

Nome e mail
Matricola

Esercizio 1 Sull'insieme $G = \mathbb{Z}_4 \times \{-1, 1\}$ si definisca un'operazione \cdot ponendo per ogni $(x, u), (y, v) \in G$,

$$(x, u)(y, v) = (x + uy, uv).$$

- (1) Si dimostri che G con questa operazione è un gruppo non abeliano.
- (2) Si trovi un sottogruppo di G che non è normale.



Esercizio 2 Sia A un anello commutativo unitario e I e J ideali di A . Definiamo

$$IJ = \{i_1j_1 + \cdots + i_nj_n \mid n \in \mathbb{N}, i_k \in I, j_k \in J, k = 1, \dots, n\}.$$

- (1) Provare che IJ è un ideale di A contenuto nell'ideale $I \cap J$ e mostrare con un esempio che $IJ \neq I \cap J$.
- (2) Provare che se $A = I + J$ allora $IJ = I \cap J$.
- (3) Provare che l'affermazione in (b) non è vera se A non è un anello unitario.
- (4) se I e J sono due ideali massimali distinti, allora $IJ = I \cap J$;
- (5) se I e J sono ideali principali, $I = (a)$ e $J = (b)$, allora $IJ = (ab)$.
- (6) descrivere IJ e $I \cap J$ in $A = \mathbb{Z}$ e dedurre quando $IJ = I \cap J$.

