

**Esercizi del corso di Geometria Differenziale (prima parte)**  
**Corso di Laurea in Matematica A.A. 2021-2022**  
**Docente: Andrea Loi**

1. Per ogni numero naturale  $k$  costruire una funzione che sia  $C^k(\mathbb{R})$  ma non  $C^{k+1}(\mathbb{R})$ .
2. Dimostrare che la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

risulta essere liscia ma non reale analitica.

3. Siano  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Dimostrare che i seguenti intervalli sono tutti diffeomorfi tra loro e diffeomorfi a  $\mathbb{R}$ :  $(a, b)$ ,  $(c, +\infty)$ ,  $(-\infty, d)$ .
4. Dimostrare che l'applicazione (costruita a lezione)

$$h : B_0(1) \rightarrow \mathbb{R}^n, x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto \left( \frac{x^1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, \dots, \frac{x^n}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \right)$$

definisce un diffeomorfismo tra la palla aperta unitaria centrata nell'origine di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^n$ . Dedurre che la palla aperta di centro  $c \in \mathbb{R}^n$  e raggio  $r > 0$  in  $\mathbb{R}^n$  è diffeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ .

5. Sia  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Usando il teorema di Taylor con resto dimostrare che esistono  $g_{11}, g_{12}, g_{22} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  tale che:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + x^2 g_{11}(x, y) + xy g_{12}(x, y) + y^2 g_{22}(x, y).$$

6. Sia  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  tale che  $f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Sia  $g(t, u) = \frac{f(t, tu)}{t}$  se  $t \neq 0$  e  $g(0, u) = 0$ . Dimostrare che  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ .
7. Dimostrare che l'insieme  $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$  dei germi delle funzioni lisce intorno a  $p \in \mathbb{R}^n$  con le operazioni di somma e di prodotto definite a lezione è un'algebra commutativa e unitaria.
8. Dimostrare che l'insieme delle derivazioni puntuali  $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$  di  $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$  con le operazioni definite a lezione è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .
9. Dimostrare che i campi di vettori lisci  $\chi(U)$  su un aperto  $U \subset \mathbb{R}^n$  con le operazioni definite a lezione è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  e un  $C^\infty(U)$ -modulo.
10. Sia  $A$  un'algebra su un campo  $\mathbb{K}$ . Dimostrare che le operazioni

$$D_1 + D_2(a) = D_1(a) + D_2(a)$$

$$(\lambda D)(a) = \lambda D(a)$$

per ogni  $\lambda \in \mathbb{K}$  e per ogni  $D_1, D_2, D \in \text{Der}(A)$  dotano  $\text{Der}(A)$  della struttura di spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ .

11. Siano  $D_1$  e  $D_2$  due derivazioni di un'algebra  $A$  su un campo  $\mathbb{K}$  ( $D_1, D_2 \in \text{Der}(A)$ ). Mostrare che  $D_1 \circ D_2$  non è necessariamente una derivazione di  $A$ , mentre  $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \in \text{Der}(A)$ .