Esercizi sulle coniche
Geometria 3, Corso di Laurea in Matematica A.A. 2007-2008
Docente: Andrea Loi

1. Che cosa rappresentano le seguenti equazioni di secondo grado?

   $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0,$

   $x^2 + y^2 - 2y + 3 = 0,$

   $2x^2 + 2y^2 + 3x + y - 9 = 0,$

   $x^2 - 4y^2 = 0,$

   $x^2 - y^2 + 3x + y + 2 = 0,$

   $x^2 - y - 2x + 3 = 0,$

   $(x - 2y)^2 + y^2 = -\sqrt{2}$

   $2x^2 - 3y^2 = 3$

   $x - (y - 1)^2 + 3 = 0,$

   $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 = 0,$

   $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23 = 0,$

   $2y^2 - x^2 - 4x - 4y - 5 = 0.$

2. Dimostrare che l'equazione

   $$x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy - 2 = 0$$

   rappresenta un'iperbole, considerando un nuovo sistema di riferimento ottenuto con una rotazione di $\frac{\pi}{6}$ in senso antiorario.

3. Dimostrare che l'equazione

   $$5x^2 + 7y^2 + 2\sqrt{3}xy = 2$$

   rappresenta un'ellisse, considerando un nuovo sistema di riferimento ottenuto con una rotazione di $\frac{\pi}{3}$ in senso antiorario.

4. Trovare l'equazione delle curve $2x^2 + y^2 = 2$, $2x^2 - y^2 = 2$, $y^2 = x$ in coordinate polari.

5. Che cosa rappresentano le curve $\rho = \frac{5}{1+\cos\theta}$, $\rho = \frac{5}{1-2\cos\theta}$ e $\rho = \frac{5}{1+2\cos\theta}$ in ccordinate polari (ρ, θ)? (specificare dove varia θ).

6. Sia $(ax + by)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ una parabola. Dimostrare che il suo asse ha equazione $(a^2 + b^2)(ax + by) + aa_{13} + ba_{23} = 0$.

7. Sia $\sigma : f(x, y)$ un'iperbole e sia A la matrice dei termini di secondo grado associata a f. Dimostrare che σ è equilatera se e solo se $trA = 0$.

8. Dimostrare che gli assi di un iperbole sono le bisettrici degli asintoti.

9. Sia $\mathcal{C}$ una delle coniche che seguono:

   (a) $x^2 + xy - y^2 = 1$,
   (b) $x^2 + 3xy = 10$,
   (c) $3x^2 - 4y^2 + 2xy + 1 = 0$,
   (d) $x^2 + 9y^2 - 6xy = 4x + 3y - 1$,
   (e) $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 2x + y = 0$,
   (f) $x^2 - y^2 + x + y = 0$,
   (g) $2x^2 + 2\sqrt{2}xy + 3y^2 + 4(\sqrt{2} - 1)x + 2(6 - \sqrt{2})y - 4\sqrt{2} = 0$,
   (h) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4\sqrt{2}x - 12\sqrt{2}y + 26 = 0$,
   (i) $x^2 + y^2 + 2xy + 2(1 - \sqrt{2})x + 2(1 + \sqrt{2})y + 1 - 2\sqrt{2} = 0$,
   (j) $5x^2 + 7y^2 + 2\sqrt{3}xy + 2\sqrt{3}x + 14y + 5 = 0$,
   (k) $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy + 2(1 - \sqrt{3})x + 2(1 + \sqrt{3})y - 2(1 + \sqrt{3}) = 0$,
   (l) $\lambda xy + 2x + 3y + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

   Classificare $\mathcal{C}$, cioè dire se si tratta di una conica degenere o non-degenere, e in caso non sia degenere dire se si tratta di un' ellisse di un'iperbole o di una parabola. Trovare la forma canonica di $\mathcal{C}$ e le equazioni del cambiamento di riferimento che portano $\mathcal{C}$ in forma canonica. Trovare inoltre, quando possibile: centro, vertici, assi, asintoti, fuochi, direttrici e eccentricità.

10. Sia σ un'ellisse. Dimostrare che la normale all'ellisse in un suo punto (cioè la perpendicolare alla tangente nel punto) divide per metà l'angolo formato dai segmenti che uniscono questo punto con i due fuochi. Di conseguenza un raggio di luce che parta da uno dei fuochi e colpisca l'ellisse, verrà riflesso nell'altro fuoco.

11. (sulla polarità definita da una conica non degenere) Sia $\sigma : f(x,y) = (x,y,1)B(x,y,1)^T$ una conica non degenere ($\det B \neq 0$) e sia $P_0(x_0,y_0)$ un punto del piano. La *polare* r_{P_0} di P_0 rispetto a σ è la retta di equazione:

$$(x_0,y_0,1)B(x,y,1)^T.$$

Il punto P_0 si dice *polo* di r_{P_0}.

(a) dimostrare che la polare di σ si può ottenere con la regola degli sdoppiamenti e quindi coincide con quelle già introdotta se σ è una circonferenza;

(b) si trovino le polari rispetto a $P_0(x_0,y_0)$ delle seguenti coniche: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, a,b\neq 0$, $x^2=2py, p\neq 0$ e si indichino i punti che non hanno polare;

(c) si provi che se P_0 appartiene a σ allora la sua polare è la tangente a σ in P_0;

(d) se r è la retta tangente a σ allora il suo polo P è il punto di contatto della retta con la conica;

(e) si provi che se P sta nella polare di Q allora Q sta nella polare di P;

(f) se la polare di un punto taglia la conica in due punti reali A e B allora le rette per P_0 e A e per P_0 e B sono rette tangenti alla conica;

(g) se una retta incontra σ in due punti distinti A e B il suo polo è il punto in comune alle rette tangenti a σ in A e B;

(h) determinare le rette del piano per il quale il polo non è definito (distinguere il caso di ellisse, iperbole e parabola);

(i) dimostrare che la polare di un fuoco F di σ è la direttrice associata al polo;

(j) trovare la retta tangente alla conica $\sigma : y = x^2$ uscenti dal punto $P_0(1, -3)$.

(k) si trovi il polo della retta $r : x + 4y - 1 = 0$ rispetto alla conica $y^2 = 1 + x^2$.

12. Siano r_1 e r_2 due rette distinte del piano e sia P un punto del piano tale che $P \notin r_1$ e $P \notin r_2$. Dimostrare che esiste un'unica iperbole che ha r_1 e r_2 come asintoti e che passa per il punto P. Fissato un sistema di riferimento cartesiano, trovare l'equazione dell'iperbole che ha come asintoti le rette $r_1 : x + y = 0$, $r_2 : x - 2y + 1 = 0$ e che passa per il punto $P(1, 0)$.

13. Sia r una retta del piano e siano P_1, P_2, P_3 tre punti non allineati del piano tali che non esiste nessuna parallela a r passante per due dei tre punti. Dimostrare che esiste un'unica parabola che ha come asse una retta parallela a r e passa per i tre punti. Fissato un sistema di riferimento cartesiano, trovare l'equazione della parabola parallela all' asse la retta $r : x - y + 1 = 0$ e che passa per i punti $P_1(1, 1), P_2(1, 0), P_3(0, 1)$.

14. Siano P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 cinque punti del piano tali che mai quattro di essi siano allineati. Usando i fasci di coniche, dimostrare che esiste un'unica conica che passa per i cinque punti. Trovare la conica che passa per i cinque punti $O(0, 0)$, $P_1(1, 1)$, $P_2(1, -1)$, $P_3(2, 0)$, $P_4(-1, 1)$.

15. Scrivere l'equazione del fascio che passa per i punti $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 2)$.

16. Si provi che data una retta r, un punto $P \in r$ e due punti Q e R non su r. Le coniche passanti per Q e R e tangenti a r in P formano un fascio. Fissato un sistema di riferimento cartesiano si trovi il fascio di coniche tangenti a $r : 2x - y = 0$ in O e passanti per $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Si

trovi inoltre la conica di questo fascio che passa per il punto $(1,1)$ e se ne descriva il tipo (ellisse, iperbole, parabola, degenere).

17. Si provi che date due rette r e s e due punti $P \in r$ e $Q \in s$, le coniche tangenti a r in P e ad s in Q formano un fascio. Fissato un sistema di riferimento cartesiano, si trovi il fascio di coniche tangenti a $r : 2x - y = 0$ in O e a $s : x - y + 1 = 0$ in $P(0,1)$. Si trovi inoltre la conica di questo fascio che passa per il punto $(1,1)$ e se ne descriva il tipo (ellisse, iperbole, parabola, degenere).

18. Si trovino le parabole tangenti alla conica $\sigma : x^2 - xy - 2y = 0$ in O e in $P(2,1)$.

19. Sia data la famiglia di parabole

$$\sigma_t : (tx + y)^2 = x + ty, t \in \mathbb{R}.$$

Si determinino:

(a) le curve degeneri della famiglia;

(b) i quattro punti in cui tale curve si intersecano;

(c) l'asse e il vertice di σ_t.