

**Esercizi sulla teoria degli anelli**  
**Corso di Laurea in Matematica A.A. 2019-2020**  
**Docente: Andrea Loi**

1. Sul gruppo abeliano  $A = (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$  si consideri la moltiplicazione definita da

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' + yy', xy' + x'y).$$

- (a) Dimostrare che in questo modo  $(A, +, \cdot)$  risulta un anello unitario e  $\mathbb{R} \times \{0\}$  è un suo sottoanello.
  - (b) Caratterizzare gli elementi invertibili ed i divisori dello zero di  $A$ .
  - (c) Dire se esistono elementi che non sono né divisori dello zero né invertibili.
  - (d) Trovare gli ideali massimali di  $A$ .
2. Sia  $A$  un anello commutativo unitario e  $I$  e  $J$  ideali di  $A$ . Definiamo

$$IJ = \{i_1 j_1 + \cdots + i_n j_n \mid n \in \mathbb{N}, i_k \in I, j_k \in J, k = 1, \dots, n\}.$$

- (a) Provare che  $IJ$  è un ideale di  $A$  contenuto nell'ideale  $I \cap J$  e mostrare con un esempio che  $IJ \neq I \cap J$ .
  - (b) Provare che se  $A = I + J$  allora  $IJ = I \cap J$ .
  - (c) Provare che l'affermazione in (b) non è vera se  $A$  non è un anello unitario.
  - (d) se  $I$  e  $J$  sono due ideali massimali distinti, allora  $IJ = I \cap J$ ;
  - (e) se  $I$  e  $J$  sono ideali principali,  $I = (a)$  e  $J = (b)$ , allora  $IJ = (ab)$ .
  - (f) descrivere  $IJ$  e  $I \cap J$  in  $A = \mathbb{Z}$  e dedurre quando  $IJ = I \cap J$ .
3. Sia  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ . Provare che  $A$  è un sottocampo di  $M_2(\mathbb{Z}_3)$ . Dimostrare inoltre che  $(A^*, \cdot)$  è un gruppo ciclico, determinare l'ordine di  $A^*$  e un suo generatore.
4. Sia  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ . Provare che  $A$  è un sottocampo di  $M_2(\mathbb{R})$  isomorfo a  $\mathbb{C}$ .
5. Sia  $A$  un anello unitario e  $I$  un ideale bilatero di  $A$ . Dimostrare che l'insieme  $U_I = \{x \in U(A) \mid x - 1 \in I\}$  è un sottogruppo normale di  $U(A)$ .
6. Sia  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ .

- (a) Provare che  $A$  è un anello commutativo unitario, ma non è un dominio.
  - (b) Determinare l'ideale  $N(A)$  degli elementi nilpotenti di  $A$ .
  - (c) Mostrare che ogni ideale proprio di  $A$  è contenuto in  $N(A)$  e dedurre che  $A$  è un anello locale.
  - (d) Determinare tutti gli ideali di  $A$ .
7. Nell'anello  $M_2(\mathbb{Z}_8)$ , sia  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 5b \\ 4b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_8 \right\}$ .
- (a) Provare che  $A$  è un sottoanello commutativo di  $M_2(\mathbb{Z}_8)$ .
  - (b) Dire se  $A$  è un dominio.
8. Sia  $p$  un primo e  $S = \{n \in \mathbb{Z} \mid p \nmid n\}$ . Definiamo una relazione d'equivalenza su  $\mathbb{Z} \times S$ :  $(m, n) \sim (m', n')$  se e solo se  $mn' = m'n$ . Sia  $\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}/\sim$ .
- (a) Provare che  $\mathbb{Z}_{(p)}$  è un sottoanello di  $\mathbb{Q}$ .
  - (b) Provare che  $\mathbb{Z}_{(p)}$  è un anello locale.
9. Dimostrare che:
- (a) ogni campo è un anello locale senza elementi nilpotenti non nulli;
  - (b) se  $\mathbb{Z}_m$  è locale e non ha elementi nilpotenti non nulli allora  $\mathbb{Z}_m$  è un campo;
  - (c) dare un esempio di anello locale senza elementi nilpotenti non nulli che non sia un campo.
10. Un anello commutativo unitario si dice *regolare* se per ogni  $x \in A$  esiste  $y \in A$  tale che  $x = yx^2$ . Dimostrare che:
- (a) ogni campo è un anello regolare e se  $A$  è un dominio regolare allora  $A$  è un campo;
  - (b) l'anello quoziente di un anello regolare è regolare;
  - (c) in un anello regolare ogni ideale primo è massimale;
  - (d) in un anello regolare ogni ideale principale è generato da un idempotente;
  - (e) se  $I$  e  $J$  sono due ideali di un anello regolare allora  $IJ = I \cap J$ ;
  - (f) per ogni insieme non vuoto  $S$  e per ogni campo  $K$ , l'anello  $K^S$  è regolare.
11. Sia  $G$  un gruppo abeliano ed  $\text{End}(G)$  l'insieme degli endomorfismi di  $G$ . Siano  $f, g \in \text{End}(G)$  e si definisca  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , per  $x \in G$ . Sia  $\circ$  l'usuale composizione di funzioni, cioè  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  per  $x \in G$ .
- (a) Si dimostri che  $(\text{End}(G), +, \circ)$  è un anello unitario.

- (b) Sia  $A$  un anello unitario. Si dimostri che  $A$  si può identificare con un sottoanello di  $\text{End}(G)$  per qualche gruppo abeliano  $G$ .

12. Sia  $G$  un gruppo abeliano e  $f \in A = \text{End}(G)$ .

- (a) Dimostrare che se  $f$  è suriettivo, allora  $f$  non è divisore destro dello zero in  $A$ .  
 (b) Dimostrare che se  $f$  è iniettivo, allora  $f$  non è divisore sinistro dello zero in  $A$ .  
 (c) Trovare un anello dove esistono divisori sinistri dello zero che non sono divisori destri dello zero (suggerimento: considerare l'anello  $\text{End}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})$ ).

13. Sia  $S$  un insieme. Nell'insieme  $\mathcal{P}(S)$  definiamo l'operazione  $\Delta$ , chiamata *differenza simmetrica*,

$$X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y),$$

per ogni coppia di sottoinsiemi di  $S$ .

- (a) Provare che la struttura algebrica  $(\mathcal{P}(S), \Delta, \cap)$  è un anello commutativo unitario e che ogni sottoinsieme proprio di  $S$  è un divisore dello zero di  $A$ .  
 (b) Sia  $Y \in \mathcal{P}(S)$ : provare che l'applicazione  $\varphi : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(S)$ , definita da  $\varphi(X) = X \setminus Y$  è un omomorfismo di anelli (non unitario) e determinare  $\ker \varphi$  e  $\text{Im} \varphi$ .  
 (c) Sia  $Y \in \mathcal{P}(S)$ : determinare l'ideale  $(Y)$ .  
 (d) Se  $S$  è finito, provare che ogni ideale di  $\mathcal{P}(S)$  è principale.  
 (e) Determinare la caratteristica di  $\mathcal{P}(S)$ .

14. Sia  $A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$ .

- (a) Dimostrare che  $A$  è un sottoanello di  $M_2(\mathbb{C})$ .  
 (b) Sia  $q = a + bi + cj + dk$  un elemento del corpo dei quaternioni  $\mathbb{H}$ . Si dimostri che l'applicazione  $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow A$  definita da

$$\varphi(q) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha = a + ib, \quad \beta = c + id \in \mathbb{C}$$

è un isomorfismo di anelli e pertanto di corpi.

- (c) Si verifichi che

$$\det(\varphi(q)) = \|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Si deduca che  $\|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|$ , per ogni  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ .

- (d) Si verifichi che l'insieme dei quaternioni di norma 1 è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo  $(\mathbb{H}^*, \cdot)$ .

15. Determinare l'insieme degli endomorfismi unitari dei seguenti anelli:  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ .

16. Sia  $f : A_1 \rightarrow A_2$  un omomorfismo di anelli unitari.

(a) Provare che  $f(U(A_1)) \subseteq U(A_2)$ .

(b) Considerando l'omomorfismo canonico  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ , mostrare che in (a) non vale l'uguaglianza se  $n > 6$ .

17. Sia  $A$  l'anello  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$

(a) Trovare la caratteristica di  $A$ .

(b) Descrivere gli ideali (primi, massimali e principali) di  $A$ .

(c) Determinare a quale degli anelli  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15}$ ,  $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$  e  $\mathbb{Z}_{60}$  è isomorfo l'anello  $A$ .

(d) Descrivere quali sono gli elementi invertibili e gli elementi nilpotenti di  $A$ .

18. Sia  $\mathbb{K}$  un campo e  $A = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$  ( $n$  fattori). Trovare gli ideali primi e massimali di  $A$  e dire quanti sono.

**Soluzione:** Gli ideali di  $A$  si ottengono come prodotto degli ideali dei singoli fattori. Essendo i singoli fattori campi i loro ideali sono solo  $\{0\}$  e  $\mathbb{K}$ . Il quoziente di  $A$  per uno di questi ideali è un dominio se e solo se è isomorfo a  $\mathbb{K}$ . Quindi gli ideali primi sono in numero di  $n$  e si ottengono:

$$\mathbb{K} \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \{0\}, \dots, \{0\} \times \{0\} \times \cdots \times \mathbb{K}$$

Questi (in tutto  $n$ ) sono anche tutti gli ideali massimali e primi.

19. Nell'anello  $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  si considerino gli ideali  $I = (2)$  e  $J = (3)$ . Dire se gli anelli quoziente  $A/I$  e  $A/J$  sono campi.

20. Nell'anello  $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$  sia  $I = (5)$  e si consideri l'anello quoziente  $A/I$ .

(a) Provare che se  $a \equiv 0 \pmod{5}$ , allora l'elemento  $a + b\sqrt{5} + I$  è nilpotente.

(b) Provare che se  $a \not\equiv 0 \pmod{5}$ , allora l'elemento  $a + b\sqrt{5} + I$  è invertibile.

(c) Determinare gli ideali di  $A/I$ .

21. Sia  $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ . Per  $\alpha = x + \sqrt{5}y \in A$  definiamo la norma di  $\alpha$  come  $N(\alpha) = x^2 - 5y^2$ . Dimostrare che  $M = \{\alpha \in A \mid N(\alpha) \text{ pari}\}$  è un ideale massimale di  $A$ .