Capitolo 1

Elementi di geometria analitica nel piano

1.1 Richiami di geometria euclidea piana

In questa sezione verranno menzionati alcuni concetti della geometria del piano di Euclide riguardanti l'appartenenza di punti, rette e alcune proprietà metriche. Verranno anche richiamati alcuni concetti sui vettori applicati e liberi (visti nel corso di Geometria 1).

A. Proprietà di appartenenza

- Due punti distinti individuano una e una sola retta.
- Due rette distinte individuano un punto (e in tal caso si dicono incidenti) oppure sono parallele.
- Dati un punto P e una retta r tale che $P \notin r$, esiste una e una sola retta s per P parallela a r (quinto postulato di Euclide).
- Un fascio (proprio) di rette è l'insieme di tutte le rette del piano che passano per un punto fisso C, detto centro;

- Un fascio (improprio) di rette è l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data.

B. Proprietà metriche

- Dati un punto A e una retta r, esiste una e una sola retta s per A perpendicolare a r.
- Due rette incidenti formano due angoli supplementari.
- La proiezione ortogonale di un punto P su una retta r che non lo contiene è l'intersezione Q di r con la retta per P perpendicolare a r. La distanza di un punto P da una retta r è la distanza del punto P dalla sua proiezione ortogonale Q su r.

C. Misure

- La misura (o lunghezza) del segmento AB rispetto al segmento unità di misura u è il numero reale m tale che $AB = mu$.
- Dati una retta r, un suo punto O e un numero reale m positivo, esistono esattamente due punti P e Q su r tali che OP e OQ abbiano lunghezza m.
- Gli angoli si misurano in gradi o, più comunemente in radianti; misura un radiante l'angolo che sottende, in una circonferenza qualsiasi, un arco lungo quanto il raggio.

D. Circonferenze

- Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza Γ circoscritta al triangolo avente i tre punti come vertici.

- Una circonferenza Γ e una retta s si tagliano:

  in due punti distinti se la distanza del centro di Γ da s è minore del raggio;

  in un solo punto se la distanza del centro di Γ da s è uguale al raggio;

  in nessun punto se la distanza del centro di Γ da s è maggiore del raggio.

- Due circonferenze Γ e Σ si tagliano in:

  due punti distinti se la distanza dei centri è minore della somma dei raggi e maggiore della differenza (circonferenze secanti);

  in un punto se la distanza dei centri è uguale alla somma;

  in un punto se la distanza dei centri è uguale alla differenza dei raggi;

  in nessun punto se la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi;

  in nessun punto se la distanza dei centri è minore della differenza dei raggi.

- **Vettori applicati**

  Indichiamo con $\mathcal{A}^2$ il piano usuale della geometria euclidea. Fissiamo un punto $O \in \mathcal{A}^2$.

  Definizione 1 *Un vettore applicato in O è un segmento orientato con primo estremo in O e secondo estremo in $A \in \mathcal{A}^2$, $A \neq O$. Questo vettore sarà disegnato come una freccia che parte da O e giunge ad A e indicato con $\vec{OA}$ oppure con $A - O$.*

  Indicheremo con V_O^2 l'insieme dei vettori applicati in O; il punto O è l' *origine* di V_O^2.

  Possiamo definire una funzione bigettiva

$$\Phi_O : \mathcal{A}^2 \to V_O^2,\ A \mapsto \vec{OA}. \tag{1.1}$$

In parole, al punto $A \in \mathcal{A}^2$ viene associato il vettore applicato in O che termina in A. In particolare all'origine O viene associato il vettore $\vec{OO}$, chiamato il *vettore nullo*.

Due vettori applicati $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ possono essere sommati con la regola del parallelogramma. Indicheremo questa somma con $\vec{OA} + \vec{OB}$.

Inoltre un vettore $\vec{OA}$ può essere moltiplicato per una costante $\lambda \in \mathbb{R}$. Indicheremo questo prodotto con $\lambda\vec{OA}$.

Il fatto importante di queste operazioni è espresso dal seguente

Teorema 2 *La somma e la moltiplicazione per scalari appena descritte fanno si che V_O^2 sia uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.*

- **Vettori liberi**

Vogliamo ora considerare come uno *stesso vettore* due vettori $\vec{OA}$ e $\vec{O'}A'$ applicati in punti diversi ma paralleli, congruenti e con lo stesso verso. In termini più formali, diremo che questi vettori sono entrambi rappresentati dallo stesso vettore libero, un concetto che sarà ora richiamato.

Indichiamo con $\tilde{V}^2$ l'insieme di tutti i vettori applicati del piano, qualunque sia la loro origine.

Definizione 3 *Diremo che i vettori applicati $\vec{OA}$ e $O'\vec{A}'$ sono equivalenti, e scriveremo $\vec{OA} \sim O'\vec{A}'$, se sono paralleli, congruenti e hanno lo stesso verso. In altre parole $\vec{OA} \sim O'\vec{A}'$ e se solo se $OO'AA'$ è un parallelogramma.*

Non è difficile vedere che $\sim$ è una relazione d'equivalenza (esercizio).

Definizione 4 *Un vettore libero nel piano è una classe di equivalenza per la relazione $\sim$ sull'insieme $\tilde{V}_2$. L'insieme quoziente $\tilde{V}^2/\sim$ di tutti i vettori* *liberi verrà indicato con V_2. Indichiamo con $\pi : \tilde{V}_2 \to V_2$ l'applicazione quoziente che a ogni vettore libero $\vec{AB}$ associa la sua classe di equivalenza $[\vec{AB}]$.*

Prima di definire la somma e il prodotto tra vettori liberi, osserviamo che dato $v \in V_2$ e $O \in \mathcal{A}^2$ allora esiste un unico punto $A \in \mathcal{A}^2$ tale che $v = [\vec{OA}]$, cioè esiste un unico vettore applicato in O che rappresenta v. Infatti, se $\vec{O'B}$ è un qualunque rappresentante di v, allora esiste un unico punto A tale che $OO'BA$ si un parallelogramma: A è dato da $\vec{OA} = \vec{OB} - \vec{OO'}$

Siano v e w due vettori liberi e $\lambda \in \mathbb{R}$. Scegliamo $O \in \mathcal{A}^2$. Allora esiste un unico $A \in \mathcal{A}^2$ e $B \in \mathcal{A}^2$ tale che $v = [\vec{OA}]$ e $w = [\vec{OB}]$. Definiamo

$$v + w = [\vec{OA} + \vec{OB}]$$

e

$$\lambda v = [\lambda \vec{OA}].$$

In queste definizioni di somma e prodotto per scalari abbiamo scelto un punto arbitrario $O \in \mathcal{A}^2$. Si può dimostrare che queste definizioni non dipendono dal punto O.

Questo ci permette di dimostrare il seguente teorema la cui dimostrazione (lasciata per esercizio) è molto istruttiva e tipica di molte costruzioni matematiche (cfr. la dimostrazione che il quoziente di due gruppi G/N, dove $N \subset G$ è un sottogruppo normale di G è ancora un gruppo, la dimostrazione che il quoziente A/I dove I è un ideale di una anello A è ancora un anello, etc.).

Teorema 5 *Sia $T : V_O^2 \to V_2$ l'applicazione che a $\vec{OP}$ associa il vettore libero $[\vec{OP}]$. Allora T è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

1.2 Sistemi di riferimenti cartesiani nel piano

Fissiamo un'unità di misura nel piano $\mathcal{A}^2$. Ricordando che l'angolo di un radiante è quello che in una circonferenza di raggio 1 sottende un arco lungo 1 è determinata univocamente anche un'unità di misura per gli angoli.

Definizione 6 *Un sistema di riferimento cartesiano nel piano è costituito da un punto $O \in \mathcal{A}^2$ e due vettori applicati $i = \vec{OA_1}$ e $j = \vec{OA_2}$ di lunghezza unitaria e ortogonali. Le rette orientate individuate dai rappresentanti di $\{i, j\}$ si dicono rispettivamente asse delle ascisse e asse delle ordinate. Diremo che il riferimento cartesiano è positivo (rispettivamente negativo) se il vettore i si sovrappone al vettore j (rispettivamente $-j$) con una rotazione in senso antiorario di $\frac{\pi}{2}$.*

Coordinate cartesiane

Indicheremo un sistema di riferimento cartesiano in $\mathcal{A}^2$ con $\mathcal{R}(O, i, j)$ o semplicemente con $\mathcal{R}$. Una volta fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, i, j)$ per ogni vettore $\vec{OP}$ possiamo associare in modo unico due numeri reali x_P e y_P tali che

$$\vec{OP} = x_P i + y_P j. \tag{1.2}$$

Questo discende dal fatto che i vettori i e j sono una base dello spazio vettoriale V_O^2 e quindi x_P e y_P non sono altro che le coordinate del vettore $\vec{OP}$ rispetto a questa base. In termini più precisi fissata la base $\mathcal{B} = \{i, j\}$ di V_O^2 possiamo costruire l'isomorfismo $F_{\mathcal{B}}$ tra gli spazi vettoriali V_O^2 e $\mathbb{R}^2$.

$$F_{\mathcal{B}} : V_O^2 \to \mathbb{R}^2, \ \vec{OP} \mapsto (x_P, y_P) \tag{1.3}$$

dove x_P e y_P sono i numeri reali dati da (1.2).

Angoli e lunghezze di vettori

Consideriamo il prodotto scalare $\cdot$ su V_O^2 rispetto al quale la base $\mathcal{B} = \{i, j\}$ è una base ortonormale. Nello spazio metrico $(V_O^2, \cdot)$ possiamo definire la norma di un vettore $\vec{OP}$ e l'angolo $\alpha, 0 < \alpha < \pi$ tra due vettori non nulli $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ tramite la formule:

$$\|\vec{OP}\| = \sqrt{\vec{OP} \cdot \vec{OP}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{OP}\cdot\vec{OQ}}{\|\vec{OP}\|\|\vec{OQ}\|}$$

Che legame c'è tra questa norma e questo angolo con la lunghezza di un vettore e l'angolo tra vettori definito tramite la geometria di Euclide?
La risposta è che non c'è nessuna differenza, come espresso dal seguente teorema.

Teorema 7 *Se $\overline{OP}$ rappresenta la lunghezza del vettore $\vec{OP}$ (ossia la distanza tra O e P) nell'unità di misura fissata e $\theta = ang(\vec{OP}, \vec{OQ})$ denota l'angolo tra i vettori $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ definito tramite la geometria di Euclide allora*

$$\overline{OP} = \|\vec{OP}\| \tag{1.4}$$

$$cos\theta = \frac{\vec{OP}\cdot\vec{OQ}}{\|\vec{OP}\|\|\vec{OQ}\|},\ 0 \leq \theta \leq \pi. \tag{1.5}$$

Dimostrazione: Osserviamo prima di tutto che le uguaglianze (1.4) e (1.5) sono vere per i vettori i e j in virtù della Definizione 1. Inoltre se x_P e y_P sono le coordinate del vettore $\vec{OP}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{i, j\}$, e cioè $\vec{OP} = x_P i + y_P j$ allora

$$\overline{OP} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = \|\vec{OP}\|, \tag{1.6}$$

dove la prima uguaglianza è il Teorema di Pitagora mentre la seconda discende dal fatto che la base $\mathcal{B} = \{i, j\}$ è ortonormale per lo spazio metrico $(V_O^2, \cdot)$. Ci resta da dimostrare la (1.5). Per fare ciò possiamo supporre senza ledere alla generalità della dimostrazione che $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ siano nel primo quadrante e che facendo ruotare il vettore i in senso antiorario esso incontri prima $\vec{OP}$ e poi $\vec{OQ}$. Se ψ denota l'angolo che i deve percorrere (in senso antiorario) per sovrapporsi a $\vec{OP}$ allora segue dalla trigonometria e dalla (1.4) che

$$\cos\psi = \frac{x_P}{\overline{OP}} = \frac{x_P}{\|\vec{OP}\|}, \quad \sin\psi = \frac{y_P}{\overline{OP}} = \frac{y_P}{\|\vec{OP}\|}, \tag{1.7}$$

$$\cos(\psi+\theta) = \frac{x_Q}{\overline{OQ}} = \frac{x_Q}{\|\vec{OQ}\|}, \quad \sin(\psi+\theta) = \frac{y_Q}{\overline{OQ}} = \frac{y_Q}{\|\vec{OQ}\|}, \tag{1.8}$$

dove $\vec{OP} = x_P i + y_P j$, $\vec{OQ} = x_Q i + y_Q j$.

Dalla formule d'addizione per le funzioni trigonometriche le (1.8) diventano

$$\begin{cases} \cos\psi\cos\theta - \sin\psi\sin\theta = \frac{x_Q}{\|\vec{OQ}\|} \\ \sin\psi\cos\theta + \cos\psi\sin\theta = \frac{y_Q}{\|\vec{OQ}\|} \end{cases}$$

e dalle (1.7)

$$\begin{cases} \frac{x_P}{\|\vec{OP}\|}\cos\theta - \frac{y_P}{\|\vec{OP}\|}\sin\theta = \frac{x_Q}{\|\vec{OQ}\|} \\ \frac{y_P}{\|\vec{OP}\|}\cos\theta + \frac{x_P}{\|\vec{OP}\|}\sin\theta = \frac{y_Q}{\|\vec{OQ}\|} \end{cases}$$

che è un sistema lineare quadrato nelle incognite $\cos\theta$ e $\sin\theta$. La matrice dei coefficienti di questo sistema ha determinante

$$\det\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} = \cos^2\psi + \sin^2\psi = 1,$$

per cui il sistema ha un'unica soluzione $(\cos\theta, \sin\theta)$, che possiamo calcolare per esempio col metodo di Cramer. Ricavando il $\cos\theta$ si ottiene

$$\cos\theta = \det\begin{pmatrix} \frac{x_Q}{\|\vec{OQ}\|} & -\frac{y_P}{\|\vec{OP}\|} \\ \frac{y_Q}{\|\vec{OQ}\|} & \frac{x_P}{\|\vec{OP}\|} \end{pmatrix} = \frac{x_P x_Q + y_P y_Q}{\|\vec{OP}\|\|\vec{OQ}\|} = \frac{\vec{OP}\cdot\vec{OQ}}{\|\vec{OP}\|\|\vec{OQ}\|}, \tag{1.9}$$

dove l'ultima uguaglianza è conseguenza del fatto che la base $\mathcal{B} = \{i, j\}$ è ortonormale per lo spazio metrico $(V_O^2, \cdot)$. Questo conclude la dimostrazione del (1.5).

□

Riassunto di quello che abbiamo fatto

Siamo partiti dal piano della geometria Euclidea $\mathcal{A}^2$ e fissata un'origine, cioè un punto $O \in \mathcal{A}^2$ abbiamo identificato i punti di $\mathcal{A}^2$ con l'insieme V_O^2 dei vettori applicati in O. Inoltre fissata la base $\mathcal{B} = \{i, j\}$ abbiamo identificato (tramite l' isomorfismo $F_{\mathcal{B}}$) V_O^2 con $\mathbb{R}^2$. Il vantaggio di questo procedimento è che possiamo fare somme tra vettori o moltiplicazioni tra scalari e vettori usando le usuali operazioni di spazio vettoriale su $\mathbb{R}^2$ invece che le complicate operazioni geometriche con i vettori.

Ma abbiamo fatto molto di più. In questa identificazione abbiamo trovato un modo per calcolare le lunghezza di un vettore $\vec{OP}$ e l'angolo tra due vettori non nulli $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ in V_O^2 calcolando la norma del vettore $F_{\mathcal{B}}(\vec{OP})$ e l'angolo tra $F_{\mathcal{B}}(\vec{OP})$ e $F_{\mathcal{B}}(\vec{OQ})$ usando il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^2$ (cfr. (1.6) e (1.9)). In altri termini l'applicazione $F_{\mathcal{B}} : (V_O^2, \cdot) \to (\mathbb{R}^2, \cdot)$ è un' isomorfismo isometrico, dove nel dominio abbiamo definito il prodotto scalare rispetto al quale la base $\mathcal{B} = \{i, j\}$ è ortonormale e in $\mathbb{R}^2$ stiamo considerando il prodotto scalare canonico (che non a caso è il prodotto scalare rispetto al quale la base canonica $e_1 = F_{\mathcal{B}}(i)$, $e_2 = F_{\mathcal{B}}(j)$ di $\mathbb{R}^2$ è ortonormale).

Osservazione 8 In tutto il discorso fatto sino adesso potevamo fissare una base $\mathcal{B}$ di V_O^2 non necessariamente ortonormale. Cioè potevamo fissare un cosidetto *riferimento affine* ma il prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^2$ non sarebbe stato il prodotto scalare "giusto" per calcolare le lunghezze e gli angoli dei vettori di V_O^2 tramite l'isomorfismo $F_{\mathcal{B}}$.

Qualche applicazione

Sia $\mathcal{R}(O, i, j)$ un sistema di riferimento cartesiano nel piano. Da ora in poi un punto $P \in \mathcal{A}^2$ sarà identificato con le sue coordinate cartesiane (x, y) e scriveremo $P(x, y)$ oppure $P = (x, y)$. Se u è un vettore libero in V^2 possiamo scrivere

$$u = u_1 i + u_2 j.$$

La sua norma è data da

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}. \tag{1.10}$$

Se $u = u_1 i + u_2 j$ e $v = v_1 i + v_2 j$ sono due vettori liberi il loro prodotto scalare

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 \tag{1.11}$$

e l'angolo tra loro (se nessuno dei due è il vettore nullo!) è dato da

$$\cos \hat{uv} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \quad 0 \leq \hat{uv} \leq \pi \tag{1.12}$$

Le componenti del vettore u di rappresentante $\vec{P_1 P_2} = P_2 - P_1$ rispetto alla base $\{i, j\}$ sono la differenza tra le coordinate omonime di P_2 e di P_1.

Infatti, se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, risulta (perche?)

$$u = (P_2 - O) + (O - P_1) = (P_2 - O) - (P_1 - O) = x_2 i + y_2 j - x_1 i - y_1 j$$

ossia

$$P_2 - P_1 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j. \tag{1.13}$$

Il punto medio $M = (x_M, y_M)$ del segmento di estremi $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ è l'unico punto tale che

$$M - P_1 = P_2 - M$$

e dalla (1.13) segue:

$$(x_M - x_1)i + (y_M - y_1)j = (x_2 - x_M)i + (y_2 - y_M)j$$

e quindi

$$\boxed{x_M = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \;\; y_M = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).}$$

Denoteremo con $\overline{P_1P_2}$ la distanza dei punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$.

Questa è data dalla lunghezza del vettore $P_2 - P_1$ e segue dalla formula (1.10):

$$\boxed{\overline{P_1P_2} = \|P_2 - P_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.}$$

1.3 La circonferenza

Una *circonferenza* è il luogo dei punti P del piano che hanno distanza costante r, detta raggio, da un punto fisso C, centro della circonferenza, ossia

$$\|P - C\| = r, \;\; \overline{PC}^2 = r^2.$$

in un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, i, j)$ se $C = (\alpha, \beta)$, il punto $P(x, y)$ appartiene alla circonferenza se e solo se:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2. \tag{1.14}$$

La (1.14) è l'*equazione cartesiana* della circonferenza σ di centro $C(\alpha, \beta)$ e raggio r.

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \tag{1.15}$$

dove:

$$\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}. \tag{1.16}$$

Osservazione 9 Se si moltiplica la (1.14) per un fattore $\lambda \neq 0$, si ottiene un'altra equazione che rappresenta la stessa circonferenza.

Osservazione 10 Per trovare le coordinate del centro ed il raggio della circonferenza attraverso le (1.15) e (1.16) bisogna prima di tutto assicurarsi che $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma > 0$ (per essere sicuri che si tratti di una circonferenza reale) e che i coefficienti di x^2 e y^2 siano uguali a 1.

Esempio 11 Vogliamo trovare il centro e il raggio della circonferenza γ di equazione cartesiana: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$. L'equazione cartesiana di γ si può scrivere come:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16,$$

dalla quale si deduce che γ è la circonferenza di centro $C(2, 3)$ e raggio $r = 4$.

Esempio 12 Vogliamo stabilire le posizioni delle circonferenze $\sigma_1 : x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$ e $\sigma_2 : x^2 + y^2 + 2x = 0$.

Si ottiene facilmente che la circonferenza σ_1 ha raggio $r_1 = 3$ e centro $C_1(-3, 4)$ mentre la seconda circonferenza ha raggio $r_2 = 1$ e centro $C_1(-1, 0)$.

La distanza tra i centri è $\sqrt{20}$ che è maggiore della somma dei raggi che vale 4. Di conseguenza le circonferenze C_1 e C_2 sono esterne (confronta D. sopra).

Supponiamo di avere fissato un riferimento positivo i, j. Sia P un punto sulla circonferenza e φ l'angolo che il vettore $\vec{PC}$ forma con l'asse delle x.

Si ha:

$$P - C = r(\cos\varphi i + \sin\varphi j).$$

la quale, scritta in componenti diventa:

$$x - \alpha = r\cos\varphi, \;\; y - \beta = r\sin\varphi$$

ossia

$$\boxed{\begin{cases} x = \alpha + r\cos\varphi \\ y = \beta + r\sin\varphi \end{cases} , \;\; 0 \leq \varphi \leq 2\pi} \tag{1.17}$$

che sono le *equazioni parametriche* della circonferenza di centro (α, β) e raggio r al variare del parametro φ tra 0 e 2π.

1.4 Le rette nel piano

Una retta si può rappresentare geometricamente assegnando

- un suo punto P_0 ed un vettore $n \neq 0$ perpendicolare alla retta;
- un suo punto P_0 ed un vettore $u \neq 0$ parallelo alla retta. In questo caso rientra anche quello in cui la retta sia individuata da due suoi punti P_0, P_1, ponendo $u = P_1 - P_0$.

Fissato un sistema di riferimento cartesiano, le rappresentazioni della retta si ottengono traducendo mediante l'uso delle coordinate le situazioni geometriche sopra indicate.

Vogliamo trovare la retta r passante per un punto P_0 perpendicolare ad un vettore n.

$$\boxed{P(x,y) \in r \Leftrightarrow (P - P_0) \cdot n = 0}. \tag{1.18}$$

Se $P_0(x_0, y_0)$, $n = ai + bj \neq 0$, $P - P_0 = (x - x_0)i + (y - y_0)j$

$$\boxed{(P - P_0) \cdot n = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}. \tag{1.19}$$

Di conseguenza la retta è rappresentata da un'equazione lineare

$$\boxed{ax + by + c = 0} \tag{1.20}$$

che si dice equazione cartesiana della retta r.

Osserviamo che i coefficienti della x e della y sono le componenti di un vettore perpendicolare ad r.

Se si moltiplica l'equazione per un fattore di proporzionalità non nullo arbitrario, si ottiene una nuova equazione che rappresenta la stessa retta. Questo si esprime dicendo che i coefficienti e termine noto dell'equazione di una retta sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità.

Vogliamo trovare la retta r passante per un punto P_0 parallela ad un vettore u.

$$\boxed{P(x,y) \in r \Leftrightarrow (P - P_0) = tu, t \in \mathbb{R}}. \tag{1.21}$$

Se $P_0(x_0, y_0)$, $u = li + mj \neq 0$, $P - P_0 = (x - x_0)i + (y - y_0)j$

$$\boxed{P - P_0 = tu \Leftrightarrow x = x_0 + lt, \;\; y = y_0 + mt} \tag{1.22}$$

le quali esprimono le coordinate del punto variabile su r mediante polinomi di primo grado nel parametro t e si dicono *equazioni parametriche* della retta r passante per P_0 e parallela al vettore u.

I numeri (l, m), componenti di un vettore parallelo alla retta r si chiamano *parametri direttori* della retta e sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità. Quando si dice che la retta r ha direzione (l, m) si intenderà che r è parallela al vettore (l, m).

Si osservi che se si considera t soggetto alle limitazioni $\alpha \leq t \leq \beta$ le (1.22) rappresentano i punti di un segmento di estremi AB dove $A = (x_0 + l\alpha, y_0 + m\alpha)$ e $B = (x_0 + l\beta, y_0 + m\beta)$.

Un altro modo per esprimere il parallelismo tra i vettori $P - P_0$ ed u è la proporzionalità tra le relative componenti:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \tag{1.23}$$

con la convenzione che se uno dei due numeri al denominatore si annulla , dev'essere posto a zero il corrispondente numeratore.

Si perviene alla (1.23) eliminando il parametro t dalla (1.22).

Dalla (1.23) si ottiene

$$m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0 \tag{1.24}$$

che è un'equazione del tipo (1.20).

Da essa si può leggere la relazione tra i coefficienti della x e della y ed i parametri direttori di r.

Infatti essendo i parametri direttori definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo si ottiene:

$$a = \rho m, \;\; b = -\rho l. \tag{1.25}$$

Regola pratica: i parametri direttori della retta r rappresentata dalla (1.20) sono dati, a meno di un fattore non nullo, dai numeri $(b, -a)$, cioè si ottengono scambiando i coefficienti delle incognite e cambiando di segno ad uno di essi.

Il passaggio dall'equazione (1.20) alle equazioni parametriche (1.22) si ottiene chiamando t una delle incognite e ricavando quindi il valore dell'altra dalla (1.20).

Se la retta r è individuata dai due punti $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ la sua rappresentazione è data dalla (1.22) o dalla (1.23) con $l = (x_1 - x_0)$ e $m = (y_1 - y_0)$.

Dalla (1.23) si ottiene

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \tag{1.26}$$

Questa è equivalente a

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{1.27}$$

Due rette del piano o sono *incidenti* quindi hanno un punto in comune o sono *parallele*, cioè con la stessa direzione: in questo caso o non hanno punti in comune oppure coincidono.

Se le rette r, s sono rispettivamente rappresentate dalle equazioni:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a^{'}x + b^{'}y + c^{'} = 0 \end{cases} \tag{1.28}$$

la loro posizione è determinata dalle eventuali soluzioni del sistema (1.28).

Si hanno i seguenti casi:

- $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ le rette sono incidenti;
- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$: le rette non hanno punti in comune;
- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$: le rette coincidono.

Pertanto la *condizione di parallelismo* delle rette (1.28) è data:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

da cui segue che due rette parallele si possono rappresentare con equazioni che differiscono solo per il termine noto.

La stessa condizione di parallelismo, espressa mediante i parametri di direzione (l, m) e $(l^{'}, m^{'})$ delle rette si esprime, per la (1.25):

$$\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} \tag{1.29}$$

Si dice *fascio proprio* di rette di centro $P_0(x_0, y_0)$ la totalità delle rette del piano passanti per P_0.

Imponendo che il punto $P_0(x_0, y_0)$ appartenga alla retta $ax+by+c = 0$ otteniamo $c = -ax_0 - by_0$, e quindi il fascio di rette di centro P_0 è rappresentato al variare di a, b dall'equazione:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

che è la combinazione lineare di coefficienti a, b delle equazioni delle rette passanti per P_0 e parallele rispettivamente all'asse y ed all'asse x.

Il *fascio improprio* di rette è la totalità delle rette del piano parallele ad una stessa retta; se questa ha equazione $ax + by + c = 0$, il fascio improprio da essa individuato si rappresenta con

$$ax + by + k = 0$$

al variare del termine noto k.

Date due rette distinte

$$r : ax + by + c = 0 \quad s : a^{'}x + b^{'}y + c^{'} = 0$$

si può determinare l'equazione del fascio cui esse appartengono senza determinarne il punto comune.

Si considera la combinazione lineare di coefficienti λ, μ (non entrambi nulli) delle date equazioni:

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a^{'}x + b^{'}y + c^{'}) = 0 \tag{1.30}$$

Se le rette non sono parallele, fatto che si verifica immediatamente la (1.30) rappresenta una retta per ogni valore di λ, μ.

La (1.30) si dice equazione del fascio in *forma omogenea* in quanto coppie proporzionali (λ, μ) e $(\rho\lambda, \rho\mu)$ qualunque sia $\rho \neq 0$, individuano la stessa retta.

Se si divide la (1.30) per λ e si pone $k = \frac{\mu}{\lambda}$ il fascio viene rappresentato con l'equazione *non omogenea*

$$ax + by + c + k(a^{'}x + b^{'}y + c^{'}) = 0 \tag{1.31}$$

dove la retta varia al variare di k.

Osserviamo tuttavia che tramite la (1.31) non resta rappresentata la retta s : $a^{'}x + b^{'}y + c^{'} = 0$ a cui convenzionalemente si associa $k = \infty$.

Esempio 13 Vogliamo scrivere le equazioni cartesiane delle rette $r^{'}$ e $s^{'}$ passanti per il punto $A = (1, 2)$ e parallele alle rette r e s date da: $r : x + y - 1 = 0$ e $s : x = 1 - t, y = 2 + 3t$.
La totalità delle rette parallele ad r è rappresentata da $x + y + k = 0$ imponendo il passaggio per A si ottiene $1 + 2 + k = 0$ ossia $k = -3$.

Quindi $r^{'} : x + y - 3 = 0$.

La retta $s^{'}$ in forma parametrica è rappresentata da: $s : x = 1 - u, y = 2 + 3u$ (parametro u).

Eliminando u tra queste equazioni si ottiene l'equazione cartesiana di $s^{'} : 3x + y - 5 = 0$.

Esempio 14 Siano P_1 e P_2 le intersezioni dell'asse delle x e l'asse delle y con la retta generica s del fascio improprio di direzione individuata dal vettore $3i + j$.

Vogliamo determinare il luogo geometrico descritto dal punto medio M del segmento P_1P_2.

Per fare questo consideriamo il fascio improprio $s : x - 3y + k = 0$ che interseca l'asse x (equazione cartesiana $y = 0$) nel punto $P_1(-k, 0)$ e l'asse y (equazione cartesiana $x = 0$) nel punto $P_2(0, \frac{k}{3})$.

Il punto medio M ha pertanto coordinate $x = -\frac{k}{2}$ e $y = \frac{k}{6}$, che rappresentano al variare del parametro k il luogo descritto da M.

Eliminando il parametro k si ottiene l'equazione del luogo cercato: $x + 3y = 0$ che è l'equazione di una retta.

1.5 Angoli e distanze tra due rette

Due rette non parallele r, s dividono il piano in quattro angoli a due a due uguali perchè opposti al vertice; quindi r e s individuano due angoli distinti, fra loro supplementari, che si diranno angoli di r e s.

Siano $\mathbf{r} = (l, m)$ e $\mathbf{s} = (l^{'}, m^{'})$ due vettori non nulli paralleli alle rette r e s e sia $\hat{rs}$ la misura di uno dei due angoli di r ed s.

Si hanno due possibilità:

$$\hat{rs} = \hat{\mathbf{rs}}$$

oppure

$$\hat{rs} = \pi - \hat{\mathbf{rs}}.$$

Quindi

$$\cos \hat{rs} = \pm \cos \hat{\mathbf{rs}}.$$

Se si usa (1.12) si ottiene:

$$\cos \hat{rs} = \pm \frac{ll^{'} + mm^{'}}{\sqrt{l^2 + m^2}\sqrt{l^{'2} + m^{'2}}} \tag{1.32}$$

Se le rette sono date dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a^{'}x + b^{'}y + c^{'} = 0 \end{cases}$$

ricordando che $a = \rho m$ e $b = -\rho l$ $(\rho \neq 0)$ dalla (1.32) si ottiene:

$$\cos \hat{rs} = \pm \frac{aa^{'} + bb^{'}}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^{'2} + b^{'2}}} \tag{1.33}$$

Dalle equazioni (1.32) e (1.33) si ottengono le condizioni di perpendicolarità tra le rette cioè:

$$ll^{'} + mm^{'} = 0 \tag{1.34}$$

$$aa^{'} + bb^{'} = 0 \tag{1.35}$$

Ricaviamo quindi la seguente regola: considerata una retta di equazione $ax+by+c=0$, ogni sua perpendicolare si può rappresentare con l'equazione $bx-ay+c=0$, al variare di c.

Vogliamo fornire un metodo per trovare <u>il simmetrico</u> $S(x_S, y_S)$ di un punto $P(x_0, y_0)$ rispetto ad una retta $r : ax + by + c = 0$.

Sia $n : x = x_0 + at, y = y_0 + bt$ la sua normale condotta dal punto $P(x_0, y_0)$.

Sia t_s il valore del parametro che spetta al punto S. e sia t_H il valore del parametro t che spetta al punto H intersezione di n e r.

Allora S ha coordinate $x_S = x_0 + at_S, y_S = y_0 + bt_S$ mentre H ha coordinate $x_H = x_0 + at_H, y_H = y_0 + bt_H$.

Imponendo che la distanza del punto S da H sia uguale alla distanza di P_0 da H si ottiene (verificare): $t_S = 2t_H$.

Si ottiene la seguente regola pratica:

Detto t_H il valore del parametro t che spetta al punto H intersezione di r con n, il punto S simmetrico di P_0 rispetto a r si ottiene ponendo $t = 2t_H$ nelle equazioni parametriche di n.

Esempio 15 Vogliamo determinare le coordinate del punto S simmetrico del punto $P_0(3, -1)$ rispetto alla retta $r : x - y + 2 = 0$.

Un'equazione parametrica della normale n a r passante per P_0 è data da $n : x = 3 - t, y = -1 + t$.

Per trovare t_H dobbiamo risolvere l'equazione $3 - t_H - (-1 + t_H) + 2 = 0$ che ha soluzione $t_H = 3$.

Quindi il punto S ha coordinate $x = 3 - 2t_H = 3 - 6 = -3$ e $y = -1 + 2t_H = -1 + 6 = 5$.

Esempio 16 Vogliamo trovare le equazioni delle rette passanti per $P(2,1)$ e che formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con la retta $r : x - y + 1 = 0$.

Ci aspettiamo di trovare due rette.

Consideriamo il fascio di rette passanti per il punto P e cioè: $a(x-2)+b(y-1) = 0$.

Usando la formula (1.33) otteniamo

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \pm\frac{a-b}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Elevando al quadrato ambo i membri si ottiene

$$\frac{1}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2(a^2+b^2)}.$$

Che è equivalente all'equazione omogenea:

$$a^2 + b^2 - 4ab = 0.$$

Dando un valore arbitrario ad a per esempio $a = 1$ si ottiene l'equazione

$$b^2 - 4b + 1 = 0$$

le cui soluzioni sono $2 + \sqrt{3}$ e $2 - \sqrt{3}$.

Le rette cercate hanno quindi equazioni

$$x + (2+\sqrt{3})y - 4 - \sqrt{3} = 0$$

e

$$x + (2-\sqrt{3})y - 4 + \sqrt{3} = 0.$$

Vogliamo ora trovare la retta tangente ad una circonferenza in un suo punto.

Sia σ la circonferenza di centro $C(\alpha, \beta)$ rappresentata dall'equazione

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \tag{1.36}$$

e sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto di σ.

La retta tangente t in P_0 a σ è la retta passante per P_0 e prependicolare al vettore $P - C = (x_0 - \alpha)i + (y_0 - \beta)j$.

La retta tangente a σ in P_0 ha allora equazione:

$$(x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) = 0. \tag{1.37}$$

Sviluppando i calcoli e sfruttando il fatto che $-x_0^2 - y_0^2 = -2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + \gamma$ (in quanto $P_0 \in \sigma$) si ottiene:

$$x_0 x + y y_0 - \alpha(x_0 + x) - \beta(y_0 + y) + \gamma = 0 \tag{1.38}$$

La (1.38) si dice ottenuta dall'equazione (1.36) mediante la *regola degli sdoppiamenti*. Infatti scritta la (1.36) nella forma "sdoppiata"

$$xx + yy - \alpha(x + x) - \beta(y + y) + \gamma = 0$$

si sostituisce in questa in ogni termine una x o una y con la corrispondente coordinata di P_0.

La distanza di un punto P_0 da una retta r si ottiene come segue. Detta H l'intersezione di r con la retta n ad essa perpendicolare passante per P_0 si ha

$$d(P_0, r) = \overline{P_0 H}.$$

Supposto $P_0(x_0, y_0)$ ed r di equazione $ax + by + c = 0$, la retta n ha equazione parametriche:

$$x = x_0 + at, \ \ y = y_0 + bt.$$

Un punto di n appartiene a r se $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0$ e questo fornisce il valore del parametro t del punto H:

$$t_H = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

La distanza dei punti $P_0(x_0, y_0)$, $H(x_0 + at_H, y_0 + bt_H)$ è data da

$$\overline{P_0H} = \sqrt{a^2t_H^2 + b^2t_H^2} = |t_H|\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

cioè

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

La distanza tra due rette r e s si definisce uguale a zero se le rette sono incidenti. Se invece sono parallele la distanza tra r e s è la distanza di un punto qualunque di r (di un punto qualunque di s) dalla retta s (dalla retta r).

Forniamo adesso un metodo per trovare le bisettrici di due rette $r : ax+by+c = 0$ e $s : a^{'}x + b^{'}y + c^{'} = 0$ non parallele.

I punti $P(x, y)$ delle bisettrici soddisfano alla condizione:

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a^{'}x + b^{'}y + c^{'}|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

Ossia

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm\frac{a^{'}x + b^{'}y + c^{'}}{\sqrt{a'^2 + b'^2}},$$

dalla quale si ottengono le bisettrici prendendo una volta il $+$, l'altra volta il segno $-$.

L'area del triangolo di vertici $P_0(x_0, y_0)$,$P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ è:

$$\frac{1}{2}|\det\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}|. \tag{1.39}$$

La formula (1.39) si ottiene considerando i due fatti che seguono:

l' equazione della retta passante per P_1 e P_2 ha equazione

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$$

la distanza di P_0 da tale retta è data da:

$$d(P_0, P_1P_2) = \frac{|(y_2 - y_1)(x_0 - x_1) - (x_2 - x_1)(y_0 - y_1)|}{\overline{P_1P_2}}.$$

Esercizi sulle rette e sulle circonferenze

1. Scrivere le equazioni parametriche delle rette r e s di equazione cartesiane $r : 2x - 3y + 3 = 0$ e $s : x + 4 = 0$.

2. Trovare i parametri direttori della retta $r : 5x - 3y + 1 = 0$.

3. Scrivere l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche della bisettrice del primo e del terzo quadrante. Fare lo stesso per la bisettrice del secondo e quarto quadrante.

4. Scrivere l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche di una generica retta parallela all'asse delle ascisse. Fare lo stesso per una retta parallela all'asse delle ordinate.

5. Scrivere in forma cartesiana e parametrica la retta passante per $P_0 = (5, -3)$ e $P_1 = (2, 1)$.

6. Usando un determinante 3×3 scrivere in forma cartesiana e parametrica la retta passante per $P_0 = (1, 3)$ e $P_1 = (4, -3)$.

7. I punti $P_0 = (1, 3)$, $P_1 = (2, -1)$ e $P_2 = (4, 0)$ sono allineati?

8. Trovare la retta s passante per $P_0 = (1, 2)$ e parallela ad $r : 2x - 3y = 0$.

9. Determinare $h \in \mathbb{R}$ in modo tale che le rette $r : hx - 3y = 0$ e $s : (x, y) = (1, 2) + t(1, h)$ siano parallele.

10. Dimostrare che le rette $r : x + y - 3 = 0$ e $s : 3x - 3y + 1 = 0$ sono ortogonali.

11. Scrivere in forma parametrica la retta r passante per $P_0 = (1, -1)$ e ortognale alla retta $s : (x, y) = (2, 0) + t(1, 2)$.

12. Scrivere l'equazione cartesiana della retta s passante per $P_0 = (2, 2)$ e ortogonale alla retta $r : (x, y) = (1, 2) + t(1, h)$.

13. Trovare l'intersezione tra le due rette $r : (x, y) = t(1, -1)$ e $s : (x, y) = (1, 1) + t(1, 2)$.

14. Trovare le eventuali intersezioni tra le rette $r : 2x-3y+7 = 0$ ed $s : (x, y) = (2, 1) + t(1, 2)$.

15. Trovare le eventuali intersezioni tra le rette $r : 2x-3y+7 = 0$ ed $s : (x, y) = (4, 5) + t(3, 2)$.

16. Calcolare la distanza tra il punto $Q = (1, 2)$ e $r : x + y - 5 = 0$.

17. Trovare il punto simmetrico dell'origine rispetto alla retta $r : 4x+3y-5 = 0$.

18. Dopo aver verificato che le due rette $r : 5x-6y+6 = 0$ e $r : 10x-12y+3 = 0$ sono parallele calcolarne la distanza.

19. Per quali valori del parametro reale h le due rette $r : hx - y = 0$ e $s : x - hy = 2$ sono parallele? Per quali valori sono perpendicolari?

20. Si consideri la retta $r : (x, y) = (1 - 3t, 2t)$. Trovare: a) la perpendicolare a r passante per l'origine; b) la parallela a r passante per $P = (1, 0)$; c) una coppia di parametri direttori.

21. Trovare le equazioni cartesiane delle bisettrici delle rette $r : y - 3 = 0$ e $s : x - y + 2 = 0$.

22. Stabilire per quali valori del parametro reale t l'equazione $3x^2 + 3y^2 - tx + 2t = 0$ rappresenta una circonferenza.

23. Sia γ la circonferenza di centro $C = (1, 2)$ e raggio 5. Stabilire se la retta $r : x - 2y = 0$ interseca γ.

24. Stabilire se le seguenti equazioni rappresentano delle circonferenze e in caso affermativo trovare il centro e il raggio di tali circonfererenze: $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 7 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 3 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$, $x^2 - y^2 + 2x + 2y + 7 = 0$, $2x^2 + 2y^2 + x + y + 7 = 0$, $x^2 + 2y^2 + x + 2y + 7 = 0$.

25 Sia $\gamma : x^2 + y^2 + tx + 2y = 0$. Determinare t in modo che la tangente a γ nell'origine sia ortogonale a $r : x - 2y = 0$.

26 Sia $\gamma : (x-1)^2 + y^2 = 4$ e sia $P_0 = (-3, 0)$. Trovare le tangenti a γ passanti per P_0.

27. Dato il punto $P = (0, 4)$ e la circonferenza $x^2 + y^2 = 9$, determinare le tangenti alla circonferenza uscenti da P.

28. Scrivere le equazioni della circonferenza passante per i punti $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (1, 1)$. Fare lo stesso per i punti $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 1)$ e $P_2 = (\sqrt{2}, -1)$.

29. Trovare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + \lambda x = 0$ è tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Fare lo stesso per la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + \lambda y = 0$.

30. Stabilire le posizioni delle due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 3 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2(2 + \sqrt{2})x - 2(2 + \sqrt{2})y + 11 + 8\sqrt{2} = 0$.

31*. Dimostrare che l'equazione della circonferenza passante per i tre punti $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ si può ottenere calcolando il seguente determinante 4×4:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_0^2 + y_0^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.6 Cambiamenti di riferimento cartesiani nel piano

Siano $\mathcal{R}(O, i, j)$ e $\mathcal{R}^{'}(O^{'}, i^{'}, j^{'})$ due riferimenti cartesiani (relativi alla stessa unità di misura) e supponiamo $\mathcal{R}$ positivo. Indichiamo con (x, y), $(x^{'}, y^{'})$ le coordinate di uno stesso punto del piano relativo ai due sistemi di riferimento.

Supposta nota la posizione del riferimento $\mathcal{R}^{'}$ rispetto a $\mathcal{R}$, si tratta di determinare la relazione fra le coordinate (x, y), $(x^{'}, y^{'})$.

$\mathcal{R}^{'}$ è individuato quando si assegnano rispetto a $\mathcal{R}$ le coordinate (x_0, y_0) di $O^{'}$ e le componenti dei versori $i^{'}, j^{'}$ rispetto alla base i, j.

La matrice di passaggio dalla base ortonormale $i^{'}, j^{'}$ alla base ortonormale i, j è ortogonale. Quindi otteniamo

$$i^{'} = \cos\varphi i + \sin\varphi j, \;\; j^{'} = \epsilon(-\sin\varphi i + \cos\varphi j), \tag{1.40}$$

dove $\varphi \in [0, \pi]$ è l'angolo *orientato* tra i e $i^{'}$ (cioè $+\varphi$ o $-\varphi$ a seconda che la roatazione che deve compiere i per sovrapporsi $i^{'}$ sia antioraria o oraria) ed $\epsilon = +1$ oppure -1 a seconda che il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ sia positivo oppure negativo.

Il vettore $P - O^{'}$ nel riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è dato da

$$P - O^{'} = x^{'} i^{'} + y^{'} j^{'}.$$

Lo stesso vettore, nel riferimento $\mathcal{R}$ è dato da

$$P - O^{'} = (x - x_0)i + (y - y_0)j.$$

Tenendo conto della (1.40) si ottiene:

$$(x - x_0)i + (y - y_0)j = x^{'}(\cos\varphi i + \sin\varphi j) + y^{'}(-\sin\varphi i + \cos\varphi j),$$

se il riferimento $\mathcal{R}'$ è positivo.

Mentre si ottiene:

$$(x - x_0)i + (y - y_0)j = x'(\cos\varphi i + \sin\varphi j) + y'(\sin\varphi i - \cos\varphi j),$$

se il riferimento $\mathcal{R}'$ è negativo.

Equivalentemente

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + x_0 \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + y_0 \end{cases}} \tag{1.41}$$

se il riferimento $\mathcal{R}'$ è positivo,

Mentre

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi + x_0 \\ y = x'\sin\varphi - y'\cos\varphi + y_0 \end{cases}} \tag{1.42}$$

se il riferimento $\mathcal{R}'$ è negativo.

Usando la regola di Cramer si possono esprimere le (x', y') in funzione delle (x, y):

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi \\ y' = -(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi \end{cases} \tag{1.43}$$

se il riferimento $\mathcal{R}'$ è positivo,

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi \\ y' = (x - x_0)\sin\varphi - (y - y_0)\cos\varphi \end{cases} \tag{1.44}$$

se il riferimento $\mathcal{R}'$ è negativo.

Che si possono anche scrivere

$$\boxed{\begin{cases} x^{'} = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a \\ y^{'} = -x\sin\varphi + y\cos\varphi + b \end{cases}} \tag{1.45}$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è positivo,

$$\boxed{\begin{cases} x^{'} = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a \\ y^{'} = x\sin\varphi - y\cos\varphi + b \end{cases}} \tag{1.46}$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è negativo, dove (a, b) sono le componenti del punto $O = (0, 0)$ nel riferimento $\mathcal{R}^{'}$ come si può verificare sostituendo $x = 0$ e $y = 0$ in (1.45).

Le (1.41) e (1.42) con le loro inverse (1.45) e (1.46) rappresentano le formule di trasformazione delle coordinate allorchè si passa da un sistema di riferimento ortonormale ad un altro sistema ortonormale.

In particolare, se i due sistemi di riferimento hanno gli stessi versori $i = i^{'}$ e $j = j^{'}$ e differiscono solo per l'origine, le (1.41) si scrivono:

$$\boxed{\begin{cases} x = x^{'} + x_0 \\ y = y^{'} + y_0 \end{cases}} \tag{1.47}$$

e le loro inverse (1.45)

$$\boxed{\begin{cases} x^{'} = x - x_0 \\ y^{'} = y - y_0 \end{cases}} \tag{1.48}$$

In tal caso si dice che il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è ottenuto da $\mathcal{R}$ per traslazione.

Se invece i due sistemi di riferimento hanno la stessa origine si ottiene

$$\boxed{\begin{cases} x = x^{'} \cos\varphi - y^{'} \sin\varphi \\ y = x^{'} \sin\varphi + y^{'} \cos\varphi \end{cases}} \tag{1.49}$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è positivo,

Mentre

$$\boxed{\begin{cases} x = x^{'} \cos\varphi + y^{'} \sin\varphi \\ y = x^{'} \sin\varphi - y^{'} \cos\varphi \end{cases}} \tag{1.50}$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è negativo.

Con le rispettive inverse

$$\boxed{\begin{cases} x^{'} = x \cos\varphi + y \sin\varphi \\ y^{'} = -x \sin\varphi + y \cos\varphi \end{cases}} \tag{1.51}$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è positivo,

$$\boxed{\begin{cases} x^{'} = x \cos\varphi + y \sin\varphi \\ y^{'} = x \sin\varphi - y \cos\varphi \end{cases}} \tag{1.52}$$

se il riferimento $\mathcal{R}^{'}$ è negativo.

Nel caso (1.51) diremo che $\mathcal{R}^{'}$ è ottenuto da $\mathcal{R}$ per una rotazione.

E' un facile esercizio, che viene lasciato come compito allo studente, scrivere le equazioni precedenti in forma matriciale.

Un'applicazione

Sono date le rette ortogonali

$$r : ax + by + c = 0, \;\; s : bx - ay + c^{'} = 0.$$

Vogliamo trovare le formule del cambiamento di riferimento in modo tale che le due rette nel nuovo riferimento coincidano rispettivamente con gli assi $x^{'}, y^{'}$.

Siccome gli assi di un sistema di riferimento sono rette orientate, vi saranno quattro possibili sistemi di riferimento i cui gli assi $x^{'}, y^{'}$ coincidano con le rette r, s a seconda dell'orientamento di queste.

Osserviamo che la distanza di un punto $P(x, y)$ dalla retta s, che denotiamo con $d(P, s)$ nel riferimento $\mathcal{R}$ è data da:

$$d(P, s) = \frac{|bx - ay + c^{'}|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{1.53}$$

Mentre la distanza dello stesso punto $P(x, y)$ nel riferimento $\mathcal{R}^{'}$ in cui s sia l'asse delle $y^{'}$ è data da:

$$d(P, s) = |x^{'}|. \tag{1.54}$$

In maniera analoga, $d(P, r)$, cioè la distanza di P dalla retta r è data da:

$$d(P, r) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{1.55}$$

Mentre la distanza dello stesso punto $P(x, y)$ nel riferimento $\mathcal{R}^{'}$ in cui r sia l'asse delle $x^{'}$ è data da:

$$d(P, r) = |y^{'}|. \tag{1.56}$$

Uguagliando la (1.53) con (1.54) e la (1.55) con (1.56) si ottiene:

$$\begin{cases} x' = \pm \frac{bx-ay+c'}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y' = \pm \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \tag{1.57}$$

le quali forniscono le possibili formule del cambiamento di riferimento coi nuovi assi r e s.

Una scelta di segno nelle (1.57) equivale a fissare un orientamento sui nuovi assi.

Esempio 17 Vogliamo trovare le formule del cambiamento di riferimento in modo tale che le rette $r : x + y = 0$ e $s : x - y = 0$. nel nuovo riferimento coincidano con gli assi x' e y' e il punto $P(1, 2)$ abbia coordinate positive.

Le possibili formule del cambiamento di riferimento sono:

$$\begin{cases} x' = \pm \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ y' = \pm \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Imponendo la condizione che il punto $P(1, 2)$ abbia coordinate positive si ottiene il cambiamento di riferimento:

$$\begin{cases} x' = -\frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ y' = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Esercizi sui cambiamenti di riferimento nel piano

1. Scrivere le formule del cambiamento di riferimento ottenuto da una rotazione antioraria di $\frac{\pi}{6}$. Quali sono le coordinate del punto $(1,1)$ nel nuovo sistema di riferimento?

2. Scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento ottenuto tramite una rotazione antioraria di $\frac{\pi}{6}$ e una traslazione T di vettore $v = 3i + j$. Trovare le coordinate del punto $P = (1,2)$ nel nuovo sistema di riferimento.

3. Trovare le equazioni della retta $r : y - x = 0$ in un sistema di riferimento ottenuto con una rotazione oraria di $\frac{\pi}{4}$.

4. Verificare che le rette $r : x - 2y + 1 = 0$ e $s : 2x + y - 1 = 0$ sono ortogonali. Si scrivano le equazioni del cambiamento di riferimento tali che le rette r e s siano gli assi coordinati e tali che il punto $(0,0)$ abbia coordinate positive nel nuovo sistema di riferimento.

5. Come cambia l'equazione della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ con un cambiamento di riferimento? .

Capitolo 2

Elementi di geometria analitica nello spazio

2.1 Richiami di geometria euclidea spaziale

In questa sezione richiamiamo alcuni concetti di base della geometria dello spazio.

A. Proprietà di appartenenza

- Due punti distinti individuano una e una sola retta.
- Due piani distinti individuano una retta oppure sono paralleli.
- Una retta r e un punto P tale che $P \notin r$ individuano uno e un solo piano.
- Tre punti non allineati individuano uno e un solo piano.
- Una retta r e un piano π tale chi $r \notin \pi$ individuano un punto oppure sono paralleli.
- Se una retta r e un piano α sono paralleli esiste su α una retta s parallela a r; viceversa, se su un piano α esiste una retta s parallela alla retta r, allora α e r sono paralleli.

- Un fascio (proprio) di piani è l'insieme di tutti i piani che passano per una retta fissa s (asse del fascio).

- Un fascio improprio di piani è l'insieme di tutti i piani che sono paralleli a un piano dato α.

- Tre piani che non contengono una stessa retta individuono un punto oppure nessun punto (quest'ultimo caso si verifica se uno dei piani è parallelo alla retta intersezione degli altri, ovvero i tre piani sono paralleli).

- Due rette distinte sono:
  - complanari, se esiste un piano che contiene entrambe; ciò accade se sono incidenti in un punto o parallele;
  - sghembe, se non esiste un piano che contiene entrambe; ciò accade se non sono parallele e non hanno punti in comune.

- Dato un punto P e un piano α tali che $P \notin \alpha$, esiste uno e un solo piano β parallelo a α e passante per P.

- Dati un punto P e una retta r tali che $P \notin r$ esiste una e una sola retta s parallela a r e passante per P.

B. Proprietà metriche

- Dati un punto P e un piano α esiste una e una sola retta r ortogonale a α e passante per P; l'intersezione P' di r con α si dice proiezione ortogonale di P sul piano.

- Dati un punto P e una retta r esiste un solo piano α per P perpendicolare ad r; l'intersezione P' di r con α si dice proiezione ortogonale di P sulla retta.

- Due rette r e s incidenti in P formano due angoli tra loro supplementari.

- Due rette r e s sghembe formano due angoli (supplementari) che coincidono con i due angoli formati da r e dalla parallela $s^{'}$ a s per un punto qualsiasi P sopra r.

- Due piani α e β formano due angoli uguali ai due angoli formati dalle rette r e s, perpendicolari ai due piani e passanti per un punto qualsiasi P.

- I due angoli formati da un piano α e una retta r sono i complementari (ad un angolo retto) dei due angoli formati da r e dalla retta s perpendicolare al piano e passante per un punto qualsiasi di r.

- Due rette sghembe sono ortogonali se esistono due rette ad esse parallele e complanari che sono perpendicolari.

Osservazione: Dati un punto P e un piano α esistono infiniti piani β ortogonali a α e passanti per P.

Osservazione: Dati un punto P e una retta r esistono infinite rette ortogonali a r e passanti per P; se P non appartiene a r esiste una sola retta per P perpendicolare e incidente a r.

- Date due rette sghembe r e s e un punto P che non appartiene a nessuna delle due, esiste una e una sola retta t che incontra r e s e passa per P.

- Date due rette sghembe r e s esiste una e una sola retta t che incontra r e s perpendicolarmente. La distanza minima fra due rette sghembe r e s è la distanza tra i punti P e Q in cui la perpendicolare comune t le incontra.

- Un piano α e una retta r sono ortogonali se e solo se tutte le rette su α sono ortogonali a r ovvero se e solo se tutti i piani per r sono ortogonali a α.

- Due piani α e β sono ortogonali se esiste su ognuno dei due una retta ortogonale all'altro.

- Dati una retta r e un piano α che non sono ortogonali fra loro, esiste uno e un solo piano β passante per r e ortogonale a α.
- La proiezione ortogonale di una retta r su un piano α ad essa non ortogonale è l'intersezione $r^{'}$ di α con il piano per r ortogonale a α e coincide con l'insieme delle proiezioni ortogonali su α di tutti i punti P di r; se la retta e il piano sono ortogonali, la proiezione di r è il punto P di intersezione tra la retta e il piano.
- Siano r e s due rette incidenti del piano α, sia β un piano perpendicolare a r, γ un piano perpendicolare a s; la retta t intersezione di β e γ è ortogonale sia a r che a s.
- la distanza di un punto P da un piano π è la distanza del punto dalla sua proiezione ortogonale sul piano.
- La distanza di un punto P da una retta r è la distanza del punto dalla sua proiezione ortogonale sulla retta.

C. Sfere e circonferenze

- Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza, circoscritta al triangolo avente i tre punti come vertici.
- Per quattro punti, a tre a tre non allineati, passa una e una sola sfera, circoscritta al tetraedro avente tali punti come vertici.
- Una sfera S e un piano α si tagliano in:
  - una circonferenza se la distanza del centro di S da α è minore del raggio;
  - un solo punto se la distanza del centro di S da α è uguale al raggio (piano tangente a S);
  - nessun punto se la distanza del centro di S da α è maggiore del raggio.

- Una sfera S e una retta r si tagliano in:
  - due punti distinti se la distanza del centro di S da r è minore del raggio;
  - un solo punto se la distanza del centro di S da r è uguale al raggio (retta tangente a S);
  - nessun punto se la distanza del centro di S da r è maggiore del raggio.
- Due sfere S e S' si tagliano in:
  - una circonferenza se la distanza dei centri è minore della somma dei raggi;
  - un punto se la distanza dei centri è uguale alla somma o alla differenza dei raggi (sfere tangenti internamente o esternamente) e maggiore della differenza;
  - in nessun punto se la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi o minore della differenza.
- **Vettori applicati**

  Indichiamo con $\mathcal{A}^3$ lo spazio usuale della geometria euclidea. Fissiamo un punto $O \in \mathcal{A}^3$.

Definizione 18 *Un vettore applicato in O è un segmento orientato con primo estremo in O e secondo estremo in $A \in \mathcal{A}^3$, $A \neq O$. Come per i vettori applicati nel piano questo vettore sarà disegnato come una freccia che parte da O e guinge ad A e indicato con $\vec{OA}$ oppure con $A - O$.*

Indicheremo con V_O^3 l'insieme dei vettori applicati in O; il punto O è l' *origine* di V_O^3.

Come nel caso del piano definiamo una bigezione

$$\Phi_O : \mathcal{A}^3 \to V_O^3,\ A \mapsto \vec{OA}. \tag{2.1}$$

In parole, al punto $A \in \mathcal{A}^3$ viene associato il vettore applicato in O che termina in A. In particolare all'origine O viene associato il vettore $\vec{OO}$, chiamato il *vettore nullo.*

Due vettori applicati in $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ possono essere sommati con la regola del parallelogramma. Indicheremo questa somma con $\vec{OA} + \vec{OB}$.

Inoltre un vettore $\vec{OA}$ può essere moltiplicato per una costante $\lambda \in \mathbb{R}$. Indicheremo questo prodotto con $\lambda\vec{OA}$.

Analogamente al caso piano abbiamo il seguente:

Teorema 19 *La somma e la moltiplicazione per scalari appena descritte fanno si che V_O^3 sia uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.*

- **Vettori liberi**

Indichiamo con $\tilde{V}^3$ l'insieme di tutti i vettori applicati del piano, qualunque sia la loro origine.

Definizione 20 *Diremo che i vettori applicati $\vec{OA}$ e $\vec{O'A'}$ sono equivalenti, e scriveremo $\vec{OA} \sim \vec{O'A'}$, se sono paralleli, congruenti e hanno lo stesso verso. In altre parole $\vec{OA} \sim \vec{O'A'}$ e se solo se $OO'AA'$ è un parallelogramma.*

Come per il caso piano $\sim$ definisce una relazione d'equivalenza su $\tilde{V}^3$.

Definizione 21 *Un vettore libero nello spazio è una classe di equivalenza per la relazione $\sim$ sull'insieme $\tilde{V}_3$. L'insieme quoziente $\tilde{V}^3/\sim$ di tutti i vettori liberi verrà indicato con V_3. Indichiamo con $\pi : \tilde{V}_3 \to V_3$ l'applicazione quoziente che a ogni vettore libero $\vec{AB}$ associa la sua classe di equivalenza $[\vec{AB}]$.*

Osserviamo che dato $v \in V_3$ e $O \in \mathcal{A}^3$ allora esiste un unico punto $A \in \mathcal{A}^3$ tale che $v = [\vec{OA}]$, cioè esiste un unico vettore applicato in O che rappresenta v. Infatti, se $\vec{O'B}$ è un qualunque rappresentante di v, allora esiste un unico punto A tale che $OO'BA$ si un parallelogramma: A è dato da $\vec{OA} = \vec{OB} - \vec{OO'}$

Siano v e w due vettori liberi e $\lambda \in \mathbb{R}$. Scegliamo $O \in \mathcal{A}^3$. Allora esiste un unico $A \in \mathcal{A}^3$ e $B \in \mathcal{A}^3$ tale che $v = [\vec{OA}]$ e $w = [\vec{OB}]$. Definiamo

$$v + w = [\vec{OA} + \vec{OB}]$$

e

$$\lambda v = [\lambda \vec{OA}].$$

In queste definizioni di somma e prodotto per scalari abbiamo scelto un punto arbitrario $O \in \mathcal{A}^3$. Come nel caso piano queste definizioni non dipendono dal punto O.

Teorema 22 *Sia $T : V_O^3 \to V_3$ l'applicazione che a $\vec{OP}$ associa il vettore libero $[\vec{OP}]$. Allora T è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

2.2 Sistemi di riferimenti cartesiani nello spazio

Fissiamo un'unità di misura nello spazio $\mathcal{A}^3$. Ricordando che l'angolo di un radiante è quello che in una circonferenza di raggio 1 sottende un arco lungo 1 è determinata univocamente anche un'unità di misura per gli angoli.

Definizione 23 *Un sistema di riferimento cartesiano nello spazio è costituito da un punto $O \in \mathcal{A}^3$ e tre vettori applicati $i = \vec{OA}_1$, $j = \vec{OA}_2$ e $k = \vec{OA}_3$ di lunghezza unitaria e a due a due ortogonali (e quindi linearmente indipendenti). Le tre rette orientate individuate dai rappresentanti di $\{i, j, k\}$ applicati in O si* *dicono rispettivamente asse delle ascisse, asse delle ordinate e asse delle quote. I piani individuati da due assi si dicono piani coordinati e si indicano con* $[xy]$, $[xz]$ *e* $[yz]$.

Indicheremo un sistema di riferimento cartesiano in $\mathcal{A}^3$ con $\mathcal{R}(O, i, j, k)$ o semplicemente con $\mathcal{R}$.

Definizione 24 *Diremo che un riferimento cartesiano* $\mathcal{R}(O, i, j, k)$ *è positivo (rispettivamente negativo) se la rotazione di* $\frac{\pi}{2}$ *che* i *deve fare per sovrapporsi a* j *vista dal semispazio individuato da* k *avviene in senso antiorario (rispettivamente orario).*

Coordinate cartesiane

Una volta fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, i, j, k)$, per ogni vettore $\vec{OP}$ possiamo associare in modo unico tre numeri reali x_P, y_P e z_P tali che

$$\vec{OP} = x_P i + y_P j + z_P k. \tag{2.2}$$

Questo discende dal fatto che i vettori i, j e k sono una base dello spazio vettoriale V_O^3 e quindi x_P, y_P, z_P non sono altro che le coordinate del vettore $\vec{OP}$ rispetto a questa base. In termini più precisi fissata la base $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ di V_O^3 possiamo costruire l'isomorfismo $F_\mathcal{B}$ tra gli spazi vettoriali V_O^3 e $\mathbb{R}^3$.

$$F_\mathcal{B} : V_O^3 \to \mathbb{R}^3, \; \vec{OP} \mapsto (x_P, y_P, z_P) \tag{2.3}$$

dove x_P, y_P, z_P sono i numeri reali dati da (2.2).

Angoli e lunghezze di vettori

Consideriamo il prodotto scalare $\cdot$ su V_O^3 rispetto al quale la base $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ è una base ortonormale. Nello spazio metrico $(V_O^3, \cdot)$ possiamo definire la norma di un vettore $\vec{OP}$ e l'angolo $\alpha, 0 < \alpha < \pi$ tra due vettori non nulli $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ tramite la formule:

$$\|\vec{OP}\| = \sqrt{\vec{OP} \cdot \vec{OP}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OQ}}{\|\vec{OP}\| \|\vec{OQ}\|}$$

Come per il piano questa norma e questo angolo coincidono con la lunghezza di un vettore e l'angolo tra vettori definito tramite la geometria di Euclide. Questo è espresso dal seguente teorema la cui dimostrazione è una semplice estensione del caso piano e viene lasciata per esercizio.

Teorema 25 *Se $\overline{OP}$ rappresenta la lunghezza del vettore $\vec{OP}$ (ossia la distanza tra O e P) nell'unità di misura fissata e $\theta = ang(\vec{OP}, \vec{OQ})$ denota l'angolo tra i vettori $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ definito tramite la geometria di Euclide allora*

$$\overline{OP} = \|\vec{OP}\| \tag{2.4}$$

$$cos\theta = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OQ}}{\|\vec{OP}\|\|\vec{OQ}\|}. \tag{2.5}$$

Riassunto di quello che abbiamo fatto

Quindi, una volta fissata un' origine $O \in \mathcal{A}^3$ abbiamo identificato i punti di $\mathcal{A}^3$ con l'insieme V_O^3 dei vettori applicati in O. Inoltre fissata la base $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ abbiamo identificato (tramite l' isomorfismo $F_\mathcal{B}$) V_O^3 con $\mathbb{R}^3$. Quindi possiamo fare somme tra vettori o moltiplicazioni tra scalari e vettori usando le usuali operazioni di spazio vettoriale su $\mathbb{R}^3$ invece che le complicate operazioni geometriche con i vettori. In questa identificazione abbiamo trovato un modo per calcolare le lunghezza di un vettore $\vec{OP}$ e l'angolo tra due vettori non nulli $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ in V_O^3 calcolando la norma del vettore $F_\mathcal{B}(\vec{OP})$ e l'angolo tra $F_\mathcal{B}(\vec{OP})$ e $F_\mathcal{B}(\vec{OQ})$ usando il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$. In altri termini l'applicazione $F_\mathcal{B}$: $(V_O^3, \cdot) \to (\mathbb{R}^3, \cdot)$ è un' isometria isometrica, dove nel dominio abbiamo definito il prodotto scalare rispetto al quale la base $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ è ortonormale e in $\mathbb{R}^3$ stiamo considerando il prodotto scalare canonico (che non a caso è il prodotto scalare rispetto al quale la base canonica $e_1 = F_\mathcal{B}(i)$, $e_2 = F_\mathcal{B}(j)$, $e_3 = F_\mathcal{B}(k)$ di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale).

2.3 Qualche applicazione: sfere e prodotto vettoriale

Sia $\mathcal{R}(O, i, j, k)$ un sistema di riferimento cartesiano nello spazio. Da ora in poi un punto $P \in \mathcal{A}^3$ sarà identificato con le sue coordinate cartesiane (x, y, z) e scriveremo $P(x, y, z)$ oppure $P = (x, y, z)$. Se u è un vettore libero in V^3 possiamo scrivere

$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k.$$

La sua norma è data da

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}. \tag{2.6}$$

Se $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ e $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ sono due vettori liberi il loro prodotto scalare è

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \tag{2.7}$$

e l'angolo tra loro (se nessuno dei due è il vettore nullo!) è dato da

$$\cos \hat{uv} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \quad 0 \leq \hat{uv} \leq \pi \tag{2.8}$$

Le componenti del vettore u di rappresentante $\vec{P_1 P_2} = P_2 - P_1$ rispetto alla base $\{i, j, k\}$ sono la differenza tra le coordinate omonime di P_2 e di P_1.

Infatti, se $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, risulta

$$u = (P_2 - O) + (O - P_1) = (P_2 - O) - (P_1 - O) = x_2 i + y_2 j + z_2 k - x_1 i - y_1 j - z_1 k$$

ossia

$$P_2 - P_1 = (x_2 - x_1) i + (y_2 - y_1) j + (z_2 - z_1) k. \tag{2.9}$$

Il punto medio $M = (x_M, y_M)$ del segmento di estremi $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ è l'unico punto tale che

$$M - P_1 = P_2 - M.$$

Quindi

$$(x_M - x_1)i + (y_M - y_1)j + (z_M - z_1)k = (x_2 - x_M)i + (y_2 - y_M)j + (z_2 - z_M)k$$

e quindi

$$\boxed{x_M = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \;\; y_M = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2), \;\; z_M = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2).}$$

Denoteremo con $\overline{P_1P_2}$ la distanza dei punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

Questa è data dalla lunghezza del vettore $P_2 - P_1$ e quindi:

$$\boxed{\overline{P_1P_2} = \|P_2 - P_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.}$$

Prodotto vettoriale Il prodotto vettoriale è quella applicazione che associa ad ogni coppia di vettori $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$, $w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$ in $\mathbb{R}^3$ (i, j, k base canonica di $\mathbb{R}^3$) il vettore $v \wedge w \in \mathbb{R}^3$ definito come segue:

$$v \wedge w = \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} e_1 - \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} e_2 + \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} e_3 \in \mathbb{R}^3$$

Osserviamo che il prodotto vettoriale può essere scritto nel seguente modo

$$v \wedge w = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix},$$

dove si intende che questo "determinante " viene sviluppato solo lungo la prima riga.

Proprietà del prodotto vettoriale

Proposizione 26 *(i) $v \wedge w$ è ortogonale sia a v che a w;*

(ii) $\|v \wedge w\|$ *è l'area del parallelogramma di vertici* O, v, w, $v + w$, *cioè*

$$\|v \wedge w\| = \|v\|\|w\|| \, sin\theta|,$$

dove θ *è l'angolo fra* v *e* w.

(iii) $v \wedge w = 0$ *se e solo se* v *e* w *sono linearmente dipendenti;*

(iv) se v *e* w *sono linearmente indipendenti, allora la base* $\{v, w, v \wedge w\}$ *determina la stessa orientazione della base canonica (cioè la matrice di passaggio dalla base canonica di* $\mathbb{R}^3$ *al la base* $\{v, w, v \wedge w\}$ *ha determinante positivo);*

(v) $v \wedge w$ *è l'unico vettore di* $\mathbb{R}^3$ *che soddisfa (i), (ii) e (iv);*

(vi) $w \wedge v = -v \wedge w$;

(vii) $(\lambda v) \wedge w = \lambda(v \wedge w) = v \wedge (\lambda w)$;

(viii) $(v_1 + v_2) \wedge v_3 = v_1 \wedge v_3 + v_2 \wedge v_3$, $v_1 \wedge (v_2 + v_3) = v_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge v_3$

Dimostrazione: la dimostrazione della (i), (iii), (vi), (vii), (viii) sono lasciate per esercizio. Per dimostrare la (ii), osserviamo che un semplice calcolo mostra che:

$$\|v \wedge w\|^2 = \|v\|^2\|w\|^2 - (v \cdot w)^2 = \|v\|^2\|w\|^2(1 - \cos^2\theta).$$

(iv)

$$\det(v\, w\, v\wedge w) = \det \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} =,$$

$$= \left(\det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}\right)^2 + \left(\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}\right)^2 + \left(\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}\right)^2 > 0,$$

dove la disuguaglianza segue dalla (iii) cioè dal fatto che v e w sono linearmente indipendenti.

(v) Supponiamo di avere un vettore $u \in \mathbb{R}^3$ che soddisfi (i), (ii), (iv), cioè che sia ortogonale sia a v che a w, tale che la sua norma uguagli quella di $v \wedge w$ e tale che v, w, u determini la stessa orientazione della base canonica. Se v e w sono linearmente dipendenti allora per la (ii) $\|v \wedge w\| = 0$ e quindi $\|u\| = 0$, cioè $u = 0$. Se v e w sono linearmente indipendenti, l'ortogonale di $\operatorname{Span} v, w$ ha dimensione uno, quindi per la (i) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $u = \lambda(v \wedge w)$. La (ii) forza $\lambda = \pm 1$. Per la (iv) $\det(v\ w\ v \wedge w) = \det(v\ w\ u)$ e quindi $\lambda = 1$. $\square$

Osservazione 27 Le proprietà (vii) e (viii) si esprimono dicendo che l'applicazione

$$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (v, w) \to v \wedge w$$

è bilineare.

Osservazione 28 $i \wedge i = j \wedge j = k \wedge k = 0,\ i \wedge j = -j \wedge i = k,\ j \wedge k = -k \wedge j = i,\ k \wedge i = -i \wedge k = j.$

Osservazione 29 Osserviamo che il prodotto vettoriale non è "un prodotto " nel vero senso del termine. Infatti non è associativo. Per esempio

$$0 = i \wedge (j \wedge j) \neq (i \wedge j) \wedge j = k \wedge j = -i$$

Il <u>prodotto misto</u> della terna ordinata di vettori u, v, w è il numero reale

$$u \wedge v \cdot w.$$

Non è difficile vedere (lo dimostreremo a lezione) che:

Il valore assoluto del prodotto misto dei tre vettori u, v, w rappresentati dai tre segmenti orientati $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ è il volume del parallelepipedo avente come spigoli concorrenti nello stesso vertice i rappresentanti dei tre vettori.

Osservazione 30 Quest' ulitma è forse una delle proprietà più importanti del determinante soprattutto nell'ambito dell'analisi (teoria della misura, integrali multipli, etc.)

Se $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$, $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ e $w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$ sono tre vettori il loro prodotto misto si può rappresentare mediante il determinante:

$$u \wedge v \cdot w = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix},$$

Dati tre punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e $P_3(x_3, y_3, z_3)$ l'area A del triangolo da essi individuato è la metà del modulo di $(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1)$, cioè:

$$A = \frac{1}{2} \| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} \| \tag{2.10}$$

Dati i quattro punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ $P_3(x_3, y_3, z_3)$ e $P_4(x_4, y_4, z_4)$ il volume V del parallelepipedo da essi individuato è dato da:

$$V = |(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1) \cdot (P_4 - P_1)| = | \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix} |$$

Il volume del tetraedro di vertici P_1, P_2, P_3, P_4 è $\frac{1}{6}V$.

La sfera

La *sfera* di centro C e raggio R è l'insieme dei punti P dello spazio aventi distanza R da C, ossia

$$\|P - C\|^2 = R^2$$

Posto $P(x, y, z)$, $C(\alpha, \beta, \gamma)$ si ha:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2.$$

Equivalentemente

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0 \tag{2.11}$$

con

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}. \tag{2.12}$$

Quindi l'equazione (2.11) rappresenta una sfera di centro $C(\alpha, \beta, \gamma)$ purchè la quantità sotto radice (2.12) sia positiva.

2.4 Rappresentazioni del piano e della retta

Un piano α può essere individuato geometricamente assegnando:

- un suo punto P_0 ed un vettore $n \neq 0$ perpendicolare al piano;
- un suo punto P_0 e due vettori w e $w^{'}$ linearmente indipendenti e paralleli al piano. In questo caso rientra anche quello in cui il piano sia individuato da tre suoi punti P_0, P_1 e P_2, non allineati, ponendo $w = P_1 - P_0$ e $w^{'} = P_2 - P_0$.

Le diverse rappresentazioni del piano si ottengono traducendo mediante l'uso delle coordinate le precedenti condizioni geometriche.

Sia $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ed $n = ai + bj + ck$: Un punto $P(x, y, z)$ appartiene al piano se e solo se:

$$(P - P_0) \cdot n = 0.$$

Passando in componenti, poichè

$$P - P_0 = (x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k,$$

si ottiene l'equazione del piano

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{2.13}$$

cioè un'equazione del tipo

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0.} \tag{2.14}$$

Deduciamo che un piano α si rappresenta con un'equazione di primo grado nelle incognite (x, y, z), in cui i coefficienti delle incognite rappresentano le componenti di un vettore perpendicolare ad α.

Se si moltiplica l'equazione (2.14) per un fattore $\rho \neq 0$ arbitrario, si ottiene una nuova equazione che rappresenta lo stesso piano; pertanto l'equazione di un piano è definita a meno di un fattore di proporzionalità.

Inoltre la (2.13), al variare di (a, b, c) rappresenta la totalità dei piani passanti per P_0, detta anche *stella di piani di centro* P_0.

Osserviamo che se $d = 0$ nella (2.14) allora il piano α passa per l'origine.

L'equazioni $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ rappresentano il piano $[yz]$, $[xz]$ e $[xy]$ rispettivamente.

Il piano α passante per il punto P_0 e parallelo ai vettori indipendenti w e $w^{'}$ è l'insieme dei punti dello spazio tali che i vettori $P - P_0, w, w^{'}$ siano complanari, ossia:

$$\boxed{(P - P_0) \cdot w \wedge w^{'} = 0.} \tag{2.15}$$

Tale condizione è equivalente a quella precedente con $n = w \wedge w^{'}$.

Supposto che $w = li + mj + nk$ e $w^{'} = l^{'}i + m^{'}j + n^{'}k$, la (2.15) si scrive:

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l^{'} & m^{'} & n^{'} \end{pmatrix} = 0} \qquad (2.16)$$

che è un'equazione della forma (2.14).

Se il piano α è individuato da tre punti non allineati $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ si possono usare le (2.16) con $w = P_1 - P_0$ e $w^{'} = P_2 - P_0$ e quindi:

$$l = x_1 - x_0,\ m = y_1 - y_0,\ n = z_1 - z_0$$

e

$$l^{'} = x_2 - x_0,\ m^{'} = y_2 - y_0,\ n^{'} = z_2 - z_0.$$

Consideriamo due piani α e $\alpha^{'}$ di equazioni cartesiane:

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0$$

e

$$\alpha^{'} : a^{'}x + b^{'}y + c^{'}z + d^{'} = 0.$$

Se essi sono paralleli, i vettori $n = (a, b, c)$ e $n^{'} = (a^{'}, b^{'}, c^{'})$ normali ad α e $\alpha^{'}$, sono paralleli.

Conseguentemente abbiamo la seguente *condizione di parallelismo tra piani*:

$$\frac{a}{a^{'}} = \frac{b}{b^{'}} = \frac{c}{c^{'}}.$$

Ne segue che due piani paralleli si possono rappresentare con equazioni che differiscono per il termine noto e che l'equazione:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

rappresenta al variare di $d \in \mathbb{R}$, tutti i piani ortogonali al vettore (a, b, c).

Se poi

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$$

i due piani α e α' coincidono.

Se i piani α e α' non sono paralleli, hanno come intersezione una retta r. Le coordinate dei punti di r sono le soluzioni del sistema lineare:

$$\boxed{\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}} \tag{2.17}$$

e quindi r può essere rappresentata mediante le equazioni (2.17) che si dicono *equazioni cartesiane della retta r.*

La totalità dei piani paralleli ad uno stesso piano si dice *fascio improprio di piani.* La totalità dei piani passanti per una retta r si dice *fascio proprio di piani* di asse r.

Abbiamo già visto che tutti i piani paralleli ad uno stesso piano α sono rappresentabili mediante equazioni che si ottengono da quella di α facendo variare il termine noto.

La totalità dei piani passanti per la retta r intersezione dei piani: $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ è rappresentata dall'equazione

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \tag{2.18}$$

al variare di λ e μ in $\mathbb{R}$.

Infatti la (2.18) rappresenta un piano per ogni valore della coppia (λ, μ) definita a meno di un fattore di proporzionalità e distinta da $(0, 0)$. Inoltre ogni punto di

r ha coordinate che soddisfano la (2.18) e per ogni punto dello spazio, che non appartenga a r, passa uno ed un solo piano di equazione (2.18). Diremo che la (2.18) rappresenta il *fascio di piani individuato da* α *e* α'.

Osserviamo che per rappresentare la retta r come intersezione di due piani α e α' si possono utilizzare due qualsiasi piani distinti del fascio individuato da α e α'.

Una retta r nello spazio, può essere individuata assegnando un suo punto P_0 ed un vettore non nullo u a cui la retta sia parallela, o anche mediante due punti P_0 e P_1 ponendo $u = P_1 - P_0$.

Un punto P dello spazio appartiene a r se e solo se i vettori $P - P_0$ e u sono paralleli.

Posto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P(x, y, z)$, $u = li + mj + nk$ passando alle componenti deve essere:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{2.19}$$

con la convenzione che, se è nullo qualche denominatore della (2.19), deve essere posto uguale a zero il corrispondente numeratore.

La totalità delle rette passanti per P_0, detta *stella propria di rette di centro* P_0, si ottiene dalle (2.19) al variare di (l, m, n).

I numeri (l, m, n), componenti di un vettore parallelo alla retta r, si dicono i *parametri direttori* di r e sono ovviamente definiti a meno di un fattore di proporzionalità.

Un altro modo per esprimere il parallelismo tra i vettori $P - P_0$ e u è dato da:

$$P - P_0 = tu,\ t \in \mathbb{R}$$

da cui si deducono le *equazioni parametriche* di r:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}} \tag{2.20}$$

Se r è individuata dai due punti $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$, valgono le rappresentazioni (2.19) e (2.20) con

$$l = x_1 - x_0,\ m = y_1 - y_0,\ n = z_1 - z_0.$$

Esempio 31 Vogliamo trovare l'equazione parametrica della retta r intersezione dei due piani $\alpha : x + y - z = 0$ e $\alpha^{'} : 2x - y - z + 1 = 0$.

Possiamo, per esempio, porre $z = t$, e ottenere le equazioni parametriche per la retta r:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$$

Potevamo anche porre $y = t$ e ottenere le equazioni parametriche per la retta r:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

Viene lasciato come esercizio allo studente quello di verificare che le due equazioni parametriche trovate rappresentano infatti la stessa retta r.

Esempio 32 Scriviamo l'equazione cartesiana del piano α passante per il punto $P_0(1, 2, 3)$ e perpendicolare al vettore $n = i + j + k$. Osserviamo che un punto $P(x, y, z)$ appartiene a α se e solo se:

$$(P - P_0) \cdot n = 0,$$

o, equivalentemente,

$$1(x-1)+1(y-2)+1(z-3)=0.$$

Il piano α ha quindi equazione cartesiana:

$$x+y+z-6=0.$$

Esempio 33 Scriviamo l'equazione cartesiana del piano α passante per il punto $P_0(1,2,3)$ e parallelo ai vettori $u=i+j$ e $v=i-j+k$.

L'equazione cartesiana si ottiene dalla (2.16)

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=0 \tag{2.21}$$

Un calcolo immediato mostra che α ha equazione cartesiana:

$$x-y-2z+3=0. \tag{2.22}$$

Esempio 34 Vogliamo scrivere l'equazione cartesiana del piano α passante per $P_0(1,2,3)$ e contenente la retta $r: x-2y=0,\ z+1=0$.

Consideriamo il fascio di piani di asse la retta r:

$$\lambda(x-2y)+\mu(z+1)=0. \tag{2.23}$$

Imponendo il passaggio per il punto P_0 si ottiene:

$$-3\lambda+4\mu=0.$$

Una soluzione è data da $\lambda = 4$ e $\mu = 3$.

Sostituendo nell'equazione (2.23) si ottiene il piano cercato:

$$4x - 8y + 3z + 3 = 0.$$

Posizione di due rette nello spazio

Due rette distinte r e s possono essere *sghembe* cioè non contenute in uno stesso piano oppure *complanari* e in tal caso possono essere *parallele* e *incidenti.*

Se i parametri direttori delle rette r e s sono rispettivamente (l, m, n) e $(l^{'}, m^{'}, n^{'})$ allora la *condizione di parallelismo* è espressa da:

$$\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}.$$

Per controllare se due rette sono incidenti è necessario controllare se il sistema costituito dalle equazioni delle due rette è compatibile.

Si può anche determinare una condizione che esprime la complanarità delle due rette come segue.

Supposto che $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$ siano due punti qualsiasi di r e s e siano r e s due vettori paralleli alle due rette.

Le rette r e s sono complanari se lo sono i vettori $P_1 - P_0$, r, s cioè se e solo se:

$$(P_1 - P_0) \cdot r \wedge s = 0$$

ossia se e solo se:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \\ l^{'} & m^{'} & n^{'} \end{pmatrix} = 0 \tag{2.24}$$

Chiaramente la (2.24) non è soddisfatta se le rette r e s sono sghembe.

Posizione di una retta e un piano
Una retta r si può trovare in relazione ad un piano α, nelle seguenti posizioni:

- r è incidente α in un punto;
- r è parallela ad α, ossia α non ha punti in comune oppure è contenuta nel piano.

Se α è rappresentato dall'equazione

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{2.25}$$

e la retta r ha la forma parametrica

$$x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + nt \tag{2.26}$$

le eventuali intersezioni tra la retta α e r si ottengono imponendo che le (2.26) verifichino la (2.25), cioè in corrispondenza ai valori di t che soddisfano l'equazione:

$$(al + bm + cn)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0. \tag{2.27}$$

Si presentano quindi i seguenti casi:

1) se $al + bm + cn \neq 0$ allora α e r hanno una sola intersezione;

2) se $al + bm + cn = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$ allora (2.27) è incompatibile e quindi r e α non hanno punti in comune;

3) se $al + bm + cn = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ allora la (2.27) è una identità e la retta r è contenuta nel piano α.

Dai casi 2) e 3) si ha pertanto che la *condizione di parallelismo tra retta e piano* è data da:

$$al + bm + cn = 0$$

la quale esprime anche l'ortogonalità tra un vettore parallelo a r ed un vettore perpendicolare a α.

2.5 Angoli e distanze

Consideriamo due rette r e s eventualmente sghembe. Prendiamo due vettori non nulli r e s paralleli alle rette r e s e sia φ l'angolo (orientato) tra questi vettori. Osserviamo che se cambiamo il segno ad uno di questi vettori l'angolo individuato è il supplementare di φ.

Si definiscono come *angoli di due rette* r e s e si indicano con $\hat{rs}$ gli angoli dei due vettori r e s.

Quindi:

$$\cos \hat{rs} = \pm \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}} \tag{2.28}$$

In particolare due rette sono ortogonali se:

$$ll' + mm' + nn' = 0. \tag{2.29}$$

Osservazione 35 Si noti che vi sono infinite rette passanti per un punto P_0 e perpendicolari ad una retta r assegnata. Queste sono tutte le rette del piano passante per P_0 e perpendicolare a r.

Definiamo l'angolo tra due piani α e $\alpha^{'}$ come l'angolo tra due qualsiasi rette ortgonali ai due piani.

Se i due piani hanno equazioni cartesiane $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha^{'} : a^{'}x + b^{'}y + c^{'}z + d^{'} = 0$ segue dalla (2.28):

$$\cos \hat{\alpha\beta} = \pm \frac{aa^{'} + bb^{'} + cc^{'}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Un piano α e una retta r formano un angolo $\hat{\alpha r}$ se la retta r forma un angolo uguale a $\frac{\pi}{2} - \hat{\alpha r}$ con una retta s ortogonale ad α (è chiaro che se α e r formano un angolo $\hat{\alpha r}$ allora essi formano anche l'angolo $\pi - \hat{\alpha r}$).

Una retta r di parametri direttori (l, m, n) e un piano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ sono ortogonali se e solo se r e parallela la vettore (a, b, c) (vettore ortogonale al piano), ossia se e solo se:

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n},$$

che esprime la *condizione di perpendicolarità di una retta e di un piano.*

Ossia una retta ed un piano sono ortogonali se i parametri direttori della retta coincidono, a meno di un fattore di proporzionalità, coi coefficienti dell'equazione del piano.

Distanza di un punto da un piano

Vogliamo determinare la distanza di un punto P_0 da un piano α.

Supponiamo che P_0 abbia coordinate $(x_0, y_0.z_0)$ e il piano α abbia equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$.

Sia H il punto di intersezione di α con la retta n ad esso perpendicolare passante per P_0. La distanza di P_0 da α è la lunghezza del segmento P_0H.

La retta n ha equazioni parametriche $x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct$ ed il punto H intersezione con α si ottiene in corrispondenza del valore di t dato da:

$$t_H = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{2.30}$$

Ne segue che i punti $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $H(x_0+at_H, y_0+bt_H, z_0+ct_H)$ hanno distanza:

$$\overline{P_0H} = \sqrt{a^2t_H^2 + b^2t_H^2 + c^2t_H^2} = |t_H|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

e quindi tenuto conto della (2.30) si ha:

$$\boxed{d(P_0, H) = \overline{P_0H} = \tfrac{|ax_o+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.} \tag{2.31}$$

La formula (2.31) può venire utilizzata anche per calcolare la distanza da α di un piano β o di una retta r paralleli ad α; basta prendere P_0 appartenente a β o r.

Distanza di un punto da una retta
Per determinare la distanza di un punto P_0 da una retta r nello spazio si calcola la distanza di P_0 dal punto H, intersezione della retta r con il piano α ad essa perpendicolare e passante per P_0.

Esempio 36 Vogliamo trovare la distanza di $P_0(1, -1, 2)$ dalla retta di equazioni parametriche:

$$r : x = 1 + t,\ y = t,\ z = -t + 3.$$

Il piano passante per P_0 e perpendicolare a r ha equazione:

$$x + y - z + 2 = 0.$$

L'intersezione H tra questo piano e la retta r si ottiene quando:

$$x + y - z + 2 = 1 + t + t + t - 3 + 2 = 0$$

cioè per $t = 0$. Il punto H ha quindi coordinate $(1, 0, 3)$.

Conseguentemente

$$d(P_0, r) = d(P_0.H) = \sqrt{2}.$$

Distanza tra due rette

Consideriamo due rette r e s. Se esse sono incidenti la loro distanza è zero; se sono parallele la distanza di r da s è la distanza di un punto qualsiasi di una retta dall'altra che si calcola come nel caso precedente. Se r e s sono sghembe, ci sono due punti $P_1 \in r$ e $P_2 \in s$ tali che la retta passante per P_1 e per P_2 è perpendicolare e incidente ad r e s. Tale retta è chiamata *la retta di minima distanza*.

Il segmento che congiunge P_1 a P_2 è il segmento di lunghezza minima tra tutti i segmenti aventi un estremo su r ed un estremo su s.

La lunghezza di tale segmento è la distanza, o anche la *minima distanza* tra r e s.

La retta congiungente P_1 e P_2 si dice la *retta di minima distanza* tra r e s.

Per calcolare la distanza di r con s (ossia il segmento di minima distanza) si calcola la distanza di un punto qualsiasi P di s dal piano α passante per r e parallelo ad s.

Esempio 37 Calcoliamo la distanza tra le rette $r : x - y - 1,\ x + y - z = 0$ e $s : x = u,\ y = -2 + u,\ z = u$.

Perchè abbia senso calcolare la minima distanza tra le rette r e s devono essere sghembe. Una rappresentazione parametrica di r è $r : x = t,\ y = -1 + t,\ z = -1 + 2t$. L'eventuale intersezione tra r e s si trova per quei valori di s e u che soddisfano le equazioni: $t = u,\ -1 + t = 2 + u,\ -1 + 2t = u$.

Queste equazioni sono chiaramente incompatibili (la prima e la seconda implicano per esempio che $-1 = 2$). Quindi r e s sono sghembe. (Lo studente potrebbe verificare che le rette r e s sono sghembe usando la formula (2.24).

Per calcolare la minima distanza tra r e s troviamo, prima di tutto il piano α passante per r e parallelo a s. Il fascio proprio contenente la retta r ha equazione:

$$\lambda(x - y - 1) + \mu(x + y - z) = 0.$$

Imponendo che il piano del fascio sia parallelo a s, ossia che il suo vettore normale sia perpendicolare al vettore direttore della retta s si ottiene $(\lambda+\mu)+(\mu-\lambda)-\mu = \mu = 0$.

Il piano α ha quindi equazione cartesiana:

$$\alpha : x - y - 1 = 0.$$

Prendiamo il punto $P(0, -2, 0) \in s$ e calcoliamo la distanza con il piano α. Si ottiene facilmente:

$$d(p, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{2.32}$$

che rappresenta la minima distanza tra le rette r e s.

Come si calcola la retta t di minima distanza tra due rette sghembe r e s?

Se le rette hanno equazioni parametriche $P = P_O + t_1 u$ e $Q = Q_O + t_2 v$. Al variare di t_1 e t_2 si ottengono tutti i punti delle rette r e s. Dobbiamo trovare i due punti $P_1 \in r$ e $P_2 \in s$ tali che il vettore $\vec{P_1 P_2}$ sia ortogonale sia a s che a t. Dobbiamo cioè trovare i valori di t_1 e t_2 tali che

$$\vec{QP} \cdot u = 0, \; \vec{QP} \cdot v = 0.$$

Esempio 38 Calcoliamo la retta di minima distanza tra le rette dell'esercizio precedente e cioè $r : x - y - 1, \; x + y - z = 0$ e $s : x = u, \; y = -2 + u, \; z = u$.

Per trovare la retta di minima distanza, osserviamo che il punto generico della retta r ha coordinate

$$P(t_1, -1 + t_1, -1 + 2t_1),$$

mentre il punto generico della retta s ha coordinate $Q(t_2, -2 + t_2, t_2)$

Il vettore $Q - P$ ha componenti

$$(t_2 - t_1, t_2 - t_1 - 1, t_2 - 2t_1 + 1).$$

Imponendo che il vettore $Q - P$ sia ortogonale sia a r che a s otteniamo il sistema nelle incognite t_1 e t_2:

$$\begin{cases} 4t_2 - 6t_1 + 1 = 0 \\ 4t_1 - 3t_2 = 0 \end{cases}$$

Il quale ha soluzioni $t_1 = \frac{3}{2}$ e $t_2 = 2$.

Quindi $P_1(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2)$ e $P_2(2, 0, 2)$. La retta di minima distanza m è quindi parallela la vettore $(1, -1, 0)$ e passa per il punto $P_2(2, 0, 2) \in s$.

Le sue equazioni parametriche sono quindi $m : x = 2 + t,\ y = -t,\ z = 2$.

Osserviamo anche che la distanza tra il punto P_1 e P_2 rappresenta la minima distanza tra le rette r e s. Infatti si ottiene immediatamente che $d(P_1, P_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, in accordo con (2.32).

Esercizi rette e piani

1. Denotiamo con P'_{12}, P'_{13}, P'_{23}, P'_{1}, P'_{2}, P'_{3}, P' i simmetrici di un punto P rispetto ai piani coordinati $[xy]$, $[xz]$, $[yz]$, agli assi coordinati x, y, z e all'origine del sistema di riferimento. Calcolare P'_{12}, P'_{13}, P'_{23}, P'_{1}, P'_{2}, P'_{3}, P' quando $P(1,2,3)$.

2. Verificare che i punti $A(1,1,1)$, $B(2,-1,3)$, $C(0,1,4)$ non sono allineati.

3. Il baricentro G di un sistema di n punti $A_i(x_i, y_i, z_i)$ ha coordinate:

$$x_G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \ y_G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ \ z_G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i.$$

   Calcolare il baricentro G del triangolo di vertici $A_1(1,1,1)$, $A_2(-1,1,2)$, $A_3(0,0,1)$. Calcolare inoltre il baricentro G del quadrilatero di vertici $A_1(1,1,1)$, $A_2(-1,1,2)$, $A_3(0,0,1)$, $A_4(0,0,0)$.

4. Scrivere l'equazione del piano α passante per la retta $r : x + y - 1 = 0,\ y - 2z = 0$ e parallelo alla retta $s : y - z = 0,\ 3y - 2z + 2 = 0$.

5. Sia r la retta intersezione dei due piani, non paralleli, $\alpha : ax+by+cz+d = 0$ e $\alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

   Dimostrare che le componenti di un vettore direttore $\mathbf{v} = (l, m, n)$ della retta r sono date da:

$$l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix},\quad m = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix},\quad n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

6. Scrivere l'equazione cartesiana del piano α passante per $P_0(1,2,3)$ e contenente la retta $r : x = 2,\ y = 1 - t,\ z = 3t + 1$.

7. Dato il punto $P_0(1,2,-1)$ ed il piano $\alpha : x + y - z + 1 = 0$. Determinare l'equazione del piano α' passante per P_0 e parallelo a α.

8. Scrivere le equazioni cartesiane e le equazioni parametriche della retta passante per i punti A e B nei seguenti casi:

   a) $A(1, 1, 0)$, $B(1, 1, -1)$;

   b) $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$;

   c) $A(-1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$.

9. Determinare i parametri direttori e dare una rappresentazione parametrica per ciascuna delle seguenti rette:

   a) $x = y = \frac{z+1}{2}$;

   b) $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$;

   c) $x - 2y + z - 1 = 0$, $x + 3y - 2z + 2 = 0$.

10. Scrivere come intersezione di piani le rette r e s aventi le seguenti equazioni parametriche: $r : x = 1 - 2t,\ y = 1 + t,\ z = 2 - 3t$, $s : x = 1 - u,\ y = 3,\ z = 2 + 3u$.

11. Determinare la posizione reciproca delle seguenti coppie di rette:

    a) $r : x + y + z = 0,\ x = 0\ s : x = 0,\ x - 2y = 1$;

    b) $r : x = 1 + t,\ y = t,\ z = -t$, $s : x = 1 + u,\ y = u,\ z = -2 + u$;

    c) $r : x + y + z = 1,\ x - y = 0$, $s : x = t,\ y = 1 + t,\ z = -t$;

    d) $r : x = 2+t,\ y = -1-t,\ z = 4+3t$, $s : x = 3+u,\ y = 2+u,\ z = 4+u$;

12. Trovare la distanza del punto $P_0(1, 1, 0)$ dalla retta $r : x+y = 0,\ x-z = 0$.

13. Calcolare la distanza tra le rette $r : 2x + z = 0,\ x - y = 0$ e $s : x = t,\ y = 1 + t,\ z = -t$.

2.6 Rette e sfere, piani e sfere, sfere e sfere

Posizione tra retta e sfera

Per trovare i punti di intersezione tra una sfera $S : f(x, y, z) = 0$ e una retta $r : (x, y, z) = (x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt)$ basta risolvere l'equazione di secondo grado nella variabile t. Si distinguono tre casi: a) l'equazione non ha soluzioni (la retta non interseca la sfera); b) ha un' unica soluzione (la retta è tangente alla sfera in un punto); c) l'equazione ha due soluzioni (la retta interseca la sfera in due punti distinti).

Posizione tra piano e sfera. Circonferenza nello spazio

Sia α il piano di equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ e sia S la sfera di equazione cartesiana:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0 \tag{2.33}$$

dove il centro della sfera è $C(\alpha, \beta, \gamma)$ ed il raggio è dato da

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}.$$

Per valutare la posizione di α rispetto a S, bisogna calcolare la distanza di α da C. Si hanno i seguenti casi:

1) $d(\alpha, C) > R$: il piano è esterno a S;

2) $d(\alpha, C) = R$: il piano α ha in comune con S un punto e si dice tangente alla sfera;

3) $d(\alpha, C) < R$: il piano α interseca S secondo una circonferenza Σ il cui centro C_Σ è l'intersezione di α con la retta ad esso perpendicolare passante per C; il raggio R_Σ di Σ è dato, per il Teorema di Pitagora, da:

$$R_\Sigma = \sqrt{R^2 - \overline{CC_\Sigma}^2}.$$

Nel caso 2) il <u>piano tangente</u> alla sfera S di equazione (2.11) in un suo punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ è il piano passante per P_0 e ortogonale al vettore $P_0 - C$ ed ha perciò equazione:

$$(x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) + (z_0 - \gamma)(z - z_0) = 0.$$

Nel caso 3) la circonferenza Σ è rappresentata dal sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \tag{2.34}$$

Circonferenza per tre punti Per tre punti non allineati $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ passa una e una sola circonferenza Σ. Un metodo per determinare Γ è il seguente:

- si trova il centro C_Σ di Σ come punto di intersezione dei tre piani π, π_1, π_2, dove π è il piano per P_0, P_1, P_2, π_1 è il piano ortogonale al vettore $P_1 - P_0$ e passante per il punto medio del segmento P_0P_1, π_2 è il piano ortogonale al vettore $P_2 - P_0$ e passante per il punto medio del segmento P_0P_2;
- si trova il raggio R_Σ di Σ, $R_\Sigma = d(P_0, C_\Sigma)$;
- si scrive Σ come intersezione del piano π e della sfera di centro C_Σ e raggio R_Σ.

Tangente ad una circonferenza in un suo punto Sia Σ una circonferenza contenuta nel piano α. Una retta r è *tangente* a Σ se: 1) r è contenuta in α: 2) r interseca Σ in un solo punto P (contato due volte).

Osserviamo che dato un punto $p \in \Sigma$ vi sono infinite rette dello spazio che intersecano Σ solo nel punto p. Solo una di queste è però tangente a Σ: quella che sta nel piano di Σ.

Se Σ è data come intersezione del piano α e delle sfera S, la tangente a Σ nel punto P si ottiene intersecando α con il piano tangente a S in P.

Tangenti ad una circonferenza da un punto dello spazio Sia Σ una circonferenza nello spazio contenuta nel piano α e sia P un punto del piano α. Se la distanza di P dal centro C_Σ di Σ è maggiore del raggio R_Σ di Σ allora ci sono due tangenti a Σ passanti per P; esse sono le due rette di α passanti per P e che distano R_Σ da C. Per trovare queste tangenti basta intersecare α con i piani passanti per P, ortogonali ad α che distano R_Σ da C_Σ. Inoltre, se Σ è l'intersezione di α con una sfera S, la distanza di un piano ortogonale ad α da C_Σ è uguale alla distanza di tale piano dal centro C di S. Quindi per trovare le tangenti da P a Σ si fa così:

- si scrivono tutti i piani passanti per P e ortogonali a α;
- si determinano tra questi piani quelli che distano R_Σ da C_Σ (o equivalentemente da C, dove C è il centro della sfera che intersecata con α mi da Σ).

Esempio 39 Troviamo le tangenti a $\Sigma : x-y = x^2+y^2+z^2-1 = 0$ passanti per $P(1,1,0)$. I piani passanti per P ortogonali ad $\alpha : x-y=0$ hanno equazione:

$$a(x-1)+a(y-1)+cz = 0.$$

Il raggio C_Σ di Σ è 1 e il centro C_Σ di Σ è $O(0,0,0)$. Uno dei piani precedenti dista 1 da O se e solo se

$$(-2a)^2 = 2a^2 + c^2,$$

cioè $2a^2 = c^2$, da cui ad esempio $a = 1$ e $c = \pm\sqrt{2}$. Le rette tangenti sono dunque $r_1 : x-y = x+y+\sqrt{2}z-2 = 0$ e $r_2 : x-y = x+y-\sqrt{2}z-2 = 0$

Intersezione di due sfere Dalla geometria elementare si sa che due sfere S_1 e S_2 possono avere intersezione vuota; possono essere tangenti in un punto; sono secanti e in questo caso la loro intersezione è una circonferenza.

Se $S_1 : x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ e $S_2 : x^2+y^2+z^2+a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$, l' intersezione $S_1 \cap S_2$ si studia considerando il sistema formato dalle equazioni di S_1 e S_2. Sottraendo membro a membro si vede che tale sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0 \\ (a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)z+d_1-d_2 = 0 \end{cases} \tag{2.35}$$

Se le due sfere non sono concentriche e solo in questo caso (perchè?) la seconda equazione del sistema rappresenta un piano α. Quindi lo studio dell'intersezione è ricondotta allo studio dell'intersezione tra sfera e piano.

Se S_1 e S_2 non sono concentriche il piano α descritto precedentemente si chiama *piano radicale* della coppia di sfere.

Quindi abbiamo le seguenti considerazioni sul piano radicale:

- se $S_1 \cap S_2$ è una circonferenza Σ a punti reali, il piano radicale coincide col piano di Σ:
- se S_1 e S_2 sono tra loro tangenti in P, allora il piano radicale è il piano tangente a entrambe le sfere in P;
- in ogni caso il piano radicale è perpendicolare alla retta passante per i due centri.

Esercizi sulle sfere e circonferenze nello spazio

1. Determinare centro e raggio della sfera di equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 1 = 0.$$

Trovare, inoltre l'equazione del piano tangente a S nel punto $P_0(0, 1, 0)$.

2. Trovare le sfere di raggio $R = 3$, passanti per $P(1, 1, -1)$ e aventi il centro sulla retta $r : (x, y, z) = (1, 2, 1) + t(1, 0, -1)$.

3 . Scrivere un'equazione della superficie sferica passante per $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ $C(0, 0, 2)$ e avente centro sul piano che passa per i punti A, B e C.

4*. Trovare i piani tangenti alla sfera $S : x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z+10$ passanti per l'asse x.

5 . Trovare le intersezioni della retta $r : x = y = z$ con la sfera dell'esercizio precedente.

6. Trovare centro e raggio della circonferenza Σ intersezione della sfera S dell'esercizio precedente con il piano $\pi : x + y + z - 1 = 0$.

7. Trovare centro e raggio della circonferenza $\Sigma : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 - 1 = x - y - 3z - 1 = 0$.

8*. Trovare la circonferenza tangente alla retta $r : x-y-2z = 2x-y-z-2 = 0$ nel punto $(1, -1, 1)$ e passante per $(2, 1, -1)$.

9. Scrivere delle equazioni per la circonferenza Σ passante per i punti $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)(0, 1, 0)$.

10. Sia Σ la circonferenza: $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = x - 1 = 0$. Trovare la retta tangente a Σ nel punto $P(1, 2, 2)$. Trovare le rette tangenti a Σ e passanti per il punto $Q(1, 1, 1)$.

11**. Trovare la circonferenza Σ di raggio massimo, contenuta in

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y = 0$$

e tangente nell'origine alla circonferenza

$$\Sigma' : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y = x + y - 2z = 0.$$