 e quindi $g \circ f$ ristretta all'insieme $\{2, 3\}$ è la trasposizione (23). Quindi

$$g \circ f = (145)(23) = (23)(145),$$

in accordo con l'Esempio 2.2.4.

Descriviamo ora alcune proprietà dei cicli.

Proposizione 2.3.5 *(alcune proprietà dei cicli) Sia $\sigma = (a_1 a_2 \cdots a_l)$ un ciclo di lunghezza l, allora:*

(i) $supp(\sigma) = \{a_1, \ldots, a_l\}$;

(ii) $o(\sigma) = l$;

(iii) $\sigma^{-1} = (a_l \ldots a_2\ a_1)$;

(iv) se esiste $j \in \mathbb{Z}$ tale che $\sigma^j \neq id$, allora $supp(\sigma^j) = supp(\sigma)$.

Dimostrazione: La (i) segue direttamente dalla definizione di ciclo. Osserviamo che se $0 < h \leq l-1$, $\sigma^h(a_1) = a_{1+h} \neq a_1$, mentre $\sigma^l(a_j) = a_j$ per ogni j. Quindi la (ii) segue dalla definizione di ordine di un elemento. Sia $\tilde{\sigma} = (a_l \dots a_2\ a_1)$ allora: $\tilde{\sigma}(a_1) = a_l$ e $\tilde{\sigma}(a_j) = a_{j-1}$ per ogni $1 < j \leq l$. Segue che $\tilde{\sigma} \circ \sigma = \sigma \circ \tilde{\sigma} =$ id e la (iii) è dimostrata. Infine, per dimostrare la (iv) osserviamo che $\text{supp}(\sigma^j) \subseteq \text{supp}(\sigma)$: infatti se $x \notin \text{supp}(\sigma)$ allora $\sigma(x) = x$ e quindi $\sigma^j(x) = x$ che implica $x \notin \text{supp}(\sigma^j)$. Per dimostrare $\text{supp}(\sigma) \subseteq \text{supp}(\sigma^j)$ possiamo supporre $0 < j < l$. Infatti dividendo j per l si ottiene:

$$j = lq + r,\ q \in \mathbb{Z},\ 0 < r < l,$$

dove $r \neq 0$ altrimenti $\sigma^j =$ id e

$$\sigma^j = \sigma^{lq+r} = \sigma^{lq}\sigma^r = id \circ \sigma^r = \sigma^r.$$

Sia dunque $x \in \text{supp}(\sigma)$ allora $\sigma(x) \neq x$. Per la (i) $x = a_i$ per un certo $i = 1, \dots, l$. D'altra parte

$$\sigma^j(a_i) = \begin{cases} a_{i+j} & \text{se } i + j \leq l, \\ a_{i+j-l} & \text{se } i + j > l. \end{cases}$$

In entrambi i casi, sfruttando il fatto che $0 < j < l$, si deduce che $\sigma^j(a_i) \neq a_i$. Allora $x = a_i \in \text{supp}(\sigma^j)$ e quindi $\text{supp}(\sigma) \subseteq \text{supp}(\sigma^j)$. □

Osservazione 2.3.6 La potenza di un ciclo non è un ciclo in generale. Per esempio se $\sigma = (1234) \in S_4$ allora $\sigma^2 = (13)(24)$, che è il prodotto di due trasposizioni (si veda l'Esercizio 2.9).

Concludiamo questo paragrafo con il seguente teorema che evidenzia l'importanza dei cicli come elementi fondamentali per esprimere qualsiasi permutazione con supporto finito come una composizione di cicli.

Teorema 2.3.7 *(il teorema fondamentale delle permutazioni) Sia X un insieme non vuoto, e sia $f \in S_X$ tale che $f \neq id_X$ e $|\,supp(f)| < \infty$. Allora, esistono cicli disgiunti $\sigma_1, \dots, \sigma_t$, con $t \geq 1$, tali che*

$$f = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t. \tag{2.10}$$

Inoltre la scomposizione (2.10) *è unica a meno dell'ordine dei cicli σ_j. Infine, l'ordine di f è dato da:*

$$o(f) = (l_1, \dots, l_t), \tag{2.11}$$

dove $l_j = o(\sigma_j)$ per $j = 1, \dots, t$, e $(l_1, \dots, l_t)$ rappresenta il minimo comune multiplo degli l_j.

Dimostrazione: Dalla Proposizione 2.3.1, esistono $t \geq 1$, elementi distinti $a_1, a_2, \ldots, a_t \in \mathrm{supp}(f)$, e interi $d_1, d_2, \ldots, d_t$, con $d_j \geq 2$, tali che

$$\mathrm{supp}(f) = [a_1]_{\sim_f} \sqcup [a_2]_{\sim_f} \sqcup \cdots \sqcup [a_t]_{\sim_f},$$

dove

$$[a_j]_{\sim_f} = \mathrm{orb}_f(a_j) = \{a_j, f(a_j), \ldots, f^{d_j-1}(a_j)\}, \quad j = 1, \ldots, t.$$

Definiamo la permutazione $g \in S_X$ come la composizione dei seguenti cicli disgiunti:

$$g = \Big(a_1\, f(a_1) \ldots f^{d_1-1}(a_1)\Big) \circ \Big(a_2\, f(a_2) \ldots f^{d_2-1}(a_2)\Big) \circ \cdots \circ \Big(a_t\, f(a_t) \ldots f^{d_t-1}(a_t)\Big).$$

Poiché $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(g)$ e $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathrm{supp}(f)$, si deduce che $f = g$. Pertanto, possiamo scrivere:

$$f = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_t,$$

dove $\sigma_j = \Big(a_j, f(a_j), \ldots, f^{d_j-1}(a_j)\Big)$ per $j = 1, \ldots, t$. Poiché i cicli σ_j commutano tra loro, ne consegue che tale scomposizione è unica a meno dell'ordine. Per dimostrare la (2.11) sia $d = o(f)$. Allora

$$\mathrm{id}_X = f^d = (\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_t)^d = \sigma_1^d \circ \sigma_2^d \circ \cdots \circ \sigma_t^d, \tag{2.12}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che i cicli σ_j commutano, cioè $[\sigma_j, \sigma_k] = 1$ per ogni $j \neq k$, e l'Osservazione 1.3.26. Dimostriamo ora che questa uguaglianza implica che:

$$\sigma_j^d = \mathrm{id}_X \quad \forall j = 1, \ldots, t. \tag{2.13}$$

Supponiamo per assurdo che esista un $k = 1, \ldots, t$ tale che $\sigma_k^d \neq \mathrm{id}_X$. In particolare, dalla Proposizione 2.3.5, sappiamo che:

$$\mathrm{supp}(\sigma_k^d) = \mathrm{supp}(\sigma_k), \tag{2.14}$$

e che esiste $x \in X$ tale che:

$$\sigma_k^d(x) \neq x. \tag{2.15}$$

Mostriamo ora che:

$$\sigma_j^d(x) = x \quad \forall j \neq k. \tag{2.16}$$

Se $\sigma_j^d = \mathrm{id}_X$, la (2.16) è immediata. Altrimenti, se $\sigma_j^d \neq \mathrm{id}_X$, dalla Proposizione 2.3.5 segue che $\mathrm{supp}(\sigma_j^d) = \mathrm{supp}(\sigma_j)$. Dato che σ_j e σ_k sono disgiunti, lo stesso vale per σ_j^d e σ_k^d, e quindi $\sigma_j^d(x) = x$. Abbiamo così dimostrato la (2.16).

A questo punto, combinando la (2.12), la (2.15) e la (2.16), otteniamo:

$$x = \mathrm{id}_X(x) = f^d(x) = (\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_t)^d (x) = \sigma_k^d(x) \neq x,$$

che fornisce la contraddizione desiderata.

Poiché $o(\sigma_j) = l_j$, segue dalla Proposizione 1.3.33 che $l_j \mid d$ per ogni j; quindi d è un multiplo comune di $l_1, \ldots, l_t$. Sia ora h un altro multiplo comune. Allora $l_j \mid h$ per ogni j, perciò $\sigma_j^h = \mathrm{id}_X$ e

$$f^h = \sigma_1^h \circ \cdots \circ \sigma_t^h = \mathrm{id}_X.$$

Ancora per la Proposizione 1.3.33 si ha $d \mid h$. Ne segue che d è il minimo comune multiplo di $l_1, \ldots, l_t$, e la (2.11) é dimostrata. □

Corollario 2.3.8 *Sia $f \in S_X$ con $|supp(f)| < \infty$ sia p un numero primo. Allora $o(f) = p$ se e solo se f si può scrivere come prodotto di cicli disgiunti ognuno dei quali ha ordine p.*

2.4 Il segno di una permutazione

Sia X un insieme non vuoto, sia $f \in S_X$ tale che $f \neq \mathrm{id}_X$, $|\mathrm{supp}(f)| < \infty$, e sia

$$f = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t,$$

la scomposizione (2.10) in cicli disgiunti $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$, con $t \geq 1$, la cui esistenza è garantita dal teorema fondamentale delle permutazioni.

Definiamo il numero naturale positivo

$$N(f) = (l_1 - 1) + (l_2 - 1) + \cdots + (l_t - 1) = \sum_{j=1}^{t} l_j - t,$$

dove $l_j = o(\sigma_j)$ è la lunghezza del ciclo σ_j, con $j = 1, \ldots, t$. Definiamo il *segno di f* come

$$\mathrm{sign}(f) := (-1)^{N(f)} \in \{-1, +1\}. \tag{2.17}$$

Si deduce immediatamente dal fatto che i cicli σ_j nella scomposizione di f commutano che questa definizione è ben posta.

Definizione 2.4.1 *Diremo che f è di* classe pari *se $sign(f) = +1$ (ossia $N(f)$ è pari), mentre diremo che f è di* classe dispari *se $sign(f) = -1$ (ossia $N(f)$ è dispari).*

Lemma 2.4.2 *Ogni $f \in S_X$ con $f \neq id_X$ e $|supp(f)| < \infty$ si scrive come prodotto di $N(f)$ trasposizioni.*

Dimostrazione: Osserviamo preliminarmente che un ciclo di lunghezza l, si può scrivere come prodotto di $l-1$ trasposizioni. Infatti

$$(a_1\ a_2\ \cdots a_l) = (a_1\ a_2)(a_2\ a_3)\cdots(a_{l-1}\ a_l). \tag{2.18}$$

Quindi, per ogni $j = 1,\ldots,t$, ogni σ_j nella scomposizione $f = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t$ in cicli disgiunti si può scrivere come prodotto di $l_j - 1$ trasposizioni. Ne segue che f si può scrivere come prodotto di $N(f) = (l_1 - 1) + \cdots + (l_t - 1)$ trasposizioni. □

Osservazione 2.4.3 Il lemma non afferma né che la scomposizione è unica, né che le trasposizioni sono disgiunte. Per esempio, un l-ciclo può essere anche scritto come prodotto di $l-1$ trasposizioni

$$(a_1\ a_2\ \cdots a_l) = (a_1\ a_l)(a_1\ a_{l-1})\cdots(a_1\ a_3)(a_1\ a_2),$$

che differisce dalla scomposizione (2.18).

Teorema 2.4.4 *(moltiplicatività della funzione segno) Siano $f, g \in S_X$ tali che $f, g \neq id_X$ e $|supp(f)| < \infty, |supp(g)| < \infty$. Allora*

$$sign(f \circ g) = sign(f)\, sign(g). \tag{2.19}$$

Dimostrazione: La dimostrazione procede analizzando vari casi.

CASO 1: $\mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(g) = \emptyset$

Siano $f = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t$ e $g = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_u$ la scomposizione di f e g in cicli disgiunti. Notiamo che l'ipotesi $\mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(g) = \emptyset$ è equivalente a

$$\mathrm{supp}(\sigma_j) \cap \mathrm{supp}(\rho_k),\ \forall j = 1,\ldots,t, \forall k = 1,\ldots,u.$$

Segue che

$$f \circ g = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t \circ \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_u$$

è la scomposizione di $f \circ g$ in cicli disgiunti. Se quindi $o(\sigma_j) = l_j$, $j = 1,\ldots,t$ e $o(\rho_k) = m_k$, $k = 1,\ldots u$, allora

$$N(f \circ g) = \sum_{j=1}^{t} l_j - t + \sum_{k=1}^{u} m_k - u = N(f) + N(g).$$

Dalla quale

$$\operatorname{sign}(f \circ g) = (-1)^{N(f\circ g)} = (-1)^{N(f)+N(g)} = (-1)^{N(f)}(-1)^{N(g)} = \operatorname{sign}(f)\operatorname{sign}(g).$$

CASO 2: $|\operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g)| = 1$, f e g cicli.

Senza ledere alla generalità possiamo supporre

$$f = (a_1 \ \cdots a_m),\ g = (a_m\, b_1 \ \cdots b_l),\ a_j \neq b_k, \forall j = 1, \ldots, m, \forall k = 1, \ldots, l.$$

Quindi $N(f) = m - 1$ e $N(g) = l$. D'altra parte

$$f \circ g = (a_1 \cdots a_m) \circ (a_m\, b_1 \ \cdots b_l) = (a_1 \cdots a_m\, b_1 \cdots b_l)$$

e quindi

$$N(f \circ g) = l + m - 1 = N(f) + N(g)$$

e $\operatorname{sign}(f \circ g) = \operatorname{sign}(f)\operatorname{sign}(g)$.

CASO 3: $|\operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g)| = 2$, f ciclo e g trasposizione. Analizziamo i due sottocasi seguenti.

CASO 3A: I due elementi comuni di f e g sono consecutivi.

Possiamo supporre senza ledere alla generalità che

$$f = (a_1\, a_2 \ \cdots \ a_{m-1}\, a_m),\ g = (a_{m-1}\, a_m).$$

Segue che

$$\begin{aligned} f \circ g &= (a_1 a_2 \cdots\ a_{m-1} a_m)(a_{m-1}\, a_m) \\ &= (a_1 a_2 \cdots\ a_{m-1})(a_{m-1}\, a_m)(a_{m-1}\, a_m) \\ &= (a_1 a_2 \cdots\ a_{m-1}). \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$N(f) = m - 1,\ N(g) = 1,\ N(f \circ g) = m - 2 = N(f) + N(g) \pmod 2.$$

Quindi

$$\operatorname{sign}(f \circ g) = (-1)^{N(f\circ g)} = (-1)^{N(f)+N(g)} = (-1)^{N(f)}(-1)^{N(g)} = \operatorname{sign}(f)\operatorname{sign}(g).$$

CASO 3B: I due elementi comuni di f e g non sono consecutivi.

Possiamo supporre che

$$f = (a_1\, a_2 \ \cdots \ a_{m-1}\, a_m),\ g = (a_i\, a_m),\ 1 < i < m - 1.$$

Segue che

$$\begin{aligned} f \circ g &= (a_1\ a_2 \cdots a_{m-1}\ a_m)(a_i\ a_m) \\ &= (a_1\ a_2 \cdots\ a_i)(a_i\ a_{i+1} \cdots\ a_m)(a_i\ a_m) \\ &= (a_1\ a_2 \cdots\ a_i)(a_{i+1} \cdots\ a_m\ a_i)(a_i\ a_m) \\ &= (a_1\ a_2 \cdots\ a_i)(a_{i+1} \cdots\ a_m)(a_m\ a_i)(a_i\ a_m) \\ &= (a_1\ a_2 \cdots\ a_i)(a_{i+1} \cdots\ a_m). \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$N(f \circ g) = (i-1) + (m-i-1) = m-2 = N(f) + N(g) \pmod 2.$$

Quindi si deduce, come prima, che

$$\operatorname{sign}(f \circ g) = \operatorname{sign}(f) \operatorname{sign}(g).$$

CASO 4: f permutazione qualunque e g trasposizione. Distinguiamo i due sottocasi seguenti.

CASO 4A: $|\operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g)| = 1$. Per il teorema fondamentale delle permutazioni, possiamo scrivere $f = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t$ con σ_j cicli disgiunti. Senza ledere alla generalità possiamo assumere che $|\operatorname{sup}(\sigma_t) \cap \operatorname{supp} g| = 1$ e quindi $\operatorname{supp}(\sigma_k) \cap \operatorname{supp}(g) = \emptyset$ per ogni $k \neq j$, $k = 1, \ldots, t-1$. Consideriamo il ciclo $\sigma = \sigma_t \circ g$, allora

$$f \circ g = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t \circ g = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{t-1} \circ \sigma.$$

Per il CASO 1 essendo $\operatorname{supp}(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{t-1}) \cap \operatorname{supp}(\sigma) = \emptyset$ possiamo scrivere

$$\operatorname{sign}(f \circ g) = \operatorname{sign}(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{t-1}) \operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{t-1}) \operatorname{sign}(\sigma_t \circ g).$$

D'altra parte $\operatorname{sign}(\sigma_t \circ g) = \operatorname{sign}(\sigma_t) \operatorname{sign}(g)$, per il CASO 2. Segue che

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(f \circ g) &= \operatorname{sign}(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{t-1}) \operatorname{sign}(\sigma_t) \operatorname{sign}(g) \\ &= \operatorname{sign}(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t) \operatorname{sign}(g) = \operatorname{sign}(f) \operatorname{sign}(g), \end{aligned}$$

dove nella seconda uguaglianza stiamo abbiamo usato ancora il CASO 1.

CASO 4B: $|\operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g)| = 2$.

Se $f = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t$ con σ_j cicli disgiunti, allora, senza perdere di generalità, possiamo considerare i due sottocasi seguenti.

CASO $4B_1$: $|\operatorname{supp}(\sigma_{t-1}) \cap \operatorname{supp}(g)| = 1$ e $|\operatorname{supp}(\sigma_t) \cap \operatorname{supp}(g)| = 1$. Consideriamo il ciclo $\sigma = \sigma_t \circ g$. Allora $|\operatorname{supp}(\sigma_{t-1}) \cap \operatorname{supp}(\sigma)| = 1$ allora per il CASO 2

$$\operatorname{sign}(\sigma_{t-1} \circ \sigma) = \operatorname{sign}(\sigma_{t-1}) \operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma_{t-1}) \operatorname{sign}(\sigma_t) \operatorname{sign}(g).$$

Usando il CASO 1 e la precedente si ottiene:

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}(f \circ g) &= \operatorname{sign}(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{t-1} \circ \sigma) \\ &= \operatorname{sign}(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{t-2}) \operatorname{sign}(\sigma_{t-1} \circ \sigma) \\ &= \operatorname{sign}(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{t-2}) \operatorname{sign}(\sigma_{t-1}) \operatorname{sign}(\sigma_t) \operatorname{sign}(g) \\ &= \operatorname{sign}(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t) \operatorname{sign}(g) = \operatorname{sign}(f) \operatorname{sign}(g).\end{aligned}$$

CASO $4B_2$: $|\operatorname{supp}(\sigma_t) \cap \operatorname{supp}(g)| = 2$.

Se $f = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t$ con σ_j cicli disgiunti, allora, senza perdere di generalità, possiamo supporre $|\operatorname{supp}(\sigma_t) \cap \operatorname{supp}(g)| = 2$. Allora, usando il CASO 1 e il CASO 3 si ottiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}(f \circ g) &= \operatorname{sign}(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{t-1}) \operatorname{sign}(\sigma_t \circ g) \\ &= \operatorname{sign}(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{t-1}) \operatorname{sign}(\sigma_t) \operatorname{sign}(g) \\ &= \operatorname{sign}(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t) \operatorname{sign}(g) = \operatorname{sign}(f) \operatorname{sign}(g).\end{aligned}$$

CASO 5 (caso generale): f, g permutazioni arbitrarie.

Per il Lemma 2.4.2 possiamo scrivere $g = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{N(g)}$, con τ_j, $j = 1, \ldots, N(g)$, trasposizioni. Dimostriamo la (2.19) ossia

$$\operatorname{sign}(f \circ g) = \operatorname{sign}(f) \operatorname{sign}(g) = \operatorname{sign}(f) \operatorname{sign}(\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{N(g)}) \tag{2.20}$$

per induzione su $N(g)$. Se $N(g) = 1$ allora la (2.20) segue dal CASO 4. Supponiamo, per ipotesi induttiva, che la (2.20) valga per $N(g) - 1$ cioè che

$$\operatorname{sign}(f \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{N(g)-1}) = \operatorname{sign}(f) \operatorname{sign}(\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{N(g)-1}).$$

Allora, sempre per il CASO 4 e l'ipotesi induttiva si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}(f \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{N(g)}) &= \operatorname{sign}(f \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{N(g)-1}) \operatorname{sign}(\tau_{N(g)}) \\ &= \operatorname{sign}(f) \operatorname{sign}(\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{N(g)-1}) \operatorname{sign}(\tau_{N(g)}) \\ &= \operatorname{sign}(f) \operatorname{sign}(\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{N(g)}) = \operatorname{sign}(f) \operatorname{sign}(g).\end{aligned}$$

Corollario 2.4.5 *Sia $f \in S_n$. Allora f è di classe pari se e solo se si scrive come composizione di un numero pari di trasposizioni.*

Dimostrazione: Se f è di classe pari allora, per il Lemma 2.4.2, $f = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{N(f)}$, con $N(f)$ pari.

Viceversa se $f = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{2s}$ allora per il Teorema

$$\text{sign}(\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{2s}) = \text{sign}(\tau_1) \cdots \text{sign}(\tau_{2s}) = (-1)^{2s} = 1.$$

□

Alla luce del corollario, visto che $\text{id}_X = \tau \circ \tau$, dove τ è una trasposizione, definiamo il segno di id_x uguale a 1, ossia id_X è di classe pari.

Osservazione 2.4.6 Osserviamo che non è restrittivo supporre che nel Teorema 2.4.4 f, g siano elementi di S_n per un qualche n. Infatti essendo i supporti di f e g finiti possiamo prendere $n = |\text{supp}(f)| + |\text{supp}(g)|$ e considerare $f_{|S_n}, g_{|S_n} \in S_n$ che soddisfano $\text{sign}(f_{|S_n}) = \text{sign}(f)$ e $\text{sign}(g_{|S_n}) = \text{sign}(g)$.

2.5 Esercizi

Esercizio 2.1 Si descrive il gruppo dell'isometrie del piano che fissano un rettangolo (che non sia un quadrato).

Esercizio 2.2 Sia $G = D_n$, $n \geq 3$, il gruppo diedrale. Determinare il sottoinsieme $S \subset G$ costituito da tutti gli elementi di ordine 2.

Esercizio 2.3 Sia f la permutazione di S_{12} data da

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 10 & 12 & 9 & 4 & 3 & 11 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si scriva la decomposizione in cicli disgiunti di f, f^2, f^3 e f^5 e si calcolino gli ordini di queste permutazioni.

Esercizio 2.4 Siano f e g la permutazioni di S_{10} definite come segue:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 9 & 8 & 10 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } g = (23).$$

Si trovi la decomposizione in cicli disgiunti delle permutazioni $f, g, f \circ g$ e $g \circ f$ e si calcolino gli ordini di queste permutazioni.

Esercizio 2.5 Dimostrare che due cicli σ e τ della stessa lunghezza sono coniugati, cioé esiste una permutazione f tale che $f^{-1} \circ \sigma \circ f = \tau$.

Esercizio 2.6 Sia σ un ciclo di lunghezza l e $k \in N_+$ tale che $\sigma^k \neq id$. Mostrare che esistono t cicli disgiunti $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$ tutti della stessa lunghezza m, tali che $l = mt$ e

$$\sigma^k = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t. \tag{2.21}$$

Mostrare, inoltre che $m = \frac{l}{(k,l)}$ e $t = (k,l)$. (Suggerimento: usare il fatto che $\text{supp}(\sigma^k) = \text{supp}(\sigma)$ e il teorema fondamentale delle permutazioni Per l'ultima parte si calcolino gli ordini di σ^k e $\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t$).

Esercizio 2.7 Mostrare che se $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$ sono cicli disgiunti tutti della stessa lunghezza m allora esiste un ciclo σ di lunghezza $l = mt$ e $k \in N_+$ tali che $\sigma^k = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t$. (Suggerimento: se $\sigma_j = (a_{j1} \cdots a_{jm})$, $j = 1, \ldots, t$, si definisca

$$\sigma = (a_{11}a_{21} \ldots a_{t1}a_{12}a_{22} \cdots a_{t2} \cdots a_{1m}a_{2m} \cdots a_{tm})$$

e si verifichi che $\sigma^t = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t$.).

Esercizio 2.8 Dimostrare che S_n é generato da $\{A_n, \tau\}$ dove τ é una trasposizione arbitraria.

Esercizio 2.9 Sia σ un ciclo di lunghezza l. Dimostrare che

1. σ^2 é un ciclo se e solo se l é dispari;
2. se l é dispari allora σ é il quadrato di un ciclo di lunghezza l;
3. se l é pari, $l = 2m$, allora σ^2 é il prodotto di due cicli di lunghezza m;
4. se $l = tm$, allora σ^t é il prodotto di t cicli di lunghezza m;
5. se l é un numero primo allora ogni potenza di σ é un ciclo.

(Suggerimento: usare l'Esercizio 2.6).

Esercizio 2.10 Il cubo di Rubik puó essere visto come un gruppo algebrico $\mathcal{R}$, dove le operazioni sono rappresentate dalle mosse che si possono eseguire sulle facce del cubo (si veda anche wikipedia) Piú precisamente, ogni elemento di $\mathcal{R}$ può essere scritto come prodotto di un numero finito delle seguenti mosse di base o delle loro inverse.

- U: Rotazione di 90 gradi della faccia superiore (Upper) in senso orario;
- D: Rotazione di 90 gradi della faccia inferiore (Down) in senso orario;
- L: Rotazione di 90 gradi della faccia sinistra (Left) in senso orario;

- R: Rotazione di 90 gradi della faccia destra (Right) in senso orario;
- F: Rotazione di 90 gradi della faccia frontale (Front) in senso orario;
- B: Rotazione di 90 gradi della faccia posteriore (Back) in senso orario.

1. Calcolare l'ordine di ogni mossa di base;
2. Calcolare l'ordine degli elementi $R^{-1}D$ e $R^{-1}D^{-1}$;
3. Dimostrare che la permutazione dei 20 cubetti del cubo di Rubik (8 angoli e 12 spigoli) indotta da una qualunque mossa é di classe pari.

Capitolo 3

Sottogruppi e classi laterali

3.1 Sottogruppi

Definizione 3.1.1 *Sia G un gruppo e sia $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$. Diremo che H è un* sottogruppo *di G se valgono le seguenti proprietà:*

- *(S1): Stabilità, ovvero per ogni $x, y \in H$, anche il prodotto $x \cdot y \in H$.*
- *(S2): Esistenza dell'inverso, ovvero per ogni $x \in H$, anche l'inverso $x^{-1} \in H$.*

Osservazione 3.1.2 La condizione (S1), chiamata anche di *chiusura*, è equivalente ad affermare che che l'operazione binaria $\cdot$ su G ristretta ad $H \subseteq G$ definisce un'operazione binaria su H.

Notazione 3.1.3 Useremo la notazione $H \leq G$ per indicare che H è un sottogruppo di G.

Proposizione 3.1.4 *Se H è un sottogruppo di G, allora* 1*, l'elemento neutro di G appartiene a H.*

Dimostrazione: Consideriamo un qualsiasi elemento $x \in H$ che esiste in quanto $H \neq \emptyset$. Dall'esistenza dell'inverso (S2) abbiamo che $x^{-1} \in H$ e dalla stabilità (S1), abbiamo che $x \cdot x^{-1} = 1 \in H$. Quindi, l'elemento neutro 1 appartiene a H. □

Osservazione 3.1.5 Ogni gruppo G possiede sempre almeno due sottogruppi: il *sottogruppo banale* $\{e\}$, che contiene solo l'elemento neutro, e il gruppo G stesso. Un sottogruppo H di G è *proprio* se $H \neq G$, ossia se H è strettamente contenuto in G.

Osservazione 3.1.6 Se H è un sottogruppo di G, allora H è a sua volta un gruppo rispetto alla stessa operazione di G. In particolare se G è abeliano allora ogni suo sottogruppo è abeliano.

Esempi 3.1.7 Si verifica facilmente che i seguenti sottoinsiemi già incontrati nel Capitolo 1 sono sottogruppi.

$$(\mathbb{Z},+) < (\mathbb{Q},+) < (\mathbb{R},+) < (\mathbb{C},+)$$

$$(\mathbb{Q}^*,\cdot) < (\mathbb{R}^*,\cdot) < (\mathbb{C}^*,\cdot)$$

$$(S^1,\cdot) < (\mathbb{C}^*,\cdot).$$

Esempio 3.1.8 Sia a un elemento di un insieme X e sia

$$H_a = \{f \in S_X \mid f(a) = a\}.$$

l'insieme delle permutazioni di un insieme X che fissano a. Allora H_a è un sottogruppo di S_X. Infatti

- $H_a \neq \emptyset$: La permutazione identità $\mathrm{id}_X \in S_X$ fissa ogni elemento di X, quindi in particolare $\mathrm{id}_X(a) = a$, cioè $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Stab}(a)$.
- (S1): Se $f, g \in H_a$, allora $f(a) = a$ e $g(a) = a$. Dunque, per la composizione $f \circ g$, si ha $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(a) = a$, quindi $f \circ g \in H_a$.
- (S2): Sia $f \in H_a$, allora $f(a) = a$. Sia $f^{-1} \in S_X$. Allora $f^{-1}(a) = a$ e quindi $f^{-1} \in H_a$.

Essendo soddisfatte le proprietà (S1) e (S2) allora $H_a \subset S_X$.

Esempio 3.1.9 (il gruppo alterno A_n) Sia X un insieme con n elementi e sia S_n il gruppo simmetrico delle permutazioni di X. Definiamo il *gruppo alterno* A_n come l'insieme delle permutazioni di classe pari di S_n:

$$A_n = \{f \in S_n \mid \mathrm{sign}(f) = 1\}.$$

Allora A_n è un sottogruppo di S_n e $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

- $A_n \neq \emptyset$ in quanto $\mathrm{sign}(\mathrm{id}_x) = 1$.

- (S1): Siano $f, g \in A_n$, allora $\text{sign}(f) = \text{sign}(g) = 1$. Quindi per il Teorema 2.4.4,

$$\text{sign}(f \circ g) = \text{sign}(f)\,\text{sign}(g) = 1 \cdot 1 = 1.$$

  Quindi, $f \circ g \in A_n$.

- (S2): Sia $f \in A_n$, allora

$$1 = \text{sign}(\text{id}_x) = \text{sign}(f \circ f^{-1}) = \text{sign}(f)\,\text{sign}(f^{-1}) = \text{sign}(f^{-1})$$

  e quindi $f^{-1} \in A_n$.

Dunque, $A_n < S_n$. Per dimostrare A_n ha $\frac{n!}{2}$ elementi consideriamo l'applicazione

$$A_n \to S_n \setminus A_n : f \mapsto f \circ \tau,$$

dove τ è una trasposizione fissata. Quest'applicazione è ben definita in quanto $\text{sign}(f \circ \tau) = \text{sign}(f)\,\text{sign}(\tau) = 1 \cdot -1 = -1$. Inoltre è invertibile con inversa $S_n \setminus A_n \to A_n,\ g \mapsto g \circ \tau$. Dal momento che S_n è l'unione digiunta di A_n e $S_n \setminus A_n$ segue che

$$|A_n| = |S_n \setminus A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}.$$

Le due proposizioni seguenti sono a volte utili per dimostrare che in sottoinsieme di un gruppo è un sottogruppo.

Proposizione 3.1.10 *Sia G un gruppo e $H \subseteq G$, con $H \neq \emptyset$. Se l'ordine di H, è finito e H è stabile (cioè soddisfa la condizione (S1) nella definizione di sottogruppo), allora H è un sottogruppo di G.*

Dimostrazione: Resta da verificare la condizione (S2), cioè che l'inverso di ogni elemento di H appartiene ancora a H. Sia $a \in H$. Se $a = 1$, allora il suo inverso è $a^{-1} = 1 \in H$. Supponiamo ora che $a \neq 1$ e definiamo l'applicazione

$$f : \mathbb{N}^+ \to H, \quad n \mapsto a^n.$$

Questa applicazione è ben definita perché vale la condizione (S1). Poiché $|H| < \infty$, f non è iniettiva. Esisteranno quindi $m, n \in \mathbb{N}^+$, con $m > n$, tali che $f(m) = a^m = a^n = f(n)$. Poiché $m = n + k$ per qualche $k > 0$, otteniamo $a^{n+k} = a^n a^k = a^n$, e quindi $a^k = 1$. Segue che:

$$a^k = a^{k-1}a = 1.$$

Ora, $k - 1 \geq 1$, altrimenti, se $k = 1$, si avrebbe $a = 1$, che abbiamo escluso. Pertanto, $a^{k-1} = a^{-1}$ è l'inverso di a e, grazie alla condizione (S1), $a^{-1} = a^{k-1} \in H$. Essendo a arbitrario H soddisfa la (S2) e quindi $H \leq G$. □

Osservazione 3.1.11 In virtù di questa proposizione, nell'Esempio 3.1.9, per dimostrare che A_n è un sottogruppo, si sarebbe potuta evitare la verifica della condizione (S2).

Proposizione 3.1.12 (criterio per i sottogruppi) *Sia G un gruppo e $H \subset G$, con $H \neq \emptyset$. Allora $H \leq G$ se e solo se*

$$x^{-1}y \in H, \ \forall x, y \in H. \tag{3.1}$$

Dimostrazione: Supponiamo che $H \leq G$ e siano $x, y \in H$. Allora $x^{-1} \in H$ per la (S2) e, per la (S1), $x^{-1}y \in H$. Quindi, la (3.1) è verificata. Viceversa, supponiamo che valga la (3.1) e siano $x, y \in H$. Allora, per la (3.1), si ha che $x^{-1}x = 1 \in H$. Sempre per la (3.1), si deduce che $x^{-1} \cdot 1 = x^{-1} \in H$, ossia vale la (S2). Inoltre, applicando ancora la (3.1), si ha $(x^{-1})^{-1}y = xy \in H$, quindi vale anche la (S1). □

3.2 Intersezione di sottogruppi

La seguente proposizione mostra che l'intersezione di un numero arbitrario di sottogruppi e ancora un sottogruppo

Proposizione 3.2.1 *Sia I un insieme di cardinalità qualunque e sia $\{H_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottogruppi di G, $H_i \leq G$, per ogni $i \in I$. Allora la loro intersezione $H = \cap_{i \in I} H_i$ è un sottogruppo di G.*

Dimostrazione: L'insieme $H \subseteq G$ è non vuoto. Infatti, $1 \in H_i$ per ogni $i \in I$, quindi $1 \in H = \cap_{i \in I} H_i$. Siano $x, y \in H$. Allora $x, y \in H_i$ per ogni $i \in I$. Poiché $H_i \leq G$, segue dalla parte "se" della Proposizione 3.1.12 che $x^{-1}y \in H_i$, per ogni $i \in I$, e quindi $x^{-1}y \in H = \cap_{i \in I} H_i$. Per la parte "solo se" della Proposizione 3.1.12, si deduce che $H \leq G$. □

Sia G un gruppo e sia $X \subseteq G$ un sottoinsieme di G. Consideriamo il sottoinsieme $\langle X \rangle \subseteq G$ ottenuto come l'intersezione di tutti i sottogruppi di G che contengono X:

$$\langle X \rangle = \bigcap_{X \subset H \leq G} H$$

Osserviamo che $\langle X \rangle \neq \emptyset$ in quanto stiamo prendendo l'intersezione di una famiglia non vuota di sottoinsiemi di X dato che G è un sottoinsieme di G che contiene X. Inoltre, $\langle X \rangle \leq G$ per la Proposizione 3.2.1.

Definizione 3.2.2 *Chiameremo $\langle X \rangle$* il sottogruppo di G generato da X.

Notiamo anche che $\langle\ X\ \rangle$ è il più piccolo sottogruppo di G che contiene X, nel senso che se $H \leq G$ è tale che $X \subseteq H$ allora $\langle\ X\ \rangle \subseteq H$.

Osservazione 3.2.3 Se $X = \emptyset$ allora $\langle\ X\ \rangle = \{1\}$, dove 1 è l'elemento neutro di G. Inoltre se $X \leq G$ allora $\langle\ X\ \rangle = X$.

La seguente proposizione fornisce una descrizione utile di $\langle\ X\ \rangle$ come il sottoinsieme di G costituito dagli elementi che possono essere espressi come prodotto di elementi di X e dei loro inversi.

Proposizione 3.2.4 *Sia G un gruppo e $X \subseteq G$, $X \neq \emptyset$. Allora*

$$\langle X\rangle = \{\ x_1^{\epsilon_1} \cdots x_k^{\epsilon_k} \mid k \geq 1,\ x_j \in X,\ \epsilon_j \in \{1, -1\}\ \}.$$

Dimostrazione: Sia

$$A := \{\ x_1^{\epsilon_1} \cdots x_k^{\epsilon_k} \mid k \geq 1,\ x_j \in X,\ \epsilon_j \in \{1, -1\}\ \}.$$

Vogliamo mostrare che $A = \langle X\rangle$. Per prima cosa, se $H \leq G$ è un sottogruppo con $X \subseteq H$, allora, poiché H è chiuso per inversi e prodotti e contiene X, ogni elemento di A appartiene a H. Dunque

$$A \subseteq \bigcap_{X \subseteq H \leq G} H\ =\ \langle X\rangle.$$

Per l'inclusione opposta, verifichiamo che A è un sottogruppo di G che contiene X. Anzitutto $A \neq \emptyset$: fissato $x \in X$ (possibile perché $X \neq \emptyset$), si ha $xx^{-1} = 1 \in A$ (basta prendere $k = 2$, $x_1 = x_2 = x$, $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = -1$). Inoltre $X \subseteq A$ perché, per $x \in X$, scegliendo $k = 1$ e $\epsilon_1 = 1$ si ha $x \in A$.

Siano ora $x, y \in A$ con

$$x = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_m^{\epsilon_m}, \qquad y = y_1^{\eta_1} \cdots y_n^{\eta_n},$$

dove $x_i, y_j \in X$ e $\epsilon_i, \eta_j \in \{1, -1\}$. Allora

$$x^{-1}y = x_m^{-\epsilon_m} \cdots x_1^{-\epsilon_1}\, y_1^{\eta_1} \cdots y_n^{\eta_n}.$$

Scriviamo il prodotto precedente come

$$x^{-1}y = z_1^{\chi_1} \cdots z_{m+n}^{\chi_{m+n}},$$

dove, per $1 \leq i \leq m$, poniamo $z_i := x_{m-i+1}$ e $\chi_i := -\epsilon_{m-i+1}$, mentre, per $1 \leq i \leq n$, poniamo $z_{m+i} := y_i$ e $\chi_{m+i} := \eta_i$. Allora $z_\ell \in X$ e $\chi_\ell \in \{1, -1\}$ per ogni ℓ, dunque $x^{-1}y \in A$.

Segue quindi, dalla Proposizione 3.1.12, che A è un sottogruppo di G che contiene X, per cui $\langle X \rangle \subseteq A$. In conclusione $A = \langle X \rangle$. □

Un caso particolarmente interessante si verifica quando $X = \{x\}$, $x \in G$. In questo caso, il sottogruppo generato da X si può scrivere come

$$\langle\ x\ \rangle = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.2}$$

Definizione 3.2.5 *Il gruppo* $\langle\ x\ \rangle$ *è chiamato* gruppo ciclico generato dall'elemento x.

Osservazione 3.2.6 Si noti che un gruppo ciclico è sempre abeliano per la proprietà delle potenze

$$x^n x^m = x^{n+m} = x^m x^n,\ \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Nel caso di un gruppo ciclico $\langle\ x\ \rangle$, come mostra le proposizione seguente, l'ordine dell'elemento $x \in G$ è proprio uguale all'ordine (ossia la cardinalità) del gruppo ciclico generato da x.

Proposizione 3.2.7 *Sia G un gruppo e $x \in G$. Allora*

$$|\langle\ x\ \rangle| = o(x). \tag{3.3}$$

Dimostrazione: Supponiamo che $o(x) = m$, con $m \in \mathbb{N}^+$. Mostriamo che

$$\langle\ x\ \rangle = \{1, x, \ldots, x^{m-1}\},$$

da cui si ottiene che $m = o(x) = |\langle x \rangle|$. L'inclusione

$$\{1, x, \ldots, x^{m-1}\} \subseteq \langle\ x\ \rangle$$

segue dalla (3.2). Per dimostrare l'inclusione opposta, sia $x^n \in \langle x \rangle$ con $n \in \mathbb{Z}$. Allora, dividendo n per m, possiamo scrivere

$$n = mq + r, \quad 0 \leq r < m.$$

Dunque

$$x^n = x^{mq+r} = x^{mq} x^r = (x^m)^q x^r = 1 \cdot x^r = x^r.$$

Ma $x^r \in \{1, x, \ldots, x^{m-1}\}$, poiché $0 \leq r < m$, e quindi

$$\langle\ x\ \rangle \subseteq \{1, x, \ldots, x^{m-1}\}.$$

Viceversa, supponiamo che $|\langle\ x\ \rangle| = m$, con $m \in \mathbb{N}^+$. Mostriamo che $o(x) = m$. Consideriamo l'applicazione

$$f : \mathbb{Z} \to \langle\ x\ \rangle, \quad n \mapsto x^n.$$

Poiché $|\mathbb{Z}| = \infty$ e $|\langle\ x\ \rangle| < \infty$, segue che f non è iniettiva. Esisteranno quindi $n, k \in \mathbb{Z}$ con $n > k$ tali che $x^n = x^k$, ovvero $x^{n-k} = 1$. Di conseguenza, l'insieme $\{n \in \mathbb{N}^+ \mid x^n = 1\}$ non è vuoto, e quindi $o(x) = d$ per qualche $d \in \mathbb{N}^+$. Dalla prima parte, $d = o(x) = |\langle\ x\ \rangle| = m$. Abbiamo dunque dimostrato che $o(x) = m$ se e solo se $|\langle\ x\ \rangle| = m$, e quindi la (3.3) è dimostrata. □

Proposizione 3.2.8 *(classificazione dei sottogruppi di $\mathbb{Z}$) Sia H un sottogruppo di $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, 0)$. Allora esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che*

$$H = h\mathbb{Z} = \{hz \mid z \in \mathbb{Z}\}.$$

In particolare, tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}$ sono ciclici.

Dimostrazione: Se $H = \{0\}$, allora $H = 0\mathbb{Z}$, che è il sottogruppo banale. Supponiamo quindi che $H \neq \{0\}$. Allora esiste $a \in H$, con $a \neq 0$. Possiamo assumere che $a > 0$, poiché se $a < 0$, il suo opposto $-a \in H$ e $-a > 0$. Per il principio del buon ordinamento, esiste $h \in H$, $h > 0$, che è il più piccolo elemento positivo in H. Vogliamo dimostrare che $H = h\mathbb{Z}$. L'inclusione $h\mathbb{Z} \subseteq H$ è immediata: $h \in H$ implica che ogni suo multiplo $hz \in H$, per ogni $z \in \mathbb{Z}$.

Dimostriamo ora l'inclusione opposta, $H \subseteq h\mathbb{Z}$. Sia $z \in H$, dividendo z per h possiamo scrivere

$$z = qh + r, \quad 0 \leq r < h.$$

Poiché $z \in H$ e $qh \in h\mathbb{Z} \subseteq H$, otteniamo che $z - qh = r \in H$. Dato che h è il più piccolo elemento positivo in H, segue che $r = 0$, quindi $z = qh \in h\mathbb{Z}$. Essendo z arbitrario, concludiamo che $H \subseteq h\mathbb{Z}$. Infine, l'ultima affermazione segue dal fatto che $h \in \mathbb{Z}$, in notazione additiva, è il generatore del sottogruppo ciclico $\langle\ h\ \rangle = h\mathbb{Z}$. □

Esempio 3.2.9 Sia G l'insieme di tutte le isometrie di $\mathbb{R}^2$ che fissano l'origine, cioè le matrici ortogonali di ordine 2. Per ogni $n \geq 3$, il gruppo diedrale D_n, descritto nel Capitolo 2, è un sottogruppo di G generato da una rotazione r intorno all'origine e dalla simmetria rispetto all'asse delle ordinate.

3.3 Unione di sottogruppi

In generale l'unione di sottogruppi non è un sottogruppo come mostra la seguente

Proposizione 3.3.1 *Siano H e K due sottogruppi di un gruppo G. Allora $H \cup K$ è un sottogruppo di G se e solo se $H \leq K$ oppure $K \leq H$.*

Dimostrazione: Se $H \leq K$ (risp. $K \leq H$), allora $H \cup K = K \leq G$ (risp. $H \cup K = H \leq G$). Supponiamo ora che $H \cup K \leq G$ e dimostriamo che $H \leq K$ oppure $K \leq H$. Se, per esempio $H \not\subseteq K$ (il caso $K \not\subseteq H$ si tratta in modo analogo scambiando il ruolo di H e K), allora esiste $h \in H$ tale che $h \notin K$. Sia $k \in K$. Allora $hk \in H \cup K$, poiché per ipotesi $H \cup K$ è un sottogruppo di G e soddisfa quindi la proprietà di chiusura (S1). Tuttavia, $hk \notin K$, altrimenti $hk = k'$, per qualche $k' \in K$, e quindi $h = k'k^{-1} \in K$, in contrasto con la scelta di h. Di conseguenza, $hk \in H$. Ma allora, $h^{-1}hk = k \in H$. Essendo k arbitrario, segue che $K \subseteq H$. □

Corollario 3.3.2 *Un gruppo G non può essere scritto come unione di due suoi sottogruppi propri.*

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che $G = H \cup K$ con $H < G$ e $K < G$. Allora per la Proposizione 3.3.1, essendo G un sottogruppo di se stesso si ha $H \leq K$ oppure $K \leq H$. Quindi $H \cup K = K = G$ oppure $H \cup K = H = G$ in conrtrasto con il fatto che H e K sono strettamente contenuti in G. □

Osservazione 3.3.3 Esistono gruppi che possono essere scritti come unione di tre loro sottogruppi propri. Per esempio, sia $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.+)$ con l'operazione

$$([a]_2, [b]_2) + ([c]_2, [c]_2) = ([a+b]_2, [c+d]_2).$$

Si verifica immediatamente che G è un gruppo abeliano il cui elemento neutro è $([0]_2, [0]_2)$ e l'opposto di un elemento $([a]_2, [b]_2)$ è dato da $([-a]_2, [-b]_2)$. Consideriamo i tre sottogruppi ciclici e propri H, K e L di G generati rispettivamente da $([1]_2, [0]_2)$, $([0]_2, [1]_2$ e $([1]_2, [1]_2)$:

$$H = \langle\ ([1]_2, [0]_2)\ \rangle = \{([0]_2, [0]_2, ([1]_2, [0]_2)\}$$

$$K = \langle\ ([0]_2, [1]_2)\ \rangle = \{([0]_2, [0]_2, ([0]_2, [1]_2)\}$$

$$L = \langle\ ([1]_2, [1]_2)\ \rangle = \{([0]_2, [0]_2, ([1]_2, [1]_2)\}.$$

Allora $G = H \cup K \cup L$.

La Proposizione 3.3.1 può essere generalizzata come segue.

Definizione 3.3.4 *Sia G un gruppo. Una famiglia non vuota $\{H_i\}_{i\in I}$ di sottogruppi di G si dice* catena *se per ogni $i, j \in I$ vale $H_i \subseteq H_j$ oppure $H_j \subseteq H_i$.*

Proposizione 3.3.5 (unione di una catena) *Sia G un gruppo e $\{H_i\}_{i\in I}$ una catena non vuota di sottogruppi di G. Allora*

$$H = \bigcup_{i\in I} H_i$$

è un sottogruppo di G.

Dimostrazione: Per ogni i si ha $1 \in H_i$, dunque $1 \in H$. Siano $x, y \in H$: esistono i, j tali che $x \in H_i$ e $y \in H_j$. Poiché la famiglia è una catena, senza perdere generalità $H_i \subseteq H_j$; quindi $x, y \in H_j$ e, per il criterio di sottogruppo, $x^{-1}y \in H_j \subseteq H$. Ne segue che H è un sottogruppo di G. □

Un corollario immediato è il seguente.

Corollario 3.3.6 *Sia $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una famiglia di sottogruppi di G tali che $H_i \subseteq H_j$ se $i \leq j$. Allora $H = \cup_{i\in\mathbb{N}} H_i \leq G$.*

Osservazione 3.3.7 La condizione per cui, per tutti $i, j \in I$, si ha $H_i \subseteq H_j$ oppure $H_j \subseteq H_i$, può essere indebolita. Tutto procede comunque se, per tutti $i, j \in I$, esiste un $k \in I$ tale che $H_i \subseteq H_k$ e $H_j \subseteq H_k$.

I risultati precedenti ci dicono quindi, che in generale l'unione di sottogruppi non è un sottogruppo. La proposizione che segue descrive il gruppo generato dall'unione.

Proposizione 3.3.8 *Sia G un gruppo. Sia I un insieme di cardinalità non nulla e sia $\{H_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottogruppi di G. Allora il sottogruppo di G generato dall'unione è*

$$\Big\langle \bigcup_{i\in I} H_i \Big\rangle = \Big\{ x_1 x_2 \dots x_k \,\Big|\, k \geq 0,\ x_j \in H_{i_j},\ i_j \in I \Big\}.$$

Dimostrazione: Poniamo

$$H := \Big\langle \bigcup_{i\in I} H_i \Big\rangle, \qquad A := \Big\{ x_1 x_2 \dots x_k \,\Big|\, k \geq 0,\ x_j \in H_{i_j},\ i_j \in I \Big\}.$$

Dimostrazione prima l' inclusione $A \subseteq H$. Sia $x = x_1 \cdots x_k \in A$. Per definizione di A, ogni x_j appartiene a qualche H_{i_j}, dunque $x_j \in \bigcup_{i\in I} H_i \subseteq H$ (perché H è un sottogruppo che contiene l'unione). Essendo H un sottogruppo, è

chiuso per prodotto: quindi $x = x_1 \cdots x_k \in H$. Nel caso $k = 0$ il prodotto è per convenzione $1 \in H$, poiché ogni sottogruppo contiene l'identità. Pertanto $A \subseteq H$.

Dimostriamo ora l'inclusione $H \subseteq A$. Mostriamo che $A \leq G$ e che contiene $\bigcup_{i \in I} H_i$. Infatti $1 \in A$ (caso $k = 0$); se $a = x_1 \cdots x_k \in A$ e $b = y_1 \cdots y_\ell \in A$, allora $ab = x_1 \cdots x_k y_1 \cdots y_\ell \in A$, quindi A è chiuso per prodotto; inoltre $a^{-1} = x_k^{-1} \cdots x_1^{-1} \in A$ perché ogni H_{i_j} è un sottogruppo, dunque chiuso per inversi. Quindi $A \leq G$. Per ogni $i \in I$ e $h \in H_i$ si ha $h \in A$ prendendo $k = 1$, perciò $\bigcup_{i \in I} H_i \subseteq A$. Per minimalità di $H = \langle \bigcup_{i \in I} H_i \rangle$ tra i sottogruppi che contengono l'unione, segue $H \subseteq A$. Dalle due inclusioni otteniamo $H = A$. □

3.4 Prodotto di sottogruppi

Il *prodotto* di due sottogruppi H e K di un gruppo G è l'insieme dei prodotti di tutti gli elementi di H con tutti gli elementi di K. Formalmente, il prodotto di H e K è definito come:

$$H \cdot K = \{h \cdot k \mid h \in H, k \in K\}.$$

In altre parole, si prende ciascun elemento h di H e ciascun elemento k di K e si considera il prodotto $h \cdot k$, dove l'operazione $\cdot$ è quella del gruppo G.

Esempio 3.4.1 Consideriamo il gruppo simmetrico $G = S_3$, ovvero:

$$S_3 = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}.$$

Siano $H = \langle\ (12)\ \rangle = \{1, (12)\}$ e $K = \langle\ (12)\ \rangle = \{1, (13)\}$ due sottogruppi di S_3. Il prodotto $H \cdot K$ è dato da

$$H \cdot K = \{1, (13), (12), (123)\}.$$

Analogamente, possiamo calcolare il prodotto $K \cdot H$ ottenendo

$$K \cdot H = \{1, (12), (13), (132)\}.$$

Come si può vedere, $H \cdot K \neq K \cdot H$, quindi il prodotto di sottogruppi non è commutativo in generale.

Da ora in poi scriveremo $HK = H \cdot K$. Diremo che H e K *commutano* o sono *permutabili* se $HK = KH$.

Osservazione 3.4.2 Chiaramente G è abeliano, allora due suoi sottogruppi H e K commutano. Nella notazione additiva scriveremo $H + K$ invece che HK.

Nella seguente proposizione mostriamo che se H e K commutano allora HK è un sottogruppo di G. Indichiamo con $\langle H, K \rangle = \langle H \cup K \rangle$ il sottogruppo di G generato dall'unione di H e K.

Proposizione 3.4.3 *Sia G un gruppo e H, K suoi sottogruppi. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) $HK = \langle H, K \rangle$;

(ii) $HK = KH$;

(iii) $HK \leq G$.

Dimostrazione: (i) $\Rightarrow$ (ii): Supponiamo che $HK = \langle H, K \rangle$, cioè che HK sia il sottogruppo generato da H e K. Vogliamo dimostrare che $HK = KH$. Ricordiamo che $\langle H, K \rangle$ è il più piccolo sottogruppo di G che contiene sia H che K. In particolare, ciò significa che tutti i prodotti di elementi di K e H appartengono a $\langle H, K \rangle$, e quindi

$$KH \subseteq \langle H, K \rangle = HK.$$

Per dimostrare l'inclusione $HK \subseteq KH$ (e quindi l'uguaglianza $HK = KH$), sia $hk \in HK$, $h \in H$ e $k \in K$. Allora, visto che $HK = \langle H, K \rangle$ è un gruppo l'inverso di hk appartiene a HK e quindi

$$(hk)^{-1} = h'k',\ h' \in H,\ k' \in K.$$

Dal momento che gli inversi di di elementi di H e K stanno in H e K, si ha:

$$hk = (h'k')^{-1} = k'^{-1}h'^{-1} \in KH,$$

la quale mostra $HK \subseteq KH$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Supponiamo ora che $HK = KH$. Per dimostrare che HK è un sottogruppo. osserviamo che è diverso dal vuoto. Infatti H che K sono sottogruppi di G, contengono entrambi l'elemento neutro 1 di G e quindi $1 = 1 \cdot 1 \in HK$, e HK contiene l'elemento neutro. Prendiamo due elementi arbitrari $h_1k_1, h_2k_2 \in HK$, dove $h_1, h_2 \in H$ e $k_1, k_2 \in K$. Allora, visto che $HK = KH$, possiamo scrivere $k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_3k_3$, con $h_3 \in H$ e $k_3 \in K$ e quindi:

$$(h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_1h_3k_3 \in HK.$$

Dunque $HK \leq G$ per la Proposizione 3.1.12.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Infine, supponiamo che $HK \leq G$. Per definizione, il sottogruppo generato da H e K, $\langle H, K\rangle$, è il più piccolo sottogruppo di G che contiene sia H che K. Poiché $H \subseteq HK$ e $K \subseteq HK$, e HK è un sottogruppo di G, si ha che:

$$\langle H, K\rangle \subseteq HK.$$

D'altra parte, siccome $\langle H, K\rangle$ (come abbiamo già osservato) contiene tutti i prodotti di elementi di H e K, abbiamo anche $HK \subseteq \langle H, K\rangle$. Quindi, $HK = \langle H, K\rangle$. □

Esempio 3.4.4 Sia $G = (\mathbb{Z}, +, 0)$ il gruppo degli interi e siano H e K due suoi sottogruppi non banali, cioè diversi dal sottogruppo nullo $\{0\}$. Per la Proposizione 3.2.8, esisteranno $m, n \in \mathbb{N}^+$ tali che $H = m\mathbb{Z}$ e $K = m\mathbb{Z}$. Vogliamo descrivere i sottogruppi $H \cap K$ e $H + K = \langle\, H, K\,\rangle$ in funzione di m e n. Notiamo che $H + K = \langle\, H, K\,\rangle \leq \mathbb{Z}$, per la Proposizione 3.4.3, essendo $\mathbb{Z}$ abeliano.

Osserviamo preliminarmente che, per ogni $u, v \in \mathbb{N}$ si ha:

$$u\mathbb{Z} \subseteq v\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; v \mid u \tag{3.4}$$

Iniziamo con $H + K = \langle\, H, K\,\rangle$. Per la Proposizione 3.2.8 esiste $d \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$H + K = m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}.$$

Mostriamo che d è il massimo comun divisore tra m e n, $d = (m, n)$. Infatti visto che $m\mathbb{Z} \subseteq d\mathbb{Z}$ e $n\mathbb{Z} \subseteq d\mathbb{Z}$ segue dalla (3.4) che $d \mid n$ e $d \mid n$. Inoltre se $a \in \mathbb{N}$ è tale che $a \mid m$ e $a \mid n$ allora per la (3.4), si ha $m\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$ e $n\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$ e quindi

$$H + K = m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}.$$

Da questa (ancora per la (3.4)) segue che $a \mid d$, la quale mostra che d è in effetti il massimo comun divisore tra m e n. Abbiamo quindi dimostrato che

$$m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = (m, n)\mathbb{Z}.$$

Consideriamo ora $H \cap K$. Per la Proposizione 3.2.8 esiste $s \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$H \cap K = m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = s\mathbb{Z}.$$

Mostriamo che s è il minimo comune multiplo tra m e n, $s = [m, n]$. Infatti visto che $s\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ e $s\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$ segue dalla (3.4) che $m \mid s$ e $n \mid s$. Inoltre se $a \in \mathbb{N}$ è tale che $m \mid a$ e $n \mid a$ allora per la (3.4), si ha $a\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ e $a\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$ e quindi

$$a\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = s\mathbb{Z}.$$

Da questa (ancora per la (3.4)) segue che $s \mid a$, la quale mostra che d è il minimo comune multiplo tra m e n, ossia Abbiamo quindi dimostrato che

$$m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = [m, n]\mathbb{Z}.$$

Concludiamo questo paragrafo calcolando la cardinalità dell'insieme di HK, per due sottogruppi finiti H e K di un gruppo G.

Proposizione 3.4.5 *Siano H e K due sottogruppi finiti di un gruppo G. Allora*

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}. \tag{3.5}$$

Dimostrazione: Sia $f : H \times K \to HK$, definita da $f(h, k) = hk$, e consideriamo la seguente relazione di equivalenza $\sim_f$ su $H \times K$: dati $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$,

$$(h_1, k_1) \sim_f (h_2, k_2) \iff h_1k_1 = f(h_1, k_1) = f(h_2, k_2) = h_2k_2. \tag{3.6}$$

Sia $\frac{H\times K}{\sim_f}$ lo spazio quoziente corrispondente e denotiamo con $[(h, k)]_{\sim_f}$ la classe di equivalenza dell'elemento $(h, k) \in H \times K$. Poiché f è suriettiva, l'applicazione

$$\tilde{f} : \frac{H \times K}{\sim_f} \to HK, \quad [(h, k)]_{\sim_f} \mapsto \tilde{f}([(h, k)]_{\sim_f}) = f(h, k) = hk,$$

è una bigezione. Pertanto,

$$\left|\frac{H \times K}{\sim_f}\right| = |HK|. \tag{3.7}$$

Fissiamo ora $(h_0, k_0) \in [(h, k)]_{\sim_f}$, e definiamo l'applicazione

$$g : [(h, k)]_{\sim_f} \to H \cap K, \quad (h_1, k_1) \in [(h, k)]_{\sim_f} \mapsto h_1^{-1}h_0.$$

Quest' applicazione è ben definita in virtù di (3.6):

$$(h_0, k_0) \sim_f (h_1, k_1) \Rightarrow h_1^{-1}h_0 = k_1k_0^{-1} \in H \cap K.$$

Inoltre g è invertibile, con inversa

$$g^{-1} : H \cap K \to [(h, k)]_{\sim_f}, \quad s \mapsto (h_0s^{-1}, sk_0).$$

Segue allora che che

$$|[(h, k)]_{\sim_f}| = |H \cap K|, \quad \forall (h, k) \in H \times K, \tag{3.8}$$

ossia le classi di equivalenza hanno tutte la stessa cardinalità, che è uguale a $|H \cap K|$. Combinando la (3.7) con la (3.8), otteniamo

$$|H||K| = |H \times K| = \left|\frac{H \times K}{\sim_f}\right| \cdot |[(h, k)]_{\sim_f}| = |HK| \cdot |H \cap K|,$$

da cui otteniamo la (3.5). □

3.5 Classi laterali e il teorema di Lagrange

Dato un gruppo G la scelta di un suo sottogruppo H e di un elemento $x \in G$ definisce due sottoinsiemi naturali di G, la *classe laterale sinistra di x rispetto ad H:*

$$xH = \{xh \mid h \in H\} \tag{3.9}$$

la *classe laterale destra di x rispetto ad H:*

$$Hx = \{hx \mid h \in H\} \tag{3.10}$$

Osservazione 3.5.1 Se G è abeliano e $H \leq G$, adotteremo la notazione additiva: la classe laterale sinistra di x rispetto a H si indica con

$$x + H = \{\, x + h \mid h \in H \,\},$$

e la classe laterale destra con

$$H + x = \{\, h + x \mid h \in H \,\}.$$

Poiché in G l'operazione è commutativa, le due classi coincidono, cioè $x + H = H + x$. In tal caso parleremo semplicemente di *classe laterale* di x modulo H.

Esempio 3.5.2 Consideriamo il gruppo summetrico S_3

$$S_3 = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

e il suo sottogruppo $H = \langle (12) \rangle = \{1, (12)\}$, di ordine 2.

Le classi laterali sinistre sono della forma xH, dove $x \in S_3$:

$$\begin{aligned}
1H &= \{1 \cdot 1, 1 \cdot (1\,2)\} = \{1, (1\,2)\},\\
(12)H &= \{(1\,2) \cdot 1, (1\,2) \cdot (1\,2)\} = \{(1\,2), 1\},\\
(13)H &= \{(1\,3) \cdot 1, (1\,3) \cdot (1\,2)\} = \{(1\,3), (1\,2\,3)\},\\
(23)H &= \{(2\,3) \cdot 1, (2\,3) \cdot (1\,2)\} = \{(2\,3), (1\,3\,2)\},\\
(123)H &= \{(1\,2\,3) \cdot 1, (1\,2\,3) \cdot (1\,2)\} = \{(1\,2\,3), (1\,3)\},\\
(132)H &= \{(1\,3\,2) \cdot 1, (1\,3\,2) \cdot (1\,2)\} = \{(1\,3\,2), (2\,3)\}.
\end{aligned}$$

Quindi le classi laterali sinistre distinte di H in S_3 sono:

$$\{1, (1\,2)\}, \quad \{(1\,3), (1\,3\,2)\}, \quad \{(2\,3), (1\,2\,3)\}\}.$$

Allo stesso modo, calcoliamo le classi laterali destre Hx per ogni elemento di S_3:

$$\begin{aligned}
H1 &= \{1 \cdot 1, (1\,2) \cdot 1\} = \{1, (1\,2)\},\\
H(12) &= \{1 \cdot (1\,2), (1\,2) \cdot (1\,2)\} = \{(1\,2), 1\},\\
H(13) &= \{1 \cdot (1\,3), (1\,2) \cdot (1\,3)\} = \{(1\,3), (1\,3\,2)\},\\
H(23) &= \{1 \cdot (2\,3), (1\,2) \cdot (2\,3)\} = \{(2\,3), (1\,2\,3)\},\\
H(123) &= \{1 \cdot (1\,2\,3), (1\,2) \cdot (1\,2\,3)\} = \{(1\,2\,3), (2\,3)\},\\
H(132) &= \{1 \cdot (1\,3\,2), (1\,2) \cdot (1\,3\,2)\} = \{(1\,3\,2), (1\,3)\}.
\end{aligned}$$

Quindi le classi laterali destre distinte di H in S_3 sono:

$$\{1, (1\,2)\}, \quad \{(1\,3), (1\,2\,3)\}, \quad \{(2\,3), (1\,3\,2)\}\}.$$

Riassumiamo in una tabella le classi laterali sinistre e destre distinte per il sottogruppo $H = \{1, (12)\}$ in S_3:

x	Classe laterale sinistra xH	Classe laterale destra Hx
1	$\{1, (1\,2)\}$	$\{1, (1\,2)\}$
$(1\,3)$	$\{(1\,3), (1\,3\,2)\}$	$\{(1\,3), (1\,2\,3)\}$
$(2\,3)$	$\{(2\,3), (1\,2\,3)\}$	$\{(2\,3), (1\,3\,2)\}$

Questo esempio mostra che le classi laterali sinistre e destre non coincidono necessariamente.

Dato un gruppo G e un suo sottogruppo H, possiamo definire due relazioni d'equivalenza $\sim$ e $\sim'$ su G come segue:

$$x \sim y \iff x^{-1}y \in H,\ x, y \in G \tag{3.11}$$

$$x \sim' y \iff xy^{-1} \in H,\ x, y \in G. \tag{3.12}$$

La verifica che si tratti effettivamente di due relazioni d'equivalenza si ottiene immediatamente. Vediamola per la $\sim$ (per la $\sim'$ è analoga).

- Riflessività: $x \sim x \iff x^{-1}x = 1 \in H$, in quanto H è un sottogruppo di G e l'elemento neutro 1 di G appartiene a H.
- Simmetria: $x \sim y \iff x^{-1}y \in H$; passando agli inversi e usando la $(S2)$ si ottiene $y^{-1}x \in H$ e quindi $y \sim x$.
- Transitività:
  Supponiamo che $x \sim y$ e $y \sim z$, cioè $x^{-1}y \in H$ e $y^{-1}z \in H$. Osserviamo che:
  $$x^{-1}z = (x^{-1}y)(y^{-1}z).$$

Poiché $x^{-1}y \in H$ e $y^{-1}z \in H$ per la Proposizione 3.1.12 e H è chiuso rispetto al prodotto (per la $(S1)$) si ottiene

$$x^{-1}z = (x^{-1}y)(y^{-1}z) \in H.$$

Pertanto, $x \sim z$, e la transitività è dimostrata.

Il legame tra queste relazioni d'equivalenza e le classi laterali è espresso dalla seguente:

Proposizione 3.5.3 *Sia G un gruppo e $H \leq G$ e siano $\sim$ (risp. $\sim'$) la relazione d'equivalenza* (3.11) *(risp.* (3.12)*). Allora la classe d'equivalenza $[x]_\sim$ (risp. $[x]_{\sim'}$) di un elemento $x \in G$ coincide con la classe laterale sinistra (risp. destra) di x rispetto ad H, ossia*

$$[x]_\sim = xH \ (risp. \ [x]_{\sim'} = Hx) \tag{3.13}$$

Dimostrazione: Dimostriamo la $[x]_\sim = xH$ con la doppia inclusione.
$[x]_\sim \subseteq xH$: per definizione, $[x]_\sim$ è la classe d'equivalenza di x rispetto alla relazione $\sim$. La relazione $y \sim x$ implica che $yx^{-1} \in H$, quindi $y = xh$ per qualche $h \in H$. Se $y \in [x]_\sim$, allora $y = xh$ per qualche $h \in H$, e quindi $y \in xH$. Dunque, $[x]_\sim \subseteq xH$.
$xH \subseteq [x]_\sim$: consideriamo un elemento arbitrario $y \in xH$. Allora $y = xh$ per qualche $h \in H$. Poiché $y = xh$, abbiamo che $yx^{-1} = h$, e siccome $h \in H$, segue che $y \sim x$. Pertanto, $y \in [x]_\sim$. Quindi, $xH \subseteq [x]_\sim$.

Poiché entrambe le inclusioni sono verificate, abbiamo che $[x]_\sim = xH$. La dimostrazione per $[x]_{\sim'} = Hx$ è analoga e segue lo stesso schema, considerando le classi laterali destre. □

La proposizione seguente mostra che le classi laterali sinistre e destre hanno tutte la stessa cardinalità e lo stesso vale per cardinalità degli spazi quoziente $G/\sim$ e $G/\sim'$ rispetto alle relazioni d'equivalenza (3.11) e (3.12).

Proposizione 3.5.4 *Sia G un gruppo e $H \leq G$. Allora*

$$|xH| = |Hy|, \ \forall x, y \in G \tag{3.14}$$

$$|G/\sim| = |G/\sim'|. \tag{3.15}$$

Dimostrazione: Fissato $x \in G$, consideriamo la classe laterale sinistra $xH = \{xh \mid h \in H\}$. Definiamo $f : H \to xH$ ponendo $f(h) = xh$. L'applicazione f è iniettiva: infatti, se $f(h_1) = f(h_2)$, allora $xh_1 = xh_2$ e, per cancellazione a sinistra, $h_1 = h_2$. È inoltre suriettiva per costruzione, poiché per ogni $z \in xH$

esiste $h \in H$ tale che $z = xh = f(h)$. Dunque f è una biezione e ne segue $|xH| = |H|$. In modo del tutto analogo, fissato $y \in G$, la mappa $g : H \to Hy$, $g(h) = hy$, è biettiva; quindi $|Hy| = |H|$. Concludiamo così che, per ogni $x, y \in G$, vale

$$|xH| = |H| = |Hy|,$$

ossia (3.14). Passiamo ora alla (3.15). Definiamo $F : G/\sim \to G/\sim'$ ponendo

$$F(xH) = Hx^{-1}.$$

Mostriamo anzitutto che F è ben definita. Se $xH = yH$, allora $x = yh$ per qualche $h \in H$; dunque $x^{-1} = h^{-1}y^{-1}$ e

$$Hx^{-1} = H(h^{-1}y^{-1}) = Hy^{-1},$$

poiché $h^{-1} \in H$ e moltiplicare a sinistra per un elemento di H non cambia la classe laterale destra. Quindi F non dipende dal rappresentante scelto. Infine osserviamo che F è invertibile. L'applicazione

$$F^{-1} : G/\sim' \to G/\sim, \qquad F^{-1}(Hx) = x^{-1}H,$$

è ben definita e soddisfa $F(F^{-1}(Hx)) = H(x^{-1})^{-1} = Hx$ e $F^{-1}(F(xH)) = (x^{-1})^{-1}H = xH$. Pertanto F è una biezione e ne segue

$$|G/\sim| = |G/\sim'|,$$

cioè la (3.15). □

Notazione 3.5.5 La cardinalità di $|G/\sim| = |G/\sim'|$ prende il nome di *indice di H in G* e si indica con $[G : H]$.

Il seguente teorema, insieme ai suoi corollari, rappresenta senza dubbio i risultati più importanti nella teoria dei gruppi finiti.

Teorema 3.5.6 (il teorema di Lagrange) *Sia G un gruppo finito e $H \leq G$ un suo sottogruppo. Allora*

$$|G| = [G : H] \cdot |H|. \tag{3.16}$$

Dimostrazione: Dalla Proposizione 3.5.4, sappiamo che ogni classe laterale (sinistra o destra) ha la stessa cardinalità, pari a $|H|$. Le classi laterali forniscono una partizione dell'insieme G. Poiché G è l'unione disgiunta di $[G : H]$ classi laterali, ciascuna delle quali ha cardinalità $|H|$, otteniamo

$$|G| = [G : H] \cdot |H|.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Una conseguenza immediata del teorema di Lagrange è il seguente:

Corollario 3.5.7 *Sia G un gruppo finito e $H \leq G$. Allora l'ordine di H divide quello di G*

Osservazione 3.5.8 Il teorema di Lagrange afferma che, in un gruppo finito G, ogni sottogruppo ha un ordine che divide l'ordine di G. Tuttavia, il fatto che un intero positivo divida l'ordine di G non implica necessariamente l'esistenza di un sottogruppo di tale ordine. Ad esempio, consideriamo il gruppo alterno A_4, la cui cardinalità è 12. Nonostante 6 divida 12, non esiste alcun sottogruppo di A_4 con ordine 6, come dimostreremo in seguito (cfr. Corollario 6.2.4).

Corollario 3.5.9 *Sia G un gruppo finito. Allora, per ogni $x \in G$, si ha:*

(i) $o(x) \mid |G|$, *dove $o(x)$ è l'ordine dell'elemento x;*

(ii) $x^{|G|} = 1$.

Dimostrazione: (i): Dal teorema di Lagrange, sappiamo che l'ordine di ogni sottogruppo di G divide l'ordine di G. In particolare (cf. (3.3))

$$|\langle x \rangle| = o(x) \mid |G|.$$

(ii): Poiché, dal punto (i), $o(x) \mid |G|$ l'uguaglianza $x^{|G|} = 1$ segue dalla (i) della Proposizione 1.3.33. □

Corollario 3.5.10 *Sia G un gruppo finito di ordine p, con p primo. Allora:*

(i) gli unici sottogruppi di G sono quelli banali;

(ii) G è ciclico ed è generato da qualunque $x \in G$, $x \neq 1$, ossia $G = \langle x \rangle$.

Dimostrazione: (i): Sia $H \leq G$ un sottogruppo di G. Dal Corollario 3.5.7, sappiamo che l'ordine di H deve dividere l'ordine di G. Poiché $|G| = p$ e p è primo, i divisori di p sono solo 1 e p. Quindi, l'ordine di H può essere soltanto 1 o p. Se $|H| = 1$, allora $H = \{1\}$, il sottogruppo banale. Se $|H| = p$, allora $H = G$, poiché l'ordine di H è uguale all'ordine di G. Di conseguenza, gli unici sottogruppi di G sono $\{1\}$ e G stesso.

(ii): Ora dimostriamo che G è ciclico. Poiché $|G| = p$, per (i) del Corollario 3.5.9, ogni elemento $x \in G$ ha un ordine che divide p. Essendo p primo, l'ordine di x può essere soltanto 1 o p. Se $o(x) = 1$, allora $x = 1$. Se $o(x) = p$, allora x genera tutto il gruppo G, ossia $G = \langle x \rangle$. Quindi, qualunque elemento $x \in G$ con $x \neq 1$ genera G, il che dimostra che G è ciclico. □

Osservazione 3.5.11 Dimostreremo in seguito (cfr. Corollario 7.1.4) che, se un gruppo G non possiede sottogruppi propri diversi da $\{1\}$, allora G ha ordine primo p (e quindi è ciclico per il Corollario 3.5.9).

Usando i Corollari 3.5.7 e 3.5.9 si riottengono alcuni risultati classici sulla teoria elementare dei numeri, reassunti nei due corollari seguenti. Ricordiamo che la funzione di Eulero $\varphi : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ conta il numero di interi positivi minori di n che sono coprimi con n, ovvero il numero di interi a tali che $(a, n) = 1$. Formalmente, è definita come:

$$\varphi(n) = |\{a \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq a < n,\ (a, n) = 1\}|$$

Corollario 3.5.12 (il teorema di Eulero-Fermat) *Siano $a, n \in \mathbb{N}^+$ con $(a, n) = 1$. Allora*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Dimostrazione: Indichiamo con $U(\mathbb{Z}_n)$ il gruppo (moltiplicativo) delle classi invertibili modulo n:

$$U(\mathbb{Z}_n) = \{[x]_n \in \mathbb{Z}_n \mid (x, n) = 1\}.$$

Per definizione di funzione di Eulero e per la (1.22) si ottiene $|U(\mathbb{Z}_n)| = \varphi(n)$. Poiché $(a, n) = 1$, la classe $[a]_n$ appartiene a $U(\mathbb{Z}_n)$. Per la (ii) del Corollario 3.5.9 applicato a $G = U(\mathbb{Z}_n)$ e $x = [a]_n$, otteniamo

$$[a]_n^{\varphi(n)} = [1]_n.$$

Questa uguaglianza tra classi equivale alla congruenza $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, come voluto. □

Corollario 3.5.13 *Siano a e n interi positivi. Allora*

$$n \mid \varphi(a^n - 1).$$

Dimostrazione: Consideriamo il gruppo $U(\mathbb{Z}_m)$, $m = a^n - 1$. Per la (1.22) il suo ordine è dato da $|U(\mathbb{Z}_m)| = \varphi(a^n - 1)$ e $[a]_m$ appartiene a questo gruppo, in quanto a è coprimo con $a^n - 1$. Osserviamo anche che $o([a]_m) = n$. Infatti $[a]_m^n = [1]_m$ ($m = a^n - 1 \mid a^n - 1$) e $a^d - 1$ non è divisibile per $a^n - 1$ per $d < n$ (e dunque n è il più piccolo intero positivo tale che $[a]_m^n = [1]_m$). Per la (i) del Corollario 3.5.9 si ottiene dunque

$$o([a]_m) = n \mid |U(\mathbb{Z}_m, \cdot)| = \varphi(a^n - 1).$$

□

3.5.1 Ordine del prodotto di due elementi[1]

Proposizione 3.5.14 *Sia G un gruppo e siano $x, y \in G$, con $o(x) = m$ e $o(y) = n$, tali che $(m, n) = 1$. Se x e y commutano, allora $o(xy) = mn = [m, n]$, dove $[m, n]$ denota il minimo comune multiplo tra m e n.*

Dimostrazione: Poiché x e y commutano, possiamo scrivere:

$$(xy)^{mn} = x^{mn}y^{mn} = (x^m)^n(y^n)^m = 1.$$

Da ciò segue che l'ordine di xy, denotato con $k := o(xy)$, divide il minimo comune multiplo di m e n, ovvero $k \mid [m, n] = mn$.

Osserviamo ora che $(m, n) = 1$ implica che i sottogruppi generati da x e y, ovvero $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$, hanno intersezione banale:

$$\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{1\}.$$

Infatti, se $z \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$, allora $o(z)$ divide sia m che n. Poiché $(m, n) = 1$, ciò implica che $o(z) = 1$, quindi $z = 1$. A questo punto, considerando che $(xy)^k = x^k y^k = 1$, otteniamo che:

$$x^k = y^{-k} \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{1\},$$

da cui segue che $x^k = y^k = 1$. Questo implica che $m \mid k$ e $n \mid k$ e quindi $[m, n] \mid k$ e pertanto $k = [m, n]$. □

Corollario 3.5.15 *Sia G un gruppo e siano $x, y \in G$ con ordini finiti $o(x) = m$ e $o(y) = n$. Se x e y commutano, allora esiste $z \in G$ tale che $o(z) = [m, n]$.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{P} = \{\, p \text{ primo} \mid p \mid m \text{ oppure } p \mid n \,\}$ l'unione dei primi che compaiono nelle fattorizzazioni di m o di n. Per ogni $p \in \mathcal{P}$ indichiamo con $\alpha_p \geq 0$ l'esponente di p in m (ponendo $\alpha_p = 0$ se $p \nmid m$) e con $\beta_p \geq 0$ l'esponente di p in n (ponendo $\beta_p = 0$ se $p \nmid n$). Allora

$$m = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p}, \qquad n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\beta_p}.$$

Definiamo

$$m' = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ \alpha_p \geq \beta_p}} p^{\alpha_p}, \qquad n' = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ \beta_p > \alpha_p}} p^{\beta_p}.$$

[1] Questa sezione non rientra nel programma d'esame.

È chiaro che $m' \mid m$ e $n' \mid n$. Inoltre $(m', n') = 1$, poiché per ogni $p \in \mathcal{P}$ le condizioni $\alpha_p \geq \beta_p$ e $\beta_p > \alpha_p$ sono mutuamente esclusive, quindi nessun primo compare con esponente positivo in entrambi i prodotti. Inoltre, per ogni $p \in \mathcal{P}$ l'esponente di p in $m'n'$ è

$$\begin{cases} \alpha_p & \text{se } \alpha_p \geq \beta_p, \\ \beta_p & \text{se } \beta_p > \alpha_p, \end{cases} \quad \text{ossia } \max\{\alpha_p, \beta_p\}.$$

Dunque

$$m'n' = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max(\alpha_p, \beta_p)} = [m, n].$$

Poniamo ora $a = x^{m/m'}$ e $b = y^{n/n'}$. Poiché x e y commutano, anche a e b commutano. Per la (iii) della Proposizione 1.3.33, otteniamo

$$o(a) = \frac{m}{(m, m/m')} = \frac{m}{m/m'} = m', \qquad o(b) = \frac{n}{(n, n/n')} = \frac{n}{n/n'} = n'.$$

Poiché $(m', n') = 1$ e $ab = ba$, per la Proposizione 3.5.14 segue

$$o(ab) = o(a)\, o(b) = m'n' = [m, n].$$

Ponendo $z = ab$ si ha dunque $o(z) = [m, n]$, come volevasi dimostrare. □

Osservazione 3.5.16 I risultati precedenti non valgono se gli elementi non commutano. Per esempio in S_3 gli elementi $x = (12)$ e $y = (123)$ hanno ordini primi ($o(x) = 2$ e $o(y) = 3$), $xy = (23)$ e $o(xy) = o((23)) = 2 \neq 6 = [2, 3]$. Anche se gli elementi commutano ma gli ordini non sono primi il risultato non vale. per esempio la classe $[2]_4 \in \mathbb{Z}_4$ ha ordine due, commuta con se stessa ma l'ordine di $[0]_4 = [2]_4 + [2]_4$ é 1. Si dimostra (noi non lo faremo) che dati m, n, r numeri naturali diversi da 1 esiste sempre un gruppo finito G e $x, y \in G$ tali che $o(x) = m$, $o(y) = n$ e $o(xy) = r$.

3.6 Esercizi

Esercizio 3.1 Dire quali dei seguenti insiemi H sono sottogruppi del gruppo G indicato:

1. $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = \{\ln a \mid a \in \mathbb{Q},\ a > 0\}$;
2. $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = \{\ln n \mid n \in \mathbb{Z},\ n > 0\}$;
3. $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = \{x \in \mathbb{R} \mid \tan x \in \mathbb{Q}\}$;

4. $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $H = \{2^n 3^m \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$;

5. $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y) \mid y = 2x\}$.

Esercizio 3.2 Si consideri l'insieme $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\}$ con l'operazione binaria definita da

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b).$$

Dopo aver verificato che $(G, \cdot)$ é un gruppo, si verifichi che $H = \{(a, b) \in G \mid b = 0\} < G$.

Esercizio 3.3 Sia X un insieme e sia Δ_X la differenza simmetrica, cioé l'operazione su $\mathcal{P}(X)$ definita da:

$$A, B \in \mathcal{P}(X), A\Delta_X B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Si dimostri che $(\mathcal{P}(X), \Delta_X)$ é un gruppo abeliano. Sia $Y \subseteq X$. Si dimostri che $(\mathcal{P}(Y), \Delta_Y) \leq (\mathcal{P}(X), \Delta_X)$.

Esercizio 3.4 Si dimostri che l'insieme G delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ con l'operazione definita da

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

é un gruppo abeliano e che i seguenti sottoinsiemi sono sottogruppi di G.

1. $C(\mathbb{R}) = \{\text{funzioni continue } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$;

2. $D(\mathbb{R}) = \{\text{funzioni derivabili } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$;

3. $I(\mathbb{R}) = \{\text{funzioni integrabili } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Esercizio 3.5 In ognuno dei casi seguenti mostrare che H é un sottogruppo di S_X.

1. $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, 1\}$, $H = \{id, f, g\}$, dove $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{x-1}{x}$;

2. $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, $H = \{id, f, g, h\}$, dove $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -x$ $h(x) = -\frac{1}{x}$;

3. $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, 1\}$, $H = \{id, f, g, h, j, k\}$, dove $f(x) = 1 - x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = \frac{1}{1-x}$, $j(x) = \frac{x-1}{x}$ e $k(x) = \frac{x}{x-1}$.

Esercizio 3.6 Per ogni coppia di numeri reali a, b, $a \neq 0$, si definisca la funzione $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$. Si dimostri che:

1. $f_{a,b} \in \mathrm{S}_{\mathbb{R}}$;
2. $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac,ad+b}$;
3. $f_{a,b}^{-1} = f_{a^{-1},-ba^{-1}}$;
4. $H = \{f_{a,b} \mid a \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*\} < S_{\mathbb{R}}$.

Esercizio 3.7 Sia $G = D_n$, $n \geq 3$, il gruppo diedrale. Dimostrare che G ha esattamente n elementi di ordine 2 se e solo se n é dispari. Nel caso che n sia dispari dimostrare che gli n elementi di G che non hanno ordine 2 formano un sottogruppo abeliano di G.

Esercizio 3.8 Sia X un insieme finito e A un sottoinsieme di X. Sia H il sottoinsieme di S_X che consiste di tutte le permutazioni $f \in S_X$ tale che $f(x) \in A$, per ogni $x \in A$.

1. Dimostrare che $H < S_X$;
2. Fornire un esempio dove la conclusione del punto precedente non vale se X é un insieme infinito.

Esercizio 3.9

(1) Dimostrare che l'insieme delle trasposizioni di S_n genera S_n;

(2) Dimostrare che l'insieme $\{(12), (13), \ldots, (1n)\}$ genera S_n;

(3) Dimostrare che i cicli di lunghezza 3 generano A_n, for $n \geq 3$;

(4) Dimostrare che l'insieme $\{(123), (124), \ldots, (12n)\}$ genera A_n;

(5) Dimostrare che S_n é generato da $\{(12), (12\ldots n)\}$.

(Suggerimento: per (3) usare $(13)(12) = (123)$ e $(12)(34) = (321)(134)$; per (4) usare $(abc) = (1ca)(1ab)$, $(1ab) = (1b2)(12a)(12b)$ e $(1b2) = (12b)^2$; per (5) usare $(1\ldots n)(12)(1\ldots n)^{-1} = (23)$ e $(12)(23)(12) = (13)$).

Esercizio 3.10 Siano H e K sottogruppi di un gruppo finito G tali che $H \leq K \leq G$. Si dimostri che $[G : H] = [G : K][K : H]$.

Capitolo 4

Sottogruppi normali e quozienti

4.1 Sottogruppi normali

Definizione 4.1.1 *Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G si dice* normale *se $xH = Hx$ per ogni $x \in G$.*

Scriveremo $H \trianglelefteq G$ per intendere che H è un sottogruppo normale di G. Ogni gruppo G ammette almeno due sottogruppi normali: i sottogruppi banali $\{1\}$ e G.

Osservazione 4.1.2 Se G è un gruppo abeliano, allora ogni sottogruppo $H \leq G$ è normale. Ciò segue dall'Osservazione 3.5.1: in notazione additiva si ha $x + H = H + x$ per ogni $x \in G$ (e quindi, in notazione moltiplicativa, $xH = Hx$), da cui $H \trianglelefteq G$. Tuttavia l'abelianità non è necessaria: esistono gruppi non abeliani i cui sottogruppi sono tutti normali; un esempio è il gruppo dei quaternioni Q_8 (cfr. Esempio 4.3.7).

Proposizione 4.1.3 (primo criterio di normalità) *Siano G un gruppo ed $H \leq G$. Allora $H \trianglelefteq G$ se e solo se $x^{-1}hx \in H$, $\forall x \in G$, $\forall h \in H$.*

Dimostrazione: Dimostriamo l'implicazione $\Rightarrow$. Se $H \trianglelefteq G$, allora $xH = Hx$ per ogni $x \in G$. Dunque, fissati $x \in G$ e $h \in H$, esiste $h' \in H$ tale che $hx = xh'$, per cui $x^{-1}hx = h' \in H$. Dimostriamo ora l'implicazione $\Leftarrow$. Sia $x \in G$. Per $h \in H$, l'ipotesi dà $xhx^{-1} \in H$, ossia esiste $h' \in H$ con $xh = h'x \in Hx$. Per arbitrarietà di h, si ha $xH \subseteq Hx$. Sostituendo x con x^{-1} si ottiene anche $Hx \subseteq xH$, dunque $xH = Hx$. □

Definizione 4.1.4 *Siano G un gruppo ed $H \leq G$. Per ogni $x \in G$ e $h \in H$ il termine $x^{-1}hx$ è detto* coniugato di h tramite x*, mentre l'insieme*

$$H^x := \{x^{-1}hx \mid h \in H\}$$

è detto coniugato di H tramite x.

Lemma 4.1.5 *Siano G un gruppo ed $H \leq G$. Allora $H^x \leq G$ per ogni $x \in G$.*

Dimostrazione: Per il criterio di sottogruppo (cfr. Proposizione 3.1.12), se $h_1, h_2 \in H$ allora

$$(x^{-1}h_1x)^{-1}(x^{-1}h_2x) = x^{-1}(h_1^{-1}h_2)x \in H^x.$$

□

Proposizione 4.1.6 (secondo criterio di normalità) *Siano G un gruppo ed $H \leq G$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $H \trianglelefteq G$;

(ii) $H^x \leq H$, $\forall x \in G$;

(iii) $H^x = H, \forall x \in G$.

Dimostrazione: L'equivalenza *(i)*⇔*(ii)* segue dalla Proposizione 4.1.3; *(iii)*⇒*(ii)* è ovvia. Resta *(ii)*⇒*(iii)*: fissato $x \in G$, da $H^{x^{-1}} \leq H$ segue che per ogni $h \in H$ esiste $h' \in H$ con $xhx^{-1} = h'$, cioè $h = x^{-1}h'x \in H^x$. Quindi $H \subseteq H^x$ e $H^x \subseteq H$ (per ipotesi) da cui $H = H^x$. □

Esempio 4.1.7 Per ogni $n \geq 1$, $A_n \trianglelefteq S_n$. Infatti, se $\eta \in A_n$ e $f \in S_n$, allora

$$\operatorname{sgn}(f^{-1}\eta\sigma) = \operatorname{sgn}(f^{-1})\operatorname{sgn}(\eta)\operatorname{sgn}(f) = \operatorname{sgn}(f)^2\operatorname{sgn}(\eta) = \operatorname{sgn}(\eta) = 1.$$

Osservazione 4.1.8 Se G possiede un unico sottogruppo H di ordine $m \in \mathbb{N}^+$, allora $H \trianglelefteq G$. Infatti per ogni $x \in G$ i sottogruppi H^x ed H hanno lo stesso ordine, quindi $H^x = H$. Quindi $H \trianglelefteq G$ per la (iii) della Proposizione 4.1.6.

Proposizione 4.1.9 *Siano G un gruppo ed $H \leq G$. Se $[G : H] = 2$, allora $H \trianglelefteq G$.*

Dimostrazione: Se $x \in G \setminus H$, allora le sole classi laterali di H sono H e xH, e analogamente a destra H e Hx. Poiché $xH \cap H = \emptyset$, necessariamente $xH = G \setminus H = Hx$. Dunque $xH = Hx$ per ogni x, cioè $H \trianglelefteq G$. □

Osservazione 4.1.10 Più in generale, se G è finito e p è il più piccolo primo che divide $|G|$, allora si dimostra (noi non lo faremo) che ogni sottogruppo $H \leq G$ di indice p è normale.

Osservazione 4.1.11 Il risultato della Proposizione 4.1.9 non si estende a tutti gli indici. Per esempio, in S_3 il sottogruppo $H = \langle (1\,2) \rangle$ ha indice 3 e non è normale. Infatti, per esempio (cfr. Esempio 3.5.2)

$$(1\,3)H = \{(1\,3), (1\,2\,3)\} \neq H(1\,3) = \{(1\,3), (1\,3\,2)\}.$$

Mentre è immediato verificare che se $K \leq H \leq G$, allora $K \leq G$, tale fatto non vale per la condizione di normalità, come mostra il seguente esempio.

Osservazione 4.1.12 (la normalità non è transitiva) Consideriamo $G = A_4$ (il sottogruppo delle permutazioni pari di S_4). In G ci sono in totale 12 elementi:

$$G = \{\mathrm{id}\} \cup \{(1\,2)(3\,4),\ (1\,3)(2\,4),\ (1\,4)(2\,3)\} \cup \mathcal{C}_3,$$

dove l'insieme $\mathcal{C}_3$ dei 3-cicli (otto elementi) è

$$\mathcal{C}_3 = \{(1\,2\,3),\ (1\,3\,2),\ (1\,2\,4),\ (1\,4\,2),\ (1\,3\,4),\ (1\,4\,3),\ (2\,3\,4),\ (2\,4\,3)\}.$$

Poniamo

$$H = \{\mathrm{id},\ (1\,2)(3\,4),\ (1\,3)(2\,4),\ (1\,4)(2\,3)\}, \qquad K = \{\mathrm{id},\ (1\,2)(3\,4)\}.$$

Si verifica facilmente che H è abeliano, dunque $K \trianglelefteq H$. Per mostrare che $H \trianglelefteq A_4$, basta verificare, per il primo criterio di normalità, che la coniugazione tramite un 3-ciclo di qualunque elemento di H rimane in H.

Nota pratica per i calcoli. Per ogni $c \in S_4$ e per ogni trasposizione $(i\,j)$ vale

$$c^{-1}(i\,j)c = \big(c^{-1}(i)\ c^{-1}(j)\big),$$

cioè la coniugazione *rinomina* gli indici. Inoltre, per un prodotto vale

$$c^{-1}\big((12)(34)\big)c = \big(c^{-1}(12)c\big)\ \big(c^{-1}(34)c\big) = \big(c^{-1}(1)\ c^{-1}(2)\big)\ \big(c^{-1}(3)\ c^{-1}(4)\big).$$

Usare queste identità rende i calcoli immediati (si tratta solo di sostituire le etichette).

Sia quindi $\sigma = (1\,2\,3)$ (la verifica con gli altri 3-cicli è analoga). Allora:

$$\sigma^{-1}\,(1\,2)(3\,4)\,\sigma = (1\,3)(2\,4) \in H,$$
$$\sigma^{-1}\,(1\,3)(2\,4)\,\sigma = (1\,4)(2\,3) \in H,$$
$$\sigma^{-1}\,(1\,4)(2\,3)\,\sigma = (1\,2)(3\,4) \in H.$$

dunque $H \trianglelefteq A_4$. Mostriamo infine che $K \not\trianglelefteq A_4$. Con la stessa $\sigma = (1\,2\,3)$ si ha

$$\sigma^{-1}\,(1\,2)(3\,4)\,\sigma = (1\,3)(2\,4) \notin K,$$

per cui K non è normale in A_4. Concludiamo che $K \trianglelefteq H \trianglelefteq A_4$ ma $K \not\trianglelefteq A_4$, ossia la normalità non è transitiva.

Con i criteri di normalità in mano, passiamo a due nozioni cardine: i gruppi semplici e il centro, che misura quanto un gruppo si discosti dall'essere abeliano.

Definizione 4.1.13 *Un gruppo G si dice* semplice *se i suoi unici sottogruppi normali sono quelli banali.*

Esempio 4.1.14 Se p è primo, allora $(\mathbb{Z}_p, +, 0)$ è semplice. Infatti, essendo abeliano, ogni suo sottogruppo è normale e, per il teorema di Lagrange, i suoi sottogruppi hanno ordine 1 o p.

Esempio 4.1.15 Per ogni $n \geq 5$, il gruppo alterno A_n è semplice (la dimostrazione non fa parte di questo corso).

Definizione 4.1.16 *Sia G un gruppo. Il* centro *di G è*

$$Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \forall y \in G\}.$$

Proposizione 4.1.17 *Sia G un gruppo. Allora:*

(i) $Z(G) \trianglelefteq G$;

(ii) $Z(G)$ *è abeliano;*

(iii) G *è abeliano se e solo se* $G = Z(G)$.

Dimostrazione: Per (i) si verifica anzitutto che $Z(G) \leq G$: è non vuoto, chiuso per inversi e prodotto. Inoltre, per ogni $x \in G$ e $z \in Z(G)$ si ha $x^{-1}zx = z$ e la normalità segue dal primo criterio di normalitá. I punti (ii) e (iii) sono immediati dalla definizione. □

Proposizione 4.1.18 *Sia G un gruppo semplice non abeliano. Allora $Z(G)$ è banale.*

Dimostrazione: Per la Proposizione 4.1.17 il centro è normale. Per semplicità $Z(G) \in \{1, G\}$, ma G non è abeliano, dunque $Z(G) \neq G$ per la (iii) della Proposizione 4.1.17 e quindi $Z(G) = \{1\}$. □

4.2 Operazioni con i sottogruppi normali

Proposizione 4.2.1 (prodotto) *Sia G un gruppo e siano $H, K \leq G$. Allora:*

(i) Se almeno uno tra H e K è normale in G, allora $HK \leq G$;

(ii) se $H, K \trianglelefteq G$, allora $HK \trianglelefteq G$.

Dimostrazione: (i) Se $H \trianglelefteq G$, allora per ogni $h \in H$ vale $hK = Kh$; dunque

$$HK = \bigcup_{h \in H} hK = \bigcup_{h \in H} Kh = KH.$$

Per la Proposizione 3.1.12 ne segue $HK \leq G$. Il caso $K \trianglelefteq G$ è del tutto analogo.

(ii) Da (i) abbiamo $HK \leq G$. Inoltre, per $x \in G$, $h \in H$ e $k \in K$,

$$x^{-1}(hk)x = (x^{-1}hx)(x^{-1}kx) \in HK,$$

poiché $x^{-1}hx \in H$ e $x^{-1}kx \in K$ perchè sia H che K sono normali in G. Segue dal primo criterio di normalità che $HK \trianglelefteq G$. □

Proposizione 4.2.2 (intersezione) *Siano G un gruppo ed $(N_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottogruppi normali di G. Allora $N := \bigcap_{i \in I} N_i \trianglelefteq G$.*

Dimostrazione: Per la Proposizione 3.2.1, $N \leq G$. Se $x \in G$ e $n \in N$, allora $n \in N_i$ per ogni i e, per normalità, $x^{-1}nx \in N_i$ per ogni i, quindi $x^{-1}nx \in N$. □

Proposizione 4.2.3 (unione) *Siano G un gruppo ed $(N_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottogruppi normali di G. Allora $\langle \bigcup_{i \in I} N_i \rangle \trianglelefteq G$.*

Dimostrazione: Per la Proposizione 3.3.8,

$$\Big\langle \bigcup_{i \in I} N_i \Big\rangle = \Big\{ n_1 n_2 \dots n_k \,\Big|\, k \geq 0,\ n_j \in N_{i_j},\ i_j \in I \Big\}.$$

Sia $x \in G$ e $n = n_1 \cdots n_k \in \big\langle \bigcup_{i \in I} N_i \big\rangle$. Allora

$$x^{-1}nx = x^{-1}(n_1 \cdots n_k)x = (x^{-1}n_1x) \cdots (x^{-1}n_kx).$$

Ora ciascun coniugato $x^{-1}n_jx$ appartiene a qualche N_i (normalità). Quindi l'intero prodotto è ancora in $\langle \bigcup_i N_i \rangle$ e quindi per il primo criterio di normalità $\langle \bigcup_{i \in I} N_i \rangle \trianglelefteq G$. □

Corollario 4.2.4 (catena di sottogruppi normali) *Siano G un gruppo ed $(N_i)_{i\in I}$ una catena di sottogruppi normali di G (per ogni i, j si ha $N_i \subseteq N_j$ oppure $N_j \subseteq N_i$). Allora $\bigcup_{i\in I} N_i \trianglelefteq G$.*

Dimostrazione: Dalla Proposizione 3.3.1 otteniamo che $\bigcup_{i\in I} N_i \leq G$. Inoltre, per mostrare che è normale, sia $x \in G$ e sia $n \in \bigcup_{i\in I} N_i$. Allora esiste $i_0 \in I$ tale che $n \in N_{i_0}$; poiché $N_{i_0} \trianglelefteq G$, si ha

$$x^{\cdot 1}nx \in N_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} N_i.$$

Dal primo criterio di normalità si ottiene dunque che $\bigcup_{i\in I} N_i \trianglelefteq G$. □

4.3 Sottogruppi del gruppo lineare

Sia $\mathbb{K}$ un campo, $n \geq 1$ e consideriamo $GL_n(\mathbb{K}) \subseteq M_n(\mathbb{K})$.

Esempio 4.3.1 (il gruppo lineare speciale) Consideriamo l'insieme delle matrici di ordine n con determinante uguale a 1, chiamato il *gruppo lineare speciale*:

$$\boxed{SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid \det A = 1\}}$$

Mostriamo che, per ogni campo $\mathbb{K}$ e ogni $n \geq 1$, vale

$$SL_n(\mathbb{K}) \trianglelefteq\ GL_n(\mathbb{K}).$$

Infatti $I_n \in SL_n(\mathbb{K})$ perché $\det I_n = 1$, se $A, B \in SL_n(\mathbb{K})$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1$, quindi $AB \in SL_n(\mathbb{K})$ e se $A \in SL_n(\mathbb{K})$, allora A è invertibile e $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 1$, dunque $A^{-1} \in SL_n(\mathbb{K})$. Quindi $SL_n(\mathbb{K})$ è un sottogruppo di $GL_n(\mathbb{K})$. Sia ora $B \in GL_n(\mathbb{K})$ e $A \in A \in SL_n(\mathbb{K})$. Allora

$$\det\big(B^{-1}AB\big) = \det(B^{-1})\ \det(A)\ \det(B) = \det(B)^{-1} \cdot 1 \cdot \det(B) = 1,$$

dove abbiamo usato le proprietà $\det(AB) = \det A\ \det B$ e $\det(B^{-1}) = \det(B)^{-1}$. Pertanto $BAB^{-1} \in SL_n(\mathbb{K})$ per ogni $B \in GL_n(\mathbb{K})$ e ogni $A \in SL_n(\mathbb{K})$ e, per il primo criterio di normalità, segue che $SL_n(\mathbb{K}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{K})$.

Esempio 4.3.2 (le matrici triangolari) Consideriamo l'insieme delle matricri triangolari superiori:

$$\boxed{T_n^+(\mathbb{K}) = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}}.$$

Osserviamo innanzitutto che $(T_n^+(\mathbb{K}), +, 0)$ è un $\mathbb{K}$-sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{K})$ (somma e prodotto per scalari preservano la triangolarità); una base naturale è $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$, dove E_{ij} é la matrice $n \times n$ con un 1 in posizione (i, j) e 0 altrove. Segue che $\dim_{\mathbb{K}} T_n^+(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$. Inoltre $(T_n^+(\mathbb{K}), \cdot, I_n)$ è un monoide. Infatti:

- $I_n \in T_n^+(\mathbb{K})$;
- se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ appartengono a $T_n^+(\mathbb{K})$, allora per $C = AB$ si ha

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

  Se $i > j$, per ogni k o $i > k$ (quindi $a_{ik} = 0$) oppure $k \geq i > j$ (quindi $b_{kj} = 0$); pertanto $c_{ij} = 0$ e $AB \in T_n^+(\mathbb{K})$.

Per la parte moltiplicativa consideriamo il sottogruppo delle triangolari superiori invertibili:

$$\boxed{U(T_n^+(\mathbb{K})) = \{A = (a_{ij}) \in T_n^+(\mathbb{K}) \mid a_{11}, \ldots, a_{nn} \in \mathbb{K}^*\}}.$$

Mostriamo che, per ogni campo $\mathbb{K}$ e ogni $n \geq 1$, vale

$$U(T_n^+(\mathbb{K})) \leq GL_n(\mathbb{K}).$$

Poiché $(T_n^+(\mathbb{K}), \cdot, I_n)$ è già un monoide, per verificare che $U(T_n^+(\mathbb{K}))$ sia un sottogruppo di $GL_n(\mathbb{K})$ basta controllare la presenza degli inversi. Sia $k = 1, \ldots, n$ e $S_k = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ (dove $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$). Una matrice è triangolare superiore se e solo se $A(S_k) \subseteq S_k$ per ogni k. In particolare, se $A \in U(T_n^+(\mathbb{K}))$ ed $s \in S_k$, esiste $s' \in S_k$ tale che $As' = s$ (perché A è invertibile). Allora $A^{-1}s = s' \in S_k$, quindi $A^{-1}(S_k) \subseteq S_k$ per ogni k, e di conseguenza $A^{-1} \in T_n^+(\mathbb{K})$. Mostriamo infine che $U(T_n^+(\mathbb{K}))$ non è normale in $GL_n(\mathbb{K})$ per $n \geq 2$. Per $n = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \notin U(T_2^+(\mathbb{K})).$$

Per $n \geq 3$ si completano le matrici precedenti a blocchi diagonali $\mathrm{diag}(\cdot, I_{n-2})$, ottenendo lo stesso controesempio; quindi $U(T_n^+(\mathbb{K})) \not\trianglelefteq GL_n(\mathbb{K})$ per ogni $n \geq 2$ e per ogni campo $\mathbb{K}$.

In modo analogo si vede che l'insieme delle matrici triangolari *inferiori* invertibili è un sottogruppo del gruppo lineare

$$\boxed{U(T_n^-(\mathbb{K})) = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i < j, \;\; a_{11}, \ldots, a_{nn} \in \mathbb{K}^*\} \leq GL_n(\mathbb{K})}$$

e che $U(T_n^-(\mathbb{K})) \not\trianglelefteq GL_n(\mathbb{K})$ per ogni $n \geq 2$.

Esempio 4.3.3 (le matrici diagonali) Consideriamo l'insieme delle matrici diagonali di grado n su un campo $\mathbb{K}$.

$$\boxed{D_n(\mathbb{K}) = \{\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \mid a_j \in \mathbb{K},\ j = 1, \ldots, n\}}$$

dove

$$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

$(D_n(\mathbb{K}), +, 0)$ è un sottogruppo additivo di $M_n(\mathbb{K})$ e un $\mathbb{K}$-sottospazio: è chiuso per somma e per scalari; una base è $\{E_{11}, \ldots, E_{nn}\}$, dunque $\dim_{\mathbb{K}} D_n(\mathbb{K}) = n$. Si noti che $(D_n(\mathbb{K}), \cdot, I_n)$ è un monoide. Infatti:

- $I_n \in D_n(\mathbb{K})$;
- se $A = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ e $B = \mathrm{diag}(e_1, \ldots, e_n)$ con $d_i, e_i \in \mathbb{K}$, allora $AB = \mathrm{diag}(d_1e_1, \ldots, d_ne_n) \in D_n(\mathbb{K})$;

Sia

$$\boxed{U(D_n(\mathbb{K})) = \{\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \mid a_j \in \mathbb{K}^*,\ j = 1, \ldots, n\}}$$

l'insieme delle matrici diagonali invertibili. Dal momento che se $A = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in D_n(\mathbb{K})$, allora

$$A^{-1} = \mathrm{diag}(d_1^{-1}, \ldots, d_n^{-1}) \in D_n(\mathbb{K}).$$

segue che $U(D_n(\mathbb{K})) \leq GL_n(\mathbb{K})$. Mostriamo infine che $U(D_n(\mathbb{K}))$ non è normale in $GL_n(\mathbb{K})$ se $n = 2$ e $|\mathbb{K}| \geq 3$. Consideriamo la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e sia $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in U(D_2(\mathbb{K}))$ con $a, b \in \mathbb{K}^*$ e $a \neq b$. Allora

$$M^{-1}DM = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b-a & b \end{bmatrix},$$

che non è diagonale quando $a \neq b$, quindi $M^{-1}DM \notin U(D_2(\mathbb{K}))$. Ne segue che $U(D_2(\mathbb{K}))$ non è normale in $GL_2(\mathbb{K})$. Per $n \geq 3$ si completa l'argomento "a blocchi" con $\mathrm{diag}(M, I_{n-2})$ e $\mathrm{diag}(D, I_{n-2})$, ottenendo la stessa conclusione: $U(D_n(\mathbb{K}))$ non è normale in $GL_n(\mathbb{K})$ se $n \geq 2$ e $|\mathbb{K}| \geq 3$.

Si noti infine che

$$D_n(\mathbb{K}) = T_n^+(\mathbb{K}) \cap T_n^-(\mathbb{K}),\ U(D_n(\mathbb{K})) = U(T_n^+(\mathbb{K})) \cap U(T_n^-(\mathbb{K}))$$

Esempio 4.3.4 (il centro del gruppo lineare) Sia

$$\boxed{Z_n(\mathbb{K}) = \{\, aI_n \mid a \in \mathbb{K}^* \,\}} \tag{4.1}$$

l'insieme delle *matrici scalari*. Mostriamo che

$$Z_n(\mathbb{K}) = Z(GL_n(\mathbb{K})) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{K}) \tag{4.2}$$

L'inclusione $Z_n(\mathbb{K}) \subseteq Z(GL_n(\mathbb{K}))$ è ovvia, come il fatto che

$$Z_n(\mathbb{K}) \leq GL_n(\mathbb{K}).$$

Proviamo l'inclusione opposta $Z(GL_n(\mathbb{K})) \subseteq Z_n(\mathbb{K})$, e la (4.2) segue da (i) dalla Proposizione 4.1.17. Per $i \neq j$ indichiamo con E_{ij} la matrice $n \times n$ con un 1 in posizione (i, j) e 0 altrove. Allora $I_n + E_{ij}$ è invertibile (il determinante è 1 e $(I_n + E_{ij})^{-1} = I_n - E_{ij}$). Se $A \in Z(GL_n(\mathbb{K}))$, poiché A commuta con ogni elemento invertibile, in particolare

$$A(I_n + E_{ij}) = (I_n + E_{ij})A \qquad \Longrightarrow \qquad AE_{ij} = E_{ij}A \quad \text{per ogni } i \neq j.$$

Scriviamo $A = (a_{rs})$. Osserviamo che AE_{rs} è la matrice $n \times n$ con tutte le colonne nulle tranne la colonna s-esima, uguale al vettore colonna $(a_{1r}, \ldots, a_{nr})$, mentre $E_{rs}A$ è la matrice $n \times n$ con tutte le righe nulle tranne la riga r-esima, uguale al vettore riga $(a_{s1}, \ldots, a_{sn})$. Segue che $a_{ir} = 0$ per ogni $i \neq r$ e $a_{rr} = a_{ss}$ per ogni $r, s = 1, \ldots, n$, ossia $A \in Z_n(\mathbb{K})$ e la (4.2) é dimostrata. Quindi, se $n \geq 2$, il centro è proprio ($\neq GL_n(\mathbb{K})$), da cui $GL_n(\mathbb{K})$ non è abeliano.

Esempio 4.3.5 (il gruppo ortogonale) Consideriamo l'insieme

$$\boxed{O_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid AA^T = A^TA = I_n\}}$$

Mostriamo che, per ogni campo $\mathbb{K}$ e ogni $n \geq 1$, vale

$$O_n(\mathbb{K}) \leq GL_n(\mathbb{K}).$$

Infatti $I_n \in O_n(\mathbb{K})$, ossia $O_n(\mathbb{K})$ é non vuoto. Siano $A, B \in O_n(\mathbb{K})$. Allora $BB^T = I_n$ e quindi

$$(AB)(AB)^T = A(BB^T)A^T = AIA^T = AA^T = I_n,$$

da cui $AB \in O_n(\mathbb{K})$, e la (S1) nella Definizione 3.1.1 é verificata. Inoltre, se $A \in O_n(\mathbb{K})$, allora $A^{-1} = A^T$ e si ha

$$(A^{-1})(A^{-1})^T = A^T(A^T)^T = A^TA = I_n,$$

ossia $A^{-1} \in O_n(\mathbb{K})$: la (S2) é dunque verificata. $O_n(\mathbb{K})$ è chiamato il *gruppo ortogonale* di grado n sul campo $\mathbb{K}$. Osserviamo che $O_n(\mathbb{K})$ non é normale in $GL_n(\mathbb{K})$ per $n \geq 2$ e per ogni campo $\mathbb{K}$. Questo lo si vede facilmente per $n = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \notin O_2(\mathbb{K}),$$

dunque $O_2(\mathbb{K})$ non é normale in $GL_2(\mathbb{K})$. Per $n \geq 3$ si completano le matrici precedenti a blocchi diagonali $\mathrm{diag}(\,\cdot\,, I_{n-2})$, ottenendo lo stesso controesempio per ogni $n \geq 2$. Quindi $O_n(\mathbb{K}) \not\trianglelefteq GL_n(\mathbb{K})$ per ogni $n \geq 2$ e per ogni campo $\mathbb{K}$.

Esempio 4.3.6 (le matrici simmetriche) Consideriamo l'insieme delle *matrici simmetriche* su un campo $\mathbb{K}$:

$$\boxed{S_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A^T = A\}}.$$

Non è un monoide rispetto al prodotto: pur contenendo l'identità $I_n = I_n^T$, non è chiuso per moltiplicazione. Infatti il prodotto di due simmetriche può non essere simmetrico, ad esempio

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\in S_2(\mathbb{K})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\in S_2(\mathbb{K})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \notin S_2(\mathbb{K}),$$

poiché l'ultima matrice non è uguale alla sua trasposta.

Invece $(S_n(\mathbb{K}), +) \leq (M_n(\mathbb{K}), +)$. Infatti $0 = 0^T \in S_n(\mathbb{K})$, e se $A, B \in S_n(\mathbb{K})$ allora

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B \in S_n(\mathbb{K}),$$

mentre, per ogni $A \in S_n(\mathbb{K})$, vale $(-A)^T = -A$, dunque $-A \in S_n(\mathbb{K})$. Quindi $S_n(\mathbb{K})$ è un sottogruppo additivo di $M_n(\mathbb{K})$. In effetti $S_n(\mathbb{K})$ uno $\mathbb{K}$-sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{K})$, di dimensione $\dim_{\mathbb{K}} S_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$. Una base è

$$\{\, E_{ii} \mid 1 \leq i \leq n \,\} \cup \{\, E_{ij} + E_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n \,\},$$

dove $E_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$ ha 1 in posizione (i, j) e 0 altrove.

Esempio 4.3.7 (il gruppo dei quaternioni unitari) Poniamo

$$\boxed{Q_8 = \{\, \pm I_2,\ \pm I,\ \pm J,\ \pm K \,\}}$$

dove

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Si ha $I^2 = J^2 = K^2 = -I_2$ e $IJ = K$, $JK = I$, $KI = J$.

Si verifica facilmente che $Q_8 \leq GL_2(\mathbb{C})$ che viene chiamato il *gruppo dei quaternioni unitari*. La tabella moltiplicativa é la seguente:

$\cdot$	I_2	$-I_2$	I	$-I$	J	$-J$	K	$-K$
I_2	I_2	$-I_2$	I	$-I$	J	$-J$	K	$-K$
$-I_2$	$-I_2$	I_2	$-I$	I	$-J$	J	$-K$	K
I	I	$-I$	$-I_2$	I_2	K	$-K$	$-J$	J
$-I$	$-I$	I	I_2	$-I_2$	$-K$	K	J	$-J$
J	J	$-J$	$-K$	K	$-I_2$	I_2	I	$-I$
$-J$	$-J$	J	K	$-K$	I_2	$-I_2$	$-I$	I
K	K	$-K$	J	$-J$	$-I$	I	$-I_2$	I_2
$-K$	$-K$	K	$-J$	J	I	$-I$	I_2	$-I_2$

Inoltre valgono i seguenti fatti.

- Tutti i sottogruppi di Q_8 sono normali: infatti, per il teorema di Lagrange i sottogruppi possibili hanno ordine $1, 2, 4, 8$. Quelli banali $\{I_2\}$ e Q_8 sono normali per definizione; l'unico sottogruppo di ordine 2 è $Z(Q_8) = \{\pm I_2\}$ (poiché $-I_2$ è l'unico elemento di ordine 2) ed è normale per la Proposzione 4.1.17(i). I sottogruppi di ordine 4 sono precisamente $\langle I \rangle = \{\pm I_2, \pm I\}$, $\langle J \rangle = \{\pm I_2, \pm J\}$, $\langle K \rangle = \{\pm I_2, \pm K\}$ e, per la Proposizione 4.1.9, sono normali in Q_8.

- $Q_8 = \langle I \rangle \cup \langle J \rangle \cup \langle K \rangle$ è un'unione di tre sottogruppi propri, anche se non è il più piccolo con questa proprietà: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ è un altro esempio per l' Osservazione 3.3.3.

4.4 Quozienti

Siano G un gruppo ed $N \trianglelefteq G$. Definiamo su G la relazione d'equivalenza

$$x \sim_N y \iff x^{-1}y \in N \qquad (x, y \in G).$$

Denotiamo con G/N l'insieme delle classi di equivalenza.

Osservazione 4.4.1 Gli elementi di G/N sono le classi laterali sinistre xN che coincidono con le destre Nx, essendo $N \trianglelefteq G$) (cfr. Proposizione 3.5.3).

Lemma 4.4.2 *Siano G un gruppo e $N \trianglelefteq G$. Se $x \sim_N x'$ e $y \sim_N y'$, allora $xy \sim_N x'y'$.*

Dimostrazione: Per definizione di $\sim_N$, $x \sim_N x'$ e $y \sim_N y'$ significano rispettivamente $x^{-1}x' \in N$ e $y^{-1}y' \in N$. Allora

$$(xy)^{-1}(x'y') = y^{-1}x^{-1}x'y' = y^{-1}(x^{-1}x')y' = \left(y^{-1}(x^{-1}x')y\right)\left(y^{-1}y'\right).$$

Poiché $x^{-1}x' \in N$ e $N \trianglelefteq G$, si ha $y^{-1}(x^{-1}x')y \in N$. Inoltre $y^{-1}y' \in N$. Essendo N un sottogruppo, il prodotto di due elementi di N appartiene ancora a N. Quindi $(xy)^{-1}(x'y') \in N$, ossia $xy \sim_N x'y'$. □

Definizione 4.4.3 *Siano $G = (G, \cdot, 1)$ un gruppo ed $N \trianglelefteq G$. Definiamo su G/N:*

$$(xN) \cdot_N (yN) := (xy)N \qquad (x, y \in G).$$

Proposizione 4.4.4 *Siano G un gruppo ed $N \trianglelefteq G$. Allora $(G/N, \cdot_N, N)$ è un gruppo.*

Dimostrazione: L'associatività, il neutro N e l'inverso $(xN)^{-1} = x^{-1}N$ discendono da quelli in G; l'operazione è ben definita dal lemma precedente. □

Definizione 4.4.5 *Siano G un gruppo ed $N \trianglelefteq G$. Il* gruppo quoziente *di G rispetto ad N è $G/N := (G/N, \cdot_N, N)$.*

Notazione 4.4.6 Quando non vi è rischio di ambiguità, useremo lo *stesso* simbolo dell'operazione di G per quella di G/N, omettendo il pedice, e scriveremo semplicemente

$$(xN) \cdot (yN) = (xy)N.$$

Osservazione 4.4.7 In particolare, per $N = G$ si ha $G/N = \{1\}$, mentre per $N = \{1\}$ si ottiene $G/N = G$.

Proposizione 4.4.8 *Sia G un gruppo abeliano ed $N \leq G$. Allora G/N è abeliano.*

Dimostrazione: Per $x_1, x_2 \in G$ si ha

$$(xN)(yN) = (xy)N = (yx)N = (yN)(xN).$$

□

Osservazione 4.4.9 Il viceversa non vale: ad esempio S_3 non è abeliano, ma $N := \langle (1\,2\,3) \rangle \trianglelefteq S_3$ e S_3/N ha due elementi, dunque è abeliano.

Proposizione 4.4.10 *Siano G un gruppo finito ed $N \trianglelefteq G$. Allora*

$$|G| = |G/N|\,|N|. \tag{4.3}$$

Dimostrazione: Per Lagrange $|G| = [G : N] \cdot |N|$. Poiché $|G/N| = [G : N]$ (Osservazione 4.4.1) e quindi vale la (4.3). □

Esempio 4.4.11 Consideriamo il gruppo abeliano $(\mathbb{Z}, +, 0)$. Ogni suo sottogruppo è normale (cf. Osservazione 4.1.2). Fissato $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$ e posto $N := m\mathbb{Z} = \langle m \rangle$ (cfr. Proposizione 3.2.8), si ha

$$x \sim_N y \iff x - y \in m\mathbb{Z} \iff x \equiv y \pmod{m}.$$

Le classi laterali sono $x + N = x + m\mathbb{Z}$ e l'insieme quoziente è $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Si ha quindi, per ogni $x \in \mathbb{Z}$,

$$x + N = [x]_m,$$

e, come insiemi, possiamo quindi identificare $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ con $\mathbb{Z}_m$. L'operazione indotta è

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N,$$

che, sotto tale identificazione, si traduce in

$$[x]_m + [y]_m = [x + y]_m.$$

Pertanto, con questa identificazione, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_m$ hanno gli stessi elementi e la stessa operazione; possiamo considerarli come lo stesso gruppo.

4.5 Esercizi

Esercizio 4.1 Sia $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$. Dimostrare che:

1. $G < GL_3(\mathbb{Q})$;
2. $Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$;

3. $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2a & 2b \\ 0 & 1 & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ è un sottogruppo normale di G.

Esercizio 4.2 Sull'insieme $G = \mathbb{Z}_4 \times \{-1, 1\}$ si definisca un'operazione binaria ponendo per ogni $(x, u), (y, v) \in G$

$$(x, u) \cdot (y, v) = (x + uy, uv).$$

1. Si dimostri che G con questa operazione é un gruppo non abeliano;

2. Si trovi un sottogruppo di G che non é normale.

Esercizio 4.3 Sia $n \in \mathbb{N}_+$ e p un primo. Si calcolino le cardinalitá di $Z(GL_n(\mathbb{Z}_p))$ e $SL_n(\mathbb{Z}_p)$.

Esercizio 4.4 Sia G un gruppo finito e H un suo sottogruppo di indice p, con p primo. Supponiamo che esista $x \in G \setminus H$ tale che $xH = Hx$. Dimostrare che H é normale in G. (Suggerimento: si consideri il gruppo $K = \langle x, H \rangle$, si usi l'Esercizio 3.10 per dedurre che $K = G$ e si dimostri che H é normale in K).

Esercizio 4.5 Sia G un gruppo di ordine $|G| = 2n$, $n \geq 2$. Supponiamo che G abbia esattamente n elementi di ordine 2 e che i restanti n elementi formino un gruppo H. Dimostrare che H é un sottogruppo abeliano e normale di G di ordine dispari. (Suggerimento: per dimostrare che H é abeliano, si fissi $s \in G$ di ordine 2, si osservi che sh ha ordine 2 per ogni $h \in H$).

Esercizio 4.6 Sia $Z(G)$ il centro di un gruppo G e $H \leq G$. Si dimostri che

$$Z(G) \cap H \subseteq Z(H)$$

e che l'inclusione puó essere stretta.

Esercizio 4.7 Dimostrare che $o(xy) = o(yx)$ per ogni x, y in un gruppo G. Inoltre se x é l'unico elemento di G che ha ordine k allora $x \in Z(G)$.

Esercizio 4.8 Dimostrare che il centro del gruppo simmetrico S_n é banale per $n \geq 3$. (Suggerimento: sia $f \in S_n$, $f \neq id$. Allora esistono $i, j \in \{1, 2 \ldots, n\}$ tali che $i \neq j$ e $f(i) = j$. Sia $k = f(j)$. Allora $j \neq k$. Siccome $n \geq 3$ esiste $l \neq j$ e $l \neq k$ e possiamo scegliere la trasposizione $\tau = (jl)$. Allora $(f \circ \tau)(j) = f(l) \neq f(j) = (\tau \circ f)(j)$).

Esercizio 4.9 Dimostrare che il centro del gruppo alterno A_n é banale per $n \geq 4$. (Suggerimento: sia $f \in A_n$, $f \neq id$. Allora esistono $i, j \in \{1, 2 \ldots, n\}$ tali che $i \neq j$ e $f(i) = j$. Siccome $n \geq 4$ esistono $k, l \in \{1, 2 \ldots, n\}$, distinti e diversi da i e j. Allora $(f \circ (jkl))(i) = f(i) = j \neq k = ((jkl) \circ f)(i)$).

Esercizio 4.10 Sia $D_n = \{1, r, \ldots, r^{n-1}, rs, \ldots, r^{n-1}s\}$ il gruppo diedrale, $n \geq 3$. Dimostrare che $Z(D_n) = \{1\}$ se n é dispari e $Z(D_n) = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$ se n é pari. (Suggerimento: mostrare preliminarmente che se $x \in Z(D_n)$ allora $x = r^k$ e dedurre che $r^{2k} = \mathrm{id}$).

Capitolo 5

Omomorfismi e isomorfismi

5.1 Omomorfismi ed isomorfismi

Definizione 5.1.1 *Siano G ed H gruppi e $\varphi : G \to H$ un'applicazione. Diremo che φ è un* omomorfismo *dal gruppo G nel gruppo H se*

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y), \forall x, y \in G.$$

Denotiamo con $Hom(G, H)$ l'insieme degli omomorfismi da G in H.

Esempio 5.1.2 Sia G un gruppo, allora $id_G : G \to G$ definisce un omomorfismo dal gruppo G in se stesso.

Esempio 5.1.3 Siano G e H due gruppi, allora l'applicazione costante $\varphi : G \to H$, $\varphi(x) = 1$, $\forall x \in G$, definisce un omomorfismo dal gruppo G nel gruppo H, chiamato l'*omomorfismo banale*.

Dimostriamo ora che la composizione di omomorfismi è un omomorfismo.

Lemma 5.1.4 *Siano G, H, K gruppi. Allora per ogni $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ e $\psi \in \mathrm{Hom}(H, K)$ si ha $\psi \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(G, K)$.*

Dimostrazione: Poiché φ e ψ sono omomorfismi, per ogni $x, y \in G$,

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(x \cdot y) &= \psi(\varphi(x \cdot y)) = \psi(\varphi(x) \cdot \varphi(y)) \\ &= \psi(\varphi(x)) \cdot \psi(\varphi(y)) = (\psi \circ \varphi)(x) \cdot (\psi \circ \varphi)(y).\end{aligned}$$

Dunque $\psi \circ \varphi$ è un omomorfismo $G \to K$. □

Definizione 5.1.5 *Siano G ed H gruppi. Un omomorfismo $\psi \in \mathrm{Hom}(G,H)$ si dice essere un* isomorfismo *se è bigettivo. Se esiste un isomorfismo $G \to H$, allora diremo che i due gruppi sono* isomorfi *e scriveremo $G \cong H$. Inoltre, indichiamo con*

$$\mathrm{Iso}(G,H) \;:=\; \{\varphi \in \mathrm{Hom}(G,H) \mid \varphi \text{ è un isomorfismo}\}$$

l'insieme di tutti gli isomorfismi da G a H.

Esempio 5.1.6 Consideriamo

$$\log :\ (\mathbb{R}^+,\cdot) \longrightarrow (\mathbb{R},+), \qquad x \longmapsto \log x.$$

È un omomorfismo perché per ogni $x,y > 0$ vale $\log(xy) = \log x + \log y$. Definiamo anche

$$\exp :\ (\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathbb{R}^+,\cdot), \qquad t \longmapsto e^t,$$

Inoltre $\log\circ\exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ed $\exp\circ\log = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^+}$; dunque log è biiettiva con inversa exp e quindi un isomorfismo di gruppi: $(\mathbb{R}^+,\cdot) \;\cong\; (\mathbb{R},+)$.

Esempio 5.1.7 Sia G un gruppo ciclico di ordine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, allora $G \cong \mathbb{Z}_{\mathbf{n}}$. Infatti per definizione di gruppo ciclico si deve avere che esiste $x \in G$ tale che $G = \langle x \rangle$, mentre per la Proposizione 3.2.7 si ha $\langle x \rangle = \{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$, dove $o(x) = n$; possiamo quindi considerare l'applicazione:

$$\begin{aligned} \varphi : G = \langle x \rangle &\to \mathbb{Z}_n \\ x^j &\mapsto [j]_n \end{aligned}$$

Sfruttando le proprietà delle potenze e il fatto che $o(x) = n$, è immediato osservare che tale applicazione è un omomorfismo, e quindi $\varphi \in \mathrm{Iso}(G,\mathbb{Z}_n)$ in quanto anche bigezione. In particolare, ogni gruppo di ordine p primo (ciclico per il Corollario 3.5.10) è isomorfo a $\mathbb{Z}_p$.

Lemma 5.1.8 *Siano G ed H gruppi e $\varphi \in Hom(G,H)$ un isomorfismo. Allora $\varphi^{-1} \in Hom(H,G)$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione: $\forall u,v \in H$:

$$uv = \varphi(\varphi^{-1}(u))\varphi(\varphi^{-1}(v)) = \varphi(\varphi^{-1}(u)\varphi^{-1}(v)),$$

quindi

$$\varphi^{-1}(uv) = \varphi^{-1}(u)\varphi^{-1}(v).$$

□

Osservazione 5.1.9 L' essere isomorfi definisce una relazione di equivalenza sulla classe di tutti i gruppi. La verifica è lasciata allo studente.

Osservazione 5.1.10 Se $G \cong H$ allora G è abeliano se e solo se H è abeliano,

Proposizione 5.1.11 *Siano* $(G, \cdot, 1)$ *ed* $(H, \cdot, 1)$ *gruppi e* $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$. *Allora valgono le seguenti affermazioni:*

(i) $\varphi(1) = 1$;

(ii) $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$, $\forall x \in G$;

(iii) $\varphi(x^n) = (\varphi(x))^n$, $\forall x \in G$, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

(iv) se G *è ciclico ed è generato da* $x \in G$, $G = \langle x \rangle$, *e se* φ *è suriettiva, allora* H *è ciclico e generato da* $\varphi(x) \in H$.

Dimostrazione: (i) Per ogni $x \in G$ si ha

$$\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = \varphi(x) \cdot \varphi(1),$$

quindi per cancellazione a sinistra $\varphi(1) = 1$.

(ii) Per ogni $x \in G$,

$$1 = \varphi(1) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(x)\,\varphi(x^{-1}),$$

e dall'unicità dell'inverso in un gruppo segue $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.

(iii) Fissato $x \in G$, procediamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Passo base ($n = 0$): $\varphi(x^0) = \varphi(1) = 1$. Passo induttivo: se la tesi vale per un certo $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\varphi(x^{n+1}) = \varphi(x^n x) = \varphi(x^n)\,\varphi(x) = (\varphi(x))^n \varphi(x) = (\varphi(x))^{n+1}.$$

Per $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ allora, per la Proposizione 1.3.22(3) la (ii) e la (iii), si ha

$$\varphi(x^n) = \varphi\big((x^{-n})^{-1}\big) = \big(\varphi(x^{-n})\big)^{-1} = \big((\varphi(x))^{-n}\big)^{-1} = (\varphi(x))^n.$$

(iv) Sia $u \in H$. Dalla suriettività di φ esiste $a \in G$ tale che $\varphi(a) = u$. Poiché $G = \langle x \rangle$, esiste $n \in \mathbb{Z}$ con $a = x^n$, dunque

$$u = \varphi(a) = \varphi(x^n) = (\varphi(x))^n.$$

Essendo y arbitrario, $H = \langle \varphi(x) \rangle$. □

Definizione 5.1.12 *Siano G ed H gruppi e $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,H)$. Definiamo il* nucleo *di φ:*

$$\ker(\varphi) := \{x \in G \mid \varphi(x) = 1\} \subseteq G,$$

e l' immagine *di φ:*

$$\mathrm{Im}(\varphi) := \{u \in H \mid \exists\, x \in G\,, \varphi(x) = u\} \subseteq H.$$

Proposizione 5.1.13 *Siano G ed H gruppi, $\varphi \in Hom(G,H)$. Allora valgono le seguente affermazioni:*

(i) $ker(\varphi) \trianglelefteq G$;

(ii) $Im(\varphi) \leq H$.

Dimostrazione: (i) Per la Proposizione 5.1.11(i) si ha $\varphi(1) = 1$, dunque $1 \in \ker(\varphi)$ e in particolare $\ker(\varphi) \neq \emptyset$. Siano ora $x, y \in \ker(\varphi)$; allora

$$\varphi(x^{-1}y) = \varphi(x)^{-1}\varphi(y) = 1 \cdot 1 = 1,$$

per cui $x^{-1}y \in \ker(\varphi)$. Segue dalla Proposizione 3.1.12 che $\ker(\varphi) \leq G$. Inoltre, per $x \in G$ e $k \in \ker(\varphi)$,

$$\varphi(x^{-1}kx) = \varphi(x)^{-1}\varphi(k)\varphi(x) = \varphi(x)^{-1}\,1\,\varphi(x) = 1,$$

quindi $x^{-1}kx \in \ker(\varphi)$ e pertanto per il primo criterio di normalità $\ker(\varphi) \trianglelefteq G$.

(ii) Poiché $1 \in G$ allora per Proposizione 5.1.11(i), anche $1 = \varphi(1) \in \mathrm{Im}(\varphi)$, e quindi $\mathrm{Im}(\varphi) \neq \emptyset$. Se $\varphi(x), \varphi(y) \in \mathrm{Im}(\varphi)$, allora

$$(\varphi(x))^{-1}\varphi(y) = \varphi(x^{-1}y) \in \mathrm{Im}(\varphi),$$

da cui, per la Proposizione 3.1.12, $\mathrm{Im}(\varphi) \leq H$. □

Proposizione 5.1.14 *Siano G e H gruppi, $\varphi \in Hom(G,H)$. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

(i) $\forall\, x, y \in G, \varphi(x) = \varphi(y) \iff y \in xker(\varphi) = ker(\varphi)x$ *(dove quest'ultima uguaglianza si ha in quanto* $ker(\varphi) \trianglelefteq G$*);*

(ii) $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = xker(\varphi)$, $\forall x \in G$;

(iii) φ *è iniettivo se e solo se* $ker(\varphi) = \{1\}$.

Dimostrazione: (i) Per ogni $x, y \in G$,

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi(y) &\iff \varphi(x)^{-1}\varphi(y) = 1 \iff \varphi(x^{-1}y) = 1 \\ &\iff x^{-1}y \in \ker\varphi \iff y \in x\ker\varphi\ (= \ker\varphi\, x).\end{aligned}$$

(ii) Per ogni $x \in G$,

$$\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \{\, y \in G :\ \varphi(y) = \varphi(x)\,\} = x\ker\varphi,$$

dove l'ultima uguaglianza segue da (i).

(iii) Segue dalla definizione di iniettività che φ è iniettiva $\iff \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \{x\}$, $\forall x \in G$. D'altra parte, per la (ii)

$$\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \{x\} \iff x\ker\varphi = \{x\}$$

Segue che φ è iniettiva $\iff \ker\varphi = \{1\}$.

□

Proposizione 5.1.15 *Siano G un gruppo e $N \trianglelefteq G$. La* proiezione canonica sul quoziente

$$\pi_N : G \longrightarrow G/N, \qquad \pi_N(x) = xN$$

è un omomorfismo suriettivo e $\ker(\pi_N) = N$.

Dimostrazione: Per ogni $x, y \in G$ si ha

$$\pi_N(xy) = (xy)N = (xN)(yN) = \pi_N(x)\,\pi_N(y),$$

dunque π_N è un omomorfismo. È suriettivo perché, data una qualunque classe laterale $xN \in G/N$, vale $\pi_N(x) = xN$. Per il nucleo,

$$\ker(\pi_N) = \{\, x \in G \mid \pi_N(x) = N\,\} = \{\, x \in G \mid xN = N\,\} = N,$$

poiché $xN = N$ se e solo se $x \in N$. □

Osservazione 5.1.16 La dimostrazione precedente mette in luce un principio di *unicità*: esiste una sola struttura di gruppo su G/N che rende la proiezione canonica

$$\pi_N : G \longrightarrow G/N, \qquad \pi_N(x) = xN$$

un omomorfismo di gruppi. Infatti, se $(G/N, \odot)$ è un gruppo e π_N è un omomorfismo a valori in esso, allora per ogni $x, y \in G$ vale

$$(xN) \odot (yN) = \pi_N(x) \odot \pi_N(y) = \pi_N(xy) = (xy)N,$$

da cui si deduce che $\odot$ coincide con la moltiplicazione definita dalla Definizione 4.4.3. In particolare, la richiesta che π_N sia un omomorfismo *determina* univocamente la struttura di gruppo su G/N.

5.2 Il primo teorema di isomorfismo e il teorema di corrispondenza

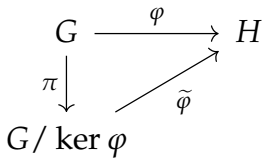
Teorema 5.2.1 (primo teorema di isomorfismo) *Siano G ed H gruppi e $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$. Sia*

$$\pi : G \longrightarrow G/\ker(\varphi), \qquad \pi(x) = x\ker(\varphi),$$

la proiezione canonica sul quoziente. Allora esiste ed è unico un omomorfismo iniettivo

$$\widetilde{\varphi} : G/\ker(\varphi) \longrightarrow H$$

tale che $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$, ossia il diagramma



è commutativo. Inoltre $\widetilde{\varphi}$ è un isomorfismo se e solo se φ è suriettiva.

Dimostrazione: Definiamo $\widetilde{\varphi} : G/\ker\varphi \to H$ ponendo $\widetilde{\varphi}(x\ker\varphi) = \varphi(x)$ per ogni $x \in G$. Questa definizione è indipendente dal rappresentante per la Proposizione 5.1.14(i). L'applicazione è quindi ben definita ed è un omomorfismo, perché per $x, y \in G$ si ha

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}\big((x\ker\varphi)(y\ker\varphi)\big) &= \widetilde{\varphi}\big((xy)\ker\varphi\big)\\ &= \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \widetilde{\varphi}(x\ker\varphi)\,\widetilde{\varphi}(y\ker\varphi).\end{aligned}$$

Per costruzione $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$, giacché per ogni $x \in G$ vale

$$(\widetilde{\varphi} \circ \pi)(x) = \widetilde{\varphi}(x\ker\varphi) = \varphi(x).$$

Il nucleo di $\widetilde{\varphi}$ è costituito dalle classi $x\ker\varphi$ con $\varphi(x) = 1$, cioè precisamente $\{\ker\varphi\}$, quindi $\widetilde{\varphi}$ è iniettiva per la Proposizione 5.1.14(iii). Se $\psi : G/\ker\varphi \to H$ soddisfa $\psi \circ \pi = \varphi$, allora per ogni $x \in G$ si ha

$$\psi(x\ker\varphi) = \psi(\pi(x)) = \varphi(x) = \widetilde{\varphi}(\pi(x)) = \widetilde{\varphi}(x\ker\varphi);$$

poiché ogni elemento di $G/\ker\varphi$ è della forma $x\ker\varphi$, segue che $\psi = \widetilde{\varphi}$. Inoltre, dall'identità

$$\mathrm{Im}(\widetilde{\varphi}) = \{\widetilde{\varphi}(x\ker\varphi) \mid x \in G\} = \{\varphi(x) \mid x \in G\} = \mathrm{Im}(\varphi)$$

si deduce che $\widetilde{\varphi}$ è suriettiva se e solo se φ è suriettiva; in tal caso $\widetilde{\varphi}$ è un isomorfismo. □

Osservazione 5.2.2 Oltre al primo teorema di isomorfismo, ricordiamo che esiste anche il secondo, che enunciamo senza dimostrazione e senza farne uso nel seguito. Sia G un gruppo; siano $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$. Allora $HN = \{hn \mid h \in H,\ n \in N\}$ è un sottogruppo di G, vale $N \trianglelefteq HN$ e $H \cap N \trianglelefteq H$, e si ha un isomorfismo canonico

$$\frac{HN}{N} \cong \frac{H}{H \cap N}, \qquad hN \longmapsto h\,(H \cap N).$$

Corollario 5.2.3 *Siano G ed H gruppi e $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ un omomorfismo. Allora*

$$G/\ker(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi).$$

In particolare, se φ è suriettiva, allora $G/\ker(\varphi) \cong H$.

Dimostrazione: Immediato dal primo teorema di isomorfismo. □

Corollario 5.2.4 *Siano G ed H gruppi finiti e $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ un omomorfismo suriettivo. Allora $|\ker(\varphi)|$ e $|H|$ dividono $|G|$.*

Dimostrazione: Poiché $\ker(\varphi) \leq G$, per il Corollario 3.5.9 del teorema di Lagrange, $|\ker(\varphi)| \mid |G|$. Inoltre, dal primo teorema di isomorfismo si ha $H \cong G/\ker(\varphi)$, dunque

$$|H| = |G/\ker(\varphi)| = [G : \ker(\varphi)].$$

Per il teorema di Lagrange, $[G : \ker(\varphi)] \mid |G|$, quindi $|H| \mid |G|$. □

Esempio 5.2.5 Sia $\mathbb{K}$ un campo. Allora $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^*$. Consideriamo

$$\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*, \qquad A \mapsto \det(A).$$

Poiché $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, det è un omomorfismo. È suriettivo perché, per ogni $k \in \mathbb{K}^*$,

$$\det\big(\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, k)\big) = k.$$

Inoltre

$$\ker(\det) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) : \det(A) = 1\} = SL_n(\mathbb{K}).$$

Per il Primo teorema di isomorfismo,

$$GL_n(\mathbb{K})/\ker(\det) \cong \mathrm{Im}(\det) = \mathbb{K}^*.$$

Esempio 5.2.6 Per $n \geq 2$ si ha $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$. Consideriamo

$$\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2, \qquad \sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Poiché $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$, è un omomorfismo suriettivo (ad esempio, $\operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = 1$ e una trasposizione ha segno -1). Inoltre

$$\ker(\operatorname{sgn}) = \{\sigma \in S_n : \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\} = A_n.$$

Quindi, per il primo teorema di isomorfismo,

$$S_n/A_n = S_n/\ker(\operatorname{sgn}) \cong \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

Esempio 5.2.7 L'applicazione modulo

$$|\cdot| : (\mathbb{C}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot), \qquad z \longmapsto |z|.$$

definisce un omomorfismo suriettivo di gruppi (moltiplicativi), poiché $|zw| = |z||w|$ per ogni $z, w \in \mathbb{C}^*$. e dato $r \in \mathbb{R}^+$ e $|r| = r$. Il suo nucleo è

$$\ker(|\cdot|) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\} = S^1.$$

Per il *primo teorema di isomorfismo* otteniamo dunque

$$\mathbb{C}^*/\ker(|\cdot|) \;\cong\; \operatorname{Im}(|\cdot|) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{C}^*/S^1 \;\cong\; \mathbb{R}^+.$$

Osservazione 5.2.8 Per ogni omomorfismo $\varphi : G \to H$ si ha $\ker(\varphi) \trianglelefteq G$. Viceversa, se $N \trianglelefteq G$, la proiezione canonica

$$\pi_N : G \longrightarrow G/N, \qquad \pi_N(x) = xN,$$

è un omomorfismo con $\ker(\pi_N) = N$. Dunque

$$\{\ker(\varphi) \mid \varphi \in \operatorname{Hom}(G, H) \text{ per qualche } H\} = \{N \trianglelefteq G\}.$$

Vogliamo ora dimostrare il cosiddetto *teorema di corrispondenza per sottogruppi (normali)*.

Teorema 5.2.9 (il teorema di corrispondenza) *Siano G e H gruppi, e $\varphi \in \operatorname{Hom}(G, H)$. Allora:*

(a) *Se $K \leq G$, allora $\varphi(K) \leq H$.*
(b) *Se $K \trianglelefteq G$, allora $\varphi(K) \trianglelefteq \operatorname{Im}(\varphi)$.*
(c) *Se $L \leq H$, allora $\ker(\varphi) \leq \varphi^{-1}(L) \leq G$.*
(d) *Se $L \trianglelefteq H$, allora $\ker(\varphi) \leq \varphi^{-1}(L) \trianglelefteq G$.*

(e) *Per ogni* $K \leq G$ *vale* $\varphi^{-1}(\varphi(K)) = K\ \ker(\varphi)$.
(f) *Per ogni* $L \leq H$ *vale* $\varphi(\varphi^{-1}(L)) = L \cap \mathrm{Im}(\varphi)$.
Inoltre l'applicazione

$$\Phi:\ S = \{K \leq G \mid \ker(\varphi) \leq K\} \longrightarrow S' = \{L \leq \mathrm{Im}(\varphi)\},\ \Phi(K) = \varphi(K),$$

è una corrispondenza biunivoca; e induce una bigezione tra i sottogruppi normali.

Dimostrazione: Nel corso della dimostrazione useremo ripetutamente, senza segnalarlo ogni volta, il primo criterio di normalità (Proposizione 4.1.3), il criterio per i sottogruppi (Proposizione 3.1.12) e alcune le proprietà degli omomorfismi descritte in questo capitolo; il lettore è invitato a comprendere di volta in volta quale di tali strumenti sia in uso.

(a) Se $u = \varphi(x)$ e $v = \varphi(y)$ con $x, y \in K$, allora

$$u^{-1}v = \varphi(x)^{-1}\varphi(y) = \varphi(x^{-1}y) \in \varphi(K),$$

quindi $\varphi(K) \leq H$.

(b) Sia $u = \varphi(x) \in \mathrm{Im}(\varphi)$ e $v = \varphi(y) \in \varphi(K)$ con $x \in G$, $y \in K$. Allora

$$u^{-1}vu = \varphi(x)^{-1}\varphi(y)\varphi(x) = \varphi(x^{-1}yx) \in \varphi(K),$$

poiché $K \trianglelefteq G$ implica $x^{-1}yx \in K$. Dunque $\varphi(K) \trianglelefteq \mathrm{Im}(\varphi)$ per il primo criterio di normalità.

(c) Poiché $1 \in L$, abbiamo $1 \in \varphi^{-1}(L)$. Se $x, y \in \varphi^{-1}(L)$, allora

$$\varphi(x^{-1}y) = \varphi(x^{-1})\varphi(y) = \varphi(x)^{-1}\varphi(y) \in L,$$

quindi $x^{-1}y \in \varphi^{-1}(L)$ e $\varphi^{-1}(L) \leq G$. Inoltre $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{1\}) \leq \varphi^{-1}(L)$.

(d) Se $L \trianglelefteq H$ e $x \in G$, $y \in \varphi^{-1}(L)$, allora

$$\varphi(x^{-1}yx) = \varphi(x^{-1})\varphi(y)\varphi(x) = \varphi(x)^{-1}\varphi(y)\varphi(x) \in L,$$

da cui $x^{-1}yx \in \varphi^{-1}(L)$ e dunque $\varphi^{-1}(L) \trianglelefteq G$; inoltre $\ker(\varphi) \leq \varphi^{-1}(L)$ per (c).

(e) Per ogni $x \in K$ allora per la (ii) della Proposizione 5.1.14 si ha $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x\ \ker(\varphi)$. Quindi

$$\varphi^{-1}(\varphi(K)) = \bigcup_{x \in K} \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \bigcup_{x \in K} x\ \ker(\varphi) = K\ \ker(\varphi).$$

Se inoltre $\ker(\varphi) \leq K$, segue $\varphi^{-1}(\varphi(K)) = K$.

(f) Per definizione d'immagine e preimmagine,

$$\varphi(\varphi^{-1}(L)) \subseteq L \quad \text{e} \quad \varphi(\varphi^{-1}(L)) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi),$$

da cui $\varphi(\varphi^{-1}(L)) \subseteq L \cap \mathrm{Im}(\varphi)$. Viceversa, se $u \in L \cap \mathrm{Im}(\varphi)$, esiste $x \in G$ con $u = \varphi(x)$ e, poiché $u \in L$, abbiamo $x \in \varphi^{-1}(L)$; quindi $u = \varphi(x) \in \varphi(\varphi^{-1}(L))$.

Per la bigezione: la Φ è ben definita per il punto (a). Definiamo

$$\Psi : S' \to S, \qquad \Psi(L) = \varphi^{-1}(L).$$

Se $L \leq \mathrm{Im}(\varphi)$, allora per il punto (f), $\varphi(\Psi(L)) = \varphi(\varphi^{-1}(L)) = L$. Se $K \in S$, per il punto (e), $\Psi(\Phi(K)) = \varphi^{-1}(\varphi(K)) = K$. Dunque Φ e Ψ sono inversa l'una dell'altra; la restrizione ai normali è garantita da (b) e (d). □

Osservazione 5.2.10 In generale, se $K \trianglelefteq G$ e $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$, *non* è garantito che $\varphi(K) \trianglelefteq H$ (mentre, per la (b) del teorema di corrispondenza, vale sempre $\varphi(K) \trianglelefteq \mathrm{Im}(\varphi)$). Si consideri, ad esempio, l'omomorfismo $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to S_3$ definito ponendo $\varphi([0]_2) = \mathrm{id}_{S_3}$ e $\varphi([1]_2) = (1\,2)$. Allora $\mathbb{Z}_2 \trianglelefteq \mathbb{Z}_2$, ma (cfr. l'Osservazione 4.1.11)

$$\varphi(\mathbb{Z}_2) = \langle (1\,2) \rangle = \{\mathrm{id}, (1\,2)\} \not\trianglelefteq S_3.$$

Corollario 5.2.11 *Sia G un gruppo e $N \trianglelefteq G$, e sia $\pi_N \colon G \to G/N$ la proiezione canonica. Allora i sottogruppi sdi G/N sono esattamente quelli della forma*

$$\pi_N(H) = H/N,\ H \leq G,\ N \leq H.$$

Esempio 5.2.12 (sottogruppi di $\mathbb{Z}_m$) Dalla Proposizione 3.2.8, i sottogruppi di $\mathbb{Z}$ sono $n\mathbb{Z}$ per $n \in \mathbb{N}$. Quindi, per il corollario precedente, i sottogruppi di $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (cfr. Esempio 4.4.11) sono

$$n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \qquad \text{con} \qquad m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z} \iff n \mid m.$$

Tutti questi sottogruppi sono normali poiché $\mathbb{Z}_m$ è abeliano. Osserviamo che $n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ è un gruppo ciclico di ordine $\frac{m}{n}$. Infatti

$$n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \langle\, [n]_m \rangle = \{[0]_m, [n]_m, 2[n]_m, \ldots, (\frac{m}{n} - 1)[n]_m\}. \tag{5.1}$$

Per esempio i sottogruppi distinti di $\mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sono:

- $\{[0]_8\} = 8\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \langle [0]_8 \rangle$ (ordine 1);
- $\{[0]_8, [4]_8\} = 4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \langle [4]_8 \rangle$ (ordine 2);
- $\{[0]_8, [2]_8, [4]_8, [6]_8\} = 2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \langle [2]_8 \rangle$ (ordine 4);
- $\{[0]_8, [1]_8, [2]_8, [3]_8, [4]_8, [5]_8, [6]_8, [7]_8\} = 1\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \langle [1]_8 \rangle$ (ordine 8).

5.3 Il gruppo degli automorfismi

Definizione 5.3.1 *Sia G un gruppo. L'insieme degli endomorfismi di G è* $End(G) = \mathrm{Hom}(G, G)$.

Proposizione 5.3.2 *Per ogni gruppo G, $\big(End(G), \circ, \mathrm{id}_G\big)$ è un monoide.*

Dimostrazione: Se $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(G)$, allora

$$(\psi \circ \varphi)(xy) = \psi(\varphi(xy)) = \psi(\varphi(x)\varphi(y)) = (\psi \circ \varphi)(x)\,(\psi \circ \varphi)(y),$$

quindi $\psi \circ \varphi \in \mathrm{End}(G)$. L'associatività di $\circ$ è quella delle funzioni e id_G è elemento neutro. □

Definizione 5.3.3 *Sia G un gruppo. L'insieme degli automorfismi di G è*

$$Aut(G) = \{\varphi \in End(G) \mid \varphi \text{ è bigettiva}\}.$$

Proposizione 5.3.4 *Per ogni gruppo G, $\big(Aut(G), \circ, \mathrm{id}_G\big)$ è un gruppo.*

Dimostrazione: La composizione di automorfismi è un automorfismo; $\mathrm{id}_G \in \mathrm{Aut}(G)$; se $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, allora

$$\varphi^{-1}(xy) = \varphi^{-1}\big(\varphi(\varphi^{-1}(x))\,\varphi(\varphi^{-1}(y))\big) = \varphi^{-1}(x)\,\varphi^{-1}(y),$$

quindi $\varphi^{-1} \in \mathrm{End}(G)$ ed è bigettiva, dunque appartiene a $\mathrm{Aut}(G)$. □

Osservazione 5.3.5 Gli elementi invertibili del monoide $\mathrm{End}(G)$ (cfr. la Proposizione 1.3.11) sono precisamente gli automorfismi: $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{U}\big(\mathrm{End}(G)\big)$.

Studiare il gruppo degli automorfismi di un gruppo aiuta a ottenere informazioni sul gruppo stesso. Cominciamo mostrando che due gruppi isomorfi hanno gruppi degli automorfismi isomorfi.

Proposizione 5.3.6 *Se $G_1 \cong G_2$, allora* $\mathrm{Aut}(G_1) \cong \mathrm{Aut}(G_2)$.

Dimostrazione: Sia $\varphi : G_1 \to G_2$ un isomorfismo. Definiamo l'applicazione

$$\Phi : \mathrm{Aut}(G_1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_2), \qquad \Phi(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1},\ f \in \mathrm{Aut}(G_1).$$

Essa è ben definita: la composizione di omomorfismi bigettivi è ancora un omomorfismo bigettivo. Inoltre, per ogni $f_1, f_2 \in \mathrm{Aut}(G_1)$,

$$\Phi(f_1 \circ f_2) = \varphi \circ (f_1 \circ f_2) \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ f_2 \circ \varphi^{-1}) = \Phi(f_1) \circ \Phi(f_2),$$

quindi Φ è un omomorfismo di gruppi. Il fatto che F sia ottenuta per *coniugazione* è riassunto dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{f} & G_1 \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ G_2 & \xrightarrow[\Phi(f)]{} & G_2 \end{array}$$

Definiamo ora l'applicazione

$$\Psi : \mathrm{Aut}(G_2) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_1), \qquad \Psi = \varphi^{-1} \circ h \circ \varphi,\ h \in \mathrm{Aut}(G_2).$$

Anche Ψ è un omomorfismo e soddisfa

$$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Aut}(G_1)} \qquad \text{e} \qquad \Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Aut}(G_2)}.$$

Dunque Φ è un isomorfismo, come volevasi. □

Definizione 5.3.7 *Sia G un gruppo e $a \in G$. L'*applicazione di coniugio *relativa ad a è*

$$\varphi_a : G \longrightarrow G, \qquad \varphi_a(x) = a^{-1}xa,\ x \in G.$$

Lemma 5.3.8 *Per ogni $a \in G$, l'applicazione di coniugio φ_a è un automorfismo di G.*

Dimostrazione: Per $x, y \in G$ si ha

$$\varphi_a(xy) = a^{-1}(xy)a = (a^{-1}xa)(a^{-1}ya) = \varphi_a(x)\,\varphi_a(y),$$

dunque φ_a è un endomorfismo. Inoltre $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$, quindi φ_a è bigettiva. □

Definizione 5.3.9 *Sia G un gruppo. Il sottogruppo degli* automorfismi interni *di G è*

$$\mathrm{Inn}(G) = \{\varphi_a \mid a \in G\} \subseteq \mathrm{Aut}(G).$$

Proposizione 5.3.10 *Per ogni gruppo G si ha* $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$ *e*

$$\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G).$$

Dimostrazione: Per $a \in G$ poniamo $\varphi_a(x) = a^{-1}xa$. Allora $\varphi_1 = \mathrm{id}_G$ e, per $a, b \in G$,

$$(\varphi_a \circ \varphi_b)(x) = a^{-1}\big(b^{-1}xb\big)a = (ba)^{-1}x(ba) = \varphi_{ba}(x),$$

da cui $\mathrm{Inn}(G)$ è chiuso per composizione; inoltre $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$, quindi $\mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$ in quanto son soddisfatte la (S1) e la (S2) della Definizione 3.1.1 di sottogruppo. Per ogni $f \in \mathrm{Aut}(G)$ e $a \in G$ si ha

$$(f^{-1} \circ \varphi_a \circ f)(x) = f^{-1}\big(a^{-1} f(x) a\big) = \big(f^{-1}(a)\big)^{-1} x\, f^{-1}(a) = \varphi_{f^{-1}(a)}(x) \in \mathrm{Inn}(G),$$

quindi $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$ per il primo criterio di normalità. Consideriamo ora $\Phi : G \to \mathrm{Inn}(G)$ definita da $\Phi(a) = \varphi_{a^{-1}}$. Per $a, b \in G$ si ha

$$\Phi(ab) = \varphi_{(ab)^{-1}} = \varphi_{b^{-1}a^{-1}} = \varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_{b^{-1}} = \Phi(a) \circ \Phi(b),$$

perciò Φ è un omomorfismo, ed è suriettivo perché $\Phi(a^{-1}) = \varphi_a$. Il nucleo è

$$\begin{aligned} \ker(\Phi) &= \{\, a \in G \mid \varphi_{a^{-1}} = \mathrm{id}_G \,\} = \{\, a \in G \mid a^{-1} x a = x \,, \forall x \in G\} \\ &= \{\, a \in G \mid ax = xa \,, \forall x \in G\} = Z(G). \end{aligned}$$

Per il Corollario 5.2.3 del primo teorema di isomorfismo segue $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$, come volevasi. □

Osservazione 5.3.11 Poiché $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$, possiamo definere il quoziente

$$\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\,\mathrm{Inn}(G),$$

detto *gruppo degli automorfismi esterni* di G, che misura quanto gli automorfismi di G si discostino da quelli interni. Non useremo questo gruppo in questo corso.

5.4 Il teorema di Cayley

Vogliamo mostrare che ogni gruppo è isomorfo a un sottogruppo di un gruppo di permutazioni; questo è il contenuto del seguente teorema.

Teorema 5.4.1 (Cayley) *Sia G un gruppo. Allora esistono un insieme non vuoto X e un sottogruppo $H \leq S_X$ (dove S_X denota il gruppo delle permutazioni di X) tali che $G \cong H$. In particolare, se $|G| = n < \infty$, allora esiste $H \leq S_n$ tale che $G \cong H$.*

Dimostrazione: Poniamo $X = G$ come insieme e, per ogni $x \in G$, definiamo la *traslazione a sinistra*

$$L_x : G \to G, \qquad L_x(y) = xy.$$

Ogni L_x è bigettiva, con inversa $L_{x^{-1}}$, dunque $L_x \in S_X$. Definiamo quindi

$$L : G \longrightarrow S_G, \qquad L(x) = L_x.$$

Per $x_1, x_2, y \in G$ si ha

$$L(x_1x_2)(y) = (x_1x_2)y = x_1(x_2y) = (L_{x_1} \circ L_{x_2})(y),$$

cioè $L(x_1x_2) = L(x_1) \circ L(x_2)$: dunque L è un omomorfismo.

Inoltre

$$\ker(L) = \{x \in G : \ L_x = \mathrm{id}_G\} = \{1\},$$

come si deduce immediatamente. Per cui $\ker(L) = \{1\}$ e L è iniettivo per la Proposizione 5.1.14(iii). Posto $H := Im(L)$, concludiamo, usando il primo teorema di isomorfismo e da (i) del teorema di corrispondenza, che $G \cong H \leq S_X$. Se $|G| = n$, identificando G con $\{1, \ldots, n\}$ otteniamo $S_G \cong S_n$ e quindi $H \leq S_n$. □

In effetti, ogni gruppo finito di ordine n è (a meno di isomorfismi) un gruppo di matrici, come espresso dal seguente:

Teorema 5.4.2 *Sia G un gruppo finito con $|G| = n$. Per ogni campo $\mathbb{K}$ esiste $H \leq GL_n(\mathbb{K})$ tale che $G \cong H$.*

Dimostrazione: Definiamo l'applicazione

$$\Phi : S_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{K}^n), \qquad \sigma \longmapsto f_\sigma,$$

dove $\mathrm{Aut}(\mathbb{K}^n)$ denota il gruppo (per composizione) degli automorfismi $\mathbb{K}$-lineari dello spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ (cioè le applicazioni lineari biiettive $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$) e stiamo definendo

$$f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

dove $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica. Per il teorema fondamentale delle applicazioni lineari esiste ed è unica una applicazione lineare che manda i vettori di una base nelle immagini prescritte; dunque f_σ è ben definita. Inoltre f_σ è un isomorfismo lineare perché $\{e_{\sigma(i)}\}_{i=1}^n$ è ancora una base. Mostriamo che Φ è un omomorfismo: per $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ e per ogni i,

$$\Phi(\sigma_1 \circ \sigma_2)(e_i) = e_{(\sigma_1 \circ \sigma_2)(i)} = e_{\sigma_1(\sigma_2(i))} = \Phi(\sigma_1)\big(\Phi(\sigma_2)(e_i)\big),$$

quindi $\Phi(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \Phi(\sigma_1) \circ \Phi(\sigma_2)$. Inoltre Φ è iniettiva. Infatti se $\Phi(\sigma) = f_\sigma = \mathrm{id}$, allora $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} = e_i$ per ogni i, cioè $\sigma = \mathrm{id}$ e l'iniettività di Φ segue dalla Proposizione 5.1.14(iii). Consideriamo ora l'applicazione

$$\Psi : \mathrm{Aut}(\mathbb{K}^n) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K}), \qquad \Psi(f) = M_{\mathcal{B}}(f),$$

che associa a f la sua matrice nella base canonica $\mathcal{B}$. L'applicazione Ψ è un isomorfismo di gruppi (rispetta la composizione, che diventa prodotto di matrici, ed è biiettivo). Ora per il teorema di Cayley esiste un omomorfismo iniettivo $L : G \to S_n$ e quindi ponendo

$$F := \Psi \circ \Phi \circ L : \ G \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$$

otteniamo un omomorfismo iniettivo. Posto $H := Im(G)$, segue dal primo teorema di isomorfismo e da (i) del teorema di corrispondenza che: $G \cong H \leq GL_n(\mathbb{K})$. Il tutto si riassume nel diagramma:

$$G \overset{L}{\hookrightarrow} S_n \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Aut}(\mathbb{K}^n) \xrightarrow{\Psi} GL_n(\mathbb{K}), \qquad G \xrightarrow{F} GL_n(\mathbb{K})$$

□

Osservazione 5.4.3 Sia $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$ e, per $\sigma \in S_n$, sia $f_\sigma : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definita da $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Allora la matrice $M_{\mathcal{B}}(f_\sigma)$ è chiamata la *matrice associata alla permutazione* σ e vale

$$\det M_{\mathcal{B}}(f_\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma).$$

Infatti $M_{\mathcal{B}}(f_\sigma)$ si ottiene dalla matrice identità I_n permutando le colonne secondo σ, cioè scambiando coppie di colonne un certo numero di volte. Poiché ogni scambio di due colonne moltiplica il determinante per -1, se σ si scrive come prodotto di t trasposizioni, allora

$$\det M_{\mathcal{B}}(f_\sigma) = (-1)^t = \mathrm{sgn}(\sigma).$$

5.5 Esercizi

Esercizio 5.1 Sia G l'insieme $\{\mathbb{R} \mid x \neq -1\}$ con l'operazione $x \cdot y = x + y + xy$. Dimostrare che $f(x) = x - 1$ é un isomorfismo tra $\mathbb{R}^*$ e G.

Esercizio 5.2 Dimostrare i seguenti fatti.

1. Il gruppo $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ é isomorfo al gruppo $(S^1, \cdot)$, dove S^1 é l'insieme dei numeri complessi di modulo unitario;

2. Sia $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$, $n > 1$ l'insieme delle radici n-esime dell'unitá. Allora U_n é un sottogruppo di S^1 isomorfo a $\mathbb{Z}_n$;

3. Sia $u \in U_n$, $n \geq 3$ e $u \neq 1$ e siano $r, s \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*)$ definiti come $r(z) = uz$ e $s(z) = \bar{z}$ per ogni $z \in \mathbb{C}^*$. Dimostrare che il gruppo diedrale D_n é isomorfo al sottogruppo di $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*)$ generato da r e s.

Esercizio 5.3 Sia $S^3 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\}$ e sia

$$\cdot : S^3 \times S^3 \to S^3, ((\alpha, \beta), (\gamma, \delta)) \mapsto (\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) = \left(\alpha\gamma - \beta\bar{\delta}, \alpha\delta + \beta\bar{\gamma}\right).$$

1. Dimostrare che $(S^3, \cdot)$ é un gruppo non abeliano;
2. Dimostrare che
$$SU(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1 \right\}$$
é un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{C})$ isomorfo a $(S^3, \cdot)$.

Esercizio 5.4 Dimostrare che $\mathbb{Z}$ non é isomorfo a $\mathbb{Q}$.

Esercizio 5.5 Dimostrare che:

- $(\mathbb{Q}, +)$ non è isomorfo a $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$;
- $(\mathbb{R}, +)$ non è isomorfo a $(\mathbb{R}^*, \cdot)$;
- $(\mathbb{R}, +)$ é isomorfo a $(\mathbb{R}^+, \cdot)$;
- $(\mathbb{Q}, +)$ non é isomorfo a $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$.

Esercizio 5.6 Dedurre dagli Esercizi 4.8, 4.9 e 4.10 che:

1. $\mathrm{Inn}(S_n) \cong S_n$, per $n \geq 3$ e $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathrm{Inn}(S_3) \cong S_3$ (Curiositá: in generale si dimostra che $\mathrm{Aut}(S_n) \cong S_n$ per $n \neq 2, 6$. Per maggiori informazioni, consulta la pagina di Wikipedia su *Automorphisms of the symmetric and alternating groups*).
2. $\mathrm{Inn}(A_n) \cong A_n$, per $n \geq 3$.
3. $\mathrm{Inn}(D_n) \cong D_n$, se n é dispari.

Esercizio 5.7 Siano G e H due gruppi e sia X un insieme di generatori di G. Se per ogni coppia di omomorfismi $f, g : G \to H$ si ha che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in X$, si dimostri che $f = g$.

Esercizio 5.8 Siano G e H gruppi finiti e $\varphi : G \to H$ un omomorfismo. Si dimostri che:

1. per ogni $x \in G$ si ha che $o(\varphi(x))$ divide $o(x)$;
2. se $o(\varphi(x)) = o(x)$ per ogni $x \in G$, allora φ é iniettivo;
3. si deduca che se φ è un isomorfismo allora per ogni $x \in G$ si ha $o(x) = o(\varphi(x))$.

Si deduca infine da (1) che se N é un sottogruppo normale di un gruppo G allora $o(xN)$ divide $o(x)$, per ogni $x \in G$.

Esercizio 5.9 Sia $\langle \pi \rangle$ il sottogruppo di $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ generato da π. Dimostrare che nel quoziente $\mathbb{R}^*/\langle \pi \rangle$ ci sono $\phi(n)$ elementi di ordine n se n é dispari e $2\phi(n)$ elementi di ordine n se n é pari, dove $\phi(n)$ é la funzione di Eulero. (Suggerimento: poniamo $N = \langle \pi \rangle$ e sia $xN \in \mathbb{R}^*/N$ un elemento di ordine n. Allora $x^n = \pi^m$, per un certo numero naturale m. Dimostrare che si puó supporre $m < n$ e che m non divide n).

Esercizio 5.10 Mostrare che il sottogruppo

$$\langle (1\,3),\ (1\,2\,3\,4) \rangle \ \leq \ S_4$$

è isomorfo al gruppo diedrale D_4. Deducere quindi che S_4 non è generato da $(1\,3)$ e $(1\,2\,3\,4)$ (cfr. Esercizio 3.9, Cap. 3).

Curiosità. In generale, S_n è generato da una trasposizione $(a\,b)$ e dal ciclo $(1\,2 \cdots n)$ se e solo se $(b - a, n) = 1$.

Capitolo 6

Prodotto diretto di gruppi

6.1 Prodotto diretto di gruppi

Si verifica facilmente che, dati $H = (H, \cdot, 1_H), K = (K, \cdot, 1_K)$ due gruppi, definendo su $H \times K$ l'operazione

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) := (h_1 \cdot h_2,\ k_1 \cdot k_2), \tag{6.1}$$

$H \times K$ è un gruppo con elemento neutro $(1_H, 1_K)$ e inverso $(h, k)^{-1} = (h^{-1}, k^{-1})$.

Definizione 6.1.1 *Siano H, K gruppi. Il* prodotto diretto *di tali gruppi è il gruppo $(H \times K, \cdot, (1_H, 1_K))$.*

Osservazione 6.1.2 Dalla definizione è immediato dedurre che se H e K sono gruppi, allora il prodotto diretto $H \times K$ è abeliano se e solo se lo sono entrambi i fattori.

Lemma 6.1.3 *Siano H, K gruppi e siano inoltre H_1, H_2, H_3, K_1, K_2 gruppi. Allora valgono:*

- *(i)* $H \times K \cong K \times H$;
- *(ii)* $H_1 \cong H_2,\ K_1 \cong K_2 \Rightarrow H_1 \times K_1 \cong H_2 \times K_2$;
- *(iii)* $(H_1 \times H_2) \times H_3 \cong H_1 \times (H_2 \times H_3)$.

Dimostrazione: Indichiamo gli isomorfismi canonici, lasciando al lettore le (immediate) verifiche.

(i) Definiamo

$$\begin{aligned} \tau : H \times K &\longrightarrow K \times H, \\ (h, k) &\longmapsto (k, h). \end{aligned}$$

τ è un isomorfismo con inversa $\tau^{-1} = \tau$.

(ii) Prese $\varphi_1 \in \mathrm{Iso}(H_1, H_2)$ e $\varphi_2 \in \mathrm{Iso}(K_1, K_2)$, poniamo

$$\begin{aligned} \varphi_1 \times \varphi_2 :\ H_1 \times K_1 &\longrightarrow H_2 \times K_2, \\ (h,k) &\longmapsto \big(\varphi_1(h),\, \varphi_2(k)\big). \end{aligned}$$

Si ha $(\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1} = \varphi_1^{-1} \times \varphi_2^{-1}$.

(iii) Definiamo

$$\begin{aligned} \alpha :\ (H_1 \times H_2) \times H_3 &\longrightarrow H_1 \times (H_2 \times H_3), \\ \big((u,v),w\big) &\longmapsto \big(u,(v,w)\big). \end{aligned}$$

L'inversa è

$$\alpha^{-1} :\ H_1 \times (H_2 \times H_3) \longrightarrow (H_1 \times H_2) \times H_3, \qquad \big(u,(v,w)\big) \longmapsto \big((u,v),w\big).$$

In ciascun caso la biiettività e la compatibilità con le operazioni si verificano direttamente. □

Proposizione 6.1.4 *Siano H, K due gruppi e sia $H \times K$ il loro prodotto diretto. Siano $x \in H$, $y \in K$ e $z = (x,y) \in H \times K$. Allora:*

(i) $o(z)$ è finito se e solo se $o(x)$ e $o(y)$ sono finiti;

(ii) se $o(x)$ e $o(y)$ sono finiti, allora

$$o(z) = [o(x), o(y)] = \mathrm{m.\,c.\,m.}\,\big(o(x), o(y)\big).$$

Dimostrazione: *(i)* Se $o(z)$ è finito, allora

$$1_{H\times K} = z^{o(z)} = (x,y)^{o(z)} = (x^{o(z)}, y^{o(z)}),$$

da cui $x^{o(z)} = 1$ e $y^{o(z)} = 1_K$, quindi x e y hanno ordine finito. Viceversa, se $m = o(x)$ e $n = o(y)$ sono finiti, allora

$$z^{mn} = (x,y)^{mn} = (x^{mn}, y^{mn}) = \big((x^m)^n, (y^n)^m\big) = (1_H, 1_K),$$

perciò $o(z)$ è finito.

(ii) Poniamo $m = o(x)$ e $n = o(y)$. Per (i) $o(z)$ è finito; inoltre dalla prima parte segue che $x^{o(z)} = 1_H$ e $y^{o(z)} = 1_K$, quindi per la Proposizione 1.3.33 $m \mid o(z)$ e $n \mid o(z)$, ossia $[m,n] \mid o(z)$. D'altra parte, poiché $m \mid [m,n]$ e $n \mid [m,n]$,

$$z^{[m,n]} = (x^{[m,n]}, y^{[m,n]}) = (1_H, 1_K),$$

e ancora per la Proposizione 1.3.33 otteniamo $o(z) \mid [m,n]$. Concludiamo dunque $o(z) = [m,n]$. □

Definizione 6.1.5 *Siano H, K gruppi. Le applicazioni $p_1\colon H \times K \to H$ e $p_2\colon H \times K \to K$, definite per ogni $(h,k) \in H \times K$ da*

$$p_1(h,k) = h, \qquad p_2(h,k) = k,$$

si chiamano rispettivamente proiezione sul primo *e* sul secondo fattore.

Proposizione 6.1.6 *Siano H, K gruppi. Allora le proiezioni p_1, p_2 sono omomorfismi sureittivi di gruppi e*

$$\ker(p_1) = \{1_H\} \times K \cong K, \qquad \ker(p_2) = H \times \{1_K\} \cong H.$$

Valgono inoltre:

(a) $H \times \{1_K\},\ \{1_H\} \times K \trianglelefteq H \times K$;

(b) $(H \times K)/(\{1_H\} \times K) \simeq H$ *e* $(H \times K)/(H \times \{1_K\}) \simeq K$;

(c) $(H \times \{1_K\}) \cap (\{1_H\} \times K) = \{1_{H\times K}\}$;

(d) $H \times K = (H \times \{1_K\})(\{1_H\} \times K) = (\{1_H\} \times K)(H \times \{1_K\})$;

(e) per ogni $h \in H$ e per ogni $k \in K$ si ha

$$(h, 1_K)(1_H, k) = (1_H, k)(h, 1_K).$$

In particolare, $H \times K$ è il prodotto diretto dei sottogruppi normali $H \times \{1_K\}$ e $\{1_H\} \times K$.

Dimostrazione: Per ogni $(h_1,k_1), (h_2,k_2) \in H \times K$ si ha

$$p_1\big((h_1,k_1)(h_2,k_2)\big) = p_1(h_1h_2, k_1k_2) = h_1h_2 = p_1(h_1,k_1)\, p_1(h_2,k_2),$$

e in modo del tutto analogo per p_2; dunque p_1 e p_2 sono omomorfismi.

Inoltre

$$\ker(p_1) = \{(h,k) \in H \times K :\ h = 1_H\} = \{1_H\} \times K,$$

$$\ker(p_2) = \{(h,k) \in H \times K :\ k = 1_K\} = H \times \{1_K\},$$

da cui gli isomorfismi indicati.

(a) Essendo kernel di omomorfismi, $H \times \{1_K\} = \ker(p_2)$ e $\{1_H\} \times K = \ker(p_1)$ sono normali in $H \times K$ (Prop. 5.1.13).

(b) segue dal Primo teorema di isomorfismo.

(c) Se $(h,k) \in (H \times \{1_K\}) \cap (\{1_H\} \times K)$, allora $k = 1_K$ e $h = 1_H$, quindi

$$(h,k) = (1_H, 1_K) = 1_{H\times K}.$$

(d), (e) Per ogni $(h,k) \in H \times K$,

$$(h,k) = (h,1_K)(1_H,k) = (1_H,k)(h,1_K) \in (H \times \{1_K\})(\{1_H\} \times K) = (\{1_H\} \times K)(H \times \{1_K\}),$$

da cui seguono la (d) e la (e). □

Osservazione 6.1.7 La struttura di gruppo su $H \times K$ è l'unica che rende le proiezioni omomorfismi. Infatti, se $\odot$ è un'operazione che fa di $H \times K$ un gruppo e p_1, p_2 sono omomorfismi verso H e K, allora per ogni $(h_1,k_1), (h_2,k_2) \in H \times K$,

$$p_1\big((h_1,k_1) \odot (h_2,k_2)\big) = p_1(h_1,k_1)p_2(h_2,k_2) = h_1h_2$$

$$p_2\big((h_1,k_1) \odot (h_2,k_2)\big) = p_1(h_1,k_1)p_2(h_2,k_2) = k_1k_2,$$

e quindi necessariamente

$$(h_1,k_1) \odot (h_2,k_2) = \big(h_1h_2,\ k_1k_2\big),$$

ossia $\odot$ coincide con la moltiplicazione del prodotto diretto (cfr. (6.1)).

Vale anche una sorta di viceversa della Proposizione 6.1.6.

Teorema 6.1.8 (teorema prodotto) *Sia G un gruppo e siano $H, K \trianglelefteq G$ tali che*

(i) $H \cap K = \{1\}$;

(ii) $HK = G$.

Allora $G \cong H \times K$.

Dimostrazione: Consideriamo

$$f\colon H \times K \longrightarrow G, \qquad f(h,k) = hk.$$

Osserviamo anzitutto che, per $h \in H$ e $k \in K$, poiché K è normale in G si ha $hkh^{-1} \in K$, e poiché H è normale si ha $khk^{-1} \in H$. Ne segue che il commutatore $[h,k] = hkh^{-1}k^{-1}$ appartiene sia a H sia a K, dunque a $H \cap K = \{1\}$; quindi

$$hk = kh, \forall h \in H, \forall k \in K. \tag{6.2}$$

Mostriamo che f é un isomorfismo di gruppi. Verifichiamo prima che f è un omomorfismo. Per $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$, usando la (6.2),

$$\begin{aligned} f\big((h_1,k_1)(h_2,k_2)\big) &= f(h_1h_2, k_1k_2) = (h_1h_2)(k_1k_2) \\ &= h_1(k_1h_2)k_2 = (h_1k_1)(h_2k_2) = f(h_1,k_1)f(h_2,k_2). \end{aligned}$$

Per mostrare che f sia iniettiva, siano $h \in H$ and $k \in K$ tali che $f(h,k) = 1$. Allora $hk = 1$ e quindi $h = k^{-1} \in H \cap K = \{1\}$. Segue che $h = 1$ e $k = 1$, cioè $\ker f = \{(1,1)\}$ e l'iniettività di f segue dalla Proposizione 5.1.14(iii). Infine, per dimostrare che f è suriettiva, sia $x \in G$. Per la (ii) $x = hk$ con $h \in H, k \in K$ e dunque $x = hk = f(h,k)$. □

Teorema 6.1.9 (teorema numerico) *Siano G un gruppo finito ed $H, K \trianglelefteq G$ con $|H| = m$ e $|K| = n$ tali che*

(i) $(m,n) = 1$;

(ii) $|G| = mn$.

Allora $G \cong H \times K$.

Dimostrazione: Sia $l = |H \cap K|$. Essendo $H \cap K \leq H$ e $H \cap K \leq K$, per Lagrange $l \mid m$ e $l \mid n$; dall'ipotesi $(m,n) = 1$ segue $l = 1$, dunque $H \cap K = \{1\}$.

Mostriamo l'uguaglianza $HK = G$. Poiché H e K sono normali, HK è un sottogruppo di G (cfr. Proposizione 4.2.1). Sia $s = |HK|$. Avendo $H, K \leq HK \leq G$, ancora per Lagrange $m \mid s$ e $n \mid s$; quindi m.c.m.$(m,n) = mn \mid s$. Inoltre $s \mid |G| = mn$. Ne segue $mn \leq s \leq mn$, cioè $s = mn$ e pertanto $HK = G$. Dalle due proprietà $H \cap K = \{1\}$ e $HK = G$, per il teorema prodotto si ottiene $G \simeq H \times K$. □

Poichè in un gruppo abeliano i suoi sottogruppi sono normali otteniamo i seguenti due corollari del teorema prodotto e del teorema numerico rispettivamente.

Corollario 6.1.10 (caso abeliano del teorema del prodotto) *Sia $G = (G, +, 0)$ un gruppo abeliano e $H, K \leq G$ tali che*

(i) $H \cap K = \{0\}$;

(ii) $H + K = G$.

Allora $G \cong H \times K$.

Corollario 6.1.11 (caso abeliano del teorema numerico) *Sia $G = (G, +, 0)$ un gruppo abeliano finito e siano $H, K \leq G$ con $|H| = m$ e $|K| = n$ tali che*

(i) $(m, n) = 1$;

(ii) $|G| = mn$.

Allora $G \cong H \times K$.

Esempio 6.1.12 Siano $G = \mathbb{Z}_6$, $H = \langle [2]_6 \rangle$ e $K = \langle [3]_6 \rangle$. Allora $H, K \trianglelefteq \mathbb{Z}_6$, inoltre $m = |H| = o([2]_6) = 3$ ed $n = |K| = o([3]_6) = 2$, quindi $|\mathbb{Z}_6| = mn$ ed $(m, n) = 1$. Conseguentemente per il teorema numerico si ha $\mathbb{Z}_6 \cong H \times \mathbb{K} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ (cfr. Esempio 5.1.7).

Osservazione 6.1.13 Nel teorema numerico, l'ipotesi che le cardinalità di H e K siano coprime non puó essere trascurata. Ad esempio, consideriamo $G = \mathbb{Z}_8$, $H = \langle [2]_8 \rangle$ e $K = \langle [4]_8 \rangle$. Allora $H, K \trianglelefteq G$, inoltre $m = |H| = o([2]_8) = 4$ ed $n = |K| = o([4]_8) = 2$, quindi $|G| = mn$ ed $(m, n) \neq 1$. Ma $\mathbb{Z}_8 \ncong H \times K$, ad esempio perché in tale prodotto diretto non é presente alcun elemento di ordine 8. Chiaramente, il controesempio può essere reinterpretato anche nel contesto del *teorema prodotto*, infatti si ha $H \cap K = \{[0]_8, [4]_8\}$, quindi i due sottogruppi normali hanno intersezione non banale.

Osservazione 6.1.14 Nel teorema numerico, l'ipotesi che H e K siano sottogruppi normali di G non può essere trascurata. Ad esempio, consideriamo $G = S_3$, $H = \langle (1\,2) \rangle$ e $K = \langle (1\,2\,3) \rangle$. Allora $m = |H| = o((1\,2)) = 2$ ed $n = |K| = o((1\,2\,3)) = 3$, quindi $|G| = mn$ ed $(m, n) = 1$, ma $H \ntrianglelefteq G$. Ma $S_3 \ncong H \times K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, ad esempio perché il primo non é abeliano ed il secondo si. Chiaramente, il controesempio puó essere reinterpretato anche nel contesto del *teorema prodotto*.

6.2 Classificazione di alcuni gruppi finiti

In questa sezione raccogliamo alcuni risultati elementari di classificazione per gruppi finiti di piccola cardinalità e alcuni casi di *gruppi speciali*. In particolare determineremo tutti i gruppi di ordine 4, 6, p^2 (con p primo) e tratteremo anche la famiglia di ordine $2p$ (con p primo dispari).

Classificazione dei gruppi di ordine 4

Lemma 6.2.1 *Sia G un gruppo in cui tutti gli elementi diversi da* 1 *hanno ordine* 2*. Allora G è abeliano.*

Dimostrazione: Se $x \in G \setminus \{1\}$ allora $x^{-1} = x$; lo stesso vale per $x = 1$, dunque per ogni $x \in G$ si ha $x^{-1} = x$. Per $x, y \in G$,

$$(xy)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx,$$

quindi G è abeliano. □

Proposizione 6.2.2 *Sia G un gruppo di ordine* 4*. Allora*

$$G \cong \mathbb{Z}_4 \qquad \textit{oppure} \qquad G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Dimostrazione: Distinguiamo due casi.

Se esiste $x \in G$ con $o(x) = 4$, allora $G = \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_4$ (cfr. Esempio 5.1.7). Se non esiste alcun elemento di ordine 4, allora ogni $x \in G \setminus \{1\}$ ha ordine 2 e, per il lemma, G è abeliano. Sia $a \in G \setminus \{1\}$ e scelga $b \in G \setminus \langle a \rangle$ (esiste poiché $|G| = 4$ e $|\langle a \rangle| = 2$). Allora:

- $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle \trianglelefteq G$ (perché G è abeliano);
- $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\}$ (infatti $\langle a \rangle = \{1, a\}$ e $\langle b \rangle = \{1, b\}$ con $a \neq b$);
- $\langle a \rangle \langle b \rangle = \{1, a, b, ab\} = G$, poiché i quattro elementi sono distinti: se $ab = 1$ allora $b = a^{-1} = a$; se $ab = a$ allora $b = 1$; se $ab = b$ allora $a = 1$.

Per il teorema prodotto segue $G \cong \langle a \rangle \times \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. □

Classificazione dei gruppi di ordine 6

Proposizione 6.2.3 *Sia G un gruppo di ordine* 6*. Allora $G \cong \mathbb{Z}_6$ oppure $G \cong S_3$.*

Dimostrazione: Distinguiamo due casi. Se esiste $x \in G$ con $o(x) = 6$, allora $G = \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_6$ (cfr. Esempio 5.1.7). Se invece nessun elemento ha ordine 6, allora per ogni $x \neq 1$ vale $o(x) \in \{2, 3\}$. Esiste un elemento di ordine 3: infatti, se tutti i non banali avessero ordine 2, per il Lemma 6.2.1, G sarebbe abeliano e, scegliendo $x \neq 1$ e $y \notin \langle x \rangle$, il sottogruppo $\{1, x, y, xy\}$ avrebbe ordine 4, assurdo poiché $4 \nmid 6$ (per il Teorema di Lagrange). Dall'Esercizio 1.7(3) in un gruppo di ordine pari esiste un elemento di ordine 2. Siano dunque $a, b \in G$ con $o(a) = 2$ e $o(b) = 3$. Se G fosse abeliano, allora per

il Teorema numerico $G \cong \langle a \rangle \times \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$, contro l'ipotesi (l'isomoefismo segue dal fatto che $([1]_2, [1]_3) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ha ordine 6); quindi $ab \neq ba$. Gli elementi $1, a, b, b^2, ab, ab^2$ sono distinti. Infatti $1, a, b, b^2$ lo sono perché $o(a) = 2 \neq 3 = o(b)$ e $b \neq b^2$; inoltre non può valere nessuna tra $ab \in \{1, a, b, b^2\}$ o $ab^2 \in \{1, a, b, b^2\}$, che implicherebbero rispettivamente $b = a$, $b = 1$, $a = 1$, $a = b$ oppure $a = b$, $b^2 = 1$, $a = b^2$, $a = 1$, tutte impossibili. Dunque $G = \{1, a, b, b^2, ab, ab^2\}$. Inoltre $ba \notin \{1, a, b, b^2\}$ e, non potendo valere $ba = ab$ (altrimenti G sarebbe abeliano), segue $ba = ab^2$. Definiamo

$$\varphi \colon G \to S_3, \qquad a \mapsto (12),\ b \mapsto (123).$$

Si verifica facilmente che φ è un omomorfismo suriettivo; essendo $|G| = |S_3| = 6$, risulta bijettivo e quindi un isomorfismo. Dunque $G \cong S_3$. □

Sfruttando il risultato precedente, vogliamo ora mostrare che non vale il viceversa del teorema di Lagrange (cfr. Osservazione 3.5.8).

Corollario 6.2.4 *In A_4 non esiste alcun sottogruppo di ordine 6, sebbene $6 \mid |A_4| = 12$.*

Dimostrazione: Gli elementi di A_4 sono l'identità; gli otto 3-cicli

$$(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243),$$

e le tre doppie trasposizioni

$$a = (12)(34), \quad b = (13)(24), \quad c = (14)(23).$$

Per calcolo diretto $ab = ba = c$, $ac = ca = b$ e $bc = cb = a$; in particolare $\{1, a, b, c\}$ è un sottogruppo di ordine 4 (isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$). Supponiamo per assurdo che esista $H \leq A_4$ con $|H| = 6$. Per la classificazione dei gruppi di ordine 6 si avrebbe $H \cong \mathbb{Z}_6$ oppure $H \cong S_3$. Il primo caso è impossibile perché in A_4 non ci sono elementi di ordine 6 (solo 3-cicli e doppie trasposizioni). Nel secondo caso, poiché in S_3 ci sono tre elementi di ordine 2, dovremmo avere $a, b, c \in H$, dunque $\{1, a, b, c\} \leq H$, in contraddizione con Lagrange perché $4 \nmid |H| = 6$. Quindi non esiste alcun sottogruppo di ordine 6 in A_4. □

Classificazione dei gruppi di ordine p^2

Teorema 6.2.5 *Sia G un gruppo con $|G| = p^2$, dove p è primo. Allora*

$$G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \qquad \textit{oppure} \qquad G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p.$$

Dimostrazione: Se esiste $x \in G \setminus \{1\}$ di ordine p^2, allora $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ (cfr. Esempio 5.1.7). Supponiamo dunque che *nessun* elemento di $G \setminus \{1\}$ abbia ordine p^2. Per il teorema di Lagrange ne segue che ogni $x \in G \setminus \{1\}$ ha ordine p. Sia $a \in G \setminus \{1\}$ e poniamo $H = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_p$. Mostriamo che $H \trianglelefteq G$. Se per assurdo $H \not\trianglelefteq G$, allora per la Proposizione 4.1.6(iii), esiste $x \in G$ tale che

$$H^x = x^{-1}Hx \neq H.$$

Allora $H^x \cap H < H$; infatti, se per assurdo $H^x \cap H = H$, si avrebbe $H \subseteq H^x$ e, poiché l'applicazione $H \to H^x$, $h \mapsto x^{-1}hx$, è una bigezione, si avrebbe $|H| = |H^x|$ e dunque $H^x = H$, una contraddizione. Per Lagrange $|H^x \cap H| \mid |H| = p$, quindi $|H^x \cap H| \in \{1, p\}$; dall'osservazione precedente segue $|H^x \cap H| = 1$.

Per la Proposizione 3.4.5 otteniamo

$$|H^x H| = \frac{|H^x||H|}{|H^x \cap H|} = \frac{p \cdot p}{1} = p^2,$$

e quindi $H^x H = G$. In particolare $x^{-1} \in H^x H$, perciò esistono $h_1, h_2 \in H$ con

$$x^{-1} = (x^{-1}h_1 x)\, h_2,$$

da cui $x = h_1^{-1}h_2^{-1} \in H$, il che implica $H^x = H$, di nuovo una contraddizione. Dunque $H \trianglelefteq G$. Ora scelgiamo $b \in G \setminus H$ e poniamo $K = \langle b \rangle$. Allora $|K| = p$ e, con lo stesso argomento, $K \trianglelefteq G$. Inoltre $H \cap K = \{1\}$: infatti, se $H \cap K \neq \{1\}$, per Lagrange la sua cardinalità sarebbe p e si avrebbe $K \subseteq H$, contro $b \notin H$.

Ancora per la Proposizione 3.4.5:

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{p \cdot p}{1} = p^2,$$

quindi $HK = G$. Poiché H e K sono normali e $H \cap K = \{1\}$ segue dal Teorema prodotto che G è il prodotto diretto di H e K, e dunque

$$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p.$$

□

Classificazione gruppi di ordine $2p$

Teorema 6.2.6 *Sia G un gruppo tale che $|G| = 2p$, p primo dispari, allora*

$$G \cong \mathbb{Z}_{2p} \text{ oppure } G \cong D_p,$$

dove D_p denot il gruppo diedrale (cfr. Capitolo 2).

Dimostrazione: lasciata come esercizio allo studente (si veda l'Esercizio 6.10).

□

La seguente tabella segue dai risultati precedenti.

Classificazione dei gruppi (fino a isomorfismo) di ordine ≤ 10.

$\lvert G\rvert$	# tipi	Gruppi abeliani	Gruppi non abeliani
1	1	$\{1\}$	–
2	1	$\mathbb{Z}_2$	–
3	1	$\mathbb{Z}_3$	–
4	2	$\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	–
5	1	$\mathbb{Z}_5$	–
6	2	$\mathbb{Z}_6$	S_3 ($\cong D_3$)
7	1	$\mathbb{Z}_7$	–
8	5	$\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	D_4, Q_8
9	2	$\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	–
10	2	$\mathbb{Z}_{10}$	D_5

6.3 Sottogruppi del prodotto diretto di due gruppi[1]

Un sottogruppo del prodotto diretto di due gruppi non è, in generale, il prodotto diretto di due sottogruppi. Ad esempio, se G è un gruppo non banale, il sottogruppo diagonale $D = \langle (x,x) \mid x \in G \rangle$ è un sottogruppo di $G \times G$, che però non è il prodotto diretto di due sottogruppi di G (infatti, $(x,y) \notin D$ se $x \neq y$). Osserviamo che $D \cong G \cong \{1\} \times G \leq G \times G$.

Ci si può quindi chiedere se esista un sottogruppo $A \leq H \times K$ tale che $A \ncong A_1 \times A_2$, dove $A_1 \leq H$ e $A_2 \leq K$. Il seguente esempio mostra che ciò è possibile.

Esempio 6.3.1 Consideriamo l'omomorfismo suriettivo

$$f : S_3 \times S_3 \to \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2, \quad (f,g) \mapsto \operatorname{sgn}(f \circ g).$$

Allora il suo nucleo $H = \ker(f) < S_3 \times S_3$ non è isomorfo al prodotto diretto di due sottogruppi di S_3. Infatti, $|H| = 18$ (per il primo teorema di isomorfismo e il teorema di Lagrange), e quindi, se fosse isomorfo al prodotto diretto di due sottogruppi di S_3, l'unica possibilità (a meno dell'ordine) sarebbe $H \cong A_3 \times S_3$.

Osserviamo ora che $((12),(123)) \in A_3 \times S_3$ è un elemento di ordine 6, mentre H non contiene elementi di ordine 6. Infatti, se ci fosse un elemento di ordine 6 in $H < S_3 \times S_3$, dovrebbe essere (a meno dell'ordine) della forma (τ,σ), con τ trasposizione e σ 3-ciclo. Ma $f(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = -1$, quindi $(\tau,\sigma) \notin H$.

[1] Questa sezione non rientra nel programma d'esame.

Se i gruppi sono finiti e di cardinalità coprime, vale il seguente risultato.

Teorema 6.3.2 *Siano H e K due gruppi tali che $|H| = m$ e $|K| = n$, con $(m, n) = 1$. Allora, per ogni $A \leq H \times K$, esistono $A_1 \leq H$ e $A_2 \leq K$ tali che $A = A_1 \times A_2$.*

Dimostrazione: Siano $A_1 := p_1(A)$ e $A_2 := p_2(A)$, dove p_i sono le proiezioni canoniche. Allora $A \subseteq A_1 \times A_2$, e quindi

$$|A| \mid |A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|. \tag{6.3}$$

Siccome $|A| \mid |H \times K| = mn$, segue che $|A| = ab$, con $a \mid m$ e $b \mid n$. Ora, $|A_1| \mid m$ (per Lagrange) e $|A_1| \mid |A| = ab$ (per un corollario del primo teorema di isomorfismo). Quindi, $|A_1| \mid Gcd(m, ab) = a$ (in quanto $a \mid m$, $b \mid n$ e $(m, n) = 1$). Analogamente, $|A_2| \mid b$.

Quindi,

$$|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2| \mid ab. \tag{6.4}$$

Dalle equazioni (6.3) e (6.4) otteniamo $|A| = ab = |A_1 \times A_2|$, da cui $A = A_1 \times A_2$. □

6.4 Automorfismi del prodotto diretto di due gruppi[2]

Teorema 6.4.1 *Siano H e K due gruppi tali che $|H| = m$ e $|K| = n$ con $(m, n) = 1$. Allora, $Aut(H) \times Aut(K) \cong Aut(H \times K)$.*

Nell dimostrazione del teorema useremo il seguente risultato:

Lemma 6.4.2 *Siano H e K due gruppi tali che $|H| = m$ e $|K| = n$ con $(m, n) = 1$. Allora, ogni omomorfismo $\varphi : H \to K$ è banale, cioè $\varphi(h) = 1_k$, per ogni $h \in H$.*

Dimostrazione: Essendo m e n coprimi, esistono $u, v \in \mathbb{Z}$ tali che $um + vn = 1$, e quindi

$$h = h^{um+vn} = h^{um}h^{vn} = (h^u)^m h^{vn} = h^{vn}.$$

dove nell'ultima uguaglianza stiamo usando la (ii) del Corollario 3.5.9 del Teorema di Lagrange. Pertanto, ancora per la (ii) del Corollario 3.5.9,

$$\varphi(h) = \varphi(h^{vn}) = (\varphi(h^v))^n = 1_K.$$

[2]Questa sezione non rientra nel programma d'esame.

□

Dimostrazione: (del Teorema 6.4.1) Definiamo l'applicazione

$$\Phi : \mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K) \to \mathrm{Aut}(H \times K), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \Phi(\alpha, \beta),$$

dove

$$\Phi(\alpha, \beta)(h, k) = (\alpha(h), \beta(k)), \forall (h, k) \in H \times K.$$

I seguenti fatti si verificano facilmente:

1. $\Phi(\alpha, \beta)$ è un omomorfismo, per ogni $\alpha \in \mathrm{Aut}(H)$ e $\beta \in \mathrm{Aut}(K)$.
2. $\Phi(\alpha, \beta) \in \mathrm{Aut}(H \times K)$, per ogni $\alpha \in \mathrm{Aut}(H)$ e $\beta \in \mathrm{Aut}(K)$ (ovvero Φ è ben definita): infatti, se $(h, k) \in H \times K$ è tale che

   $$\Phi(\alpha, \beta)(h, k) = (\alpha(h), \beta(k)) = (1_H, 1_K),$$

   allora, poiché α e β sono iniettive, segue che $(h, k) = (1_H, 1_K)$, e quindi $\Phi(\alpha, \beta)$ è iniettiva, e di conseguenza anche suriettiva, essendo $H \times K$ un insieme finito.
3. Φ è un omomorfismo di gruppi:

   $$\Phi\left((\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2)\right) = \Phi(\alpha_1, \beta_1) \circ \Phi(\alpha_2, \beta_2).$$

4. Φ è iniettivo: $\ker(\Phi) = (\mathrm{id}_H, \mathrm{id}_K)$.

Resta da dimostrare la suriettività di Φ, utilizzando l'ipotesi $(m, n) = 1$.

Sia $\omega \in \mathrm{Aut}(H \times K)$ e definiamo gli omomorfismi $\omega_1 : H \to H$ e $Gamma : H \to K$ come

$$\omega_1(h) = p_1(\omega(h, 1_K)), \quad \forall h \in H, \tag{6.5}$$
$$\gamma(h) = p_2(\omega(h, 1_K)), \quad \forall h \in H$$

Osserviamo che, per il Lemma 6.4.2, γ è banale, cioè

$$p_2(\omega(h, 1_K)) = 1_K, \quad \forall h \in H.$$

e che quindi

$$\omega(h, 1_K) = (p_1(\omega(h, 1_K)), p_2(\omega(h, 1_K))) = (\omega_1(h), 1_K), \quad \forall h \in H. \tag{6.6}$$

Inoltre, se $\omega_1(h) = 1_H$, allora dalla (6.6)

$$\omega(h, 1_K) = (1_H, 1_K).$$

Poiché ω è un automorfismo, segue che $h = 1_H$, quindi ω_1 è iniettivo essendo $\ker(\omega_1) = \{1_H\}$. Quindi ω_1 è anche suriettivo perchè H è finito, ossia $\omega_1 \in \mathrm{Aut}(H)$. In modo analogo definiamo gli omomorfismi $\omega_2 : K \to K$ e $\delta : K \to H$ come

$$\omega_2(k) = p_2(\omega(1_H, k)), \quad \forall k \in K.$$

$$\delta(k) = p_1(\omega(1_H, k)), \quad \forall k \in K$$

Sempre per il Lemma 6.4.2, δ è banale e quindi

$$\omega(1_H, k) = (p_1(\omega(1_H, k)), p_2(\omega(1_H, k))) = (1_H, \omega_2(k)), \quad \forall k \in K. \tag{6.7}$$

Dalla (6.7), in modo simile a quanto fatto per ω_1, si dimostra che $\omega_2 \in \mathrm{Aut}(K)$. Verifichiamo che $\Phi(\omega_1, \omega_2) = \omega$ e che quindi Φ è suriettiva. Per ogni $(h, k) \in H \times K$,

$$\Phi(\omega_1, \omega_2)(h, k) = (\omega_1(h), \omega_2(k)),$$

mentre, per le (6.6) e (6.7),

$$\omega(h, k) = \omega(h, 1_K)\omega(1_H, k) = (\omega_1(h), 1_K)(1_H, \omega_2(k)) = (\omega_1(h), \omega_2(k)).$$

Quindi $\Phi(\omega_1, \omega_2) = \omega$. □

Osservazione 6.4.3 Senza l'ipotesi $(m, n) = 1$, il teorema non è vero. Ad esempio, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2) \times \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2)$ è il gruppo banale $\{1\}$, mentre $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$, come si verifica facilmente osservando che è un gruppo non abeliano con 6 elementi, oppure costruendo un isomorfismo esplicito.

6.5 Esercizi

Esercizio 6.1 Dimostrare che $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ é isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$. (Suggerimento: si usi $\mathbb{Z}_2 \cong \{\pm 1, \cdot\}$ e si consideri l'applicazione $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2 \to R^*, (s, x) \mapsto (-1)^s e^x$).

Esercizio 6.2 Sia G un gruppo e sia $D = \{(x, x) \in G \times G \mid x \in G\}$. Si dimostri che:

1. D é un sottogruppo di $G \times G$;
2. D é normale in $G \times G$ se e solo se G é abeliano.

Esercizio 6.3 Sia G un gruppo e siano N_j, $j = 1, \ldots, r$, sottogruppi normali di G tali che:

1. $N_i \cap N_j = \{1\}, \forall i, j = 1, \ldots, n, i \neq j$;
2. $G = N_1 \ldots N_r$.

Dimostrare con un esempio che G non é isomorfo a $N_1 \times \cdots \times N_r$ (e che quindi il *Teorema prodotto* visto a lezione non si estende in questo modo a piú di due sottogruppi).

Esercizio 6.4 Sia G un gruppo abeliano e $f : G \to G$ un omomorfismo di gruppi tale che $f \circ f = f$. Dimostrare che $G \cong f(G) \times \mathrm{Ker}\, f$.

Esercizio 6.5 Sia $f_1 : K \to G$ e $f_2 : K \to H$ due omomorfismi e sia

$$F : K \to G \times H,\ x \mapsto (f_1(x), f_2(x)).$$

Dimostrare che:

1. F é un omomorfismo e $p_i \circ F = f_i, i = 1, 2$;
2. ogni omomorfismo $\tilde{F} : K \to G \times H$ si ottiene in questo modo cioé gli omomorfismi $f_1 : K \to G$ e $f_2 : K \to H$ dati da $f_i = p_i \circ \tilde{F}, i = 1, 2$, danno luogo ad un omomorfismo $F : K \to G \times H$ descritto sopra, che coincide con $\tilde{F}$.

Esercizio 6.6 Sia G un gruppo di 8 elementi. Dimostrare che se tutti gli elementi di G hanno ordine 2, allora G è abeliano ed esistono $a, b, c \in G$ distinti tra loro e dall'elemento neutro tali che

$$G = \{1, a, b, c, ab, ac, bc, abc\}$$

e quindi $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Esercizio 6.7 Sia G un gruppo di 8 elementi, sia $a \in G$ tale che $o(a) = 4$ e sia $H = \langle\, a \,\rangle = \{1, a, a^2, a^3\}$.

(i) Dimostrare che per ogni $b \in G \setminus H$ si ha:

$$G = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}.$$

(ii) Dedurre dal punto (i) che per ogni $b \in G \setminus H$ si hanno tre possibilità:

1. $ba = ab$
2. $ba = a^2b$

3. $ba = a^3b$

Esercizio 6.8 Sia G un gruppo di 8 elementi, sia $a \in G$ tale che $o(a) = 4$ e $H = \{1, a, a^2, a^3\}$ come nell'Esercizio 6.7. Supponiamo che esista $b \in G \setminus H$ tale che $o(b) = 2$.

(i) Dimostrare che $ba \neq a^2b$ e quindi, dal punto (ii) dell'Esercizio 6.7, $ba = ab$ oppure $ba = a^3b$.

(ii) Dimostrare che se $ab = ba$ allora G è abeliano è isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

(iii) Dimostrare che se $ba = a^3b$ allora G è isomorfo al gruppo diedrale D_4.

Esercizio 6.9 Sia G un gruppo di 8 elementi, sia $a \in G$ tale che $o(a) = 4$ e $H = \{1, a, a^2, a^3\}$ come nell'Esercizio 6.7. Supponiamo che tutti gli elementi di $G \setminus H$ abbiamo ordine 4.

(i) Dimostrare che se $b \in G \setminus H$ allora $a^2 = b^2$.

(ii) Dedurre dal punto (i) che $ba \neq a^2b$ e $ba \neq ab$.

(iii) Dedurre dal punto (ii) dell'Esercizio 6.7 che $ba = a^3b$ e che quindi G è isomorfo al gruppo dei quaternioni Q_8.

(iv) Usare il punto precedente e gli Esercizi 6.6, 6.7 e 6.8 per dimostrare che un gruppo G di ordine 8 è isomorfo ad uno dei seguenti cinque gruppi:

$$\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4,\ D_4,\ Q_8.$$

Esercizio 6.10 Sia G un gruppo con 10 elementi.

(i) Dimostrare che

$$G = \{1, a, b, b^2, b^3, b^4, ab, ab^2, ab^3, ab^4\},$$

dove $o(a) = 2$ e $o(b) = 5$.

(ii) Dimostrare che ba non puó essere uguale a: 1, a, b, b^2, b^3, b^4.

(iii) Dimostrare che se $ba = ab$ allora $G \cong \mathbb{Z}_{10}$.

(iv) Dimostrare che $ba \neq ab^2$ e $ba \neq ab^3$.

(v) Dimostrare che se $ba = ab^4$ allora G è isomorfo al gruppo diedrale D_5.

(vi) Dedurre che un gruppo G di ordine 10 é isomorfo a $\mathbb{Z}_{10}$ oppure a D_5.

(vii) Estendere il ragionamento precedente per dimostrare che un gruppo G di ordine $|G| = 2p$, con p primo dispari. è isomorfo a $\mathbb{Z}_{2p}$ oppure a D_p.

Capitolo 7

Gruppi abeliani finiti

7.1 Classificazione dei gruppi ciclici e dei loro sottogruppi

Apriamo la trattazione con la classificazione dei gruppi ciclici e dei loro sottogruppi. La prima parte di (iii) ricalca l'Esempio 5.1.7; la riproponiamo per completezza.

Teorema 7.1.1 (classificazione e generatori dei gruppi ciclici) *Sia C un gruppo ciclico e sia*

$$Gen(C) = \{\, x \in C \mid \langle x \rangle = C \,\}$$

l'insieme dei suoi generatori. Allora valgono i seguenti fatti:

(i) $C = \{1\}$ *(il gruppo banale) e* $|Gen(C)| = 1$*;*

(ii) se $|C| = \infty$*, allora* $C \cong \mathbb{Z}$ *e* $|Gen(C)| = 2$*;*

(iii) se $1 < |C| < \infty$*, allora* $C \cong \mathbb{Z}_m$ *con* $m \geq 2$ *e* $|Gen(C)| = \varphi(m)$*,*

dove φ è la funzione di Eulero.

Dimostrazione: Sia $C = \langle x \rangle = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ e consideriamo l'omomorfismo suriettivo di gruppi

$$f \colon \mathbb{Z} \longrightarrow C, \qquad n \longmapsto x^n.$$

Per il primo teorema d'isomorfismo, $\mathbb{Z}/\ker f \cong C$. Poiché ogni sottogruppo di $\mathbb{Z}$ è della forma $m\mathbb{Z}$ con $m \geq 0$ (cfr. Proposizione 3.2.8), si hanno esattamente

tre possibilità:

$$\ker f = \begin{cases} \mathbb{Z} & (m = 1) \ \Rightarrow \ C \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{1\}; \\ \{0\} & (m = 0) \ \Rightarrow \ C \cong \mathbb{Z}; \\ m\mathbb{Z} \ (m \geq 2) & \Rightarrow \ C \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m. \end{cases}$$

Osserviamo che il caso $C = \{1\}$ è banale: l'unico elemento 1 genera C, dunque $\mathrm{Gen}(C) = \{1\}$ e non resta nulla da dimostrare. D'ora in poi supponiamo $C \neq \{1\}$. Per contare i generatori, basta quindi trattare i casi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_m$, poiché, come segue dalla Proposizione 5.1.11(iv), un isomorfismo induce una bigezione tra gli insiemi dei generatori.

Caso $C = \mathbb{Z}$. È chiaro che $\pm 1 \in \mathrm{Gen}(\mathbb{Z})$. Viceversa, se $a \in \mathrm{Gen}(\mathbb{Z})$ allora $1 \in a\mathbb{Z} = \langle a \rangle = \mathbb{Z}$, dunque esiste $z \in \mathbb{Z}$ tale che $az = 1$ il che implica $a = \pm 1$. Quindi $\mathrm{Gen}(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$ e $|\mathrm{Gen}(\mathbb{Z})| = 2$.

Caso $C = \mathbb{Z}_m$. Sia $[a]_m \in \mathbb{Z}_m$. Per la Proposizione 1.3.33(iii)

$$o\big([a]_m\big) = \frac{m}{(m, a)}.$$

Dunque $[a]_m$ genera $\mathbb{Z}_m$ se e solo se $|\langle\ [a]_m\ \rangle| = o([a]_m) = m = |\mathbb{Z}_m|$ se e solo se $(m, a) = 1$. Segue che

$$\mathrm{Gen}(\mathbb{Z}_m) = \big\{\ [a]_m \in \mathbb{Z}_m \ \big|\ 1 \leq a < m,\ (m, a) = 1\ \big\}, \tag{7.1}$$

e quindi $|\mathrm{Gen}(\mathbb{Z}_m)| = \varphi(m)$. □

Osservazione 7.1.2 Dalla (7.1) e dalla (1.22) segue che:

$$\mathrm{Gen}(\mathbb{Z}_m) = U(\mathbb{Z}_m, \cdot).$$

Passiamo alla descrizione sistematica di sottogruppi e quozienti di un gruppo ciclico.

Teorema 7.1.3 (sottogruppi e quozienti di un gruppo ciclico) *Sia $C = \langle x \rangle$ un gruppo ciclico e $H \leq C$. Allora:*

(i) H è ciclico;

(ii) C/H è ciclico (il quoziente è un gruppo perché C è abeliano e dunque $H \trianglelefteq C$).

(iii) $|C| < \infty$, per ogni $d \mid |C|$ esiste un unico $H \leq C$ con $|H| = d$. Di conseguenza c'è una corrispondenza biunivoca tra i divisori positivi di $|C|$ e i sottogruppi di C.

Dimostrazione: (i) Sia $f : \mathbb{Z} \to C$, $n \mapsto x^n$, l'omomorfismo suriettivo. Allora $f^{-1}(H) \leq \mathbb{Z}$, quindi $f^{-1}(H) = m\mathbb{Z}$ per un certo m (Proposizione 3.2.8). Poiché immagine di un gruppo ciclico è ciclica (Prop. 5.1.11(4)), $H = f\big(f^{-1}(H)\big)$ è ciclico. (Alternativa: usare che i sottogruppi di $\mathbb{Z}$ e di $\mathbb{Z}_m$ sono ciclici, cfr. Esempio 5.2.12.)

(ii) L'applicazione canonica $\pi : C \to C/H$ è un omomorfismo suriettivo; per la Prop. 5.1.11(4) l'immagine di un gruppo ciclico è ciclica, dunque C/H è ciclico.

(iii) Sia $d \mid |C| = m$. Sia $m_1 = \frac{m}{d}$ e $y = x^{m_1}$. Allora il gruppo ciclico $\langle y \rangle$ ha ordine d. Infatti, per la Proposizione 1.3.33(iii),

$$o(y) = \frac{m}{(m, m_1)} = \frac{m}{m_1} = d.$$

Mostriamo che se $H \leq C$ con $|H| = d$, allora $H = \langle y \rangle$. Essendo H ciclico per la (i), possiamo scrivere $H = \langle z \rangle$ con $z \in C$. Esiste quindi k, $0 \leq k \leq m-1$, tale che $z = x^k$. Si ha quindi

$$\frac{m}{m_1} = d = |H| = |\langle z \rangle| = o(z) = o(x^k) = \frac{m}{(m,k)}.$$

Da ciò segue che $m_1 = (m, k)$. In particolare, $m_1 \mid k$, quindi $k = m_1 k_1$ per un certo $k_1 \in \mathbb{Z}$. Riscriviamo:

$$z = x^k = x^{m_1 k_1} = (x^{m_1})^{k_1} = y^{k_1}.$$

Pertanto $z \in \langle y \rangle$, il che implica $H \leq \langle y \rangle$. Dato che $|H| = |\langle y \rangle| = d$, otteniamo $H = \langle y \rangle$. Infine, consideriamo la funzione

$$F : \{\, d \in \mathbb{N}^+ \mid d \mid |C| \,\} \longrightarrow S_C$$

dall'insieme dei divisori positivi $d \mid |C|$ all'insieme S_C dei sottogruppi di C, dove $F(d) = H$ è l'unico sottogruppo di C tale che $|H| = d$. L'applicazione F è ben definita per il punto (i) ed è iniettiva. Inoltre, F è suriettiva: dato $H \leq C$, per il Corollario 3.5.7 del teorema di Lagrange abbiamo $d = |H| \mid |C|$, quindi $F(d) = H$. □

Nel Corollario 3.5.10 abbiamo visto che l'ipotesi $|G| = p$ forza l'assenza di sottogruppi propri e la ciclicità; mostriamo ora, nel Corollario 7.1.4, il viceversa: se un gruppo non banale ha come unici sottogruppi $\{1\}$ e G, allora G è ciclico di ordine primo.

Corollario 7.1.4 *Sia G un gruppo non banale tale che ogni suo sottogruppo sia banale (cioè $\{1\}$ oppure G). Allora G è ciclico di ordine primo p.*

Dimostrazione: Sia $x \in G$ con $x \neq 1$. Allora $\langle x \rangle$ è un sottogruppo non banale; per ipotesi deve essere $\langle x \rangle = G$. Dunque G è ciclico. Per la classificazione dei gruppi ciclici, $G \cong \mathbb{Z}$ oppure $G \cong \mathbb{Z}_m$ con $m \geq 2$. Il caso $G \cong \mathbb{Z}$ è impossibile perché $\langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}$ è un sottogruppo proprio non banale. Resta $G \cong \mathbb{Z}_m$. Se m non fosse primo, scrivendo $m = rs$ con $r, s > 1$, per il Teorema 7.1.3(iii) esisterebbe un sottogruppo (non banale) di ordine r, in contraddizione con l'ipotesi. Pertanto m è primo. □

Specializzando il teorema precedente al caso $C = \mathbb{Z}_m$ e al sottogruppo $n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, segue:

Corollario 7.1.5 *Se $m, n \geq 2$, due interi tali che $n \mid m$, allora*

$$\mathbb{Z}_m/(n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_n. \tag{7.2}$$

Dimostrazione: Visto che $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si ha:

$$\mathbb{Z}_m/(n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/(n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}),$$

e dall' Esempio 5.2.12 sappiamo che questo è un gruppo ciclico di ordine $\frac{m}{n}$. Segue quindi dalla (4.3) che

$$|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}| = \frac{m}{\left(\frac{m}{n}\right)} = n.$$

Quindi, per il Teorema 7.1.1 otteniamo l'isomorfismo (7.2). □

Osservazione 7.1.6 Il Corollario 7.1.5 è un caso particolare del cosiddetto *terzo teorema di isomorfismo* per gruppi, che non fa parte di questo corso e la cui dimostrazione si ottiene dal *primo* teorema di isomorfismo. Precisamente se G, N e H sono grupi tali che: $N \leq H \trianglelefteq G$, $N \trianglelefteq G$ (e quindi $N \trianglelefteq H$), allora

$$\frac{G/N}{H/N} \cong \frac{G}{H}.$$

Nel nostro caso, ponendo $G = \mathbb{Z}$, $H = n\mathbb{Z}$ e $N = m\mathbb{Z}$ (poiché $n \mid m \Rightarrow m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$), si ha automaticamente $H \trianglelefteq G$ perché G è abeliano; dunque

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/(n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

ossia la (7.2).

L'Osservazione 4.1.12 mostra che la normalità non è, in generale, transitiva. Tuttavia, nel caso in cui il sottogruppo intermedio sia ciclico, otteniamo il seguente risultato positivo.

Corollario 7.1.7 *Siano G, H e K gruppi tali che H è ciclico e $K \leq H \trianglelefteq G$ (e quindi $K \trianglelefteq H$, essendo H abeliano). Allora $K \trianglelefteq G$.*

Dimostrazione: Scriviamo $H = \langle x \rangle$. Poiché $H \trianglelefteq G$, per ogni $y \in G$ vale $y^{-1}xy \in H$ (primo criterio di normalità). Allora esiste $m \in \mathbb{Z}$ tale che

$$y^{-1}xy = x^m. \tag{7.3}$$

Per il Teorema 7.1.3(i), K è ciclico, dunque $K = \langle x^k \rangle$, per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Quindi per ogni $z \in K$ esiste $r \in \mathbb{Z}$ tale che $z = x^{kr}$. Dunque si ha:

$$y^{-1}zy = y^{-1}(x^{kr})y = (y^{-1}xy)^{kr} = (x^m)^{kr} = x^{mkr} = (x^k)^{mr} \in \langle x^k \rangle = K,$$

e quindi $y^{-1}zy \in K$ per ogni $z \in K$ e $y \in G$. Segue che $K \trianglelefteq G$ per il primo criterio di normalità. □

7.2 Prodotti diretti di gruppi ciclici

Teorema 7.2.1 (ciclicità del prodotto di due gruppi) *Siano C_1 e C_2 gruppi. Allora $C_1 \times C_2$ è ciclico se e solo se C_1 e C_2 sono ciclici e si verifica una delle seguenti condizioni:*

(1) uno dei due fattori è banale di ordine 1;

(2) entrambi i fattori hanno ordine finito almeno 2 e $(|C_1|, |C_2|) = 1$.

Dimostrazione: ($\Rightarrow$) Supponiamo $C_1 \times C_2$ ciclico. Per prima cosa mostriamo che C_1 e C_2 sono ciclici. Consideriamo le proiezioni sul primo e sul secondo fattore

$$p_1 \colon C_1 \times C_2 \to C_1, \qquad p_2 \colon C_1 \times C_2 \to C_2,$$

che sono omomorfismi suriettivi (cfr. Proposizione 6.1.6). Per la Proposizione 5.1.11(iv) l'immagine di un gruppo ciclico tramite un omomorfismo è ciclica. Dunque C_1 e C_2 sono ciclici. Mostriamo ora che vale (1) oppure (2), escludendo gli altri casi. Se entrambi i fattori C_1 e C_2 sono infiniti, dal Teorema 7.1.1(ii) segue che $C_1 \cong C_2 \cong \mathbb{Z}$, e quindi, per il Lemma 6.1.3(ii), $C_1 \times C_2 \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ma $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ non è ciclico: ogni sottogruppo ciclico ha la forma

$$\langle (a, b) \rangle = \{(ka, kb) \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

e non può contenere simultaneamente $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Quindi in questo caso il prodotto non è ciclico, in contraddizione con l'ipotesi.

Se invece un fattore è infinito e l'altro è finito non banale, diciamo

$$C_1 \cong \mathbb{Z}_m, \quad m \geq 2, \qquad C_2 \cong \mathbb{Z},$$

allora, ancora per il Teorema 7.1.1 e per il Lemma 6.1.3(ii), si ha $C_1 \times C_2 \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}$. Ma l'elemento $(1,0) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}$ ha ordine finito m, mentre in un gruppo ciclico infinito tutti gli elementi non nulli hanno ordine infinito. Quindi anche in questo caso $C_1 \times C_2$ non può essere ciclico. Concludiamo che, se $C_1 \times C_2$ è ciclico, allora *o* uno dei due fattori è banale, *o* entrambi i fattori sono finiti non banali. Se, ad esempio, $C_2 = \{1\}$, allora $C_1 \times C_2 \cong C_1$, quindi la condizione (1) è soddisfatta. Resta il caso $|C_1| = m$, $|C_2| = n$ con $m, n \geq 2$. In questo caso C_1, C_2 sono ciclici finiti, quindi $C_1 \cong \mathbb{Z}_m$, $C_2 \cong \mathbb{Z}_n$ per il Teorema 7.1.1(iii). Se $C_1 \times C_2$ è ciclico, esiste un elemento $z = (x, y)$ tale che

$$o(z) = |C_1 \times C_2| = mn.$$

Per la Proposizione 6.1.4(ii) (ordine di un elemento in un prodotto diretto) abbiamo

$$o(z) = [o(x), o(y)] = mn,$$

dove $[\ ,\ ]$ denota il minimo comune multiplo. In particolare, $mn \mid o(x)o(y)$. Per il teorema di Lagrange esistono $a, b \in \mathbb{N}$ tali che

$$m = o(x)\, a, \qquad n = o(y)\, b.$$

Ne segue

$$mn = o(x)o(y)ab \ \mid \ o(x)o(y),$$

per cui $ab = 1$ e quindi $a = b = 1$. Dunque $o(x) = m$ e $o(y) = n$, e

$$[o(x), o(y)] = [m, n] = mn.$$

Per due interi positivi vale $[m, n] \cdot (m, n) = mn$, quindi da $[m, n] = mn$ segue $(m, n) = 1$. Questo dimostra la condizione (2).

($\Leftarrow$) Supponiamo ora che C_1 e C_2 siano ciclici e che valga (1) oppure (2).

Se vale (1), cioè uno dei due fattori è banale, diciamo $C_2 = \{1\}$, allora

$$C_1 \times C_2 \cong C_1,$$

che è ciclico, quindi $C_1 \times C_2$ è ciclico.

Se invece vale (2), cioè $|C_1| = m$, $|C_2| = n$ sono finiti, $m, n \geq 2$, e $(m, n) = 1$, scegliamo generatori $x \in C_1$, $y \in C_2$ tali che $o(x) = m$, $o(y) = n$. Ancora per la Proposizione 6.1.4(ii) otteniamo

$$o((x, y)) = [m, n] = mn = |C_1 \times C_2|.$$

Quindi $\langle (x,y) \rangle$ ha ordine mn e coincide con tutto il gruppo: $\langle (x,y) \rangle = C_1 \times C_2$, che è dunque ciclico. □

Corollario 7.2.2 *Siano $m, n \geq 2$. Allora $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ se e solo se $(m,n) = 1$.*

Corollario 7.2.3 *Il prodotto diretto $C_1 \times \cdots \times C_r$ di $r \geq 2$ gruppi ciclici non banali è ciclico se e solo se ogni C_i è finito e gli ordini $|C_i|$ sono a due a due coprimi.*

7.3 Il gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico

Il gruppo banale è un caso particolare di gruppo ciclico, il cui gruppo degli automorfismi è anch'esso banale. I casi non banali sono trattati dal seguente teorema.

Teorema 7.3.1 (automorfismi di un gruppo ciclico) *Sia C un gruppo ciclico non banale. Allora:*

(i) Se $|C| = \infty$, allora $Aut(C) \cong \mathbb{Z}_2$.

(ii) Se $|C| = m$, allora $Aut(C) \cong U(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ e $|Aut(C)| = \varphi(m)$.

Dimostrazione: (i) Se $|C| = \infty$, possiamo assumere, grazie al Teorema 7.1.3, che $C = \mathbb{Z}$. Per la Proposizione 5.1.11(iv), un automorfismo $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ deve mandare generatori in generatori, quindi necessariamente $f(1) = \pm 1$. Se $f(1) = 1$, allora $f(n) = n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, cioè $f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$; se $f(1) = -1$, allora $f(n) = -n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Pertanto

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}, -\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

(ii) Se $|C| = m$, possiamo sempre assumere, ancora grazie al Teorema 7.1.3, che $C = \mathbb{Z}_m$ con $m \geq 2$. Ricordiamo che i generatori di $\mathbb{Z}_m$ sono esattamente gli elementi $[n]_m$ tali che $(n,m) = 1$, cioè gli elementi di $U(\mathbb{Z}_m, \cdot)$.

Consideriamo l'applicazione

$$\Phi : \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_m) \longrightarrow U(\mathbb{Z}_m, \cdot), \qquad f \longmapsto f([1]_m).$$

L'applicazione è ben definita perché un automorfismo manda generatori in generatori e, come osservato sopra, i generatori di $\mathbb{Z}_m$ sono esattamente gli elementi di $U(\mathbb{Z}_m, \cdot)$. Verifichiamo che Φ è un omomorfismo: se $f, g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_m)$ con $f([1]_m) = [h]_m$ e $g([1]_m) = [k]_m$, allora

$$\begin{aligned} \Phi(g \circ f) &= (g \circ f)([1]_m) = g(f([1]_m)) = g([h]_m) = g(h[1]_m) \\ &= [h]_m \, g([1]_m) = [h]_m [k]_m = [k]_m [h]_m = \Phi(g)\,\Phi(f), \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza usiamo la commutatività del gruppo moltiplicativo $U(\mathbb{Z}_m, \cdot)$. Se $\Phi(f) = [1]_m$, allora $f([1]_m) = [1]_m$ e, poiché $[1]_m$ genera $\mathbb{Z}_m$, segue che $f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_m}$. Quindi $\ker \Phi = \{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_m}\}$ e Φ è iniettiva.

Per dimostrare che Φ è suriettiva, per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $(n, m) = 1$ consideriamo l'omomorfismo

$$\psi_n : \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_m, \qquad [a]_m \longmapsto [na]_m.$$

Allora

$$\ker \psi_n = \{[a]_m \mid [na]_m = [0]_m\} = \{[a]_m \mid m \mid na\} = \{[0]_m\},$$

perché $(n, m) = 1$ implica $m \mid a$ quando $m \mid na$. Dunque ψ_n è iniettivo e quindi, siccome $\mathbb{Z}_m$ è finito, è anche suriettivo; in particolare $\psi_n \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_m)$.

Calcoliamo ora

$$\Phi(\psi_n) = \psi_n([1]_m) = [n]_m.$$

Questo mostra che ogni elemento $[n]_m \in U(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ (appunto con $(n, m) = 1$) sta nell'immagine di Φ. Dunque Φ è suriettiva e definisce un isomorfismo tra $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_m)$ e $U(\mathbb{Z}_m, \cdot)$. Ne segue che

$$\mathrm{Aut}(C) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_m) \cong U(\mathbb{Z}_m, \cdot).$$

In particolare,

$$|\mathrm{Aut}(C)| = |\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_m)| = |U(\mathbb{Z}_m, \cdot)| = \varphi(m).$$

□

Esempio 7.3.2 Calcoliamo $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8)$. Poiché $U(\mathbb{Z}_8) = \{[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8\}$ e ciascuna unità ha ordine 2, si ha

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8) \cong U(\mathbb{Z}_8) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Osservazione 7.3.3 Il teorema precedente mostra, in particolare, che il gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico è abeliano.

Nell'Esercizio 7.3 si chiede di dimostrare che, se $\mathrm{Aut}(G)$ è ciclico, allora G è abeliano. Si noti inoltre che $\mathrm{Aut}(G)$ può non essere abeliano anche quando G lo è: ad esempio, per $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ si verifica facilmente che $\mathrm{Aut}(G) \cong S_3$, che non è abeliano. Esistono infine gruppi finiti non abeliani (che non tratteremo) il cui gruppo di automorfismi è invece abeliano.

7.4 Il teorema di Frobenius-Stickelberger

In questa sezione dimostriamo il seguente teorema di classificazione dei gruppi abeliani finiti.

Teorema 7.4.1 (Frobenius-Stickelberger) *Sia G un gruppo abeliano finito. Allora G è isomorfo al prodotto diretto finito di gruppi ciclici.*

Per dimostrare il teorema ci avvarremo dei cinque lemmi che seguono; nel seguito, poiché operiamo in un contesto abeliano, adotteremo la notazione additiva per un gruppo $G = (G, +, 0)$.

Lemma 7.4.2 *Siano G un gruppo abeliano finito, $H \leq G$ ed $a \in G$ tale che esistono $m, n \in \mathbb{Z}$ soddisfacenti $(m, n) = 1$ ed $ma, na \in H$. Allora $a \in H$.*

In particolare, se esistono $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $ma = 0 = na$, allora $a = 0$.

Dimostrazione: Dal momento che $(m, n) = 1$, per il Lemma di Bézout esistono $u, v \in \mathbb{Z}$ tali che $um + vn = 1$. Dunque per le proprietà delle potenze si ha $a = 1a = (um + vn)a = u(ma) + v(na) \in H$, dal momento che per ipotesi ma ed na sono elementi di H, e quindi è tale anche ogni loro potenza. La seconda parte del Lemma si dimostra applicando il risultato al gruppo banale $H = \{0\}$. □

Osservazione 7.4.3 Il precedente lemma rimane valido anche per G non abeliano e di ordine infinito, come si verifica facilmente in notazione moltiplicativa.

Lemma 7.4.4 (lemma di Cauchy nel caso abeliano) *Sia G un gruppo abeliano finito di ordine $m \in \mathbb{N}^+$. Se p è un primo tale che $p \mid |G|$, allora G contiene un elemento di ordine p.*

Dimostrazione: Scriviamo $|G| = m = pn$ e procediamo per *induzione forte* su $n \geq 1$. Se $n = 1$, allora $|G| = p$ e, per il Corollario 3.5.10(ii) del teorema di Lagrange, ogni elemento non neutro di G ha ordine p. Supponiamo ora $n > 1$ e assumiamo la seguente ipotesi induttiva (forte): *per ogni α con $1 \leq \alpha < n$ e per ogni gruppo abeliano finito H di ordine $|H| = p\alpha$, esiste in H un elemento di ordine p.* Sia $a \in G \setminus \{0\}$. Se $G = \langle a \rangle$, allora, siccome $p \mid |G|$, per il Teorema 7.1.3(iii) esiste in G un elemento di ordine p. Altrimenti poniamo $k = |\langle a \rangle| = o(a)$ con $1 < k < m$. Se $p \mid k$, allora $\langle a \rangle$ è ciclico di ordine k e quindi, sempre per il Teorema 7.1.3(iii), contiene un elemento di ordine p. Se

invece $p \nmid k$, consideriamo il quoziente $G_1 = G/\langle a \rangle$, ben definito poiché G è abeliano. Allora, per il Corollario 4.4.10,

$$|G_1| = \frac{|G|}{|\langle a \rangle|} = \frac{pn}{k}.$$

Poiché $(p,k) = 1$, segue $k \mid n$, dunque $|G_1| = p\alpha$ con $\alpha = \frac{n}{k} < n$. Per l'ipotesi induttiva esiste $y \in G_1$ con $o(y) = p$. Sia $\pi : G \to G_1$ la proiezione canonica e sia $x \in G$ con $\pi(x) = y$. Allora la restrizione $\pi|_{\langle x \rangle} : \langle x \rangle \to \langle y \rangle$ è un omomorfismo suriettivo. Segue dal Corollario 5.2.4 del primo teorema di isomorfismo che

$$p = |\langle y \rangle| \mid |\langle x \rangle| = o(x).$$

Applicando ancore una volta il Teorema 7.1.3(iii) al gruppo ciclico $\langle x \rangle$ esiste $z \in \langle x \rangle \subseteq G$ con $o(z) = p$, come volevasi. □

Osservazione 7.4.5 Il lemma precedente vale anche per G gruppo non abeliano, ma non ne vedremo la dimostrazione.

Lemma 7.4.6 *Sia G un gruppo abeliano finito tale che esiste $m \in \mathbb{N}^+$ con $mx = 0$ per ogni $x \in G$. Allora $|G|$ divide una potenza di m, ossia $\exists\, \alpha \in \mathbb{N}^+$ tale che $|G| \mid m^\alpha$.*

Dimostrazione: Se $|G| = 1$ la tesi è ovvia. Supponiamo dunque $|G| > 1$. Per il teorema fondamentale dell'aritmetica esistono primi distinti $p_1, \ldots, p_t$ e interi positivi $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ tali che

$$|G| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}.$$

Per il Lemma di Cauchy 7.4.4, per ogni $j \in \{1, \ldots, t\}$ esiste $x_j \in G$ con $o(x_j) = p_j$. Per ipotesi $mx_j = 0$; dunque, per la Proposizione 1.3.25, $o(x_j) = p_j \mid m$. Ne segue, per ogni j, che $p_j^{\alpha_j} \mid m^{\alpha_j}$. Moltiplicando per $j = 1, \ldots, t$ otteniamo

$$|G| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t} \mid m^{\alpha_1} \cdots m^{\alpha_t} = m^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_t} = m^\alpha,$$

dove abbiamo posto $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_t$. □

Osservazione 7.4.7 Il lemma precedente vale anche nel caso in cui G sia un gruppo finito non abeliano, usando il lemma di Cauchy nel caso non abeliano.

Esempio 7.4.8 Siano $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ed $m = 4$, allora ricadiamo proprio nella situazione del lemma precedente con $\alpha = 2$ in quanto $|G| \mid 4^2 = 16$.

Lemma 7.4.9 *Sia G un gruppo abeliano finito tale che $|G| = mn$ con $(m,n) = 1$. Allora:*

(i) $H = \{x \in G \mid mx = 0\} \leq G$ *e* $|H| = m$;

(ii) $K = \{x \in G \mid nx = 0\} \leq G$ *e* $|K| = n$;

(iii) $G \cong H \times K$.

Dimostrazione: Per mostrare che H è un sottogruppo, siano $x, y \in H$. Per abelianità,

$$m(x - y) = mx - my = 0 - 0 = 0,$$

dunque $x - y \in H$; per la Proposizione 3.1.12 si ha $H \leq G$. In modo del tutto analogo si ottiene $K \leq G$. Vogliamo ora applicare il Corollario 6.1.10 del teorema prodotto. Osserviamo anzitutto che l'ipotesi $(m, n) = 1$ e l'ultima parte del Lemma 7.4.2 implicano:

$$H \cap K = \{x \in G \mid mx = nx = 0\} = \{0\}.$$

Mostriamo ora che $G = H + K$. Preso $y \in G$, poichè per ipotesi $|G| = mn$, per il Corollario 3.5.9(ii) del teorema di Lagrange si ottiene che $(mn)y = 0$, per cui

$$m(ny) = 0 \quad \text{e} \quad n(my) = 0.$$

Ne segue $ny \in H$ e $my \in K$. Usando ancora il fatto che $(m, n) = 1$, per il Lemma di Bézout esistono $u, v \in \mathbb{Z}$ tali che $um + vn = 1$. Segue che

$$y = (um + vn)y = u(my) + v(ny) \in K + H = H + K,$$

da cui $G = H + K$. Siamo dunque nelle ipotesi del Corollario 6.1.10 e concludiamo che $G \cong H \times K$, da cui in particolare $|G| = |H||K|$.

Passiamo alle cardinalità. Per definizione $mx = 0$ per ogni $x \in H$; applicando il Lemma 7.4.6 al gruppo H deduciamo che esiste $\alpha \in \mathbb{N}^+$ con $|H| \mid m^\alpha$. In particolare, ogni primo che divide $|H|$ divide m, dunque $(|H|, n) = 1$ (poiché $(m, n) = 1$). Analogamente, applicando lo stesso lemma a K otteniamo $|K| \mid n^\beta$ e quindi $(|K|, m) = 1$. Infine, dalla catena di uguaglianze

$$mn = |G| = |H||K|$$

e dalle coprimalità $(|H|, n) = 1$ e $(|K|, m) = 1$, segue necessariamente $|H| = m$ e $|K| = n$. Ciò prova (i), (ii) e, con l'isomorfismo già ottenuto, anche (iii). □

Osservazione 7.4.10 Il lemma precedente non vale nel caso di G gruppo finito non abeliano. Ad esempio, in S_3 l'insieme $H = \{x \in S_3 \mid x^2 = 1\}$ non è un sottogruppo, essendo $H = \{id, (1\,2), (1\,3), (2\,3)\}$.

Lemma 7.4.11 (lemma di decomposizione primaria) *Sia G un gruppo abeliano finito con*

$$|G| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t},$$

dove $p_1, \ldots, p_t$ sono primi distinti e $\alpha_j \geq 1$. Allora esistono sottogruppi $P_1, \ldots, P_t \leq G$ tali che $|P_j| = p_j^{\alpha_j}$ per ogni $j = 1, \ldots, t$ e

$$G \cong P_1 \times \cdots \times P_t.$$

Dimostrazione: Procediamo per induzione su $t \geq 1$. Per $t = 1$ allora $|G| = p_1^{\alpha_1}$ è sufficiente porre $P_1 = G$. Supponiamo vera l'affermazione per t e sia

$$|G| = \Big(\prod_{j=1}^{t} p_j^{\alpha_j}\Big)\, p_{t+1}^{\alpha_{t+1}}.$$

Poniamo $m = \prod_{j=1}^{t} p_j^{\alpha_j}$ e $n = p_{t+1}^{\alpha_{t+1}}$. Allora $(m, n) = 1$ e $|G| = mn$; per il Lemma 7.4.9 esistono $H, K \leq G$ con $|H| = m$, $|K| = n$ e $G \cong H \times K$. Per l'ipotesi induttiva applicata a H esistono sottogruppi $P_1, \ldots, P_t \leq H$ con $|P_j| = p_j^{\alpha_j}$ e

$$H \cong P_1 \times \cdots \times P_t.$$

Ponendo $P_{t+1} = K$, otteniamo

$$G \cong H \times K \cong (P_1 \times \cdots \times P_t) \times P_{t+1} \cong P_1 \times \cdots \times P_t \times P_{t+1},$$

e, per costruzione, $|P_{t+1}| = |K| = p_{t+1}^{\alpha_{t+1}}$. Questo conclude la dimostrazione. □

Siamo finalmente pronti per dimostrare il Teorema 7.4.1

Dimostrazione del Teorema 7.4.1. Grazie al Lemma 7.4.11 e all'associatività (a meno di isomorfismi) del prodotto diretto (cfr. Proposizione 6.1.3(iii)), è sufficiente provare che, se G è un gruppo abeliano finito con $|G| = p^n$ (p primo), allora G è isomorfo a un prodotto diretto finito di gruppi ciclici. Procediamo per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$, ossia $|G| = p$, allora G è ciclico per il Corollario 3.5.10(ii) e non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo vera la tesi per ogni $1 \leq \alpha < n$ e sia G abeliano finito con $|G| = p^n$, cioè assumiamo (ipotesi induttiva) che per ogni gruppo abeliano finito H con $|H| = p^\alpha$ e $1 \leq \alpha < n$ valga che H è isomorfo a un prodotto diretto finito di gruppi ciclici. Scegliamo $b \in G$ di ordine massimo:

$$o(b) = p^k = \max\{\, o(z) \mid z \in G \,\}, \qquad 1 \leq k < n,$$

(stiamo escludendo il caso $k = n$ altrimenti G sarebbe ciclico e generato da b e non ci sarebbe nulla da dimostrare). Poniamo $B = \langle b \rangle$ e scegliamo $C \leq G$ massimale rispetto alla proprietà

$$B \cap C = \{0\} \qquad \big(\forall\, C' \leq G,\ C \subsetneq C' \Rightarrow B \cap C' \neq \{0\}\big).$$

Vogliamo dimostrare $G \cong B \times C$. Se questo fosse vero allora

$$|C| = \frac{|G|}{|B|} = \frac{p^n}{p^k} = p^{n-k},$$

per cui, per ipotesi induttiva, C è prodotto finito di gruppi ciclici; essendo B ciclico, anche G sarebbe isomorfo al prodotto di gruppi ciclici e avremo concluso la dimostrazione.

Per dimostrare che $G \cong B \times C$, osserviamo che essendo $B \cap C = \{0\}$ possiamo limitarci, usando il Corollario 6.1.10 del teorema prodotto che $G = B + C$, ossia che:

$$\forall x \in G \Rightarrow x \in B + C. \tag{7.4}$$

Sia dunque $x \in G$ e scriviamo $o(x) = p^s$ con $0 \leq s \leq k$. Per dimostrare (7.4) mostreremo, per induzione su s, che ogni elemento di ordine p^s appartiene a $B + C$. Se $s = 0$, allora $o(x) = 1$ e quindi $x = 0 \in B + C$. Supponiamo ora che la tesi valga per tutti gli elementi di ordine p^{s-1} e consideriamo un elemento $x \in G$ con $o(x) = p^s$; poniamo $y = px$.

Allora

$$o(y) = \frac{o(x)}{(o(x), p)} = \frac{p^s}{(p^s, p)} = \frac{p^s}{p} = p^{s-1},$$

quindi, per ipotesi induttiva su s, esistono $m \in \mathbb{Z}$ e $c \in C$ tali che

$$y = mb + c.$$

Poiché moltiplicando per $p^{s-1}y = 0$ si ottiene

$$0 = p^{s-1}y = p^{s-1}(mb + c) = (p^{s-1}m)b + p^{s-1}c.$$

Segue

$$(p^{s-1}m)b = -\,p^{s-1}c \in B \cap C = \{0\},$$

cioè $(p^{s-1}m)b = 0$. Poiché $o(b) = p^k$, ne deduciamo $p^k \mid p^{s-1}m$ e come $s \leq k$ (massimalità di $o(b)$), concludiamo $p \mid m$. Scriviamo dunque $m = pm_1$; allora

$$y = px = mb + c = (pm_1)b + c \quad \Rightarrow \quad p\big(x - m_1 b\big) = c.$$

Poniamo $a = x - m_1 b$, cosicché $pa = c \in C$. Se $a \in C$, allora $x = m_1 b + a \in B + C$ e abbiamo finito. Se invece $a \notin C$, sia $C' = \langle a \rangle + C$. Allora $C \subsetneq C'$ e, per la massimalità di C, esiste

$$0 \neq b_1 \in B \cap C'.$$

D'altra parte b_1 si scrive come

$$b_1 = la + c_1 \qquad (l \in \mathbb{Z},\ c_1 \in C).$$

Osserviamo che

$$pa = c \in C \subseteq B + C \tag{7.5}$$

e

$$la = b_1 - c_1 \in B + C. \tag{7.6}$$

Inoltre

$$(p, l) = 1, \tag{7.7}$$

poiché, se $p \mid l$, allora $l = pl_1$ e

$$b_1 = la + c_1 = pl_1a + c_1 = l_1(pa) + c_1 \in C,$$

in contrasto con $0 \neq b_1 \in B \cap C = \{0\}$. Dalle (7.5), (7.6) e (7.7) e per il Lemma 7.4.2 concludiamo che $a \in B + C$ e quindi

$$x = m_1b + a \in B + C.$$

Poiché $x \in G$ è arbitrario, abbiamo dimostrato $G = B + C$ e quindi $G = B \times C$, concludendo la dimostrazione del teorema di Frobenius-Stickelberger. □

7.5 Il Teorema di Gauss[1]

In questa sezione faremo uso costante della funzione di Eulero $\varphi : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$

$$\varphi(n) = |\{a \in \mathbb{N} \mid 1 \leq a < n, (a, n) = 1\}|$$

e delle seguenti due proprietà:

- $\varphi(p) = p - 1$ per un primo p;
- $\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1} = p^{m-1}(p - 1)$;
- $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ se $(a, b) = 1$;
- Se $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$, allora

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1)p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \cdots p_t^{\alpha_t - 1}(p_t - 1) = n \prod_{j=1}^{t} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right).$$

Lemma 7.5.1 *(Gauss) Il gruppo $Aut(\mathbb{Z}_{p^m})$ è ciclico per ogni primo dispari p e per ogni $m \geq 1$.*

[1] Questa sezione non rientra nel programma d'esame.

Iniziamo a dimostrare il caso $m = 1$, in cui $\mathbb{Z}_p$ è un campo.

Lemma 7.5.2 *(Lemma di Gauss per $m = 1$) $Aut(\mathbb{Z}_p)$, con p primo dispari, è ciclico.*

Dimostrazione: Dimostriamo che se $\mathbb{K}$ è un campo e $G \leq \mathbb{K}^*$ è un sottogruppo finito del gruppo moltiplicativo, allora G è ciclico (da ciò segue immediatamente che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p) \cong U(\mathbb{Z}_p) = (\mathbb{Z}_p \setminus \{[0]_p\}, \cdot)$ è ciclico).

Sia $k = \max\{o(a) \mid a \in G\}$ e sia $x \in G$ tale che $o(x) = k$. La dimostrazione sarà conclusa se dimostriamo che $|G| = k$.

Consideriamo

$$X = \{a \in G \mid a^k = 1\} \subseteq G.$$

Se per assurdo $X \neq G$, allora esisterebbe $y \in G$ tale che $y^k \neq 1$, e quindi $o(y) \nmid k$. Per il Corollario 3.5.15, poiché x e y commutano (essendo G abeliano), esisterebbe $z \in G$ tale che $o(z) = [o(x), o(y)] = [k, o(y)] > k$, contraddicendo l'ipotesi. Quindi $G = X$. Dato che $k = |\langle x \rangle| \leq |G|$ e $|X| \leq k$, in quanto il polinomio $x^k - 1$ (a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$) ha al più k radici, si conclude che $|G| = k$. □

Lemma 7.5.3 *(Lemma di Gauss per $m = 2$) $Aut(\mathbb{Z}_{p^2})$ è ciclico.*

Dimostrazione: Dal Lemma 7.5.2, esiste $[r]_p$, generatore di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p) = U(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_{p-1}$, con $o([r]_p) = p - 1$. Mostriamo che sia $[r]_{p^2}$ sia $[r + p]_{p^2}$ generano $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^2})$. Sia $x = o([r]_{p^2})$. Allora:

$$([r]_{p^2})^x = [r^x]_{p^2} = [1]_{p^2} \Rightarrow p^2 \mid (r^x - 1) \Rightarrow p \mid (r^x - 1) \Rightarrow [r]_p^x = [1]_p \Rightarrow x = s(p-1)$$

per un certo $s \in \mathbb{N}$. Inoltre, poiché $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^2})| = \varphi(p^2) = p(p-1)$, si ha:

$$([r]_{p^2})^{p(p-1)} = [1]_{p^2} \Rightarrow x = s(p-1) \mid p(p-1),$$

dove $x = p^a(p-1)$ con $a = 0, \ldots, m-1$. Dimostreremo ora che $x = p^{m-1}(p-1)$.

Supponiamo per assurdo che $x = p^b(p-1)$ con $b = 0, \ldots, m-2$. Allora:

$$([r]_{p^2})^{p^{m-2}(p-1)} = [1]_{p^2}.$$

Ne consegue che:

$$[1]_{p^2} = ([r]_{p^2})^{p^{m-2}(p-1)} = ([r^{p-1}]_{p^2})^{p^{m-2}} = ([1 + kp]_{p^2})^{p^{m-2}} = [1 + kp^{m-1}]_{p^2},$$

dove abbiamo usato il Lemma 7.5.5 per ottenere l'ultima uguaglianza. Tuttavia, $[1 + kp^{m-1}]_{p^2} \neq [1]_{p^2}$, poiché $p \nmid k$. Questa è l'assurdo che cercavamo.

Poiché $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^2})| = p(p-1)$, segue che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^2})$ è generato da $[r]_{p^2}$ o $[r + p]_{p^2}$ e quindi è ciclico. □

Esempio 7.5.4 Il generatore di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3) = \{[1]_3, [2]_3\} \cong \mathbb{Z}_2$ è $[2]_3$. I generatori di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_9) = \{[1]_9, [2]_9, [4]_9, [5]_9, [7]_9, [8]_9\} \cong \mathbb{Z}_6$ sono $[2]_9$ e $[5]_9$. Osserviamo che $[8]_9 = [5+3]_9$ non è un generatore, poiché $[8]_9^2 = [1]_9$.

Prima di dimostrare il Lemma di Gauss in generale abbiamo bisogno di due lemmi aggiuntivi.

Lemma 7.5.5 *Siano $k \in \mathbb{Z}$ e p un primo dispari. Allora per ogni naturale $a \geq 1$ si ha*

$$\left([1+kp]_{p^{a+2}}\right)^{p^a} = [1+kp^{a+1}]_{p^{a+2}} \tag{7.8}$$

Dimostrazione: La (7.8) é equivalente all'esistenza di $m_a \in \mathbb{Z}$ tale che

$$(1+kp)^{p^a} = 1 + kp^{a+1} + m_a p^{a+2}, \tag{7.9}$$

per ogni $a \geq 1$. Dimostriamo quindi la (7.9) per induzione su a. Se $a = 1$ allora

$$(1+kp)^p = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} k^j p^j = 1 + kp^2 + k^2 \binom{p}{2} p^2 + p^3 \sum_{j=3}^{p} \binom{p}{j} k^j p^{j-3}.$$

Siccome $p \neq 2$ e p é primo allora $p | \binom{p}{2}$ e quindi $k^2 \binom{p}{2} p^2 = n_1 p^3$ per un certo naturale n_1. Segue che

$$(1+kp)^p = 1 + kp^2 + m_1 p^3.$$

con $m_1 = n_1 + \sum_{j=3}^{p} \binom{p}{j} k^j p^{j-3}$. Supponiamo che la (7.9) sia vera e dimostriamola per $a+1$. Allora

$$(1+kp)^{p^{a+1}} = [(1+kp)^{p^a}]^p = (1 + kp^{a+1} + m_a p^{a+2})^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (1+kp^{a+1})^{p-i} m_a^i p^{i(a+2)}. \tag{7.10}$$

Osserviamo che per $i \geq 1$ tutti i termini della somma precedente sono divisibili per p^{a+3} (infatti per $i = 1$ compare il termine $\binom{p}{1} p^{a+2} = p^{a+3}$, mentre per $i \geq 2$ compare il termine $p^{i(a+2)}$ che é sempre divsibile per p^{a+3} essendo $a \geq 1$. Quindi esiste $n_a \in \mathbb{Z}$ tale che

$$\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} (1+kp^{a+1})^{p-i} m_a^i p^{i(a+2)} = n_a p^{a+3}. \tag{7.11}$$

Osserviamo che il termine in (7.10) per $i = 0$ si scrive come

$$(1+kp^{a+1})^p = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} k^j p^{j(a+1)} = 1 + kp^{a+2} + \sum_{j=2}^{p} \binom{p}{j} k^j p^{j(a+1)} \tag{7.12}$$

e $p^{a+3}|p^{ja+j}$ per ogni $j \geq 2$. Esiste quindi $n'_a \in \mathbb{Z}$ tale che

$$\sum_{j=2}^{p} \binom{p}{j} k^j p^{j(a+1)} = n'_a p^{a+3}. \tag{7.13}$$

Mettendo insieme la (7.11), la (7.12) e la (7.13) e ponendo $m_{a+1} = n_a + n'_a$ possiamo scrivere la (7.10) come

$$(1+kp)^{p^{a+1}} = 1 + kp^{a+2} + m_{a+1}p^{a+3}$$

che é quello che volevamo dimostrare. □

Osservazione 7.5.6 Nel corso della dimostrazione del Lemma 7.5.5 abbiamo usato l'ipotesi che p fosse un primo dispari solo solo nell'ipotesi induttiva.

Lemma 7.5.7 *Sia p un primo (non necessariamente dispari). Se $Aut(\mathbb{Z}_{p^m})$ é ciclico e $[r]_{p^m}$ é un suo generatore allora $[r]_{p^{m-1}}$ é un generatore di $Aut(\mathbb{Z}_{p^{m-1}})$. Se $[r]_{p^2}$ é un generatore di $Aut(\mathbb{Z}_{p^2})$ allora*

$$r^{p-1} = 1 + kp \tag{7.14}$$

per qualche intero k tale che $p \nmid k$.

Dimostrazione: L'applicazione

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^m}) = U(\mathbb{Z}_{p^m}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^{m-1}}) = U(\mathbb{Z}_{p^{m-1}}), [u]_{p^m} \mapsto [u]_{p^{m-1}}$$

è un omomorfismo suriettivo di gruppi e quindi se $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^m})$ é ciclico allora $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^{m-1}})$ é ciclico e se $[r]_{p^m}$ é un generatore di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^m})$ allora generatore $[r]_{p^{m-1}}$ é un generatore di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^{m-1}})$. Se, in particolare, $[r]_{p^2}$ é un generatore di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^2})$ allora $[r]_p$ é un generatore di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)$ e quindi $([r]_p)^{p-1} = [1]_p$ ossia $r^{p-1} = 1 + kp$, per qualche intero k. Inoltre $p \nmid k$ altrimenti $[r]_{p^2}^{p-1} = [1]_{p^2}$ in contrasto col fatto che $[r]_{p^2}$ genera $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^2})$ e quindi ha ordine $p(p-1)$. □

Dimostrazione del Lemma di Gauss (Lemma 7.5.1) Sia p un primo dispari. Dimostriamo che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^m})$ è ciclico per ogni $m \geq 3$. Sia $[r]_{p^2}$ un generatore di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^2})$ la cui esistenza è garantita dal Lemma 7.5.3. Sia $x = o([r]_{p^m})$. Allora:

$$([r]_{p^m})^x = [r^x]_{p^m} = [1]_{p^m} \Rightarrow p^m|(r^x-1) \Rightarrow p|(r^x-1) \Rightarrow [r^x]_p = [1]_p \Rightarrow x = s(p-1),$$

per un certo $s \in \mathbb{N}_+$. Inoltre

$$[r^{p^{m-1}(p-1)}]_{p^m} = [1]_{p^m} \Rightarrow x = s(p-1) \mid p^{m-1}(p-1),$$

Allora $x = p^a(p-1)$ dove $a = 0, \ldots, m-1$. La dimostrazione sará conclusa se si dimostra che $x = p^{m-1}(p-1)$ (infatti in questo caso $[r]_{p^m}$ un generatore di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^m})$ che ha cardinalitá $p^{m-1}(p-1)$). Supponiamo per assurdo che $x = p^b(p-1)$, $b = 0, \ldots, m-2$. Allora, in particolare,

$$([r]_{p^m})^{p^{m-2}(p-1)} = [1]_{p^m}.$$

Segue che

$$[1]_{p^m} = ([r]_{p^m})^{p^{m-2}(p-1)} = ([r^{p-1}]_{p^m})^{p^{m-2}} = ([1+kp]_{p^m})^{p^{m-2}} = [1+kp^{m-1}]_{p^m}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la (7.8) del Lemma 7.5.5 con $m = a+2$. D'altra parte $[1+kp^{m-1}]_{p^m} \neq [1]_{p^m}$ in quanto $p \nmid k$. Questo é l'assurdo desiderato e la dimostrazione é conclusa. □

Teorema 7.5.8 (Gauss) *Il gruppo $Aut(\mathbb{Z}_n)$ è ciclico se e solo se $n \in \{1, 2, 4, p^m, 2p^m\}$, con p un primo dispari.*

Dimostrazione: Iniziamo dimostrando che se $n \in \{1, 2, 4, p^m, 2p^m\}$, con p primo dispari, allora $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ è ciclico.

Per i casi $n = 1$ e $n = 2$, abbiamo rispettivamente il gruppo banale e $\mathbb{Z}_2$, i cui gruppi di automorfismi sono entrambi banali. Per $n = 4$, si ha $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_4) = \mathbb{Z}_2$. Il caso $n = p^m$ segue dal Lemma di Gauss (Lemma 7.5.1). Infine, se $n = 2p^m$, allora poiché $(2, p^m) = 1$, sia ha $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{p^m}$ e per il Teorema 6.4.1

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2) \times \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^m}) \cong \{0\} \times \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^m}) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^m}),$$

che è ciclico, ancora per il Lemma di Gauss.

Mostriamo ora che se $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ è ciclico, allora $n \in \{1, 2, 4, p^m, 2p^m\}$, con p primo dispari.

Scriviamo

$$n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}, \quad \alpha_j \geq 0, \quad p_i \neq p_j,$$

dove i p_i sono primi dispari distinti. Dimostriamo che può esserci al massimo un solo primo dispari nella scomposizione di n. Supponiamo per assurdo che esistano due primi dispari distinti, diciamo p_1 e p_2, con $\alpha_1 \geq 1$ e $\alpha_2 \geq 1$. In questo caso, $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_r$, dove $r = 2^{\alpha_0} p_3^{\alpha_3} \cdots p_t^{\alpha_t}$. Allora, per il Teorema 6.4.1, si ha

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}) \times \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}}) \times \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_r).$$

Essendo $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ ciclico, anche $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}})$ e $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}})$ devono essere ciclici, e i loro ordini devono essere primi tra loro. Tuttavia,

$$|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}})| = \varphi(p_i^{\alpha_i}) = p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1),$$

che è pari per $i = 1, 2$, portando così a una contraddizione. Quindi, $n = 2^{\alpha_0} p^{\alpha}$, con p un primo dispari. Restano ora da esaminare i casi $n = 2^{\alpha_0}$ con $\alpha_0 \geq 3$ e $n = 2^{\alpha_0} p^{\alpha}$ con $\alpha_0 \geq 2$ e $\alpha \geq 1$, per mostrare che in questi casi $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ non è ciclico.

Consideriamo innanzitutto il caso $n = 2^{\alpha_0}$ con $\alpha_0 \geq 3$. Supponiamo, per assurdo che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{2^{\alpha_0}})$ sia ciclico. Consideriamo l'applicazione

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{2^{\alpha_0}}) = U(\mathbb{Z}_{2_0^{\alpha}}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8) = U(\mathbb{Z}_8), [u]_{2^{\alpha_0}} \mapsto [u]_8$$

che è un omomorfismo suriettivo di gruppi e quindi $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8)$ dovrebbe essere ciclico, ma $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, non è ciclico.

Infine, consideriamo il caso $n = 2^{\alpha_0} p^{\alpha}$ con $\alpha_0 \geq 2$ e $\alpha \geq 1$. Dall'isomorfismo $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{2^{\alpha_0}} \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha}}$, si ottiene

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{2^{\alpha_0}}) \times \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^{\alpha}}),$$

nuovamente per il Teorema 6.4.1. Tuttavia, le cardinalità sono

$$|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{2^{\alpha_0}})| = \varphi(2^{\alpha_0}) = 2^{\alpha_0 - 1}, \quad |\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^{\alpha}})| = p^{\alpha - 1}(p - 1),$$

entrambe pari (poiché $\alpha_0 \geq 2$ e p è un primo dispari), il che implica che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ non è ciclico, ottenendo così la contraddizione cercata. □

7.6 Esercizi

Esercizio 7.1 Sia G un gruppo abeliano e siano H e K sottogruppi finiti di G. Dimostrare che:

1. $|H + K|$ divide $|H||K|$;

2. se gli ordini di H e K sono coprimi. allora $H + K \cong H \times K$.

Esercizio 7.2 Sia G un gruppo abeliano di ordine n, dove $n = 28, 30, 130, 131$. Si dica per quali valori di n si puó affermare che G é necessariamente ciclico.

Esercizio 7.3 Dimostrare che se il gruppo $\mathrm{Aut}(G)$ degli automorfismi di un gruppo G é ciclico allora il gruppo é abeliano. (Suggerimento: se $\mathrm{Aut}(G)$ é ciclico anche $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$ é ciclico e quindi esiste $x \in G$ tale che $< xZ(G) >= G/Z(G)$. Segue che per ogni $y_1, y_2 \in G$ esistono $z_1, z_2 \in Z(G)$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tali che $y_1 = x^{n_1} z_1$ $y_2 = x^{n_2} z_2$. Dedurre che $y_1 y_2 = y_2 y_1$ e quindi G è abeliano.

Esercizio 7.4 Sia G un gruppo abeliano di ordine pq, con p e q primi non necessariamente distinti. Si trovi il numero dei sottogruppi di G. (Suggerimento: usare il teorema Frobenius-Stickelberger per dimostrare che G é isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^2}$ oppure a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ oppure a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ con $p \neq q$. Dimostrare che il gruppo ciclico $\mathbb{Z}_{p^2}$ ha 3 sottogruppi; il gruppo $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ ha 4 sottogruppi e il gruppo $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ha $p + 3$ sottogruppi).

Esercizio 7.5 Sia p un numero primo. Dimostrare che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p) \cong GL_2(\mathbb{Z}_p)$. (Suggerimento: ogni automorfismo di $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ puó essere visto come un'isomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ sul campo $\mathbb{Z}_p$).

Esercizio 7.6 Siano m e n due interi positivi coprimi. Dimostrare che ogni omomorfismo φ da $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ in se stesso ha la forma $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, dove $\varphi_j : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$, $j = 1, 2$, sono oppurtuni omomorfismi. (Suggerimento: usare il Lemma 6.4.2, che afferma che un omomorfismo $\varphi : H \to K$ tra due gruppi H e K di ordini coprimi é banale, cioé $\ker \varphi = H$).

Esercizio 7.7 Sia G un gruppo abeliano finito generato da due elementi x, y, $G = \langle x, y \rangle$. Sia p un numero primo che divide $|G|$, ma p non divide $o(x)$. Dimostrare che p divide $o(y)$. (Suggerimento: dimostrare che $G = \langle x \rangle + \langle y \rangle$ e che, per la parte (a) dell'Esercizio 7.1, $|\langle x \rangle + \langle y \rangle|$ divide $|\langle x \rangle||\langle y \rangle|$).

Esercizio 7.8 Sia G un gruppo finito. L'*esponente di G*, denotato con $\exp(G)$, è il minimo intero $n \geq 1$ tale che $x^n = e$ per *tutti* gli elementi $x \in G$. Dimostrare che

$$\exp(G) = \text{m.c.m.}\,\{\, o(x) \mid x \in G \,\}.$$

Esercizio 7.9 Sia G un gruppo abeliano finito. Dimostrare che esiste $x \in G$ tale che $o(x) = \exp(G)$, con $\exp(G)$ definito come nell'esercizio precedente.

Esercizio 7.10

1. In $\mathbb{Z}_n$, si dimostri che l'equazione $mx = 0$ ha esattamente (n, m) soluzioni.
2. Si concluda che in $\mathbb{Z}_n^r$ il numero di soluzioni di $mx = 0$ è $(n, m)^r$.
3. Si deduca che $\left|\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m,\ \mathbb{Z}_n^r)\right| = (n, m)^r$.

Bibliografia

[1] D. Dikranjan, M. S. Lucido, *Aritmetica e algebra*. Napoli: Liguori Editore, 2007. ISBN 978 - 88 - 207 - 4098 - 6.

[2] M. Artin, *Algebra*. Trad. di P. Maroscia. Torino: Bollati Boringhieri, 1997. (Collana: *Programma di matematica, fisica ed elettronica*). ISBN 978 - 88 - 339 - 5586 - 5.

[3] I. N. Herstein, *Algebra*. Roma: Editori Riuniti University Press, 2010. ISBN 978 - 88 - 6473 - 210 - 7.

[4] S. Montaldo, *Algebra 1*. Dispense del corso, Università degli Studi di Cagliari, A.A. 2024–2025. Materiale didattico online.

[5] C. C. Pinter, *A Book of Abstract Algebra*. 2nd ed. Mineola, NY: Dover Publications, 2010. ISBN 978 - 0 - 486 - 47417 - 5.