Nome e mail
Matricola

Algebra 2 11 Luglio 2017

Esercizio 1 Sull'insieme $G = \mathbb{Z}_4 \times \{-1, 1\}$ si definisca un'operazione $\cdot$ ponendo per ogni (x, u), $(y, v) \in G$,

$$(x, u)(y, v) = (x + uy, uv).$$

(1) Si dimostri che G con questa operazione é un gruppo non abeliano.
(2) Si trovi un sottogruppo di G che non sia normale.

Esercizio 2 Sia S un insieme. Nell'insieme $\mathcal{P}(S)$ definiamo l'operazione Δ, chiamata *differenza simmetrica*,

$$X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y),$$

per ogni coppia di sottoinsiemi di S.

(1) Provare che la struttura algebrica $(\mathcal{P}(S), \Delta, \cap)$ definisce un anello commutativo unitario e che ogni sottoinsieme proprio di S é un divisore dello zero di A.
(2) Sia $Y \in \mathcal{P}(S)$: provare che l'applicazione $\varphi : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$, definita da $\varphi(X) = X \setminus Y$ é un omomorfismo di anelli e determinare $\ker \varphi$ e $Im\varphi$.
(3) Sia $Y \in \mathcal{P}(S)$: determinare l'ideale (Y).
(4) Se S finito, provare che ogni ideale di $\mathcal{P}(S)$ é principale.
(5) Determinare la caratteristica di $\mathcal{P}(S)$.