

Capitolo 1

Omotopia

1.1 Omotopia tra funzioni continue

Siano X e Y due spazi topologici. Due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sono dette *omotope* se esiste un' applicazione continua

$$F : X \times I \rightarrow Y, \quad I = [0, 1],$$

detta *omotopia* tra f_0 e f_1 , tale che

$$F(x, 0) = f_0(x), \quad F(x, 1) = f_1(x), \quad \forall x \in X.$$

($X \times I$ denota il prodotto cartesiano tra X e I dotato della topologia prodotto).

Interpretazione meccanica dell'omotopia

Sia $F : X \times I \rightarrow Y$ un'omotopia tra funzioni continue. Dato $t \in I$ consideriamo l'applicazione continua

$$f_t : X \rightarrow Y$$

definita da

$$f_t(x) = F(x, t).$$

Al variare di $t \in I$, considerato come il tempo, otteniamo quindi una famiglia di funzioni continue che al tempo $t = 0$ vale f_0 e al tempo $t = 1$ vale f_1 . In modo intuitivo possiamo pensare che f_1 si possa ottenere da f_0 attraverso una “deformazione temporale” (il fatto che il tempo vari con continuità si riflette sulla continuità dell'omotopia F).

Esempio 1.1.1 Sia Y un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^n e sia X uno spazio topologico qualunque. Allora due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sono omotope. Infatti possiamo considerare l'applicazione continua (l'omotopia lineare)

$$F : X \times I \rightarrow Y, \quad F(x, t) = (1 - t)f_0(x) + tf_1(x). \quad (1.1)$$

Più in generale se $f_0, f_1 : X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^n$ sono due funzioni continue tali che il segmento di retta che congiunge $f_0(x)$ e $f_1(x)$ sia contenuto in Y per ogni $x \in X$ allora f_0 e f_1 sono omotope tramite l'omotopia F definita da (1.1).

DISEGNO 1 OMOTOPIA LINEARE

Esempio 1.1.2 (funzioni non omotope) Sia

$$X = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

il cerchio unitario e

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

la corona circolare di centro l'origine, raggio interno 1 e raggio esterno 2. Consideriamo le applicazioni continue $f_0 : X \rightarrow Y$, $f_0((\cos t, \sin t)) = \frac{3}{2}(\cos t, \sin t)$ (la cui immagine è il cerchio di centro l'origine e raggio $\frac{3}{2}$) e $f_1 : X \rightarrow Y$, $f_1((\cos t, \sin t)) = \frac{1}{5}(\cos t - \frac{7}{4}, \sin t)$ (la cui immagine è il cerchio di centro $(\frac{7}{4}, 0)$ e raggio $\frac{1}{5}$).

DISEGNO 2

Allora si vede intuitivamente che f_0 non è omotopa a f_1 (per deformare con continuità f_0 su f_1 si deve passare attraverso il buco). Una dimostrazione rigorosa che f_0 e f_1 non sono omotope seguirà dagli strumenti sviluppati nel Capitolo 4 (si veda l'Esercizio 4.1).

Esempio 1.1.3 (applicazione antipodale) Sia S^n la sfera unitaria di dimensione n e sia $A : S^n \rightarrow S^n$ l'applicazione antipodale, cioè $A(x) = -x$. Se n è dispari allora id_{S^n} , $\text{id}_{S^n}(x) = x$, $\forall x \in S^n$, è omotopa all'applicazione antipodale. Infatti sia $n = 2k - 1$. Allora, usando la notazione complessa

$$S^{2k-1} = \{z \in \mathbb{C}^k \mid \|z\| = 1\}$$

e l'applicazione

$$F : S^{2k-1} \times I \rightarrow S^{2k-1}, (z, t) \mapsto F(z, t) = e^{i\pi t} z$$

è un'omotopia tra $\text{id}_{S^{2k-1}}$ e A .

Osservazione 1.1.4 Se n è pari allora l'applicazione antipodale $A : S^n \rightarrow S^n$ non è omotopa all'applicazione id_{S^n} . La dimostrazione di questo fatto non fa parte di queste note e si può ottenere, per esempio, usando la teoria dell'omologia.

1.1.1 Omotopia relativa

Un insieme importante di applicazioni continue si ottiene quando $X = I$. In questo caso un'applicazione $f : I \rightarrow Y$ è chiamato un *arco* di estremi $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Il concetto di omotopia è banale nel caso di archi in quanto un arco $f : I \rightarrow Y$ è sempre omotopo all'arco costante $\epsilon_x : I \rightarrow Y$, $\epsilon_x(I) = x = f(0)$. Infatti è immediato verificare che $F : X \times I \rightarrow Y$ definita da

$$F(x, t) = f((1 - t)x)$$

è un'omotopia tra f e ϵ_x . Per questo motivo introduciamo un concetto più generale di omotopia quello di *omotopia relativa*. Siano X e Y due spazi topologici e $A \subset X$ un sottoinsieme di X . Due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sono dette *omotope relativamente ad A* se esiste un'omotopia (detta *omotopia relativa ad A*)

$$F : X \times I \rightarrow Y, \quad I = [0, 1],$$

tra f_0 e f_1 , tale che $F(a, t)$ non dipende da t per ogni $a \in A$. Osserviamo che se $A = \emptyset$ allora il concetto di omotopia relativa coincide con quello di omotopia.

Esempio 1.1.5 Sia $A = \{x_0\} \subset X$

DISEGNO 3

Esempio 1.1.6 (funzione omotope ma non relativamente omotope) Descriviamo ora un esempio di funzioni omotope ma non relativamente omotope. Sia $X = I$ e $A = \{0, 1\} \subset X$, $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$. Consideriamo le applicazioni continue $f_0 : I \rightarrow Y$, $f_0(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}(\cos(\pi t), \sin(\pi t))$ e $f_1 : I \rightarrow Y$, $f_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}(\cos(\pi(t - 1)), -\sin(\pi(t - 1)))$.

DISEGNO 4

Allora f_0 e f_1 sono omotope ma non lo sono relativamente ad A . Una dimostrazione rigorosa di questa affermazione seguirà dagli strumenti sviluppati nel Capitolo 4 (si veda l'Esercizio 4.1)).

Notazione: scriveremo $f_0 \sim_A f_1$ (risp. $f_0 \sim f_1$) per indicare che due funzioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sono omotope relativamente ad A (risp. omotope).

Questa notazione è giustificata dalla seguente:

Proposizione 1.1.7 *Siano X e Y due spazi topologici e $A \subset X$. Allora \sim_A definisce una relazione di equivalenza sull'insieme $C(X, Y)$ delle applicazioni continue da X in Y .*

Dimostrazione: Sia $f \in C(X, Y)$. La riflessività di \sim_A si ottiene ponendo $F(x, t) = f(x)$, $\forall x \in X$. Se $f \sim_A g$ tramite l'omotopia $F(x, t)$ allora $g \sim_A f$ tramite l'omotopia $G(x, t) = F(x, 1 - t)$, e questo mostra la simmetria di \sim_A . Infine per dimostrare la transitività, sia $f \sim_A g$ tramite F e $g \sim_A h$ tramite G . Allora $H(x, t)$ definita da $F(x, 2t)$, per $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, e $G(x, 2t - 1)$, per $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, è un'omotopia relativa ad A tra f e h . \square

1.2 Altre proprietà dell'omotopia

Siano X e Y due spazi topologici. Allora l'insieme $C(X, Y)$ delle applicazioni continue da X a Y può essere dotato della struttura di spazio topologico introducendo la *topologia dei compatti-aperti* come segue.

Siano $K \subset X$ un compatto e $U \subset Y$ un aperto e sia $S(K, U)$ il sottoinsieme di $C(X, Y)$ definito come:

$$S(K, U) = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset U\}.$$

Sia \mathcal{S} la famiglia di tutti i sottoinsiemi di $C(X, Y)$ della forma $S(K, U)$ al variare di $K \subset X$, K compatto, e $U \subset Y$, U aperto. Nella topologia dei compatti-aperti $\mathcal{U} \subset C(X, Y)$ è aperto se e solo se per ogni $f \in \mathcal{U}$ esistono sottoinsiemi S_1, \dots, S_n di \mathcal{S} tali che

$$f \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subset \mathcal{U}.$$

In particolare, per K e U fissati, $S(K, U)$ è aperto in $C(X, Y)$. Equivalentemente, $\mathcal{U} \subset C(X, Y)$ è aperto nella topologia dei compatti-aperti \mathcal{U} può essere scritto come unione di intersezioni finite di elementi di \mathcal{S} . In altre parole \mathcal{S} è una sottobase per la topologia dei compatti-aperti (si veda l'Appendice D). La verifica che la topologia dei compatti-aperti sia effettivamente una topologia è un semplice

esercizio lasciato allo studente. Da ora in poi $C(X, Y)$ sarà dotato della topologia dei compatto-aperti.

Osservazione 1.2.1 Sia (Y, d) uno spazio metrico e X uno spazio compatto e di Hausdorff. Consideriamo la *topologia uniforme* su $C(X, Y)$, cioè la topologia indotta dalla metrica

$$\delta(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

Si può dimostrare (la dimostrazione non fa parte di queste note) che la topologia uniforme coincide con la topologia dei compatti-aperti.

Data un'omotopia $F : X \times I \rightarrow Y$ tra due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ possiamo definire un'applicazione

$$\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$$

definita da:

$$\hat{F}(t)(x) := F(x, t) \quad (1.2)$$

e quindi $\hat{F}(0) = f_0$ e $\hat{F}(1) = f_1$. E' naturale chiedersi se \hat{F} definisce un arco tra f_0 e f_1 cioè se \hat{F} è continua (dove in $C(X, Y)$ si considera la topologia dei compatti-aperti). La seguente proposizione mostra che questo è vero e se X è localmente compatto e di Hausdorff e $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$ è continua allora $F : X \times I$ definita da $F(x, t) = \hat{F}(t)(x)$ è continua (si veda l'Appendice B per i risultati sugli spazi localmente compatti).

Proposizione 1.2.2 *Siano X e Y due spazi topologici. Siano $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ due applicazioni continue. Se f_0 e f_1 sono omotope tramite un'omotopia F allora \hat{F} data da (1.2) definisce un arco tra f_0 e f_1 in $C(X, Y)$. Viceversa, se X è localmente compatto e di Hausdorff e se $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$ è un arco di estremi f_0 e f_1 allora $F(x, t) = \hat{F}(t)(x)$ è un'omotopia tra f_0 e f_1 .*

Abbiamo bisogno di un lemma.

Lemma 1.2.3 *Sia X uno spazio localmente compatto e di Hausdorff e Y uno spazio topologico arbitrario. Allora la funzione valutazione*

$$e_v : X \times C(X, Y) \rightarrow Y, (x, f) \mapsto e_v(x, f) := f(x)$$

è continua.

Dimostrazione: Sia $(x, f) \in X \times C(X, Y)$ e $W \subset Y$ un aperto tale che $e_v(x, f) = f(x) \in W$. Vorremo trovare un aperto $\mathcal{U} \subset X \times C(X, Y)$ tale che $e_v(\mathcal{U}) \subset W$ (questo mostrerebbe che e_v è continua nel punto (x, f)). Siccome $f : X \rightarrow Y$ è continua in x esiste un aperto U , $x \in U$, tale che $f(U) \subset W$. Essendo X localmente compatto e di Hausdorff dal Teorema B.0.6 della Sottoappendice B.0.1 esiste V aperto contenente x tale che \bar{V} è compatto e $\bar{V} \subset U$. Segue che $f(\bar{V}) \subset f(U) \subset W$. Consideriamo l'aperto $\mathcal{U} = V \times S(\bar{V}, W)$ di $X \times C(X, Y)$. Allora $(x, f) \in \mathcal{U}$ e se $(x', f') \in \mathcal{U}$ allora $e_v(x', f') = f'(x') \in W$. \square

Dimostrazione della Proposizione 1.2.2 Sia $F : X \times I \rightarrow Y$ un'omotopia tra f_0 e f_1 vogliamo mostrare che $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$ è continua (nella dimostrazione di quest'implicazione non serve il fatto che X sia localmente compatto). Sia $t \in I$ e sia $S(K, U) \subset C(X, Y)$ (K compatto in X e U aperto di Y) tale che $\hat{F}(t) \in S(K, U)$. Per dimostrare che \hat{F} è continua in t è sufficiente mostrare (cf. Proposizione D.1.3 dell'Appendice D) che esiste un aperto $A \subset I$, $t \in A$, tale che $\hat{F}(A) \subset S(K, U)$. Ora $\hat{F}(t) \in S(K, U)$ significa che $\hat{F}(t)(K) \subset U$, ossia $F(K \times \{t\}) \subset U$. Segue che $K \times \{t\} \subset F^{-1}(U)$ il quale è un sottoinsieme aperto di $X \times I$ per la continuità di F . Dal momento che $K \times \{t\}$ è compatto esiste un aperto $A \subset I$ tale che $K \times A \subset F^{-1}(U)$. Segue che $F(K \times A) \subset U$, ossia $\hat{F}(A) \subset S(K, U)$. Viceversa supponiamo che $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$ sia continua. Allora $F : X \times I \rightarrow Y$ è continua in quanto composizione $F = e_v \circ (\text{id}_X \times \hat{F})$ dell'applicazione continua

$$\text{id}_X \times \hat{F} : X \times I \rightarrow X \times C(X, Y), (x, t) \mapsto (x, \hat{F}(t))$$

con l'applicazione continua e_v (data dal lemma precedente). \square

Osservazione 1.2.4 Nella prima parte della proposizione abbiamo usato il fatto che se X e Y sono spazi topologici con Y compatto e B è un aperto di $X \times Y$ che contiene la striscia $x_0 \times Y$, $x_0 \in X$, allora esiste un aperto A di X , $x_0 \in A$, tale che $A \times Y \subset B$ (il lemma della striscia richiamato a lezione). Osserviamo inoltre che nella dimostrazione della Proposizione 1.2.2 precedente l'intervallo I non gioca nessun ruolo importante e può essere sostituito da un qualunque spazio topologico Z . In effetti si può dimostrare qualcosa di ancora più forte e cioè che se X è uno spazio localmente compatto e di Hausdorff e Y, Z sono spazi topologici allora l'applicazione

$$C(Z, C(X, Y)) \rightarrow C(X \times Z, Y), \hat{F} \mapsto F, F(x, z) := \hat{F}(z)(x)$$

è un omeomorfismo (la dimostrazione non fa parte di queste note).

Proposizione 1.2.5 (*stabilità dell'omotopia rispetto alle applicazioni continue*)
 Siano X, Y, Z spazi topologici, $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ e $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$ applicazioni continue. Se $f_0 \sim f_1$ e $g_0 \sim g_1$ allora $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$.

Dimostrazione: Sia $F : X \times I \rightarrow Y$ l'omotopia tra f_0 e f_1 e $G : Y \times I \rightarrow Z$ un'omotopia tra g_0 e g_1 . Allora si verifica facilmente che l'applicazione $H : X \times I \rightarrow Z$ definita da $H(x, t) = G(F(x, t), t)$ è un'omotopia tra $g_0 \circ f_0$ e $g_1 \circ f_1$. \square

Proposizione 1.2.6 Sia X uno spazio topologico e $f : S^1 \rightarrow X$ un'applicazione continua. Allora f è omotopa all'applicazione costante se e solo se f ha un'estensione continua dal disco D^2 a X .

Dimostrazione: Supponiamo dapprima che $g : D^2 \rightarrow X$ sia un'estensione continua di f , cioè g è continua e $g|_{\partial D^2=S^1} = f$. Definiamo un'omotopia $H : D^2 \times I \rightarrow X$ tra ϵ_q , $q = g(0)$, e g ponendo $H(x, t) = g(tx)$. Sia $F : S^1 \times I \rightarrow X$ la restrizione di H a $S^1 \times I$. Allora F è un'omotopia tra $\epsilon_q = F(x, 0)$ e $f(x) = F(x, 1) = H(x, 1)$. Viceversa supponiamo che $F : S^1 \times I \rightarrow X$ sia un'omotopia tra $\epsilon_q = F(x, 0)$ e $f(x) = F(x, 1)$. Consideriamo l'applicazione continua $h : S^1 \times I \rightarrow D^2$ definita da $h(x, t) = tx$. Osserviamo che h è un'identificazione (continua, suriettiva e chiusa). D'altra parte F scende al quoziente rispetto a h , cioè se $h(x, t) = h(y, s)$ allora $F(x, t) = F(y, s)$. Infatti $h(x, t) = h(y, s)$ se e solo se $tx = sy$ e, passando alle norme, si ottiene $t = s$. Distinguiamo i due casi $t = s = 0$ e allora $F(x, 0) = F(y, 0) = \epsilon_q$. Se invece $t = s \neq 0$ allora $x = y$ e quindi $F(x, t) = F(y, s)$. Esiste quindi un'unica applicazione continua $g : D^2 \rightarrow X$ tale che $g \circ h = F$. Quindi per $x \in S^1$,

$$f(x) = F(x, 1) = g(h(x, 1)) = g(x),$$

e quindi g è un'estensione continua di f . \square

1.3 Spazi omotopicamente equivalenti

L'omotopia tra funzioni continue induce una relazione d'equivalenza tra spazi topologici come segue. Due spazi topologici X e Y sono detti *omotopicamente equivalenti* o *omotopi* se esistono due funzioni continue $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tali che

$$g \circ f \sim \text{id}_X, \quad f \circ g \sim \text{id}_Y,$$

dove $\text{id}_X : X \rightarrow X$ (risp. $\text{id}_Y : Y \rightarrow Y$) denota l'identità di X (risp. Y). Diremo anche che gli spazi X e Y hanno lo *stesso tipo di omotopia*. Resta così definita

una relazione di equivalenza sull'insieme di tutti gli spazi topologici definendo $X \sim Y$ se e solo se X e Y hanno lo stesso tipo di omotopia.

Notazione: scriveremo $X \sim Y$ quando X e Y hanno lo stesso tipo di omotopia.

Due applicazioni f e g che soddisfano le condizioni precedenti sono chiamate *equivalenze omotopiche*.

Osserviamo che due spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti. Il viceversa non è vero come mostra l'esempio che segue.

Esempio 1.3.1 Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Allora X è omotopo ad un suo punto $x_0 \in X$. Allora l'inclusione $i : \{x_0\} \rightarrow X$ e l'applicazione costante $\epsilon_{x_0} : X \rightarrow \{x_0\}$ sono equivalenze omotopiche. Infatti $\epsilon_{x_0} \circ i = \text{id}_{\{x_0\}}$ mentre $i \circ \epsilon_{x_0} \sim \text{id}_X$ tramite l'omotopia (cf. Esempio 1.1.1)

$$F : X \times I \rightarrow X, \quad F(x, t) = (1 - t)(i \circ \epsilon_{x_0})(x) + t \text{id}_X(x) = (1 - t)x_0 + tx.$$

Diremo che uno spazio topologico X è *contraibile* se X è omotopicamente equivalente allo spazio topologico costituito da un solo punto (il punto non è necessariamente un punto di X). L'esempio precedente mostra che un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^n è contraibile. In particolare \mathbb{R}^n stesso o il disco unitario $D^n \subset \mathbb{R}^n$ sono esempio di spazi topologici contraibili. Più in generale uno sottospazio $X \subset \mathbb{R}^n$ stellato rispetto a un suo punto x_0 è contraibile. (X è stellato rispetto a $x_0 \in X$ se il segmento di retta che unisce x_0 e x è contenuto in X , $\forall x \in X$).

Vale il seguente risultato

Proposizione 1.3.2 *Uno spazio topologico X è contraibile se e solo se id_X è omotopa all'applicazione costante.*

Dimostrazione: Si veda l'Esercizio 1.3. □

Osservazione 1.3.3 Quando parleremo di gruppo fondamentale mostreremo che il cerchio unitario non è contraibile. In effetti si riesce a dimostrare che S^n non è contraibile per $n \geq 1$ ma la dimostrazione non fa parte di queste note (la si può ottenere, per esempio, usando i gruppi di omotopia, si veda il Paragrafo 2.7 del Capitolo 2).

Esempio 1.3.4 Il cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$$

e il cerchio

$$S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

sono omotopicamente equivalenti. Infatti siano $r : C \rightarrow S^1$, $r(x, y, z) = (x, y, 0)$ e $i : S^1 \rightarrow C$, i inclusione naturale. Allora $r \circ i = \text{id}_{S^1}$ e $i \circ r \sim \text{id}_C$. La prima uguaglianza è immediata. Per dimostrare che $\text{id}_C \sim i \circ r$ definiamo l'applicazione continua $F : C \times I \rightarrow C$, $F(x, y, z; t) = (x, y, (1 - t)z)$. Allora

$$F(x, y, z; 0) = (x, y, z) = \text{id}_C(x, y, z)$$

e

$$F(x, y, z; 1) = (x, y, 0) = (i \circ r)(x, y, z).$$

L'esempio precedente suggerisce qualche definizione. Sia X uno spazio topologico e $A \subset X$ un sottoinsieme di X .

A è un *retrato* di X se esiste una funzione continua $r : X \rightarrow A$, chiamata *retrazione* di X su A , tale che $r \circ i = \text{id}_A$ (equivalentemente $r|_A = \text{id}_A$) dove $i : A \rightarrow X$ è l'inclusione.

A è un *retrato di deformazione* di X se esiste una retrazione $r : X \rightarrow A$ tale che $i \circ r \sim \text{id}_X$. Quindi $A \subset X$ è un retratto di deformazione se e solo se esiste $F : X \times I \rightarrow X$ tale che $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) \in A, \forall x \in X$, $F(a, 1) = a, \forall a \in A$.

Osservazione 1.3.5 Se $A \subset X$ è un retratto di deformazione allora $X \sim A$. Esistono però sottoinsiemi $A \subset X$ di uno spazio topologico X che sono omotopicamente equivalenti a X ma che non sono retratti di X . Per esempio l'intervallo aperto $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ è omotopo a \mathbb{R} (entrambi sono contraibili) ma non può esistere una retrazione di \mathbb{R} in $(0, 1)$ in quanto $(0, 1)$ è aperto (cf. Esercizio 1.8).

Osservazione 1.3.6 Se $r : X \rightarrow A$ è una retrazione non è detto che A sia un retratto di deformazione di X . Infatti (ogni spazio si retrae ad un suo punto) ma non è detto che X sia contraibile. Un'esempio di spazio non contraibile è uno spazio con due componenti connesse (cf. Esercizio 1.4). Un esempio connesso è S^1 (per dimostrare che S^1 non è contraibile dobbiamo aspettare al Capitolo 4).

A è un *retrato forte di deformazione* di X se esiste una retrazione $r : X \rightarrow A$ tale che $i \circ r \sim_A \text{id}_X$. Quindi $A \subset X$ è un retratto forte di deformazione se e solo se esiste $F : X \times I \rightarrow X$ tale che $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) \in A, \forall x \in X$, $F(a, t) = a, \forall a \in A, \forall t \in I$.

Intuitivamente $A \subset X$ è un retratto (forte) di deformazione se X può essere deformato con continuità su A fino a farlo coincidere con A mantenendo fisso A (ogni punto $a \in A$) durante il processo di deformazione. Ovviamente un retratto forte di deformazione è un retratto di deformazione ma non vale il viceversa (si veda l'Esercizio 1.14).

Esempio 1.3.7 Il cerchio S^1 è un retratto forte di deformazione del cilindro C come mostra l'Esempio 1.3.4.

Esempio 1.3.8 La sfera n -dimensionale S^n è un retratto forte di deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Si consideri infatti la retrazione

$$r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n, \quad r(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Allora $r \circ i = \text{id}_{S^n}$ mentre

$$i \circ r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad (i \circ r)(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

è omotopa (relativamente a S^n) a $\text{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$ tramite l'omotopia $F : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ definita da:

$$F(x, t) = (1 - t)x + t \frac{x}{\|x\|}.$$

Esempio 1.3.9 Sia L l'unione dei due lati di un triangolo T . Allora L è un retratto forte di deformazione di T . Possiamo supporre che T sia il triangolo nel piano di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ e vogliamo dimostrare che l'insieme L unione dei segmenti che uniscono $(0, 0)$ e $(1, 0)$ e $(0, 0)$ e $(0, 1)$ è un retratto forte di deformazione di T .

Definiamo la retrazione $r : T \rightarrow L$,

$$r(x, y) = \begin{cases} (0, y - x) & \text{se } x \leq y \\ (x - y, 0) & \text{se } y \leq x \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$r(x, y) = (x - \min(x, y), y - \min(x, y)).$$

Allora $F : T \times I \rightarrow T$,

$$F(x, y, t) = (1 - t)(x, y) + t(i \circ r)((x, y))$$

è tale che $F(x, y, 0) = (x, y) = \text{id}_T(x, y)$ e $F(x, y, 1) = (i \circ r)(x, y)$, $F(a, b, t) = (a, b)$ per ogni $(a, b) \in L$ (infatti se $(a, b) \in L$ allora $\min(a, b) = 0$).

DISEGNO 5

Esempio 1.3.10 La figura $\infty = C_1 \cup C_2$, dove $C_1 = \{x = (x_1, x_2) \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\}$, $C_2 = \{x = (x_1, x_2) \mid (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1\}$. Lo spazio $X = \infty \setminus \{(-2, 0), (2, 0)\}$ si retrae per deformazione forte all'origine $(0, 0)$ tramite l'omotopia $F : X \times I \rightarrow X$

$$F(x, t) = \begin{cases} \frac{(1-t)x}{\|(1-t)x_1-1, (1-t)x_2\|} & \text{se } x = (x_1, x_2) \in C_1 \setminus \{(2, 0)\} \\ \frac{(1-t)x}{\|(1-t)x_1+1, (1-t)x_2\|} & \text{se } x = (x_1, x_2) \in C_2 \setminus \{(-2, 0)\} \end{cases}$$

DISEGNO 6

Esempio 1.3.11 La figura ∞ è un retratto forte di deformazione di

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (0, 1)\}.$$

DISEGNO 7

Esempio 1.3.12 La figura Θ è un retratto forte di deformazione di

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (0, 1)\}.$$

DISEGNO 8

Osservazione 1.3.13 Dagli ultimi due esempi e dalla proprietà transitiva dell'omotopia si deduce che $\infty \sim \Theta$. Questo è un fatto generale. Un teorema di Fuchs afferma infatti che due spazi topologici X e Y hanno lo stesso tipo di omotopia se e solo se sono (omeomorfi a) retratti di deformazione di uno stesso spazio Z .

1.4 Esercizi

Esercizio 1.1 Siano X e Y due spazi omotopicamente equivalenti e sia $f : X \rightarrow Y$ un'equivalenza omotopica. Un'applicazione $g : Y \rightarrow X$ tale che $f \circ g \sim id_Y$ e $g \circ f \sim id_X$ è detta un'inversa omotopica di f . Dimostrare che l'inversa omotopica di f è unica a meno di omotopia.

Esercizio 1.2 Dimostrare che nel nastro di Möbius N esiste una circonferenza che risulta essere un retrato forte di deformazione di N . Dedurne che N è omotopicamente equivalente al cilindro.

Esercizio 1.3 Dimostrare che uno spazio topologico X è contraibile se e solo se l'identità di X è omotopa ad una funzione costante.

Esercizio 1.4 Dimostrare che uno spazio omotopicamente equivalente ad uno spazio connesso (risp. connesso per archi) è connesso (risp. connesso per archi).

Esercizio 1.5 E' vero che uno spazio omotopicamente equivalente ad uno spazio compatto è compatto?

Esercizio 1.6 Dimostrare che un retrato di uno spazio compatto (risp. connesso, connesso per archi) è compatto (risp. connesso, connesso per archi).

Esercizio 1.7 Si dimostri che un retrato di uno spazio contraibile è contraibile.

Esercizio 1.8 Dimostrare che un retrato di uno spazio di Hausdorff è chiuso.

Esercizio 1.9 Sia T^2 il toro e X il complementare di un suo punto. Dimostrare che X è omotopicamente equivalente alla figura " ∞ ". Dedurne che il complementare di tre punti distinti in S^2 è omotopicamente equivalente a X .

Esercizio 1.10 Sia X uno spazio topologico e $f, g : X \rightarrow S^n$ due funzioni continue tali che $f(x) \neq -g(x)$, per ogni $x \in X$. Dimostrare che f è omotopa a g .

Esercizio 1.11 Dimostrare che $SL(n, \mathbb{R})$ (le matrici $n \times n$ con determinante uguale a 1) è un retrato forte di deformazione di $GL^+(n, \mathbb{R})$ (le matrici $n \times n$ con determinante strettamente positivo).

Esercizio 1.12 Sia $A \subset X$ un sottoinsieme di uno spazio topologico X . Supponiamo che A sia un retrato (forte) di deformazione di X . Sia $r : X \rightarrow A$ una qualsiasi retrazione (cioè $r \circ i = id_A$) allora r è una retrazione (forte) per deformazione di X su A (cioè $i \circ r \sim_A id_X$).

Esercizio 1.13 Dimostrare che il bicchiere vuoto A è un retratto forte di deformazione del bicchiere pieno X . In termini matematici dimostrare che $A = (D^2 \times \{0\}) \cup S^1 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ è un retratto forte di deformazione di $X = D^2 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$.

Esercizio 1.14 Dare un esempio di un sottoinsieme di uno spazio topologico X che sia un retratto di deformazione di X ma non un retratto forte di deformazione di X . (Suggerimento: usare la pulce e il pettine).

Capitolo 2

Il gruppo fondamentale

2.1 Prodotto di cammini

Sia X uno spazio topologico. Siano $f, g : I \rightarrow X$ due archi (o cammini). Il loro prodotto (o concatenazione) è l'arco $f \cdot g : I \rightarrow X$ definito come:

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

(la continuità dell'applicazione $f \cdot g : I \rightarrow X$ segue dal lemma di incollamento). Ricordiamo dal Capitolo 1 che due archi $f_0, f_1 : I \rightarrow X$ sono omotopi relativamente al sottoinsieme $\{0, 1\} \subset I$ se esiste un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ ossia un'applicazione continua $F : I \times I \rightarrow X$ tale che $F(t, 0) = f_0(t)$, $F(t, 1) = f_1(t)$, $F(0, s) = f_0(0)$, $F(1, s) = f_0(1)$ per ogni $s \in I$. Quindi, necessariamente il punto iniziale e il punto finale degli archi f_0 e f_1 coincidono, cioè $f_0(0) = f_1(0)$ e $f_0(1) = f_1(1)$.

Osservazione 2.1.1 Notiamo che, a differenza del capitolo precedente, stiamo usando il parametro s come parametro della deformazione (ossia come tempo) t come parametro degli archi.

Notazione-Definizione: Da ora in poi diremo che due archi f_0 e f_1 tali che $f_0(0) = f_1(0)$ e $f_0(1) = f_1(1)$ sono *equivalenti* se sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$ e scriveremo $f_0 \sim_{\{0,1\}} f_1$. Scriveremo $f_0 \sim_{\{0,1\}, F} f_1$ quando vorremo sottolineare l'omotopia F relativa a $\{0, 1\}$ tra f_0 e f_1 . Dato un arco $f : I \rightarrow X$ denoteremo con $[f]$ la classe di equivalenza relativa alla relazione d'equivalenza definita da $\sim_{\{0,1\}}$, cioè un arco $g : I \rightarrow X$ ($g(0) = f(0)$, $g(1) = f(1)$) $g \in [f]$ se e solo se $g \sim_{\{0,1\}} f$.

Il seguente lemma mostra che la concatenazione conserva l'omotopia tra archi.

Lemma 2.1.2 *Sia X uno spazio topologico e siano $f_0, f_1, g_0, g_1 : I \rightarrow X$ quattro archi tali che $f_0(0) = f_1(0)$, $f_0(1) = f_1(1) = g_0(0) = g_1(0)$, $g_0(1) = g_1(1)$. Supponiamo che $f_0 \sim_{\{0,1\}} f_1$ e $g_0 \sim_{\{0,1\}} g_1$. Allora $f_0 \cdot g_0 \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdot g_1$.*

Dimostrazione: Sia F un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra f_0 e f_1 e sia G un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra g_0 e g_1 . Definiamo

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t - 1, s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Allora H è continua per il lemma di incollamento. Inoltre, si verifica immediatamente, che $H(t, 0) = (f_0 \cdot g_0)(t)$, $H(t, 1) = (f_1 \cdot g_1)(t)$ e che $H(0, s) = F(0, s)$ e $H(1, s) = G(1, s)$ non dipendono da s . Segue che $f_0 \cdot g_0 \sim_{\{0,1\}, H} f_1 \cdot g_1$. \square

Segue dal lemma che se f e g sono due archi in X tali che $f(1) = g(0)$, possiamo definire un “prodotto”

$$[f] \cdot [g] := [f \cdot g] \quad (2.2)$$

tra le rispettive classi di equivalenza. Notiamo che il primo “ \cdot ” è il prodotto che stiamo definendo mentre il secondo “ \cdot ” denota la concatenazione tra f e g . Le principali proprietà di questo prodotto sono riassunte nel seguente teorema.

Teorema 2.1.3 *Siano $f, g, h : I \rightarrow X$ tre archi in uno spazio topologico X tali che $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$. Sia $x = f(0)$ e $y = f(1)$. Valgono i seguenti fatti:*

1. $([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$ (associatività);
2. $[\epsilon_x] \cdot [f] = [f]$, $[f] \cdot [\epsilon_y] = [f]$ (elemento neutro sinistro e destro);
3. $[f] \cdot [i(f)] = \epsilon_x$, $[i(f)] \cdot [f] = \epsilon_y$ (inverso sinistro e destro),

dove ϵ_x (risp. ϵ_y) è l'arco costante e $i(f) : I \rightarrow X$ è l'arco definito da $i(f)(t) = f(1 - t)$ (che inizia in y e finisce in x).

Osservazione 2.1.4 *Se $f, g : I \rightarrow X$ sono due archi in uno spazio topologico X tali che $f(1) = g(0)$, allora $f \sim_{\{0,1\}, F} g$ se e solo se $i(f) \sim_{\{0,1\}, G} i(g)$, dove $G(t, s) = F(1 - t, s)$. Quindi la classe $[i(f)]$ è ben definita.*

Osservazione 2.1.5 Il teorema precedente mostra che il prodotto (2.2) soddisfa proprietà simili a quelle di un gruppo. Bisogna però fare attenzione che non si tratta di un gruppo in quanto il prodotto ha senso solo tra classi di equivalenza di archi f e g che soddisfano la condizione $f(1) = g(0)$ (cioè l'arco g inizia dove finisce l'arco f).

Dimostrazione: Nella dimostrazione del teorema faremo uso dei tre seguenti fatti (2.3), (2.4) e (2.5) la cui verifica è lasciata per esercizio allo studente. Siano $f, g : I \rightarrow X$ due archi tali che $f(1) = g(0)$ e $k \in C(X, Y)$. Allora

$$k(f \cdot g) = (k \circ f) \cdot (k \circ g) \quad (2.3)$$

e

$$k(i(f)) = i(k(f)). \quad (2.4)$$

Se $f_0, f_1 : I \rightarrow X$ sono due archi e $k \in C(Y, Z)$ allora

$$f_0 \sim_{\{0,1\},F} f_1 \Rightarrow (k \circ f_0) \sim_{\{0,1\},k \circ F} (k \circ f_1) \quad (2.5)$$

Iniziamo a dimostrare la 2. Sia $\epsilon_0 : I \rightarrow I$ l'arco costante che vale zero su tutto I e sia $\text{id} : I \rightarrow I$ l'applicazione identica, $\text{id}(t) = t$ per ogni $t \in I$. Allora

$$\epsilon_0 \cdot \text{id} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è un arco che congiunge $(\epsilon_0 \cdot \text{id})(0) = 0$ con $(\epsilon_0 \cdot \text{id})(1) = 1$.

DISEGNO

Siccome I è convesso $\text{id} \sim_{\{0,1\},G} (\epsilon_0 \cdot \text{id})$, cioè esiste un'omotopia $G : I \times I \rightarrow I$ relativa a $\{0, 1\}$ tra id e $\epsilon_0 \cdot \text{id}$. Un esempio di tale omotopia è l'omotopia lineare (cf. Esempio 1.1.1 del Capitolo 1)

$$G(t, s) = (1 - s)\text{id}(t) + s(\epsilon_0 \cdot \text{id})(t) = \begin{cases} (1 - s)t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 - s + s(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dalla (2.3) si ha

$$f \circ (\epsilon_0 \cdot \text{id}) = (f \circ \epsilon_0) \cdot (f \circ \text{id}) = \epsilon_x \cdot f, \quad x = f(0),$$

e applicando la (2.5) a $\text{id} \sim_{\{0,1\},G} (\epsilon_0 \cdot \text{id})$ si ottiene

$$f \sim_{\{0,1\},F} (\epsilon_x \circ f),$$

dove $F = f \circ G : I \times I \rightarrow X$ è l'omotopia data da

$$F(t, s) = \begin{cases} f((1 - s)t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(1 - s + s(2t - 1)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Quindi $[\epsilon_x] \cdot [f] = [f]$. La dimostrazione che $(f \cdot \epsilon_y) \sim_{\{0,1\}} f$, cioè $[f] \cdot [\epsilon_y] = [f]$, si ottiene in modo simile considerando l'arco costante $\epsilon_1 : I \rightarrow I$ usando $\text{id} \sim_{\{0,1\}} (\text{id} \cdot \epsilon_1)$ la quale induce un'omotopia $f \sim_{\{0,1\}} (f \cdot \epsilon_y)$.

Dimostriamo la 3. Ci limitiamo anche in questo caso a dimostrare che $(f \cdot i(f)) \sim_{\{0,1\}} \epsilon_x$ (cioè $[f][i(f)] = [\epsilon_x]$) l'uguaglianza $[i(f)] \cdot [f] = \epsilon_y$ seguirà in modo del tutto simile. Consideriamo la concatenazione tra id l'identità di I e $i(\text{id})(t) = 1 - t$, cioè

$$(\text{id} \cdot i(\text{id}))(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2t & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

DISEGNO

Questo rappresenta un laccio chiuso in I di base 0 che è quindi omotopo (sempre perché I è convesso) tramite un'omotopia $H : I \times I \rightarrow I$ relativa a $\{0,1\}$ all'arco costante $\epsilon_0 : I \rightarrow I$, cioè $(\text{id} \cdot i(\text{id})) \sim_{\{0,1\},H} \epsilon_0$. Anche qui possiamo scrivere l'omotopia esplicita (anche se, come nel caso precedente, non è strettamente necessario)

$$H(t, s) = (1 - s)(\text{id} \cdot i(\text{id}))(t) = \begin{cases} (1 - s)2t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (1 - s)(2 - 2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dalla (2.3) e (2.4) si ha

$$f \circ (\text{id} \cdot i(\text{id})) = (f \circ \text{id}) \cdot (f \circ i(\text{id})) = (f \circ \text{id}) \cdot (i \circ (f \circ \text{id})) = f \cdot i(f)$$

e applicando la (2.5) a $(\text{id} \cdot i(\text{id})) \sim_{\{0,1\},H} \epsilon_0$ e usando il fatto che $\epsilon_x = f \circ \epsilon_0$ si ottiene $f \cdot i(f) \sim_{\{0,1\}} \epsilon_x$.

Infine dimostriamo la 1., cioè l'associatività. Introduciamo un po' di terminologia. Dati $[a, b]$ e $[c, d]$ in $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ definiamo l'*applicazione lineare positiva da $[a, b]$ in $[c, d]$* come l'applicazione

$$L_{[a,b],[c,d]} : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

della forma

$$L_{[a,b],[c,d]}(t) = mt + q, \quad m > 0,$$

tale che $L_{[a,b],[c,d]}(a) = c$ e $L_{[a,b],[c,d]}(b) = d$ (un'espressione esplicita è semplicemente l'equazione della retta che passa per i punti (a, c) e (b, d) e cioè: $L_{[a,b],[c,d]}(t) =$

$\frac{d-c}{b-a}(t-a) + c$. Chiaramente una tale applicazione è unica e la composizione di applicazioni lineari positive è ancora un'applicazione lineare positiva, cioè:

$$L_{[a,b],[e,f]} = L_{[c,d],[e,f]} \circ L_{[a,b],[c,d]}.$$

Per esempio con questa terminologia possiamo interpretare la concatenazione $f \cdot g : I \rightarrow X$ (data dalla (2.1)) tra due archi $f, g : I \rightarrow X$, $f(1) = g(0)$ nel seguente modo: $f \cdot g$ nell'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$ è l'applicazione lineare positiva da $[0, \frac{1}{2}]$ a $[0, 1]$ seguita da f , mentre $f \cdot g$ nell'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$ è l'applicazione lineare positiva da $[\frac{1}{2}, 1]$ a $[0, 1]$ seguita da g ; in simboli:

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(L_{[0, \frac{1}{2}], [0, 1]}(t)) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(L_{[\frac{1}{2}, 1], [0, 1]}(t)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Siano ora $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $0 < a < b < 1$ e $f, g, h : I \rightarrow X$ tre archi tali che $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$. Definiamo un arco $K_{a,b}(f, g, h) : I \rightarrow X$ nel seguente modo:

$$K_{a,b}(f, g, h)(t) = \begin{cases} f(L_{[0,a],[0,1]}(t)) & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ g(L_{[a,b],[0,1]}(t)) & \text{se } a \leq t \leq b \\ h(L_{[b,1],[0,1]}(t)) & \text{se } b \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Vogliamo mostrare che

$$K_{a,b}(f, g, h) \sim_{\{0,1\}} K_{c,d}(f, g, h) \quad (2.6)$$

per ogni $c, d \in \mathbb{R}$ tali che $0 < c < d < 1$. Da questa seguirà l'associatività se si osserva che $(f \cdot g) \cdot h = K_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(f, g, h)$ e $f \cdot (g \cdot h) = K_{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}}(f, g, h)$.

Fissiamo a, b, c, d fissati ($a < b$ e $c < d$) e sia $P : I \rightarrow I$ l'applicazione continua (spezzata) definita da:

$$P(t) = \begin{cases} L_{[0,a],[0,c]}(t) & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ L_{[a,b],[c,d]}(t) & \text{se } a \leq t \leq b \\ L_{[b,1],[d,1]}(t) & \text{se } b \leq t \leq 1. \end{cases}$$

DISEGNO

Segue immediatamente che:

$$K_{c,d}(f, g, h) \circ P = K_{a,b}(f, g, h). \quad (2.7)$$

D'altra parte P è un arco in I con estremi 0 e 1 e quindi esiste un'omotopia $G : I \times I \rightarrow I$ relativa a $\{0, 1\}$ tra P e id , cioè $P \sim_{\{0,1\},G} \text{id}$. Segue allora dalla (2.5) e dalla (2.7) che:

$$K_{a,b}(f, g, h) = (K_{c,d}(f, g, h) \circ P) \sim_{\{0,1\},p \circ G} (K_{c,d}(f, g, h) \circ \text{id}) = K_{c,d}(f, g, h)$$

la quale dimostra la (2.6) e conclude la dimostrazione del teorema. \square

La dimostrazione dell'associatività del teorema precedente ci permette di ottenere anche il seguente risultato.

Teorema 2.1.6 (*del minestrone omotopico*) Sia $f : I \rightarrow X$ un arco in uno spazio topologico X . Siano $a_0, a_1, \dots, a_q \in I$, $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_q = 1$. Per ogni $\alpha = 1, \dots, q$ sia $f_\alpha : I \rightarrow X$ l'arco definito da:

$$f_\alpha(t) = f((1-t)a_{\alpha-1} + ta_\alpha).$$

Allora $[f] = [f_1] \cdots [f_q]$ o, equivalentemente, $f \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdots f_q$.

2.2 Il gruppo fondamentale

Sia X uno spazio topologico. Un arco $f : I \rightarrow X$ è un detto *arco chiuso* o *laccio di base x* se $f(0) = f(1) = x$. Ricordiamo che due archi chiusi f e g di base x ($f(0) = f(1) = x = g(0) = g(1)$) sono equivalenti se $f \sim_{\{0,1\}} g$. Come nel paragrafo precedente indicheremo con $[f]$ la classe di equivalenza dell'arco chiuso f rispetto a questa relazione di equivalenza. Segue immediatamente dal Teorema 2.1.3 che l'insieme delle classi di equivalenza dei lacci chiusi di base x nello spazio topologico X con il prodotto dato da (2.2) ha la struttura di gruppo (cfr. l'Osservazione 2.1.5). Questo gruppo, denotato con $\pi_1(X, x)$, si chiama il *gruppo fondamentale* di X basato nel punto x (x viene anche detto *punto base*). Il gruppo $\pi_1(X, x)$ viene anche chiamato il *primo gruppo di omotopia* o *gruppo di Poincaré* in onore del suo inventore.

Osservazione 2.2.1 Visto che l'intervallo I con gli estremi identificati è omeomorfo al cerchio S^1 allora $\pi_1(X, x)$ può essere descritto anche come l'insieme delle classi di equivalenza delle applicazioni continue da S^1 a X che mandano il punto $(1, 0) \in S^1$ nel punto x e dove due applicazioni sono equivalenti se sono omotope relativamente al punto $(1, 0)$.

Sia X uno spazio topologico e $x, y \in X$ due punti distinti. Non esiste in generale un legame tra $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$. Tuttavia vale il seguente risultato:

Proposizione 2.2.2 *Se esiste un arco che unisce x e y allora $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$ sono gruppi isomorfi.*

Dimostrazione: Sia $f : I \rightarrow X$ un arco che congiunge $f(0) = x$ a $f(1) = y$ e sia $g : I \rightarrow X$ un laccio di base x . Allora $i(f) \cdot g \cdot f$ (dove $i(f)(t) = f(1 - t)$) definisce un laccio chiuso di base y .

DISEGNO

Definiamo:

$$u_f : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y), \quad u_f([g]) = [i(f) \cdot g \cdot f] \quad (2.8)$$

e osserviamo che u_f è ben definita: infatti segue dal Lemma 2.1.2 che se $g \sim_{\{0,1\}} g'$ allora $(i(f) \cdot g \cdot f) \sim_{\{0,1\}} (i(f) \cdot g' \cdot f)$. Si verifica facilmente che u_f è un omomorfismo di gruppi. Infatti se $[g], [h] \in \pi_1(X, x)$ allora, ancora per il Lemma 2.1.2, si ottiene

$$\begin{aligned} u_f([g] \cdot [h]) &= u_f([g \cdot h]) = [i(f) \cdot g \cdot h \cdot f] = [i(f) \cdot g \cdot f \cdot i(f) \cdot h \cdot f] \\ &= [i(f) \cdot g \cdot f] \cdot [i(f) \cdot h \cdot f] = u_f([g]) \cdot u_f([h]). \end{aligned}$$

Inoltre u_f è invertibile. La sua inversa è data da

$$u_{i(f)} : \pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(X, x), \quad u_{i(f)}([k]) = [f \cdot k \cdot i(f)], \quad \forall k \in \pi_1(X, y),$$

come si verifica facilmente. Quindi u_f definisce un isomorfismo tra $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$. \square

Corollario 2.2.3 *Sia X uno spazio topologico connesso per archi. Allora $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$ sono isomorfi per ogni coppia di punti $x, y \in X$.*

Se non esiste un arco che unisce x e y i gruppi fondamentali $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$ potrebbero non essere isomorfi. Per esempio sia $X = S^1 \cup \{(-2, 0)\}$ il sotto-spazio di \mathbb{R}^2 dato da l'unione del cerchio unitario e del punto $(-2, 0)$. Allora $\pi_1(X, (-2, 0))$ è il gruppo banale mentre (dimosteremo nel prossimo capitolo che) $\pi_1(X, (1, 0)) = \mathbb{Z}$. Anche se lo spazio X è connesso (ma non connesso per archi) il gruppo fondamentale può dipendere dal punto scelto (vedi Esercizio 2.4). Anche se lo spazio X è connesso per archi (e quindi $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$ sono isomorfi per il corollario precedente) l'isomorfismo u_f (2.8) della Proposizione 2.2.2 non è canonico e si preferisce, a volte, lasciare indicato il punto base. In effetti si riesce a dimostrare che l'isomorfismo u_f non dipende dall'arco f se e solo se $\pi_1(X, x)$ è abeliano (si veda l'Esercizio 2.6).

2.3 Omomorfismo indotto da un'applicazione continua

Sia $\varphi : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici X e Y e sia $x \in X$. Se f è un laccio di base x in X allora $\varphi \circ f$ è un laccio di base $\varphi(x)$ in Y . Inoltre segue dalla (2.5) che se f e g sono due lacci di base x tali che $f \sim_{\{0,1\}} g$ allora $(\varphi \circ f) \sim_{\{0,1\}} (\varphi \circ g)$. Quindi l'applicazione

$$\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x)), \quad \varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$$

è ben definita. Si verifica facilmente che φ_* è un omomorfismo di gruppi. Infatti, per ogni $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$ si ha:

$$\varphi_*([f] \cdot [g]) = \varphi_*([f \cdot g]) = [\varphi \circ (f \cdot g)] = [(\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ g)] = [\varphi \circ f] \cdot [\varphi \circ g] = \varphi_*([f]) \cdot \varphi_*([g]).$$

Dato $x \in X$, l'omomorfismo φ_* si chiama l'*omomorfismo indotto* da φ sui gruppi fondamentali $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(Y, \varphi(x))$. Le principali proprietà di quest'omomorfismo sono riassunte nel seguente:

Teorema 2.3.1 *Siano X, Y e Z spazi topologici, $\varphi \in C(X, Y)$ e $\psi \in C(Y, Z)$. Valgono i seguenti fatti:*

1. $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$;
2. $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x)}$, per ogni $x \in X$;
3. se φ è un omeomorfismo con inversa $\psi : Y \rightarrow X$ allora, per ogni $x \in X$, $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ è un isomorfismo con inversa $\psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(X, x)$.

Dimostrazione: Sia $[f] \in \pi_1(X, x)$. Allora

$$(\psi \circ \varphi)_*([f]) = [(\psi \circ \varphi) \circ f] = [\psi(\varphi(f))] = \psi_*[\varphi(f)] = \psi_*(\varphi_*[f]) = (\psi_* \circ \varphi_*)([f])$$

e

$$(id_X)_*([f]) = [id_X \circ f] = [f].$$

le quali mostrano la 1. e la 2. Per dimostrare la 3: applichiamo la 1. e la 2. alle uguaglianze $\psi \circ \varphi = id_X$ e $\varphi \circ \psi = id_Y$ e otteniamo che, per ogni $x \in X$,

$$\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = (id_X)_* = id_{\pi_1(X, x)}$$

e

$$\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = (id_Y)_* = id_{\pi_1(Y, \varphi(x))}.$$

Quindi $\psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(X, x)$ è l'inversa di $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ e questo conclude la dimostrazione del punto 3. \square

2.4 Invarianza omotopica del gruppo fondamentale

In questo paragrafo studieremo gli omomorfismi indotti da applicazioni continue che sono omotope. Cominciamo con un importante risultato.

Lemma 2.4.1 *Siano X e Y due spazi topologici e siano $\varphi, \psi \in C(X, Y)$. Se $\varphi \sim_F \psi$ allora, per ogni $x \in X$, il seguente diagramma è commutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(Y, \varphi(x)) \\ & \searrow \psi_* & \downarrow u_f \\ & & \pi_1(Y, \psi(x)) \end{array}$$

dove $u_f : \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(Y, \psi(x))$ è l'isomorfismo (2.8) associato all'arco $f : I \rightarrow Y$ di estremi $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ definito da $f(t) := F(x, t)$.

Dimostrazione: Vogliamo mostrare che per ogni laccio chiuso g in X di base x

$$[\psi \circ g] = \psi_*([g]) = u_f(\varphi_*([g])) = [i(f) \cdot (\varphi \circ g) \cdot f]$$

o, equivalentemente,

$$(i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f \sim_{\{0,1\}} (\psi \circ g).$$

Osserviamo che $\psi \circ g : I \rightarrow Y$ è un arco chiuso di base $\psi(x)$. Sarà quindi sufficiente mostrare (per il Teorema 2.1.3) che

$$(i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f \sim_{\{0,1\}} (\epsilon_{\psi(x)} \cdot (\psi \circ g)) \cdot \epsilon_{\psi(x)}$$

DISEGNO

Osserviamo che

$$((i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f)(t) = \begin{cases} f(1-4t) = F(x, 1-4t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (\varphi \circ g)(4t-1) = F(g(4t-1), 0) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t-1) = F(x, 2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e

$$((\epsilon_{\psi(x)} \cdot (\psi \circ g)) \cdot \epsilon_{\psi(x)})(t) = \begin{cases} \psi(x) = F(x, 1) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (\psi \circ g)(4t-1) = F(g(4t-1), 1) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \psi(x) = F(x, 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Si verifica allora facilmente che l'applicazione

$$H(t, s) = \begin{cases} F(x, (1-4t)(1-s) + s) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(g(4t-1), s) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x, (2t-1)(1-s) + s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

definisce un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra $(i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f$ e $(\epsilon_{\psi(x)} \cdot (\psi \circ g)) \cdot \epsilon_{\psi(x)}$.

□

Una conseguenza notevole della proposizione precedente è il seguente:

Teorema 2.4.2 (*invarianza omotopica del gruppo fondamentale*) Siano X e Y due spazi topologici e $\varphi : X \rightarrow Y$ un'equivalenza omotopica. Allora $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ è un isomorfismo per ogni $x \in X$.

Dimostrazione: Sia $\psi : Y \rightarrow X$ tale che $\varphi \circ \psi \sim \text{id}_Y$ e $\psi \circ \varphi \sim \text{id}_X$. Sia $y \in Y$, allora per il Lemma 2.4.1 esiste un arco $f : I \rightarrow Y$ di estremi $\varphi(\psi(y))$ e y tale che

$$u_f(\varphi \circ \psi)_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y)}.$$

Siccome u_f è un isomorfismo segue che $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ è un isomorfismo e che quindi ψ_* è iniettiva e φ_* è suriettiva. In modo analogo si dimostra che $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ è un isomorfismo e che quindi ψ_* è suriettiva e φ_* è iniettiva.

□

Combinando questo teorema con il Corollario 2.2.3 e l'Esercizio 1.4 del Capitolo 1 si ottengono i due corollari seguenti.

Corollario 2.4.3 Siano X e Y due spazi topologici con X connesso per archi. Supponiamo che X e Y siano omotopicamente equivalenti. Allora Y è connesso per archi e $\pi_1(X, x)$ è isomorfo a $\pi_1(Y, y)$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$.

Corollario 2.4.4 Sia X uno spazio topologico contraibile allora $\pi_1(X, x)$ è il gruppo banale per ogni $x \in X$.

Uno spazio topologico X si dice *semplicemente connesso* se è connesso per archi e se $\pi_1(X, x)$ è il gruppo banale per qualche (e quindi per ogni) $x \in X$. Quindi uno spazio contraibile è semplicemente connesso. L'idea intuitiva è che in uno spazio semplicemente connesso ogni laccio chiuso può essere deformato con continuità al suo punto base. Possiamo esprimere la semplice connessione di uno spazio X in altri due modi equivalenti (la dimostrazione delle quali è lasciata come semplice esercizio per lo studente)

- X è semplicemente connesso se e solo se X è connesso per archi e per ogni copia di archi $f, g : I \rightarrow X$ tali che $f(0) = g(0)$ e $f(1) = g(1)$ si ha che $f \sim_{\{0,1\}} g$;
- X è semplicemente connesso se e solo se X è connesso per archi e per ogni applicazione continua $f : S^1 \rightarrow X$ ammette un'estensione continua $g : D^2 \rightarrow X$.

2.5 Il gruppo fondamentale della sfera

In questo paragrafo mostreremo il seguente:

Teorema 2.5.1 *La sfera n -dimensionale S^n è semplicemente connessa per ogni $n \geq 2$.*

Dimostrazione: dal corso di topologia generale sappiamo che S^n è connessa per archi quindi ci rimane da dimostrare che il suo gruppo fondamentale $\pi_1(S^n, x)$ è il gruppo banale per $x \in S^n$. Per il Corollario 2.2.3 possiamo assumere che x sia diverso dal polo nord $N = (0, 0, \dots, 1)$ e dal polo sud $S = (0, 0, \dots, -1)$. Sia $f : I \rightarrow S^n$, $f(0) = f(1) = x$, un laccio di base x . Mostriamo che esiste un laccio $g : I \rightarrow S^n$ di base x tale che $N \notin g(I)$ e $g \sim_{\{0,1\}} f$. L'esistenza di un tale laccio, la transitività dell'omotopia e il fatto che $S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso implicherà allora che $f \sim_{\{0,1\}} g \sim_{\{0,1\}} \epsilon_x$ e quindi $\pi_1(S^n, x)$ è banale. L'arco g si ottiene a partire da f come segue. Sia $\{U, V\}$ il ricoprimento aperto di S^n dato da $U = S^n \setminus \{N\}$ e $V = S^n \setminus \{S\}$. Esiste una suddivisione di I , a_0, a_1, \dots, a_q , $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_q = 1$ con la seguente proprietà: dato $\alpha = 1, 2, \dots, q$, $f([a_{\alpha-1}, a_\alpha])$ è contenuto in U oppure in V . Infatti se $\delta > 0$ è il numero di Lebesgue (vedi Appendice E) associato al ricoprimento aperto di I dato da $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ è sufficiente prendere gli a_α tali che $a_\alpha - a_{\alpha-1} < \delta$.

Possiamo anche assumere, eliminando eventualmente qualche a_α dalla suddivisione di I , che $f(a_\alpha) \in U \cap V = S^n \setminus \{N, S\}$, per ogni $\alpha = 1, \dots, q-1$ (per a_q questo è automatico in quanto $f(a_q) = x \in U \cap V$). Sia infatti $\alpha = 1, \dots, q-1$ tale che $f(a_\alpha)$ appartiene a U ma non a V (lo stesso ragionamento si applica se $f(a_\alpha) \in V$ e $f(a_\alpha) \notin U$ allora $f([a_{\alpha-1}, a_\alpha]) \subset U$ e $f([a_\alpha, a_{\alpha+1}]) \subset U$. Quindi $f([a_{\alpha-1}, a_{\alpha+1}]) \subset U$ e possiamo quindi eliminare il punto a_α dalla suddivisione di I . Sia ora $f_\alpha : I \rightarrow S^n$ l'arco definito da:

$$f_\alpha(t) = f((1-t)a_{\alpha-1} + ta_\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, q.$$

Se per ogni α , $f_\alpha(I) = f([a_{\alpha-1}, a_\alpha]) \subset U$ allora $f(I) \subset U$ e quindi è sufficiente definire $g = f$. Supponiamo invece che esista α , tali che $N \in f_\alpha(I)$ (e quindi, necessariamente, $2 \leq \alpha \leq q-1$ e $f_\alpha(I) \subset V$). Sia $g_\alpha : I \rightarrow V$ un arco tale che $g_\alpha(0) = f_\alpha(0)$, $g_\alpha(1) = f_\alpha(1)$ e $N \notin g_\alpha(I)$. Un tale arco esiste in quanto $f_\alpha(0) = f(a_{\alpha-1})$ e $f_\alpha(1) = f(a_\alpha)$ appartengono a $V \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ che è connesso per archi per $n \geq 2$. Allora $g_\alpha \sim_{\{0,1\}} f_\alpha$ in quanto $V \cong \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso. Segue allora dal Lemma 2.1.2 e dal Teorema 2.1.6 che

$$f \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdots f_\alpha \cdots f_q \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdots g_\alpha \cdots f_q.$$

Applicando lo stesso ragionamento a tutti i α tali che $N \in f_\alpha(I)$ si ottiene il laccio g desiderato. \square

Corollario 2.5.2 *Sia $n \geq 3$ allora $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso.*

Dimostrazione: La sfera S^{n-1} è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ per ogni $n \geq 1$ (cf. Esempio 1.3.8). Il risultato segue allora dal Teorema 2.5.1 e dal Teorema 2.4.3. \square

Osservazione 2.5.3 La costruzione del laccio g nella dimostrazione precedente è inevitabile. Infatti esistono lacci $f : I \rightarrow S^n$ tali che $f(0) = f(1) = x$ e $f(I) = S^n$. Un tale laccio può essere costruito come segue. Sia $P : I \rightarrow I^2$ la curva di Peano descritta in Appendice C, cioè P è un arco in I^2 tale che $P(I) = I^2$. Segue che

$$P_2 := P \times P : I \rightarrow I^2 \times I^2 = I^4, P_2(t) = (P(t), P(t))$$

soddisfa $P_2(I) = I^4$. Sia ora $P_4 := P_2 \times P_2 : I \rightarrow I^8$ e così via. Iterando questo procedimento possiamo trovare s naturale tale che $4s \geq n$ e un arco suriettivo $P_s : I \rightarrow I^{4s}$. Sia $q : I^{4s} \rightarrow I^n$ la proiezione naturale e $\pi : I^n \cong D^n \rightarrow S^n = D^n/S^{n-1}$ l'identificazione (suriettiva) data dal Corollario B.0.13 della Sottoappendice B.0.2. Segue che $k := \pi \circ q \circ P_s : I \rightarrow S^n$ è un'applicazione continua e suriettiva. Se $k(0) = k(1)$ abbiamo finito ponendo $f = k$. Altrimenti consideriamo $h : I \rightarrow S^n$ un arco tale che $h(0) = k(1)$ e $h(1) = k(0)$ (h esiste perché S^n è connessa per archi) e la concatenazione $f = h \cdot k : I \rightarrow S^n$ è un arco chiuso di base $x = k(0)$ tale che $f(I) = S^n$.

Osservazione 2.5.4 Con tecniche analoghe a quelle usate nella dimostrazione del Teorema 2.5.1 si può dimostrare (noi non lo faremo) che il gruppo fondamentale di una varietà topologica è un insieme numerabile.

2.6 Il gruppo fondamentale del prodotto di due spazi

Teorema 2.6.1 (*gruppo fondamentale del prodotto*) Siano X e Y due spazi topologici connessi per archi. Allora il gruppo fondamentale del prodotto $X \times Y$ è isomorfo al prodotto diretto dei gruppi fondamentali di X e Y .

Nell'enunciato del teorema non stiamo specificando nessun punto base in quanto gli spazi X e Y (e quindi $X \times Y$) sono connessi per archi.

Dimostrazione: Siano $p : X \times Y \rightarrow X$ e $q : X \times Y \rightarrow Y$ le proiezioni canoniche, $x \in X$ e $y \in Y$. Definiamo

$$\Phi : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y), \quad \Phi([f]) := (p_*[f], q_*[f]).$$

Mostriamo che Φ è suriettiva. Sia $([f_1], [f_2]) \in \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$ e sia $f : I \rightarrow X \times Y$, $f(t) := (f_1(t), f_2(t))$, dove f_1 e f_2 sono due rappresentanti delle classi $[f_1]$ e $[f_2]$ rispettivamente. Segue che $\Phi([f]) = ([f_1], [f_2])$.

Per dimostrare che Φ è iniettiva supponiamo che $\Phi([f]) = \Phi([g])$. Allora $[p \circ f] = [p \circ g]$ e $[q \circ f] = [q \circ g]$. Equivalentemente $(p \circ f) \sim_{\{0,1\}, F_1} (p \circ g)$ e $(q \circ f) \sim_{\{0,1\}, F_2} (q \circ g)$, dove $F_1 : I \times I \rightarrow X$ (risp. $F_2 : I \times I \rightarrow Y$) è un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra $p \circ f$ e $p \circ g$ (risp. $q \circ f$ e $q \circ g$). Segue allora che $f \sim_{\{0,1\}, F} g$ dove $F : I \times I \rightarrow X \times Y$ è definita da $F(t, s) = (F_1(t, s), F_2(t, s))$.

Infine dimostriamo che Φ è un omomorfismo di gruppi. Infatti, per $[f], [g] \in \pi_1(X \times Y, x \times y)$ si ha:

$$\begin{aligned} \Phi([f] \cdot [g]) &= \Phi([f \cdot g]) = ([p \circ (f \cdot g)], [q \circ (f \cdot g)]) = ([p \circ f] \cdot [p \circ g], [q \circ f] \cdot [q \circ g]) \\ &= ([p \circ f] \cdot [p \circ g], [q \circ f] \cdot [q \circ g]) = ([p \circ f], [q \circ f]) \cdot ([p \circ g], [q \circ g]), \end{aligned}$$

dove l'ultimo “ \cdot ” rappresenta il prodotto diretto in $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$. \square

2.7 Un cenno sui gruppi di omotopia

Sia X uno spazio topologico e $x \in X$. Come suggerito dalla notazione $\pi_1(X, x)$, il gruppo fondamentale appartiene ad una successione di gruppi $\pi_n(X, x)$ associati ad uno spazio topologico X , che misurano in un certo senso i “buchi n -dimensionali” dello spazio X .

Dato n numero intero (eventualmente nullo) sia $I^n = I \times \cdots I$ e ∂I^n la sua frontiera, cioè:

$$\partial I^n = \{(t_1, \dots, t_n) \mid t_j \in \{0, 1\}, \text{ per qualche } j\}.$$

Per $x \in X$, denotiamo con $\pi_n(X, x)$ l'insieme delle classi di omotopia. relativa a ∂I^n delle funzioni continue $f : I^n \rightarrow X$ tali che $f(\partial I^n) = x$

Siccome I^n è omeomorfo a D^n il quale quozientato la sua frontiera è omeomorfo alla sfera S^n (si veda Corollario B.0.13 nell'Appendice A), possiamo equivalentemente pensare a $\pi_n(X, x)$ come l'insieme delle classi di equivalenza di applicazioni da S^n in X che portano $(1, 0, \dots, 0)$ in x , modulo l'omotopia relativa al punto $(1, 0, \dots, 0)$.

Il caso più semplice si ha quando $n = 0$. Dal momento che $S^0 = \{\pm 1\}$ un'applicazione da S^0 a X che manda il punto 1 nel punto base x è univocamente determinata da dove invia il punto -1 . Due applicazioni $f, g : S^0 \rightarrow X$, tali che $f(1) = g(1) = x$ sono omotope relativamente a 1 se e solo se esiste un arco in X che congiunge $f(-1)$ con $g(-1)$ cioè se e solo se $f(-1)$ e $g(-1)$ appartengono alla stessa componente connessa per archi di X . Non esiste una struttura di gruppo su $\pi_0(X, x_0)$: è solo un insieme con un elemento ben distinto e cioè la componente connessa che contiene x . Di solito il punto x viene omissso dalla notazione e si scrive $\pi_0(X)$ per denotare l'insieme delle componenti connesse per archi di X . Per $n \geq 1$ possiamo definire un prodotto su $\pi_n(X, x)$ come segue (per $n = 1$ è esattamente il prodotto definito su $\pi_1(X, x)$). Se $f, g : I^n \rightarrow X$, $f(\partial I^n) = g(\partial I^n) = x$ possiamo definire il loro prodotto come quell'applicazione continua $f \cdot_1 g : I^n \rightarrow X$ definita da:

$$(f \cdot_1 g)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

All'applicazione $f : I^n \rightarrow X$ possiamo associare $i(f) : I^n \rightarrow X$ data da

$$i(f)(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Si dimostra (analogamente a quanto fatto nel Lemma 2.1.2 e nell'Osservazione 2.1.4) che se f_0 è omotopa a f_1 relativamente a ∂I^n e g_0 è omotopa a g_1 relativamente a ∂I^n allora $f_0 \cdot_1 f_1$ è omotopa a $g_0 \cdot_1 g_1$ relativamente a ∂I^n e $i(f_0)$ è omotopa a $i(f_1)$ relativamente a ∂I^n . Resta così definito un prodotto \cdot_1 sulle classi $[f]$ e $[g]$ in $\pi_n(X, x)$

$$[f] \cdot_1 [g] = [f \cdot_1 g] \tag{2.9}$$

Teorema 2.7.1 *Supponiamo $n \geq 1$. Valgono i seguenti fatti:*

1. $\pi_n(X, x)$ è un gruppo rispetto al prodotto (2.9) con elemento neutro $[\epsilon_x]$;
2. $\pi_n(X, x)$ è un gruppo abeliano per $n > 1$ ¹;
3. se f è un arco in X che unisce x a y allora $\pi_n(X, x)$ è isomorfo a $\pi_n(X, x_1)$ tramite l'isomorfismo

$$u_f : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(X, y)$$

definito da:

$$u_f([g]) = [i(f_1) \cdot g \cdot f_1],$$

dove

$$f_1 : I^n \rightarrow X, f_1(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(t_1);$$

4. data $\varphi \in C(X, Y)$ allora resta definito un omomorfismo di gruppi (chiamato omomorfismo indotto sull' n -esimo gruppo di omotopia)

$$\varphi_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(X, \varphi(x)), [g] \mapsto [\varphi \circ g]$$

Inoltre se φ è un omeomorfismo (quindi $\pi_n(X, x)$ è un invariante topologico);

5. se $\varphi : X \rightarrow Y$ è un'equivalenza omotopica allora $\varphi_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, \varphi(x))$ è un isomorfismo (quindi $\pi_n(X, x)$ è un invariante omotopico).

Il gruppo $\pi_n(X, x)$, per $n \geq 1$, viene chiamato n -esimo gruppo di omotopia dello spazio topologico X basato nel punto $x \in X$.

Dimostrazione: La dimostrazione di 1., 3., 4., e 5. è analoga a quella per il gruppo fondamentale ed è lasciata per esercizio (vedi Esercizio 2.9). L'abelianità di $\pi_n(X, x)$ per $n > 1$ si dimostra come segue. Siano $f, g : I^n \rightarrow X$, $f(\partial I^n) = g(\partial I^n) = x$ possiamo definire un prodotto $f \cdot_2 g : I^n \rightarrow X$ analogo a \cdot_1 che però agisce sulla seconda coordinata:

$$(f \cdot_2 g)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(t_1, 2t_2, t_3, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \\ g(t_1, 2t_2 - 1, t_3, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \end{cases}$$

Questo prodotto (esattamente come \cdot_1) rende $\pi_n(X, x)$ un gruppo definendo il prodotto

$$[f] \cdot_2 [g] = [f \cdot_2 g], \quad (2.10)$$

¹Vedremo esempi di spazi X con gruppo fondamentale non abeliano nei capitoli successivi.

Osserviamo che $[\epsilon_x]$ è l'elemento neutro per entrambe le operazioni binarie \cdot_1 e \cdot_2 su $\pi_n(X, x)$ e, non è difficile vedere che (Esercizio 2.10) che:

$$([f] \cdot_1 [g]) \cdot_2 ([h] \cdot_1 [k]) = ([f] \cdot_2 [h]) \cdot_1 ([g] \cdot_2 [k]), \quad \forall [f], [g], [h], [k] \in \pi_n(X, x), \quad (2.11)$$

la quale implica (Esercizio 2.11) $[f] \cdot_1 [g] = [g] \cdot_1 [f]$ per ogni $[f]$ e $[g]$. \square

Osservazione 2.7.2 Un teorema di Whitehead afferma che per spazi “fatti bene” (es. varietà topologiche) vale il viceversa del punto 4. e cioè se $\varphi \in C(X, Y)$ è tale che $\varphi_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(X, \varphi(x))$ è un'isomorfismo per ogni n allora φ è un'equivalenza omotopica.

Osservazione 2.7.3 Si può dimostrare che $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ per ogni $n \geq 1$ e quindi S^n non è contraibile (il caso $n = 1$ verrà trattato nel Capitolo 4). Calcolare $\pi_n(S^k)$ è molto complicato e esistono valori di k e n per i quali non si è ancora riusciti a farlo. Stranamente, esistono $n > k$ tali che il gruppo di omotopia $\pi_n(S^k)$ è diverso da zero. Per esempio si può dimostrare che $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ e quindi esistono in S^2 dei “buchi” 3-dimensionali.

2.8 Esercizi

Esercizio 2.1 Dimostrare le affermazioni fatte alla fine del Sottoparagrafo 2.4.

Esercizio 2.2 Dimostrare le (2.3), (2.4) e (2.5).

Esercizio 2.3 Giustificare in dettaglio le affermazioni fatte nell'Osservazione 2.2.1.

Esercizio 2.4 Dare un esempio di uno spazio topologico connesso X dove $\pi_1(X, x)$ dipende dal punto base $x \in X$. (Suggerimento: fatto a lezione: pulce e il pettine e il fatto che $\pi_1(S^1, (1, 0)) = \mathbb{Z}$).

Esercizio 2.5 Dimostrare che se uno spazio ha la topologia discreta allora $\pi_1(X, x) = \{1\}$ per ogni $x \in X$.

Esercizio 2.6 Dimostrare che due archi $f, g : I \rightarrow X$ da x a y danno luogo allo stesso isomorfismo da $\pi_1(X, x)$ a $\pi_1(X, y)$ (cioè $u_f = u_g$) se e solo se $[g \cdot i(f)]$ appartiene al centro di $\pi_1(X, x)$. Dedurre che l'isomorfismo $u_f : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$ (associato ad un arco f da x a y) è indipendente da f se e solo se $\pi_1(X, x)$ è un gruppo abeliano.

Esercizio 2.7 Dimostrare che se A è un retratto forte di deformazione di uno spazio X , allora l'inclusione $i : A \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo $i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$, per ogni $a \in A$.

Esercizio 2.8 Si dimostri che un retratto di uno spazio semplicemente connesso è semplicemente connesso.

Esercizio 2.9 Dimostrare il Teorema 2.7.1.

Esercizio 2.10 Dimostrare la formula (2.11).

Esercizio 2.11 Sia G un insieme dotato di due operazioni binarie \cdot_1 e \cdot_2 con lo stesso elemento unità ϵ (cioè $a \cdot_1 \epsilon = \epsilon \cdot_1 a = a \cdot_2 \epsilon = \epsilon \cdot_2 a = a$, per ogni $a \in G$). Supponiamo che:

$$(a \cdot_1 b) \cdot_2 (c \cdot_1 d) = (a \cdot_2 d) \cdot_1 (b \cdot_2 c), \quad \forall a, b, c, d \in G.$$

Allora le due operazioni coincidono e sono commutative, cioè $a \cdot_1 b = a \cdot_2 b$ e $a \cdot_1 b = b \cdot_1 a$, per ogni $a, b \in G$.

Capitolo 3

Rivestimenti

3.1 Rivestimenti

Siano \tilde{X} e X due spazi topologici. Diremo che un'applicazione continua $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è un *rivestimento* se valgono i seguenti fatti:

1. p è suriettiva;
2. per ogni $x \in X$ esiste un aperto U di X contenente x e una famiglia $\{\tilde{U}_j\}_{j \in J}$ di aperti di \tilde{X} tali che:
 - (a) $p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} \tilde{U}_j$;
 - (b) $\tilde{U}_j \cap \tilde{U}_k = \emptyset$ per ogni $j, k \in J$ con $j \neq k$.
 - (c) $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \rightarrow U$ è un omeomorfismo per ogni $j \in J$.

L'applicazione $p : \tilde{X} \rightarrow X$ si chiama *proiezione*, X *spazio base* e \tilde{X} *spazio totale* del rivestimento. Dato $x \in X$ la sua controimmagine $p^{-1}(x)$ tramite p si chiama la *fibra* del punto x . Se le fibre $p^{-1}(x)$ hanno tutte la stessa cardinalità al variare di $x \in X$ la cardinalità della fibra viene detta *grado* del rivestimento p .

Data un'applicazione continua $p : \tilde{X} \rightarrow X$ diremo che un aperto $U \subset X$ è *ben ricoperto* da p ovvero che U è un *aperto banalizzante* per p se la controimmagine $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta di sottoinsiemi aperti di \tilde{X} , ognuno dei quali è omeomorfo a U tramite p . Quindi $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è un rivestimento se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno aperto $U \subset X$ di x che sia ben ricoperto da p .

La definizione di rivestimento ha svariate applicazioni. In queste note ne vedremo alcune legate alla topologia ma il concetto di rivestimento e le sue generalizzazioni di *rivestimento ramificato* e di *fibrato*, giocano un ruolo importante in tutta la geometria.

Osservazione 3.1.1 Se un aperto U è ben ricoperto da un rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ allora anche un aperto V contenuto in U è ben ricoperto da p .

Esempio 3.1.2 Ogni omeomorfismo tra due spazi topologici è un rivestimento di grado 1.

Esempio 3.1.3 Sia Y uno spazio topologico discreto. Allora per ogni spazio topologico X la proiezione sul primo fattore $p : X \times Y \rightarrow X, (x, y) \mapsto x$ è un rivestimento. In questo il grado di p è uguale alla cardinalità di Y .

Esempio 3.1.4 Sia Z la zeta in \mathbb{R}^2 e \mathbb{R} l'asse delle ascisse e sia $p : Z \rightarrow \mathbb{R}$ la proiezione sul primo fattore (VEDI LEZIONE). Allora p non è un rivestimento. Mentre se consideriamo $p : \tilde{X} = Z \setminus \{a, b, c, d\} \rightarrow X = \mathbb{R} \setminus \{x, y\}$ (a e b sono i punti angolosi) è un rivestimento con spazio totale e base sconnessi. In questo caso non si può parlare di grado di p infatti la cardinalità della fibra varia a seconda delle componenti connesse alla quale appartiene x .

DISEGNO

Esempio 3.1.5 Consideriamo l'applicazione continua

$$e : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t),$$

dove i denota l'unità immaginaria e stiamo pensando al cerchio unitario come

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\}.$$

Possiamo pensare a p come quell'applicazione che “avvolge” la retta reale \mathbb{R} sul cerchio S^1 e durante questo processo porta l'intervallo $[n, n+1]$ su S^1 .

DISEGNO

Vogliamo mostrare che e è un rivestimento. Ovviamente e è suriettiva. Sia ora $x \in S^1$ e supponiamo che $x \neq 1$. Prendiamo l'aperto $U = S^1 \setminus \{1\}$ di S^1 che contiene il punto x (nel caso $x = 1$ si prenderà, per esempio, l'aperto $V = S^1 \setminus \{-1\}$ e si procederà in modo analogo). Osserviamo che la fibra del punto 1 è costituita da tutti gli interi, $e^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, inoltre

$$e^{-1}(U) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1).$$

DISEGNO

Quindi $e^{-1}(U)$ è l'unione disgiunta degli aperti $(n, n+1)$ di \mathbb{R} al variare di $n \in \mathbb{Z}$. Osserviamo che

$$e_n := e|_{(n, n+1)} : (n, n+1) \rightarrow S^1 \setminus \{1\}$$

è continua e bigettiva. Inoltre e_n è un'applicazione chiusa. Infatti dato $C \subset (n, n+1)$ chiuso in $(n, n+1)$ allora la sua chiusura \overline{C} è un chiuso in $[n, n+1]$ e quindi compatto. Quindi la sua immagine $e(\overline{C})$ è un compatto e quindi chiuso in S^1 . Dal momento che $e_n(C) = e(\overline{C}) \cap U$ segue che $e_n(C)$ è chiuso in U . Quindi e_n è un omeomorfismo, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e quindi e è un rivestimento. Il rivestimento e ha grado infinito numerabile.

3.2 Rivestimenti e omeomorfismi locali

Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici X e Y . Diremo che f è un *omeomorfismo locale* se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto $A \subset X$ di x tale che $f(A)$ è aperto in Y e $f|_A : A \rightarrow f(A)$ è un omeomorfismo.

Le principali proprietà degli omeomorfismi locali sono riassunte nella seguente:

Proposizione 3.2.1 *Sia $f : X \rightarrow Y$ un omeomorfismo locale. Allora valgono i seguenti fatti:*

1. *Sia $U \subset X$ un aperto. Allora la restrizione $f|_U : U \rightarrow Y$ è un omeomorfismo locale;*
2. *f è un'applicazione aperta;*
3. *la topologia indotta sulla fibra $p^{-1}(x)$ da X è quella discreta.*

Dimostrazione: Sia $x \in U$ e A un aperto di X tale che $x \in A$, $f(A)$ sia aperto in Y e $f|_A : A \rightarrow f(A)$ sia un omeomorfismo. Allora $f|_{U \cap A} : U \cap A \rightarrow f(U \cap A)$ è un omeomorfismo dall'aperto $U \cap A$ di U all'aperto $f(U \cap A)$ di Y . Questo mostra la 1. Per dimostrare la 2 ossia che f è aperta sia U un aperto non vuoto e $x \in U$. Essendo f un omeomorfismo locale esiste un intorno aperto A_x di X tale che $f(A_x)$ è aperto in Y e $f|_{A_x} : A_x \rightarrow f(A_x)$ è un omeomorfismo. Segue che

$f|_{A_x \cap U}$ porta l'aperto $U_x \cap A$ di A nell'aperto $f(A_x \cap U)$ di $f(A_x)$. Siccome $f(A_x)$ è aperto in Y anche $f(A_x \cap U)$ è aperto in Y . Quindi

$$f(U) = f(\cup_{x \in U}(A_x \cap U)) = \cup_{x \in U} f(A_x \cap U)$$

è un aperto di Y e quindi f è aperta. Infine dato $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ segue dalla definizione di omeomorfismo che esiste un suo intorno aperto \tilde{U} che interseca $p^{-1}(x)$ solo nel punto \tilde{x} e questo mostra la 3. \square

Il legame tra i rivestimenti e gli omeomorfismi locali è espresso dalla seguente:

Proposizione 3.2.2 *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Allora p è un omeomorfismo locale e un'identificazione. In particolare la fibra $p^{-1}(x)$ è discreta per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione: Sia \tilde{x} un punto di \tilde{X} . Allora esiste un intorno aperto U di $x = p(\tilde{x})$ in X banalizzante per p . Segue dalla definizione di rivestimento che esiste un aperto \tilde{U} di \tilde{X} che contiene \tilde{x} tale che $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ sia un omeomorfismo. Essendo \tilde{x} arbitrario otteniamo che p è un omeomorfismo locale. D'altra parte, per la Proposizione 3.2.1), p è un'applicazione aperta, continua e suriettiva e quindi un'identificazione. L'ultima parte segue dal punto 3 della Proposizione 3.2.1. \square

Corollario 3.2.3 *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Se p è iniettiva allora è un omeomorfismo.*

Dimostrazione: Per la Proposizione 3.2.2 i rivestimenti sono applicazioni continue aperte e suriettive quindi sono omeomorfismi se e solo se sono applicazioni iniettive. \square

Esistono omeomorfismi locali suriettivi che non sono rivestimenti. Per esempio nell'Esempio 3.1.4 si prenda $Z \setminus \{a, b\}$ e la proiezione $Z \setminus \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ è un omeomorfismo locale suriettivo che non è un rivestimento. Oppure si consideri, l'applicazione continua e suriettiva $f : (0, 2) \rightarrow S^1, t \rightarrow e^{2\pi it}$ (cioè la restrizione del rivestimento $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dell'Esempio 3.1.5 all'intervallo aperto $(0, 2) \subset \mathbb{R}$). Si noti che f è un omeomorfismo locale in quanto restrizione dell'omeomorfismo locale p all'aperto $(0, 1)$ (punto 1 della Proposizione 3.2.1). D'altra parte f non è un rivestimento in quanto il punto $1 \in S^1$ non ammette un intorno aperto ben ricoperto. Infatti se U fosse un tale intorno allora per l'Osservazione 3.1.1 esisterebbero $V \subset U$ aperto di S^1 che contiene 1 e ben ricoperto da f e $\epsilon > 0$ tali che $f^{-1}(V) = (0, \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \cup (-\epsilon, 2)$ sia unione di tre aperti disgiunti.

Ma l'aperto $(0, \epsilon)$ (così come $(-\epsilon, 2)$) non può essere omeomorfo a V tramite f in quanto non contiene nessun punto la cui immagine sia 1.

DISEGNO

Viene allora naturale chiedersi sotto quali condizioni un omeomorfismo locale sia un rivestimento. Una possibile risposta a tale domanda è contenuta nel seguente:

Teorema 3.2.4 *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un omeomorfismo locale tra due spazi topologici \tilde{X} e X . Se \tilde{X} è compatto e di Hausdorff e X è connesso e di Hausdorff allora p è un rivestimento.*

Dimostrazione: Osserviamo che $p(\tilde{X})$ è immagine di un compatto in uno spazio di Hausdorff e quindi chiuso. D'altra parte per la Proposizione 3.2.2 $p(\tilde{X})$ è anche aperto. Segue che $p(\tilde{X})$ è sia aperto che chiuso in X . Essendo X connesso segue che $p(\tilde{X}) = X$ e quindi p è suriettiva. Sia $x \in X$ allora la fibra $p^{-1}(x)$ è uno spazio topologico discreto (per il punto 3 della Proposizione 3.2.1) e compatto (sottoinsieme chiuso di un compatto). Allora la cardinalità di $p^{-1}(x)$ è finita (un sottoinsieme discreto di un compatto è finito). Sia $p^{-1}(x) = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$. Dal momento che \tilde{X} è di Hausdorff e p è un omeomorfismo locale è possibile trovare W_1, \dots, W_k aperti disgiunti tali che $\tilde{x}_j \in W_j$, $j = 1, \dots, k$, e $p|_{W_j} : W_j \rightarrow p(W_j)$ sia un omeomorfismo. Poniamo $V := \cap_{j=1}^k p(W_j)$, $W := \cup_{j=1}^k W_j$ e

$$U := V \setminus p(\tilde{X} \setminus W).$$

Allora U è un sottoinsieme aperto di X che contiene x . Infatti V è un aperto di X e $p(\tilde{X} \setminus W)$ è un chiuso di X in quanto immagine tramite l'applicazione p (chiusa per il lemma dell'applicazione chiusa) del chiuso $\tilde{X} \setminus W$. Inoltre x appartiene a U , o equivalentemente, $x \notin p(\tilde{X} \setminus W)$ (infatti se $x \in p(\tilde{X} \setminus W)$ allora dovrebbe esistere $\tilde{y} \in \tilde{X} \setminus W$ tale che $p(\tilde{y}) = x$; ma $p^{-1}(x) \subset W$ mentre $\tilde{y} \notin W$). Infine dimostriamo che U è un aperto banalizzante per p . Prendendo la controimmagine di $U = V \setminus p(\tilde{X} \setminus W)$ tramite p si ottiene:

$$p^{-1}(U) = p^{-1}(V) \setminus p^{-1}(p(\tilde{X} \setminus W)) \subset p^{-1}(V) \setminus (\tilde{X} \setminus W) = p^{-1}(V) \cap W$$

e quindi

$$p^{-1}(U) \subset W = \cup_{j=1}^k W_j. \quad (3.1)$$

Poniamo allora

$$\tilde{U}_j = p^{-1}(U) \cap W_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Segue allora dalla (3.1) e dal fatto che i W_j sono disgiunti che $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta degli aperti \tilde{U}_j . Inoltre, per ogni $j = 1, \dots, k$,

$$p(\tilde{U}_j) = p(p^{-1}(U) \cap W_j) = p(p^{-1}(U)) \cap p(W_j) = U \cap p(W_j) = U$$

dove la seconda uguaglianza segue dall'iniettività di p ristretta a W_j (e quindi ristretta a $p^{-1}(U) \cap W_j$), la terza uguaglianza segue dalla suriettività di p mentre l'ultima uguaglianza è conseguenza del fatto che, per definizione, $U \subset V = \bigcap_{j=1}^k p(W_j)$ e quindi $U \subset p(W_j)$ per ogni $j = 1, \dots, k$. Questo mostra che U è un aperto ben ricoperto da p e che p è un rivestimento. Per dimostrare che il rivestimento ha grado finito bisogna dimostrare che la cardinalità della fibra di un punto (che è finito per quello che abbiamo dimostrato) non dipende dal punto. Consideriamo la funzione $c : X \rightarrow \mathbb{Z}$ che ad un punto $x \in X$ associa la cardinalità della fibra $p^{-1}(x)$. Questa funzione è localmente costante infatti per ogni punto $x \in X$ i punti di un aperto banalizzante U che contiene x hanno tutti fibre della stessa cardinalità. Quindi c è un'applicazione continua tra X e \mathbb{Z} con la topologia discreta. Essendo X connesso $c(X)$ è connesso e quindi c deve essere costante. Dunque la cardinalità della fibra $p^{-1}(x)$ non dipende dal punto x scelto. \square

3.3 Sollevamenti di archi e omotopie

Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e $f : Y \rightarrow X$ un'applicazione continua. Diremo che un'applicazione continua $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ è un *sollevamento* di f se $f = p \circ \tilde{f}$, ossia se il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

In questo paragrafo dimostreremo tre risultati fondamentali sui sollevamenti: l'unicità del sollevamento (Proposizione 3.3.1), il sollevamento degli archi (Proposizione 3.3.2) e il sollevamento delle omotopie (Proposizione 3.3.4) e alcune delle loro conseguenze. Il problema dell'esistenza di un sollevamento di un'applicazione continua (non necessariamente definita su I o su I^2) verrà affrontato in seguito.

Proposizione 3.3.1 *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e $f : Y \rightarrow X$ una funzione continua da uno spazio topologico connesso Y in X . Siano $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ e $\tilde{f}' :$*

$Y \rightarrow \tilde{X}$ due sollevamenti di f . Se esiste un punto $y_0 \in Y$ tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}'(y_0)$. Allora $\tilde{f} = \tilde{f}'$.

Dimostrazione: Consideriamo il sottoinsieme di $Y' \subset Y$ definito come segue:

$$Y' = \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\}.$$

Dobbiamo dimostrare che $Y' = Y$. Osserviamo che $Y' \neq \emptyset$ in quanto $y_0 \in Y'$. Essendo Y connesso basterà allora dimostrare che Y' è sia aperto che chiuso. Sia dunque $y \in Y'$, U un intorno aperto di $f(y)$ ben ricoperto da p e $\tilde{U}_k \subset \tilde{X}$ un intorno aperto di $\tilde{x} = \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)$ tale che $p|_{\tilde{U}_k} : \tilde{U}_k \rightarrow U$ ($p(\tilde{x}) = f(y)$) sia un omeomorfismo. Consideriamo l'intorno aperto di y dato da $\tilde{f}^{-1}(\tilde{U}_k) \cap \tilde{f}'^{-1}(\tilde{U}_k) \subset Y$. Vogliamo mostrare che quest'intorno è contenuto in Y' (e questo mostrerà che Y' è aperto). Sia $z \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}_k) \cap \tilde{f}'^{-1}(\tilde{U}_k)$ allora $\tilde{f}(z) \in \tilde{U}_k$ e $\tilde{f}'(z) \in \tilde{U}_k$ e $p(\tilde{f}(z)) = p(\tilde{f}'(z)) = f(z)$. Dal momento che p ristretta a \tilde{U}_k è iniettiva segue che $\tilde{f}(z) = \tilde{f}'(z)$ e quindi $z \in Y'$. Per mostrare che Y' è chiuso sia $y \in Y \setminus Y'$ e quindi $\tilde{f}(y) \neq \tilde{f}'(y)$. Sia inoltre U un intorno aperto di $f(y)$ ben ricoperto da p . Esistono allora due intorni aperti e disgiunti $\tilde{U}_k, \tilde{U}_l \subset \tilde{X}$, $k \neq l$, di $\tilde{f}(y)$ e di $\tilde{f}'(y)$ tali che $p|_{\tilde{U}_k} : \tilde{U}_k \rightarrow U$ e $p|_{\tilde{U}_l} : \tilde{U}_l \rightarrow U$ siano omeomorfismi ($p(\tilde{f}(y)) = \tilde{f}'(y) = x$). Allora $\tilde{f}^{-1}(\tilde{U}_k) \cap \tilde{f}'^{-1}(\tilde{U}_l)$ è un intorno aperto di y contenuto in $Y \setminus Y'$. Infatti per $z \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}_k) \cap \tilde{f}'^{-1}(\tilde{U}_l)$ si ha $\tilde{f}(z) \in \tilde{U}_k$ e $\tilde{f}'(z) \in \tilde{U}_l$ e quindi $\tilde{f}(z) \neq \tilde{f}'(z)$ essendo \tilde{U}_k e \tilde{U}_l disgiunti.

□

Proposizione 3.3.2 (sollevamento degli archi) Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ un punto sulla fibra di x_0 , cioè $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Allora ogni arco $f : I \rightarrow X$ tale che $f(0) = x_0$ ammette un unico sollevamento $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$.

Dimostrazione: L'unicità di un sollevamento \tilde{f} di f tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ segue dalla Proposizione 3.3.1 e dalla connessione di I . Dimostriamo dunque l'esistenza di \tilde{f} . Consideriamo un ricoprimento di X fatto da aperti banalizzanti. Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 2.5.1 e usando l'esistenza del numero di Lebesgue (vedi Appendice E) possiamo trovare una suddivisione dell'intervallo I , $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{q-1} < a_q = 1$ tale che per ogni $\alpha = 1, \dots, q$, $f([a_{\alpha-1}, a_\alpha])$ sia contenuto in uno degli aperti banalizzanti scelti. Vogliamo dimostrare per induzione che: per ogni $\alpha = 0, \dots, q$ esiste un sollevamento $\tilde{f}_\alpha : [0, a_\alpha] \rightarrow \tilde{X}$ di $f|_{[0, a_\alpha]}$ (cioè $p \circ \tilde{f}_\alpha = f|_{[0, a_\alpha]}$) tale che $\tilde{f}_\alpha(0) = \tilde{x}_0$. Il sollevamento desiderato si otterrà allora per $\alpha = q$ cioè $\tilde{f} = \tilde{f}_q$. La base dell'induzione si ottiene definendo $\tilde{f}_0 : \{0\} \rightarrow \tilde{X}$, $\tilde{f}_0(0) = \tilde{x}_0$. Supponiamo di aver definito un sollevamento

$\tilde{f}_{q-1} : [0, a_{q-1}] \rightarrow \tilde{X}$ di $f|_{[0, a_{q-1}]}$ tale che $\tilde{f}_{q-1}(0) = \tilde{x}_0$ e sia U un aperto banalizzante per p tale che $f([a_{q-1}, a_q]) \subset U$. Esisterà allora un intorno aperto \tilde{U} di $\tilde{f}_{q-1}(a_{q-1})$ tale che $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ sia un omeomorfismo e $p(\tilde{f}_{q-1}(a_{q-1})) = f(a_{q-1})$. Estendiamo allora \tilde{f}_{q-1} ad un sollevamento $\tilde{f}_q : I = [0, a_q] \rightarrow \tilde{X}$ di $f : I \rightarrow X$ tale che $\tilde{f}_q(0) = \tilde{x}_0$ ponendo:

$$\tilde{f}_q(t) = \begin{cases} \tilde{f}_{q-1}(t) & \text{se } t \in [0, a_{q-1}] \\ p|_{\tilde{U}}^{-1}(f(t)) & \text{se } t \in [a_{q-1}, 1], \end{cases}$$

il quale è continuo per il lemma di incollamento.

DISEGNO

□

Corollario 3.3.3 *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Se X è connesso per archi allora la cardinalità della fibra $p^{-1}(x)$ non dipende dal punto $x \in X$.*

Dimostrazione: Siano x_0 e x_1 due punti di X . Sia \tilde{x}_0 un punto della fibra di $p^{-1}(x_0)$ e sia $f : I \rightarrow X$ un arco tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. Sia $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ l'unico sollevamento di f tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$. Allora $\tilde{f}(1)$ appartiene alla fibra di $p^{-1}(x_1)$. Quindi resta definita un'applicazione

$$\Phi : p^{-1}(x_0) \rightarrow p^{-1}(x_1)$$

che al punto \tilde{x}_0 associa il punto $\Phi(\tilde{x}_0) = \tilde{f}(1)$. Analogamente definiamo un'applicazione

$$\Psi : p^{-1}(x_1) \rightarrow p^{-1}(x_0)$$

che al punto \tilde{x}_1 associa il punto $\tilde{g}(1)$, dove $\tilde{g} : I \rightarrow \tilde{X}$ è l'unico sollevamento di $i(f)$ ($i(f)(t) = f(1-t)$) tale che $\tilde{g}(0) = \tilde{x}_1$. Si verifica facilmente che Ψ è l'inversa di Φ . □

Proposizione 3.3.4 (sollevamento delle omotopie) *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tale che $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Sia $F : I \times I \rightarrow X$ un'applicazione continua tale che $F(0,0) = x_0$. Allora F ammette un unico sollevamento $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ tale che $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$. Se inoltre F è un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra i due archi $I \rightarrow F(t,0)$ e $I \rightarrow F(t,1)$ allora \tilde{F} è un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra i due archi $I \rightarrow \tilde{F}(t,0)$ e $I \rightarrow \tilde{F}(t,1)$*

Dimostrazione: L'unicità di \tilde{F} segue dalla Proposizione 3.3.1 e dalla connessione di $I \times I$. Prima di tutto osserviamo che esiste un sollevamento $\tilde{F}_L : L \rightarrow \tilde{X}$ di $F|_L$ dove $L := (I \times \{0\}) \times (\{0\} \times I)$. Infatti \tilde{F}_L si può ottenere dalla Proposizione 3.3.2 come $\tilde{F}_L(t, 0) = \tilde{f}(t)$, $t \in I$ e $\tilde{F}_L(0, s) = \tilde{g}(s)$, $s \in I$, dove \tilde{f} e \tilde{g} sono i sollevamenti rispettivamente degli archi $I \rightarrow F(t, 0)$ e $I \rightarrow F(0, s)$ tali che $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = \tilde{x}_0$. Estendiamo ora \tilde{F}_L a tutto $I \times I$ come segue. Consideriamo un ricoprimento di X costituito da aperti banalizzanti. Usando l'esistenza del numero di Lebesgue (vedi Appendice E) possiamo trovare una suddivisione dell'intervallo $I \times I$, $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{q-1} < a_q = 1$, $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_{r-1} < b_r = 1$ tale che per ogni $\alpha = 0, \dots, q-1$ e per ogni $\beta = 0, \dots, r-1$, $F(I_\alpha \times J_\beta)$ sia contenuto in uno degli aperti banalizzanti scelti, dove $I_\alpha = [a_{\alpha-1}, a_\alpha]$ e $J_\beta = [b_{\beta-1}, b_\beta]$. Ordiniamo le coppie con (α, β) come segue:

$$(1, 1) < (2, 1) < \dots < (q, 1) < (1, 2) < (2, 2) < \dots < (q, 2) < \dots < (1, r) < (2, r) < \dots < (q, r).$$

Vogliamo dimostrare per induzione che: *per ogni $(\alpha, \beta) = (1, 1), (2, 1), \dots, (q, r)$ esiste un sollevamento*

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} : L \cup \bigcup_{(\gamma, \delta) \leq (\alpha, \beta)} (I_\gamma \times J_\delta) \rightarrow \tilde{X}$$

di F ristretta all'insieme $L \cup \bigcup_{(\gamma, \delta) \leq (\alpha, \beta)} (I_\gamma \times J_\delta)$ tale che $\tilde{F}_{\alpha\beta}(0, 0) = \tilde{x}_0$. Il sollevamento desiderato si otterrà allora per $(\alpha, \beta) = (q, r)$ cioè $\tilde{F} = \tilde{F}_{qr}$.

DISEGNO

Sia U_{11} un aperto banalizzante per p tale che $F(I_1 \times J_1) \subset U_{11}$ e sia $L_{11} = L \cap (I_1 \times J_1)$. Dato che L_{11} è connesso esisterà un aperto \tilde{U}_{11} di \tilde{X} tale che $\tilde{F}_L(L_{11}) \subset \tilde{U}_{11}$, $p|_{\tilde{U}_{11}} : \tilde{U}_{11} \rightarrow U_{11}$ sia un omeomorfismo e $p(\tilde{F}_L(t, s)) = F(t, s)$ per ogni $(t, s) \in L_{11}$. La base dell'induzione si ottiene definendo $\tilde{F}_{11} : L \cup (I_1 \times J_1) \rightarrow \tilde{X}$ come:

$$\tilde{F}_{11}(t, s) = \begin{cases} \tilde{F}_L(t, s) & \text{se } (t, s) \in L \\ p|_{\tilde{U}_{11}}^{-1}(F(t, s)) & \text{se } (t, s) \in I_1 \times J_1 \end{cases}$$

che è continua per il lemma di incollamento.

Supponiamo di aver definito il sollevamento

$$\tilde{F}_{q-1, r} : L \cup \bigcup_{(\gamma, \delta) \leq (q-1, r)} (I_\gamma \times J_\delta) \rightarrow \tilde{X}$$

di F ristretta a all'insieme $L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (q-1,r)} (I_\gamma \times J_\delta)$ tale che $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$. Sia U_{qr} un aperto banalizzante per p tale che $F(I_q \times J_r) \subset U_{qr}$ e sia

$$L_{qr} = \left(L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (q-1,r)} (I_\gamma \times J_\delta) \right) \cap (I_q \times J_r).$$

Per la connessione di L_{qr} esisterà allora un aperto $\tilde{U}_{qr} \subset \tilde{X}$ tale che $\tilde{F}_{q-1,r}(L_{qr}) \subset \tilde{U}_{qr}$, $p|_{\tilde{U}_{qr}} : \tilde{U}_{qr} \rightarrow U_{qr}$ sia un omeomorfismo e $p(\tilde{F}_{q-1,r}(t,s)) = F(t,s)$ per ogni $(t,s) \in L_{qr}$. Definiamo allora il sollevamento

$$\tilde{F}_{qr} : \left(L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (q-1,r)} (I_\gamma \times J_\delta) \right) \cup (I_q \times J_r) = I \times I \rightarrow \tilde{X}$$

come:

$$\tilde{F}(t,s) = \tilde{F}_{qr}(t,s) = \begin{cases} \tilde{F}_{q-1,r}(t,s) & \text{se } (t,s) \in L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (q-1,r)} (I_\gamma \times J_\delta) \\ p|_{\tilde{U}_{qr}}^{-1}(F(t,s)) & \text{se } (t,s) \in I_q \times J_r \end{cases}$$

che è continuo per il lemma di incollamento.

Supponiamo, infine che F sia un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra gli archi $I \rightarrow F(t,0)$ e $I \rightarrow F(t,1)$ tale che $F(0,0) = F(0,1) = x_0$, $F(1,0) = F(1,1) = x_1$, $F(0,s) = x_0$ e $F(1,s) = x_1$ per ogni $s \in I$. Segue che $F(\{0\} \times I) = p(\tilde{F}(\{0\} \times I)) = x_0$ (risp. $F(\{1\} \times I) = p(\tilde{F}(\{1\} \times I)) = x_1$). Quindi $\tilde{F}(\{0\} \times I) \in p^{-1}(x_0)$ (risp. $\tilde{F}(\{1\} \times I) \in p^{-1}(x_1)$). Essendo la fibra $p^{-1}(x_0)$ (risp. $p^{-1}(x_1)$) discreta e $\tilde{F}(\{0\} \times I)$ (risp. $\tilde{F}(\{1\} \times I)$) connesso segue che $\tilde{F}(\{0\} \times I)$ (risp. $\tilde{F}(\{1\} \times I)$) è costituito da un solo punto \tilde{x}_0 tale che $p(\tilde{x}_0) = x_0$ (risp. \tilde{x}_1 tale che $p(\tilde{x}_1) = x_1$). Quindi \tilde{F} è un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra gli archi $I \rightarrow \tilde{F}(t,0)$ e $I \rightarrow \tilde{F}(t,1)$ (cioè $\tilde{F}(0,0) = \tilde{F}(0,1) = \tilde{x}_0$, $\tilde{F}(1,0) = \tilde{F}(1,1) = \tilde{x}_1$, $\tilde{F}(0,s) = \tilde{x}_0$ e $\tilde{F}(1,s) = \tilde{x}_1$ per ogni $s \in I$). \square

Corollario 3.3.5 *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tale che $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Siano $f : I \rightarrow X$ e $g : I \rightarrow X$ due archi tali che $f(0) = g(0) = x_0$ e siano $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ e $\tilde{g} : I \rightarrow \tilde{X}$ i due (unici) sollevamenti di f e g tali che $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = \tilde{x}_0$. Se $f \sim_{\{0,1\}} g$ allora $\tilde{f} \sim_{\{0,1\}} \tilde{g}$, in particolare $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.*

Dimostrazione: Sia $F : I \times I \rightarrow X$, $F(0,0) = x_0$, un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra f e g e sia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$, $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$, l'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra gli archi $I \rightarrow \tilde{F}(t,0)$ e $I \rightarrow \tilde{F}(t,1)$ la cui esistenza segue dalla Proposizione 3.3.4. Quindi $\tilde{F}(0,s) = \tilde{x}_0$ e $\tilde{F}(1,s) = \tilde{x}_1$, per ogni $s \in I$, dove \tilde{x}_1 è un punto sulla fibra di $x_1 = f(1) = g(1)$. Osserviamo che $I \rightarrow \tilde{F}(t,0)$ (risp. $I \rightarrow \tilde{F}(t,1)$) è un arco in \tilde{X} tale che $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$ (risp. $\tilde{F}(0,1) = \tilde{x}_0$) e $p(\tilde{F}(t,0)) = F(t,0) = f(t)$ (risp.

$p(\tilde{F}(t, 1)) = F(t, 1) = g(t)$). Segue allora dalla Proposizione 3.3.2 che $\tilde{F}(t, 0) = \tilde{f}(t)$ e $\tilde{F}(t, 1) = \tilde{g}(t)$ e in particolare $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1) = \tilde{F}(1, 0) = \tilde{F}(1, 1) = \tilde{x}_1$. \square

Teorema 3.3.6 *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Se \tilde{X} è connesso per archi e X è semplicemente connesso allora p è un omeomorfismo.*

Dimostrazione: Per il Corollario 3.2.3 possiamo limitarci a dimostrare che p è iniettiva. Siano dunque \tilde{x}_0 e \tilde{x}_1 due punti di \tilde{X} tali che $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1) = x_0 \in X$. Sia $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ un arco tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ e $\tilde{f}(1) = \tilde{x}_1$. Allora $f = p \circ \tilde{f}$ è un laccio di base x_0 . Essendo X semplicemente connesso $f \sim_{\{0,1\}} \epsilon_{x_0}$. Ma i sollevamenti di f e ϵ_{x_0} che iniziano in \tilde{x}_0 sono rispettivamente \tilde{f} e $\epsilon_{\tilde{x}_0}$ e per il corollario precedente

$$\tilde{x}_1 = \tilde{f}(1) = \epsilon_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0$$

e quindi p è iniettiva. \square

Sezioni di un rivestimento

Concludiamo questo paragrafo con un cenno al concetto di sezioni di un rivestimento. Consideriamo un rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ e sia $U \subset X$ un sottoinsieme di X . Una *sezione continua* di p su U è un'applicazione continua $s : U \rightarrow p^{-1}(U)$ tale che $p(s(u)) = u$ per ogni $u \in U$. In generale non esistono sezioni continue di un dato rivestimento su un insieme arbitrario. Per esempio se $U = X$ l'esistenza di una sezione continua di p su X non sempre è vera. Se però U è un aperto banalizzante abbiamo il seguente risultato che tra l'altro mostra come i rivestimenti siano un sottoinsieme di una classe più ampia di oggetti matematici chiamati *fibrati* che lo studente incontrerà nei corsi di geometria differenziale.

Teorema 3.3.7 *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Allora per ogni aperto banalizzante $U \subset X$ e per ogni $\tilde{x} \in p^{-1}(U)$ esiste un'unica sezione continua $s_{\tilde{x}} : U \rightarrow p^{-1}(U)$ di p su U tale che $s_{\tilde{x}}(p(\tilde{x})) = \tilde{x}$. Conseguentemente, per ogni $x \in X$ ed ogni aperto banalizzante $U \subset X$ tale che $x \in U$, esiste un omeomorfismo*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times p^{-1}(x) \\ p \downarrow & \swarrow p_1 & \\ U & & \end{array}$$

dove p_1 denota la proiezione sul primo fattore.

Dimostrazione: lasciata come esercizio allo studente (non farà parte degli argomenti d'esame). \square

3.4 Esercizi

Esercizio 3.1 Siano $p : \tilde{X} \rightarrow X$ e $q : X \rightarrow Y$ due rivestimenti. Supponiamo che la fibra $q^{-1}(y)$ sia finita per ogni $y \in Y$. Dimostrare che $q \circ p : \tilde{X} \rightarrow Y$ è un rivestimento.

Esercizio 3.2 Siano $p : \tilde{X} \rightarrow X$ e $q : X \rightarrow Y$ due rivestimenti. Supponiamo che ogni punto $y \in Y$ possieda un intorno aperto semplicemente connesso. Dimostrare che $q \circ p : \tilde{X} \rightarrow Y$ è un rivestimento.

Esercizio 3.3 Siano $p : X \rightarrow Y$ e $q : Y \rightarrow Z$ applicazioni continue. Dimostrare che se $q \circ p$ e q (resp. p) sono rivestimenti allora p (resp. q) è un rivestimento.

Esercizio 3.4 Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento tra due spazi topologici \tilde{X} e X e sia $X_0 \subset X$ un sottoinsieme di X . Sia $\tilde{X}_0 = p^{-1}(X_0)$. Si dimostri che la restrizione di p a \tilde{X}_0 , $p|_{\tilde{X}_0} : \tilde{X}_0 \rightarrow X_0$, è ancora un rivestimento.

Esercizio 3.5 Siano $p : \tilde{X} \rightarrow X$ e $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ due rivestimenti. Si dimostri che

$$p \times q : \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y, (\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto (p(\tilde{x}), q(\tilde{y}))$$

è un rivestimento.

Esercizio 3.6 Usare l'esercizio precedente per costruire un rivestimento $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$. Dedurre l'esistenza di un rivestimento tra il reticolo unitario standard di \mathbb{R}^2 e la figura ∞ . (individuare la figura ∞ nel toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ e usare l'Esercizio 3.4).

Esercizio 3.7 Sia n un intero. Dimostrare che l'applicazione $p : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$ è un rivestimento (qui stiamo pensando a $S^1 \subset \mathbb{C}$).

Esercizio 3.8 Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Supponiamo che X sia di Hausdorff e localmente euclideo allora anche \tilde{X} è di Hausdorff e localmente euclideo. Se X è compatto e la fibra $p^{-1}(x)$ è finita per ogni $x \in X$ allora anche \tilde{X} è compatto.

Esercizio 3.9 Dimostrare che il gruppo fondamentale di S^1 non è banale. (Suggerimento: usare il Teorema 3.3.6).

Esercizi per i più audaci

Esercizio 3.10 Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento tra due spazi topologici \tilde{X} e X e sia $Y \subset \tilde{X}$ una componente connessa di \tilde{X} . Se X è connesso e localmente connesso allora la restrizione $p|_Y : Y \rightarrow X$ è un rivestimento.

Esercizio 3.11 (pull-back di un rivestimento) Siano \tilde{X} , X e Y tre spazi topologici, $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e $f : Y \rightarrow X$ un'applicazione continua. Sia

$$\tilde{Y} = \{(\tilde{x}, y) \in \tilde{X} \times Y \mid p(\tilde{x}) = f(y)\}.$$

Si dimostri che l'applicazione $q : \tilde{Y} \rightarrow Y, (\tilde{x}, y) \mapsto y$ è un rivestimento.

Esercizio 3.12 Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un omeomorfismo locale tra due varietà topologiche \tilde{X} e X . Assumiamo che p sia propria (cioè $p^{-1}(K)$ è compatto per ogni K compatto di X). Dimostrare che p è un rivestimento.

Esercizio 3.13 Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un'applicazione continua. Diremo che p ha la *proprietà del sollevamento degli archi* se per ogni arco $f : I \rightarrow X$ esiste un arco $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ tale che $p \circ \tilde{f} = f$. Dimostrare che se $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è un omeomorfismo locale con la proprietà del sollevamento degli archi e se \tilde{X} è connesso per archi e X semplicemente connesso allora p è un omeomorfismo. (Suggerimento: dimostrare che le Proposizioni 3.3.2 e 3.3.4 (e conseguentemente il Teorema 3.3.6) continuano a valere quando p è un omeomorfismo locale con la *proprietà del sollevamento degli archi*).

Esercizio 3.14 Dimostrare che se $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è un omeomorfismo locale con la proprietà del sollevamento degli archi e se \tilde{X} è localmente connesso per archi e X localmente semplicemente connesso allora p è un rivestimento. (Suggerimento: usare l'Esercizio 3.13).

Capitolo 4

Alcune applicazioni della teoria dei rivestimenti

4.1 Il teorema di Borsuk–Ulam

Teorema 4.1.1 (*Borsuk–Ulam per $n = 2$*) *Non esistono applicazioni continue $f : S^2 \rightarrow S^1$ che conservano in punti antipodali cioè $f(-y) = -f(y)$ per ogni $y \in S^2$.*

Osservazione 4.1.2 Si può dimostrare che non esistano applicazioni continue $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ che conservano in punti antipodali per ogni $n \geq 1$. Per $n = 1$ segue immediatamente dal fatto che S^1 è connesso mentre $S^0 = \{\pm 1\}$ non lo è. Per $n \geq 3$ si utilizza la teoria dell'omologia (cf. Esercizio 4.21).

Per dimostrare il teorema abbiamo bisogno di due lemmi. Il primo sfrutta le proprietà dei rivestimenti fin qui sviluppate. Il secondo usa solo la connessione di S^2 .

Lemma 4.1.3 *Siano $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e $f : S^2 \rightarrow X$ un'applicazione continua. Sia $y_0 \in S^2$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(f(y_0))$. Allora esiste un unico sollevamento $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \tilde{X}$ tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.*

Dimostrazione: L'unicità del sollevamento \tilde{f} segue dalla connessione delle sfere S^2 e dalla Proposizione 3.3.1. Possiamo supporre che $y_0 = (0, 0, 1)$. Siccome $I^2 \cong D^2$ allora per il Corollario B.0.13 dell'Appendice B esiste un'identificazione $q : I^2 \rightarrow S^2$ tale che $q(\partial I^2) = y_0$ e $q|_{\text{Int } I^2} : \text{Int } I^2 \rightarrow S^2 \setminus \{y_0\}$ sia un omeomorfismo. Per la Proposizione 3.3.4 esiste un sollevamento di $f \circ q : I^2 \rightarrow X$ cioè un'applicazione continua $h : I^2 \rightarrow \tilde{X}$ tale che $h(0, 0) = \tilde{x}_0$ e $p \circ h = f \circ q$.

$$\begin{array}{ccc} I^2 & \xrightarrow{h} & \tilde{X} \\ q \downarrow & \searrow f \circ q & \downarrow p \\ S^2 & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Segue che

$$p(h(\partial I^2)) = f(q(\partial I^2)) = f(y_0)$$

e quindi $h(\partial I^2) \in p^{-1}(f(y_0))$. Ma la fibra di $f(y_0)$ è discreta e quindi essendo ∂I^2 connesso e h continua segue che $h(\partial I^2) = \tilde{x}_0$. Segue allora che h scende al quoziente rispetto all'identificazione q cioè se $q(t_1, s_1) = q(t_2, s_2)$ allora $h(t_1, s_1) = h(t_2, s_2)$. Esiste quindi un'unica applicazione $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \tilde{X}$ continua (per la proprietà universale del quoziente) tale che $\tilde{f} \circ q = h$.

$$\begin{array}{ccc} I^2 & \xrightarrow{h} & \tilde{X} \\ q \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ S^2 & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Allora

$$\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}(q(0, 0)) = h(0, 0) = \tilde{x}_0.$$

Inoltre $p \circ \tilde{f} \circ q = p \circ h = f \circ q$ e siccome q è suriettiva allora $p \circ \tilde{f} = f$; questo conclude la dimostrazione del lemma. \square

Osservazione 4.1.4 Dimostreremo nel Capitolo 9 che il lemma precedente vale anche per S^n con $n \geq 2$ e in effetti per ogni varietà topologica semplicemente connessa.

Lemma 4.1.5 *Sia $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione continua. Allora esiste un punto $y_0 \in S^2$ tale che $f(y_0) = f(-y_0)$.*

Dimostrazione: Sia $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione continua definita da

$$g(y) := f(y) - f(-y).$$

Osserviamo che $g(-y) = -g(y)$ per ogni $y \in S^2$. Dal momento che S^2 è connesso allora $g(S^2)$ è un sottoinsieme connesso di \mathbb{R} e quindi $g(S^2)$ è un punto ovvero un intervallo di \mathbb{R} . Se $g(S^2)$ è un punto allora g è l'applicazione nulla. Infatti $g(y) = g(-y) = -g(y)$ per ogni $y \in S^2$ implica che $g(y) = 0$ per ogni $y \in S^2$. Quindi in questo caso $f(y) = f(-y)$ per ogni $y \in S^2$. Se invece $g(S^2)$ è un intervallo (diverso da un punto) possiamo trovare $y_1 \in S^2$ tale che $g(y_1) \neq g(-y_1)$. Ma essendo $g(S^2)$ convesso il punto

$$\frac{1}{2}(g(y_1) + g(-y_1)) = \frac{1}{2}(g(y_1) - g(y_1)) = 0$$

appartiene ancora a $g(S^2)$. Quindi esiste $y_0 \in S^2$ tale che $g(y_0) = 0$, ossia $f(y_0) = f(-y_0)$. \square

Osservazione 4.1.6 Il Lemma 4.1.5 si estende (con una dimostrazione analoga) a tutte le applicazioni continue da S^n , $n \geq 1$ a \mathbb{R} .

Dimostrazione del Teorema 4.1.1 Sia $f : S^2 \rightarrow S^1$ un'applicazione continua. Consideriamo il rivestimento $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ descritto nell'Esempio 3.1.5 del Capitolo 3. Per il Lemma 4.1.3 esiste un'applicazione continua $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $e \circ \tilde{f} = f$. Per il Lemma 4.1.5 esiste $y_0 \in S^2$ tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}(-y_0)$. Segue che $f(y_0) = e(\tilde{f}(y_0)) = e(\tilde{f}(-y_0)) = f(-y_0)$ e quindi $f(-y_0) \neq -f(y_0)$ (in quanto $f(y_0) \in S^1$). Quindi l'applicazione f non conserva i punti antipodali. \square

Corollario 4.1.7 Sia $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione continua tale che $f(-y) = -f(y)$ per ogni $y \in S^2$. Allora esiste $y_0 \in S^2$ tale che $f(y_0) = 0$.

Dimostrazione: Se per assurdo $f(y) \neq 0$ per ogni $y \in S^2$ allora l'applicazione continua $g : S^2 \rightarrow S^1$ definita da

$$g(y) := \frac{f(y)}{\|f(y)\|}, y \in S^2$$

è tale che $g(-y) = -g(y)$ per ogni $y \in S^2$, in contrasto con il Teorema di 4.1.1. \square

Corollario 4.1.8 Sia $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione continua. Allora esiste $y_0 \in S^2$ tale che $f(y_0) = f(-y_0)$. In particolare f non è iniettiva.

Dimostrazione: Se per assurdo $f(y) \neq f(-y)$ per ogni $y \in S^2$. Allora l'applicazione continua $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$g(y) := f(y) - f(-y), y \in S^2$$

soddisfa $g(-y) = -g(y)$. Segue quindi dal Corollario 4.1.7 che esiste $y_0 \in S^2$ tale che $g(y_0) = 0$ e quindi $f(y_0) = f(-y_0)$. \square

Osservazione 4.1.9 Il corollario ha la seguente interpretazione meteorologica: *in ogni istante, esistono sulla superficie terrestre due punti antipodali con la stessa temperatura e la stessa pressione atmosferica.*

Corollario 4.1.10 La sfera S^2 non è omeomorfa a nessun sottospazio di \mathbb{R}^2 .

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che esista un S sottospazio di \mathbb{R}^2 e un omeomorfismo $g : S^2 \rightarrow S$. Se $i : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'inclusione di S in \mathbb{R}^2 allora $f = i \circ g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un'applicazione continua e iniettiva, in contrasto con il Corollario 4.1.8. \square

Corollario 4.1.11 *Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto. Allora ogni applicazione continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ non è iniettiva.*

Dimostrazione: Supponiamo che $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ sia un'applicazione continua e iniettiva. Siccome A è aperto in \mathbb{R}^3 contiene un sottospazio omeomorfo a S^2 . Allora l'applicazione $f|_{S^2} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un'applicazione continua e iniettiva in contrasto con il Corollario 4.1.8. \square

Corollario 4.1.12 *Dati tre sottoinsiemi limitati e misurabili di \mathbb{R}^3 esiste un piano di \mathbb{R}^3 che divide ognuno dei tre insiemi in due insiemi dello stesso volume.*

Dimostrazione: Siano A, B e C i tre insiemi. Per ogni $y \in S^2$ consideriamo il piano P_y perpendicolare al vettore $\vec{0y}$ e che divide A in due insiemi dello stesso volume (questo piano esiste per il teorema del valor medio e perché il volume è una funzione continua). Indichiamo, inoltre con P_y^+ e P_y^- i due semispazi nei quali il piano P_y divide lo spazio.

Dato $y \in S^2$ siano $B^+(y) \subset P_y^+$ e $B^-(y) \subset P_y^-$ (risp. $C^+(y) \subset P_y^+$ e $C^-(y) \subset P_y^-$) i sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 nei quali risulta suddiviso B (risp. C) dal piano P_y . Siano inoltre $\text{vol}(B^+(y))$ e $\text{vol}(B^-(y))$ (risp. $\text{vol}(C^+(y))$ e $\text{vol}(C^-(y))$) i loro volumi. Consideriamo l'applicazione continua

$$f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, y \mapsto (\text{vol}(B^+(y)) - \text{vol}(B^-(y)), \text{vol}(C^+(y)) - \text{vol}(C^-(y))).$$

Per costruzione $f(-y) = -f(y)$ e quindi per il Corollario 4.1.7 esiste $y_0 \in S^2$ tale che $f(y_0) = 0$ ossia $\text{vol}(B^+(y_0)) = \text{vol}(B^-(y_0))$ e $\text{vol}(C^+(y_0)) = \text{vol}(C^-(y_0))$. Quindi P_{y_0} è il piano che divide ognuno dei tre insiemi A, B e C in due insiemi dello stesso volume. \square

Osservazione 4.1.13 Il corollario prende anche il nome dal problema della bisezione del volume di un panino al prosciutto cioè due fette di pane e una fetta di prosciutto. Il corollario mostra che è possibile dividere un panino al prosciutto con un solo taglio netto in modo che la fetta di pane inferiore, la fetta di prosciutto e la fetta di pane superiore siano simultaneamente tagliate esattamente a metà. Osserviamo che gli insiemi A, B e C non devono essere necessariamente connessi.

4.2 Il gruppo fondamentale del cerchio

In questo paragrafo calcoleremo il gruppo fondamentale delle curve topologiche cioè le varietà topologiche di dimensione uno. Non è difficile vedere (noi non lo faremo) che le curve topologiche connesse sono a meno di omeomorfismi la retta reale \mathbb{R} e il cerchio unitario S^1 . Il gruppo fondamentale di \mathbb{R} è quello banale. Quindi ci resta da calcolare il gruppo fondamentale di S^1 . Fissiamo il punto base $(1, 0)$ che in notazione complessa è il punto 1. In questo paragrafo dimostreremo il seguente:

Teorema 4.2.1 $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

L'idea che sta alla base di questo isomorfismo di gruppi è che ogni arco chiuso $f : I \rightarrow S^1$ di base 1 “gira” un certo numero di volte su S^1 . Questo numero intero si può pensare ottenuto euristicamente come segue: ogni volta che abbiamo compiuto un giro completo in senso antiorario registriamo un valore 1; se invece si è compiuto un giro completo ma in senso orario registriamo un valore -1 . La somma di questi valori è l'intero cercato. Per dimostrare che effettivamente $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ bisogna dimostrare che se f e g sono due archi chiusi di base 1 tali che $f \sim_{\{0,1\}} g$ allora l'intero associato a f è lo stesso dell'intero associato a g e che questo avviene tramite un isomorfismo di gruppi.

Per ottenere un'applicazione che a $[f] \in \pi_1(S^1, 1)$ associa il numero intero che tiene conto di quante volte $[f]$ gira intorno a 1 usiamo il rivestimento $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dell'Esempio 3.1.5 del Capitolo 3 e i risultati sul sollevamento dei cammini come segue. Dato $[f] \in \pi_1(S^1, 1)$ sia $f \in [f]$ e sia $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ l'unico sollevamento di f tale che $\tilde{f}(0) = 0$. Possiamo definire allora

$$\Phi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}, [f] \mapsto \Phi([f]) = \tilde{f}(1) \quad (4.1)$$

Segue dal Corollario 3.3.5 del Capitolo 3 che Φ è ben definita.

Per dimostrare il Teorema 4.2.1 faremo vedere che Φ è un isomorfismo di gruppi.

Per dimostrare che Φ è un omomorfismo introduciamo qualche notazione. Dato un laccio f in S^1 di base 1 e $a \in \mathbb{Z} = e^{-1}(1)$ denotiamo con $\ell_a(f)$ l'unico sollevamento di f che inizia in 0, cioè $e \circ \ell_a(f) = f$ e $\ell_a(f)(0) = a$. Ovviamente se \tilde{f} è il sollevamento di f che inizia in 0 allora $\ell_0(f) = \tilde{f}$ e quindi $\Phi([f]) = \ell_0(f)(1)$. Inoltre

$$\ell_a(f) = \ell_0(f) + \epsilon_a, \quad (4.2)$$

dove $\epsilon_a : I \rightarrow \mathbb{R}$ è l'arco costante $\epsilon_a(t) = a$. Infatti

$$\ell_a(f)(0) = \ell_0(f)(0) + \epsilon_a(0) = 0 + a = a$$

e

$$e(\ell_0(f) + a) = e(\ell_0(f)) + e(a) = f + \epsilon_0 = f$$

e la (4.2) segue dall'unicità del sollevamento di archi con lo stesso punto iniziale (cf. Proposizione 3.3.2). Inoltre, se f e g sono due lacci in S^1 di base 1 e $a \in \mathbb{Z} = e^{-1}(1)$ vale la seguente formula che lega il sollevamento di due lacci con la loro concatenazione $f \cdot g$:

$$\ell_a(f \cdot g) = \ell_a(f) \cdot \ell_b(g), \quad b = \ell_a(f)(1) = \ell_0(f)(1) + a. \quad (4.3)$$

La formula segue ancora una volta dall'unicità del sollevamento degli archi. Infatti

$$(\ell_a(f) \cdot \ell_b(g))(0) = \ell_a(f)(0) = a$$

e

$$e \circ (\ell_a(f) \cdot \ell_b(g)) = (e \circ \ell_a(f)) \cdot (e \circ \ell_b(g)) = f \cdot g.$$

Possiamo ora dimostrare che Φ è un omomorfismo. Dati $[f], [g] \in \pi_1(S^1, 1)$ allora, per la (4.3),

$$\Phi([f] \cdot [g]) = \Phi([f \cdot g]) = \ell_0(f \cdot g)(1) = (\ell_0(f) \cdot \ell_b(g))(1) = \ell_b(g)(1),$$

dove $b = \ell_0(f)(1)$. D'altra parte, per la (4.2),

$$\ell_b(g)(1) = \ell_0(g)(1) + b = \ell_0(g)(1) + \ell_0(f)(1) = \Phi([f]) + \Phi([g]).$$

Mostriamo ora che Φ è suriettivo. Sia k intero e $f : I \rightarrow S^1, t \mapsto e^{ik\pi t}$. Sia $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto kt$. Allora $f = e \circ \tilde{f}$ è un laccio di base 1 e il suo (unico sollevamento) che inizia in 0 è esattamente \tilde{f} . Segue che $\Phi([f]) = \tilde{f}(1) = k$.

Infine dimostriamo l'iniettività di Φ . Sia $[f] \in \pi_1(S^1, 1)$ tale che $\Phi([f]) = 0$. Allora, per definizione di Φ , $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = 0$. Essendo \mathbb{R} semplicemente connesso esiste un'omotopia $F : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ relativa a $\{0, 1\}$ tale che $\tilde{f} \sim_{\{0,1\}, F} \epsilon_0$. Allora $f = (e \circ \tilde{f}) \sim_{\{0,1\}, F} (e \circ \epsilon_0) = \epsilon_1$, cioè $[f] = [\epsilon_1]$. Questo mostra che $[f]$ appartiene al nucleo di Φ e che quindi Φ è iniettiva e conclude la dimostrazione del Teorema 4.2.1.

Corollario 4.2.2 *Non esiste una retrazione da D^2 a S^1 .*

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che esista una retrazione $r : D^2 \rightarrow S^1$ cioè un'applicazione continua tale che $r \circ i = \text{id}_{S^1}$ dove $i : S^1 \rightarrow D^2$ denota l'inclusione. Segue dalle proprietà degli omomorfismi indotti (cf. Teorema 2.3.1) che

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \text{id}_{\pi_1(S^1, 1)}$$

In particolare $i_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(D^2, 1)$ dev'essere iniettiva. Ma questo è assurdo in quanto non può esistere un'applicazione iniettiva da $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ a $\pi_1(D^2, 1) = \{1\}$. \square

Corollario 4.2.3 *L'applicazione identità $\text{id}_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$ non è omotopa ad un'applicazione costante.*

Dimostrazione: Se $\text{id}_{S^1} \sim \epsilon_x$, per qualche $x \in S^1$, allora, per la Proposizione 1.2.6 del Capitolo 1, dovrebbe esistere una retrazione $r : D^2 \rightarrow S^1$ in contrasto con il Corollario 4.2.2. \square

Corollario 4.2.4 *Il toro n -dimensionale \mathbb{T}^n ha gruppo fondamentale dato dal prodotto diretto di n copie di \mathbb{Z} . Conseguentemente \mathbb{T}^n e la sfera S^n non sono omotopicamente equivalenti per $n \geq 2$.*

Dimostrazione: segue dal Teorema 4.2.1, dal Teorema 2.6.1 e dal Teorema 2.5.1. \square

Corollario 4.2.5 *(il teorema fondamentale dell'algebra) Ogni polinomio di grado $k \geq 1$ a coefficienti in \mathbb{C} ha una radice in \mathbb{C}*

Dimostrazione: Senza ledere alla generalità della dimostrazione possiamo assumere che il coefficiente che moltiplica z^k sia uguale a 1 cioè il polinomio sia della forma

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-1} z^{k-1} + z^k.$$

Supponiamo per assurdo che p non abbia radici, cioè $p(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora l'applicazione

$$G : I \times [0, +\infty) \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$$

definita da

$$G(t, r) = \frac{p(re^{2\pi i t})}{|p(re^{2\pi i t})|} \frac{|p(r)|}{p(r)}$$

è continua. Consideriamo l'applicazione $F : I \times I \rightarrow S^1$ definita da:

$$F(t, s) = \begin{cases} G(t, \frac{s}{1-s}) & \text{se } t \in I, 0 \leq s < 1 \\ e^{2\pi i k t} & \text{se } t \in I, s = 1. \end{cases}$$

Non è difficile vedere che F è continua. Infatti, un calcolo diretto mostra che

$$\lim_{s \rightarrow 1^{-1}} F(t, s) = \lim_{s \rightarrow 1^{-1}} G(t, \frac{s}{1-s}) = \lim_{r \rightarrow +\infty} G(t, r) = 1$$

Inoltre $F(t, 0) = 1$, $F(t, 1) = e^{2\pi ikt}$, $F(0, s) = F(1, s) = 1$, per ogni $s \in I$. Quindi F definisce un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra il laccio costante ϵ_1 e il laccio $f(t) = e^{2\pi ikt}$. Considerato allora l'isomorfismo $\Phi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ del Teorema 4.2.1 si ha allora che $\Phi([\epsilon_1]) = \Phi([f])$. D'altra parte $\Phi([\epsilon_1]) \neq \Phi([f])$ in quanto $\Phi([\epsilon_1]) = 0$ e $\Phi([f]) = k$ e $k \geq 1$. Questa contraddizione conclude la dimostrazione. \square

Corollario 4.2.6 (*il teorema del punto fisso di Brouwer*) Sia $f : D^2 \rightarrow D^2$ un'applicazione continua. Allora f ha un punto fisso, cioè esiste $x_0 \in D^2$ tale che $f(x_0) = x_0$.

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che $f(x) \neq x$ per ogni $x \in D^2$. Allora possiamo definire un'applicazione $r : D^2 \rightarrow S^1$ come l'intersezione della semiretta affine che va da $f(x)$ a x con la frontiera di D^2 (cioè S^1).

DISEGNO

Non è difficile scrivere l'espressione analitica di r e verificare che è continua. Infatti la semiretta descritta ha equazione parametrica:

$$s(x) = x + tg(x), \quad t \geq 0, \quad g(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}$$

L'intersezione di tale semiretta con S^1 si ottiene per quei valori di t tali che $\|s(x)\|^2 = 1$ cioè:

$$t^2 + 2tx \cdot g(x) + \|x\|^2 = 1$$

dove “ \cdot ” denota il prodotto scalare euclideo di \mathbb{R}^2 . L'unica soluzione positiva di quest'equazione è:

$$t = -x \cdot g(x) + \sqrt{(x \cdot g(x))^2 + 1 - \|x\|^2}$$

e quindi l'espressione analitica di r diventa:

$$r(x) = x + \left(\sqrt{(x \cdot g(x))^2 + 1 - \|x\|^2} - x \cdot g(x) \right) g(x),$$

dalla quale si vede che r è continua. Osserviamo infine che r è un retrazione da D^2 a S^1 (come si verifica facilmente dalla sua espressione analitica o dalla sua costruzione geometrica). Questo è in contrasto con il Corollario 4.2.2 e mostra che deve esistere un punto fisso per f . \square

Corollario 4.2.7 (*Teorema di Frobenius*) Sia A un matrice 3×3 con entrate (strettamente) positive. Allora A ammette un autovalore reale positivo.

Dimostrazione: Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che rappresenta A rispetto alla base canonica, $T(p) = A(x, y, z)^T$, dove (x, y, z) sono le coordinate di p rispetto alla base canonica. Consideriamo il sottospazio di \mathbb{R}^3 ottenuto dall'intersezione di S^2 con il primo ottante e cioè:

$$B = S^2 \cap \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Si verifica immediatamente che B è omeomorfo a D^2 (per esempio B è omeomorfo al triangolo del piano $z = 0$ sul quale si proietta). Osserviamo che, per le ipotesi sulla matrice A , dato $p \in B$, $T(p) \in \mathbb{R}^3$ è non nullo e tutte le sue componenti sono maggiori o uguali a zero. Resta così definita un'applicazione continua $p \mapsto \frac{T(p)}{\|T(p)\|}$ da B in B . Per il Teorema di Brouwer esiste $p_0 \in B$ tale che $\frac{T(p_0)}{\|T(p_0)\|} = p_0$, o equivalentemente $T(p_0) = \|T(p_0)\|p_0$ e quindi $\|T(p_0)\|$ è un autovalore positivo di A . \square

Osservazione 4.2.8 Il Teorema del punto fisso di Brouwer può essere generalizzato al disco D^n , per ogni n , usando la teoria dell'omologia (si veda anche il punto 6 s dell'Esercizio 4.21). Una dimostrazione geniale di questo teorema che fa uso del teorema delle funzione inversa è stata ottenuta da John Milnor in [14].

4.3 Il gruppo fondamentale del proiettivo reale

La tecniche usata nel calcolo del gruppo fondamentale di S^1 possono essere usate per calcolare il gruppo fondamentale del proiettivo reale \mathbb{RP}^n n -dimensionale (vedi corso di topologia generale). Per $n = 1$, $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$. Quindi possiamo assumere $n \geq 2$. Per calcolare il gruppo fondamentale dimostriamo dapprima una proprietà generale sui rivestimenti che generalizza il Teorema 3.3.6. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, sia $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ un punto fissato delle fibra di x_0 . Analogamente a ciò fatto per il calcolo del gruppo fondamentale di S^1 possiamo definire un'applicazione

$$\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0), [f] \mapsto \tilde{f}(1) \quad (4.4)$$

dove $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ è l'unico sollevamento di f tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$. Segue dal Corollario 3.3.5 del Capitolo 3 che Φ è un'applicazione ben definita. Il risultato del quale abbiamo bisogno è il seguente:

Teorema 4.3.1 *Se \tilde{X} è connesso per archi allora Φ è suriettiva. Se inoltre \tilde{X} è semplicemente connesso allora Φ è una bigezione.*

Dimostrazione: Dato $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ sia $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ un arco che unisce $\tilde{x}_0 = \tilde{f}(0)$ con $\tilde{x}_1 = \tilde{f}(1)$. Allora $f := p \circ \tilde{f} : I \rightarrow X$ è un laccio di base x_0 in X e, per definizione di Φ , $\Phi([f]) = \tilde{f}(1) = x_1$. Questo mostra che Φ è suriettiva. Supponiamo ora che \tilde{X} sia semplicemente connesso. Allora \tilde{X} è connesso per archi e Φ è suriettiva per la prima parte. Per dimostrare che Φ è iniettiva, siano $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ tali che $\Phi([f]) = \Phi([g])$. Equivalentemente $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ dove \tilde{f} e \tilde{g} sono i sollevamenti rispettivamente di f e g tali che $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$. Siccome \tilde{X} è semplicemente connesso $\tilde{f} \sim_{\{0,1\}} \tilde{g}$ tramite un'omotopia \tilde{F} di \tilde{X} . Segue che $f \sim_{\{0,1\}, F} g$ tramite l'omotopia $F := p \circ \tilde{F}$. Quindi Φ è una bigezione. \square

Teorema 4.3.2 *Il gruppo fondamentale di \mathbb{RP}^n , $n \geq 2$, è il gruppo ciclico \mathbb{Z}_2 .*

Dimostrazione: Consideriamo l'identificazione $p : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ che identifica i punti antipodali. Allora p è chiusa per il lemma dell'applicazione chiusa. Inoltre p è un omeomorfismo locale. Infatti per ogni punto $x \in S^n$ sia V un aperto di S^n che contiene x e tale che $V \cap (-V) = \emptyset$. Allora la restrizione $p|_V : V \rightarrow p(V)$ è un omeomorfismo tra V e l'aperto $p(V)$ di \mathbb{RP}^n ($p(V)$ è aperto in quanto $p^{-1}(p(V)) = V \cup (-V)$ aperto di S^n). Segue allora dal Teorema 3.2.4 del Capitolo 3 che p è un rivestimento di grado due. Usando il fatto che S^n è semplicemente connessa e il Teorema 4.3.1 segue che $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$ è un gruppo con due elementi e quindi isomorfo a \mathbb{Z}_2 . \square

Osservazione 4.3.3 Dal Teorema 4.3.2 e dal Corollario 4.2.4 deduciamo che le superfici S^2 , \mathbb{T}^2 e \mathbb{RP}^2 sono topologicamente distinte. Nei prossimi capitoli calcoleremo il gruppo fondamentale di tutte le superfici compatte e connesse.

4.4 Un esempio di gruppo fondamentale non abeliano

Vogliamo mostrare che la figura “otto” $X = C_1 \cup C_2$, dove $C_1 = \{x = (x_1, x_2) \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\}$, $C_2 = \{x = (x_1, x_2) \mid (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1\}$ ha gruppo fondamentale non abeliano. Lo studente è rinviato ai capitoli successivi per il calcolo esplicito del gruppo fondamentale di questo spazio. Consideriamo lo spazio topologico $\tilde{X} = \tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2 \cup \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2$ unione di quattro circonferenze, dove $\tilde{C}_1 = C_1$, $\tilde{C}_2 = C_2$, $\tilde{D}_1 = \{x = (x_1, x_2) \mid (x_1 + 3)^2 + x_2^2 = 1\}$ e $\tilde{D}_2 = \{x = (x_1, x_2) \mid (x_1 - 3)^2 + x_2^2 = 1\}$.

DISEGNO QUATTRO CERCHI CON LE ORIENTAZIONI

Possiamo parametrizzare questi cerchi come:

$$\tilde{C}_1 = \{(\cos(2\pi t) - 1, \sin(2\pi t)) \mid t \in [0, 1]\}, \quad \tilde{C}_2 = \{(\cos 2\pi t + 1, \sin(2\pi t)) \mid t \in [0, 1]\}$$

$$\tilde{D}_1 = \{(\cos 2\pi t + 3, \sin(2\pi t)) \mid t \in [0, 1]\}, \quad \tilde{D}_2 = \{(\cos 2\pi t - 3, \sin(2\pi t)) \mid t \in [0, 1]\}.$$

Consideriamo l'applicazione $p : \tilde{X} \rightarrow X$ definita da:

$$p(\tilde{x}) = \begin{cases} (\cos(4\pi t) - 1, \sin(4\pi t)) & \text{se } \tilde{x} = (\cos 2\pi t - 1, \sin(2\pi t)) \in \tilde{C}_1 \\ (\cos(4\pi t) + 1, \sin(4\pi t)) & \text{se } \tilde{x} = (\cos 2\pi t + 1, \sin(2\pi t)) \in \tilde{C}_2 \\ (\cos(2\pi t) - 1, \sin(2\pi t)) & \text{se } \tilde{x} = (\cos(2\pi t) + 3, \sin(2\pi t)) \in \tilde{D}_1 \\ (\cos(2\pi t) + 1, \sin(2\pi t)) & \text{se } \tilde{x} = (\cos 2\pi t - 3, \sin(2\pi t)) \in \tilde{D}_2 \end{cases}$$

Quella applicazione “avvolge” due volte il cerchio \tilde{C}_1 (risp. \tilde{C}_2) su C_1 (risp. C_2) mentre invia \tilde{D}_1 (risp. \tilde{D}_2) omeomorficamente su C_1 (risp. C_2). I punti $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$ vengono inviati da p in $(0, 0)$. Si verifica immediatamente che p è un omeomorfismo locale. Segue quindi dal Teorema 3.2.4 del Capitolo 3 che p è un rivestimento di grado tre. Consideriamo i due lacci di base $x_0 = (0, 0)$ $f : I \rightarrow X, t \mapsto (\cos 2\pi t - 1, \sin(2\pi t))$ e $g : I \rightarrow X, t \mapsto (\cos 2\pi t + 1, \sin(2\pi t))$ (che parametrizzano rispettivamente C_1 e C_2). Osserviamo che il sollevamento di $f \cdot g$ che inizia in $\tilde{x}_0 = (0, 0)$ termina nel punto $(2, 0)$ mentre il sollevamento di $g \cdot f$ che inizia in $\tilde{x}_0 = (0, 0)$ termina nel punto $(-2, 0)$. Segue allora dal Corollario 3.3.5 che i lacci $f \cdot g$ e $g \cdot f$ di base x_0 non sono omotopicamente equivalenti tramite un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$, ossia $[f] \cdot [g] \neq [g] \cdot [f]$ e quindi il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ non è abeliano.

4.5 Esercizi

Esercizio 4.1 Si dimostrino le affermazioni fatte negli Esempi 1.1.2 e 1.1.6 del Capitolo 1.

Esercizio 4.2 Si dimostri che il nastro di Möbius ha gruppo fondamentale isomorfo a \mathbb{Z} .

Esercizio 4.3 Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e $q : I^2 \rightarrow Y$ una identificazione tale che $q^{-1}(y)$ è connesso per ogni $y \in Y$. Allora ogni applicazione continua $f : Y \rightarrow X$ possiede un sollevamento (Suggerimento: imitare la dimostrazione del Lemma 4.1.3).

Esercizio 4.4 Dimostrare che per ogni $n \geq 2$ non esiste un'applicazione continua $f : S^n \rightarrow S^1$ tale che $f(-x) = -f(x)$. (Suggerimento: imitare la dimostrazione del Teorema di Borsuk–Ulam ($n = 2$)).

Esercizio 4.5 Dimostrare che dati due insiemi misurabili nel piano esiste una retta che divide ognuno di essi in due parti della stessa area.

Esercizio 4.6 Trovare due spazi topologici X e Y e una funzione continua $\varphi : X \rightarrow Y$ iniettiva (risp. suriettiva) tale che φ_* non sia iniettiva (risp. non sia suriettiva).

Esercizio 4.7 Calcolare il gruppo fondamentale dei seguenti sottospazi di \mathbb{R}^2 : $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| > 1\}$; $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$; $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \geq 1\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$; $S^1 \cup (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$; $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$, dove $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Esercizio 4.8 Calcolare il gruppo fondamentale di $S^n \times S^m$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4.9 Dimostrare che \mathbb{R}^2 non è omeomorfo a $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$.

Esercizio 4.10 Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 > 4xz\}$. Calcolare il gruppo fondamentale di X . (Suggerimento: dimostrare che X ha lo stesso tipo di omotopia di S^1).

Esercizio 4.11 Si dimostri che uno spazio topologico non può essere contemporaneamente una 2-varietà e una n -varietà per $n > 2$.

Esercizio 4.12 Sia $f : S^1 \rightarrow S^1$ un'applicazione continua omotopa all'applicazione costante. Dimostrare che f ha un punto fisso e esiste $x_0 \in S^1$ tali che $f(x_0) = -x_0$. (Suggerimento: usare l'Esercizio 1.10 del Capitolo 1 e il Corollario 4.2.3).

Esercizio 4.13 Dimostrare che non esistono applicazioni continue $g : D^2 \rightarrow S^1$ tali che $g(-y) = -g(y)$ per ogni $y \in S^1 = \partial D^2$. Fornire, inoltre, una dimostrazione alternativa del Corollario 4.2.2, cioè che non può esistere una retrazione di D^2 su S^1 . (Suggerimento per la prima parte: se esistesse una tale g allora l'applicazione $f : S^2 \rightarrow S^1$ definita da:

$$f(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} g(y_1, y_2) & \text{se } y_3 \geq 0 \\ -g(-y_1, -y_2) & \text{se } y_3 \leq 0 \end{cases}$$

sarebbe continua e soddisferebbe $f(-y) = -f(y)$. Suggerimento per la seconda parte: usare la prima parte).

Esercizio 4.14 Dimostrare che il rivestimento $p : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ usato nella dimostrazione del Teorema 4.3.2 non ammette una sezione continua globale per $n \geq 2$.

Esercizio 4.15 Dimostrare che ogni applicazione continua $f : S^2 \rightarrow S^1$ è omotopa ad un'applicazione costante.

Esercizio 4.16 Sia A un retratto di D^2 . Dimostrare che un'applicazione continua $f : A \rightarrow A$ ha un punto fisso.

Esercizio 4.17 Sia A una matrice 3×3 invertibile con entrate non negative. Dimostrare che A ammette un autovalore reale positivo. (Suggerimento: imitare la dimostrazione del Teorema di Frobenius).

Esercizio 4.18 Siano f e g i due lacci come nel Paragrafo 4.4. Dimostrare che $([f] \cdot [g])^k \neq ([g] \cdot [f])^k$ per ogni k .

Esercizi per i più audaci

Esercizio 4.19 Sia $f : S^1 \rightarrow S^1$ un'applicazione continua che preserva i punti antipode, cioè $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^1$. Dimostrare che f non è omotopa ad un'applicazione costante. (Suggerimento: a meno di rotazioni possiamo assumere che $f(1) = 1$. Si consideri il rivestimento $p : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^2$ dato dall'Esercizio 3.7 del Capitolo 3. Siccome $f(-x) = -f(x)$ segue che $p(f(-x)) = p(f(x))$ e il fatto che p sia un'identificazione implica l'esistenza di un'applicazione continua $g : S^1 \rightarrow S^1$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 \end{array}$$

Siccome $p(1) = f(1) = 1$ segue che $g(1) = 1$ (ovviamente, per ipotesi $h(-1) = -1$). Si può allora considerare il seguente diagramma indotto:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \end{array}$$

Si dimostri che g_* è un omomorfismo non banale e quindi iniettivo. D'altra parte p_* rappresenta la moltiplicazione per 2 in \mathbb{Z} e quindi p_* è iniettivo. Segue che f_* è iniettivo e quindi è un omomorfismo non banale. Allora f non può essere omotopa ad un'applicazione costante).

Esercizio 4.20 Usare l'Esercizio precedente per fornire una dimostrazione alternativa del Teorema di Borsuk-Ulam (Suggerimento: sia $f : S^2 \rightarrow S^1$ continua e tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^2$. Allora la sua restrizione all'equatore di S^2 è un'applicazione continua da S^1 in S^1 che preserva gli antipodi e che per l'Esercizio precedente non è omotopa ad un'applicazione costante. D'altra parte la calotta superiore di S^2 è omeomorfa a D^2 e quindi.....)

Esercizio 4.21 Supponiamo di sapere che per ogni $n \geq 1$ non possa esistere un'applicazione continua da S^n in S^n che preservi gli antipodi e sia omotopa ad una costante ¹, cioè non possa esistere $f : S^n \rightarrow S^n$ continua tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^n$ e tale che f sia omotopa ad una costante. Dimostrare che:

1. non può esistere un'applicazione continua $f : S^{n+1} \rightarrow S^n$ tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^{n+1}$ (teorema di Borsuk-Ulam);
2. per ogni applicazione continua $f : S^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ esiste $x \in S^{n+1}$ tale che $f(x) = f(-x)$;
3. S^{n+1} non è omeomorfa a nessun sottospazio di \mathbb{R}^{n+1} ;
4. ogni applicazione continua da un aperto non vuoto A di \mathbb{R}^{n+1} in \mathbb{R}^n non è iniettiva.
5. non esiste una retrazione $r : D^{n+1} \rightarrow S^n$;
6. ogni applicazione continua $f : D^{n+1} \rightarrow D^{n+1}$ ha un punto fisso;
7. ogni matrice A quadrata di ordine $n + 1$ con entrate reali positive ha un autovalore reale;
8. dati A_1, \dots, A_{n+1} insiemi misurabili di \mathbb{R}^{n+1} allora esiste un iperpiano di \mathbb{R}^{n+1} che divide ognuno di essi in due parti dello stesso volume (teorema di Stone-Tukey).

Esercizio 4.22 Supponiamo di sapere che per ogni $n \geq 1$ e per ogni applicazione continua $f : S^n \rightarrow S^n$ si possa associare un intero, chiamato il *grado* di f e denotato con $\deg(f)$ che soddisfi le seguenti condizioni ²:

- se $f, g : S^n \rightarrow S^n$ sono omotope allora $\deg(f) = \deg(g)$;

¹Per $n = 1$ è l'Esercizio 4.19 mentre per $n \geq 2$ segue dalla teoria della coomologia.

²L'esistenza del grado per applicazioni continue da S^n in S^n si può dimostrare usando la teoria dell'omologia.

- se $f, g : S^n \rightarrow S^n$ allora $\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$;
- l'identità $\text{id}_{S^n} : S^n \rightarrow S^n$ ha grado 1, l'applicazione costante ha grado 0 e la riflessione $\rho : S^n \rightarrow S^n, (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$ ha grado -1 .

Dimostrare che:

1. l'identità $\text{id}_{S^n} : S^n \rightarrow S^n$ non è omotopa ad un'applicazione costante;
2. l'inclusione $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ non è omotopa ad un'applicazione costante;
3. se $f : S^n \rightarrow S^n$ è omotopa ad un'applicazione costante allora f ha un punto fisso ed esiste $x_0 \in S^n$ tale che $f(x_0) = -x_0$;
4. se $f : S^n \rightarrow S^n$ ha grado diverso da $(-1)^{n+1}$ allora f ha un punto fisso. (Suggerimento: mostrare che se f non avesse un punto fisso allora f sarebbe omotopa all'applicazione antipodale);
5. se $f : S^n \rightarrow S^n$ ha grado diverso da 1 allora esiste un punto x_0 tale che $f(x_0) = -x_0$;
6. se esiste un'applicazione continua $v : S^n \rightarrow S^n$ tale che $x \cdot v(x) = 0$ (v è un campo di vettori continuo e unitario su S^n) allora n è dispari. (Suggerimento: se esistesse v allora f sarebbe omotopa all'applicazione antipodale).

Dimostrare infine l'esistenza del grado per $n = 1$ cioè per le applicazioni continue da S^1 a S^1 .

Capitolo 5

Categorie e funtori

In questo capitolo daremo un cenno alla teoria delle categorie e dei funtori. Per maggiori informazioni sull'argomento il lettore può consultare [13] in bibliografia.

5.1 Categorie

Una categoria \mathcal{C} consiste di:

- una classe di *oggetti*;
- per ogni coppia di oggetti X, Y un insieme $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (eventualmente vuoto) di *morfismi*;
- per ogni terna X, Y, Z di oggetti una funzione, chiamata *composizione*,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), (\varphi, \psi) \mapsto \psi \circ \varphi$$

tale che valgano i seguenti assiomi:

1. la composizione è associativa: $\eta \circ (\psi \circ \varphi) = (\eta \circ \psi) \circ \varphi$ ogniqualvolta che i due membri dell'uguaglianza hanno senso;
2. per ogni oggetto X , $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ contiene un morfismo id_X , detto *identità*, tale che per ogni morfismo $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ si ha

$$\text{id}_Y \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ \text{id}_X.$$

La maggior parte dei concetti che lo studente ha incontrato nel suo corso di studi sono o possono essere visti come categorie. Descriviamo ora alcuni esempi di categorie (le verifica che si tratti effettivamente di categorie è lasciata come esercizio per lo studente).

Notazione: indicheremo con $\varphi : X \rightarrow Y$ oppure con $X \xrightarrow{\varphi} Y$ un morfismo, ossia un elemento di $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. In generale non è detto che le freccia “ \rightarrow ” rappresenti un’applicazione dall’oggetto X all’oggetto Y nel senso usuale del termine.

Esempio 5.1.1 La categoria $\mathcal{I}ns$ i cui oggetti sono gli insiemi e i cui morfismi sono le applicazioni di insiemi e la composizione di morfismi è l’usuale composizione di applicazioni.

Esempio 5.1.2 La categoria \mathcal{G} i cui oggetti sono i gruppi e i cui morfismi sono gli omomorfismi di gruppi.

Esempio 5.1.3 La categoria $\mathcal{A}b$ i cui oggetti sono i gruppi abeliani e i cui morfismi sono gli omomorfismi di gruppi abeliani.

Esempio 5.1.4 La categoria $\mathcal{A}n$ i cui oggetti sono gli anelli e i cui morfismi sono gli omomorfismi di anelli.

Esempio 5.1.5 La categoria $\mathcal{A}n_{Ab}$ i cui oggetti sono gli anelli commutativi e i cui morfismi sono gli omomorfismi di anelli commutativi.

Esempio 5.1.6 La categoria \mathcal{K} i cui oggetti sono i campi e i cui morfismi sono gli omomorfismi di campi.

Esempio 5.1.7 La categoria $\mathcal{V}ett$ i cui oggetti sono gli spazi vettoriali sui \mathbb{R} e i cui morfismi sono le applicazioni \mathbb{R} -lineari.

Esempio 5.1.8 La categoria $\mathcal{T}op$ i cui oggetti sono gli spazi topologici e i cui morfismi sono le applicazioni continue.

Esempio 5.1.9 La categoria $\mathcal{T}op_*$ i cui oggetti sono gli spazi topologici con un punto fissato (cioè le coppie (X, x) , X spazio topologico e $x \in X$) e i cui morfismi sono le applicazioni continue che mandano il punto fisso di uno spazio nel punto fisso dell’altro.

Esempio 5.1.10 La categoria $\mathcal{H}Top$ i cui oggetti sono gli spazi topologici e i cui morfismi sono le classi di omotopia di applicazioni continue.

Esempio 5.1.11 La categoria $\mathcal{H}Top_*$ i cui oggetti sono gli spazi topologici con un punto fissato e i cui morfismi sono le classi d’equivalenza di applicazioni continue modulo omotopia relativa al punto fissato.

Osserviamo che in tutti gli esempi tranne gli ultimi due le categorie sono costituite da insiemi dotati da una struttura che viene rispettata dai rispettivi morfismi. Esempi di categorie siffatte sono chiamate *concrete*.

Sia \mathcal{C} una categoria e $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ è detto un' *isomorfismo* se esiste un morfismo $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tale che $\varphi \circ \psi = \text{id}_Y$ e $\psi \circ \varphi = \text{id}_X$. Per esempio nella categoria $\mathcal{I}ns$ gli isomorfismi sono le biezioni, nella categoria \mathcal{G} sono gli isomorfismi di gruppi, nella categoria $\mathcal{T}op$ sono gli omeomorfismi e nella categoria \mathcal{HTop} sono le equivalenze omotopiche.

Una *sottocategoria* \mathcal{D} di una categoria \mathcal{C} è una categoria i cui oggetti sono alcuni degli oggetti della categoria \mathcal{C} e i cui morfismi sono un sottoinsieme dei morfismi di \mathcal{C} con la legge di composizione e le identità di \mathcal{C} . La sottocategoria \mathcal{D} di \mathcal{C} è detta *piena* se $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ per ogni coppia di oggetti $X, Y \in \mathcal{C}$. Per esempio $\mathcal{A}b$ è una sottocategoria piena di \mathcal{G} mentre \mathcal{G} è una sottocategoria di $\mathcal{I}ns$ che non è piena.

Esempio 5.1.12 (gruppi come categorie) Supponiamo che \mathcal{C} sia una categoria con un solo oggetto X dove ogni morfismo sia un isomorfismo. Tutta la struttura della categoria è contenuta nell'insieme dei morfismi $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ e sulle loro composizioni. Gli assiomi di una categoria ci dicono che due morfismi possono essere composti per ottenere un altro morfismo, che la composizione è associativa e che esiste un morfismo identità. Dal momento che stiamo assumendo che tutti i morfismi sono isomorfismi allora ogni morfismo è invertibile. Quindi $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ ha la struttura di gruppo rispetto alla composizione. Viceversa ogni gruppo G può essere identificato con una categoria. Basta pensare il gruppo G come una sottocategoria di $\mathcal{I}ns$ che consiste di un solo oggetto G e delle applicazioni $L_g : G \rightarrow G$ date dalle traslazioni a sinistra ($L_g(h) = gh$).

5.2 Funtori

Siano \mathcal{C} e \mathcal{D} due categorie. Un *funtoe covariante* (risp. *controvariante*) \mathcal{F} da \mathcal{C} a \mathcal{D} è una coppia di applicazioni (ciascuna delle quali verrà indicata ancora con \mathcal{F}) la prima delle quali associa a ogni oggetto X di \mathcal{C} un oggetto $\mathcal{F}(X)$ di \mathcal{D} e la seconda associa ad ogni morfismo $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ un *morfismo indotto* $\mathcal{F}(\varphi) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ (risp. $\mathcal{F}(\varphi) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$) tale che:

$$\mathcal{F}(\eta \circ \psi) = \mathcal{F}(\eta) \circ \mathcal{F}(\psi) \quad (\text{risp. } \mathcal{F}(\eta \circ \psi) = \mathcal{F}(\psi) \circ \mathcal{F}(\eta)); \quad \mathcal{F}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathcal{F}(X)}.$$

Il morfismo indotto $\mathcal{F}(\varphi)$ viene solitamente denotato con φ_* se \mathcal{F} è un funtoe covariante e con φ^* se \mathcal{F} è un funtoe controvariante.

Esempio 5.2.1 Data una categoria \mathcal{C} il funtore covariante identità $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ per il quale $\text{id}_{\mathcal{C}}(X) = X$ e $\text{id}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \varphi$ per ogni oggetto X di \mathcal{C} e ogni $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Esempio 5.2.2 Il funtore covariante *distratto* dalla categoria \mathcal{Top} alla categoria \mathcal{Ins} che associa a ogni spazio topologico il suo supporto e a ogni applicazione continua l'applicazione stessa. Lo studente potrà costruire altri esempi di funtori covarianti “distratti” dagli esempi di categorie descritti sopra.

Esempio 5.2.3 Il funtore covariante 0-esimo *gruppo di omotopia* $\pi_0 : \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Ins}$ che assegna ad ogni spazio topologico l'insieme delle sue componenti connesse e a ogni applicazione continua $\varphi : X \rightarrow Y$ l'applicazione indotta $\varphi_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ che porta nella componente connessa C di X la componente connessa di Y che contiene $\varphi(C)$.

Esempio 5.2.4 Il funtore covariante *gruppo fondamentale* $\pi_1 : \mathcal{Top}_* \rightarrow \mathcal{G}$ che assegna ad ogni spazio topologico (X, x) il suo gruppo fondamentale $\pi_1(X, x)$ e per ogni applicazione continua $\varphi : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ tale che $\varphi(x) = y$ l'omomorfismo indotto $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$. Il fatto che π_1 sia un funtore covariante segue dal Teorema 2.3.1. Osserviamo che, per il Teorema 2.4.2, resta definito anche un funtore covariante $\pi_1 : \mathcal{HTop}_* \rightarrow \mathcal{G}$.

Esempio 5.2.5 Il funtore covariante n -esimo *gruppo di omotopia* $\pi_n : \mathcal{Top}_* \rightarrow \mathcal{Ab}$, $n \geq 2$, che assegna ad ogni spazio topologico (X, x) il suo n -esimo gruppo di omotopia $\pi_n(X, x)$ basato in x e per ogni applicazione continua $\varphi : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ tale che $\varphi(x) = y$ l'omomorfismo indotto $\varphi_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, y)$. Il fatto che π_n sia un funtore covariante segue dal punto 4. del Teorema 2.7.1. Osserviamo che allo stesso modo resta anche definito un funtore covariante $\pi_n : \mathcal{HTop}_* \rightarrow \mathcal{Ab}$, $n \geq 2$ (π_n è un funtore per il punto 5. del Teorema 2.7.1).

Esempio 5.2.6 Il funtore controvariante da \mathcal{Vett} in se stesso che associa ad ogni spazio vettoriale V il suo spazio duale V^* (l'insieme delle applicazioni \mathbb{R} -lineari da V in \mathbb{R}) e ad ogni applicazione \mathbb{R} -lineare $\varphi : V \rightarrow W$ la sua applicazione duale $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$ definita da $\varphi^*(f) := f \circ \varphi$ per ogni $f \in W^*$.

Esempio 5.2.7 Il funtore controvariante $C : \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{An}_{\mathcal{Ab}}$ che ad ogni spazio topologico X associa l'anello commutativo $C(X, \mathbb{R})$ delle funzioni continue da X in \mathbb{R} e ad ogni funzione continua $\varphi : X \rightarrow Y$ il morfismo indotto $\varphi^* : C(Y, \mathbb{R}) \rightarrow C(X, \mathbb{R})$ definito da $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ per ogni $f \in C(Y, \mathbb{R})$.

Esempio 5.2.8 Sia H un gruppo abeliano fissato. Definiamo un funtore controvariante da $\mathcal{A}b$ a se stesso che ad ogni gruppo abeliano G associa il gruppo $\text{Hom}(G, H)$ (gruppo abeliano degli omomorfismi da G a H) e ad ogni omomorfismo $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ l'omomorfismo duale $\varphi^* : \text{Hom}(G_2, H) \rightarrow \text{Hom}(G_1, H)$ definito da $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ per ogni $f \in \text{Hom}(G_2, H)$.

5.3 Prodotti e coprodotti

Sia $\{X_j\}_{j \in J}$ una famiglia di oggetti di una categoria \mathcal{C} . Un oggetto P di \mathcal{C} con un insieme di morfismi $\pi_j : P \rightarrow X_j$, per ogni $j \in J$, chiamati *proiezioni*, è detto un *prodotto* ovvero *prodotto categoriale* degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ se è soddisfatta la seguente *proprietà universale*: dati un qualunque oggetto Y di \mathcal{C} e una famiglia di morfismi $\varphi_j : Y \rightarrow X_j$, esiste un unico morfismo $\varphi : Y \rightarrow P$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \nearrow \varphi & \downarrow \pi_j \\ Y & \xrightarrow{\varphi_j} & X_j \end{array}$$

In una data categoria \mathcal{C} non è detto che un prodotto esista. Se però esiste esso è unico come mostra la seguente:

Proposizione 5.3.1 Sia \mathcal{C} una categoria, $\{X_j\}_{j \in J}$ una sua famiglia di oggetti. Se (P, π_j) e (P', π'_j) sono prodotti degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ allora esiste un isomorfismo $\varphi : P \rightarrow P'$ che rispetta le proiezioni cioè $\pi'_j \circ \varphi = \pi_j$.

Dimostrazione: Per la proprietà universale del prodotto esistono due morfismi $\varphi : P \rightarrow P'$ e $\varphi' : P' \rightarrow P$ che rendono commutativi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} & P' & \\ \varphi \nearrow & & \downarrow \pi'_j \\ P & \xrightarrow{\pi_j} & X_j \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & P & \\ \varphi' \nearrow & & \downarrow \pi_j \\ P' & \xrightarrow{\pi'_j} & X_j \end{array}$$

Si ottengono quindi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \varphi' \circ \varphi \nearrow & & \downarrow \pi_j \\ P & \xrightarrow{\pi_j} & X_j \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & P' & \\ \varphi \circ \varphi' \nearrow & & \downarrow \pi'_j \\ P' & \xrightarrow{\pi'_j} & X_j \end{array}$$

D'altra parte i seguenti diagrammi commutano (banalmente)

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \text{id}_P \nearrow & \downarrow \pi_j & \\ P & \xrightarrow{\pi_j} & X_j \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & P' & \\ \text{id}_{P'} \nearrow & \downarrow \pi'_j & \\ P' & \xrightarrow{\pi'_j} & X_j \end{array}$$

Segue allora dall'unicità dei due prodotti categoriali che $\varphi' \circ \varphi = \text{id}_P$ e $\varphi \circ \varphi' = \text{id}_{P'}$. Quindi φ (risp. φ') è l'unico isomorfismo che soddisfa $\pi'_j \circ \varphi = \pi_j$ (risp. $\pi_j \circ \varphi' = \pi'_j$) per ogni $j \in J$. \square

Esempio 5.3.2 (prodotto categoriale in $\mathcal{I}ns$) Sia $\{X_j\}$ una famiglia di insiemi. Ricordiamo che il prodotto cartesiano $\prod_{j \in J} X_j$ di una famiglia di insiemi $\{X_j\}_{j \in J}$ (J non necessariamente finito o numerabile) è dato da:

$$\prod_{j \in J} X_j = \{f : J \rightarrow \cup_{j \in J} X_j \mid f(j) \in X_j, j \in J\}$$

cioè come l'insieme delle funzioni definite su J che mandano ogni elemento $j \in J$ in un elemento di X_j . Osseviamo che l'affermazione “il prodotto cartesiano di una famiglia non vuota di insiemi non vuoti è non vuoto” è equivalente all'assioma di scelta. Ovviamente se J è finito, $J = \{1, \dots, n\}$, si ottiene la definizione usuale di prodotto cartesiano $X_1 \times \dots \times X_n$. Denotiamo con $\pi_k : \prod_{j \in J} X_j \rightarrow X_k$ la proiezione nel fattore j -esimo definita da:

$$\pi_k(f) := f(k), \quad f \in \prod_{j \in J} X_j. \quad (5.1)$$

Allora la coppia $(\prod_{j \in J} X_j, \pi_j)$ è il prodotto categoriale degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ nella categoria $\mathcal{I}ns$. Infatti dato un insieme qualunque Y e una famiglia di applicazioni $\varphi_j : Y \rightarrow X_j$ allora l'applicazione $\varphi : Y \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$ che a $y \in Y$ associa $\varphi(y) \in \prod_{j \in J} X_j$ definita da

$$\varphi(y)(j) := \varphi_j(y), \quad \forall j \in J \quad (5.2)$$

soddisfa $\pi_j \circ \varphi = \varphi_j$, per ogni $j \in J$ ed è chiaramente unica per il modo in cui è stata definita.

Esempio 5.3.3 (prodotto categoriale in $\mathcal{T}op$) Sia $\{X_j\}$ una famiglia di spazi topologici. Consideriamo la famiglia di insiemi di $\prod_{j \in J} X_j$ costituita dal prodotto degli insiemi della forma $\prod_{j \in J} U_j$, dove U_j è aperto in X_j e $U_j = X_j$ per ogni $j \in J$, tranne per al più un numero finito di j . E' immediato verificare che esiste un'unica

topologia, chiamata *la topologia prodotto*¹, che ha questa famiglia come base. Nel caso J sia finito si tratta della topologia prodotto che lo studente ha incontrato nel corso di topologia generale. Osserviamo che la proiezioni $\pi_k : \prod_{j \in J} X_j \rightarrow X_k$, definite da (5.1), sono applicazioni continue in quanto la controimmagine $\pi_k^{-1}(U)$ di un aperto U di X_k è data da $\pi_k^{-1}(U) = \prod_{j \in J} U_j$ con $U_k = U$ e $U_j = X_j$ per $j \neq k$ che è un aperto nella topologia prodotto. La coppia $(\prod_{j \in J} X_j, \pi_j)$ è il prodotto categoriale degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ nella categoria $\mathcal{T}op$. Infatti dato uno spazio topologico Y e una famiglia di applicazioni continue $\varphi_j : Y \rightarrow X_j$ allora l'applicazione $\varphi : Y \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$ definita da (5.2) è continua (cf. Esercizio 5.4) (e soddisfa la relazione $\pi_j \circ \varphi = \varphi_j$).

Esempio 5.3.4 (prodotto categoriale in \mathcal{G}) Sia $\{G_j\}_{j \in J}$ una famiglia di gruppi. Ricordiamo che il loro prodotto diretto è il gruppo ottenuto considerando il loro prodotto cartesiano $\prod_{j \in J} G_j$ con il prodotto componente per componente

$$(g \cdot h)(j) := g(j) \cdot h(j), \quad g, h \in \prod_{j \in J} G_j,$$

cioè la componente j -esima del prodotto è il prodotto delle componenti j -esime dei singoli fattori. Osserviamo che per ogni $k \in J$ il prodotto diretto $\prod_{j \in J} G_j$ ha un sottogruppo isomorfo a G_k ossia il sottogruppo dove tutti i G_j sono uguali all'identità per $j \neq k$ e $G_j = G_k$. Indicheremo questo sottogruppo con G_k . Per $k \neq l$ è immediato verificare che i due sottogruppi G_k e G_l commutano

Non è difficile vedere che la proiezione $\pi_k : \prod_{j \in J} G_j \rightarrow G_k$ definita da (5.1) è un omomorfismo di gruppi e quindi un morfismo nella categoria \mathcal{G} . Allora si verifica facilmente che $(\prod_{j \in J} G_j, \pi_j)$ definisce il prodotto categoriale degli oggetti $\{G_j\}_{j \in J}$ nella categoria \mathcal{G} . La dimostrazione è analoga a quella dell'esempio precedente: dato un gruppo G e una famiglia di omomorfismi $\varphi_j : G \rightarrow G_j$ allora l'omomorfismo $\varphi : G \rightarrow \prod_{j \in J} G_j$ definito da $\varphi(g)(j) = \varphi_j(g)$, per ogni $j \in J$, è tale che $\pi_j \circ \varphi = \varphi_j$ (φ è unico per costruzione).

Il concetto di coprodotto si ottiene invertendo tutte le frecce nella definizione di prodotto come segue. Sia $\{X_j\}_{j \in J}$ una famiglia di oggetti di una categoria \mathcal{C} . Un oggetto S di \mathcal{C} con un insieme di morfismi $i_j : X_j \rightarrow S$, per ogni $j \in J$, chiamate *inclusioni*, è detto un *coprodotto* ovvero *coprodotto categoriale* degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ se è soddisfatta la seguente *proprietà universale*: dati un qualunque oggetto Y di \mathcal{C} e una famiglia di morfismi $\varphi_j : X_j \rightarrow Y$, esiste un unico morfismo $\varphi : S \rightarrow Y$ che rende commutativo il seguente diagramma:

¹Nella topologia prodotto vale il sorprendente teorema di Tychonoff che asserisce che il prodotto di un numero arbitrario di spazi topologici compatti è uno spazio topologico compatto

$$\begin{array}{ccc}
& S & \\
i_j \uparrow & \searrow \varphi & \\
X_j & \xrightarrow{\varphi_j} & Y
\end{array}$$

In una data categoria \mathcal{C} non è detto che un coprodotto esista. Se però esiste esso è unico come mostra la seguente:

Proposizione 5.3.5 *Sia \mathcal{C} una categoria, $\{X_j\}_{j \in J}$ una famiglia di oggetti. Se (S, i_j) e (S', i'_j) sono coprodotti degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ allora esiste un isomorfismo $\varphi : S' \rightarrow S$ che rispetta le inclusioni cioè $\varphi \circ i'_j = i_j$.*

Dimostrazione: Per la proprietà universale del coprodotto esistono due morfismi $\varphi : S' \rightarrow S$ e $\varphi' : S \rightarrow S'$ che rendono commutativi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc}
S' & & S \\
i'_j \uparrow & \searrow \varphi & \uparrow i_j \\
X_j & \xrightarrow{i_j} & S
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
S & & S' \\
i_j \uparrow & \searrow \varphi' & \uparrow i'_j \\
X_j & \xrightarrow{i'_j} & S'
\end{array}$$

Si ottengono quindi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc}
S & & S' \\
i_j \uparrow & \searrow \varphi \circ \varphi' & \uparrow i'_j \\
X_j & \xrightarrow{i_j} & S
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
S' & & S \\
i'_j \uparrow & \searrow \varphi' \circ \varphi & \uparrow i_j \\
X_j & \xrightarrow{i'_j} & S'
\end{array}$$

Segue allora dall'unicità dei due coprodotti categoriali che $\varphi \circ \varphi' = \text{id}_S$ e $\varphi' \circ \varphi = \text{id}_{S'}$. Quindi φ (risp. φ') è l'unico isomorfismo che soddisfa $\varphi \circ i'_j = i_j$ (risp. $\varphi' \circ i_j = i'_j$) per ogni $j \in J$. \square

Esempio 5.3.6 (coprodotto categoriale in $\mathcal{I}ns$) Consideriamo l'unione disgiunta $S = \cup_{j \in J} (X_j \times \{j\})$ di una famiglia di insiemi $\{X_j\}_{j \in J}$ e le inclusioni naturali

$$i_j : X_j \rightarrow S, \quad x \mapsto i_j(x) := (x, j).$$

Allora la coppia (S, i_j) è il coprodotto categoriale degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ nella categoria $\mathcal{I}ns$. Infatti dato un insieme qualunque Y e una famiglia di applicazioni $\varphi_j : X_j \rightarrow Y$ allora l'applicazione $\varphi : S \rightarrow Y$ che a $s = (x, j) \in X_j \times \{j\} \subset S$ associa $\varphi(s) = \varphi_j(x)$ è tale che $\varphi \circ i_j = \varphi_j$, per ogni $j \in J$.

Esempio 5.3.7 (coprodotto categoriale in $\mathcal{T}op$) Sia $\{X_j\}$ una famiglia di spazi topologici. Consideriamo la *topologia dell'unione disgiunta* sull'insieme $S = \cup_{j \in J} (X_j \times \{j\})$ definita come quella topologia dove un insieme $U \subset S$ è aperto se e solo se $U \cap X_j$ è aperto in X_j per ogni $j \in J$. Si verifica facilmente

(cf. Esercizio 5.5) che le inclusioni naturali $i_j : X_j \rightarrow S, x \mapsto (x, j)$ sono continue rispetto a questa topologia e che la coppia (S, i_j) è il coprodotto categoriale degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ nella categoria \mathcal{Top} . Infatti dato uno spazio topologico Y e una famiglia di applicazioni continue $\varphi_j : X_j \rightarrow Y$ allora l'applicazione $\varphi : S \rightarrow Y : (x, j) \mapsto \varphi_j(x)$ è continua (e soddisfa $\varphi \circ i_j = \varphi_j$, come nell'esempio precedente).

Il coprodotto categoriale di una famiglia di gruppi $\{G_j\}_{j \in J}$ chiamato il *prodotto libero dei gruppi* G_j verrà trattato nel prossimo capitolo. Si osservi che se i gruppi G_j sono abeliani allora è possibile definire il coprodotto nella categoria \mathcal{Ab} come somma diretta dei gruppi G_j (si vedano gli Esercizi 5.6 - 5.9).

5.4 Esercizi

Esercizio 5.1 Dimostrare che i funtori descritti negli Esempi 5.2.1–5.2.8 sono effettivamente funtori.

Esercizio 5.2 Dimostrare che un funtore (covariante o controvariante) da una categoria \mathcal{C} ad una categoria \mathcal{D} porta gli isomorfismi di \mathcal{C} negli isomorfismi di \mathcal{D} . (Suggerimento: si imiti la dimostrazione del Teorema 2.3.1).

Esercizio 5.3 Dimostrare che \mathcal{K} è una sottocategoria non piena di \mathcal{An}_{Ab} .

Esercizio 5.4 Dimostrare che l'applicazione $\varphi : Y \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$ dell'Esempio 5.3.3 è continua se e solo se le sue componenti $\varphi_j : Y \rightarrow X_j$ sono continue. (Suggerimento: usare il fatto che la famiglia $\pi_j^{-1}(U_j)$ al variare di $j \in J$ e U_j aperto di X_j è una sottobase per la topologia prodotto).

Esercizio 5.5 Dimostrare che la topologia dell'unione disgiunta è effettivamente una topologia. Dimostrare inoltre che tale topologia è la più fine tra tutte le topologie sull'insieme $\cup_{j \in J} (X_j \times \{j\})$ rispetto alle quali le inclusioni naturali $i_j : X_j \rightarrow S, x_j \mapsto (x_j, j)$ sono continue.

Esercizio 5.6 Sia $\{G_j\}_{j \in J}$ una famiglia di gruppi. Sia $\oplus_{j \in J} G_j$ il sottogruppo del prodotto diretto $\prod_{j \in J} G_j$ che consiste di tutti quegli elementi $\{g_j\}_{j \in J}$ tali che g_j è l'elemento identità in G_j tranne per al più un numero finito di j . Sia inoltre $i_j : G_j \rightarrow \oplus_{j \in J} G_j$ l'inclusione naturale. Il gruppo $\oplus_{j \in J} G_j$ si chiama il *prodotto debole* dei gruppi G_j . Osserviamo che se J è finito il prodotto diretto e il prodotto debole definiscono lo stesso gruppo. Dimostrare che se tutti i gruppi G_j sono abeliani allora il prodotto debole $\oplus_{j \in J} G_j$ (chiamato anche *somma diretta* nel caso di gruppi abeliani) è il coprodotto degli oggetti G_j nella categoria \mathcal{Ab} .

Esercizio 5.7 Siano G_1 e G_2 due gruppi abeliani e $G = G_1 \oplus G_2$ la loro somma diretta. Sia $\{H_j\}_{j \in J}$ una famiglia di sottogruppi di G_1 tali che $G_1 = \bigoplus_{j \in J} H_j$ e sia $\{H_k\}_{k \in K}$ è una famiglia di sottogruppi di G_2 tali che $G_2 = \bigoplus_{k \in K} H_k$. Se gli indici J and K sono disgiunti dimostrare che

$$G = \bigoplus_{l \in L} H_l, \quad L = J \cup K.$$

Dedurre che se G_1, G_2 e G_3 sono tre gruppi abeliani allora:

$$(G_1 \oplus G_2) \oplus G_3 = G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3) = G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3).$$

Esercizio 5.8 Siano G_1 e G_2 due gruppi abeliani e $G = G_1 \oplus G_2$ la loro somma diretta. Dimostrare che $G/G_1 \cong G_2$.

Esercizio 5.9 Siano $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}$. Trovare un gruppo non abeliano G e omomorfismi $\varphi_j : G_j \rightarrow G$, $j = 1, 2$, per i quali non possa esistere un omomorfismo $\varphi : G_1 \oplus G_2 \rightarrow G$ che renda commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & & \\ \uparrow i_j & \searrow \varphi & \\ G_j & \xrightarrow{\varphi_j} & G \end{array}$$

Dedurre che il prodotto debole non definisce un coprodotto in \mathcal{G} .

Capitolo 6

Qualche nozione di algebra

6.1 Prodotto libero di gruppi

Come abbiamo visto nel capitolo precedente (cf. Esempio 5.3.4) data una famiglia $\{G_j\}_{j \in J}$ di gruppi possiamo definire il loro prodotto diretto $\prod_{j \in J} G_j$ che rappresenta il prodotto categoriale in \mathcal{G} . Inoltre per ogni j il gruppo G_j è (isomorfo a) un sottogruppo di $\prod_{j \in J} G_j$ e G_k e G_l per $k \neq l$ commutano. In questo paragrafo definiremo un prodotto più complicato, chiamato prodotto libero, denotato $*_{j \in J} G_j$, tra i gruppi G_j che corrisponde al coprodotto categoriale in \mathcal{G} e dove per ogni k il gruppo G_k è (isomorfo a) un sottogruppo di $*_{j \in J} G_j$ e G_k e G_l per $k \neq l$ non commutano.

Un *parola* in $\{G_j\}_{j \in J}$ è una stringa di lunghezza m , $m \geq 0$, di elementi dell'unione disgiunta $\cup_{j \in J} (G_j \times \{j\})$. Equivalentemente una parola è una m -upla della forma (g_1, \dots, g_m) dove ogni elemento g_i appartiene ad un qualche G_j .

Attenzione: ricordiamo che un elemento dell'unione disgiunta $\cup_{j \in J} (G_j \times \{j\})$ è della forma (g, j) , dove j è un indice per ricordarci da quale gruppo proviene g . Nella nostra notazione stiamo denotando l'elemento (g, j) con la lettera g ma bisogna tenere a mente che gruppi corrispondenti a indici diversi si devono considerare diversi anche se i gruppi sono gli stessi.

La stringa di lunghezza zero, chiamata la *parola vuota* sarà denotata come $()$. Sai \mathcal{W} l'insieme di tutte le parole in $\cup_{j \in J} (G_j \times \{j\})$. Sia 1_j l'elemento neutro in G_j . Definiamo un prodotto in \mathcal{W} per giustapposizione:

$$(g_1, \dots, g_m)(h_1, \dots, h_n) = (g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n).$$

Chiaramente questo prodotto è associativo e la parola vuota è l'elemento neutro sinistro e destro. D'altra parte \mathcal{W} con questo prodotto non è un gruppo. Per

superare questo problema definiamo una relazione d'equivalenza sull'insieme delle parole come segue. Una *riduzione elementare* è un'operazione di uno dei due tipi che seguono:

1. $(g_1, \dots, g_i, g_{i+1}, \dots, g_m) \mapsto (g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_m)$ se g_i, g_{i+1} appartengono a qualche G_k ;
2. $(g_1, \dots, g_{i-1}, 1_j, g_{i+1}, \dots, g_m) \mapsto (g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_m)$.

La prima operazione moltiplica due entrate consecutive se appartengono allo stesso gruppo; la seconda operazione cancella un elemento identità che appare in una data parola.

Diremo che due parole $W, W' \in \mathcal{W}$ sono equivalenti e scriveremo $W \sim W'$ se W può essere ottenuta da W' attraverso una successione finita di operazioni elementari o delle loro inverse. E' facile vedere che \sim definisce una relazione d'equivalenza su \mathcal{W} . L'insieme delle classi di equivalenza è chiamato il *prodotto libero* dei gruppi $\{G_j\}_{j \in J}$, e verrà denotato con $*_{j \in J} G_j$ e se J è finito, $J = \{1, \dots, n\}$, verrà denotato con $G_1 * \dots * G_n$.

Teorema 6.1.1 *Data una famiglia di gruppi $\{G_j\}_{j \in J}$ il loro prodotto libero $*_{j \in J} G_j$ è un gruppo rispetto al prodotto indotto dalla giustapposizione di parole.*

Dimostrazione: La prima cosa da verificare è che il prodotto in $*_{j \in J} G_j$ rispetta la relazione d'equivalenza, cioè se $V \sim V'$ e $W \sim W'$ allora $VW \sim V'W'$. Osserviamo che se la parola V' si ottiene da V con una singola riduzione elementare allora $V'W$ si ottiene da VW con una sola riduzione elementare (che agisce su V e lascia invariata W). Quindi per induzione sul numero di operazioni elementari si ottiene che se $V \sim V'$ allora

$$VW \sim V'W.$$

Analogamente se la parola W' si ottiene da W con una singola riduzione elementare allora $V'W'$ si ottiene da $V'W$ con una sola riduzione elementare (che agisce su W e lascia invariata V'). Quindi, come prima, per induzione sul numero di operazioni elementari si ottiene che se $W \sim W'$. Allora

$$V'W \sim V'W'.$$

Segue che se $V \sim V'$, $W \sim W'$ allora

$$VW \sim V'W \sim V'W'$$

che è quello che volevamo dimostrare.

L'associatività del prodotto segue dal fatto che l'associatività è già associativa quando si effettua la giustapposizione tra parole. La classe d'equivalenza della parola vuota $()$ è chiaramente l'elemento neutro (sinistro e destro per quest'operazione). Infine, il fatto che

$$(g_1, \dots, g_m)(g_m^{-1}, \dots, g_1^{-1}) = () = (g_m^{-1}, \dots, g_1^{-1})(g_1, \dots, g_m)$$

implica che la classe d'equivalenza della parola $(g_m^{-1}, \dots, g_1^{-1})$ è l'inversa della classe d'equivalenza della parola (g_1, \dots, g_m) . \square

Vogliamo ora vedere che ogni G_k è (isomorfo ad) un sottogruppo di $*_{j \in J} G_j$. Per fare questo (e per altri motivi) vogliamo descrivere un modo per trovare un unico rappresentante di una data classe di equivalenza in $*_{j \in J} G_j$. Diremo che una parola (g_1, \dots, g_m) è *ridotta* se non è possibile “accorciarla” tramite operazioni elementari, cioè nessun elemento g_i è l'identità e ogni coppia di elementi consecutivi g_i, g_{i+1} non appartiene allo stesso gruppo. Ogni parola è equivalente ad un parola ridotta: basta applicare una successione finita di operazioni elementari fino a quando la parola non è ridotta. Inoltre si può dimostrare (noi non lo faremo) che la parola ridotta che rappresenta una data classe di equivalenza è unica come espresso dal seguente:

Teorema 6.1.2 *Ogni elemento del gruppo libero $*_{j \in J} G_j$ è rappresentato da un'unica parola ridotta.*

Osservazione 6.1.3 La dimostrazione del Teorema 6.1.2 pur non essendo particolarmente complicata non aggiunge niente all'intuizione delle definizioni di prodotto libero. Questo è uno dei motivi per i quali è stata omessa.

Definiamo l'applicazione canonica $i_k : G_k \rightarrow *_{j \in J} G_j$ che associa a $g \in G_k$ la classe d'equivalenza della parola (g) che lo rappresenta. Quest'applicazione è un omomorfismo in quanto $(g_1 g_2) \sim (g_1)(g_2)$ per ogni $g_1, g_2 \in G_k$. Inoltre come conseguenza del teorema precedente ogni i_k è iniettiva: sia infatti $g \in G_k, g \neq 1_k$, allora $i_k(g) = (g)$ è la classe d'equivalenza della parola ridotta (g) e $i_k(1_k) = ()$ è la classe d'equivalenza della parola (ridotta) vuota. Essendo $g \neq 1_k$ segue dal teorema precedente che $(g) \neq ()$. Quindi ogni G_k è isomorfo ad un sottogruppo (che indicherei ancora con G_k ,) del prodotto libero $*_{j \in J} G_j$. In questo caso due sottogruppi non banali G_k e G_l di $*_{j \in J} G_j$ non commutano tra loro (cf. Esercizio 6.3).

Denoteremo la classe d'equivalenza della parola (g) semplicemente con g e la classe d'equivalenza della parola (g_1, g_2, \dots, g_m) con $g_1 g_2 \cdots g_m$. Allora il prodotto

tra due classi $g_1g_2\cdots g_m$ e $h_1h_2\cdots h_n$ si denoterà semplicemente con la giustapposizione $g_1g_2\cdots g_mh_1h_2\cdots h_n$. Denoteremo inoltre con 1 l'elemento neutro di $*_{j\in J}G_j$.

Teorema 6.1.4 *Sia $\{G_j\}_{j\in J}$ una famiglia di gruppi. Allora il prodotto libero $*_{j\in J}G_j$ insieme alle inclusioni $i_k : G_k \rightarrow *_{j\in J}G_j$ è il coprodotto nella categoria \mathcal{G} .*

Dimostrazione: dobbiamo dimostrare che è soddisfatta la proprietà universale del coprodotto e cioè che per ogni gnuppo G e per ogni famiglia di omomorfismi $\varphi_k : G_k \rightarrow G$ esiste un unico omomorfismo $\varphi : *_{j\in J}G_j \rightarrow G$ tale che per ogni k il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} & *_{j\in J}G_j & \\ i_k \uparrow & \searrow \varphi & \\ G_k & \xrightarrow{\varphi_k} & G \end{array}$$

Dimostrazione: Se una tale φ esiste è unica. Infatti dalla commutatività del diagramma si ha $\varphi \circ i_k = \varphi_k$. Allora

$$\varphi(g) = \varphi_k(g), \quad \forall g \in G_k. \quad (6.1)$$

dove stiamo identificando G_k con la sua immagine tramite i_k . Il fatto che φ sia un omomorfismo ci dice che

$$\varphi(g_1 \cdots g_m) = \varphi(g_1) \cdots \varphi(g_m). \quad (6.2)$$

Le condizioni (6.1) e (6.2) implicano che φ è univocamente determinata.

Dimostriamo ora l'esistenza di φ . Data $g_1 \cdots g_m \in *_{j\in J}G_j$ definiamo $\varphi : *_{j\in J}G_j \rightarrow G$ usando le (6.1) e (6.2). Bisogna allora verificare che φ è ben definita sulle classi d'equivalenza ossia che il valore di φ non dipende dalle riduzioni elementari (il fatto che sia un omomorfismo che rende commutativo il diagramma segue da come φ è definita). Rispetto alla prima riduzione elementare dobbiamo verificare che se g_i e g_{i+1} appartengono allo stesso gruppo G_k allora $\varphi(g_i g_{i+1}) = \varphi(g_i) \varphi(g_{i+1})$. Infatti

$$\varphi(g_i g_{i+1}) = \varphi_k(g_i g_{i+1}) = \varphi_k(g_i) \varphi_k(g_{i+1}) = \varphi(g_i) \varphi(g_{i+1}).$$

Inoltre se 1_k denota l'elemento neutro in G_k e 1_G l'elemento neutro di G allora

$$\varphi(1_k) = \varphi_k(1_k) = 1_G$$

la quale mostra che φ non dipende da riduzioni elementari del secondo tipo e conclude la dimostrazione del teorema. \square

6.2 Gruppi liberi

Sia G un gruppo e $S \subset G$ un suo sottoinsieme. Diremo che S genera G e gli elementi di S verranno chiamati *generatori* di G , se ogni elemento di G può essere scritto come prodotto di elementi di S e dei loro inversi. Osserviamo che S genera G se e solo se S non è contenuto in nessun sottogruppo proprio di G . In altre parole se $S \subset G$ genera G allora ogni elemento di G può essere scritto come prodotto finito di potenze intere di elementi di S .

Chiaramente ogni gruppo ha un insieme di generatori dati dal gruppo stesso. Solitamente si cerca un numero di generatori che sia minimale. Un esempio semplice ma importante è quello di gruppo ciclico che ha precisamente un generatore. Segue dai corsi di algebra che un gruppo ciclico è isomorfo a \mathbb{Z} (gruppo ciclico infinito) oppure a \mathbb{Z}_n per qualche n (gruppo ciclico finito). Dato un qualunque simbolo x possiamo formare il gruppo ciclico infinito generato da x (e quindi isomorfo \mathbb{Z}) e denotato con $F(x)$. Questo gruppo non è nient'altro che l'insieme $\{x\} \times \mathbb{Z}$ con la moltiplicazione $(x, k)(x, l) = (x, k + l)$. Identifichiamo il simbolo x con $(x, 1)$. Possiamo quindi scrivere x^k al posto di (x, k) e pensare $F(x)$ come il gruppo di tutte le potenze intere di x con la moltiplicazione $x^m x^n = x^{m+n}$. Dato ora un insieme S definiamo il *gruppo libero su S* denotato con $F(S)$ come il prodotto libero di tutti i gruppi ciclici infiniti generati da elementi di S , cioè:

$$F(S) = *_{x \in S} F(x)$$

Chiaramente se S è in bigezione con S' allora $F(S)$ è isomorfo a $F(S')$. Osserviamo che esiste un'inclusione naturale $i : S \rightarrow F(S)$ che invia ogni $x \in S$ nella parola $x \in F(S)$. Possiamo quindi pensare S come un sottoinsieme di $F(S)$ e ogni elemento di $F(S)$ può essere scritto come una parola ridotta cioè come:

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m},$$

dove gli x_j sono elementi di S , $x_j \neq x_{j+1}$ per ogni j e n_j sono numeri interi. La moltiplicazione nel gruppo $F(S)$ si ottiene semplicemente per giustapposizione e sostituendo potenze consecutive dello stesso x_j come $x_j^m x_j^n = x_j^{m+n}$. Nel caso che $S = \{x_1, \dots, x_m\}$ sia un insieme finito denoteremo il gruppo libero generato da S con il simbolo $F(x_1, \dots, x_m)$. Gli x_j si chiamano i *generatori liberi* del gruppo $S = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Osservazione 6.2.1 Esistono gruppi che non sono liberi. Ad esempio ogni gruppo finito non è libero in quanto ogni gruppo libero ha un numero infinito di elementi.

La seguente proposizione mostra che il gruppo libero $F(S)$ soddisfa una proprietà universale.

Proposizione 6.2.2 (*proprietà universale dei gruppi liberi*) *Sia S un'insieme. Il gruppo libero $F(S)$ soddisfa la seguente proprietà universale: per ogni gruppo G e per ogni applicazione $\varphi : S \rightarrow G$ esiste un unico omomorfismo $\tilde{\varphi} : F(S) \rightarrow G$ che rende commutativo il seguente diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} & F(S) & \\ i \uparrow & \searrow \tilde{\varphi} & \\ S & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

Dimostrazione: Sia $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m} \in F(S)$ una parola non necessariamente ridotta. Definiamo

$$\tilde{\varphi}(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}) = \varphi(x_1)^{n_1} \varphi(x_2)^{n_2} \cdots \varphi(x_m)^{n_m}. \quad (6.3)$$

L'applicazione $\tilde{\varphi}$ è ben definita. Infatti:

$$\tilde{\varphi}(x_j^{m+n}) = \varphi(x_j)^{m+n} = \varphi(x_j)^m \varphi(x_j)^n = \tilde{\varphi}(x_j^m) \tilde{\varphi}(x_j^n)$$

Inoltre, per costruzione, $\tilde{\varphi}$ è l'unico omomorfismo di gruppi tale che $\varphi = \tilde{\varphi} \circ i$. \square

Il gruppo libero $F(S)$ su un insieme S è caratterizzato dalla precedente proprietà universale.

Proposizione 6.2.3 (*caratterizzazione dei gruppi liberi*) *Sia S un insieme, H un gruppo e $j : S \rightarrow H$ un'applicazione tale che per ogni gruppo G e per ogni applicazione $\psi : S \rightarrow G$ esiste un unico omomorfismo $\tilde{\psi} : H \rightarrow G$ che rende commutativo il seguente diagramma.*

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ j \uparrow & \searrow \tilde{\psi} & \\ S & \xrightarrow{\psi} & G \end{array}$$

Allora esiste un isomorfismo $\tilde{j} : F(S) \rightarrow H$ tale che $\tilde{j} \circ i = j$.

Dimostrazione: Per la proprietà universale di $F(S)$ e per le ipotesi esistono due morfismi $\tilde{i} : H \rightarrow F(S)$ e $\tilde{j} : F(S) \rightarrow H$ che rendono commutativi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} H & & F(S) \\ j \uparrow & \searrow \tilde{i} & i \uparrow \\ S & \xrightarrow{\quad} F(S) & S \xrightarrow{\quad} H \end{array}$$

Si ottengono quindi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} H & & F(S) \\ \uparrow i & \searrow \tilde{i} \circ \tilde{j} & \uparrow j \\ S & \xrightarrow{i} H & S \xrightarrow{j} F(S) \end{array}$$

Segue allora dall'unicità che $\tilde{i} \circ \tilde{j} = \text{id}_H$ e $\tilde{j} \circ \tilde{i} = \text{id}_{F(S)}$. Quindi \tilde{j} (risp. \tilde{i}) è l'unico isomorfismo che soddisfa $\tilde{j} \circ i = j$ (risp. $\tilde{i} \circ j = i$). \square

Gruppi abeliani liberi

Esiste un concetto analogo a quello di gruppo libero quello di *gruppo abeliano libero* che riveste un ruolo altrettanto importante nella teoria dei gruppi e in topologia per lo studio dei gruppi di omologia. Un gruppo abeliano libero condivide molte proprietà con gli spazi vettoriali ed è un caso particolare del concetto di *modulo libero*. Non tratteremo questo importantissimo e affascinante argomento e rinviando il lettore ai corsi di algebra. Osserviamo solo che un gruppo abeliano libero finitamente generato è isomorfo a $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$. Inoltre usando la teoria dei gruppi abeliani liberi si dimostra il seguente:

Teorema 6.2.4 (*teorema fondamentale sui gruppi abeliani finitamente generati*)
Sia G un gruppo abeliano finitamente generato. Allora G è isomorfo al prodotto diretto:

$$\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{(p_1)^{r_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{(p_k)^{r_k}},$$

dove i p_j sono numeri primi non necessariamente distinti. Inoltre il prodotto diretto è unico a meno di permutazione dei fattori e quindi il numero dei fattori \mathbb{Z} è unico e le potenze di primi $(p_j)^{r_j}$ sono uniche.

Il numero dei fattori \mathbb{Z} che appaiono nel teorema è chiamato il *rango* di G e è il gruppo $\mathbb{Z}_{(p_1)^{r_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{(p_k)^{r_k}}$, il *sottogruppo di torsione* di G .

6.3 Presentazione di gruppi

A volte è utile descrivere un dato gruppo specificando un insieme di suoi “generatori” soggetti ad alcune “relazioni” che ci dicono come moltiplicare i generatori tra loro. Per esempio il gruppo ciclico di ordine n generato da x può essere descritto come il gruppo generato da x con la relazione $x^n = 1$. Tutte le altre relazioni “seguono” da questa, per esempio $x^{2n} = 1$. Oppure il gruppo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ può essere descritto da due generatori x e y con la relazione $xy = yx$. Il gruppo $F(x, y) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ può essere descritto dai generatori x, y senza relazioni. In effetti

il fatto che alcune relazioni “seguano” da altre può essere reso rigoroso tramite il concetto di presentazione di gruppo.

Sia S un insieme. Sia R un insieme di elementi del gruppo libero $F(S)$ generato da S . Consideriamo il gruppo $\langle S \mid R \rangle$ definito come il quoziente

$$\langle S \mid R \rangle = F(S)/N(R)$$

dove $N(R)$ denota la *chiusura normale* di R in $F(S)$, ossia il più piccolo sottogruppo normale di $F(S)$ che contiene R ossia come l'intersezione di tutti i sottogruppi normali di $F(S)$ che contengono R . Una descrizione equivalente di $N(R)$ è descritta dal risultato seguente.

Proposizione 6.3.1 *Sia G un gruppo e R un suo sottoinsieme. Allora $N(R)$ è generato da tutti i coniugati di elementi di R .*

Dimostrazione: Sia N' il sottogruppo di G generato da tutti i coniugati di elementi di R (ossia elementi della forma grg^{-1} oppure $gr^{-1}g^{-1}$ con $g \in G$ e $r \in R$). Vogliamo far vedere che $N' = N(R)$. Chiaramente $N' \subset N(R)$ in quanto $N(R)$ è normale in G e contiene R . Resta da far vedere che N' è normale in G e cioè che $gn'g^{-1}$ appartiene a N' per ogni $g \in G$ e $n' \in N'$. Ogni $n' \in N'$ è il prodotto $n' = g_1x_1g_1^{-1} \cdots g_mx_mg_m^{-1}$, $g_j \in G$ e $x_j \in R$ oppure $x_j \in R^{-1} = \{r^{-1} \mid r \in R\}$. Segue che

$$gn'g^{-1} = g(g_1x_1g_1^{-1} \cdots g_mx_mg_m^{-1})g^{-1} = gg_1x_1(gg_1)^{-1} \cdots gg_mx_m(gg_m)^{-1}$$

che è ancora un elemento di N' . □

La coppia (S, R) viene detta *presentazione* del gruppo $\langle S \mid R \rangle$, gli elementi di S sono chiamati *generatori* e gli elementi di R *relazioni*. Ovviamente se $R = \emptyset$ allora $\langle S \mid R \rangle = \langle S \mid \emptyset \rangle = F(S)$.

Diremo che un gruppo G è presentato da una coppia (S, R) con $R \subset F(S)$, se G è isomorfo al gruppo $\langle S \mid R \rangle$. Il gruppo $\langle S \mid R \rangle$ si può pensare come il più grande gruppo quoziente di $F(S)$ dove gli elementi di R si identificano con l'identità. Osserviamo che ogni gruppo G ammette una presentazione. Infatti gli elementi di G chiaramente generano G . Inoltre, per la proprietà universale dei gruppi liberi l'identità di G si estende in modo unico ad un omomorfismo suriettivo $\tilde{\varphi} : F(G) \rightarrow G$. Se $R = N(R)$ denota il nucleo di $\tilde{\varphi}$ allora per il primo teorema di isomorfismo

$$G \cong F(G)/N(R) = \langle G \mid R \rangle.$$

Ovviamente questa presentazione non è molto efficiente: ci piacerebbe avere delle presentazioni con il minor numero di generatori e relazioni. Se un gruppo G ammette una presentazione $\langle S \mid R \rangle$ dove S e R sono finiti diremo che G è *finitamente presentato*. In questo caso scriveremo la presentazione come $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$. Dal momento che tutti gli elementi r_i sono uguali all'identità nel gruppo scriveremo anche

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1 = 1, \dots, r_m = 1 \rangle.$$

A volte useremo anche notazioni come $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1 = q_1, \dots, r_m = q_m \rangle$ oppure $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1 q_1^{-1} = 1, \dots, r_m q_m^{-1} = 1 \rangle$.

Esempio 6.3.2 Il gruppo libero $F(x_1, \dots, x_n)$ ha una presentazione

$$F(x_1, \dots, x_n) \cong \langle x_1, \dots, x_n \mid \emptyset \rangle,$$

Esempio 6.3.3 Il gruppo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ha una presentazione $\langle x, y \mid xy = yx \rangle$. Osserviamo che i simboli x e y sono i generatori del gruppo libero $F(x, y)$ oppure possono essere visti nel quoziente $\langle x, y \mid xy = yx \rangle = F(x, y)/N(R)$ dove R è costituito da una sola parola $R = \{xyx^{-1}y^{-1}\}$. Usando la relazione R si deduce facilmente (con un ragionamento induttivo) che il gruppo $F(x, y)/N(R)$ è abeliano. Consideriamo l'applicazione $\varphi : \{x, y\} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tale che $\varphi(x) = (1, 0)$ e $\varphi(y) = (0, 1)$. Per la proprietà universale dei gruppi liberi esiste un unico omomorfismo $\tilde{\varphi} : F(x, y) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dato da (cf. (6.3))

$$\tilde{\varphi}(x^{n_1}y^{m_1} \dots x^{n_k}y^{m_k}) = n_1\varphi(x) + m_1\varphi(y) + \dots + n_k\varphi(x) + m_k\varphi(y) =$$

$$(n_1, 0) + (0, m_1) + \dots + (n_k, 0) + (0, m_k) = (n_1 + \dots + n_k, m_1 + \dots + m_k)$$

Segue che il $R \subset \text{Ker } \tilde{\varphi}$ e quindi $N(R) \subset \text{Ker } \tilde{\varphi}$. Resta così definito un omomorfismo

$$\tilde{\Phi} : F(x, y)/N(R) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad x^{n_1}y^{m_1} \dots x^{n_k}y^{m_k} \mapsto (n_1 + \dots + n_k, m_1 + \dots + m_k),$$

dove questa volta stiamo pensando a $x^{n_1}y^{m_1} \dots x^{n_k}y^{m_k}$ come una classe d'equivalenza nel quoziente $F(x, y)/N(R)$. Definiamo un'applicazione

$$\tilde{\Psi} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow F(x, y)/N(R), \quad (m, n) \mapsto x^m y^n$$

(anche qui $x^m y^n$ è la classe d'equivalenza nel quoziente $F(x, y)/N(R)$). Il fatto che $F(x, y)/N(R)$ sia abeliano implica che $\tilde{\Psi}$ è un omomorfismo. Inoltre è immediato verificare che $(\tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi})(m, n) = (m, n)$, $(\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi})(x) = x$ e $(\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi})(y) = y$ che mostra che $\tilde{\Phi}$ è un isomorfismo di gruppi con inversa $\tilde{\Psi}$.

Esempio 6.3.4 Il gruppo ciclico \mathbb{Z}_n ha una presentazione $\mathbb{Z}_n \cong \langle x \mid x^n = 1 \rangle$. La verifica è lasciata allo studente.

Esempio 6.3.5 Il gruppo $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ ha una presentazione

$$\langle x, y \mid x^n = 1, y^m = 1, xy = yx \rangle$$

la verifica è lasciata allo studente.

Esempio 6.3.6 I due gruppi $G = \langle a, b \mid baba^{-1} \rangle$ e $H = \langle a, c \mid a^2c^2 \rangle$ sono isomorfi. Sia

$$\varphi : \{a, b\} \rightarrow H$$

definita da $\varphi(a) = a$ e $\varphi(b) = ca$, dove nei secondi membri a e ca denotano le classi di a e ca (elementi di $F(a, c)$) in $H = F(a, c)/N(R_2)$, $R_2 = \{a^2c^2\}$. Per la proprietà universale dei gruppi liberi esiste un unico omomorfismo $\tilde{\varphi} : F(a, b) \rightarrow H$ tale che $\tilde{\varphi}(a) = \varphi(a) = a$ e $\tilde{\varphi}(b) = \varphi(b) = ca$. Osserviamo che $baba^{-1} \in \text{Ker } \tilde{\varphi}$, infatti, usando la (6.3),

$$\tilde{\varphi}(baba^{-1}) = \varphi(b)\varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)^{-1} = caaca^{-1} = ca^2c = c(a^2c^2)c^{-1} = cc^{-1} = 1.$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la relazione $a^2c^2 = 1$ valida in H . Quindi, essendo $G = F(a, b)/N(R_1)$, $R_1 = \{baba^{-1}\}$ allora $N(R_1) \subset \text{Ker } \tilde{\varphi}$ e quindi resta definito un unico omomorfismo $\tilde{\Phi} : G \rightarrow H$ tale che $\tilde{\Phi}(a) = a$ e $\tilde{\Phi}(b) = ca$, dove a e b al primo membro denotano le classi di a e b in $G = F(a, b)/N(R_1)$. Sia ora

$$\psi : \{a, c\} \rightarrow G$$

definita da $\psi(a) = a$ e $\psi(c) = ba^{-1}$ (dove nei secondi membri a e ba^{-1} rappresentano le classi di a e ba^{-1} in G). Per la proprietà universale dei gruppi liberi esiste un unico omomorfismo $\tilde{\psi} : F(a, c) \rightarrow G$ tale che $\tilde{\psi}(a) = \psi(a) = a$ e $\tilde{\psi}(c) = \psi(c) = ba^{-1}$. Osserviamo che $a^2c^2 \in \text{Ker } \tilde{\psi}$. Infatti, sempre per la (6.3),

$$\tilde{\psi}(a^2c^2) = \psi(a)^2\psi(c)^2 = a^2ba^{-1}ba^{-1} = ab^{-1}(baba^{-1})ba^{-1} = ab^{-1}ba^{-1} = 1.$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la relazione $baba^{-1} = 1$ valida in G . Quindi, $N(R_2) \subset \text{Ker } \tilde{\psi}$ e resta definito un unico omomorfismo $\tilde{\Psi} : H \rightarrow G$ tale che $\tilde{\Psi}(a) = a$ e $\tilde{\Psi}(c) = ba^{-1}$ (dove a e c al primo membro rappresentano le classi di a e c in H). Osserviamo infine che $(\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi})(a) = a$, $(\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi})(b) = b$, $(\tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi})(a) = a$, $(\tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi})(c) = c$ che mostrano che $\tilde{\Phi}$ è un isomorfismo con inversa $\tilde{\Psi}$.

Concludiamo questo paragrafo osservando che nonostante le presentazioni finite di un gruppo forniscano un modo semplice e concreto per il suo studio molte delle questioni basilari riguardanti il gruppo non sono facilmente accessibili. Intorno al 1910, appena dopo l'invenzione del gruppo fondamentale, i due topologi Henrich Tietze e Max Dehn posero i seguenti problemi:

- **Il problema dell'isomorfismo:** date due presentazioni finite di due gruppi capire se i gruppi sono isomorfi;
- **Il problema della parola:** data una presentazione finita $\langle S|R \rangle$ e una parola $s \in \langle S \rangle$ capire quando $s = 1$ in $\langle S|R \rangle$ (equivalentemente capire quando due parole sono uguali).

Non esiste una procedura generale che permetta di risolvere nessuno dei due problemi. Per esempio la presentazione

$$\langle x, y \mid xy^2x^{-1}y^{-3}, yx^2y^{-1}x^{-3} \rangle$$

è isomorfa al gruppo banale ma la dimostrazione è tutt'altro che immediata (provare per credere!).

6.4 Abelianizzazioni

Sia G un gruppo e S un suo sottoinsieme. Ricordiamo che il sottogruppo $\langle S \rangle$ di G generato da S è il più piccolo sottogruppo che contiene S o equivalentemente, l'intersezione di tutti i sottogruppi di G che contengono S . Siano $x, y \in G$. Denotiamo con $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ il *commutatore* di x e y . Consideriamo il sottogruppo $G' \subset G$ generato dal sottoinsieme di G costituito da tutti i commutatori di G , ossia

$$G' = \langle [x, y], x, y \in G \rangle.$$

Chiaramente G' è banale se e solo se G è abeliano. La seguente proposizione riassume la proprietà principali del commutatore.

Proposizione 6.4.1 *Sia G un gruppo e G' il suo commutatore. Valgono i seguenti fatti:*

- 1) G' è un sottogruppo normale di G ;
- 2) il quoziente $Ab(G) = G/G'$ è un gruppo abeliano, chiamato l'abelianizzazione di G ;

- 3) se N è un sottogruppo normale di G e G/N è abeliano allora $G' \subset N$;
- 4) se G_1 e G_2 sono due gruppi isomorfi allora $\text{Ab}(G_1)$ è isomorfo a $\text{Ab}(G_2)$;
- 5) vale la seguente proprietà universale: per ogni gruppo abeliano H e per ogni omomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ esiste un unico omomorfismo $\tilde{\varphi} : \text{Ab}(G) \rightarrow H$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\varphi} & \\ \text{Ab}(G) & & \end{array}$$

dove $\pi : G \rightarrow \text{Ab}(G)$ denota la proiezione sul quoziente;

- 6) $\text{Ab}(G)$ è univocamente determinato a meno di isomorfismi dalla precedente proprietà universale.

Dimostrazione: Per dimostrare la 1) ossia che G' è un sottogruppo normale di G bisogna verificare che gzg^{-1} appartiene a G' per ogni $z \in G'$ e $g \in G$. Osserviamo che ogni $z \in G'$ è il prodotto di commutatori e dei loro inversi e siccome $[x, y]^{-1} = [y, x]$ allora z è prodotto di commutatori, ossia $z = z_1 \dots z_n$ dove z_j sono commutatori. Segue che

$$gzg^{-1} = (gz_1g^{-1}) \cdots (gz_ng^{-1})$$

e per dimostrare la 1) è sufficiente verificare che il coniugato $g[x, y]g^{-1}$ di un commutatore $[x, y]$ appartiene a G' per ogni $x, y, g \in G$. Questo si dimostra come segue:

$$g[x, y]g^{-1} = g(xy x^{-1} y^{-1})g^{-1} = (gxy x^{-1})(g^{-1} y^{-1} yg)(y^{-1} g^{-1}) = [gx, y][y, g]$$

che appartiene a G' .

Dimostriamo la 2) ossia che $\text{Ab}(G)$ è un gruppo abeliano. Siano xG', yG' due elementi arbitrari di $\text{Ab}(G)$. Allora $\text{Ab}(G)$ è abeliano se e solo se $xyG' = yxG'$ ossia $xyx^{-1}y^{-1}G' = [x, y]G' = G'$. Questo è equivalente al fatto che $[x, y] \in G'$ che è vero per la definizione di G' .

La 3) e la 4) sono lasciate come una semplice esercizio allo studente.

Per dimostrare la 5) osserviamo che essendo H abeliano allora $G' \subset \text{Ker } \varphi$. Quindi φ scende al quoziente rispetto a π , cioè esiste un unico omomorfismo $\tilde{\varphi} : \text{Ab}(G) = G/G' \rightarrow H$ tale che $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

Infine per dimostrare la 6) supponiamo che esista un gruppo abeliano A e un omomorfismo $\pi' : G \rightarrow A$ tale che per ogni gruppo abeliano K e per ogni

omomorfismo $\psi : G \rightarrow K$ esiste un unico omomorfismo $\tilde{\psi} : A \rightarrow K$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\psi} & K \\ \pi' \downarrow & \nearrow \tilde{\psi} & \\ A & & \end{array}$$

Allora per la proprietà universale data dal punto 5) si ottengono i due diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi'} & A \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\pi}' & \\ \text{Ab}(G) & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & \text{Ab}(G) \\ \pi' \downarrow & \nearrow \tilde{\pi} & \\ A & & \end{array}$$

i quali implicano

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & \text{Ab}(G) \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\pi} \circ \tilde{\pi}' & \\ \text{Ab}(G) & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi'} & A \\ \pi' \downarrow & \nearrow \tilde{\pi}' \circ \tilde{\pi} & \\ A & & \end{array}$$

Segue dall'unicità che $\tilde{\pi} \circ \tilde{\pi}' = \text{id}_{\text{Ab}(G)}$ e $\tilde{\pi}' \circ \tilde{\pi} = \text{id}_A$ e quindi $\tilde{\pi}$ è un isomorfismo con inversa $\tilde{\pi}'$ (e quindi $\text{Ab}(G)$ è unico a meno di isomorfismi). \square

I due esempi che seguono saranno importanti per la classificazione delle superfici compatte nel Capitolo 8.

Esempio 6.4.2 Sia g un numero naturale positivo. Consideriamo la presentazione data da:

$$G = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle.$$

Vogliamo mostrare che $\text{Ab}(G) \cong \mathbb{Z}^{2g}$. Cominciamo a definire un'applicazione

$$\varphi : \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\} \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}, \quad \varphi(a_j) := e_j, \quad \varphi(b_j) := e_{j+g}, \quad j = 1, \dots, g,$$

dove $e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $k = 1, \dots, 2g$ (1 nella posizione k -esima). Per la proprietà universale dei gruppi liberi esiste un unico omomorfismo

$$\tilde{\varphi} : F(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g) \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$$

definito dall'equazione:

$$\tilde{\varphi}(a_j) = \varphi(a_j) = e_j, \quad \tilde{\varphi}(b_j) = \varphi(b_j) = e_{j+g}, \quad j = 1, \dots, g.$$

e dalla (6.3), cioè

$$\tilde{\varphi}(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}) = n_1 \varphi(x_1) + n_2 \varphi(x_2) + \cdots + n_m \varphi(x_m).$$

dove gli x_r sono uguali a qualche a_j oppure b_j . Segue facilmente che $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \in \text{Ker } \tilde{\varphi}$. Siccome

$$G = F(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g) / N(R), \quad R = \{a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}\},$$

segue che $N(R) \subset \text{Ker } \tilde{\varphi}$ e quindi resta definito un unico omomorfismo $\tilde{\Phi} : G \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$ tale che

$$\tilde{\Phi}(a_j) = e_j, \quad \tilde{\Phi}(b_j) = e_{j+g}, \quad j = 1, \dots, g,$$

dove a_j e b_j denotano le classi d'equivalenza nel gruppo G .

Per la proprietà universale delle abelianizzazioni (punto 5) della Proposizione 6.4.1) esiste un unico omomorfismo $\tilde{\tilde{\Phi}} : \text{Ab}(G) \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$ tale che $\tilde{\tilde{\Phi}} \circ \pi = \tilde{\Phi}$, dove $\pi : G \rightarrow \text{Ab}(G)$ è l'applicazione quoziente. Sia ora $\tilde{\tilde{\Psi}} : \mathbb{Z}^{2g} \rightarrow \text{Ab}(G)$ l'omomorfismo univocamente determinato dalle equazioni:

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(e_k) = \begin{cases} [a_k] & \text{se } 1 \leq k \leq g \\ [b_{k-g}] & \text{se } g+1 \leq k \leq 2g, \end{cases}$$

(e quindi

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(m_1 e_1 + \cdots + m_{2g} e_{2g}) = \tilde{\tilde{\Psi}}(e_1)^{m_1} \cdots \tilde{\tilde{\Psi}}(e_{2g})^{m_{2g}}$$

dove le parentesi quadre rappresentano le classi d'equivalenza in $\text{Ab}(G)$.

Osserviamo infine che

$$(\tilde{\tilde{\Psi}} \circ \tilde{\tilde{\Phi}})(a_j) = a_j, \quad j = 1, \dots, g,$$

e

$$(\tilde{\tilde{\Psi}} \circ \tilde{\tilde{\Phi}})(e_k) = e_k, \quad k = 1, \dots, g$$

dalle quali segue che $\tilde{\tilde{\Phi}}$ è un isomorfismo con inversa $\tilde{\tilde{\Psi}}$.

Esempio 6.4.3 Sia g un numero naturale positivo. Consideriamo la presentazione data da:

$$H = \langle a_1, a_2, \dots, a_g \mid a_1^2 a_2^2 \cdots a_g^2 \rangle.$$

Vogliamo mostrare che $\text{Ab}(H) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$. Definiamo un'applicazione

$$\varphi : \{a_1, \dots, a_g\} \rightarrow \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2,$$

come segue:

$$\varphi(a_k) = \begin{cases} e_k & \text{se } 1 \leq k \leq g-1 \\ f - e_1 - \cdots - e_{g-1} & \text{se } k = g, \end{cases}$$

dove $e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $k = 1, \dots, g-1$ (1 nella posizione k -esima) e $f = (0, \dots, 0, e) \in \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$, dove $e \neq 0$ e $e + e = 2e = 0$. Per la proprietà universale dei gruppi liberi esiste un unico omomorfismo

$$\tilde{\varphi} : F(a_1, \dots, a_g) \rightarrow \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$$

definito dall'equazione:

$$\tilde{\varphi}(a_k) = \varphi(a_k) = e_k, \quad \tilde{\varphi}(a_g) = \varphi(a_g) = f - e_1 - \cdots - e_{g-1}, \quad k = 1, \dots, g-1$$

e da e dalla (6.3), cioè

$$\tilde{\varphi}(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}) = n_1 \varphi(x_1) + n_2 \varphi(x_2) + \cdots + n_m \varphi(x_m).$$

dove gli x_r sono uguali a qualche a_j . Si verifica facilmente che $\tilde{\varphi}(a_1^2 \cdots a_g^2) = 0$ e quindi $a_1^2 \cdots a_g^2 \in \text{Ker } \tilde{\varphi}$. Siccome

$$H = F(a_1, \dots, a_g)/N(R), \quad R = \{a_1^2 \cdots a_g^2\}$$

segue che $N(R) \subset \text{Ker } \tilde{\varphi}$ e resta quindi così definito un unico omomorfismo $\tilde{\Phi} : H \rightarrow \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$ tale che

$$\tilde{\Phi}(a_k) = \begin{cases} e_k & \text{se } 1 \leq k \leq g-1 \\ f - e_1 - \cdots - e_{g-1} & \text{se } k = g, \end{cases}$$

dove gli a_k denotano le classi d'equivalenza nel gruppo H .

Per la proprietà universale delle abelianizzazioni esiste un unico omomorfismo $\tilde{\tilde{\Phi}} : \text{Ab}(H) \rightarrow \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$ tale che $\tilde{\tilde{\Phi}} \circ \pi = \tilde{\Phi}$, dove $\pi : H \rightarrow \text{Ab}(H)$ è l'applicazione quoziente. Sia ora $\tilde{\tilde{\Psi}} : \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Ab}(H)$ l'omomorfismo definito dalle equazioni:

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(e_k) = [a_k], \quad k = 1, \dots, g-1, \quad \tilde{\tilde{\Psi}}(f) = [a_1 \cdots a_g]$$

(e quindi

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(m_1 e_1 + \cdots + m_{g-1} e_{g-1} + m f) = \tilde{\tilde{\Psi}}(e_1)^{m_1} \cdots \tilde{\tilde{\Psi}}(e_{g-1})^{m_{g-1}} \tilde{\tilde{\Psi}}(f)^m,$$

dove le parentesi quadre rappresentano le classi d'equivalenza in $\text{Ab}(H)$. Si verifica immediatamente che

$$(\tilde{\tilde{\Psi}} \circ \tilde{\tilde{\Phi}})([a_k]) = [a_k], \quad (\tilde{\tilde{\Phi}} \circ \tilde{\tilde{\Psi}})(e_k) = e_k, \quad k = 1, \dots, g-1,$$

$$(\tilde{\tilde{\Psi}} \circ \tilde{\tilde{\Phi}})([a_g]) = [a_g], \quad (\tilde{\tilde{\Phi}} \circ \tilde{\tilde{\Psi}})(f) = f$$

e quindi $\tilde{\tilde{\Psi}}$ è l'inversa di $\tilde{\tilde{\Phi}}$.

6.5 Esercizi

Esercizio 6.1 Siano G_1 e G_2 due gruppi e $G = G_1 * G_2$. Sia $\{H_j\}_{j \in J}$ una famiglia di sottogruppi di G_1 tali che $G_1 = *_{j \in J} H_j$ e sia $\{H_k\}_{k \in K}$ è una famiglia di sottogruppi di G_2 tali che $G_2 = *_{k \in K} H_k$. Dimostrare che se gli indici J and K sono disgiunti allora

$$G = *_{l \in L} H_l, \quad L = J \cup K.$$

Dedurre che se G_1, G_2 e G_3 sono tre gruppi allora:

$$(G_1 * G_2) * G_3 = G_1 * (G_2 * G_3) = G_1 * (G_2 * G_3).$$

(Suggerimento: usare la proprietà universale del prodotto libero di gruppi).

Esercizio 6.2 Siano H_1, H_2, G_1 e G_2 gruppi e $\varphi_j : G_j \rightarrow H_j, j = 1, 2$ due omomorfismi. Dimostrare che esiste un unico omomorfismo

$$\varphi_1 * \varphi_2 : G_1 * G_2 \rightarrow H_1 * H_2$$

tale che il seguente diagramma è commutativo per ogni $j = 1, 2$.

$$\begin{array}{ccc} G_1 * G_2 & \xrightarrow{\varphi_1 * \varphi_2} & H_1 * H_2 \\ i_{G_j} \downarrow & & \downarrow i_{H_j} \\ G_j & \xrightarrow{\varphi_j} & H_j \end{array}$$

dove $i_{G_j} : G_j \rightarrow G_1 * G_2$ (resp. $i_{H_j} : H_j \rightarrow H_1 * H_2$) è l'inclusione naturale. (Suggerimento: usare la proprietà universale del prodotto libero di gruppi).

Esercizio 6.3 Dimostrare che il prodotto libero di due o più gruppi non banali non è abeliano.

Esercizio 6.4 Dimostrare che il centro del prodotto libero di due o più gruppi (non banali) è banale. Dedurre che $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ non è un gruppo libero (pur essendo un gruppo abeliano libero).

Esercizio 6.5 Dimostrare gli isomorfismi degli Esempi 6.3.4 e 6.3.5.

Esercizio 6.6 Dimostrare che il gruppo $G = \langle a, b \mid a^4, b^2, aba^{-1}b^{-1} \rangle$ è isomorfo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

Esercizio 6.7 Dimostrare che il gruppo $G = \langle a, b \mid a^4ba^{-3}b^{-1}, a^5b^2a^{-4}b^{-2} \rangle$ non è il gruppo banale.

Esercizio 6.8 Sia S un insieme consideriamo gli elementi di S come simboli non commutativi. Dato $x \in S$ consideriamo il nuovo simbolo x^{-1} (non appartenente a S) e consideriamo l'insieme delle parole $\mathcal{P}(S)$ come l'insieme formato dall'espressioni della forma:

$$x_1^{\epsilon_1} \cdots x_k^{\epsilon_k}, x_j \in S, \epsilon_j = \pm 1$$

dove i simboli x_j non sono necessariamente distinti. Tra tutte le parole consideriamo anche la parola vuota che non contiene alcun simbolo. Definiamo una relazione d'equivalenza \sim su $\mathcal{P}(S)$ definendo due parole equivalenti se possono essere ottenute l'una dall'altra attraverso una delle seguenti operazioni

- inserire xx^{-1} oppure $x^{-1}x$ ($x \in S$) in una parola;
- cancellare xx^{-1} oppure $x^{-1}x$ ($x \in S$) in una parola;

Dimostrare che la giustapposizione di parole induce una struttura di gruppo sull'insieme $\mathcal{P}(S)/\sim$ il quale è isomorfo a $F(S)$.

Esercizio 6.9 Sia R' un sottoinsieme di parole di S ($R' \subset \mathcal{P}(S)$). Definiamo le seguenti operazioni su $\mathcal{P}(S)$:

- inserire xx^{-1} oppure $x^{-1}x$ ($x \in S$) in una parola;
- cancellare xx^{-1} oppure $x^{-1}x$ ($x \in S$) in una parola;
- inserire r oppure r^{-1} , $r \in R'$, in una parola;
- cancellare r oppure r^{-1} , $r \in R'$, in una parola.

Diremo che due parole $w, w' \in \mathcal{P}(S)$ sono equivalenti se w' può essere ottenuta da w tramite un numero finito di operazioni di questo tipo. L'insieme delle classi di equivalenza con l'operazione di giustapposizione forma un gruppo. Dimostrare che questo gruppo è isomorfo a $\langle S|R \rangle$ dove $R \subset F(S) \cong \mathcal{P}(S)/\sim$ (isomorfismo dato dall'esercizio precedente) e R è l'insieme delle classi d'equivalenza delle parole di R' .

Esercizio 6.10 Siano S_1 e S_2 due insiemi disgiunti e $R_1 \subset F(S_1)$ e $R_2 \subset F(S_2)$.

1. Dimostrare che $\langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \rangle$ è una presentazione del gruppo $\langle S_1 | R_1 \rangle * \langle S_2 | R_2 \rangle$.
2. Quale è una presentazione del prodotto diretto $\langle S_1 | R_1 \rangle \times \langle S_2 | R_2 \rangle$?

Esercizi per i più audaci

Esercizio 6.11 Siano S un insieme e $R \subset F(S)$ e $\tilde{R} \subset F(S)$ e sia $\pi : F(S) \rightarrow \langle S|R \rangle$ la proiezione sul quoziente. Dimostrare che $\langle S \mid R \cup \tilde{R} \rangle$ è una presentazione del gruppo $\langle S|R \rangle / N(\pi(\tilde{R}))$.

Esercizio 6.12 Sia $\langle S \mid R \rangle$ una presentazione di un gruppo G . Sia $\tilde{R} \subset F(S)$ l'insieme $\tilde{R} = \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in F(S)\}$. Dimostrare che $\langle S \mid R \cup \tilde{R} \rangle$ è una presentazione del gruppo $\text{Ab}(G)$.

Esercizio 6.13 Dimostrare che l'abelianizzazione definisce un funtore da \mathcal{G} in \mathcal{Ab} .

Esercizio 6.14 Siano G_1 e G_2 due gruppi. Dimostrare che

$$\text{Ab}(G_1 * G_2) = \text{Ab}(G_1) \oplus \text{Ab}(G_2).$$

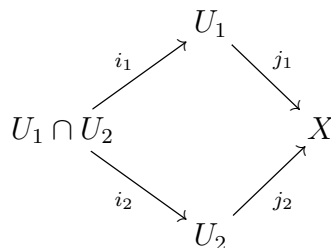
Esercizio 6.15 Dimostrare che il gruppo libero $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ha un sottogruppo libero con un'infinità numerabile di generatori liberi.

Capitolo 7

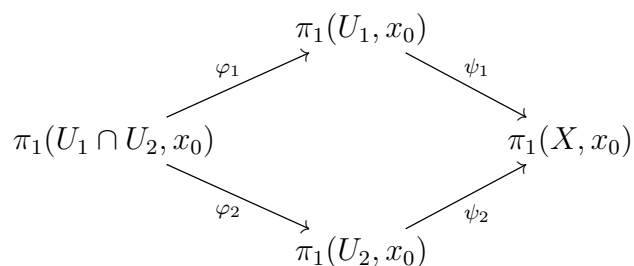
Il Teorema di Seifert–Van Kampen

7.1 Enunciato e dimostrazione parziale

In questo capitolo calcoleremo il gruppo fondamentale delle superfici compatte e di tanti altri spazi. Lo strumento fondamentale è il Teorema di Seifert–Van Kampen che prende il nome dai matematici Herbert Seifert e Egbert Van Kampen che dimostrarono il teorema indipendentemente agli inizi del 1930. Sia X uno spazio topologico e siano U_1 e U_2 due suoi sottoinsiemi aperti che siano connessi per archi tali che $X = U_1 \cup U_2$ e la cui intersezione $U_1 \cap U_2$ sia non vuota e connessa per archi. Sia $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Consideriamo le inclusioni $i_1 : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_1$, $i_2 : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_2$, $j_1 : U_1 \rightarrow X$ e $j_2 : U_2 \rightarrow X$ e il seguente diagramma:



Questo induce un diagramma sui gruppi fondamentali:



dove $\varphi_1 = (i_1)_*$, $\varphi_2 = (i_2)_*$, $\psi_1 = (j_1)_*$, $\psi_2 = (j_2)_*$ sono le applicazioni indotte sui rispettivi gruppi fondamentali. Inseriamo nel mezzo del diagramma il prodotto libero $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ e siano $i_{U_1} : \pi_1(U_1, x_0) \rightarrow \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ e $i_{U_2} : \pi_1(U_2, x_0) \rightarrow \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ le inclusioni canoniche. Per la proprietà universale del prodotto libero gli omomorfismi ψ_1 e ψ_2 inducono un omomorfismo

$$\Phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

che rende commutativo la parte destra del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_1(U_1, x_0) & & \\
 & \nearrow \varphi_1 & \downarrow i_{U_1} & \nwarrow \psi_1 & \\
 \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) & \xrightarrow{F} & \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) & \xrightarrow{\Phi} & \pi_1(X, x_0) \\
 & \searrow \varphi_2 & \uparrow i_{U_2} & \swarrow \psi_2 & \\
 & & \pi_1(U_2, x_0) & &
 \end{array}$$

Definiamo inoltre un'applicazione (che non è un omomorfismo)

$$F : \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \rightarrow \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$$

ponendo $F(\gamma) = \varphi_1(\gamma)\varphi_2(\gamma)^{-1}$, dove stiamo pensando a i_{U_1} e i_{U_2} come inclusioni. Consideriamo l'immagine di F ,

$$F(\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)) = \{\varphi_1(\gamma)^{-1}\varphi_2(\gamma) \mid \gamma \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)\}$$

e sia

$$N_F := N(F(\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0))) \subset \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$$

la sua chiusura normale in $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$. Possiamo ora enunciare enunciare il Teorema di Seifert-Van Kampen.

Teorema 7.1.1 (*Seifert-Van Kampen*) Sia X uno spazio topologico e U_1 e U_2 due sottoinsiemi aperti di X connessi per archi tali che $X = U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cap U_2$ è non vuoto e connesso per archi. Allora per ogni $x_0 \in U_1 \cap U_2$ l'omomorfismo Φ definito sopra è suriettivo e il suo nucleo è N_F . Conseguentemente

$$\pi_1(X, x_0) \cong (\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)) / N_F.$$

Notazioni. Prima di dimostrare (parzialmente) il teorema introduciamo alcune notazioni. Se f e g sono due archi in $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ oppure X scriveremo

$$f \sim_{U_1} g, f \sim_{U_2} g, f \sim_{U_1 \cap U_2} g, f \sim_X g$$

per indicare che f è omotopo relativamente a $\{0, 1\}$ a g in U_1 , U_2 , $U_1 \cap U_2$ oppure in X . Scriveremo anche $[f]_{U_1}, [f]_{U_2}, [f]_{U_1 \cap U_2}$ o $[f]_X$ per indicare la classe di equivalenza di omotopia dell'arco f relativa a $\{0, 1\}$ in U_1 , U_2 , $U_1 \cap U_2$ o X . Se consideriamo per esempio un elemento

$$[f_1]_{U_1} * [f_2]_{U_2} * \cdots * [f_{q-1}]_{U_1} * [f_q]_{U_2}$$

di $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ (dove $*$ rappresenta il prodotto nel gruppo libero) allora

$$\begin{aligned} \Phi([f_1]_{U_1} * [f_2]_{U_2} * \cdots * [f_{q-1}]_{U_1} * [f_q]_{U_2}) &= \psi_1([f_1]_{U_1}) \cdot \psi_2([f_2]_{U_2}) \cdots \psi_1([f_{q-1}]_{U_1}) \cdot \psi_2([f_q]_{U_2}) \\ &= [f_1]_X \cdot [f_2]_X \cdots [f_{q-1}]_X \cdot [f_q]_X = [f_1 \cdot f_2 \cdots f_{q-1} \cdot f_q]_X \end{aligned}$$

Dimostrazione del Teorema 7.1.1 Mostriamo che Φ è suriettiva. Sia $f : I \rightarrow X$ un laccio chiuso di base x_0 in X , $f(0) = f(1) = x_0$. Ragionando come nel Teorema 2.5.1 possiamo trovare una suddivisione di I , a_0, a_1, \dots, a_q , $a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_q = 1$ tale che per ogni $\alpha = 1, 2, \dots, q$, $f([a_{\alpha-1}, a_\alpha])$ è contenuto in U_1 oppure in U_2 e inoltre $f(a_\alpha) \in U_1 \cap U_2$, per ogni $\alpha = 1, \dots, q-1$. Sia ora $f_\alpha : I \rightarrow S^n$ l'arco definito da:

$$f_\alpha(t) = f((1-t)a_{\alpha-1} + ta_\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, q.$$

Dal Teorema 2.1.6 segue che $f \sim_X f_1 \cdots f_q$ o equivalentemente $[f]_X = [f_1 \cdots f_q]_X$. Ciascuno degli archi f_α non è un laccio basato in x_0 . Per rimediare a questo fatto usiamo la connessione per archi di $U_1 \cap U_2$ e definiamo un arco $r_\alpha : I \rightarrow U_1 \cap U_2$ da $x_0 \in U_1 \cap U_2$ a $f(a_\alpha) = f_\alpha(1)$ per ogni $\alpha = 1, \dots, q-1$, e poniamo $r_0 = r_q = \epsilon_{x_0}$ (arco costante di base x_0). Segue dal Lemma 2.1.2 che

$$r_0 \cdot f_1 \cdot i(r_1) \cdot r_1 \cdot f_2 \cdot i(r_2) \cdots r_{q-1} \cdot f_q \cdot i(r_q) \sim_X f$$

e quindi

$$[f]_X = [g_1 \cdots g_q]_X$$

dove

$$g_\alpha = r_{\alpha-1} \cdot f_\alpha \cdot i(r_\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, q$$

e un laccio chiuso di base x_0 interamente contenuto in U_1 o in U_2 .

DISEGNO

Supponiamo, per esempio, che g_1 sia contenuto in U_1 , g_2 in U_2, \dots , g_{q-1} in U_1 e g_q in U_2 . Consideriamo ora l'elemento

$$s = [g_1]_{U_1} * [g_2]_{U_2} * \cdots * [g_{q-1}]_{U_1} * [g_q]_{U_2}$$

Allora usando le notazioni introdotte si ottiene

$$\Phi(s) = [g_1 \cdots g_q]_X = [f]_X$$

e quindi Φ è suriettiva. Vogliamo dimostrare adesso che $N_F = \text{Ker } \Phi$. La dimostrazione dell'inclusione $\text{Ker } \Phi \subset N$ è la parte più delicata del teorema e non verrà dimostrata (il lettore è rinviato a [12] in bibliografia). Dimostreremo solo l'inclusione $N_F \subset \text{Ker } \Phi$. Per fare questo è sufficiente dimostrare che $F(\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)) \subset \text{Ker } \Phi$. Sia dunque $[f]_{U_1 \cap U_2} \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$. Allora

$$\begin{aligned} \Phi(F([f]_{U_1 \cap U_2})) &= \Phi(\varphi_1([f]_{U_1 \cap U_2})^{-1} * \varphi_2([f]_{U_1 \cap U_2})) = \\ &= \Phi([i(f)]_{U_1} * [f]_{U_2}) = [i(f) \cdot f]_X = 1 \end{aligned}$$

che è quello che si voleva dimostrare. \square

Quando i gruppi fondamentali coinvolti hanno una presentazione finita il Teorema di Seifert–Van Kampen può essere espresso in termini di generatori e relazioni.

Proposizione 7.1.2 *Nelle stesse ipotesi del Teorema 7.1.1 supponiamo inoltre che i gruppi fondamentali di U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ abbiano le seguenti presentazioni finite*

$$\begin{aligned} \pi_1(U_1, x_0) &= \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \mid \rho_1, \dots, \rho_r \rangle; \\ \pi_1(U_2, x_0) &= \langle \beta_1, \dots, \beta_n \mid \sigma_1, \dots, \sigma_s \rangle; \\ \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) &= \langle \gamma_1, \dots, \gamma_p \mid \tau_1, \dots, \tau_t \rangle. \end{aligned}$$

Allora il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ ha la seguente presentazione finita

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \mid \rho_1, \dots, \rho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s, u_1 = v_1, \dots, u_p = v_p \rangle$$

dove, per ogni $\alpha = 1, \dots, p$, u_α è un'espressione di $\varphi_1(\gamma_\alpha) \in \pi_1(U_1, x_0)$ rispetto ai generatori $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ e v_α è un'espressione di $\varphi_2(\gamma_\alpha) \in \pi_1(U_2, x_0)$ rispetto ai generatori $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$.

Dimostrazione: lasciata come esercizio (si veda l'Esercizio 7.13). \square

Osservazione 7.1.3 Notiamo che le relazioni $\{\tau_1, \dots, \tau_t\}$ della presentazione del gruppo $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ non giocano nessun ruolo nel calcolo di $\pi_1(X, x_0)$.

7.2 Prima applicazione: U_1 e U_2 semplicemente connessi

Il corollario che segue è una conseguenza immediata del teorema di Seifert–Van Kampen.

Corollario 7.2.1 *Sia X uno spazio topologico che possa essere scritto come unione $X = U_1 \cup U_2$ di due aperti semplicemente connessi U_1 e U_2 la cui intersezione è non vuota e connessa per archi. Allora X è semplicemente connesso.*

Vogliamo usare il corollario per (ri)calcolare il gruppo fondamentale della sfera, del complementare di un numero finito di punti di \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, e del proiettivo complesso.

La sfera S^n è semplicemente connessa per $n \geq 2$

Siano N e S il polo nord e il polo sud di S^n . Allora gli aperti $U_1 = S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$ e $U_2 = S^n \setminus \{S\} \cong \mathbb{R}^n$ e $U_1 \cap U_2 \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ soddisfano le ipotesi del Corollario 7.2.1 e quindi S^n è semplicemente connessa.

Il complementare di un numero finito di punti di \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, è semplicemente connesso

Siano p_1, \dots, p_k un numero finito di punti distinti di \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Sia $X = \mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$. Allora X è semplicemente connesso. Ragioniamo per induzione sul numero k dei punti. Se $k = 0$, \mathbb{R}^n è semplicemente connesso (addirittura convesso e quindi contraibile). Per $k = 1$, $\mathbb{R}^n \setminus \{p_1\}$ è semplicemente connesso per il Corollario 2.5.2. Sia quindi $k \geq 2$ e supponiamo che $\mathbb{R}^n \setminus \{s \text{ punti}\}$ sia semplicemente connesso per tutti gli $s < k$. Consideriamo un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $h(p_1) \neq h(p_2)$. Scambiando eventualmente p_1 con p_2 possiamo assumere $h(p_1) < h(p_2)$. Allora $U_1 = \{x \in X \mid h(x) < h(p_2)\}$, $U_2 = \{x \in X \mid h(x) > h(p_1)\}$ e $U_1 \cap U_2 = \{x \in X \mid h(p_1) < h(x) < h(p_2)\}$ sono tutti omeomorfi rispettivamente a $\mathbb{R}^n \setminus \{s_1 \text{ punti}\}$, $\mathbb{R}^n \setminus \{s_2 \text{ punti}\}$ e $\mathbb{R}^n \setminus \{s_3 \text{ punti}\}$ con $s_j < k$, $j = 1, 2, 3$. Applicando l'ipotesi induttiva e il Corollario 7.2.1 si deduce allora che X è semplicemente connesso.

Lo spazio proiettivo complesso

Definiamo ora lo spazio proiettivo complesso. La definizione è simile a quella dal proiettivo reale estesa al caso dei numeri complessi. Sia $n \geq 0$ un numero

naturale e sia $X = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Definiamo una relazione di equivalenza \sim su X dichiarando $z \sim w$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che $w = \lambda z$. Lo spazio quoziente (con la topologia quoziente) si chiama *lo spazio proiettivo complesso n -dimensionale* e verrà indicato con \mathbb{CP}^n . Un punto di \mathbb{CP}^n verrà denotato con $[z]$. Se restringiamo la relazione d'equivalenza alla sfera unitaria in $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ possiamo pensare a \mathbb{CP}^n come l'insieme delle classi d'equivalenza in S^{2n+1} dove $z \sim w$, $z, w \in S^{2n+1}$ se e solo se esiste $\lambda \in S^1$ tale che $w = \lambda z$. Esattamente come nel caso di \mathbb{RP}^n (cf. Teorema 11.5.1 di [9] in bibliografia) si dimostra che \mathbb{CP}^n è una varietà topologica compatta e connessa di dimensione $2n$ (i dettagli sono lasciati allo studente). Analogamente al caso di \mathbb{RP}^n , l'atlante canonico $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j=0, \dots, n}$ è dato dagli aperti

$$U_j = \{[z] = [z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{CP}^n \mid z_j \neq 0\},$$

insieme alle carte

$$\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}, \quad [z] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right). \quad (7.1)$$

Osserviamo che per $n = 0$, \mathbb{CP}^0 si riduce ad un punto. Mentre per $n = 1$, \mathbb{CP}^1 è omeomorfo alla sfera S^2 . Per vedere questo fatto diamo una descrizione esplicita delle carte φ_0 e φ_1 dell'atlante canonico $\{U_j, \varphi_j\}_{j=0,1}$ di \mathbb{CP}^1 . Da (7.1) otteniamo:

$$\varphi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}, \quad [z_0, z_1] \mapsto \frac{z_1}{z_0} = z = x + iy \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2,$$

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}, \quad [z_0, z_1] \mapsto \frac{z_0}{z_1} = w = u + iv \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

Mentre le loro inverse sono:

$$\varphi_0^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow U_0, \quad z \mapsto [1, z],$$

$$\varphi_1^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow U_1, \quad w \mapsto [w, 1].$$

Siano $N = (0, 0, 1)$ e $S = (0, 0, -1)$ il polo nord e il polo sud della sfera

$$S^2 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + t^2 = 1\} = \{(z, t) \mid |z|^2 + t^2 = 1\}, \quad z = x + iy.$$

Consideriamo l'atlante su S^2 costituito dalle due carte $(U_N = S^2 \setminus \{N\}, \varphi_N)$ e $(U_S = S^2 \setminus \{S\}, \varphi_S)$ di S^2 date da:

$$\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, \quad (x, y, t) \mapsto \left(\frac{x}{1-t}, \frac{y}{1-t} \right) = \frac{z}{1-t}$$

7.3. SECONDA APPLICAZIONE: $U_1 \cap U_2$ SEMPLICEMENTE CONNESSO 97

$$\bar{\varphi}_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, (x, y, t) \mapsto \left(\frac{x}{1+t}, \frac{-y}{1+t} \right) = \frac{\bar{z}}{1+t},$$

dove $z = x + iy$. Lo studente avrà notato che φ_N è esattamente la proiezione stereografica dal polo nord mentre $\bar{\varphi}_S$ è la coniugata della proiezione stereografica φ_S dal polo sud. Osserviamo che per

$$(z, t) \in U_N \cap U_S = \{(z, t) \mid |z|^2 + t^2 = 1, t \neq \pm 1\}$$

si ha:

$$\frac{z}{1-t} = \frac{1+t}{\bar{z}}.$$

Segue che l'applicazione $F : S^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$

$$F(z, t) = \begin{cases} \varphi_0^{-1}(\varphi_N(z, t)) = [1, \frac{z}{1-t}] & \text{se } (z, t) \in U_N \\ \varphi_1^{-1}(\bar{\varphi}_S(z, t)) = [\frac{\bar{z}}{1+t}, 1] & \text{se } (z, t) \in U_S, \end{cases}$$

definisce un omeomorfismo da S^2 a \mathbb{CP}^1 .

Ci proponiamo di dimostrare che \mathbb{CP}^n è semplicemente connesso. Consideriamo i due aperti $U_0 = \{z_0 \neq 0\} = \mathbb{CP}^n \setminus H$, $H = \{z_0 = 0\}$ e $V = \mathbb{CP}^n \setminus \{p_0\}$ dove $p_0 = [1, 0, \dots, 0]$. Ora $U_0 \cong \mathbb{R}^{2n}$ e $U_0 \cap V = \mathbb{CP}^n \setminus \{H \cup p_0\} \cong \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ che è connesso per archi e non vuoto per ogni $n \geq 1$. Inoltre V si retrae per deformazione forte su $H \cong \mathbb{CP}^{n-1}$ tramite la retrazione

$$r : V \rightarrow H, r([z_0, z_1, \dots, z_n]) = [0, z_1, \dots, z_n].$$

Infatti l'omotopia

$$F : V \times I \rightarrow V, F([z], t) = [(1-t)z_0, z_1, \dots, z_n], [z] = [z_0, z_1, \dots, z_n],$$

soddisfa $F([z], 0) = [z]$, $F([z], 1) = [0, z_1, \dots, z_n] \in H$ e $F([w], t) = [w]$, $\forall [w] \in H$ e $\forall t \in I$. Con un ragionamento induttivo su $n \geq 1$ e usando il Corollario 7.2.1 si ottiene allora che \mathbb{CP}^n è semplicemente connesso.

7.3 Seconda applicazione: $U_1 \cap U_2$ semplicemente connesso

Se $U_1 \cap U_2$ è semplicemente connesso dal Teorema di Seifert-Van Kampen si ottiene immediatamente il seguente risultato.

Corollario 7.3.1 *Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema di Seifert Van-Kampen e che in aggiunta $U_1 \cap U_2$ sia semplicemente connesso. Allora l'omomorfismo $\Phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ è un isomorfismo. Se inoltre i gruppi fondamentali di U_1 e U_2 hanno le presentazioni*

$$\pi_1(U_1, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \mid \rho_1, \dots, \rho_r \rangle;$$

$$\pi_1(U_2, x_0) = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \mid \sigma_1, \dots, \sigma_s \rangle$$

allora $\pi_1(X, x_0)$ ha la presentazione

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \mid \rho_1, \dots, \rho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s \rangle$$

dove i generatori $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ sono rappresentati dagli stessi lacci delle presentazioni originarie ma ora considerati in X invece che in U_1 o in U_2 .

Bouquet di cerchi

Sia $X = C_1 \cup C_2$ la figura ∞ come nell'Esempio 1.3.10. Se i due cerchi C_1 e C_2 fossero aperti essendo l'intersezione un punto e quindi semplicemente connesso potremo applicare il corollario per ottenere che $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. In effetti l'isomorfismo è valido ma per ottenerlo dobbiamo applicare il corollario correttamente. Siano dunque $x_1 \in C_1$ e $x_2 \in C_2$ due punti diversi dal punto x_0 . Allora $U_2 = X \setminus \{x_1\}$ e $U_1 = X \setminus \{x_2\}$ sono due aperti di X connessi per archi e $U_1 \cap U_2$ è un aperto che si retrae per deformazione al punto x_0 e quindi semplicemente connesso. D'altra parte U_j si retrae per deformazione a C_j , $j = 1, 2$ e quindi $\pi_1(U_j) \cong \pi_1(C_j)$, $j = 1, 2$. Applicando il Corollario 7.3.1 si ottiene

$$\pi_1(X) = \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2) = \pi_1(C_2) * \pi_1(C_1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

I due generatori liberi del gruppo fondamentale di X possono essere descritti come i due lacci chiusi di base x_0 che girano una volta intorno ai punti $(-1, 0)$ e $(0, 1)$. Più in generale, consideriamo lo spazio X unione di numero finito C_1, \dots, C_n di spazi omeomorfi a S^1 con un solo punto x_0 in comune. Questo spazio si chiama il *bouquet di cerchi*.

DISEGNO BOUQUET DI CERCHI

Facciamo vedere che il gruppo fondamentale di X è il gruppo libero su n generatori dove ogni generatore x_j , $j = 1, \dots, n$ può essere rappresentato da un laccio chiuso di base x_0 che gira intorno al cerchio C_j una volta.

7.3. SECONDA APPLICAZIONE: $U_1 \cap U_2$ SEMPLICEMENTE CONNESSO 99

La dimostrazione si ottiene per induzione sul numero n di circonferenze. Sappiamo che il risultato è vero per $n = 1$ (anche per $n = 2$) e supponiamo che l'affermazione sia vera per $k < n$. Siano $x_j \in C_j$ tali che $x_j \neq x_0$, $j = 1, \dots, n$. Consideriamo i due sottoinsiemi aperti e connessi per archi di X dati da $U_1 = X \setminus \{x_n\}$ e $U_2 = X \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Allora U_1 si retrae per deformazione ad un bouquet di $n - 1$ circonferenze, U_2 si retrae per deformazione a $C_n \cong S^1$ e $U_1 \cap U_2 = X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ è non vuoto e semplicemente connesso (si retrae per deformazione al punto x_0). Applicando allora il Corollario 7.3.1 si ottiene:

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2) = (\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}) * \mathbb{Z} = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Il complementare di un numero finito di punti di \mathbb{R}^2

Siano p_1, \dots, p_k un numero finito di punti distinti in \mathbb{R}^2 e sia $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$. Non è difficile vedere che lo spazio X si retrae per deformazione forte su un bouquet di k cerchi (cf. Esempio 1.3.11 nel Capitolo 1 per il caso $k = 2$). Per il risultato precedente il gruppo fondamentale di X è il gruppo libero con k generatori. Ogni generatore è rappresentato da un laccio α_j , $j = 1, \dots, k$, ottenuto percorrendo una sola volta un cerchio C_j centrato in p_j e di raggio $r_j < \inf_{k \neq j} d(p_j, p_k)$.

Sul gruppo fondamentale di varietà topologiche di dimensione $n \geq 3$

Sia M una varietà topologica connessa (e quindi connessa per archi) di dimensione $n \geq 3$. Siano $x_0, y_0 \in M$, $x_0 \neq y_0$. Allora

$$\pi_1(M \setminus \{y_0\}, x_0) \cong \pi_1(M, x_0). \quad (7.2)$$

Sia infatti U_2 un aperto che contiene y_0 e tale che $U_2 \cong \mathbb{R}^n$ (un tale aperto esiste in quanto M è localmente euclidea). Sia $U_1 = M \setminus \{y_0\}$. I due aperti U_1 e U_2 sono connessi per archi e la loro intersezione $U_1 \cap U_2 = U_2 \setminus \{y_0\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è semplicemente connessa $n \geq 3$ in quanto omotopicamente equivalente a S^2 . Possiamo allora applicare il Corollario 7.3.1 e dedurre che

$$\pi_1(M, x_0) = \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) = \pi_1(M \setminus \{y_0\}, x_0).$$

Osservazione 7.3.2 In effetti il risultato appena dimostrato vale per spazi topologici connessi e localmente euclidei. Nella dimostrazione abbiamo infatti usato solo la connessione di M e l'esistenza di una carta intorno ad un suo punto.

Gruppo fondamentale del complementare di una circonferenza in \mathbb{R}^3

Sia C una circonferenza di \mathbb{R}^3 e sia $X = \mathbb{R}^3 \setminus C$. Vogliamo calcolare il gruppo fondamentale di X . Iniziamo a calcolare il gruppo fondamentale di $Y = \mathbb{R}^3 \setminus L$, dove L è una retta affine di \mathbb{R}^3 . Supponiamo che L sia l'asse z . Consideriamo il semipiano $S = \{(x, y) \mid y > 0, z = 0\}$ di \mathbb{R}^3 . Lo spazio ottenuto tramite una rotazione completa di S intorno all'asse z è omeomorfo allo spazio Y . Quindi $Y \cong S \times S^1$. Il gruppo fondamentale di Y è quindi

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(S \times S^1) \cong \pi_1(S) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

in quanto S è semplicemente connesso (S è convesso) e $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Un generatore del gruppo fondamentale di Y è dato da una circonferenza che gira una volta intorno all'asse z .

Vogliamo far vedere che il gruppo fondamentale di $X = \mathbb{R}^3 \setminus C$ è lo stesso del gruppo fondamentale di Y , cioè isomorfo a \mathbb{Z} . Per fare questo consideriamo la proiezione stereografica

$$\pi_N : S^3 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4} \right)$$

della sfera unitaria $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ privata del polo nord $N = (0, 0, 0, 1)$ allo spazio \mathbb{R}^3 considerato come lo spazio equatoriale $\mathbb{R}^3 = \{x_4 = 0\}$. Assumiamo che il cerchio C sia il cerchio di centro l'origine e raggio 1 nel piano $x_3 = 0$ di \mathbb{R}^3 e cioè

$$C = \{x_1^2 + x_2^2, x_3 = 0\}.$$

Osserviamo che C giace nello spazio equatoriale $x_4 = 0$ di S^3 e che quindi $\pi_N^{-1}(C) = C$ (C vista in S^3 ha equazione $C = \{x_1^2 + x_2^2, x_3 = x_4 = 0\}$). Si ottiene allora

$$\pi_N^{-1}(X) \cong S^3 \setminus \{N \cup C\}$$

e quindi

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(S^3 \setminus \{N \cup C\}) \cong \pi_1(S^3 \setminus C)$$

dove l'ultimo isomorfismo segue dal punto precedente ($S^3 \setminus C$ è una varietà topologica tridimensionale). Ora $S^3 \setminus C$ è omeomorfa a $S^3 \setminus \tilde{C}$ dove \tilde{C} è la circonferenza di S^3 data da:

$$\tilde{C} = \{x_1 = x_2 = 0, x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

Osserviamo che $N \in \tilde{C}$ e quindi

$$S^3 \setminus \tilde{C} = S^3 \setminus (N \cup \tilde{C}) \cong \mathbb{R}^3 \setminus \pi_N(\tilde{C}).$$

Inoltre si verifica immediatamente $\pi_N(\tilde{C}) = L$, dove L è l'asse z . Quindi

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(S^3 \setminus \tilde{C}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L) \cong \mathbb{Z},$$

dove l'ultimo isomorfismo segue dalla prima parte. Un generatore del gruppo fondamentale di X si ottiene considerando un laccio che gira una volta intorno alla circonferenza C .

Osservazione 7.3.3 Nell'esempio precedente è importante che la circonferenza C sia effettivamente una circonferenza euclidea e non semplicemente uno spazio omeomorfo a S^1 . Infatti il gruppo fondamentale del complementare in \mathbb{R}^3 di uno spazio omeomorfo a S^1 può essere molto complicato. Uno spazio topologico $K \subset \mathbb{R}^3$ omeomorfo a S^1 si chiama *nodo* e il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \setminus K$ si chiama il gruppo fondamentale del nodo. La teoria dei nodi è una branca importantissima della topologia di *dimensione bassa* cioè di quella teoria che studia le varietà topologiche di dimensione ≤ 4 . In queste note non tratteremo questa affascinante teoria. Il lettore interessato potrà consultare il classico testo [17] in bibliografia.

7.4 Terza applicazione: U_2 semplicemente connesso

Anche il corollario che segue si ottiene senza difficoltà dal Teorema di Seifert-Van Kampen.

Corollario 7.4.1 *Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema di Seifert Van-Kampen e che in aggiunta U_2 sia semplicemente connesso. Allora l'inclusione $j_1 : U_1 \rightarrow X$ induce un isomorfismo*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U_1, x_0) / N_{\varphi_1},$$

dove N_{φ_1} è la chiusura normale di $\varphi_1(\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0))$ in $\pi_1(X, x_0)$. Se i gruppi fondamentali di U_1 e $U_1 \cap U_2$ hanno le seguenti presentazioni finite

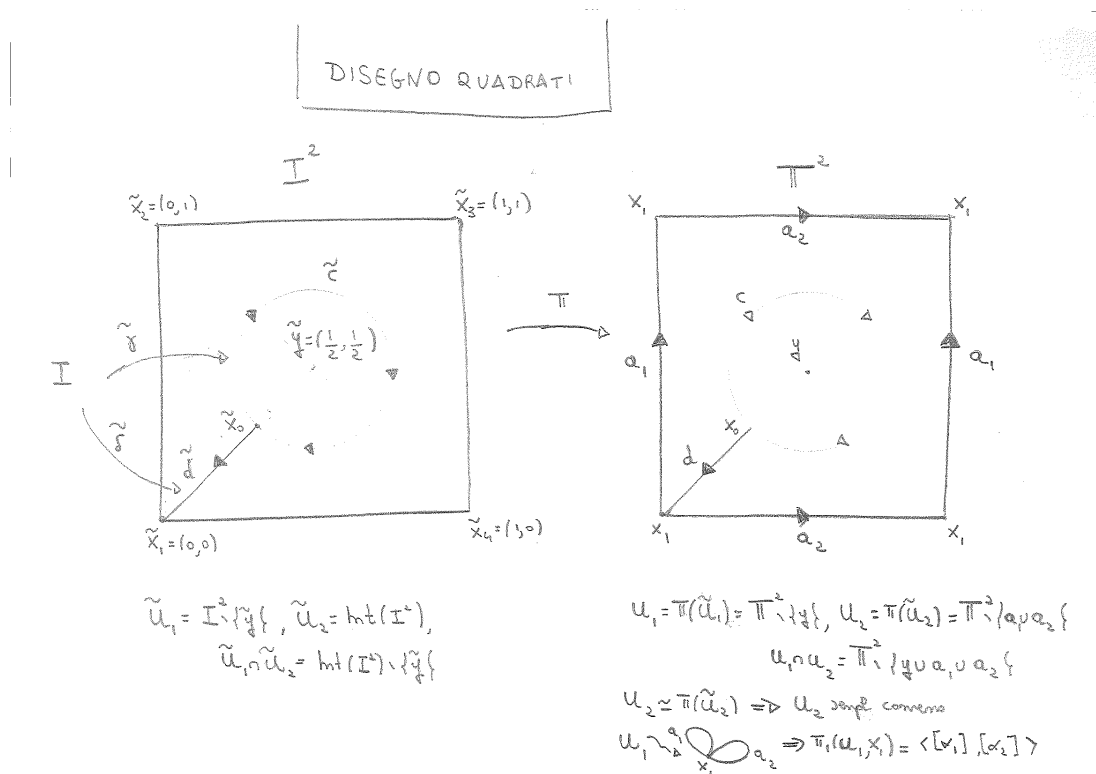
$$\pi_1(U_1, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \mid \rho_1, \dots, \rho_r \rangle;$$

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_p \mid \tau_1, \dots, \tau_t \rangle$$

allora il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ ha la presentazione finita

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \mid \rho_1, \dots, \rho_r, u_1, \dots, u_p \rangle,$$

dove per ogni $\alpha = 1, \dots, p$, u_α è un'espressione di $\varphi_1(\gamma_\alpha) \in \pi_1(U_1, x_0)$ rispetto ai generatori $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$.



Useremo questo corollario per ricalcolare il gruppo fondamentale del toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ e del proiettivo $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 2$, senza l'uso della teoria dei rivestimenti. Le tecniche sviluppate in questi esempi ci permetteranno di calcolare il gruppo fondamentale delle superfici compatte nel prossimo capitolo.

Gruppo fondamentale di \mathbb{T}^2 .

Pensiamo a \mathbb{T}^2 come al quadrato I^2 con i lati identificati come nelle figure e sia $\pi: I^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ la proiezione sul quoziente.

DISEGNO QUADRATI

Nelle figure stiamo mettendo in evidenza il fatto che i vertici del quadrato I^2 e cioè $\tilde{x}_1 = (0,0)$, $\tilde{x}_2 = (0,1)$, $\tilde{x}_3 = (1,1)$ e $\tilde{x}_4 = (1,0)$ si identificano tutti a $x_1 \in \mathbb{T}^2$ così come i lati verticali $\{0\} \times I$ e $\{1\} \times I$ (risp. orizzontali $I \times \{0\}$ e $I \times \{1\}$) di I^2 corrispondono ad un laccio $a_1 = \pi(\{0\} \times I)$ (risp. $a_2 = \pi(I \times \{1\})$) di \mathbb{T}^2 di base x_1 . Osserviamo che l'interno del quadrato $\text{Int}(I^2)$ è omeomorfo a

$\mathbb{T}^2 \setminus \{a_1 \cup a_2\}$ tramite π . Sia $\tilde{y} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in I^2$ il centro del quadrato e $y = \pi(\tilde{y}) \in \mathbb{T}^2$. Consideriamo i due aperti connessi per archi $\tilde{U}_1 = I^2 \setminus \{\tilde{y}\}$ e $\tilde{U}_2 = \text{Int}(I^2)$ di I^2 . Siccome π è un'applicazione continua e chiusa segue che $U_1 = \pi(\tilde{U}_1) = \mathbb{T}^2 \setminus \{y\}$ e $U_2 = \pi(\tilde{U}_2) = \mathbb{T}^2 \setminus \{a_1 \cup a_2\}$ sono due aperti connessi per archi di \mathbb{T}^2 tali che $\mathbb{T}^2 = U_1 \cup U_2$. La loro intersezione è l'aperto $U_1 \cap U_2 = \mathbb{T}^2 \setminus \{y \cup a_1 \cup a_2\}$ di \mathbb{T}^2 il quale è connesso per archi in quanto immagine del connesso per archi $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \text{Int}(I^2) \setminus \{\tilde{y}\}$ tramite π . Sia $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Calcoliamo i gruppi fondamentali $\pi_1(U_1, x_0)$, $\pi_1(U_2, x_0)$ e $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$.

L'aperto U_2 è semplicemente connesso essendo omeomorfo al convesso $\text{Int}(I^2)$. L'aperto U_1 si retrae per deformazione ad un bouquet di due cerchi basati in x_1 . Si ha allora che

$$\pi_1(U_1, x_1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle [\alpha_1], [\alpha_2] \rangle$$

dove $[\alpha_j]$, $j = 1, 2$, denota la classe in $\pi_1(U_1, x_1)$ del laccio chiuso $\alpha_j : I \rightarrow \mathbb{T}^2$ di base x_1 ottenuto percorrendo a_j e compiendo un singolo giro. Sia $\tilde{d} : I \rightarrow I^2$ l'arco nel quadrato I^2 che si ottiene percorrendo il segmento di retta \tilde{d} che unisce \tilde{x}_0 a $\tilde{x}_1 = (0, 0)$, dove \tilde{x}_0 è l'unico punto di I^2 tale che $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$. Siano $\delta : I \rightarrow \mathbb{T}^2$, $\delta = \pi \circ \tilde{d}$ e $d = \pi(\tilde{d})$ le loro immagini nel quoziente. Segue che

$$\pi_1(U_1, x_0) = \langle A_1, A_2 \rangle,$$

dove

$$A_j = [\delta \cdot \alpha_j \cdot i(\delta)], \quad j = 1, 2, \quad (7.3)$$

è la classe in $\pi_1(U_1, x_0)$ del laccio chiuso $\delta \cdot \alpha_j \cdot i(\delta) : I \rightarrow \mathbb{T}^2$ di base x_0 (qui, come al solito, “ \cdot ” denota la concatenazione e $i(\delta)$ l'arco definito da $i(\delta)(t) = \delta(1-t)$).

Sia \tilde{c} il cerchio di I^2 passante per \tilde{x}_0 centrato in \tilde{y} . Allora $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$ si retrae per deformazione (forte) a \tilde{c} e quindi $U_1 \cap U_2$ si retrae per deformazione (forte) a $c = \pi(\tilde{c})$. Si ha quindi che

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \cong \langle [\gamma] \rangle,$$

dove $\gamma : I \rightarrow \mathbb{T}^2$ è il laccio di base x_0 dato da $\gamma = \pi(\tilde{\gamma})$ e $\tilde{\gamma} : I \rightarrow I^2$ è il laccio di base \tilde{x}_0 ottenuto percorrendo \tilde{c} .

Siamo nelle ipotesi del Corollario 7.4.1 (U_2 semplicemente connesso). Dobbiamo quindi scrivere $\varphi_1([\gamma])$ in termini dei generatori A_1 e A_2 di $\pi_1(U_1, x_0)$. Vogliamo dimostrare che

$$\varphi_1([\gamma]) = A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1}, \quad (7.4)$$

dove gli A_j sono dati dalla (7.3). Sia $\tilde{\sigma} : I \rightarrow I^2$ il laccio chiuso di base \tilde{x}_0 ottenuto come concatenazione $\tilde{\delta} \cdot q \cdot i(\tilde{\delta})$ dove $q : I \rightarrow I^2$ è il laccio di base $\tilde{x}_1 = (0, 0)$

ottenuto percorrendo una volta in senso orario il bordo del quadrato. Allora esiste un'omotopia $\tilde{F} : I^2 \rightarrow \tilde{U}_1$ relativa a $\{0, 1\}$ tra $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\sigma}$ cioè, con le notazioni della dimostrazione dal Teorema di Seifert-Van Kampen, $\tilde{\gamma} \sim_{\tilde{U}_1} \tilde{\sigma}$. Segue che $\gamma \sim_{U_1} \sigma$ tramite l'omotopia $F = \pi \circ \tilde{F} : I^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Osserviamo che $\sigma : I \rightarrow U_1$ è il laccio chiuso di base x_0 dato da

$$\sigma = \delta \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot i(\alpha_1) \cdot i(\alpha_2) \cdot i(\delta).$$

Allora

$$\gamma \sim_{U_1} \sigma \sim_{U_1} \delta \cdot \alpha_1 \cdot i(\delta) \cdot \delta \cdot \alpha_2 \cdot i(\delta) \cdot \delta \cdot i(\alpha_1) \cdot i(\delta) \cdot \delta \cdot i(\alpha_2) \cdot i(\delta)$$

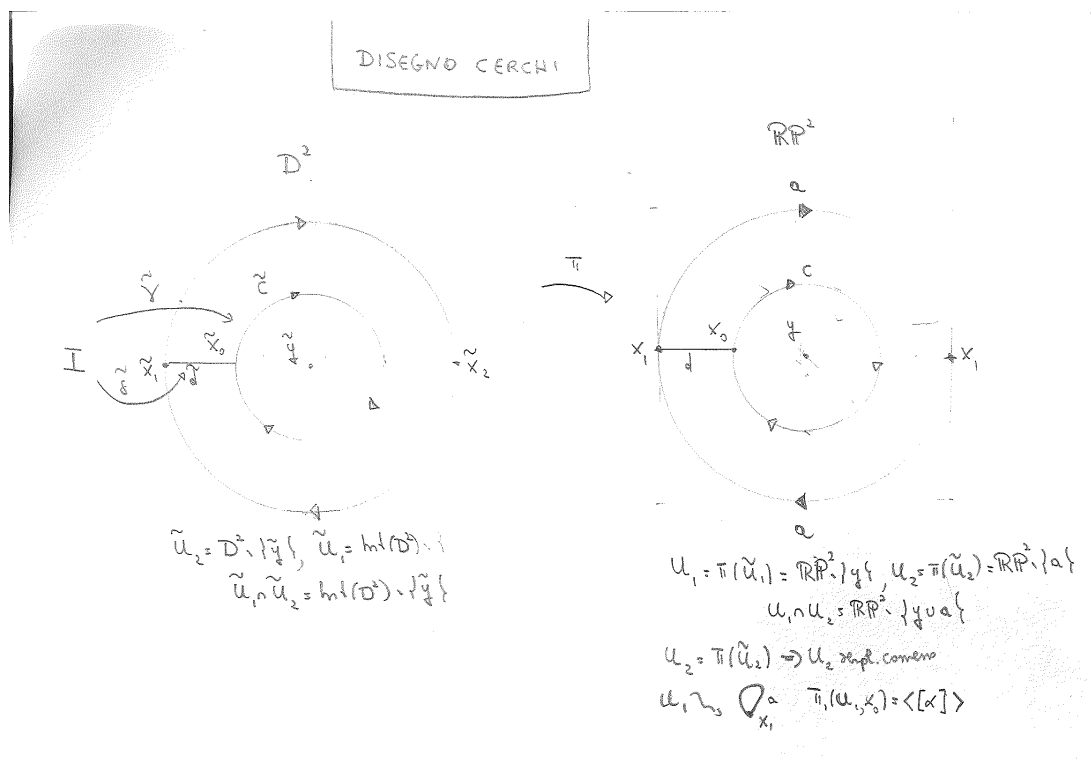
e quindi

$$\varphi_1([\gamma]) = [\gamma]_{U_1} = A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1}$$

ossia la (7.4). Segue allora dal Corollario 7.4.1 che

$$\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) \cong \langle A_1, A_2 \mid A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1} \rangle$$

il quale per l'Esempio 6.4.2 è omeomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Abbiamo così ottenuto una dimostrazione alternativa del fatto che il gruppo fondamentale di \mathbb{T}^2 è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (cf. Corollario 7.4.1) esibendo anche i generatori di tale gruppo.



Gruppo fondamentale di \mathbb{RP}^n , $n \geq 2$.

Con un ragionamento simile a quello del paragrafo precedente si ottiene che

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) = \langle A \mid A^2 \rangle = \mathbb{Z}_2$$

DISEGNO CERCHI

Per calcolare $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$ per $n \geq 3$ osserviamo che per la (7.2) abbiamo che

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \pi_1(\mathbb{RP}^n \setminus \{y_0\})$$

dove y_0 è un punto di \mathbb{RP}^n . Possiamo prendere, per esempio, il punto $y_0 = [0, 0, \dots, 1]$. D'altra parte $\mathbb{RP}^n \setminus \{y_0\}$, per $n \geq 3$, si retrae per deformazione su \mathbb{RP}^{n-1} . La dimostrazione di questa affermazione la si può ottenere come per \mathbb{CP}^n oppure osservando che $S^n \setminus \{N\}$, N il polo nord, per $n \geq 3$ si retrae per deformazione alla sfera equatoriale S^{n-1} e quindi $\mathbb{RP}^n = S^n / \sim$ si retrae per

deformazione a $\mathbb{RP}^{n-1} = S^{n-1}/\sim$. Segue che

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \pi_1(\mathbb{RP}^n \setminus \{y_0\}) \cong \pi_1(\mathbb{RP}^{n-1}).$$

Segue allora per induzione su $n \geq 2$ che $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$ (cf. Teorema 4.3.2).

7.5 Esercizi

Esercizio 7.1 Sia $X = U_1 \cup U_2$ uno spazio topologico connesso per archi unione di due aperti U_1 e U_2 . Dimostrare che se $U_1 \cap U_2$ è connesso per archi allora U_1 e U_2 sono connessi per archi. (Suggerimento: imitare la dimostrazione della prima parte del Teorema di Seifert-Van Kampen).

Esercizio 7.2 Calcolare il gruppo fondamentale dello spazio X unione di n circonferenze di \mathbb{R}^2 di centro i punti P_j dell'asse delle ascisse di coordinate $P_j = (2j - 1, 0)$, $j = 1, \dots, n$ e di raggio unitario.

Esercizio 7.3 Calcolare il gruppo fondamentale del complementare di k punti in S^2 .

Esercizio 7.4 Calcolare il gruppo fondamentale dello spazio topologico ottenuto identificando i lati di un poligono regolare di n lati secondo lo schema $a \cdot a \cdots a$.

Esercizio 7.5 Sia G un gruppo abeliano finitamente generato. Dimostrare che esiste uno spazio topologico X connesso per archi tale che $\pi_1(X) \cong G$. (Suggerimento: usare l'esercizio precedente e il Teorema 6.2.4).

Esercizio 7.6 Dimostrare che la “salsiccia” $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \sin^2(\pi z)\}$ e la “collana” $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = \max(0, \sin(\pi z))\}$ sono semplicemente connessi.

Esercizio 7.7 Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in \mathbb{R}^3 dell'unione dei 3 semiassi coordinati

$$\{y = z = 0, x \geq 0\} \cup \{z = x = 0, y \geq 0\} \cup \{y = x = 0, z \geq 0\}.$$

Esercizio 7.8 Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in \mathbb{R}^3 dell'unione dei 3 semiassi positivi coordinati

$$\{y = z = 0, x > 0\} \cup \{z = x = 0, y > 0\} \cup \{y = x = 0, z > 0\}.$$

Esercizio 7.9 Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in \mathbb{R}^3 di

$$\{z = y = 0, x \geq 1\} \cup \{y = 0, x^2 + z^2 = 1\}.$$

(Suggerimento: usare il fatto che S^3 è la compattificazione di Alexandrov di \mathbb{R}^3 come nel calcolo del gruppo fondamentale del complementare di una circonferenza in \mathbb{R}^3).

Esercizio 7.10 Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in \mathbb{R}^3 dell'unione di una retta e di un cerchio distinguendo tutte le possibilità che si possono presentare. (Suggerimento: stesso dell'esercizio precedente).

Esercizio 7.11 Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in \mathbb{R}^3 di due rette (risp. due cerchi) distinguendo tutte le possibilità che si possono presentare. (Suggerimento: stesso dell'esercizio precedente).

Esercizio 7.12 Siano X_1 e X_2 due spazi topologici connessi per archi con gruppi fondamentali rispettivamente G_1 e G_2 . Costruire uno spazio topologico con gruppo fondamentale $G_1 * G_2$ (Suggerimento: considerare lo spazio topologico X ottenuto come unione disgiunta dei tre spazi X_1 , X_2 e $[0, 1]$ con la relazione d'equivalenza che identifica un punto $x_1 \in X_1$ con il punto $0 \in [0, 1]$, un punto $x_2 \in X_2$ con il punto $1 \in [0, 1]$ e che identifica gli altri punti a se stessi).

Esercizio 7.13 Dimostrare la Proposizione 7.1.2. (Suggerimento: usare gli Esercizi 6.10 e 6.11).

Capitolo 8

Classificazione delle superfici

In questo capitolo daremo un'idea della classificazione delle superfici (varietà topologiche di dimensione due) compatte e connesse con o senza bordo e calcoleremo il loro gruppo fondamentale. Il lettore è rinviato ai libri [12] e [16] in bibliografia per una descrizione più completa e dettagliata.

8.1 Somma connessa di due superfici

Date due superfici S_1 e S_2 possiamo costruire una nuova superficie, chiamata la *somma connessa* di S_1 e S_2 e denotata con $S_1 \# S_2$ come quella superficie ottenuta togliendo un disco aperto da ognuna delle superfici e poi incollando insieme i bordi dei due dischi. Più precisamente scegliamo $D_1 \subset S_1$ e $D_2 \subset S_2$ dove entrambi i D_j , $j = 1, 2$ sono omeomorfi a $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sia $S'_1 = S_1 \setminus \text{Int}(D_1)$ e $S'_2 = S_2 \setminus \text{Int}(D_2)$. Sia $h : \text{Fr}(D_1) \rightarrow \text{Fr}(D_2)$ un omeomorfismo. La *somma connessa* di S_1 e S_2 è definita come il quoziente

$$S_1 \# S_2 = S'_1 \times \{1\} \cup S'_2 \times \{2\} / \sim_h,$$

dove \sim_h è la relazione d'equivalenza che identifica i punti della frontiera dei dischi $S^1 = \text{Fr}(D_1) = \text{Fr}(D_2)$ tramite h , cioè $x \sim h(x)$ per ogni $x \in \text{Fr}(D_1)$ (i punti di $S'_1 \times \{1\}$ e di $S'_2 \times \{2\}$ vengono identificati a se stessi).

DISEGNO 8.1 SOMMA CONNESSA

Vale il seguente fondamentale risultato che enunciamo senza dimostrazione.

Teorema 8.1.1 *Siano S_1 e S_2 due superfici. La loro somma connessa $S_1 \# S_2$ è una superficie. Inoltre il tipo topologico di $S_1 \# S_2$ non dipende dai dischi D_1 e D_2 scelti ne dall'omeomorfismo $h : Fr(D_1) \rightarrow Fr(D_2)$.*

Esempio 8.1.2 Sia S^2 sia la sfera. Allora

$$S \# S^2 = S$$

per ogni superficie S . Questo segue dal fatto che se tolgo da S^2 il disco aperto $D_2 = S^2 \cap \{z > 0\}$ ottengo un disco chiuso.

DISEGNO 8.2 S^2 ELEMENTO NEUTRO

Esempio 8.1.3 Siano $S_1 = S_2 \cong \mathbb{T}^2$ allora la superficie $S_1 \# S_2$ è un toro con due buchi.

DISEGNO 8.3 SOMMA CONNESSA DI DUE TORI

Più in generale se $S_1 = \dots = S_g \cong \mathbb{T}^2$ allora si ottiene un toro con g buchi.

DISEGNO 8.4 SOMMA CONNESSA DI g TORI

Esempio 8.1.4 Sia \mathbb{RP}^2 il piano proiettivo reale e S una superficie. Allora la somma connessa $S \# \mathbb{RP}^2$ si ottiene togliendo un disco aperto di S e incollando la frontiera del nastro di Möbius (che è omeomorfa a S^1) alla frontiera di tale disco. Infatti se D è un disco in \mathbb{RP}^2 allora $\mathbb{RP}^2 \setminus \text{Int}(D)$ è omeomorfo ad un nastro di Möbius N :

DISEGNO 8.5 \mathbb{RP}^2 MENO UN DISCO APERTO = NASTRO DI MOBIUS

Esempio 8.1.5 La somma connessa $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ è omeomorfa alla bottiglia di Klein, in simboli

$$\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong \text{Klein}.$$

Infatti dall'esempio precedente $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ si ottiene unendo due nastri di Möbius lungo la loro frontiera (che è un cerchio). D'altra parte anche la bottiglia di *Klein* si può ottenere come somma connessa di due nastri di Möbius uniti lungo il loro bordo:

DISEGNO 8.6 *Klein* = *MOBIUS* U *MOBIUS*

La seguente proposizione mostra che la somma connessa di un toro e di un piano proiettivo reale è omeomorfa alla somma connessa di tre piani proiettivi reali.

Proposizione 8.1.6

$$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2.$$

Dimostrazione: Dall'Esempio 8.1.5 sappiamo che $Klein \cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$. Per l'associatività della somma connessa è sufficiente allora dimostrare che

$$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong Klein \# \mathbb{RP}^2.$$

Cominciamo a vedere come si ottiene la somma connessa $\mathbb{T}^2 \# S$ (risp. $Klein \# S$) con una superficie S (non necessariamente \mathbb{RP}^2). La somma connessa $\mathbb{T}^2 \# S$ (risp. $Klein \# S$) si ottiene togliendo un disco aperto $\text{Int } D_1$ da \mathbb{T}^2 (risp. $Klein$) togliendo un disco aperto $\text{Int } D_2$ dalla superficie S e incollando i due dischi lungo il loro bordo. Quest'operazione può essere effettuata in due fasi:

- Prima uniamo la parte di \mathbb{T}^2 (risp. $Klein$) data da $ABA'B' \setminus \text{Int } D_1$ alla superficie $S \setminus \text{Int } D_2$;
- poi uniamo il resto di \mathbb{T}^2 (risp. $Klein$) cioè $\mathbb{T}^2 \setminus ABA'B'$ (risp. $Klein \setminus ABA'B'$).

Nella prima fase stiamo facendo la somma connessa del tubo $ABA'B'$ con la superficie S . Questo tubo è omeomorfo alla sfera S^2 con due buchi (cioè S^2 meno due dischi aperti). Visto che S^2 è l'elemento neutro rispetto alla somma connessa si ottiene semplicemente la superficie S con due buchi. La seconda fase consiste nel connettere insieme la superficie S con due buchi con un tubo costituito da $\mathbb{T}^2 \setminus ABA'B'$ (risp. $Klein \setminus ABA'B'$). La differenza che c'è nel caso che si tratti di \mathbb{T}^2 ovvero di $Klein$ è l'orientazione dei bordi. Consideriamo ora il caso di $S = \mathbb{RP}^2$.

Per visualizzare il tutto togliamo a \mathbb{RP}^2 un disco aperto in modo tale da ottenere un nastro di Möbius. Quindi la somma connessa di \mathbb{T}^2 (resp. Klein) con \mathbb{RP}^2 si può ottenere togliendo due dischi dal nastro di Möbius e attaccandoci $\mathbb{T}^2 \setminus ABA'B'$ (resp. $Klein \setminus ABA'B'$) tenendo conto delle orientazioni e poi dopo riattaccando il disco al nastro di Möbius. Come si vede dal disegno le due operazioni producono la stessa superficie, cioè $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2$ è omeomorfa a $Klein \# \mathbb{RP}^2$, quello che si voleva dimostrare.

DISEGNI 8.7–8.12

□

La somma connessa definisce una struttura di semigruppato sull'insieme di tutte le superfici compatte. Infatti vale l'associatività

$$(S_1 \# S_2) \# S_3 \cong S_1 \# (S_2 \# S_3),$$

la commutatività $S_1 \# S_2 \cong S_2 \# S_1$ e l'elemento neutro è la sfera (per l'Esempio 8.1.2). Questo semigruppato non è un gruppo non esistendo l'inverso di una data superficie diversa dalla sfera.

Il seguente fondamentale teorema mostra che ogni superficie compatta e connessa può essere ottenuta come somma connessa di un numero finito di copie di \mathbb{T}^2 e \mathbb{RP}^2 e che il numero di copie utilizzate determina la superficie a meno di omeomorfismi (un'idea della dimostrazione di questo teorema verrà fornita nel paragrafo 8.3).

Teorema 8.1.7 (*classificazione delle superfici compatte e connesse*) Una superficie compatta e connessa è omeomorfa ad una e una sola delle seguenti superfici:

- la sfera S^2 ;
- la somma connessa di numero finito di tori;
- la somma connessa di un numero finito di piani proiettivi reali.

8.2 Presentazioni poligonali

Consideriamo una *regione poligonale* P chiusa nel piano di vertici p_0, \dots, p_n , $p_0 = p_n$. Il segmento che unisce p_i con p_{i+1} si chiama un *lato* di P . L'unione dei lati di P verrà chiamato il *bordo* di P e sarà indicato con ∂P ; $S \setminus \partial P$ verrà chiamato l'*interno* di P e denotato con $\text{Int } P$.

Sia L un segmento di \mathbb{R}^2 . Un' *orientazione* di L è semplicemente un ordine dei suoi estremi. Il primo vertice p è chiamato il *punto iniziale* mentre il secondo vertice q è chiamato il *punto finale* del segmento orientato. Diremo che L è orientato da p a q e disegneremo l'orientazione tramite un freccia che va da p a q . Se \tilde{L} è un altro segmento orientato da \tilde{p} a \tilde{q} denoteremo con $h : L \rightarrow \tilde{L}$ l'omeomorfismo di \mathbb{R}^2 che porta il punto $x = (1 - t)p + tq$ nel punto $h(x) = (1 - t)\tilde{p} + t\tilde{q}$ e chiameremo quest'omeomorfismo l'*applicazione lineare positiva* da L a \tilde{L} .

Sia P una regione poligonale nel piano. Un'*etichettatura* dei lati di P è un'applicazione dall'insieme dei lati di P all'insieme delle etichette. Data un'orientazione di ogni lato ed un'etichettatura definiamo una relazione d'equivalenza sui punti di P generata come segue:

- ogni punto $\text{Int } P$ è equivalente a se stesso;
- due lati L e \tilde{L} che hanno la stessa etichetta vengono identificati tramite l'applicazione lineare positiva da L a \tilde{L} , cioè $x \in L$ è equivalente a $h(x) \in \tilde{L}$.

Lo spazio quoziente X ottenuto da questa relazione d'equivalenza, dotato della topologia quoziente si dirà ottenuto da P *incollando i lati insieme* in accordo con le relative orientazioni e etichette.

Sia P una regione poligonale chiusa di vertici p_0, \dots, p_n , $p_0 = p_n$. Fissate le orientazioni dei segmenti di ∂P e una loro etichettatura, denotiamo con a_1, \dots, a_m le etichette distinte assegnate ad ogni lato di P . Per ogni k , $k = 1, \dots, n$, sia a_{i_k} l'etichetta associata al lato $p_{k-1}p_k$ e sia $\epsilon_k = +1$ (risp. -1) se l'orientazione assegnata al lato va da p_{k-1} a p_k (risp. da p_k a p_{k-1}). Allora il numero dei lati, le loro etichettature e la loro orientazione sono completamente determinati dal simbolo

$$a_{i_1}^{\epsilon_1} a_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}.$$

Chiameremo questo simbolo una *presentazione poligonale di lunghezza n* dello spazio quoziente X . Di solito non scriveremo l'esponente che è uguale a 1. Osserviamo che una permutazione ciclica dei termini di un'etichettatura cambierà lo spazio quoziente S solo a meno di omeomorfismi.

IL disco D_2 può essere descritto dalla presentazione poligonale di lunghezza tre $aa^{-1}b$.

La sfera S^2 può essere descritta dalla presentazione poligonale di lunghezza quattro $aa^{-1}bb^{-1}$.

DISEGNO 8.14 PRESENTAZIONE POLIGONALE DELLA SFERA

Per quanto riguarda il toro conosciamo già una sua presentazione poligonale di lunghezza 4 e cioè $aba^{-1}b^{-1}$:

DISEGNO 8.15 PRESENTAZIONE POLIGONALE DEL TORO

Non c'è nessun motivo per considerare una sola regione poligonale. Dato un numero finito P_1, \dots, P_k di regioni poligonali disgiunte, con etichettature e con i lati orientati, uno può considerare lo spazio quoziente incollando i lati come nel caso di una sola regione poligonale. Lo spazio quoziente X corrispondente potrebbe essere connesso oppure no (si vedano gli esempi che seguono).

DISEGNO 8.16 NASTRO DI MOBIUS TRAMITE DUE PRESENTAZIONI POLIGONALI

Oppure due cilindri disgiunti posso essere ottenuti come:

DISEGNO 8.17 DUE CILINDRI

La somma connessa di due tori ha la presentazione poligonale di lunghezza otto, $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$:

DISEGNO 8.18-8.19 PRESENTAZIONE POLIGONALE SOMMA CONNESSA DI DUE TORI

In generale la somma connessa di g tori potrà essere descritta come la seguente presentazione poligonale di lunghezza $4g$:

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} \quad (8.1)$$

Un presentazione poligonale di \mathbb{RP}^2 di lunghezza quattro è data da $abab$:

DISEGNO 8.20 PRESENTAZIONE POLIGONALE DEL PROIETTIVO

La somma connessa di due copie di \mathbb{RP}^2 (che è omeomorfa alla bottiglia di Klein per l'Esempio 8.1.5) ha la seguente presentazioni poligonale di lunghezza quattro: $a_1a_1a_2a_2$:

DISEGNO 8.21 PRES. POLIGONALE SOMMA CONNESSA DI DUE PROIETTIVI

In generale la somma connessa di g potrà essere descritta la seguente presentazione poligonale di lunghezza $2g$:

$$a_1a_1a_2a_2 \cdots a_ga_g. \quad (8.2)$$

Osserviamo che nelle presentazioni poligonali delle superfici fino ad ora descritte ogni lato viene identificato esattamente ad un altro lato. Ci si potrebbe chiedere se questo fatto determina una superficie. E in effetti la risposta è sì come mostra il seguente risultato.

Teorema 8.2.1 *Sia P una regione poligonale nel piano con n lati, sia $a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}$, $\epsilon_j = \pm 1$ una presentazione poligonale del relativo quoziente X e siano a_1, \dots, a_m le etichette distinte dai lati di P . Allora X è una superficie compatta e connessa se e solo se ogni lato si identifica esattamente con un altro lato (quindi n è pari). Se inoltre i vertici di P vengono identificati tutti ad uno stesso punto allora il gruppo fondamentale di X ha la seguente presentazione:*

$$\pi_1(X) \cong \langle A_1, \dots, A_m \mid A_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots A_{i_n}^{\epsilon_n} \rangle.$$

Dimostrazione: La dimostrazione dalla prima parte è lasciata come esercizio per i più audaci. La seconda parte si ottiene esattamente come nel calcolo del gruppo fondamentale del toro e del proiettivo del capitolo precedente. \square

Nel seguito indicheremo con $g\mathbb{T}^2$, $g \geq 0$, la somma connessa di g tori con la convenzione che $0\mathbb{T}^2 \cong S^2$. Analogamente indicheremo con $g\mathbb{RP}^2$, $g \geq 1$, la somma di g piani proiettivi reali. Osserviamo che la presentazioni poligonali di

$g\mathbb{T}^2$ data da (8.1) e di $g\mathbb{RP}^2$ data da (8.2) identificano i vertici della regione poligonale tutti ad uno stesso punto. Dal Teorema 8.2.1 si ottiene allora il seguente risultato:

Corollario 8.2.2 *Il gruppo fondamentale di $g\mathbb{T}^2$ ha la seguente presentazione:*

$$\pi_1(g\mathbb{T}^2) = \langle A_1, B_1, \dots, A_g, B_g \mid A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} \rangle$$

mentre il gruppo fondamentale di $g\mathbb{RP}^2$ ha la seguente presentazione:

$$\pi_1(g\mathbb{RP}^2) = \langle A_1, A_2, \dots, A_g \mid A_1^2 A_2^2 \dots A_g^2 \rangle.$$

8.3 Dimostrazione del Teorema di classificazione

Possiamo ora dare un'idea della dimostrazione del teorema di classificazione delle superfici.

Dimostrazione del Teorema 8.1.7

Sia S una superficie compatta e connessa. Supponiamo che esista una curva $C \subset S$ chiusa e semplice (cioè senza autointersezioni) che non separi S (cioè tale che $S \setminus C$ sia connesso). Si può dimostrare (noi non lo faremo) che un intorno di C in S è omeomorfo ad un cilindro o ad un nastro di Möbius. Rimuoviamo il cilindro o il nastro di Möbius tranne il loro bordo (due cerchi nel caso del cilindro e un cerchio nel caso del nastro di Möbius) dalla superficie S e ricuciamoci sopra due dischi nel caso del cilindro o un disco nel caso del nastro di Möbius. Otteniamo così una nuova superficie S_1 . Quindi S si ottiene da S_1 attaccandoci un cilindro o un nastro di Möbius. Si hanno dunque tre possibilità

$$S = S_1 \# \mathbb{T}^2, \quad S = S_1 \# Klein, \quad S = S_1 \# \mathbb{RP}^2.$$

Consideriamo una curva chiusa semplice in S_1 che non separi S_1 . Ripetendo il procedimento precedente si ottiene una superficie S_2 tale che

$$S_1 = S_2 \# \mathbb{T}^2, \quad S_1 = S_2 \# Klein, \quad S_1 = S_2 \# \mathbb{RP}^2.$$

Iterando il procedimento si ottiene dopo j passi una superficie S_j tale che

$$S = S_j \# j_1 \mathbb{T}^2 \# j_2 Klein \# j_3 \mathbb{RP}^2, \quad j = j_1 + j_2 + j_3,$$

dove stiamo indicando con $j_1 \mathbb{T}^2$ (risp. $j_2 Klein$ e $j_3 \mathbb{RP}^2$) la somma connessa di j_1 tori (risp. j_2 bottiglie di Klein e j_3 piani proiettivi). Si dimostra (noi non

lo faremo) che dopo un numero finito k di passi il procedimento termina e cioè che ogni curva semplice chiusa in S_k separa S_k . Inoltre si dimostra che l'unica superficie separata da ogni curva chiusa semplice è la sfera S^2 (quest'affermazione anche se intuitivamente plausibile è un famoso teorema dovuto a Schönflies). Otteniamo quindi che:

$$S = S^2 \# p\mathbb{T}^2 \# q\text{Klein} \# r\mathbb{RP}^2 \cong p\mathbb{T}^2 \# q\text{Klein} \# r\mathbb{RP}^2, \quad p, q, r \geq 0, \quad p + q + r = k.$$

Dalla Proposizione 8.1.6 segue facilmente che:

$$S \cong \begin{cases} p\mathbb{T}^2 & \text{se } q + r = 0 \\ (2p + 2q + r)\mathbb{RP}^2 & \text{se } q + r > 0, \end{cases}$$

Quindi S è omeomorfa ad una somma connessa di un numero finito di tori o di piani proiettivi reali. Resta da dimostrare che S è omeomorfa ad una sola di queste superfici. Restano quindi da dimostrare i seguenti fatti:

1. siano $g, \tilde{g} \geq 0$, se $g\mathbb{T}^2$ è omeomorfo a $\tilde{g}\mathbb{T}^2$ allora $g = \tilde{g}$;
2. siano $g, \tilde{g} \geq 1$, se $g\mathbb{RP}^2$ è omeomorfo a $\tilde{g}\mathbb{RP}^2$ allora $g = \tilde{g}$;
3. sia $g \geq 0$ e $\tilde{g} \geq 1$, $g\mathbb{T}^2$ non è omeomorfa a $\tilde{g}\mathbb{RP}^2$ per nessun g e \tilde{g} .

Supponiamo $g\mathbb{T}^2 \cong \tilde{g}\mathbb{T}^2$ (risp. $g\mathbb{RP}^2 \cong \tilde{g}\mathbb{RP}^2$). Segue dell'invarianza topologica del gruppo fondamentale (Teorema 2.3.1), dal Corollario 8.2.2 e dall'Esempio 6.4.2 (risp. dall'Esempio 6.4.3) che

$$\mathbb{Z}^{2g} \cong \text{Ab}(\pi_1(g\mathbb{T}^2)) \cong \text{Ab}(\pi_1(\tilde{g}\mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^{2\tilde{g}}$$

(risp.

$$\mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2 \cong \text{Ab}(\pi_1(g\mathbb{RP}^2)) \cong \text{Ab}(\pi_1(\tilde{g}\mathbb{RP}^2)) \cong \mathbb{Z}^{\tilde{g}-1} \times \mathbb{Z}_2)$$

e quindi $g = \tilde{g}$ (cf. la classificazione dei gruppi abeliani finitamente generati, Teorema 6.2.4). D'altra parte $\text{Ab}(\pi_1(g\mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ non può essere isomorfo a $\text{Ab}(\pi_1(\tilde{g}\mathbb{RP}^2)) \cong \mathbb{Z}^{\tilde{g}-1} \times \mathbb{Z}_2$ per nessun g e \tilde{g} (il secondo gruppo ha torsione mentre il primo no). Questo conclude la dimostrazione del teorema. \square

Osservazione 8.3.1 L'abelizzanzazione $\text{Ab}(S)$ del gruppo fondamentale di una superficie compatta e connessa si chiama il *primo gruppo omologia* della superficie S . Più in generale il primo gruppo di omologia di uno spazio topologico connesso per archi X è dato da $\text{Ab}(\pi_1(X))$, l'abelianizzazione del suo gruppo fondamentale (lo studente che seguirà un corso sull'omologia incontrerà una definizione molto diversa del primo gruppo di omologia di uno spazio topologico).

La dimostrazione del precedente teorema insieme all'invarianza omotopica del gruppo fondamentale (Corollario 2.4.3) implica anche il seguente interessante risultato.

Corollario 8.3.2 *Due superfici compatte e connesse sono omeomorfe se e solo se sono omotopicamente equivalenti.*

Osservazione 8.3.3 La classificazione delle varietà topologiche di dimensione 3 (soluzione della *congettura di geometrizzazione di Thurston*) è stata ottenuta nei primi anni del 2000 da Gregori Perelman tramite l'uso di tecniche sofisticate di Geometria Riemanniana. Osserviamo che in dimensione 3 non è più vero come per le superfici (Corollario 8.3.2) che due varietà compatte e connesse sono omeomorfe se e solo se sono omotopicamente equivalenti. Un esempio di tali varietà sono i cosiddetti spazi lenticolari. Dal risultato di Perelman si può dedurre (in modo non banale) che S^3 è, a meno di omeomorfismi, l'unica varietà di dimensione 3 compatta e semplicemente connessa. Questo fornisce una soluzione ad una famosa *congettura di Poincaré*. In dimensione due l'analogo della congettura di Poincaré (cioè che una superficie compatta e semplicemente connessa è omeomorfa alla sfera S^2) segue immediatamente dal Teorema 8.3.5. In dimensione ≥ 4 esistono varietà compatte e semplicemente connesse che non sono omeomorfe alla sfera (per esempio $S^2 \times S^2$). La *congettura di Poincaré generalizzata* asserisce che una varietà n -dimensionale compatta e omotopicamente equivalente a S^n è omeomorfa a S^n . Questa congettura è stata dimostrata in dimensione $n \geq 5$ da Stephen Smale agli inizi degli anni 60 e in dimensione 4 da Michael Freedman agli inizi degli anni 80. Entrambi vinsero la medaglia Fields per i loro risultati. Per quanto riguarda le varietà di dimensione ≥ 4 si dimostra che non esiste una loro classificazione. In effetti si dimostrano i seguenti fatti: 1) non esiste una classificazione delle presentazioni finite di gruppi; 2) per ogni presentazione finita $\langle S \mid R \rangle$ esiste una varietà M di dimensione 4 compatta e connessa tale che $\pi_1(M) \cong \langle S \mid R \rangle$.

Osservazione 8.3.4 Non esiste una classificazione delle superfici noncompatte. Si presenta una grande quantità di tali superfici (si pensi che un aperto qualunque di una superficie compatta e connessa è ancora una superficie). Se una superficie noncompatta è semplicemente connessa un famoso teorema di Riemann asserisce che allora la superficie è omeomorfa a \mathbb{R}^2 .

Orientabilità e genere di una superficie

Diremo che una superficie S è *non orientabile* se esiste un embedding $N \rightarrow S$ dove N è un nastro di Möbius. Mentre S è *orientabile* se non esiste un tale

embedding. L'orientabilità di una superficie è un invariante topologico, come si verifica immediatamente.

Si dimostra che S^2 e \mathbb{T}^2 sono superfici orientabili mentre è facile costruire un embedding del nastro di Möbius in \mathbb{RP}^2 e quindi \mathbb{RP}^2 è una superficie non orientabile. Si deduce immediatamente dalla definizione di orientabilità che la somma connessa $S_1 \# S_2$ di due superfici è orientabile se e solo se S_1 e S_2 sono entrambe orientabili. Quindi la somma connessa di un numero finito di tori è una superficie orientabile mentre la superficie ottenuta come somma connessa di un numero finito di piani proiettivi reali non è orientabile.

Diremo che la sfera S^2 ha *genere zero* e la somma connessa di g tori (risp. g piani proiettivi reali) ha *genere g* . Quindi, per esempio, il genere della bottiglia di Klein è due, come segue dall'Esempio 8.1.5. Cosa rappresenta il genere di una superficie? Si può dimostrare che nel caso la superficie sia orientabile il genere rappresenta il massimo numero di curve chiuse semplici (senza autointersezioni) e disgiunte dalla superficie che non separino la superficie. Il genere di una superficie orientabile si può pensare anche come il numero di “buchi” della superficie. Un fatto notevole è che il genere di una superficie insieme alla sua orientabilità costituiscono un *sistema completo di invarianti* cioè caratterizzano una superficie a meno di omeomorfismi, come espresso dal seguente teorema che segue immediatamente dal Teorema 8.1.7.

Teorema 8.3.5 *Due superfici compatte e connesse sono omeomorfe se e solo se valgono i seguenti fatti:*

1. *sono entrambe orientabili o non orientabili;*
2. *hanno lo stesso genere.*

8.4 Classificazione delle superfici con bordo

Una superficie S compatta e connessa con bordo si ottiene (per definizione) da una superficie \tilde{S} compatta e connessa alla quale sono stati rimossi un numero finito di dischi aperti disgiunti. Le circonferenze frontiere di questi dischi sono chiamate le *componenti di bordo* di S . Il *genere* di S è per definizione il genere della superficie \tilde{S} . Diremo che S è *orientabile* (risp. *non orientabile*) se \tilde{S} è orientabile (risp. non orientabile). Il nastro di Möbius N è una superficie con una componente di bordo, come segue dalla prima parte dell'Esempio 8.1.5. Il risultato seguente è l'analogo del Teorema 8.3.5.

Teorema 8.4.1 *Due superfici compatte e connesse con bordo sono omeomorfe se e solo se e valgono i seguenti fatti:*

1. *le componenti del bordo hanno la stessa cardinalità;*
2. *sono entrambe orientabili o non orientabili;*
3. *hanno lo stesso genere.*

Dimostrazione: Siano S e S' due superfici compatte, connesse con bordo entrambe orientabili o non orientabili dello stesso genere. Quindi le superfici \tilde{S} e \tilde{S}' senza bordo ottenute riempiendo i buchi delle due superfici S e S' sono omeomorfe (per il Teorema 8.3.5). Sia $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$ un omeomorfismo. Se inoltre le componenti di bordo hanno la stessa cardinalità l'omeomorfismo si restringe ad un omeomorfismo tra S e S' . Viceversa supponiamo che due superfici compatte, connesse con bordo S e S' abbiano rispettivamente h e h' componenti di bordo, genere g e g' ed esista un omeomorfismo $f : S \rightarrow S'$. L'omeomorfismo f si restringe ad un omeomorfismo tra $\text{Fr } S$ e $\text{Fr } S'$ e quindi $h = h'$ (per l'invariata topologica delle componenti connesse). Esiste quindi un omeomorfismo $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$ (che estende f) tra le superfici \tilde{S} e \tilde{S}' . Segue ancora dal Teorema 8.3.5 che $g = g'$ e le superfici sono entrambe orientabili o non orientabili. \square

Presentazione poligonale delle superfici compatte e connesse con bordo

La dimostrazione del Teorema 8.3.5 non usa il calcolo del gruppo fondamentale di una superficie con bordo. Il calcolo del gruppo fondamentale di tali superfici si può ottenere tramite una presentazione poligonale di una superficie compatta e connessa con bordo come segue. Consideriamo il caso di una superficie compatta, connessa con bordo orientabile di genere $g = 1$ con $h = 2$ componenti di bordo. Consideriamo la seguente operazione

DISEGNO 8.22 ELIMINAZIONE BUCO

Otteniamo allora che la superficie ha la presentazione poligonale

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} c_1 B_1 c_1^{-1}$$

con un buco.

Iterando questo procedimento su tutti i buchi meno uno si ottiene che una superficie compatta connessa con bordo orientabile di genere g e h ha la presen-

tazione poligonale

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} c_1 B_1 c_1^{-1} \cdots c_{h-1} B_{h-1} c_{h-1}^{-1}$$

con un buco. Con lo stesso ragionamento una superficie compatta connessa con bordo non orientabile di genere g e h componenti di bordo ha la presentazione poligonale

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_g a_g c_1 B_1 c_1^{-1} \cdots c_{h-1} B_{h-1} c_{h-1}^{-1}$$

con un buco. Indichiamo con Σ_g^h la superficie compatta, connessa con bordo orientabile di genere g con h componenti di bordo. Segue allora che Σ_g^h è omotopicamente equivalente ad un bouquet di $2g+h-1$ circonferenze nel caso orientabile e ad un bouquet di $g+h-1$ circonferenze nel caso non orientabile. Si ottiene allora che:

$$\pi_1(\Sigma_g^h) = \begin{cases} *^{2g+h-1} \mathbb{Z} & \text{se } g \geq 0, \Sigma_g^h \text{ orientabile} \\ *^{g+h-1} \mathbb{Z} & \text{se } g \geq 1, \Sigma_g^h \text{ non orientabile.} \end{cases}$$

Osservazione 8.4.2 Date due superfici con bordo non possiamo concludere (come per quelle con bordo vuoto, Corollario 8.3.2) che esse sono omeomorfe se sono omotopicamente equivalenti. Si consideri per esempio la sfera S^2 meno tre dischi aperti e il toro \mathbb{T}^2 meno un disco aperto. Queste superfici con bordo sono orientabili non sono omeomorfe (hanno genere diverso) ma sono omotopicamente equivalenti alla figura ∞ . Un altro esempio è dato dalla sfera S^2 meno due dischi aperti e \mathbb{RP}^2 meno un disco aperto (ossia un nastro di Möbius). Queste superfici sono omotopicamente equivalenti a S^1 ma non sono omeomorfe (la prima è orientabile e la seconda no).

8.5 Caratteristica di Eulero

Sia S una superficie compatta e connessa. Un *triangolo* T di S è l'immagine di un embedding $f: \tau \rightarrow S$, $T = f(\tau)$, dove τ un triangolo di \mathbb{R}^2 . I *vertici* e i *lati* del triangolo T sono rispettivamente le immagini dei vertici e dei lati di τ . Una *triangolazione* \mathcal{T} di S è una famiglia finita di triangoli di S che ricoprono S tali che due triangoli di questa famiglia o hanno intersezione vuota o si intersecano in un punto o hanno esattamente un lato in comune.

Più in generale si dice *poligono* P di una superficie compatta e connessa S è l'immagine di un poligono p di \mathbb{R}^2 e una sua *poligonazione* è una famiglia finita di poligoni di S che ricoprono S tali che due poligoni o hanno intersezione vuota o si intersecano in un punto o hanno esattamente un lato in comune. Vale il seguente importante risultato.

Teorema 8.5.1 *Sia S una superficie compatta. Allora esiste un triangolazione di S .*

Questo teorema è stato dimostrato per la prima volta da Tibor Radò nel 1925. La dimostrazione è molto tecnica. Il lettore interessato potrà trovare la dimostrazione nel libro [15] in bibliografia.

Sia S una superficie compatta e connessa e sia \mathcal{T} una sua triangolazione. La *caratteristica di Eulero* $\chi(\mathcal{T})$ di \mathcal{T} è il numero intero dato da:

$$\chi(T) = F - L + V, \quad (8.3)$$

dove F rappresenta il numero dei triangoli, L il numero di lati e V il numero di vertici della triangolazione. Vale il seguente risultato del quale omettiamo la dimostrazione.

Teorema 8.5.2 *Siano \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 due triangolazioni di una superficie compatta S . Allora $\chi(\mathcal{T}_1) = \chi(\mathcal{T}_2)$.*

In virtù dei teoremi possiamo quindi definire la *caratteristica di Eulero* di una superficie compatta S , che indicheremo con $\chi(S)$, come la caratteristica di Eulero di una sua triangolazione. Il seguente teorema è di immediata dimostrazione.

Teorema 8.5.3 *Siano S e \tilde{S} due superfici compatte e connesse. Se S è omeomorfa a \tilde{S} allora $\chi(S) = \chi(\tilde{S})$.*

Esempio 8.5.4 $\chi(S^2) = 2$

DISEGNO 8.24 TRIANGOLAZIONE SFERA

Esempio 8.5.5 $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$

DISEGNO 8.25 TRIANGOLAZIONE TORO

Esempio 8.5.6 $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$

DISEGNO 8.26 TRIANGOLAZIONE PIANO PROIETTIVO REALE

Proposizione 8.5.7 *Siano S_1 e S_2 due superficie compatte e connesse e $S_1 \# S_2$ la loro somma connessa. Allora*

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Dimostrazione: Consideriamo due triangolazioni delle superfici S_1 e S_2 . Dal momento che un triangolo è omeomorfo ad un disco per ottenere la somma connessa di S_1 e S_2 possiamo rimuovere l'interno di un triangolo T_1 della triangolazione di S_1 e l'interno di un triangolo T_2 della superficie S_2 e incollare insieme i bordi di questi triangoli. Otteniamo quindi che la somma connessa $S_1 \# S_2$ ha $F_1 + F_2 - 2$ triangoli, $L_1 + L_2 - 3$ lati e $V_1 + V_2 - 3$ vertici dove F_1 , L_1 e V_1 (risp. F_2 , L_2 e V_2) rappresentano il numero di triangoli, lati e vertici della triangolazione di S_1 (risp. S_2). Allora

$$\chi(S_1 \# S_2) = (F_1 + F_2 - 2) - (L_1 + L_2 - 3) + (V_1 + V_2 - 3) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2,$$

che è quello che si voleva dimostrare. \square

Usando la proposizione e gli esempi che la precedono possiamo calcolare la caratteristica di Eulero di una qualunque superficie compatta e connessa come espresso dal seguente:

Corollario 8.5.8 *Sia $g\mathbb{T}^2$, $g \geq 0$ la superficie compatta e connessa orientabile di genere g (somma connessa di g tori) e $g\mathbb{RP}^2$, $g \geq 1$, la superficie compatta e connessa non orientabile di genere g (somma connessa di g piani proiettivi reali). Allora*

$$\chi(g\mathbb{T}^2) = 2 - 2g$$

mentre

$$\chi(g\mathbb{RP}^2) = 2 - g.$$

e quindi il genere g è dato da:

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(g\mathbb{T}^2)) & \text{se } g \geq 0 \\ 2 - \chi(g\mathbb{RP}^2) & \text{se } g \geq 1. \end{cases}$$

Dal corollario e dal Teorema 8.3.5 si ottiene anche il seguente:

Corollario 8.5.9 *Due superfici compatte e connesse sono omeomorfe se e solo se hanno la stessa caratteristica di Eulero e sono entrambi orientabili o non orientabili.*

Solidi convessi

Concludiamo questo capitolo con la dimostrazione che esistono esattamente cinque solidi convessi e regolari nello spazio i cosiddetti *solidi platonici*. Un *solido convesso* S è un sottoinsieme limitato dello spazio \mathbb{R}^3 definito dalle due condizioni seguenti:

- S non è contenuto in un sottospazio affine proprio di \mathbb{R}^3 ;
- S è l'intersezione di un numero finito di semispazi di \mathbb{R}^3 .

Un solido convesso S è effettivamente un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^3 in quanto intersezione di semispazi di \mathbb{R}^3 che sono convessi. Inoltre S compatto in quanto chiuso e limitato.

Sia S un solido convesso di \mathbb{R}^3 e α un piano di \mathbb{R}^3 tale che S sia contenuto in uno dei due semispazi definiti da α . Si hanno le seguenti possibilità:

- $S \cap \alpha = \emptyset$;
- $S \cap \alpha$ è un punto che si chiama *vertice* di S ;
- $S \cap \alpha$ è un segmento che si chiama *spigolo* o *lato* di S ;
- $S \cap \alpha$ è un poligono, che si chiama *faccia* di S .

Dal momento che S è intersezione di un numero finito di semispazi segue che esso possiede un numero finito di vertici V , di lati L e di facce F . Inoltre ogni spigolo è un lato di due facce e ogni vertice è vertice di almeno tre facce e di altrettanti spigoli. Vale il seguente risultato che era già noto a Cartesio 1640 ma che fu poi dimostrato da Eulero nel 1752.

Teorema 8.5.10 *Sia S un solido convesso di \mathbb{R}^3 e siano V , L e F come sopra. Allora*

$$V - L + F = 2.$$

Dimostrazione: Consideriamo un omeomorfismo $f : S \rightarrow D^3$ tale che $f|_{\text{Fr}(S)} : \text{Fr}(S) \rightarrow S^2$. Otteniamo quindi che la sfera S^2 ammette una poligonazione con lo stesso numero di vertici, lati e facce del poligono S . Il risultato segue allora dall'Esercizio 8.2 e dal fatto che $\chi(S^2) = 2$. \square

Osservazione 8.5.11 Per la dimostrazione dovuta ad Eulero del Teorema 8.5.10 il lettore può consultare il libro [5] in bibliografia.

Un *solido regolare* è un solido convesso di \mathbb{R}^3 avente per facce poligoni regolari tutti uguali tra loro e con lo stesso numero di lati uscenti da ogni vertice (quindi lo stesso numero di facce che si incontrano in un vertice). Esempi di solidi regolari sono: il *tetraedro*, l'*ottaedro*, il *cubo*, il *dodecaedro* e l'*icosaedro*. Questi sono chiamati anche *solidi platonici* in quanto Platone ne parla nel Timeo. Di essi tratta il XIII libro (l'ultimo) degli *Elementi* di Euclide dove si fornisce una dimostrazione della loro esistenza. Il fatto notevole, che a differenza dei poligoni regolari, i solidi platonici sono precisamente i 5 appena descritti. La dimostrazione di questo fatto si ottiene tramite l'uso della caratteristica di Eulero. Sia infatti S un solido platonico. Denotiamo con n , $n \geq 3$ il numero di lati di ogni faccia (e quindi il numero di vertici in ogni faccia) e con m , $m \geq 3$, il numero di lati uscenti da un vertice (e quindi il numero di facce che si incontrano in un vertice). Si osservi che n e m non dipendono dalla faccia o dal vertice scelto perché il solido è, per ipotesi, regolare. Dal momento che ogni lato ha in comune due facce si ottiene allora che il numero di lati L e il numero di vertici V si possono scrivere in funzione del numero di facce F del poligono come segue:

$$L = \frac{nF}{2}, \quad V = \frac{mF}{2}.$$

Per il Teorema 8.5.10 si ottiene allora:

$$F - L + V = F\left(\frac{n}{2} - \frac{m}{2} + 1\right) = 2.$$

e quindi $F = \frac{4m}{2n-mn+2m}$ dalla quale segue (essendo $F > 0$) che

$$\frac{2n}{n-2} > m. \quad (8.4)$$

Usando questa disuguaglianza e il fatto che $m \geq 3$ si ottiene che $n < 6$ e $m < 6$. Dalla (8.4) le uniche possibilità per le coppie (n, m) con $3 \leq n < 6$ e $3 \leq m < 6$ sono cinque e cioè:

$$(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$$

che corrispondono rispettivamente al tetraedro, all'ottaedro, all'icosaedro, al cubo e al dodecaedro.

8.6 Esercizi

Esercizio 8.1 Dimostrare che i gruppi $G = \langle a, b \mid baba^{-1} \rangle$ e $H = \langle a, c \mid a^2c^2 \rangle$ dell'Esempio 6.3.6 sono isomorfi mostrando le presentazioni poligonali $baba^{-1}$ e a^2c^2 sono omeomorfe alla bottiglia di Klein.

Esercizio 8.2 Sia S una superficie compatta e connessa e sia \mathcal{P} una sua poligonazione costituita da un numero finito di facce F , di lati L e di vertici V . Dimostrare che

$$\chi(S) = F - L + V.$$

(Suggerimento: suddividere i poligoni di \mathcal{P} in triangoli).

Esercizio 8.3 Calcolare la caratteristica di Eulero $\chi(\Sigma_g^h)$ di una superficie Σ_g^h compatta, connessa di genere g con h componenti di bordo distinguendo il caso orientabile dal caso non orientabile.

Esercizio 8.4 Dimostrare che la caratteristica di Eulero di una superficie ottenuta come somma connessa di un piano proiettivo e di n tori è $1 - 2n$ mentre la caratteristica di Eulero della somma connessa di una bottiglia di Klein con n tori è $-2n$.

Esercizio 8.5 Dimostrare che $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$ è una presentazione poligonale di \mathbb{T}^2 .

Esercizio 8.6 Dimostrare che $a_1 \cdots a_n a_1 \cdots a_n$ è una presentazione poligonale di \mathbb{RP}^2 .

Esercizio 8.7 I lati di un ottagono regolare sono identificati in modo tale che il quoziente sia una superficie compatta. Dimostrare che la caratteristica di Eulero di questa superficie è ≥ -2 . Dimostrare inoltre che ogni superficie orientabile o non orientabile la cui caratteristica di Eulero è ≥ -2 può essere ottenuta identificando opportunamente i lati di un ottagono regolare.

Esercizio 8.8 Cosa rappresenta la presentazione poligonale $abcdec^{-1}da^{-1}b^{-1}e^{-1}$?

Esercizio 8.9 Dimostrare che non esiste una poligonazione della sfera dove le facce sono tutti esagoni.

Esercizio 8.10 Una palla da calcio è formata da pentagoni e esagoni tali che tre facce si incontrano in un vertice e due facce distinte si incontrano al più in un vertice o in un lato. Mostrare che il numero di pentagoni è 12.

Esercizio 8.11 Sia P un solido convesso in \mathbb{R}^3 dove tutte le facce sono triangoli e da ogni vertice escono cinque o sei lati. Dimostrare che P ha esattamente 12 vertici dai quali escono 5 lati.

Esercizio 8.12 Dimostrare che presentazione poligonale

$$a_1 a_2 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_n$$

è omeomorfa alla somma connessa di n piani proiettivi reali. (Suggerimento: osservare che i vertici del poligono vengono identificati tutti ad uno stesso punto).

Esercizio 8.13 Cosa la presentazione poligonale

$$a_1 a_2 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_n^{-1}?$$

(Suggerimento: osservare che se n è dispari i vertici del poligono vengono identificati con due punti mentre se n è pari vengono identificati ad un stesso punto).

Esercizi per i più audaci

Esercizio 8.14 Dimostrare il Teorema 8.2.1.