Esercizi sulle matrici $\mathbb{R}^n$

Corso di laurea in informatica A.A 2003-2004

Docente : Andrea Loi

Correzione Esercitazione

-1. a) Dire quali sono le dimensioni delle matrici seguenti:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) quali delle matrici precedenti possono essere moltiplicate tra loro?

Soluzione:

a) Nominando le matrici si ha A: 2x3, B: 2x2, C: 3x2, D: 3x4, E: 3x3.

b) poiché due matrici possono essere moltiplicate quando il numero delle colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda matrice, possono essere moltiplicate le seguenti:
AC, AD, AE ,BA, CB, CA, EC, ED.

0. Moltiplicare le seguenti matrici quando possibile:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, b) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, e) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, f) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

$$a) \begin{pmatrix} 28 & 14 \\ 79 & 44 \end{pmatrix}$$

$b)$ non possono essere moltiplicate

$$c) \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 31 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} -10 & 29 \\ -9 & 24 \end{pmatrix}$$

$f)$ non possono essere moltiplicate.

1. Siano date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcolare la terza colonna di AB senza calcolare la matrice AB

b) Calcolare la seconda riga di AB senza calcolare la matrice AB

Soluzione:

a) la terza colonna di AB si ottiene moltiplicando ciascuna riga di A per la terza colonna di B e si ha $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) la seconda riga di AB si ottiene moltiplicando la seconda riga di A per ciascuna colonna di B e si ha $\begin{pmatrix} 6 & 16 & 2 \end{pmatrix}$.

2 Calcolare i seguenti prodotti

$a) \begin{pmatrix} 7 & 2 & \sqrt{3} & 4 \\ 6 & 8 & a^2 & 2 \\ 3 & \sqrt{5} & a & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b) \begin{pmatrix} 6a & 2 & 3a^2 \\ 4 & 2\sqrt{a} & 2 \\ 5 & 12 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{j}, c) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 6 \\ 3 & 2\sqrt{3} & 4 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{k}.$

Soluzione:

$a) \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$

$b) \begin{pmatrix} 6a & 2 & 3a^2 \\ 4 & 2\sqrt{a} & 2 \\ 5 & 12 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{a} \\ 12 \end{pmatrix}$

$c)$ non possono essere moltiplicate perché k ha dimensione $3x1$.

3. Siano A e B due matrici nxn e supponiamo che A sia simmetrica. Quali delle seguenti equazioni è vera è quale e falsa?

$$a)\,(AB)^T = B^T A,\ b)\,(A^T B)^T = B^T A^T$$
$$c)\,(A^T B)^T = BA,\ d)\,(AB)^T = A^T B^T$$

Soluzione:

ricordando che $(AB)^T = B^T A^T$ e che se A è simmetrica $A^T = A$ si evince che $a)$ e $b)$ sono vere mentre $c)$ e $d)$ sono false.

4. Quali delle seguenti matrici sono diagonali ? simmetriche ? triangolari ? Antisimmetriche ?

$a)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $b)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2$, $c)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{pmatrix}$, $d)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2$, $e)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix}^2$,

$f)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix}^3$, $g)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $h)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $i)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3$,

$l)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$, $m)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$, $n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^4$

Soluzione:

Ricordando che una matrice è:

- diagonale se $a_{ij} = 0 \ per \ i \neq j$
- simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$
- triangolare superiore se $a_{ij} = 0 \ per \ i > j$
- triangolare inferiore se $a_{ij} = 0 \ per \ i < j$
- antisimmetrica se $a_{ij} = -a_{ji}$

si ha :

a) diagonale simmetrica

b) $= \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ diagonale simmetrica

c) $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ab & ab \end{pmatrix}$ triangolare inferiore

d)$= \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$ diagonale simmetrica

e) $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^2 & a^2 \end{pmatrix}$ triangolare inferiore

f)$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^3 & a^3 \end{pmatrix}$ triangolare inferiore

g)$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonale simmetrica

h)simmetrica

i)$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ triangolare inferiore

l) $= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ simmetrica m)$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

n) $=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$triangolare inferiore

5. Per quali valori di a le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ commutano?

Soluzione:

Si tratta di ricavare i valori di a per i quali $AB = BA$, si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+a & a \end{pmatrix}$$

pertanto deve aversi:

$$\begin{cases} 1+a=1 \\ a=0 \end{cases}$$

Si ricava quindi che le matrici considerate commutano per $a = 0$.

6. Determinare le matrici $2x2$ che commutano con la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Soluzione:

consideriamo una matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, affinche il prodotto $AB = \begin{pmatrix} 3c & 3d \\ 3a & 3b \end{pmatrix}$ sia uguale al prodotto $BA = \begin{pmatrix} 3b & 3a \\ 3d & 3c \end{pmatrix}$ deve aversi $c = b$ e $d = a$, concludiamo che le matrici che commutano con la matrice data sono tutte quelle del tipo $\begin{pmatrix} k & h \\ h & k \end{pmatrix}$.

7. Siano $A \in M_{1,5}$ e $B \in M_{5,1}$ definite come segue: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcolare AB e BA.

Soluzione:

$AB = -2 + \sqrt{2}$,

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2\sqrt{2} & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Calcolare il determinante e il rango delle seguenti matrici: a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione:

a) $det = 2$ pertanto il rango è massimo ossia 3.

b) $det = 0$, il rango non può essere massimo considero il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ il suo determinante vale $1 \neq 0$ pertanto il rango vale 2.

c) $det = 0$ il rango non può essere massimo considero il minore $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ il suo determinante vale $-2 \neq 0$ pertanto il rango vale 2.

9. determinare il rango delle seguenti matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Soluzione:

$rango(A) = 2$, $rango(B) = 1$.

10. Qual'è l'inversa delle matrici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$?

Soluzione:

Ricordando che data la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ la sua inversa $A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ si ha

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

11. Per quali valori del parametro λ le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \lambda & 0 & -1 \\ 5 & 4 & h \end{pmatrix}$ sono invertibili?

Soluzione:

Ricordando che una matrice è invertibile se il suo determinante è diverso da zero, calcoliamo per quali valori di λ il determinante è diverso da zero: $detA = -\lambda$ pertanto A è invertibile per $\lambda \neq 0$;

$detB = 8\lambda + 4$ pertanto B è invertibile per $\lambda \neq -\frac{1}{2}$.

12. Trovare l'inversa (se possibile) della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Soluzione:

il determinante di A è uguale a zero pertanto la matrice non è invertibile.

13. Sia S l'insieme delle matrici nxn simmetriche, T l'insieme delle matrici triangolari, D l'insieme delle matrici nxn diagonali. Dimostrare che $S \cap T = D$

Soluzione:

$S \cap T$ è costituito da tutte le matrici che risultano sia simmetriche sia triangolari. Pertanto se $A(a_{ij})$ appartiene a tale insieme deve aversi $a_{ij} = a_{ji}$ per la simmetria e $a_{ij} = 0$ per $i > j$ affinchè sia triangolare superiore. poiché devono essere soddisfate entrambe si ha $a_{ij} = 0 = a_{ji}$ per $i \neq j$ ma questa è la condizione che deve essere soddisfata da una matrice diagonale. (la dimostrazione è stata fatta considerando matrici triangolari superiori, analogo discorso per quelle triangolari inferiori.)

14. Vero o Falso:

1. Se $A \in M_{n,n}$ ha due righe uguali allora $detA = 0$.
2. Se $A, B \in M_{n,n}$ $det(AB) = det(BA)$.
3. Se $A \in M_{n,n}$ e $k \in \mathbb{R}$, $det(kA) = kdetA$.
4. Se $A \in M_{n,n}$ e $k \in \mathbb{R}$, $det(kA) = k^n detA$.
5. Se $A \in M_{n,n}$ n dispari, $det(A) = -det(-A)$.
6. Se $A \in M_{n,n}$ n pari, $det(A) = det(-A)$.

giustificare le risposte.

Soluzione:

1. VERO: Ricordando che se una matrice B è ottenuta scambiando due righe di A deve aversi $detB = -detA$ se $A \in M_{n,n}$ ha due

righe uguali allora scambiando le due righe uguali si ha $detA = -detA$ ossia $detA = 0$.

2. VERO: Ricordando che date $A, B \in M_{n,n}$ $det(AB) = detAdetB$ e $detA$ $detB$ sono numeri reali pertanto vale la proprietá commutativa del prodotto si ha $det(AB) = detAdetB = detBdetA = det(BA)$.
3. FALSO : vale la successiva
4. VERO: Se Sia B la matrice ottenuta moltiplicando la prima riga di A per k ossia $B = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ si ha sviluppando il determinante rispetto alla prima riga $detB = ka_{11}A_{11} + ka_{12}A_{12} + \ldots + ka_{n1}A_{n1} = k(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{n1}A_{n1}) = kdetA$. Sia C la matrice ottenuta moltiplicando la seconda riga di B per k per quanto detto sopra $detC = k(detB) = k(kdetA) = k^2detA$, procedendo in maniera analoga considerando anche le righe successive moltiplicate per k si ha $det(kA) = k^n detA$.
5. VERO: $-A$ è la matrice ottenuta moltiplicando ciascuna riga di A per -1, Per la proprietà 4. $det(-A) = (-1)^n detA$, se n dispari $(-1)^n = -1$ si ha $det(-A) = -det(A)$.
6. VERO: $-A$ è la matrice ottenuta moltiplicando ciascuna riga di A per -1, Per la proprietà 4. $det(-A) = (-1)^n detA$, se n pari $(-1)^n = 1$ si ha $det(-A) = det(A)$.

15. Sia A una matrice antisimmetrica nxn con n dispari: dimostrare che $detA = 0$.

Soluzione:

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ e $-A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$, sviluppare il determinante di A secondo la prima riga equivale a sviluppare il determinante di $-A$ secondo la prima colonna, pertanto $detA = det(-A) = -detA$ essendo n dispari; si ricava quindi $detA = 0$.

16. Sia A una matrice ortogonale nxn dimostrare che $detA = \pm 1$

Soluzione:

Per definizione una matrice A è ortogonale sse $AA^T = I$ dove con I si indica la matrice identità; Ricordando che $detA = det(A^T)$ si ha $det(AA^T) = detI$ ossia $detAdet(A^T) = detI$, si ricava $(detA)^2 = 1$ cioé $detA = \pm 1$ come volevasi dimostrare.