Esercizi sulle curve, superficie e quadriche
Geometria 3, Corso di Laurea in Matematica A.A. 2007-2008
Docente: Andrea Loi

1. Scrivere le equazioni cartesiane della curva di equazioni parametriche:
$$(x,y,z) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, -2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta, -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right).$$

2. Scrivere le equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza ottenuta facendo ruotare il punto $(1,0,0)$ intorno alla retta $x - y = z = 0$.

3. Sia L la curva di equazioni parametriche
$$L : (x,y,z) = (t, 1-t^2, 1-t-t^2).$$
   (a) Dire quali dei seguenti punti stanno su L: $P_1(0,0,0)$, $P_2(1,0,0)$, $P_3(0,1,1)$, $P_4(1,1,1)$, $P_5(1,0,-1)$;
   (b) trovare le intersezioni della curva L con il piano $\alpha : 2x+y-z=0$;
   (c) verificare che la curva L è piana e trovare un piano che la contiene;
   (d) scrivere in forma parametrica e cartesiana le proiezioni ortogonali della curva L sui piani coordinati.

4. Trovare le intersezioni della superficie $S : (x,y,z) = (u^2, u+v, uv)$ con gli assi coordinati.

5. Trovare un'equazione cartesiana della superficie
$$S : (x,y,z) = (u^2, u+v, uv).$$

6. Trovare l'equazione cartesiana di una superficie diversa da un piano che contiene la curva $L : (x,y,z) = (e^t, t, e^t)$.

7. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane delle proiezioni sui piani coordinati della curva
$$L : x^2 + y^2 - 1 = x^2 + z^2 - 1 = 0.$$

8. Scrivere l'equazione cartesiana della sfera S tangente in $P(-1, 0.0)$ al piano $2x + y - 2z + 2 = 0$ e avente centro sul piano $y + z + 1 = 0$. Trovare inoltre l'equazione del cilindro avente generatrici parallele all'asse coordinato z e come direttrice la circonferenza intersezione della sfera S con il piano z.

9. Nello spazio sono dati la retta $s : x - 10y = z = 0$ e la retta t passante per $P(1, 2, 0)$ e di parametri direttori $(1, -1, 1)$.

   (a) Scrivere l'equazione della superficie Σ generata dalla rotazione della retta s attorno alla retta t;

   (b) Detta C la curva sezione di Σ con il piano $y = k,\ k \in \mathbb{R}$, deteminare l'equazione cartesiana del cilindro $\tilde{\Sigma}$ avente generatrici parallele alla retta di equazioni $x = z = 0$ e per direttrice la curva C.

10. Determinare:

    (a) le equazioni della retta t del piano $x + 2y = 0$, incidente la retta $x - y = z - 2 = 0$ e ortogonale alla retta $x - y + z = 2x - 2y - 1 = 0$;

    (b) l'equazione del cilindro rotondo avente per asse la retta t e passante per il punto $A(1, 1, 1)$;

    (c) l'equazione del cono rotondo di vertice $V(1, 0, 0)$ avente l'asse parallelo alla retta t e passante per $B(2, 1, 1)$;

11. Scrivere l'equazione del cono di rotazione che ha il vertice nell'origine degli assi coordinati e passa per i punti $A(1, 2, 2)$, $B(2, 2, 1)$, $C(2, 1, 2)$.

12. Un cilindro circolare retto ha per asse la retta di equazioni $x = 0, y = z$ e raggio $r = 1$ (distanza delle generatrici dall'asse). Determinare l'equazione cartesiana della sua intersezione con il piano $z = 0$.

13. Scrivere l'equazione cartesiana del cono che taglia sul piano $z = 0$ la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ ed ha vertice in $V(1, 1, 2)$.

14. Scrivere l'equazione cartesiana del cilindro rotondo che passa per il punto $A(1,1,1)$ e che ha come asse di rotazione la bisettrice del primo e del terzo quadrante del piano xy.

15. Dopo aver verificato che la superficie $S : x^2 + y^2 + xz = 0$ rappresenta un cono di vertice l'origine, dimostare che S non è di rotazione.

16. Scrivere l'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{S}$ generata dalla rotazione dell'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 - 4 = 0, z = 0$ attorno al suo asse maggiore. Scrivere inoltre le equazioni delle rette normali a $\mathcal{S}$ nei punti in cui $\mathcal{S}$ interseca la retta $x = y = z$.

17. Sia σ la circonferenza del piano xz avente centro nel punto $C(c, 0, 0), c > 0$ e raggio r tale che $r < c$. Determinare le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana della superficie generata da σ per rotazione intorno all'asse z.

18. Verificare che la superficie $S : (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) - z = 0$ è di rotazione intorno all'asse z. Studiare inoltre le intersezioni di S con i piani paralleli al piano xy.

19. Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della superficie S generata dalla rotazione della linea $L : x = t, y = t^2, z = t^3$ intorno all'asse x.

20. Sia P un punto dello spazio e r una retta che non contiene P. Dimostrare che il luogo dei punti dello spazio le cui distanze da P e da r hanno un rapporto costante k è un ellissoide di rotazione se $k < 1$, un iperboloide di rotazione se $k > 1$ e un cilindro parabolico ortogonale al piano individuato dalla retta r e il punto P se $k = 1$ (suggerimento: prendere r come l'asse z e $P(a, 0, 0)$). Cosa succede se P appartiene a r ?

21. Sia P un punto dello spazio e α un piano che non contiene P. Dimostrare che il luogo dei punti dello spazio le cui distanze da P e da α hanno un rapporto costante k è una quadrica S di rotazione intorno

alla retta passante per P e perpendicolare a α. Più precisamente S è un ellissoide se $k < 1$, un paraboloide se $k = 1$ e un iperboloide se $k > 1$ (suggerimento: prendere α come il piano xy e $P(0, 0, a)$). Cosa succede se P appartiene a α?

22. Sia Γ la quadrica di equazione

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0.$$

Verificare che Γ è una quadrica degenere ma non riducibile.

23. Sia Γ una delle quadriche che seguono:

$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y = 0,$

$x^2 - y^2 + 2z^2 + 6yz - 4xz - 2x - 3 = 0$

$x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz - 6z + 1 = 0,$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2xz + 2yz - 2y = 0,$

$x^2 + 4y^2 - z^2 + 2y = 0,$

$x^2 + 4y^2 - z^2 + 6z = 0,$

$x^2 + 4y^2 - z^2 + 4y - 2z = 0,$

$x^2 + y^2 + 2xy - xz - yz + 3y = 0,$

$x^2 + 4xy + 4y^2 + z^2 - 6x = 0,$

$x^2 + (x + 2y)^2 + (z + 3x)^2 + 2x = 0,$

$(x - 1)^2 + 3(y - 2)^2 + 5z^2 = 0,$

$x^2 - 6xy + 8z^2 - 2x - 1 = 0,$

$xy + xz - yz - x = 0,$

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4,$

$x^2 + 2y^2 + z^2 = -1,$

$x^2 - y^2 + z^2 = 1,$

$2x^2 - y^2 + z^2 + 3 = 0,$

$x^2 - y^2 + z = 0,$

$x - y^2 - z^2 = 0.$

Dire se Γ è degenere o non-degenere. Se Γ è degenere dire se si tratta di un cono immaginario o reale (in quest'ultimo caso si trovi il vertice), un cilindro (parabolico, ellittico, iperbolico o immaginario) o di una coppia di piani. Nel caso Γ sia non-degenere dire se si tratta di un' ellissoide (reale o immaginario), di un'iperboloide ad una falda o a due falde, di un paraboloide ellittico o iperbolico, trovare la forma canonica di Γ e le equazioni del cambiamento di riferimento che portano Γ in forma canonica. Dire inoltre se Γ passa per l'origine O del sistema di riferimento e, in caso affermativo trovare il piano tangente a Γ nell'origine e l'intersezione di questo piano con Γ.