

# Appunti di Topologia Algebrica

Andrea Loi



# Indice

<b>Prefazione</b>	<b>vii</b>
<b>1 Omotopia</b>	<b>1</b>
1.1 Omotopia tra funzioni continue . . . . .	1
1.2 Omotopia relativa . . . . .	3
1.3 Alcune proprietà dell'omotopia . . . . .	4
1.4 Spazi omotopicamente equivalenti . . . . .	8
1.5 Esercizi . . . . .	13
<b>2 Il gruppo fondamentale</b>	<b>15</b>
2.1 Prodotto di archi . . . . .	15
2.2 Il gruppo fondamentale . . . . .	21
2.3 Omomorfismo indotto da un'applicazione continua . . . . .	22
2.4 Invarianza omotopica del gruppo fondamentale . . . . .	24
2.5 Il gruppo fondamentale della sfera . . . . .	27
2.6 Il gruppo fondamentale del prodotto di due spazi . . . . .	28
2.7 Un cenno sui gruppi di omotopia . . . . .	29
2.8 Esercizi . . . . .	32
<b>3 Rivestimenti</b>	<b>33</b>
3.1 Rivestimenti . . . . .	33
3.2 Rivestimenti e omeomorfismi locali . . . . .	36
3.3 Sollevamenti di archi e omotopie . . . . .	41
3.4 Esercizi . . . . .	49
<b>4 Applicazioni della teoria dei rivestimenti</b>	<b>51</b>
4.1 Il teorema di Borsuk–Ulam . . . . .	51
4.2 Il gruppo fondamentale del cerchio . . . . .	56
4.3 Il gruppo fondamentale del proiettivo reale . . . . .	61
4.4 Un esempio di gruppo fondamentale non abeliano . . . . .	62

4.5	Esercizi . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Categori e funtori</b>	<b>65</b>
5.1	Categorie . . . . .	65
5.2	Funtori . . . . .	67
5.3	Prodotti e coprodotti . . . . .	69
5.4	Prodotto categoriale in $\mathcal{G}$ : il prodotto libero di gruppi . . . . .	73
5.5	Esercizi . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Gruppi liberi, presentazioni e abelianizzazioni</b>	<b>79</b>
6.1	Gruppi liberi . . . . .	79
6.2	Presentazione di gruppi . . . . .	82
6.3	Abelianizzazioni . . . . .	85
6.4	Esercizi . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Il Teorema di Seifert–Van Kampen</b>	<b>93</b>
7.1	Enunciato e dimostrazione parziale . . . . .	93
7.2	Prima applicazione: $U_1$ e $U_2$ semplicemente connessi . . . . .	97
7.3	Seconda applicazione: $U_1 \cap U_2$ semplicemente connesso . . . . .	100
7.4	Terza applicazione: $U_2$ semplicemente connesso . . . . .	104
7.5	Esercizi . . . . .	108
<b>8</b>	<b>Classificazione delle superfici</b>	<b>111</b>
8.1	Somma connessa di due superfici . . . . .	111
8.2	Presentazioni poligonali . . . . .	120
8.3	Dimostrazione del teorema di classificazione . . . . .	125
8.4	Orientabilità e genere di una superficie . . . . .	128
8.5	Classificazione delle superfici con bordo . . . . .	129
8.6	Caratteristica di Eulero . . . . .	132
8.6.1	Solidi convessi . . . . .	136
8.7	Esercizi . . . . .	138
<b>A</b>	<b>Spazi connessi e connessi per archi</b>	<b>141</b>
A.1	Componenti connesse e connessi per archi . . . . .	141
A.2	Esercizi . . . . .	143
<b>B</b>	<b>Spazi localmente compatti</b>	<b>145</b>
B.1	Definizioni e prime proprietà . . . . .	145
B.2	Altre proprietà degli spazi localmente compatti . . . . .	147

B.3	Compattificazioni di Alexandrov . . . . .	148
B.4	Esercizi . . . . .	150
<b>C</b>	<b>Numero di Lebesgue</b>	<b>151</b>
C.1	Esercizi . . . . .	152
<b>D</b>	<b>Spazi metrici completi e la curva di Peano</b>	<b>153</b>
D.1	Spazi metrici completi . . . . .	153
D.2	La curva di Peano . . . . .	155
D.3	Esercizi . . . . .	158



# Prefazione





# Capitolo 1

## Omotopia

### 1.1 Omotopia tra funzioni continue

Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici. Due applicazioni continue  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  sono dette **omotope** se esiste un' applicazione continua

$$F : X \times I \rightarrow Y, \quad I = [0, 1],$$

detta **omotopia** tra  $f_0$  e  $f_1$ , tale che

$$F(x, 0) = f_0(x), \quad F(x, 1) = f_1(x), \quad \forall x \in X.$$

( $X \times I$  denota il prodotto cartesiano tra  $X$  e  $I$  dotato della topologia prodotto).

#### Interpretazione meccanica dell'omotopia

Sia  $F : X \times I \rightarrow Y$  un'omotopia tra funzioni continue. Dato  $t \in I$  consideriamo l'applicazione continua

$$f_t : X \rightarrow Y$$

definita da

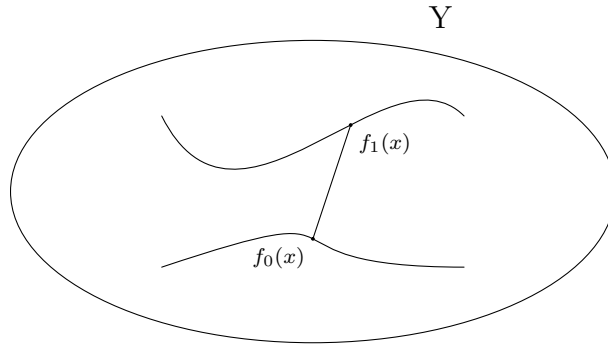
$$f_t(x) = F(x, t).$$

Al variare di  $t \in I$ , considerato come il tempo, otteniamo quindi una famiglia di funzioni continue che al tempo  $t = 0$  vale  $f_0$  e al tempo  $t = 1$  vale  $f_1$ . In modo intuitivo possiamo pensare che  $f_1$  si possa ottenere da  $f_0$  attraverso una “deformazione temporale” (il fatto che il tempo vari con continuità si riflette sulla continuità dell'omotopia  $F$ ).

**Esempio 1.1.1** Sia  $Y$  un sottoinsieme convesso di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $X$  uno spazio topologico qualunque. Allora due applicazioni continue  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  sono omotope. Infatti possiamo considerare l'applicazione continua (l'omotopia lineare)

$$F : X \times I \rightarrow Y, \quad F(x, t) = (1 - t)f_0(x) + tf_1(x). \quad (1.1)$$

Più in generale se  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^n$  sono due funzioni continue tali che il segmento di retta che congiunge  $f_0(x)$  e  $f_1(x)$  sia contenuto in  $Y$  per ogni  $x \in X$  allora  $f_0$  e  $f_1$  sono omotope tramite l'omotopia  $F$  definita da (1.1).



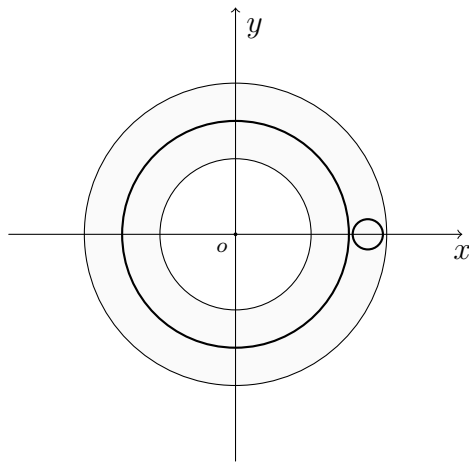
**Esempio 1.1.2** (funzioni non omotope) Sia

$$X = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

il cerchio unitario e

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

la corona circolare di centro l'origine, raggio interno 1 e raggio esterno 2. Consideriamo le applicazioni continue  $f_0 : X \rightarrow Y$ ,  $f_0((\cos t, \sin t)) = \frac{3}{2}(\cos t, \sin t)$  (la cui immagine è il cerchio di centro l'origine e raggio  $\frac{3}{2}$ ) e  $f_1 : X \rightarrow Y$ ,  $f_1((\cos t, \sin t)) = \frac{1}{5}(\cos t - \frac{7}{4}, \sin t)$  (la cui immagine è il cerchio di centro  $(\frac{7}{4}, 0)$  e raggio  $\frac{1}{5}$ ).



Allora si vede intuitivamente che  $f_0$  non è omotopa a  $f_1$  (per deformare con continuità  $f_0$  su  $f_1$  si deve passare attraverso il buco). Una dimostrazione rigorosa che  $f_0$  e  $f_1$  non sono omotope seguirà dagli strumenti sviluppati nel Capitolo 4 (si veda l'Esercizio 4.1).

**Esempio 1.1.3** (applicazione antipodale) Sia  $S^n$  la sfera unitaria di dimensione  $n$  e sia  $A : S^n \rightarrow S^n$  l' **applicazione antipodale**, cioè  $A(x) = -x$ . Se  $n$  è dispari allora  $\text{id}_{S^n}$ ,  $\text{id}_{S^n}(x) = x$ ,  $\forall x \in S^n$ , è omotopa all'applicazione antipodale. Infatti sia  $n = 2k - 1$ . Allora, usando la notazione complessa e l'identificazione  $\mathbb{R}^{2k} \cong \mathbb{C}^k$ , possiamo scrivere

$$S^{2k-1} = \{z \in \mathbb{C}^k \mid \|z\|^2 = 1\}$$

e l'applicazione

$$F : S^{2k-1} \times I \rightarrow S^{2k-1}, (z, t) \mapsto F(z, t) = e^{i\pi t} z$$

è un'omotopia tra  $\text{id}_{S^{2k-1}}$  e  $A$ .

**Osservazione 1.1.4** Se  $n$  è pari allora l'applicazione antipodale  $A : S^n \rightarrow S^n$  non è omotopa all'applicazione  $\text{id}_{S^n}$ . La dimostrazione di questo fatto non fa parte di queste note e si può ottenere, per esempio, usando la teoria dell'omologia.

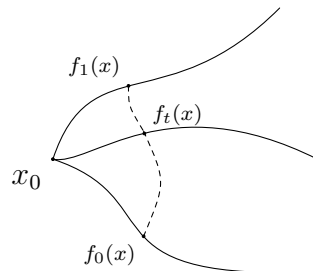
## 1.2 Omotopia relativa

Un insieme importante di applicazioni continue si ottiene quando  $X = I$ . In questo caso un'applicazione  $f : I \rightarrow Y$  è chiamato **arco** di estremi  $f(0)$  e  $f(1)$ . Il concetto di omotopia è banale nel caso di archi, in quanto un arco  $f : I \rightarrow Y$  è sempre omotopo all'arco costante  $\epsilon_y : I \rightarrow Y$ ,  $\epsilon_y(I) = y = f(0)$ . Infatti  $F : I \times I \rightarrow Y$  definita da  $F(x, t) = f((1-t)x)$  è un'omotopia tra  $f$  e  $\epsilon_y$ . Per questo motivo introduciamo un concetto più generale di omotopia quello di **omotopia relativa**. Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici e  $A \subseteq X$  un sottoinsieme di  $X$ . Due applicazioni continue  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  sono dette **omotope relativamente ad  $A$**  se esiste un'omotopia (detta **omotopia relativa ad  $A$** )

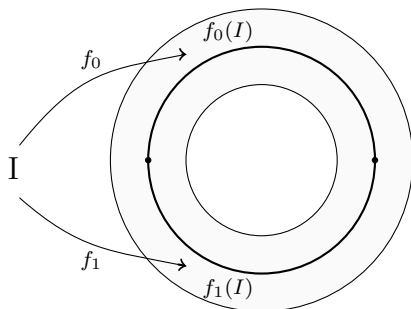
$$F : X \times I \rightarrow Y,$$

tra  $f_0$  e  $f_1$ , tale che  $F(a, t)$  non dipende da  $t$  per ogni  $a \in A$ . Osserviamo che se  $A = \emptyset$  allora il concetto di omotopia relativa coincide con quello di omotopia.

**Esempio 1.2.1** Sia  $A = \{x_0\} \subseteq X = I$ . Allora l'omotopia relativa al punto  $\{x_0\}$  può essere visualizzata come segue:



**Esempio 1.2.2** Descriviamo ora un esempio di funzioni omotope ma non relativamente omotope. Sia  $X = I$  e  $A = \{0, 1\} \subseteq X$ ,  $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ . Consideriamo le applicazioni continue  $f_0 : I \rightarrow Y$ ,  $f_0(t) = \frac{3}{2}(\cos(\pi t), \sin(\pi t))$  e  $f_1 : I \rightarrow Y$ ,  $f_1(t) = \frac{3}{2}(\cos(\pi t), -\sin(\pi t))$ .



Allora si può dimostrare che  $f_0$  e  $f_1$  sono omotope ma non lo sono relativamente ad  $A$  (anche qui rinviamo lo studente all'Esercizio 4.1).

**Notazione:** scriveremo  $f_0 \sim_A f_1$  (risp.  $f_0 \sim f_1$ ) per indicare che due funzioni continue  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  sono omotope relativamente ad  $A$  (risp. omotope).

Questa notazione è giustificata dalla seguente:

**Proposizione 1.2.3** Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici e  $A \subseteq X$ . Allora  $\sim_A$  definisce una relazione di equivalenza sull'insieme  $C(X, Y)$  delle applicazioni continue da  $X$  in  $Y$ .

**Dimostrazione:** Sia  $f \in C(X, Y)$ . La riflessività di  $\sim_A$  si ottiene ponendo  $F(x, t) = f(x)$ ,  $\forall x \in X$ . Se  $f \sim_A g$  tramite l'omotopia  $F(x, t)$  allora  $g \sim_A f$  tramite l'omotopia  $G(x, t) = F(x, 1 - t)$ , e questo mostra la simmetria di  $\sim_A$ . Infine, per dimostrare la transitività, sia  $f \sim_A g$  tramite  $F$  e  $g \sim_A h$  tramite  $G$ . Allora  $H(x, t)$  definita da  $F(x, 2t)$ , per  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ , e  $G(x, 2t - 1)$ , per  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ , è un'omotopia relativa ad  $A$  tra  $f$  e  $h$ .  $\square$

### 1.3 Alcune proprietà dell'omotopia

Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici. Allora l'insieme  $C(X, Y)$  delle applicazioni continue da  $X$  a  $Y$  può essere dotato della struttura di spazio topologico introducendo la **topologia dei compatti-aperti** come segue.

Siano  $K \subset X$  un compatto e  $W \subseteq Y$  un aperto e sia  $S(K, W)$  il sottoinsieme di  $C(X, Y)$  definito come:

$$S(K, W) = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subseteq W\}.$$

Sia  $\mathcal{S}$  la famiglia di tutti i sottoinsiemi di  $C(X, Y)$  costituita da  $C(X, Y)$ , il vuoto e da tutti gli insiemi della forma  $S(K, W)$  al variare di  $K \subset X$ ,  $K$  compatto, e  $W \subseteq Y$ ,  $W$  aperto. Nella topologia dei compatti-aperti  $\mathcal{U} \subseteq C(X, Y)$  è aperto se e solo se  $\mathcal{U} = C(X, Y)$ ,  $\mathcal{U} = \emptyset$  oppure se per ogni  $f \in \mathcal{U}$  esistono sottoinsiemi  $S_1, \dots, S_k$  di  $\mathcal{S}$  tali che

$$f \in S_1 \cap \dots \cap S_k \subseteq \mathcal{U}.$$

La verifica che si tratti di una topologia è un esercizio per lo studente (cfr. Esercizio 1.1). In particolare, per  $K$  compatto in  $X$  e  $W$  aperto in  $Y$ ,  $S(K, W)$  è aperto in  $C(X, Y)$ . Da ora in poi  $C(X, Y)$  sarà dotato della topologia dei compatti-aperti.

**Osservazione 1.3.1** Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico e  $X$  uno spazio compatto e di Hausdorff. Consideriamo la **topologia uniforme** su  $C(X, Y)$ , cioè la topologia indotta dalla metrica (si veda anche (D.1) in Appendice D)

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Si può dimostrare (la dimostrazione non fa parte di queste note) che la topologia uniforme coincide con la topologia dei compatti-aperti.

Data un'omotopia  $F : X \times I \rightarrow Y$  tra due applicazioni continue  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  possiamo definire un'applicazione

$$\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$$

definita da:

$$\hat{F}(t)(x) = F(x, t) \tag{1.2}$$

e quindi  $\hat{F}(0) = f_0$  e  $\hat{F}(1) = f_1$ . E' naturale chiedersi se  $\hat{F}$  definisce un arco tra  $f_0$  e  $f_1$  cioè se  $\hat{F}$  è continua, dove  $C(X, Y)$  è dotato della topologia dei compatti-aperti. La seguente proposizione mostra che questo è vero e, inoltre, se  $X$  è localmente compatto e di Hausdorff (lo studente è rinviato all'Appendice B per il materiale sugli spazi localmente compatti e le loro proprietà) e  $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$  è continua allora  $F : X \times I \rightarrow Y$  definita da

$$F(x, t) = \hat{F}(t)(x) \tag{1.3}$$

è continua.

**Proposizione 1.3.2** *Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici. Siano  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  due applicazioni continue. Se  $f_0$  e  $f_1$  sono omotope tramite un'omotopia  $F$  allora  $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$  data da (1.2) definisce un arco tra  $f_0$  e  $f_1$  in  $C(X, Y)$ . Viceversa, se  $X$  è localmente compatto e di Hausdorff e se  $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$  è un arco di estremi  $f_0$  e  $f_1$ , allora  $F : X \times I \rightarrow Y$  data da (1.3) è un'omotopia tra  $f_0$  e  $f_1$ .*

Per la dimostrazione della proposizione abbiamo bisogno di un lemma.

**Lemma 1.3.3** *Sia  $X$  uno spazio localmente compatto e di Hausdorff e  $Y$  uno spazio topologico arbitrario. Allora la funzione valutazione*

$$e_v : X \times C(X, Y) \rightarrow Y, (x, f) \mapsto e_v(x, f) := f(x)$$

*è continua.*

**Dimostrazione:** Sia  $(x, f) \in X \times C(X, Y)$  e  $W \subseteq Y$  un aperto tale che  $e_v(x, f) = f(x) \in W$ . Vorremo trovare un aperto  $\mathcal{U} \subseteq X \times C(X, Y)$  tale che  $e_v(\mathcal{U}) \subseteq W$  (questo mostrerebbe che  $e_v$  è continua nel punto  $(x, f)$ ). Siccome  $f : X \rightarrow Y$  è continua in  $x$  esiste un aperto  $U$ ,  $x \in U$ , tale che  $f(U) \subseteq W$ . Essendo  $X$  localmente compatto e di Hausdorff segue dal Teorema B.2.1 dell'Appendice B.2 che esiste  $V$  intorno aperto di  $x$  tale che  $\bar{V}$  è compatto e  $\bar{V} \subseteq U$ . Quindi  $f(\bar{V}) \subseteq f(U) \subseteq W$ . Consideriamo l'aperto  $\mathcal{U} = V \times S(\bar{V}, W)$  di  $X \times C(X, Y)$ . Allora  $(x, f) \in \mathcal{U}$  e  $e_v(\mathcal{U}) \subseteq W$  (se  $(x', f') \in \mathcal{U}$  allora  $e_v(x', f') = f'(x') \in W$ ).

□

**Dimostrazione della Proposizione 1.3.2** Sia  $F : X \times I \rightarrow Y$  un'omotopia tra  $f_0$  e  $f_1$ . Vogliamo mostrare che  $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$  è continua. Sia  $t \in I$  e sia  $S(K, W) \subseteq C(X, Y)$  ( $K$  compatto in  $X$  e  $W$  aperto di  $Y$ ) tale che  $\hat{F}(t) \in S(K, W)$ . Per dimostrare che  $\hat{F}$  è continua in  $t$  è sufficiente mostrare che esiste un aperto  $A \subseteq I$ ,  $t \in A$ , tale che  $\hat{F}(A) \subseteq S(K, W)$ . Ora  $\hat{F}(t) \in S(K, W)$  significa che  $\hat{F}(t)(K) \subseteq W$ , ossia  $F(K \times \{t\}) \subseteq W$ . Segue che  $K \times \{t\} \subseteq F^{-1}(W)$ , il quale è un sottoinsieme aperto di  $X \times I$  per la continuità di  $F$ . Dal momento che  $K \times \{t\}$  è compatto esiste un aperto  $A \subseteq I$  tale che  $K \times A \subseteq F^{-1}(W)$ . Segue che  $F(K \times A) \subseteq W$ , ossia  $\hat{F}(A) \subseteq S(K, W)$ .

Viceversa supponiamo che  $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$  sia continua. Allora  $F : X \times I \rightarrow Y$  è continua in quanto composizione dell'applicazione continua

$$\text{id}_X \times \hat{F} : X \times I \rightarrow X \times C(X, Y), (x, t) \mapsto (x, \hat{F}(t))$$

con l'applicazione valutazione  $e_v$  (che è continua per il Lemma 1.3.3).

□

**Osservazione 1.3.4** Nella prima parte della della Proposizione 1.3.2 abbiamo usato il fatto (vedi [6, Proposizione 10.1.4]) che se  $X$  e  $Y$  sono spazi topologici con  $Y$  compatto e  $B$  è un aperto di  $X \times Y$  che contiene  $x_0 \times Y$ ,  $x_0 \in X$ , allora esiste un aperto  $A$  di  $X$ ,  $x_0 \in A$ , tale che  $A \times Y \subseteq B$ . Osserviamo inoltre che l'intervallo  $I$  non gioca nessun ruolo importante nella dimostrazione della proposizione e può essere sostituito da un qualunque spazio topologico  $Z$ . In effetti si può dimostrare (la dimostrazione non fa parte di queste note) qualcosa di ancora più forte e cioè che se  $X$  è uno spazio localmente compatto e di Hausdorff e  $Y, Z$  sono spazi topologici arbitrari allora l'applicazione

$$C(Z, C(X, Y)) \rightarrow C(X \times Z, Y), \hat{F} \mapsto F, F(x, z) := \hat{F}(z)(x)$$

è un omeomorfismo.

**Proposizione 1.3.5** (*stabilità dell'omotopia rispetto alle composizioni*) Siano  $X, Y, Z$  spazi topologici,  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  e  $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$  applicazioni continue. Se  $f_0 \sim f_1$  e  $g_0 \sim g_1$  allora  $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$ .

**Dimostrazione:** Sia  $F : X \times I \rightarrow Y$  l'omotopia tra  $f_0$  e  $f_1$  e  $G : Y \times I \rightarrow Z$  un'omotopia tra  $g_0$  e  $g_1$ . Allora si verifica facilmente che l'applicazione  $H : X \times I \rightarrow Z$  definita da  $H(x, t) = G(F(x, t), t)$  è un'omotopia tra  $g_0 \circ f_0$  e  $g_1 \circ f_1$ .  $\square$

**Proposizione 1.3.6** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $f : S^1 \rightarrow X$  un'applicazione continua. Allora  $f$  è omotopa all'applicazione costante se e solo se  $f$  ammette un'estensione continua dal disco unitario  $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  a  $X$ .

**Dimostrazione:** Supponiamo dapprima che  $g : D^2 \rightarrow X$  sia un'estensione continua di  $f$ , cioè  $g$  è continua e  $g|_{\partial D^2=S^1} = f$ . Definiamo un'omotopia  $H : D^2 \times I \rightarrow X$  tra  $\epsilon_q$ ,  $q = g(0)$ , e  $g$  ponendo  $H(x, t) = g(tx)$ . Sia  $F : S^1 \times I \rightarrow X$  la restrizione di  $H$  a  $S^1 \times I$ . Allora  $F$  è un'omotopia tra  $\epsilon_q = F(x, 0)$  e  $f(x) = F(x, 1) = H(x, 1)$ . Viceversa supponiamo che  $F : S^1 \times I \rightarrow X$  sia un'omotopia tra  $\epsilon_q = F(x, 0)$  e  $f(x) = F(x, 1)$ . Consideriamo l'applicazione continua  $h : S^1 \times I \rightarrow D^2$  definita da  $h(x, t) = tx$ . Osserviamo che  $h$  è un'identificazione (continua, suriettiva e chiusa). D'altra parte  $F$  scende al quoziente rispetto a  $h$ , cioè se  $h(x, t) = h(y, s)$  allora  $F(x, t) = F(y, s)$ . Infatti  $h(x, t) = h(y, s)$  se e solo se  $tx = sy$  e, passando alle norme, si ottiene  $t = s$ . Distinguiamo i due casi: se  $t = s = 0$  allora  $F(x, 0) = F(y, 0) = \epsilon_q$ ; se invece  $t = s \neq 0$  allora  $x = y$  e quindi  $F(x, t) = F(y, s)$ . Segue da [6, Corollario 11.2.3] che esiste un'unica applicazione continua  $g : D^2 \rightarrow X$  tale che  $g \circ h = F$ :

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 \times I & \xrightarrow{F} & X \\
 & \searrow h & \uparrow g \\
 & & D^2
 \end{array}$$

Allora

$$f(x) = F(x, 1) = g(h(x, 1)) = g(x), \quad \forall x \in S^1,$$

e quindi  $g$  è un'estensione continua di  $f$ .  $\square$

## 1.4 Spazi omotopicamente equivalenti

L'omotopia tra funzioni continue induce una relazione d'equivalenza tra spazi topologici come segue. Due spazi topologici  $X$  e  $Y$  sono detti **omotopicamente equivalenti** o **omotopi** se esistono due funzioni continue  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  tali che

$$g \circ f \sim \text{id}_X, \quad f \circ g \sim \text{id}_Y,$$

dove  $\text{id}_X : X \rightarrow X$  (risp.  $\text{id}_Y : Y \rightarrow Y$ ) denota l'identità di  $X$  (risp.  $Y$ ). Diremo anche che gli spazi  $X$  e  $Y$  hanno lo **stesso tipo di omotopia**. Resta così definita una relazione di equivalenza sull'insieme di tutti gli spazi topologici definendo  $X \sim Y$  se e solo se  $X$  e  $Y$  hanno lo stesso tipo di omotopia.

**Notazione:** scriveremo  $X \sim Y$  quando  $X$  e  $Y$  hanno lo stesso tipo di omotopia.

Due applicazioni  $f$  e  $g$  che soddisfano le condizioni precedenti sono chiamate **equivalenze omotopiche**.

Osserviamo che due spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti. Il viceversa non è vero come mostra l'esempio che segue.

**Esempio 1.4.1** Sia  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme convesso. Allora  $X$  è omotopo allo spazio  $\{x_0\}$  costituito da un solo punto  $x_0 \in X$ . Infatti l'inclusione  $i : \{x_0\} \rightarrow X$  e l'applicazione costante  $\epsilon_{x_0} : X \rightarrow \{x_0\}$  sono equivalenze omotopiche. Infatti  $\epsilon_{x_0} \circ i = \text{id}_{\{x_0\}}$  mentre  $\text{id}_X \sim i \circ \epsilon_{x_0}$  tramite l'omotopia (cfr. Esempio 1.1.1)

$$F : X \times I \rightarrow X, \quad F(x, t) = (1 - t) \text{id}_X(x) + t(i \circ \epsilon_{x_0})(x) = (1 - t)x + tx_0.$$

Diremo che uno spazio topologico  $X$  è **contraibile** se  $X$  è omotopicamente equivalente ad uno spazio topologico costituito da un solo punto (il punto non è necessariamente un punto di  $X$ ). L'esempio precedente mostra che un sottoinsieme convesso di  $\mathbb{R}^n$  è contraibile. In particolare  $\mathbb{R}^n$  stesso o il disco unitario  $D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$  sono esempi di spazi topologici contraibili. Più in generale un sottospazio  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  stellato rispetto ad un suo



punto  $x_0$ , è contraibile ( $X$  è stellato rispetto a  $x_0 \in X$  se il segmento di retta che unisce  $x_0$  e  $x$  è contenuto in  $X$ ,  $\forall x \in X$ ).

**Proposizione 1.4.2** *Uno spazio topologico  $X$  è contraibile se e solo se  $\text{id}_X$  è omotopa all'applicazione costante.*

**Dimostrazione:** Si veda l'Esercizio 1.4. □

**Osservazione 1.4.3** Quando parleremo del gruppo fondamentale mostreremo che il cerchio unitario  $S^1$  non è contraibile. In effetti si riesce a dimostrare che  $S^n$  non è contraibile per  $n \geq 1$  ma la dimostrazione non fa parte di queste note (la si può ottenere, per esempio, usando i gruppi di omotopia, , si veda l'Osservazione 2.7.2 del Paragrafo 2.7 del Capitolo 2).

**Esempio 1.4.4** Il cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$$

e il cerchio

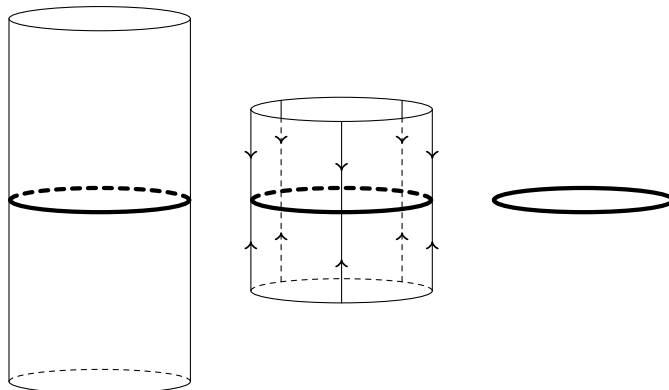
$$S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

sono omotopicamente equivalenti. Infatti siano  $r : C \rightarrow S^1$ ,  $r(x, y, z) = (x, y, 0)$  e  $i : S^1 \rightarrow C$ ,  $i$  inclusione naturale. Allora  $r \circ i = \text{id}_{S^1}$  e  $\text{id}_C \sim i \circ r$ . La prima uguaglianza è immediata. Per dimostrare che  $\text{id}_C \sim i \circ r$  definiamo l'applicazione continua  $F : C \times I \rightarrow C$ ,  $F(x, y, z; t) = (x, y, (1 - t)z)$ . Allora

$$F(x, y, z; 0) = (x, y, z) = \text{id}_C(x, y, z)$$

e

$$F(x, y, z; 1) = (x, y, 0) = (i \circ r)(x, y, z).$$



L'esempio precedente suggerisce qualche definizione. Sia  $X$  uno spazio topologico e  $A \subseteq X$  un sottoinsieme di  $X$ .

$A$  è un **retrato** di  $X$  se esiste una funzione continua  $r : X \rightarrow A$ , chiamata **retrazione** di  $X$  su  $A$ , tale che  $r \circ i = \text{id}_A$  (equivalentemente  $r|_A = \text{id}_A$ ) dove  $i : A \rightarrow X$  è l'inclusione.

$A$  è un **retrato di deformazione** di  $X$  se esiste una retrazione  $r : X \rightarrow A$  tale che  $\text{id}_X \sim i \circ r$ . Quindi  $A \subseteq X$  è un retratto di deformazione se e solo se esiste  $F : X \times I \rightarrow X$  tale che  $F(x, 0) = x$ ,  $F(x, 1) \in A$ ,  $\forall x \in X$ ,  $F(a, 1) = a$ ,  $\forall a \in A$ .

**Osservazione 1.4.5** Se  $A \subseteq X$  è un retratto di deformazione allora  $X \sim A$ . Esistono però sottoinsiemi  $A \subseteq X$  di uno spazio topologico  $X$  che sono omotopicamente equivalenti a  $X$  ma che non sono retratti di  $X$ . Per esempio l'intervallo aperto  $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  è omotopo a  $\mathbb{R}$  (entrambi sono contraibili) ma non può esistere una retrazione di  $\mathbb{R}$  in  $(0, 1)$  in quanto  $(0, 1)$  è un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}$  (cfr. Esercizio 1.9).

**Osservazione 1.4.6** Se  $r : X \rightarrow A$  è una retrazione non è detto che  $A$  sia un retratto di deformazione di  $X$ . Infatti ogni spazio si retrae ad un suo punto ma non è detto che  $X$  sia contraibile (cfr. Esercizio 1.5). Un esempio di spazio non contraibile è uno spazio con due componenti connesse. Il cerchio  $S^1$  è un esempio di spazio connesso non contraibile (per dimostrare che  $S^1$  non è contraibile dobbiamo aspettare al Capitolo 4).

$A$  è un **retrato forte di deformazione** di  $X$  se esiste una retrazione  $r : X \rightarrow A$  tale che  $\text{id}_X \sim_A i \circ r$ . Quindi  $A \subseteq X$  è un retratto forte di deformazione se e solo se esiste  $F : X \times I \rightarrow X$  tale che  $F(x, 0) = x$ ,  $F(x, 1) \in A$ ,  $\forall x \in X$ ,  $F(a, t) = a$ ,  $\forall a \in A$ ,  $\forall t \in I$ .

Intuitivamente  $A \subseteq X$  è un retratto (forte) di deformazione se  $X$  può essere deformato con continuità su  $A$  fino a farlo coincidere con  $A$  mantenendo fisso  $A$  (ogni punto  $a \in A$ ) durante il processo di deformazione. Ovviamente un retratto forte di deformazione è un retratto di deformazione ma non vale il viceversa (si veda l'Esercizio 1.15).

**Esempio 1.4.7** Il cerchio  $S^1$  è un retratto forte di deformazione del cilindro  $C$  come mostra l'Esempio 1.4.4.

**Esempio 1.4.8** La sfera  $n$ -dimensionale  $S^n$  è un retratto forte di deformazione di  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Si consideri infatti la retrazione

$$r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n, \quad r(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Allora  $r \circ i = \text{id}_{S^n}$  mentre

$$i \circ r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad (i \circ r)(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

è omotopa (relativamente a  $S^n$ ) a  $\text{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$  tramite l'omotopia  $F : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  definita da:

$$F(x, t) = (1 - t)x + t \frac{x}{\|x\|}.$$

**Esempio 1.4.9** Sia  $L$  l'unione di due lati di un triangolo  $T$ . Allora  $L$  è un retratto forte di deformazione di  $T$ . Per dimostrare quest'affermazione possiamo supporre che  $T$  sia il triangolo nel piano di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  e dimostrare che l'insieme  $L$ , unione dei segmenti che uniscono  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  e  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$ , è un retratto forte di deformazione di  $T$ .

Definiamo la retrazione  $r : T \rightarrow L$ ,

$$r(x, y) = \begin{cases} (0, y - x) & \text{se } x \leq y \\ (x - y, 0) & \text{se } y \leq x \end{cases}$$

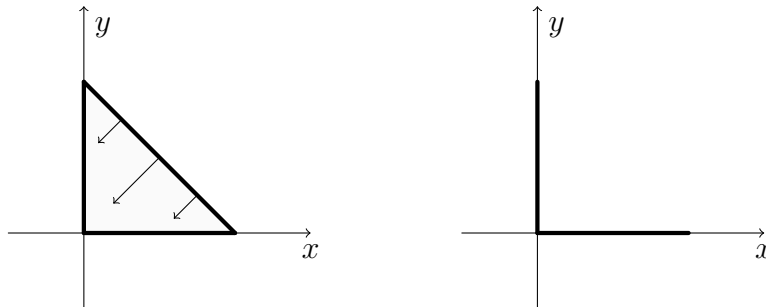
o, equivalentemente,

$$r(x, y) = (x - \min(x, y), y - \min(x, y)).$$

Allora  $F : T \times I \rightarrow T$ ,

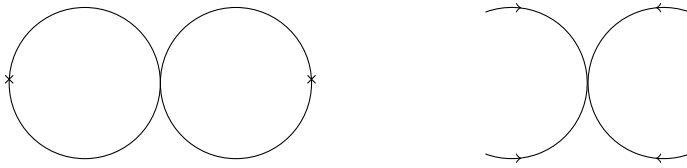
$$F(x, y, t) = (1 - t)(x, y) + t(i \circ r)((x, y))$$

è tale che  $F(x, y, 0) = (x, y) = \text{id}_T((x, y))$  e  $F(x, y, 1) = (i \circ r)((x, y))$ ,  $F(a, b, t) = (a, b)$  per ogni  $(a, b) \in L$  (infatti se  $(a, b) \in L$  allora  $\min(a, b) = 0$ ).

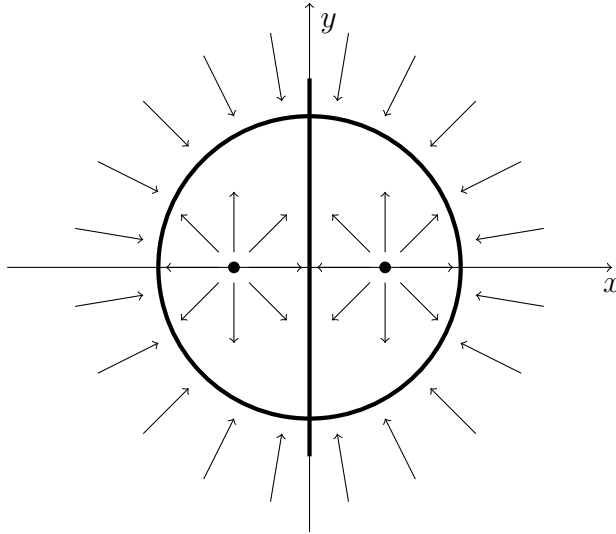


**Esempio 1.4.10** Consideriamo la figura  $\infty = C_1 \cup C_2$ , dove  $C_1 = \{x = (x_1, x_2) \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\}$ ,  $C_2 = \{x = (x_1, x_2) \mid (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1\}$ . Lo spazio  $X = \infty \setminus \{(-2, 0), (2, 0)\}$  si retrae per deformazione forte all'origine  $(0, 0)$  tramite l'omotopia  $F : X \times I \rightarrow X$

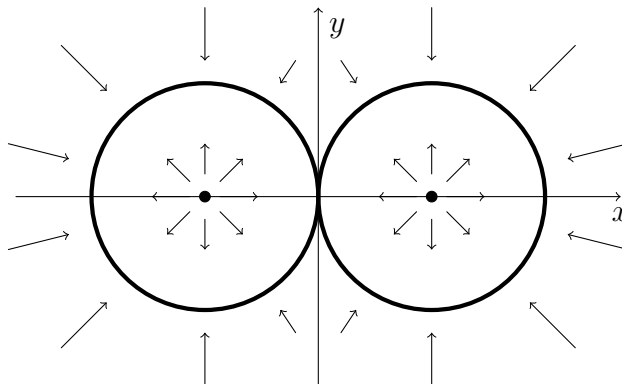
$$F(x, t) = \begin{cases} \frac{(1-t)x}{\|((1-t)x_1 - 1, (1-t)x_2)\|} & \text{se } x = (x_1, x_2) \in C_1 \setminus \{(2, 0)\} \\ \frac{(1-t)x}{\|((1-t)x_1 + 1, (1-t)x_2)\|} & \text{se } x = (x_1, x_2) \in C_2 \setminus \{(-2, 0)\} \end{cases}$$



**Esempio 1.4.11** La figura  $\Theta$  è un retratto forte di deformazione di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (0, 1)\}$ .



**Esempio 1.4.12** La figura  $\infty$  è un retratto forte di deformazione di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (0, 1)\}$ .



**Osservazione 1.4.13** Dagli ultimi due esempi e dalla proprietà transitiva dell'omotopia si deduce che  $\infty \sim \Theta$ . Questo è un fatto generale. Un teorema di Fuchs afferma infatti che due spazi topologici  $X$  e  $Y$  hanno lo stesso tipo di omotopia se e solo se sono (omeomorfi a) retratti di deformazione di uno stesso spazio  $Z$ .

## 1.5 Esercizi

**Esercizio 1.1** Dimostrare che la topologia dei compatto-aperti è effettivamente una topologia e che  $\mathcal{U} \subseteq C(X, Y)$  è aperto in questa topologia se e solo se  $\mathcal{U} = C(X, Y)$ ,  $\mathcal{U} = \emptyset$  oppure  $\mathcal{U}$  può essere scritto come unione di intersezioni finite di elementi di  $\mathcal{S}$ .

**Esercizio 1.2** Siano  $X$  e  $Y$  due spazi omotopicamente equivalenti e sia  $f : X \rightarrow Y$  un'equivalenza omotopica. Un'applicazione  $g : Y \rightarrow X$  tale che  $f \circ g \sim id_Y$  e  $g \circ f \sim id_X$  è detta un'**inversa omotopica** di  $f$ . Dimostrare che un'inversa omotopica di  $f$  è unica a meno di omotopie.

**Esercizio 1.3** Dimostrare che nel nastro di Möbius  $N$  esiste una circonferenza che risulta essere un retrato forte di deformazione di  $N$ . Dedurre che  $N$  è omotopicamente equivalente al cilindro.

**Esercizio 1.4** Dimostrare che uno spazio topologico  $X$  è contraibile se e solo se l'identità di  $X$  è omotopa ad una funzione costante.

**Esercizio 1.5** Dimostrare che uno spazio omotopicamente equivalente ad uno spazio connesso (risp. connesso per archi) è connesso (risp. connesso per archi).

**Esercizio 1.6** E' vero che uno spazio omotopicamente equivalente ad uno spazio compatto è compatto?

**Esercizio 1.7** Dimostrare che un retrato di uno spazio compatto (risp. connesso, connesso per archi) è compatto (risp. connesso, connesso per archi).

**Esercizio 1.8** Si dimostri che un retrato di uno spazio contraibile è contraibile.

**Esercizio 1.9** Dimostrare che un retrato di uno spazio di Hausdorff è chiuso.

**Esercizio 1.10** Sia  $T^2$  il toro e  $X$  il complementare di un suo punto. Dimostrare che  $X$  è omotopicamente equivalente alla figura  $\infty$ . Dedurre che il complementare di tre punti distinti in  $S^2$  è omotopicamente equivalente a  $X$ .

**Esercizio 1.11** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $f, g : X \rightarrow S^n$  due funzioni continue tali che  $f(x) \neq -g(x)$ , per ogni  $x \in X$ . Dimostrare che  $f$  è omotopa a  $g$ .

**Esercizio 1.12** Dimostrare che  $SL(n, \mathbb{R})$  (le matrici  $n \times n$  con determinante uguale a 1) è un retratto forte di deformazione di  $GL^+(n, \mathbb{R})$  (le matrici  $n \times n$  con determinante strettamente positivo).

**Esercizio 1.13** Sia  $A \subseteq X$  un sottoinsieme di uno spazio topologico  $X$ . Supponiamo che  $A$  sia un retratto (forte) di deformazione di  $X$ . Sia  $r : X \rightarrow A$  una qualsiasi retrazione (cioè  $r \circ i = id_A$ ) dimostrare che  $r$  è una retrazione (forte) per deformazione di  $X$  su  $A$  (cioè  $i \circ r \sim_A id_X$ ).

**Esercizio 1.14** Dimostrare che il bicchiere vuoto  $A$  è un retratto forte di deformazione del bicchiere pieno  $X$ . In termini matematici dimostrare che  $A = (D^2 \times \{0\}) \cup S^1 \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^3$  è un retratto forte di deformazione di  $X = D^2 \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 1.15** Dare un esempio di un sottoinsieme di uno spazio topologico che sia un retratto di deformazione ma non un retratto forte di deformazione. (Suggerimento: sia  $Y$  lo spazio descritto nell'Osservazione A.1.3 dell'Appendice A e sia  $P_0 = (0, 1)$ . Supponiamo che esista un'applicazione continua  $F : Y \times I \rightarrow Y$  tale che  $F(x, 0) = x$ ,  $F(x, 1) = P_0$ ,  $F(P_0, t) = P_0$  per ogni  $t \in I$  e per ogni  $x \in Y$ . Consideriamo il punto  $P_n$  di coordinate  $P_n = (\frac{1}{n}, 1)$ . Ovviamente  $P_n \rightarrow P_0$ . Per ogni  $n$  esiste un  $t_n \in I$  tale che  $y(F(P_n, t_n)) = 0$ , dove  $y(P)$  denota l'ordinata del punto  $P$  (infatti consideriamo l'arco  $F(P_n, t)$ , quest'arco soddisfa  $F(P_n, 0) = P_n$  e  $F(P_n, 1) = P_0$  e dato che il punto  $P_0$  rimane fisso dovrà esistere un tale  $t_n$ ). Ma allora essendo  $I$  compatto esisterà una sottosuccessione, chiamiamola ancora  $t_n$ , che converge ad un punto  $t_0 \in I$ . Segue che  $(P_n, t_n) \rightarrow (P_0, t_0)$  e quindi  $0 = y(F(P_n, t_n)) \rightarrow y(F(P_0, t_0)) = y(P_0) = 1 \neq 0$  che è assurdo.

# Capitolo 2

## Il gruppo fondamentale

### 2.1 Prodotto di archi

Siano  $f, g : I \rightarrow X$  due archi in uno spazio topologico  $X$ . Il loro prodotto (o concatenazione) è l'arco  $f \cdot g : I \rightarrow X$  definito come:

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

(la continuità dell'applicazione  $f \cdot g : I \rightarrow X$  segue dal lemma di incollamento). Ricordiamo dal Capitolo 1 che due archi  $f_0, f_1 : I \rightarrow X$  sono omotopi relativamente al sottoinsieme  $\{0, 1\} \subseteq I$  se esiste un'omotopia relativa a  $\{0, 1\}$  ossia un'applicazione continua  $F : I \times I \rightarrow X$  tale che  $F(t, 0) = f_0(t)$ ,  $F(t, 1) = f_1(t)$ ,  $F(0, s) = f_0(0)$ ,  $F(1, s) = f_0(1)$  per ogni  $s \in I$ . Quindi, necessariamente il punto iniziale e il punto finale degli archi  $f_0$  e  $f_1$  coincidono, cioè  $f_0(0) = f_1(0)$  e  $f_0(1) = f_1(1)$ .

**Osservazione 2.1.1** Notiamo che, a differenza del capitolo precedente, stiamo usando il parametro  $s$  come parametro della deformazione (ossia come tempo) e  $t$  come parametro degli archi.

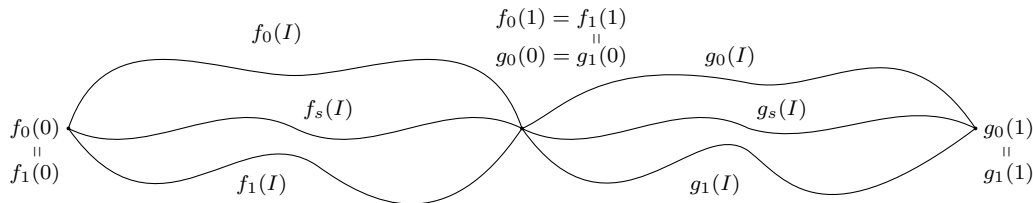
**Notazione-Definizione:** Da ora in poi diremo che due archi  $f_0$  e  $f_1$  tali che  $f_0(0) = f_1(0)$  e  $f_0(1) = f_1(1)$  sono **equivalenti** se sono omotopi relativamente a  $\{0, 1\}$  e scriveremo  $f_0 \sim_{\{0,1\}} f_1$ . Scriveremo  $f_0 \sim_{\{0,1\}, F} f_1$  quando vorremo sottolineare l'omotopia  $F$  relativa a  $\{0, 1\}$  tra  $f_0$  e  $f_1$ . Dato un arco  $f : I \rightarrow X$  denoteremo con  $[f]$  la classe di equivalenza relativa alla relazione d'equivalenza definita da  $\sim_{\{0,1\}}$ , cioè dato un arco  $g : I \rightarrow X$  ( $g(0) = f(0)$ ,  $g(1) = f(1)$ )  $g \in [f]$  se e solo se  $g \sim_{\{0,1\}} f$ .

Il seguente lemma mostra che la concatenazione conserva l'omotopia tra archi.

**Lemma 2.1.2** *Sia  $X$  uno spazio topologico e siano  $f_0, f_1, g_0, g_1 : I \rightarrow X$  quattro archi tali che  $f_0(0) = f_1(0)$ ,  $f_0(1) = f_1(1) = g_0(0) = g_1(0)$ ,  $g_0(1) = g_1(1)$ . Supponiamo che  $f_0 \sim_{\{0,1\}} f_1$  e  $g_0 \sim_{\{0,1\}} g_1$ . Allora  $f_0 \cdot g_0 \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdot g_1$ .*

**Dimostrazione:** Sia  $F$  un'omotopia relativa a  $\{0, 1\}$  tra  $f_0$  e  $f_1$  e sia  $G$  un'omotopia relativa a  $\{0, 1\}$  tra  $g_0$  e  $g_1$ . Definiamo

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t - 1, s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$



Allora  $H$  è continua per il lemma di incollamento. Inoltre, si verifica immediatamente, che  $H(t, 0) = (f_0 \cdot g_0)(t)$ ,  $H(t, 1) = (f_1 \cdot g_1)(t)$  e che  $H(0, s) = F(0, s)$  e  $H(1, s) = G(1, s)$  non dipendono da  $s$ . Segue che  $f_0 \cdot g_0 \sim_{\{0,1\}, H} f_1 \cdot g_1$ .  $\square$

Dal lemma otteniamo che se  $f$  e  $g$  sono due archi in  $X$  tali che  $f(1) = g(0)$ , possiamo definire un “prodotto”

$$[f] \cdot [g] := [f \cdot g] \quad (2.2)$$

tra le rispettive classi di equivalenza. Notiamo che il primo “ $\cdot$ ” è il prodotto che stiamo definendo mentre il secondo “ $\cdot$ ” denota la concatenazione tra  $f$  e  $g$ . Le principali proprietà di questo prodotto sono riassunte nel seguente teorema.

**Teorema 2.1.3** *Siano  $f, g, h : I \rightarrow X$  tre archi in uno spazio topologico  $X$  tali che  $f(1) = g(0)$  e  $g(1) = h(0)$ . Sia  $x = f(0)$  e  $y = f(1)$ . Valgono i seguenti fatti:*

1.  $([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$  (associatività);
2.  $[\epsilon_x] \cdot [f] = [f]$ ,  $[f] \cdot [\epsilon_y] = [f]$  (elemento neutro sinistro e destro);
3.  $[f] \cdot [i(f)] = [\epsilon_x]$ ,  $[i(f)] \cdot [f] = [\epsilon_y]$  (inverso sinistro e destro),

dove  $\epsilon_x$  (risp.  $\epsilon_y$ ) è l'arco costante e  $i(f) : I \rightarrow X$  è l'arco definito da  $i(f)(t) = f(1 - t)$  (che inizia in  $y$  e finisce in  $x$ ).



**Osservazione 2.1.4** Se  $f_0, f_1 : I \rightarrow X$  sono due archi in uno spazio topologico  $X$  allora  $f_0 \sim_{\{0,1\},F} f_1$  se e solo se  $i(f_0) \sim_{\{0,1\},G} i(f_1)$ , dove  $G(t, s) = F(1 - t, s)$ . Quindi, per un arco  $f : I \rightarrow X$ , la classe  $[i(f)]$  in 3. è ben definita.

**Osservazione 2.1.5** Il teorema precedente mostra che il prodotto (2.2) soddisfa proprietà simili a quelle di un gruppo. Bisogna però fare attenzione che non si tratta di un gruppo in quanto il prodotto ha senso solo tra classi di equivalenza di archi  $f$  e  $g$  che soddisfano la condizione  $f(1) = g(0)$  (cioè l'arco  $g$  inizia dove finisce l'arco  $f$ ).

**Dimostrazione:** Nella dimostrazione del teorema faremo uso dei tre seguenti fatti (2.3), (2.4) e (2.5) la cui verifica è lasciata allo studente (cfr. Esercizio 2.1). Siano  $f, g : I \rightarrow X$  due archi tali che  $f(1) = g(0)$  e  $k \in C(X, Y)$ . Allora

$$k \circ (f \cdot g) = (k \circ f) \cdot (k \circ g) \quad (2.3)$$

e

$$k \circ (i(f)) = i(k \circ f). \quad (2.4)$$

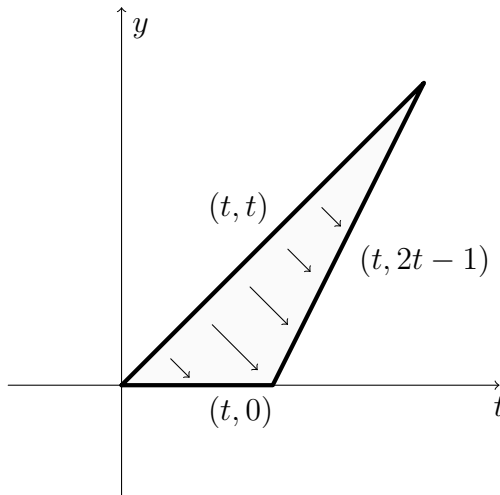
Se  $f_0, f_1 : I \rightarrow X$  sono due archi e  $k \in C(X, Y)$  tali che  $f_0 \sim_{\{0,1\},F} f_1$ , allora

$$(k \circ f_0) \sim_{\{0,1\},k \circ F} (k \circ f_1). \quad (2.5)$$

Iniziamo a dimostare la 2. Sia  $\epsilon_0 : I \rightarrow I$  l'arco costante,  $\epsilon_0(t) = 0, \forall t \in I$ , e sia  $\text{id} : I \rightarrow I$  l'applicazione identica,  $\text{id}(t) = t$  per ogni  $t \in I$ . Allora

$$\epsilon_0 \cdot \text{id} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è un arco che congiunge  $(\epsilon_0 \cdot \text{id})(0) = 0$  con  $(\epsilon_0 \cdot \text{id})(1) = 1$ .



Siccome  $I$  è convesso  $\text{id} \sim_{\{0,1\},G} (\epsilon_0 \cdot \text{id})$ , cioè esiste un'omotopia  $G : I \times I \rightarrow I$  relativa a  $\{0,1\}$  tra  $\text{id}$  e  $\epsilon_0 \cdot \text{id}$ <sup>1</sup>. Dalla (2.3) si ha

$$f \circ (\epsilon_0 \cdot \text{id}) = (f \circ \epsilon_0) \cdot (f \circ \text{id}) = \epsilon_x \cdot f, \quad x = f(0),$$

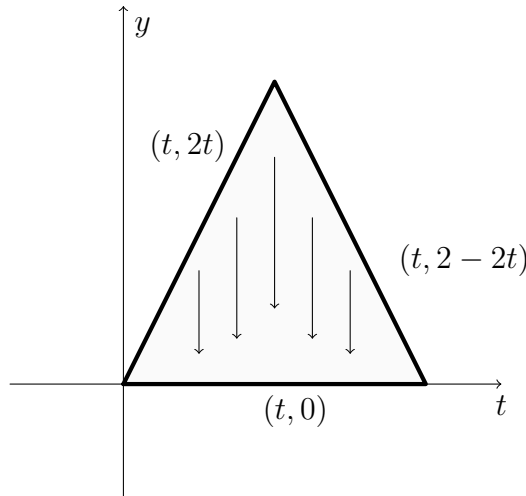
e applicando la (2.5) a  $\text{id} \sim_{\{0,1\},G} (\epsilon_0 \cdot \text{id})$  si ottiene

$$f \sim_{\{0,1\},F} (\epsilon_x \circ f),$$

dove  $F = f \circ G$ .<sup>2</sup> Quindi  $[\epsilon_x] \cdot [f] = [f]$ . La dimostrazione che  $(f \cdot \epsilon_y) \sim_{\{0,1\}} f$ , cioè  $[f] \cdot [\epsilon_y] = [f]$ , si ottiene in modo simile considerando l'arco costante  $\epsilon_1 : I \rightarrow I$  usando  $\text{id} \sim_{\{0,1\}} (\text{id} \cdot \epsilon_1)$  la quale induce un'omotopia  $f \sim_{\{0,1\}} (f \cdot \epsilon_y)$ .

Dimostriamo la 3. Ci limitiamo anche a dimostrare che  $(f \cdot i(f)) \sim_{\{0,1\}} \epsilon_x$  (cioè  $[f][i(f)] = [\epsilon_x]$ ) l'uguaglianza  $[i(f)] \cdot [f] = \epsilon_y$  seguirà in modo del tutto simile. Consideriamo la concatenazione tra  $\text{id}$  e  $i(\text{id})$ , cioè

$$(\text{id} \cdot i(\text{id}))(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2t & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



Questo rappresenta un laccio in  $I$  di base 0 che è quindi omotopo (sempre perché  $I$  è convesso) tramite un'omotopia  $H : I \times I \rightarrow I$  relativa a  $\{0,1\}$  all'arco costante

<sup>1</sup>Un esempio di tale omotopia è l'omotopia lineare (cfr. Esempio 1.1.1 del Capitolo 1)

$$G(t, s) = (1-s)\text{id}(t) + s(\epsilon_0 \cdot \text{id})(t) = \begin{cases} (1-s)t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (1-s)t + s(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

<sup>2</sup>Possiamo scrivere una tale omotopia  $F = f \circ G : I \times I \rightarrow X$  esplicitamente come:

$$F(t, s) = \begin{cases} f((1-s)t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f((1-s)t + s(2t-1)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$\epsilon_0 : I \rightarrow I$ , cioè  $(\text{id} \cdot i(\text{id})) \sim_{\{0,1\},H} \epsilon_0$  (lasciamo allo studente il compito di scrivere una tale omotopia  $H$  esplicitamente). Dalla (2.3) e (2.4) si ha

$$f \circ (\text{id} \cdot i(\text{id})) = (f \circ \text{id}) \cdot (f \circ i(\text{id})) = (f \circ \text{id}) \cdot (i \circ (f \circ \text{id})) = f \cdot i(f)$$

e applicando la (2.5) a  $(\text{id} \cdot i(\text{id})) \sim_{\{0,1\},H} \epsilon_0$  e usando il fatto che  $\epsilon_x = f \circ \epsilon_0$  si ottiene  $f \cdot i(f) \sim_{\{0,1\},F} \epsilon_x$ , dove  $F = f \circ H$  (lo studente è invitato a scrivere una tale  $F$  esplicitamente).

Infine dimostriamo la 1., cioè l'associatività. Introduciamo qualche terminologia. Dati  $[a, b]$  e  $[c, d]$  in  $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$  definiamo **l'applicazione lineare positiva da  $[a, b]$  in  $[c, d]$**  come l'applicazione

$$L_{[a,b],[c,d]} : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

della forma

$$L_{[a,b],[c,d]}(t) = mt + q, \quad m > 0,$$

tale che  $L_{[a,b],[c,d]}(a) = c$  e  $L_{[a,b],[c,d]}(b) = d$  (un'espressione esplicita è  $L_{[a,b],[c,d]}(t) = \frac{d-c}{b-a}(t-a) + c$ , il cui grafico è l'equazione della retta che passa per i punti  $(a, c)$  e  $(b, d)$ ). La composizione di applicazioni lineari positive è ancora un'applicazione lineare positiva, più precisamente:

$$L_{[a,b],[e,f]} = L_{[c,d],[e,f]} \circ L_{[a,b],[c,d]}.$$

Per esempio, con questa terminologia, possiamo interpretare la concatenazione (2.1)  $f \cdot g : I \rightarrow X$  tra due archi  $f, g : I \rightarrow X$ ,  $f(1) = g(0)$  nel seguente modo:  $f \cdot g$  nell'intervallo  $[0, \frac{1}{2}]$  è l'applicazione lineare positiva da  $[0, \frac{1}{2}]$  a  $[0, 1]$  ( $L_{[0,\frac{1}{2}],[0,1]}(t) = 2t$ ) seguita da  $f$ , mentre  $f \cdot g$  nell'intervallo  $[\frac{1}{2}, 1]$  è l'applicazione lineare positiva da  $[\frac{1}{2}, 1]$  a  $[0, 1]$  ( $L_{[\frac{1}{2},1],[0,1]}(t) = 2t - 1$ ) seguita da  $g$ ; in simboli:

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(L_{[0,\frac{1}{2}],[0,1]}(t)) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(L_{[\frac{1}{2},1],[0,1]}(t)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Siano ora  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $0 < a < b < 1$  e  $f, g, h : I \rightarrow X$  tre archi tali che  $f(1) = g(0)$  e  $g(1) = h(0)$ . Definiamo un arco  $K_{a,b}(f, g, h) : I \rightarrow X$  nel seguente modo:

$$K_{a,b}(f, g, h)(t) = \begin{cases} f(L_{[0,a],[0,1]}(t)) & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ g(L_{[a,b],[0,1]}(t)) & \text{se } a \leq t \leq b \\ h(L_{[b,1],[0,1]}(t)) & \text{se } b \leq t \leq 1. \end{cases}$$

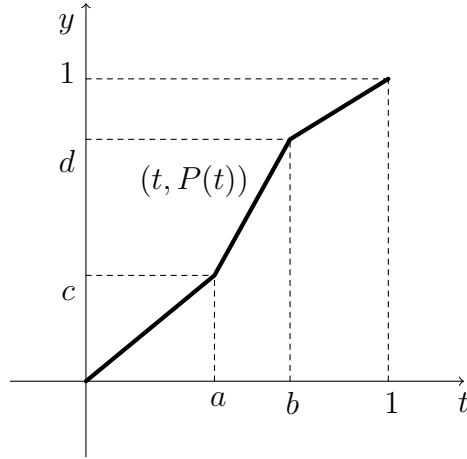
Vogliamo mostrare che

$$K_{a,b}(f, g, h) \sim_{\{0,1\}} K_{c,d}(f, g, h) \tag{2.6}$$

per ogni  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tali che  $0 < a < b < 1$ ,  $0 < c < d < 1$ . Da questa seguirà l'associatività se si osserva che  $(f \cdot g) \cdot h = K_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(f, g, h)$  e  $f \cdot (g \cdot h) = K_{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}}(f, g, h)$ .

Fissiamo tali  $a, b, c, d$  e sia  $P : I \rightarrow I$  l'applicazione continua definita da:

$$P(t) = \begin{cases} L_{[0,a],[0,c]}(t) & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ L_{[a,b],[c,d]}(t) & \text{se } a \leq t \leq b \\ L_{[b,1],[d,1]}(t) & \text{se } b \leq t \leq 1. \end{cases}$$



Segue immediatamente che:

$$K_{c,d}(f, g, h) \circ P = K_{a,b}(f, g, h). \quad (2.7)$$

D'altra parte  $P$  è un arco in  $I$  con estremi 0 e 1 e quindi esiste un'omotopia  $G : I \times I \rightarrow I$  relativa a  $\{0, 1\}$  tra  $P$  e  $\text{id}$ , cioè  $P \sim_{\{0,1\}, G} \text{id}$ . Segue allora dalla (2.5) e dalla (2.7) che:

$$K_{a,b}(f, g, h) = (K_{c,d}(f, g, h) \circ P) \sim_{\{0,1\}, p \circ G} (K_{c,d}(f, g, h) \circ \text{id}) = K_{c,d}(f, g, h)$$

la quale dimostra la (2.6) e conclude la dimostrazione del teorema.  $\square$

La dimostrazione dell'associatività nel teorema precedente ci permette di ottenere anche il seguente risultato.

**Teorema 2.1.6** (*del minestrone omotopico*) Sia  $f : I \rightarrow X$  un arco in uno spazio topologico  $X$ . Siano  $a_0, a_1, \dots, a_q \in I$ ,  $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_q = 1$ . Per ogni  $\alpha = 1, \dots, q$  sia  $f_\alpha : I \rightarrow X$  l'arco definito da:

$$f_\alpha(t) = f((1-t)a_{\alpha-1} + ta_\alpha).$$

Allora  $[f] = [f_1] \cdots [f_q]$  o, equivalentemente,  $f \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdots f_q$ .

## 2.2 Il gruppo fondamentale

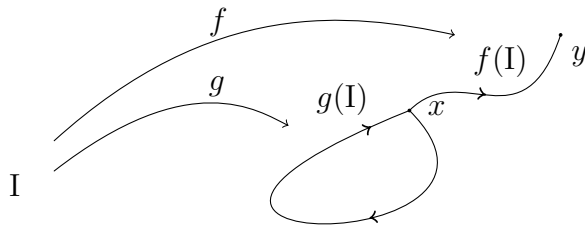
Sia  $X$  uno spazio topologico. Un arco  $f : I \rightarrow X$  è un detto **arco chiuso** o **laccio di base  $x$**  se  $f(0) = f(1) = x$ . Ricordiamo che due archi chiusi  $f$  e  $g$  di base  $x$  ( $f(0) = f(1) = x = g(0) = g(1)$ ) sono equivalenti se  $f \sim_{\{0,1\}} g$ . Come nel paragrafo precedente indicheremo con  $[f]$  la classe di equivalenza dell'arco chiuso  $f$  rispetto a questa relazione di equivalenza. Segue immediatamente dal Teorema 2.1.3 che l'insieme delle classi di equivalenza dei lacci chiusi di base  $x$  nello spazio topologico  $X$  con il prodotto dato da (2.2) ha la struttura di gruppo (cfr. l' Osservazione 2.1.5). Questo gruppo, denotato con  $\pi_1(X, x)$ , si chiama il **gruppo fondamentale** di  $X$  basato nel punto  $x$  ( $x$  viene anche detto **punto base**). Il gruppo  $\pi_1(X, x)$  viene anche chiamato il **primo gruppo di omotopia** o **gruppo di Poincaré** in onore del suo inventore.

**Osservazione 2.2.1** Visto che l'intervallo  $I$  con gli estremi identificati è omeomorfo al cerchio  $S^1$  allora  $\pi_1(X, x)$  può essere descritto anche come l'insieme delle classi di equivalenza delle applicazioni continue da  $S^1$  a  $X$  che mandano il punto  $(1, 0) \in S^1$  nel punto  $x$  e dove due applicazioni sono equivalenti se sono omotope relativamente al punto  $(1, 0)$  (cfr. Esercizio 2.2).

Sia  $X$  uno spazio topologico e  $x, y \in X$  due punti distinti. Non esiste in generale un legame tra  $\pi_1(X, x)$  e  $\pi_1(X, y)$ . Tuttavia vale il seguente risultato:

**Proposizione 2.2.2** *Se esiste un arco che unisce  $x$  e  $y$  allora  $\pi_1(X, x)$  e  $\pi_1(X, y)$  sono gruppi isomorfi.*

**Dimostrazione:** Sia  $f : I \rightarrow X$  un arco che congiunge  $f(0) = x$  a  $f(1) = y$  e sia  $g : I \rightarrow X$  un laccio di base  $x$ . Allora  $i(f) \cdot g \cdot f$  (dove  $i(f)(t) = f(1 - t)$ ) definisce un laccio di base  $y$ .



Definiamo:

$$u_f : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y), \quad u_f([g]) = [i(f) \cdot g \cdot f] \quad (2.8)$$

e osserviamo che  $u_f$  è ben definita: infatti segue dal Lemma 2.1.2 che se  $g \sim_{\{0,1\}} g'$  allora  $(i(f) \cdot g \cdot f) \sim_{\{0,1\}} (i(f) \cdot g' \cdot f)$ . Si verifica facilmente che  $u_f$  è un omomorfismo di gruppi. Infatti se  $[g], [h] \in \pi_1(X, x)$  allora, ancora per il Lemma 2.1.2, si ottiene

$$\begin{aligned} u_f([g] \cdot [h]) &= u_f([g \cdot h]) = [i(f) \cdot g \cdot h \cdot f] = [i(f) \cdot g \cdot f \cdot i(f) \cdot h \cdot f] \\ &= [i(f) \cdot g \cdot f] \cdot [i(f) \cdot h \cdot f] = u_f([g]) \cdot u_f([h]). \end{aligned}$$

Inoltre  $u_f$  è invertibile. La sua inversa è data da

$$u_{i(f)} : \pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(X, x), \quad u_{i(f)}([k]) = [f \cdot k \cdot i(f)], \quad \forall k \in \pi_1(X, y),$$

come si verifica facilmente. Quindi  $u_f$  definisce un isomorfismo tra  $\pi_1(X, x)$  e  $\pi_1(X, y)$ .  $\square$

**Corollario 2.2.3** *Sia  $X$  uno spazio topologico connesso per archi. Allora  $\pi_1(X, x)$  e  $\pi_1(X, y)$  sono isomorfi per ogni coppia di punti  $x, y \in X$ .*

In virtù del corollario precedente se  $X$  è connesso per archi useremo la notazione  $\pi_1(X)$  per indicare il gruppo fondamentale di  $X$ .

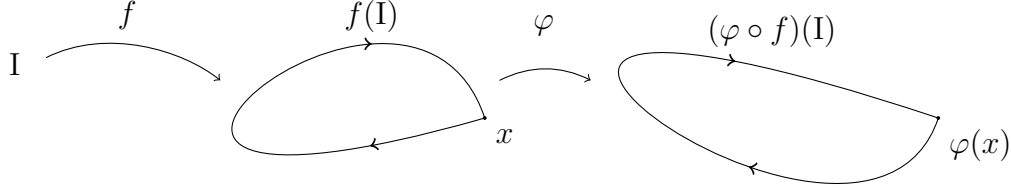
**Osservazione 2.2.4** Se non esiste un arco che unisce  $x$  e  $y$  i gruppi fondamentali  $\pi_1(X, x)$  e  $\pi_1(X, y)$  potrebbero non essere isomorfi. Per esempio sia  $X = S^1 \cup \{(-2, 0)\}$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^2$  dato da l'unione del cerchio unitario e del punto  $(-2, 0)$ . Allora  $\pi_1(X, (-2, 0))$  è il gruppo banale mentre (dimostriamo nel prossimo capitolo che)  $\pi_1(X, (1, 0)) = \mathbb{Z}$ . Anche se lo spazio  $X$  è connesso (ma non connesso per archi) il gruppo fondamentale può dipendere dal punto scelto (vedi Esercizio 2.4). Osserviamo inoltre che se lo spazio  $X$  è connesso per archi l'isomorfismo  $u_f$  (2.8) della Proposizione 2.2.2 non è canonico. In effetti si riesce a dimostrare che l'isomorfismo  $u_f$  non dipende dall'arco  $f$  se e solo se  $\pi_1(X, x)$  è abeliano (cfr. l'Esercizio 2.6).

## 2.3 Omomorfismo indotto da un'applicazione continua

Sia  $\varphi : X \rightarrow Y$  un'applicazione continua tra due spazi topologici  $X$  e  $Y$  e sia  $x \in X$ . Se  $f$  è un laccio di base  $x$  in  $X$  allora  $\varphi \circ f$  è un laccio di base  $\varphi(x)$  in  $Y$ . Inoltre segue dalla (2.5) che se  $f_0$  e  $f_1$  sono due lacci di base  $x$  tali che  $f_0 \sim_{\{0,1\}} f_1$  allora  $(\varphi \circ f_0) \sim_{\{0,1\}} (\varphi \circ f_1)$ . Quindi l'applicazione

$$\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x)), \quad \varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$$

è ben definita.



Si verifica facilmente che  $\varphi_*$  è un omomorfismo di gruppi. Infatti, per ogni  $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$  si ha:

$$\varphi_*([f] \cdot [g]) = \varphi_*([f \cdot g]) = [\varphi \circ (f \cdot g)] = [(\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ g)] = [\varphi \circ f] \cdot [\varphi \circ g] = \varphi_*([f]) \cdot \varphi_*([g]).$$

Dato  $x \in X$ , l'omomorfismo  $\varphi_*$  si chiama l'**omomorfismo indotto** da  $\varphi$  sui gruppi fondamentali  $\pi_1(X, x)$  e  $\pi_1(Y, \varphi(x))$ . Le principali proprietà di quest'omomorfismo sono riassunte nel seguente:

**Teorema 2.3.1** *Siano  $X, Y$  e  $Z$  spazi topologici,  $\varphi \in C(X, Y)$  e  $\psi \in C(Y, Z)$ . Valgono i seguenti fatti:*

1.  $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ ;
2.  $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x)}$ , per ogni  $x \in X$ ;
3. se  $\varphi$  è un omeomorfismo con inversa  $\psi : Y \rightarrow X$  allora, per ogni  $x \in X$ ,  $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$  è un isomorfismo con inversa  $\psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(X, x)$ .

**Dimostrazione:** Sia  $[f] \in \pi_1(X, x)$ . Allora

$$(\psi \circ \varphi)_*([f]) = [(\psi \circ \varphi) \circ f] = [\psi \circ (\varphi \circ f)] = \psi_*([\varphi \circ f]) = \psi_*(\varphi_*([f])) = (\psi_* \circ \varphi_*)([f])$$

e

$$(id_X)_*([f]) = [id_X \circ f] = [f].$$

le quali mostrano la 1. e la 2. Per dimostrare la 3: applichiamo la 1. e la 2. alle uguaglianze  $\psi \circ \varphi = id_X$  e  $\varphi \circ \psi = id_Y$  e otteniamo che, per ogni  $x \in X$ ,

$$\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = (id_X)_* = id_{\pi_1(X, x)}$$

e

$$\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = (id_Y)_* = id_{\pi_1(Y, \varphi(x))}.$$

Quindi  $\psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(X, x)$  è l'inversa di  $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$  e questo conclude la dimostrazione del punto 3. e del teorema.  $\square$

## 2.4 Invarianza omotopica del gruppo fondamentale

In questo paragrafo studieremo gli omomorfismi indotti da applicazioni continue che sono omotope. Cominciamo con il legame tra gli omomorfismi indotti da due applicazioni omotope.

**Lemma 2.4.1** *Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici e siano  $\varphi, \psi \in C(X, Y)$ . Se  $\varphi \sim_F \psi$  allora, per ogni  $x \in X$ , il seguente diagramma è commutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(Y, \varphi(x)) \\ & \searrow \psi_* & \downarrow u_f \\ & & \pi_1(Y, \psi(x)) \end{array}$$

dove  $u_f : \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(Y, \psi(x))$  è l'isomorfismo (cfr. (2.8)) associato all'arco  $f : I \rightarrow Y$  di estremi  $\varphi(x)$  e  $\psi(x)$  definito da  $f(t) := F(x, t)$ .

**Dimostrazione:** Vogliamo mostrare che per ogni laccio  $g$  in  $X$  di base  $x$

$$[\psi \circ g] = \psi_*([g]) = u_f(\varphi_*([g])) = [i(f) \cdot (\varphi \circ g) \cdot f]$$

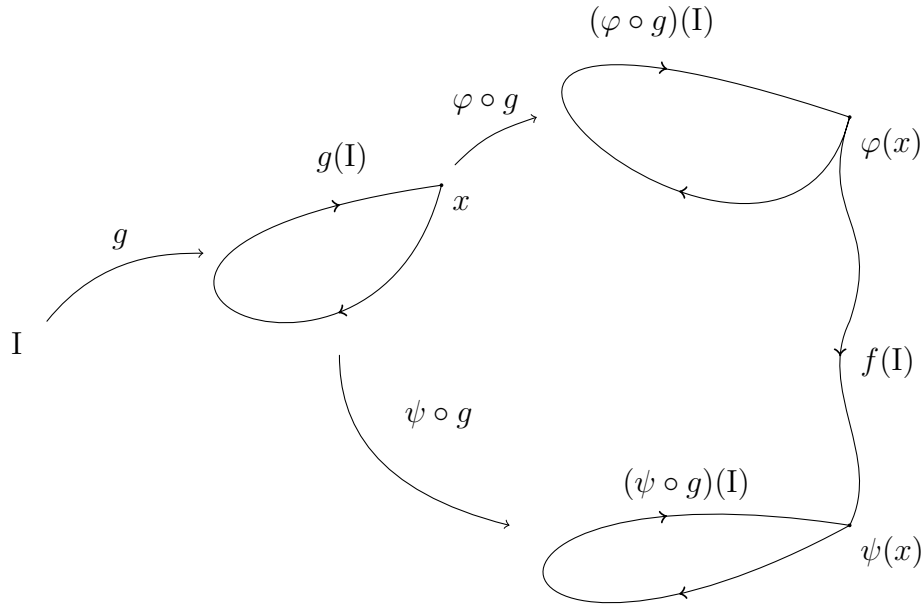
o, equivalentemente,

$$(i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f \sim_{\{0,1\}} (\psi \circ g).$$

Osserviamo che  $\psi \circ g : I \rightarrow Y$  è un arco chiuso di base  $\psi(x)$ . Sarà quindi sufficiente mostrare (per il Teorema 2.1.3) che

$$(i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f \sim_{\{0,1\}} (\epsilon_{\psi(x)} \cdot (\psi \circ g)) \cdot \epsilon_{\psi(x)}$$





Osserviamo che

$$((i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f)(t) = \begin{cases} f(1-4t) = F(x, 1-4t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (\varphi \circ g)(4t-1) = F(g(4t-1), 0) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t-1) = F(x, 2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e

$$((\epsilon_{\psi(x)} \cdot (\psi \circ g)) \cdot \epsilon_{\psi(x)})(t) = \begin{cases} \psi(x) = F(x, 1) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (\psi \circ g)(4t-1) = F(g(4t-1), 1) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \psi(x) = F(x, 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Si verifica allora facilmente che l'applicazione

$$H(t, s) = \begin{cases} F(x, (1-4t)(1-s) + s) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(g(4t-1), s) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x, (2t-1)(1-s) + s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

definisce un'omotopia relativa a  $\{0, 1\}$  tra  $(i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f$  e  $(\epsilon_{\psi(x)} \cdot (\psi \circ g)) \cdot \epsilon_{\psi(x)}$ .

□

Una conseguenza notevole della proposizione precedente è il seguente:

**Teorema 2.4.2** (*invarianza omotopica del gruppo fondamentale*) Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici e  $\varphi : X \rightarrow Y$  un'equivalenza omotopica. Allora  $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$  è un isomorfismo, per ogni  $x \in X$ .

**Dimostrazione:** Sia  $\psi : Y \rightarrow X$  tale che  $\varphi \circ \psi \sim \text{id}_Y$  e  $\psi \circ \varphi \sim \text{id}_X$ . Sia  $y \in Y$ , allora per il Lemma 2.4.1 esiste un arco  $f : I \rightarrow Y$  di estremi  $\varphi(\psi(y))$  e  $y$  tale che

$$u_f(\varphi \circ \psi)_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y)}.$$

Siccome  $u_f$  è un isomorfismo segue che  $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$  è un isomorfismo e che quindi  $\psi_*$  è iniettiva e  $\varphi_*$  è suriettiva. In modo analogo si dimostra che  $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$  è un isomorfismo e che quindi  $\psi_*$  è suriettiva e  $\varphi_*$  è iniettiva.  $\square$

Combinando il Teorema 2.4.2 con il Corollario 2.2.3 e l'Esercizio 1.5 del Capitolo 1 si ottengono i due corollari seguenti.

**Corollario 2.4.3** *Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici con  $X$  connesso per archi. Supponiamo che  $X$  e  $Y$  siano omotopicamente equivalenti. Allora  $Y$  è connesso per archi e  $\pi_1(X)$  è isomorfo a  $\pi_1(Y)$ .*

**Corollario 2.4.4** *Sia  $X$  uno spazio topologico contraibile allora  $\pi_1(X)$  è il gruppo banale.*

Uno spazio topologico  $X$  si dice **semplicemente connesso** se  $X$  è connesso per archi e se  $\pi_1(X)$  è il gruppo banale. Quindi uno spazio contraibile è semplicemente connesso. Possiamo esprimere la semplice connessione di uno spazio  $X$  in altri tre modi equivalenti. Questo è espresso nel lemma seguente la cui dimostrazione è lasciata come allo studente (cfr. Esercizio 2.3).

**Lemma 2.4.5** *Sia  $X$  uno spazio topologico. Allora valgono i seguenti fatti.*

- (a)  $X$  è semplicemente connesso;
- (b)  $X$  è connesso per archi e per ogni coppia di archi  $f, g : I \rightarrow X$  tali che  $f(0) = g(0)$  e  $f(1) = g(1)$  si ha che  $f \sim_{\{0,1\}} g$ ;
- (c)  $X$  è connesso per archi e ogni applicazione continua  $f : S^1 \rightarrow X$  è omotopa ad un'applicazione costante<sup>3</sup>;
- (d)  $X$  è connesso per archi e ogni applicazione continua  $f : S^1 \rightarrow X$  ammette un'estensione continua  $g : D^2 \rightarrow X$ .

---

<sup>3</sup>Intuitivamente quest'affermazione può esprimersi dicendo che ogni laccio in  $X$  può essere deformato con continuità al suo punto base.

## 2.5 Il gruppo fondamentale della sfera

In questo paragrafo mostreremo il seguente:

**Teorema 2.5.1** *La sfera  $n$ -dimensionale  $S^n$  è semplicemente connessa per ogni  $n \geq 2$ .*

**Dimostrazione:** Dal corso di topologia generale sappiamo che  $S^n$  è connessa per archi quindi ci rimane da dimostrare che il suo gruppo fondamentale  $\pi_1(S^n, x)$  è il gruppo banale per  $x \in S^n$ . Per il Corollario 2.2.3 possiamo assumere che  $x$  sia diverso dal polo nord  $N = (0, 0, \dots, 1)$  e dal polo sud  $S = (0, 0, \dots, -1)$ . Sia  $f : I \rightarrow S^n$ ,  $f(0) = f(1) = x$ , un laccio di base  $x$ . Mostreremo che esiste un laccio  $g : I \rightarrow S^n$  di base  $x$  tale che  $N \notin g(I)$  e  $g \sim_{\{0,1\}} f$ . L'esistenza di un tale laccio e il fatto che  $S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$  è semplicemente connesso implicherà allora che  $f \sim_{\{0,1\}} g \sim_{\{0,1\}} \epsilon_x$  e quindi  $\pi_1(S^n, x)$  è banale. L'arco  $g$  si ottiene a partire da  $f$  come segue. Sia  $\{U, V\}$  il ricoprimento aperto di  $S^n$  dato da  $U = S^n \setminus \{N\}$  e  $V = S^n \setminus \{S\}$ . Esiste una suddivisione di  $I$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_q$ ,  $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_q = 1$  con la seguente proprietà: **dato**  $\alpha = 1, 2, \dots, q$ ,  $f([a_{\alpha-1}, a_\alpha])$  **è contenuto in  $U$  oppure in  $V$** . Infatti, se  $\delta > 0$  è il numero di Lebesgue (vedi Appendice C) associato al ricoprimento aperto di  $I$  dato da  $f^{-1}(U)$  e  $f^{-1}(V)$ , è sufficiente prendere gli  $a_\alpha$  tali che  $a_\alpha - a_{\alpha-1} < \delta$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, q$ .

Possiamo anche assumere, eliminando eventualmente qualche  $a_\alpha$  dalla suddivisione di  $I$ , che  $f(a_\alpha) \in U \cap V = S^n \setminus \{N, S\}$ , per ogni  $\alpha = 1, \dots, q-1$  (per  $a_q$  questo è automatico in quanto  $f(a_q) = x \in U \cap V$ ). Sia infatti  $\alpha = 1, \dots, q-1$  tale che  $f(a_\alpha)$  appartiene a  $U$  ma non a  $V$  (lo stesso ragionamento si applica se  $f(a_\alpha) \in V$  e  $f(a_\alpha) \notin U$ ) allora  $f([a_{\alpha-1}, a_\alpha]) \subseteq U$  e  $f([a_\alpha, a_{\alpha+1}]) \subseteq U$ . Quindi  $f([a_{\alpha-1}, a_{\alpha+1}]) \subseteq U$  e possiamo quindi eliminare il punto  $a_\alpha$  dalla suddivisione di  $I$ . Sia ora  $f_\alpha : I \rightarrow S^n$  l'arco definito da:

$$f_\alpha(t) = f((1-t)a_{\alpha-1} + ta_\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, q.$$

Se per ogni  $\alpha$ ,  $f_\alpha(I) = f([a_{\alpha-1}, a_\alpha]) \subseteq U$  allora  $f(I) \subseteq U$  e quindi è sufficiente definire  $g = f$ . Supponiamo invece che esista  $\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, q$ , tale che  $N \in f_\alpha(I)$ . Segue che  $f_\alpha(I) \subseteq V$ . Sia  $g_\alpha : I \rightarrow V$  un arco tale che  $g_\alpha(0) = f_\alpha(0)$ ,  $g_\alpha(1) = f_\alpha(1)$  e  $N \notin g_\alpha(I)$ . Un tale arco esiste in quanto  $f_\alpha(0) = f(a_{\alpha-1})$  e  $f_\alpha(1) = f(a_\alpha)$  appartengono a  $U \cap V = V \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  che è connesso per archi per  $n \geq 2$ . Allora  $g_\alpha \sim_{\{0,1\}} f_\alpha$  in quanto  $V \cong \mathbb{R}^n$  è semplicemente connesso (per (a) del Lemma 2.4.5). Segue allora dal Lemma 2.1.2 e dal Teorema 2.1.6 che

$$f \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdots f_\alpha \cdots f_q \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdots g_\alpha \cdots f_q.$$

Applicando lo stesso ragionamento a tutti gli  $f_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, q$ , tali che  $N \in f_\alpha(I)$  si ottiene il laccio  $g$  desiderato.  $\square$

**Osservazione 2.5.2** La costruzione del laccio  $g$  (tale che  $N \notin g(I)$ ) nella dimostrazione del teorema è inevitabile. Infatti esistono lacci  $f : I \rightarrow S^n$  tali che  $f(0) = f(1) = x$  e  $f(I) = S^n$ . Un tale laccio può essere costruito come segue. Sia  $p : I \rightarrow I^2$  la curva di Peano descritta in Appendice D, cioè  $p : I \rightarrow I^2$  è un arco in  $I^2$  tale che  $p(I) = I^2$ . Consideriamo l'applicazione

$$p \times p : I^2 \rightarrow I^4 : (t, s) \mapsto (p(t), p(s)).$$

Segue che

$$p_2 = (p \times p) \circ p : I \rightarrow I^2 \times I^2 = I^4,$$

soddisfa  $p_2(I) = I^4$ . Iterando questo procedimento possiamo trovare  $s$  naturale tale che  $2s \geq n$  e un arco suriettivo  $p_s : I \rightarrow I^{2s}$ . Sia  $q : I^{2s} \rightarrow I^n$  la proiezione naturale e  $\pi : I^n \cong D^n \rightarrow S^n = D^n/S^{n-1}$  l'identificazione (suriettiva) data dal Corollario B.3.3 della Appendice B.3. Allora  $k := \pi \circ q \circ p_s : I \rightarrow S^n$  è un'applicazione continua e suriettiva. Se  $k(0) = k(1)$  abbiamo finito ponendo  $f = k$ . Altrimenti consideriamo  $h : I \rightarrow S^n$  un arco tale che  $h(0) = k(1)$  e  $h(1) = k(0)$  ( $h$  esiste perché  $S^n$  è connessa per archi) e la concatenazione  $f = h \cdot k : I \rightarrow S^n$  è un arco chiuso di base  $x = h(0)$  tale che  $f(I) = S^n$ .

**Corollario 2.5.3** *Sia  $n \geq 3$  allora  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  è semplicemente connesso.*

**Dimostrazione:** La sfera  $S^{n-1}$  è omotopicamente equivalente a  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  per ogni  $n \geq 1$  (cfr. Esempio 1.4.8). Il risultato segue allora dal Teorema 2.5.1 e dal Corollario 2.4.3.  $\square$

## 2.6 Il gruppo fondamentale del prodotto di due spazi

**Teorema 2.6.1** *(gruppo fondamentale del prodotto) Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici connessi per archi. Allora il gruppo fondamentale del prodotto  $X \times Y$  è isomorfo al prodotto diretto dei gruppi fondamentali di  $X$  e  $Y$ .*

Nell'enunciato del teorema non stiamo specificando nessun punto base in quanto gli spazi  $X$  e  $Y$  (e quindi  $X \times Y$ ) sono connessi per archi.

**Dimostrazione:** Siano  $p : X \times Y \rightarrow X$  e  $q : X \times Y \rightarrow Y$  le proiezioni canoniche,  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Definiamo

$$\Phi : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y), \quad \Phi([f]) := (p_*([f]), q_*([f])).$$

Mostriamo che  $\Phi$  è suriettiva. Sia  $([f_1], [f_2]) \in \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$  e sia  $f : I \rightarrow X \times Y$ ,  $f(t) := (f_1(t), f_2(t))$ , dove  $f_1$  e  $f_2$  sono due rappresentanti delle classi  $[f_1]$  e  $[f_2]$  rispettivamente. Segue che:

$$\Phi([f]) = (p_*([f]), q_*([f])) = ([p \circ f], [q \circ f]) = ([f_1], [f_2]).$$

Per dimostrare che  $\Phi$  è iniettiva supponiamo che  $\Phi([f]) = \Phi([g])$ . Allora  $[p \circ f] = [p \circ g]$  e  $[q \circ f] = [q \circ g]$ . Equivalentemente  $(p \circ f) \sim_{\{0,1\}, F_1} (p \circ g)$  e  $(q \circ f) \sim_{\{0,1\}, F_2} (q \circ g)$ , dove  $F_1 : I \times I \rightarrow X$  (risp.  $F_2 : I \times I \rightarrow Y$ ) è un'omotopia relativa a  $\{0, 1\}$  tra  $p \circ f$  e  $p \circ g$  (risp.  $q \circ f$  e  $q \circ g$ ). Segue allora che  $f \sim_{\{0,1\}, F} g$  dove  $F : I \times I \rightarrow X \times Y$  è definita da  $F(t, s) = (F_1(t, s), F_2(t, s))$ .

Infine dimostriamo che  $\Phi$  è un omomorfismo di gruppi. Infatti, per  $[f], [g] \in \pi_1(X \times Y, x \times y)$  si ha:

$$\begin{aligned} \Phi([f] \cdot [g]) &= \Phi([f \cdot g]) = (p_*([f \cdot g]), q_*([f \cdot g])) = (p_*([f]) \cdot p_*([g]), q_*([f]) \cdot q_*([g])) \\ &= (p_*([f]), q_*([f])) \cdot (p_*([g]), q_*([g])) \end{aligned}$$

dove l'ultimo “ $\cdot$ ” rappresenta il prodotto diretto in  $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$ .  $\square$

## 2.7 Un cenno sui gruppi di omotopia

Sia  $X$  uno spazio topologico e  $x \in X$ . Come suggerito dalla notazione  $\pi_1(X, x)$ , il gruppo fondamentale appartiene ad una successione di gruppi  $\pi_n(X, x)$  associati ad uno spazio topologico  $X$ , che misurano in un certo senso i “buchi  $n$ -dimensionali” dello spazio  $X$ .

Dato  $n$  numero intero positivo (eventualmente nullo) sia  $I^n = I \times \cdots I$  e  $\partial I^n$  la sua frontiera, cioè:

$$\partial I^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n \mid t_j \in \{0, 1\}, \text{ per qualche } j\}.$$

Per  $x \in X$ , denotiamo con  $\pi_n(X, x)$  l'insieme delle classi di omotopia relativa a  $\partial I^n$  delle funzioni continue  $f : I^n \rightarrow X$  tali che  $f(\partial I^n) = x$ .

Siccome  $I^n$  è omeomorfo a  $D^n$ , il quale quozientato la sua frontiera è omeomorfo alla sfera  $S^n$  (si veda Corollario B.3.3 nell'Appendice B), possiamo equivalentemente pensare a  $\pi_n(X, x)$  come l'insieme delle classi di equivalenza delle

applicazioni da  $S^n$  in  $X$  che portano  $(1, 0, \dots, 0)$  in  $x$ , modulo l'omotopia relativa al punto  $(1, 0, \dots, 0)$  (cfr. Osservazione 2.2.1).

Il caso più semplice si ha quando  $n = 0$ . Dal momento che  $S^0 = \{\pm 1\}$ , un'applicazione da  $S^0$  a  $X$  che manda il punto 1 nel punto base  $x$  è univocamente determinata da dove invia il punto  $-1$ . Due applicazioni  $f, g : S^0 \rightarrow X$ , tali che  $f(1) = g(1) = x$ , sono omotope relativamente a 1 se e solo se esiste un arco in  $X$  che congiunge  $f(-1)$  con  $g(-1)$  cioè se e solo se  $f(-1)$  e  $g(-1)$  appartengono alla stessa componente connessa per archi di  $X$ . Non esiste una struttura di gruppo su  $\pi_0(X, x)$ : è solo un insieme con un elemento ben distinto e cioè la componente connessa che contiene  $x$ . Di solito il punto  $x$  viene omissso dalla notazione e si scrive  $\pi_0(X)$  per denotare l'insieme delle componenti connesse per archi di  $X$  (cfr. Appendice A per maggiori dettagli sulle componenti connesse per archi). Per  $n \geq 1$  possiamo definire un prodotto su  $\pi_n(X, x)$  come segue (per  $n = 1$  è esattamente il prodotto definito su  $\pi_1(X, x)$ ). Se  $f, g : I^n \rightarrow X$ ,  $f(\partial I^n) = g(\partial I^n) = x$  possiamo definire la loro **concatenazione** come quell'applicazione continua  $f \cdot_1 g : I^n \rightarrow X$  definita da:

$$(f \cdot_1 g)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

All'applicazione  $f : I^n \rightarrow X$  possiamo associare  $i(f) : I^n \rightarrow X$  data da

$$i(f)(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Si dimostra (analogamente a quanto fatto nel Lemma 2.1.2 e nell'Osservazione 2.1.4) che se  $f_0$  è omotopa a  $f_1$  relativamente a  $\partial I^n$  e  $g_0$  è omotopa a  $g_1$  relativamente a  $\partial I^n$  allora  $f_0 \cdot_1 f_1$  è omotopa a  $g_0 \cdot_1 g_1$  relativamente a  $\partial I^n$  e  $i(f_0)$  è omotopa a  $i(f_1)$  relativamente a  $\partial I^n$ . Resta così definito un prodotto  $\cdot_1$  sulle classi  $[f]$  e  $[g]$  in  $\pi_n(X, x)$  come:

$$[f] \cdot_1 [g] = [f \cdot_1 g] \quad (2.9)$$

Il seguente teorema mostra che  $\pi_n(X, x)$  è un gruppo che viene chiamato  **$n$ -esimo gruppo di omotopia** dello spazio topologico  $X$  basato nel punto  $x \in X$ .

**Teorema 2.7.1** *Supponiamo  $n \geq 1$ . Valgono i seguenti fatti:*

1.  $\pi_n(X, x)$  è un gruppo rispetto al prodotto (2.9) con elemento neutro  $[\epsilon_x]$ ;
2.  $\pi_n(X, x)$  è un gruppo abeliano per  $n > 1$ <sup>4</sup>;

---

<sup>4</sup>Vedremo esempi di spazi  $X$  con gruppo fondamentale non abeliano nei capitoli successivi.

3. se  $f$  è un arco in  $X$  che unisce  $x$  a  $y$  allora  $\pi_n(X, x)$  è isomorfo a  $\pi_n(X, y)$  tramite l'isomorfismo

$$u_f : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(X, y)$$

definito da:

$$u_f([g]) = [i(f_1) \cdot_1 g \cdot_1 f_1],$$

dove

$$f_1 : I^n \rightarrow X, f_1(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(t_1);$$

4. per ogni  $\varphi \in C(X, Y)$  resta definito un omomorfismo di gruppi (chiamato **omomorfismo indotto sull'  $n$ -esimo gruppo di omotopia**)

$$\varphi_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, \varphi(x)), [g] \mapsto [\varphi \circ g];$$

5.  $\pi_n(X, x)$  è un invariante omotopico (e quindi topologico).

**Dimostrazione:** Le dimostrazioni di 1., 3., 4., e 5. sono analoghe a quella per il gruppo fondamentale e sono lasciata per esercizio (cfr. Esercizio 2.9). La 2., ossia l'abelianità di  $\pi_n(X, x)$  per  $n > 1$ , si dimostra come segue. Siano  $f, g : I^n \rightarrow X$ ,  $f(\partial I^n) = g(\partial I^n) = x$ , possiamo definire un prodotto  $f \cdot_2 g : I^n \rightarrow X$  analogo a  $\cdot_1$  che, come suggerito dalla notazione, agisce sulla seconda coordinata:

$$(f \cdot_2 g)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(t_1, 2t_2, t_3, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \\ g(t_1, 2t_2 - 1, t_3, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \end{cases}$$

Questo prodotto (esattamente come  $\cdot_1$ ) rende  $\pi_n(X, x)$  un gruppo definendo il prodotto

$$[f] \cdot_2 [g] = [f \cdot_2 g], \quad (2.10)$$

Osserviamo che  $[\epsilon_x]$  è l'elemento neutro per entrambe le operazioni binarie  $\cdot_1$  e  $\cdot_2$  su  $\pi_n(X, x)$  e, non è difficile vedere, che (Esercizio 2.10) che:

$$([f] \cdot_1 [g]) \cdot_2 ([h] \cdot_1 [k]) = ([f] \cdot_2 [h]) \cdot_1 ([g] \cdot_2 [k]), \quad \forall [f], [g], [h], [k] \in \pi_n(X, x) \quad (2.11)$$

la quale implica (Esercizio 2.11)  $[f] \cdot_1 [g] = [g] \cdot_1 [f]$  per ogni  $[f]$  e  $[g]$ .  $\square$

**Osservazione 2.7.2** Si può dimostrare che  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ , per ogni  $n \geq 1$ , e quindi  $S^n$  non è contraibile (il caso  $n = 1$  verrà trattato nel Capitolo 4). Calcolare  $\pi_n(S^k)$  è molto complicato e esistono valori di  $k$  e  $n$  per i quali non si è ancora riusciti a farlo. Stranamente, esistono  $n > k$  tali che il gruppo di omotopia  $\pi_n(S^k)$  è diverso da zero. Per esempio si può dimostrare che  $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$  e quindi esistono in  $S^2$  dei “buchi” 3-dimensionali.

## 2.8 Esercizi

**Esercizio 2.1** Dimostrare le (2.3), (2.4) e (2.5).

**Esercizio 2.2** Giustificare in dettaglio le affermazioni fatte nell'Osservazione 2.2.1.

**Esercizio 2.3** Dimostrare il Lemma 2.4.5.

**Esercizio 2.4** Dare un esempio di uno spazio topologico connesso  $X$  dove  $\pi_1(X, x)$  dipende dal punto base  $x \in X$ . (Suggerimento: usare lo spazio descritto nell'Appendice A con l'aggiunta di un cerchio che passa per il punto  $(0, 1)$ ).

**Esercizio 2.5** Dimostrare che se uno spazio ha la topologia discreta allora  $\pi_1(X, x) = \{1\}$  per ogni  $x \in X$ .

**Esercizio 2.6** Dimostrare che due archi  $f, g : I \rightarrow X$  da  $x$  a  $y$  danno luogo allo stesso isomorfismo da  $\pi_1(X, x)$  a  $\pi_1(X, y)$  (cioè  $u_f = u_g$ ) se e solo se  $[g \cdot i(f)]$  appartiene al centro di  $\pi_1(X, x)$ . Dedurre che l'isomorfismo  $u_f : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$  (associato ad un arco  $f$  da  $x$  a  $y$ ) è indipendente da  $f$  se e solo se  $\pi_1(X, x)$  è un gruppo abeliano.

**Esercizio 2.7** Dimostrare che se  $A$  è un retratto forte di deformazione di uno spazio  $X$ , allora l'inclusione  $i : A \hookrightarrow X$  induce un isomorfismo  $i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ , per ogni  $a \in A$ .

**Esercizio 2.8** Si dimostri che un retratto di uno spazio semplicemente connesso è semplicemente connesso.

**Esercizio 2.9** Dimostrare il Teorema 2.7.1.

**Esercizio 2.10** Dimostrare la formula (2.11).

**Esercizio 2.11** Sia  $G$  un insieme dotato di due operazioni binarie  $\cdot_1$  e  $\cdot_2$  con lo stesso elemento unità  $\epsilon$  (cioè  $a \cdot_1 \epsilon = \epsilon \cdot_1 a = a \cdot_2 \epsilon = \epsilon \cdot_2 a = a$ , per ogni  $a \in G$ ). Supponiamo che:

$$(a \cdot_1 b) \cdot_2 (c \cdot_1 d) = (a \cdot_2 c) \cdot_1 (b \cdot_2 d), \quad \forall a, b, c, d \in G.$$

Allora le due operazioni coincidono e sono commutative, cioè  $a \cdot_1 b = a \cdot_2 b$  e  $a \cdot_1 b = b \cdot_1 a$ , per ogni  $a, b \in G$ .



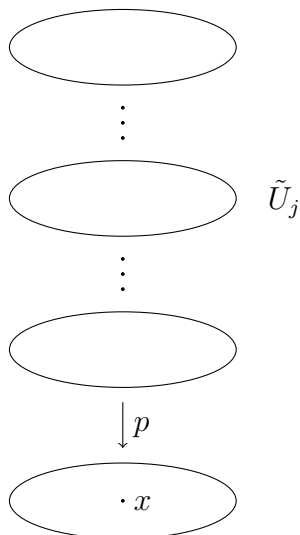
# Capitolo 3

## Rivestimenti

### 3.1 Rivestimenti

Siano  $\tilde{X}$  e  $X$  due spazi topologici. Diremo che un'applicazione continua  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  è un **rivestimento** se valgono i seguenti fatti:

1.  $p$  è suriettiva;
2. per ogni  $x \in X$  esiste un aperto  $U$  di  $X$  contenente  $x$  e una famiglia  $\{\tilde{U}_j\}_{j \in J}$  di aperti di  $\tilde{X}$  tali che:
  - (a)  $p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} \tilde{U}_j$ ;
  - (b)  $\tilde{U}_j \cap \tilde{U}_k = \emptyset$  per ogni  $j, k \in J$  con  $j \neq k$ .
  - (c)  $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \rightarrow U$  è un omeomorfismo per ogni  $j \in J$ .



L'applicazione  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  si chiama **proiezione**,  $X$  **spazio base** e  $\tilde{X}$  **spazio totale** del rivestimento. Dato  $x \in X$  la sua controimmagine  $p^{-1}(x)$  tramite  $p$  si chiama la **fibra** del punto  $x$ . Se le fibre  $p^{-1}(x)$  hanno tutte la stessa cardinalità al variare di  $x \in X$  la cardinalità della fibra viene detta **grado** del rivestimento  $p$ .

Data un'applicazione continua  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  diremo che un aperto  $U \subseteq X$  è **ben ricoperto** da  $p$  ovvero che  $U$  è un **aperto banalizzante** per  $p$  se la controimmagine  $p^{-1}(U)$  è unione disgiunta di sottoinsiemi aperti di  $\tilde{X}$ , ognuno dei quali è omeomorfo a  $U$  tramite  $p$ . Quindi  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  è un rivestimento se per ogni punto  $x \in X$  esiste un intorno aperto  $U \subseteq X$  di  $x$  che sia ben ricoperto da  $p$ .

La definizione di rivestimento ha svariate applicazioni. In queste note ne vedremo alcune legate alla topologia ma il concetto di rivestimento e le sue generalizzazioni di **rivestimento ramificato** e di **fibrato**, giocano un ruolo importante sia in geometria che in topologia.

**Osservazione 3.1.1** Se un aperto  $U$  è ben ricoperto da un rivestimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  allora anche un aperto  $V$  contenuto in  $U$  è ben ricoperto da  $p$ .

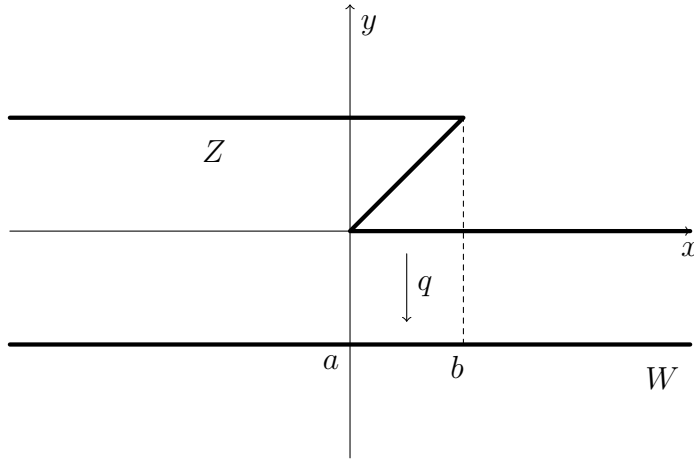
**Esempio 3.1.2** Ogni omeomorfismo tra due spazi topologici è un rivestimento di grado 1.

**Esempio 3.1.3** Sia  $Y$  uno spazio topologico discreto, ossia la topologia in  $X$  è quella discreta. Allora per ogni spazio topologico  $X$  la proiezione sul primo fattore  $p : X \times Y \rightarrow X, (x, y) \mapsto x$  è un rivestimento. In questo caso il grado di  $p$  è uguale alla cardinalità di  $Y$ .

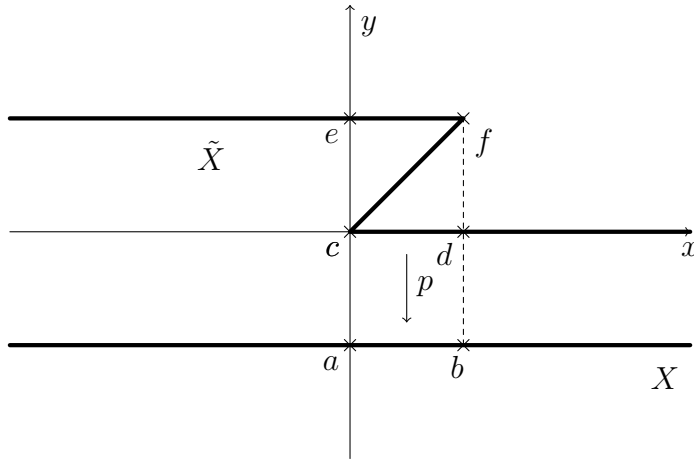
**Esempio 3.1.4** Siano  $Z$  e  $W$  i sottoinsiemi dei punti  $(x, y)$  di  $\mathbb{R}^2$  definiti da:

$$Z = \{(x, 1), x \leq 1\} \cup \{x = y, 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 0), x \geq 0\}, \quad W = \{(x, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

e sia  $q : Z \rightarrow W$  definita  $q(x, y) \mapsto (x, -1)$ .



Allora  $q$  **non** è un rivestimento. Infatti si verifica facilmente che non esiste un intorno aperto ben ricoperto dei punti  $a = (0, -1)$  e  $b = (1, -1)$ . Consideriamo la restrizione  $p : \tilde{X} = Z \setminus \{c, d, e, f\} \rightarrow X = W \setminus \{a, b\}$  di  $q$  a  $Z \setminus \{c, d, e, f\}$ , dove  $c = (0, 0)$ ,  $d = (1, 0)$ ,  $e = (1, 1)$ ,  $f = (0, 1)$ .



Allora, si verifica facilmente che  $p$  è un rivestimento con spazio totale  $\tilde{X}$  e base  $X$  non connessi ( $\tilde{X}$  è costituito da 5 componenti connesse mentre  $X$  da 3). Osserviamo che in questo caso non si può parlare di grado del rivestimento  $p$  infatti la cardinalità della fibra di un punto  $x$  dipende dalla componente connessa alla quale appartiene  $x$  (è uguale a 1 per  $x < a$  e  $x > b$  ed è uguale a 3 per  $a < x < b$ ).

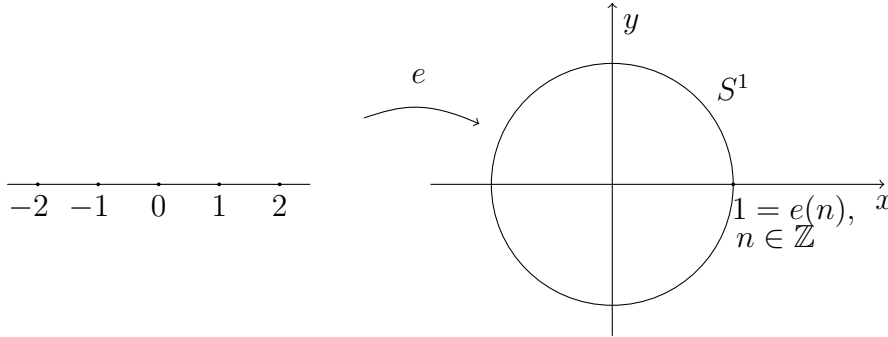
**Esempio 3.1.5** Consideriamo l'applicazione continua

$$e : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t),$$

dove  $i$  denota l'unità immaginaria e stiamo pensando al cerchio unitario come

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\}.$$

Intuitivamente, l'applicazione  $e$  “avvolge” la retta reale  $\mathbb{R}$  sul cerchio  $S^1$  e durante questo processo porta l'intervallo  $[n, n+1]$  su  $S^1$ .



Vogliamo mostrare che  $e$  è un rivestimento. Ovviamente  $e$  è suriettiva. Sia  $x \in S^1$  e supponiamo che  $x \neq 1$ . Prendiamo l'aperto  $U = S^1 \setminus \{1\}$  di  $S^1$  che contiene il punto  $x$  (nel caso  $x = 1$  si prenderà, per esempio, l'aperto  $V = S^1 \setminus \{-1\}$  e si procederà in modo analogo). Osserviamo che la fibra del punto 1 è costituita da tutti gli interi,  $e^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ , inoltre

$$e^{-1}(U) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1).$$

Quindi  $e^{-1}(U)$  è l'unione disgiunta degli aperti  $(n, n+1)$  di  $\mathbb{R}$  al variare di  $n \in \mathbb{Z}$ . Osserviamo che

$$e_n := e|_{(n, n+1)} : (n, n+1) \rightarrow S^1 \setminus \{1\}$$

è continua e bigettiva. Inoltre  $e_n$  è un'applicazione chiusa. Infatti dato  $C \subseteq (n, n+1)$  chiuso in  $(n, n+1)$  allora la sua chiusura  $\overline{C}$  è un chiuso in  $[n, n+1]$  e quindi compatto. Quindi la sua immagine  $e(\overline{C})$  è un compatto e quindi chiuso in  $S^1$ . Dal momento che  $e_n(C) = e(\overline{C}) \cap U$  segue che  $e_n(C)$  è chiuso in  $U$ . Quindi  $e_n$  è un omeomorfismo, per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ , e quindi  $e$  è un rivestimento. Il rivestimento  $e$  ha grado infinito numerabile.

## 3.2 Rivestimenti e omeomorfismi locali

Sia  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione continua tra due spazi topologici  $X$  e  $Y$ . Diremo che  $f$  è un **omeomorfismo locale** se per ogni  $x \in X$  esiste un intorno aperto  $A \subseteq X$  di  $x$  tale che  $f(A)$  è aperto in  $Y$  e  $f|_A : A \rightarrow f(A)$  è un omeomorfismo.

Le principali proprietà degli omeomorfismi locali sono riassunte nella seguente:

**Proposizione 3.2.1** *Sia  $f : X \rightarrow Y$  un omeomorfismo locale. Allora valgono i seguenti fatti:*

1. Sia  $U \subseteq X$  un aperto. Allora la restrizione  $f|_U : U \rightarrow Y$  è un omeomorfismo locale;
2.  $f$  è un'applicazione aperta;
3. sia  $y \in Y$  tale che  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$  da  $X$ , allora la topologia indotta da  $X$  su  $f^{-1}(y)$  è quella discreta.

**Dimostrazione:** Sia  $x \in U$  e  $A$  un aperto di  $X$  tale che  $x \in A$ ,  $f(A)$  sia aperto in  $Y$  e  $f|_A : A \rightarrow f(A)$  sia un omeomorfismo. Allora  $f|_{U \cap A} : U \cap A \rightarrow f(U \cap A)$  è un omeomorfismo dall'aperto  $U \cap A$  di  $U$  all'aperto  $f(U \cap A)$  di  $f(A)$  e quindi di  $Y$ . Questo mostra la 1. Per dimostrare la 2 ossia che  $f$  è aperta sia  $U$  un aperto non vuoto e  $x \in U$ . Essendo  $f$  un omeomorfismo locale esiste un intorno aperto  $A_x$  di  $x$  tale che  $f(A_x)$  è aperto in  $Y$  e  $f|_{A_x} : A_x \rightarrow f(A_x)$  è un omeomorfismo. Segue che  $f|_{A_x \cap U}$  porta l'aperto  $A \cap U_x$  di  $A$  nell'aperto  $f(A_x \cap U)$  di  $f(A_x)$ . Siccome  $f(A_x)$  è aperto in  $Y$  anche  $f(A_x \cap U)$  è aperto in  $Y$ . Quindi

$$f(U) = f(\cup_{x \in U} (A_x \cap U)) = \cup_{x \in U} f(A_x \cap U)$$

è un aperto di  $Y$  e quindi  $f$  è aperta. Infine, sia  $x \in f^{-1}(y)$ . Essendo  $f$  un omeomorfismo locale esiste  $U$  un intorno aperto di  $x$  tale che  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  sia un omeomorfismo. In particolare,  $f|_U$  è iniettiva e quindi  $U \cap f^{-1}(y) = \{x\}$ . Questo mostra che  $x$  è aperto in  $f^{-1}(y)$  (nella topologia indotta da  $X$ ) e che quindi, essendo  $y$  arbitrario, la topologia di  $f^{-1}(y)$  è quella discreta.  $\square$

Il legame tra i rivestimenti e gli omeomorfismi locali è espresso dalla seguente:

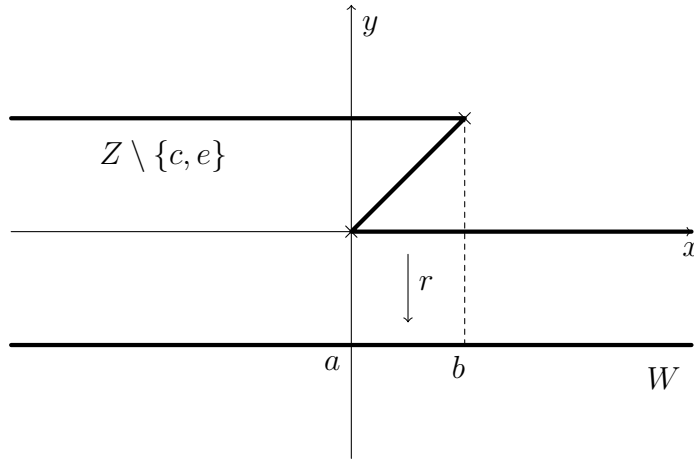
**Proposizione 3.2.2** *Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento. Allora  $p$  è un omeomorfismo locale e un'identificazione aperta. In particolare la fibra  $p^{-1}(x)$  è discreta per ogni  $x \in X$ .*

**Dimostrazione:** Sia  $\tilde{x}$  un punto di  $\tilde{X}$ . Allora esiste un intorno aperto  $U$  di  $x = p(\tilde{x})$  in  $X$  banalizzante per  $p$ . Segue dalla definizione di rivestimento che esiste un aperto  $\tilde{U}$  di  $\tilde{X}$  che contiene  $\tilde{x}$  tale che  $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$  sia un omeomorfismo. Essendo  $\tilde{x}$  arbitrario otteniamo che  $p$  è un omeomorfismo locale. D'altra parte dal per il punto 2 della Proposizione 3.2.1,  $p$  è un'applicazione aperta, e quindi, essendo continua e suriettiva, è un'identificazione. L'ultima parte segue dal punto 3 della Proposizione 3.2.1 e dalla surettività di  $p$ .  $\square$

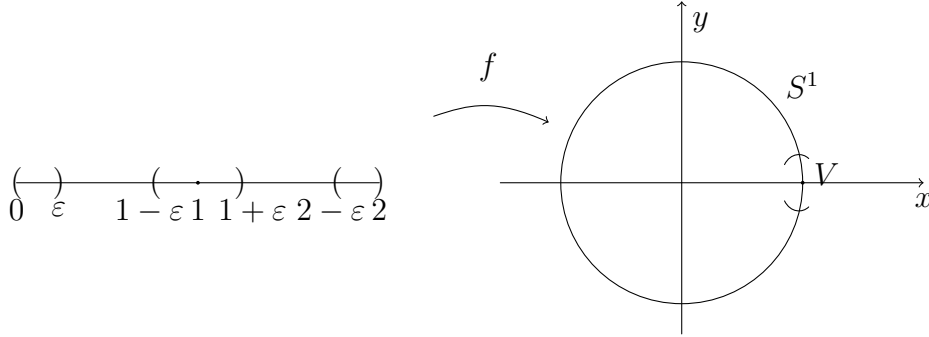
**Corollario 3.2.3** *Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento. Allora  $p$  è iniettiva se e solo se  $p$  ha grado 1 se e solo se  $p$  è un omeomorfismo.*

**Dimostrazione:** Il rivestimento  $p$  è iniettivo se e solo se la fibra di ogni suo punto ha cardinalità 1 ossia se e solo se  $p$  ha grado 1. Per la Proposizione 3.2.2 i rivestimenti sono applicazioni continue aperte e suriettive quindi sono omeomorfismi se e solo se sono applicazioni iniettive.  $\square$

Esistono omeomorfismi locali suriettivi che non sono rivestimenti. Per esempio, consideriamo la restrizione  $r = q|_{Z \setminus \{c, e\}} : Z \setminus \{c, e\} \rightarrow W$  dell'applicazione  $q$  dell'Esempio 3.1.4.



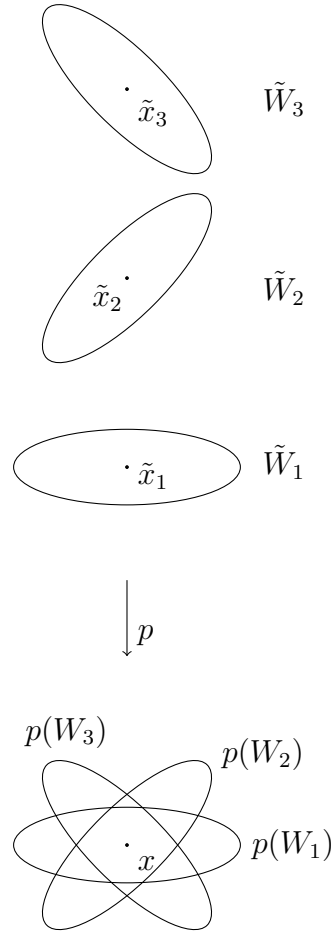
è un omeomorfismo locale suriettivo ma non è un rivestimento. In quest'esempio il dominio non è connesso (consiste di tre componenti connesse). Per ottenere un esempio con dominio connesso si consideri, l'applicazione continua e suriettiva  $f : (0, 2) \rightarrow S^1, t \rightarrow e^{2\pi it}$  (cioè la restrizione del rivestimento  $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dell'Esempio 3.1.5 all'intervallo aperto  $(0, 2) \subseteq \mathbb{R}$ ). Si noti che  $f$  è un omeomorfismo locale in quanto restrizione dell'omeomorfismo locale  $e$  (rivestimento e quindi omeomorfismo locale per la Proposizione 3.2.2) all'aperto  $(0, 1)$  (punto 1 della Proposizione 3.2.1). D'altra parte  $f$  non è un rivestimento in quanto il punto  $1 \in S^1$  non ammette un intorno aperto ben ricoperto. Infatti se  $U$  fosse un tale intorno allora per l'Osservazione 3.1.1 esisterebbero  $V \subseteq U$  aperto di  $S^1$  che contiene 1 e ben ricoperto da  $f$  e  $\epsilon > 0$  tali che  $f^{-1}(V) = (0, \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \cup (2 - \epsilon, 2)$ . Ma l'aperto  $(0, \epsilon)$  (così come  $(2 - \epsilon, 2)$ ) non può essere omeomorfo a  $V$  tramite  $f$  in quanto non contiene nessun punto la cui immagine sia 1.



Viene allora naturale chiedersi sotto quali condizioni un omeomorfismo locale sia un rivestimento. Una possibile risposta a tale domanda è contenuta nel seguente:

**Teorema 3.2.4** *Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un omeomorfismo locale tra due spazi topologici  $\tilde{X}$  e  $X$ . Se  $\tilde{X}$  è compatto e di Hausdorff e  $X$  è connesso e di Hausdorff allora  $p$  è un rivestimento di grado finito.*

**Dimostrazione:** Osserviamo che  $p(\tilde{X})$  è immagine di un compatto in uno spazio di Hausdorff e quindi chiuso. D'altra parte, per la 2. della Proposizione 3.2.1,  $p(\tilde{X})$  è anche aperto. Segue che  $p(\tilde{X})$  è sia aperto che chiuso in  $X$ . Essendo  $X$  connesso segue che  $p(\tilde{X}) = X$  e quindi  $p$  è suriettiva. Sia  $x \in X$  allora la fibra  $p^{-1}(x)$  è uno spazio topologico discreto (per il punto 3 della Proposizione 3.2.1) e compatto (sottoinsieme chiuso di un compatto). Allora la cardinalità di  $p^{-1}(x)$  è finita (un sottoinsieme discreto di un compatto è finito). Sia  $p^{-1}(x) = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$ . Dal momento che  $\tilde{X}$  è di Hausdorff e  $p$  è un omeomorfismo locale è possibile trovare  $W_1, \dots, W_k$  aperti disgiunti tali che  $\tilde{x}_j \in W_j, j = 1, \dots, k$ , e  $p|_{W_j} : W_j \rightarrow p(W_j)$  sia un omeomorfismo.



Poniamo  $V := \cap_{j=1}^k p(W_j)$ ,  $W := \cup_{j=1}^k W_j$  e  $U := V \setminus p(\tilde{X} \setminus W)$ . Allora  $U$  è un sottoinsieme aperto di  $X$  (infatti  $V$  è un aperto di  $X$  e  $p(\tilde{X} \setminus W)$  è un chiuso di  $X$  in quanto immagine tramite l'applicazione chiusa  $p$  del chiuso  $\tilde{X} \setminus W$ ). Inoltre  $x$  appartiene a  $U$ , o equivalentemente,  $x \notin p(\tilde{X} \setminus W)$  (infatti se  $x \in p(\tilde{X} \setminus W)$  allora dovrebbe esistere  $\tilde{y} \in \tilde{X} \setminus W$  tale che  $p(\tilde{y}) = x$ ; ma  $p^{-1}(x) \subseteq W$  mentre  $\tilde{y} \notin W$ ). Infine dimostriamo che  $U$  è un aperto banalizzante per  $p$ . Prendendo la controimmagine di  $U$  tramite  $p$  si ottiene:

$$p^{-1}(U) = p^{-1}(V) \setminus p^{-1}(p(\tilde{X} \setminus W)) \subseteq p^{-1}(V) \setminus (\tilde{X} \setminus W) = p^{-1}(V) \cap W$$

e quindi

$$p^{-1}(U) \subseteq W = \cup_{j=1}^k W_j. \quad (3.1)$$

Poniamo allora

$$\tilde{U}_j := p^{-1}(U) \cap W_j, \quad j = 1, \dots, k.$$



Segue allora dalla (3.1) e dal fatto che i  $W_j$  sono disgiunti che  $p^{-1}(U)$  è unione disgiunta degli aperti  $\tilde{U}_j$ . Inoltre, per ogni  $j = 1, \dots, k$ ,

$$p(\tilde{U}_j) = p(p^{-1}(U) \cap W_j) = p(p^{-1}(U)) \cap p(W_j) = U \cap p(W_j) = U$$

dove la seconda uguaglianza segue dall'iniettività di  $p$  ristretta a  $W_j$  (e quindi ristretta a  $p^{-1}(U) \cap W_j$ ), la terza uguaglianza segue dalla suriettività di  $p$  mentre l'ultima uguaglianza è conseguenza del fatto che, per definizione,  $U \subseteq V = \bigcap_{j=1}^k p(W_j)$  e quindi  $U \subseteq p(W_j)$ , per ogni  $j = 1, \dots, k$ . Questo mostra che  $U$  è un aperto ben ricoperto da  $p$  e che  $p$  è un rivestimento. Per dimostrare che il rivestimento ha grado finito bisogna dimostrare che la cardinalità della fibra di un punto  $x$  (che è finita per quello che abbiamo dimostrato) non dipende dal punto  $x$  scelto. Consideriamo la funzione  $c : X \rightarrow \mathbb{N}$  che ad un punto  $x \in X$  associa la cardinalità della fibra  $p^{-1}(x)$ . Questa funzione è localmente costante infatti per ogni punto  $x \in X$  i punti di un aperto banalizzante  $U$  che contiene  $x$  hanno tutti fibre della stessa cardinalità. Quindi  $c$  è un'applicazione continua tra  $X$  e  $\mathbb{Z}$  con la topologia discreta. Essendo  $X$  connesso,  $c(X)$  è connesso e quindi  $c$  deve essere costante. Dunque la cardinalità della fibra  $p^{-1}(x)$  non dipende dal punto  $x$  scelto.  $\square$

### 3.3 Sollevamenti di archi e omotopie

Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento e  $f : Y \rightarrow X$  un'applicazione continua. Diremo che un'applicazione continua  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  è un **sollevamento** di  $f$  se  $f = p \circ \tilde{f}$ , ossia se il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

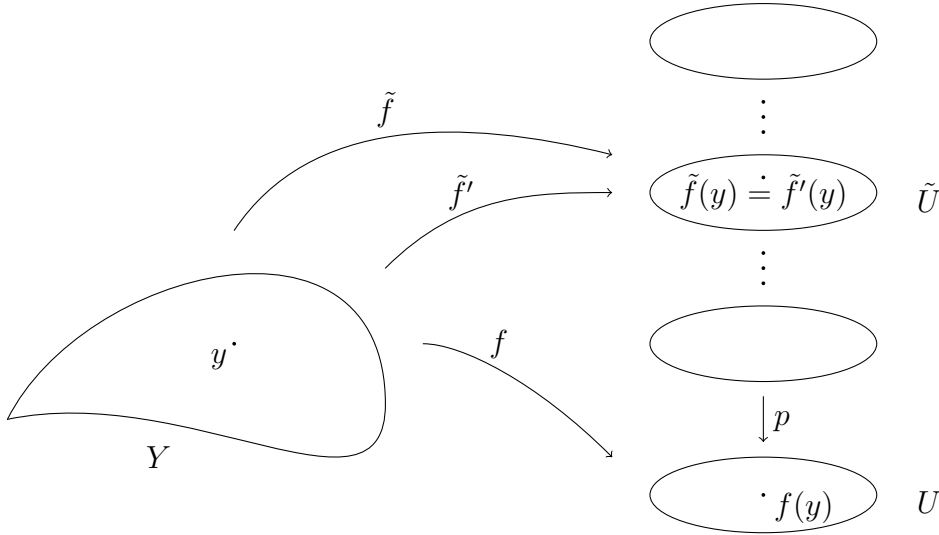
In questo paragrafo dimostreremo tre risultati fondamentali sui sollevamenti: l'unicità del sollevamento (Proposizione 3.3.1), il sollevamento degli archi (Proposizione 3.3.2) e il sollevamento delle omotopie (Proposizione 3.3.4) e alcune delle loro conseguenze.

**Proposizione 3.3.1** *Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento e  $f : Y \rightarrow X$  una funzione continua da uno spazio topologico connesso  $Y$  in  $X$ . Siano  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  e  $\tilde{f}' : Y \rightarrow \tilde{X}$  due sollevamenti di  $f$ . Se esiste un punto  $y_0 \in Y$  tale che  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}'(y_0)$ . Allora  $\tilde{f} = \tilde{f}'$ .*

**Dimostrazione:** Consideriamo il sottoinsieme di  $Y' \subseteq Y$  definito come segue:

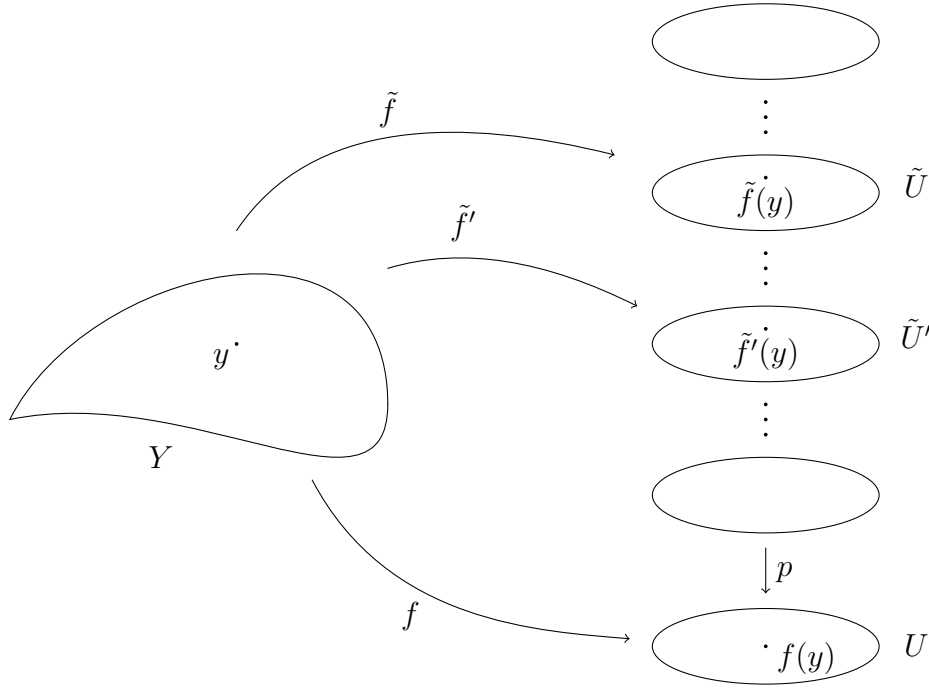
$$Y' = \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\}.$$

Dobbiamo dimostrare che  $Y' = Y$ . Osserviamo che  $Y' \neq \emptyset$  in quanto  $y_0 \in Y'$ . Essendo  $Y$  connesso basterà allora dimostrare che  $Y'$  è sia aperto che chiuso. Sia dunque  $y \in Y'$ ,  $U$  un intorno aperto di  $f(y)$  ben ricoperto da  $p$  e  $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$  un intorno aperto di  $\tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)$  tale che  $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$  sia un omeomorfismo.



Consideriamo l'intorno aperto di  $y$  dato da  $\tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{f}'^{-1}(\tilde{U}) \subseteq Y$ . Vogliamo mostrare che quest'intorno è contenuto in  $Y'$  (e questo mostrerà che  $Y'$  è aperto). Sia  $z \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{f}'^{-1}(\tilde{U})$  allora  $\tilde{f}(z) \in \tilde{U}$  e  $\tilde{f}'(z) \in \tilde{U}$  e  $p(\tilde{f}(z)) = p(\tilde{f}'(z)) = f(z)$ . Dal momento che  $p$  ristretta a  $\tilde{U}$  è iniettiva segue che  $\tilde{f}(z) = \tilde{f}'(z)$  e quindi  $z \in Y'$ . Per mostrare che  $Y'$  è chiuso sia  $y \in Y \setminus Y'$  e quindi  $\tilde{f}(y) \neq \tilde{f}'(y)$ . Sia inoltre  $U$  un intorno aperto di  $f(y)$  ben ricoperto da  $p$ . Esistono allora due intorni aperti e disgiunti  $\tilde{U}, \tilde{U}' \subseteq \tilde{X}$  di  $\tilde{f}(y)$  e di  $\tilde{f}'(y)$  tali che  $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$  e  $p|_{\tilde{U}'} : \tilde{U}' \rightarrow U$  siano

omeomorfismi  $(p(\tilde{f}(y)) = p(\tilde{f}'(y)) = f(y) = x)$ .



Allora  $\tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{f}'^{-1}(\tilde{U}')$  è un intorno aperto di  $y$  contenuto in  $Y \setminus Y'$ . Infatti se  $z \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{f}'^{-1}(\tilde{U}')$  si ha  $\tilde{f}(z) \in \tilde{U}$  e  $\tilde{f}'(z) \in \tilde{U}'$  e quindi  $\tilde{f}(z) \neq \tilde{f}'(z)$  essendo  $\tilde{U}$  e  $\tilde{U}'$  disgiunti.  $\square$

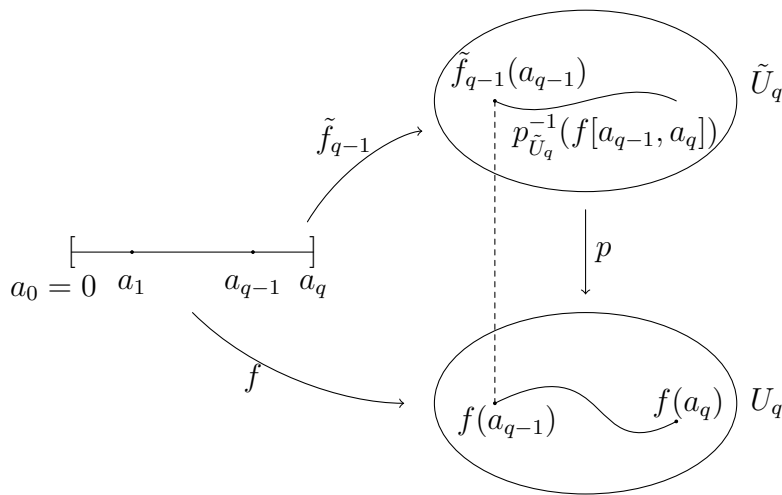
**Proposizione 3.3.2** (*sollevamento degli archi*) Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento,  $x_0 \in X$  e  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  un punto sulla fibra di  $x_0$ , cioè  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ . Allora ogni arco  $f : I \rightarrow X$  tale che  $f(0) = x_0$  ammette un unico sollevamento  $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$  tale che  $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ .

**Dimostrazione:** L'unicità di un sollevamento  $\tilde{f}$  di  $f$  tale che  $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$  segue dalla Proposizione 3.3.1 e dalla connessione di  $I$ . Dimostriamo dunque l'esistenza di  $\tilde{f}$ . Consideriamo un ricoprimento di  $X$  fatto da aperti banalizzanti. Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 2.5.1 e usando l'esistenza del numero di Lebesgue (vedi Appendice C) possiamo trovare una suddivisione dell'intervallo  $I$ ,  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{q-1} < a_q = 1$  tale che per ogni  $\alpha = 1, \dots, q$ ,  $f([a_{\alpha-1}, a_\alpha])$  sia contenuto in uno degli aperti banalizzanti scelti. Vogliamo dimostrare per induzione che: **per ogni  $\alpha = 1, \dots, q$  esiste un sollevamento  $\tilde{f}_\alpha : [0, a_\alpha] \rightarrow \tilde{X}$  di  $f|_{[0, a_\alpha]}$  (cioè  $p \circ \tilde{f}_\alpha = f|_{[0, a_\alpha]}$ ) tale che  $\tilde{f}_\alpha(0) = \tilde{x}_0$ .** Il sollevamento desiderato si otterrà allora per  $\alpha = q$  cioè  $\tilde{f} = \tilde{f}_q$ . La base dell'induzione,  $\alpha = 1$ , si ottiene come segue. Sia  $U_1$  un aperto banalizzante che contiene  $f(0)$  e sia  $\tilde{U}_1$  è un intorno aperto di  $\tilde{x}_0$  tale che  $p|_{\tilde{U}_1} : \tilde{U}_1 \rightarrow U_1$  sia un omeomorfismo. Definiamo  $\tilde{f}_1 : [0, \alpha_1] \rightarrow \tilde{X}$ ,  $\tilde{f}_1(0) = \tilde{x}_0$ , come  $\tilde{f}_1 = p|_{\tilde{U}_1}^{-1} \circ f$ . Supponiamo di aver

definito un sollevamento  $\tilde{f}_{q-1} : [0, a_{q-1}] \rightarrow \tilde{X}$  di  $f|_{[0, a_{q-1}]}$  tale che  $\tilde{f}_{q-1}(0) = \tilde{x}_0$  e sia  $U_q$  un aperto banalizzante per  $p$  tale che  $f([a_{q-1}, a_q]) \subseteq U_q$ . Esisterà allora un intorno aperto  $\tilde{U}_q$  di  $\tilde{f}_{q-1}(a_{q-1})$  tale che  $p|_{\tilde{U}_q} : \tilde{U}_q \rightarrow U_q$  sia un omeomorfismo e  $p(\tilde{f}_{q-1}(a_{q-1})) = f(a_{q-1})$ . Estendiamo allora  $\tilde{f}_{q-1}$  ad un sollevamento  $\tilde{f}_q : I = [0, a_q] \rightarrow \tilde{X}$  di  $f : I \rightarrow X$  tale che  $\tilde{f}_q(0) = \tilde{x}_0$  ponendo:

$$\tilde{f}_q(t) = \begin{cases} \tilde{f}_{q-1}(t) & \text{se } t \in [0, a_{q-1}] \\ p|_{\tilde{U}_q}^{-1}(f(t)) & \text{se } t \in [a_{q-1}, a_q], \end{cases}$$

il quale è continuo per il lemma di incollamento.



□

**Corollario 3.3.3** *Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento. Se  $X$  è connesso per archi allora la cardinalità della fibra  $p^{-1}(x)$  non dipende dal punto  $x \in X$ .*

**Dimostrazione:** Siano  $x_0$  e  $x_1$  due punti di  $X$ . Sia  $\tilde{x}_0$  un punto di  $p^{-1}(x_0)$  e sia  $f : I \rightarrow X$  un arco tale che  $f(0) = x_0$  e  $f(1) = x_1$ . Sia  $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$  l'unico sollevamento di  $f$  tale che  $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ . Allora  $\tilde{f}(1)$  appartiene a  $p^{-1}(x_1)$ . Quindi resta definita un'applicazione

$$\Phi : p^{-1}(x_0) \rightarrow p^{-1}(x_1)$$

che al punto  $\tilde{x}_0$  associa il punto  $\Phi(\tilde{x}_0) = \tilde{f}(1)$ . Analogamente definiamo un'applicazione

$$\Psi : p^{-1}(x_1) \rightarrow p^{-1}(x_0)$$

che al punto  $\tilde{x}_1$  associa il punto  $\tilde{g}(1)$ , dove  $\tilde{g} : I \rightarrow \tilde{X}$  è l'unico sollevamento di  $i(f) : I \rightarrow X$  ( $i(f)(t) = f(1-t)$ ) tale che  $\tilde{g}(0) = \tilde{x}_1$ . Non è difficile mostrare che  $\Psi$  è l'inversa di  $\Phi$  (cfr. Esercizio 3.8). □

**Proposizione 3.3.4** (*sollevamento delle omotopie*) Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento,  $x_0 \in X$  e  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  tale che  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ . Sia  $F : I \times I \rightarrow X$  un'applicazione continua tale che  $F(0,0) = x_0$ . Allora  $F$  ammette un unico sollevamento  $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$  tale che  $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$ . Se inoltre  $F$  è un'omotopia relativa a  $\{0,1\}$  tra i due archi  $t \rightarrow F(t,0)$  e  $t \rightarrow F(t,1)$  allora  $\tilde{F}$  è un'omotopia relativa a  $\{0,1\}$  tra i due archi  $t \rightarrow \tilde{F}(t,0)$  e  $t \rightarrow \tilde{F}(t,1)$ .

**Dimostrazione:** L'unicità di  $\tilde{F}$  segue dalla Proposizione 3.3.1. Prima di tutto osserviamo che esiste un sollevamento  $\tilde{F}_L : L \rightarrow \tilde{X}$  di  $F|_L$  dove  $L := (I \times \{0\}) \times (\{0\} \times I)$ . Infatti  $\tilde{F}_L$  si può ottenere dalla Proposizione 3.3.2 come  $\tilde{F}_L(t,0) = \tilde{f}(t)$ ,  $t \in I$  e  $\tilde{F}_L(0,s) = \tilde{g}(s)$ ,  $s \in I$ , dove  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  sono i sollevamenti rispettivamente degli archi  $t \rightarrow F(t,0)$  e  $s \rightarrow F(0,s)$  tali che  $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = \tilde{x}_0$ . Estendiamo ora  $\tilde{F}_L$  a tutto  $I \times I$  come segue. Consideriamo un ricoprimento di  $X$  costituito da aperti banalizzanti. Usando l'esistenza del numero di Lebesgue possiamo trovare una suddivisione dell'intervallo  $I \times I$ ,  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{q-1} < a_q = 1$ ,  $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_{r-1} < b_r = 1$  tale che per ogni  $\alpha = 1, \dots, q$  e per ogni  $\beta = 1, \dots, r$ ,  $F(I_\alpha \times J_\beta)$  sia contenuto in uno degli aperti banalizzanti scelti, dove  $I_\alpha = [a_{\alpha-1}, a_\alpha]$  e  $J_\beta = [b_{\beta-1}, b_\beta]$ . Nella figura seguente è illustrato il caso  $q = 3$  e  $r = 2$ .

$I_1 \times J_2$	$I_2 \times J_2$	$I_3 \times J_2$
$I_1 \times J_1$	$I_2 \times J_1$	$I_3 \times J_1$

Ordiniamo le coppie  $(\alpha, \beta)$  come segue:

$$(1,1) < (2,1) < \dots < (q,1) < (1,2) < (2,2) < \dots < (q,2) < \dots < (1,r) < (2,r) < \dots < (q,r).$$

Vogliamo dimostrare per induzione che: **per ogni**  $(\alpha, \beta) = (1,1), (2,1), \dots, (q,r)$  **esiste un sollevamento**

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} : L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (\alpha,\beta)} (I_\gamma \times J_\delta) \rightarrow \tilde{X}$$

**di  $F$  ristretta all'insieme  $L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (\alpha,\beta)} (I_\gamma \times J_\delta)$  tale che  $\tilde{F}_{\alpha\beta}(0,0) = \tilde{x}_0$ .** Il sollevamento desiderato si otterrà allora per  $(\alpha, \beta) = (q, r)$  cioè  $\tilde{F} = \tilde{F}_{qr}$ . Sia  $U_{11}$

un aperto banalizzante per  $p$  tale che  $F(I_1 \times J_1) \subseteq U_{11}$  e sia  $L_{11} = L \cap (I_1 \times J_1)$ . Dato che  $L_{11}$  è connesso esisterà un aperto  $\tilde{U}_{11}$  di  $\tilde{X}$  tale che  $\tilde{F}_L(L_{11}) \subseteq \tilde{U}_{11}$ ,  $p|_{\tilde{U}_{11}} : \tilde{U}_{11} \rightarrow U_{11}$  sia un omeomorfismo e  $p(\tilde{F}_L(t, s)) = F(t, s)$  per ogni  $(t, s) \in L_{11}$ . La base dell'induzione si ottiene allora definendo  $\tilde{F}_{11} : L \cup (I_1 \times J_1) \rightarrow \tilde{X}$  come:

$$\tilde{F}_{11}(t, s) = \begin{cases} \tilde{F}_L(t, s) & \text{se } (t, s) \in L \\ p|_{\tilde{U}_{11}}^{-1}(F(t, s)) & \text{se } (t, s) \in I_1 \times J_1 \end{cases}$$

che è continua per il lemma di incollamento.

Supponiamo di aver definito il sollevamento

$$\tilde{F}_{q-1,r} : L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (q-1,r)} (I_\gamma \times J_\delta) \rightarrow \tilde{X}$$

di  $F$  ristretta a all'insieme  $L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (q-1,r)} (I_\gamma \times J_\delta)$  tale che  $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{x}_0$ . Sia  $U_{qr}$  un aperto banalizzante per  $p$  tale che  $F(I_q \times J_r) \subseteq U_{qr}$  e sia

$$L_{qr} = \left( L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (q-1,r)} (I_\gamma \times J_\delta) \right) \cap (I_q \times J_r).$$

Per la connessione di  $L_{qr}$  esisterà allora un aperto  $\tilde{U}_{qr} \subseteq \tilde{X}$  tale che  $\tilde{F}_{q-1,r}(L_{qr}) \subseteq \tilde{U}_{qr}$ ,  $p|_{\tilde{U}_{qr}} : \tilde{U}_{qr} \rightarrow U_{qr}$  sia un omeomorfismo e  $p(\tilde{F}_{q-1,r}(t, s)) = F(t, s)$  per ogni  $(t, s) \in L_{qr}$ . Definiamo allora il sollevamento

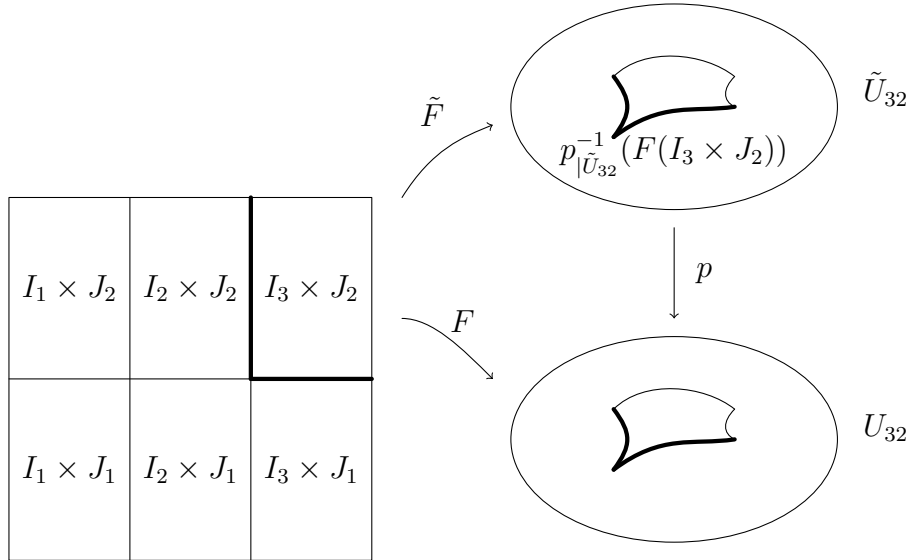
$$\tilde{F}_{qr} : \left( L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (q-1,r)} (I_\gamma \times J_\delta) \right) \cup (I_q \times J_r) \rightarrow \tilde{X}$$

come:

$$\tilde{F}(t, s) = \tilde{F}_{qr}(t, s) = \begin{cases} \tilde{F}_{q-1,r}(t, s) & \text{se } (t, s) \in L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (q-1,r)} (I_\gamma \times J_\delta) \\ p|_{\tilde{U}_{qr}}^{-1}(F(t, s)) & \text{se } (t, s) \in I_q \times J_r \end{cases}$$

che è continuo per il lemma di incollamento. Nella figura seguente è illustrato il

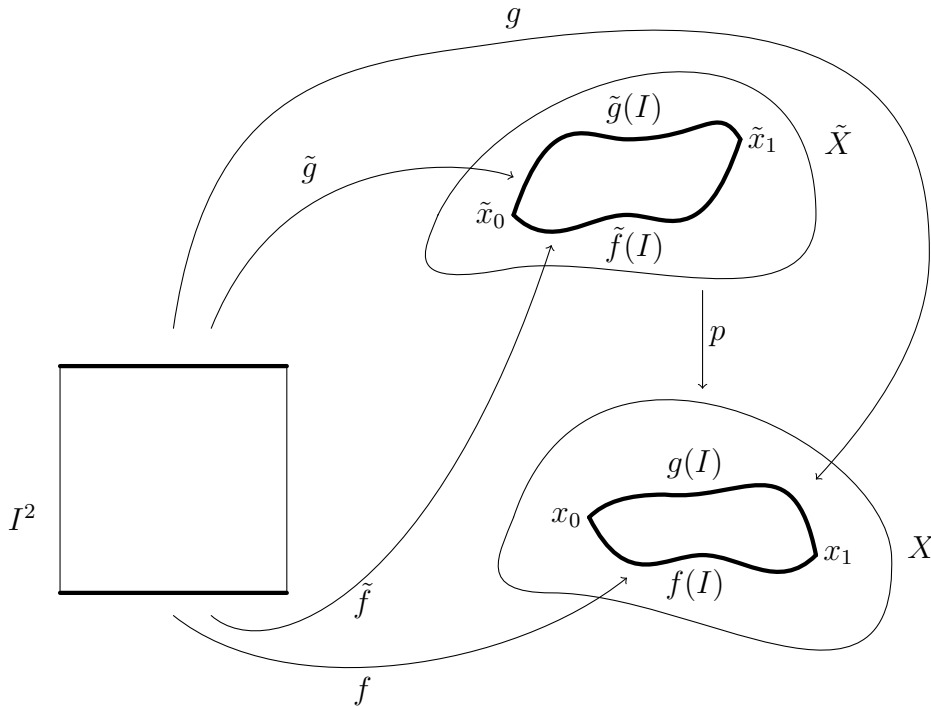
caso  $q = 3$  e  $r = 2$ .



Supponiamo, infine, che  $F$  sia un'omotopia relativa a  $\{0, 1\}$  tra gli archi  $t \rightarrow F(t, 0)$  e  $t \rightarrow F(t, 1)$  tale che  $F(0, 0) = F(0, 1) = x_0$ ,  $F(1, 0) = F(1, 1) = x_1$ ,  $F(0, s) = x_0$  e  $F(1, s) = x_1$  per ogni  $s \in I$ . Segue che  $F(\{0\} \times I) = p(\tilde{F}(\{0\} \times I)) = x_0$  (risp.  $F(\{1\} \times I) = p(\tilde{F}(\{1\} \times I)) = x_1$ ). Quindi  $\tilde{F}(\{0\} \times I) \in p^{-1}(x_0)$  (risp.  $\tilde{F}(\{1\} \times I) \in p^{-1}(x_1)$ ). Essendo la fibra  $p^{-1}(x_0)$  (risp.  $p^{-1}(x_1)$ ) discreta e  $\tilde{F}(\{0\} \times I)$  (risp.  $\tilde{F}(\{1\} \times I)$ ) connesso segue che  $\tilde{F}(\{0\} \times I)$  (risp.  $\tilde{F}(\{1\} \times I)$ ) è costituito da un solo punto  $\tilde{x}_0$  tale che  $p(\tilde{x}_0) = x_0$  (risp.  $\tilde{x}_1$  tale che  $p(\tilde{x}_1) = x_1$ ). Quindi  $\tilde{F}$  è un'omotopia relativa a  $\{0, 1\}$  tra gli archi  $t \rightarrow \tilde{F}(t, 0)$  e  $t \rightarrow \tilde{F}(t, 1)$  (cioè  $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{F}(0, 1) = \tilde{x}_0$ ,  $\tilde{F}(1, 0) = \tilde{F}(1, 1) = \tilde{x}_1$ ,  $\tilde{F}(0, s) = \tilde{x}_0$  e  $\tilde{F}(1, s) = \tilde{x}_1$  per ogni  $s \in I$ ).  $\square$

**Corollario 3.3.5** *Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento,  $x_0 \in X$  e  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  tale che  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ . Siano  $f : I \rightarrow X$  e  $g : I \rightarrow X$  due archi tali che  $f(0) = g(0) = x_0$  e siano  $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$  e  $\tilde{g} : I \rightarrow \tilde{X}$  i due (unici) sollevamenti di  $f$  e  $g$  tali che*

$\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = \tilde{x}_0$ . Se  $f \sim_{\{0,1\}} g$  allora  $\tilde{f} \sim_{\{0,1\}} \tilde{g}$ , in particolare  $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ .

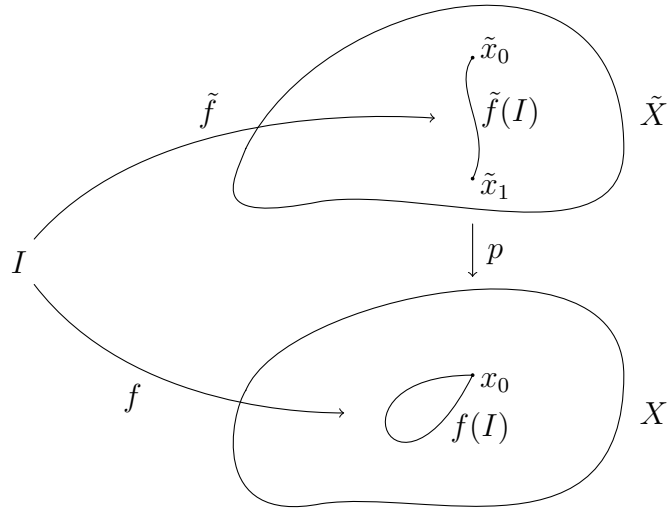


**Dimostrazione:** Sia  $F : I \times I \rightarrow X$ ,  $F(0,0) = x_0$ , un'omotopia relativa a  $\{0,1\}$  tra  $f$  e  $g$  e sia  $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ ,  $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$ , l'omotopia relativa a  $\{0,1\}$  tra gli archi  $t \rightarrow \tilde{F}(t,0)$  e  $t \rightarrow \tilde{F}(t,1)$  la cui esistenza segue dalla Proposizione 3.3.4. Quindi  $\tilde{F}(0,s) = \tilde{x}_0$  e  $\tilde{F}(1,s) = \tilde{x}_1$ , per ogni  $s \in I$ , dove  $\tilde{x}_1$  è un punto sulla fibra di  $x_1 = f(1) = g(1)$ . Osserviamo che  $t \rightarrow \tilde{F}(t,0)$  (risp.  $t \rightarrow \tilde{F}(t,1)$ ) è un arco in  $\tilde{X}$  tale che  $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$  (risp.  $\tilde{F}(0,1) = \tilde{x}_0$ ) e  $p(\tilde{F}(t,0)) = F(t,0) = f(t)$  (risp.  $p(\tilde{F}(t,1)) = F(t,1) = g(t)$ ). Segue allora dalla Proposizione 3.3.2 che  $\tilde{F}(t,0) = \tilde{f}(t)$  e  $\tilde{F}(t,1) = \tilde{g}(t)$  e quindi  $\tilde{f}(1) = \tilde{F}(1,0) = \tilde{F}(1,1) = \tilde{g}(1)$ .  $\square$

**Teorema 3.3.6** Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento. Se  $\tilde{X}$  è connesso per archi e  $X$  è semplicemente connesso allora  $p$  è un omeomorfismo.

**Dimostrazione:** Per il Corollario 3.2.3 possiamo limitarci a dimostrare che  $p$  è iniettiva. Siano dunque  $\tilde{x}_0$  e  $\tilde{x}_1$  due punti di  $\tilde{X}$  tali che  $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1) = x_0 \in X$ . Sia  $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$  un arco tale che  $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$  e  $\tilde{f}(1) = \tilde{x}_1$ . Allora  $f = p \circ \tilde{f}$  è un laccio in  $X$  di base  $x_0$ .





Essendo  $X$  semplicemente connesso  $f \sim_{\{0,1\}} \epsilon_{x_0}$ . Ma i sollevamenti di  $f$  e  $\epsilon_{x_0}$  che iniziano in  $x_0$  sono rispettivamente  $\tilde{f}$  e  $\epsilon_{\tilde{x}_0}$  e per il corollario precedente

$$\tilde{x}_1 = \tilde{f}(1) = \epsilon_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0,$$

e quindi  $p$  è iniettiva. □

## 3.4 Esercizi

**Esercizio 3.1** Siano  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  e  $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$  due rivestimenti. Si dimostri che

$$p \times q : \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y, (\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto (p(\tilde{x}), q(\tilde{y}))$$

è un rivestimento.

**Esercizio 3.2** Siano  $p : X \rightarrow Y$  e  $q : Y \rightarrow Z$  applicazioni continue. Dimostrare che se  $q \circ p$  e  $q$  (risp.  $p$ ) sono rivestimenti allora  $p$  (risp.  $q$ ) è un rivestimento.

**Esercizio 3.3** Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento tra due spazi topologici  $\tilde{X}$  e  $X$  e sia  $X_0 \subseteq X$  un sottoinsieme di  $X$ . Sia  $\tilde{X}_0 = p^{-1}(X_0)$ . Si dimostri che la restrizione di  $p$  a  $\tilde{X}_0$ ,  $p|_{\tilde{X}_0} : \tilde{X}_0 \rightarrow X_0$ , è ancora un rivestimento.

**Esercizio 3.4** Usare l'Esercizio 3.1 per costruire un rivestimento  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$  e dedurre dall'Esercizio 3.3 l'esistenza di un rivestimento tra il reticolo unitario standard di  $\mathbb{R}^2$  e la figura  $\infty$  (individuare la figura 1.4.10  $\infty$  nel toro  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ ).

**Esercizio 3.5** Sia  $n$  un intero non nullo. Dimostrare che l'applicazione  $p : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$  è un rivestimento (qui stiamo pensando a  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ ).

**Esercizio 3.6** Dimostrare che il gruppo fondamentale di  $S^1$  non è banale. (Suggerimento: usare il Teorema 3.3.6).

**Esercizio 3.7** Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un omeomorfismo locale tra due varietà topologiche  $\tilde{X}$  e  $X$  connesse. Assumiamo che  $p$  sia propria (cioè  $p^{-1}(K)$  è compatto per ogni sottoinsieme  $K$  compatto di  $X$ ). Dimostrare che  $p$  è un rivestimento di grado finito.

**Esercizio 3.8** Dimostrare che le applicazioni  $\Psi$  e  $\Phi$  definite nella dimostrazione del Corollario 3.3.3 sono una l'inversa dell'altra.

**Esercizio 3.9** Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento tra due spazi topologici  $\tilde{X}$  e  $X$  e sia  $Y \subseteq \tilde{X}$  una componente connessa di  $\tilde{X}$ . Se  $X$  è connesso e localmente connesso<sup>1</sup> allora la restrizione  $p|_Y : Y \rightarrow X$  è un rivestimento.

---

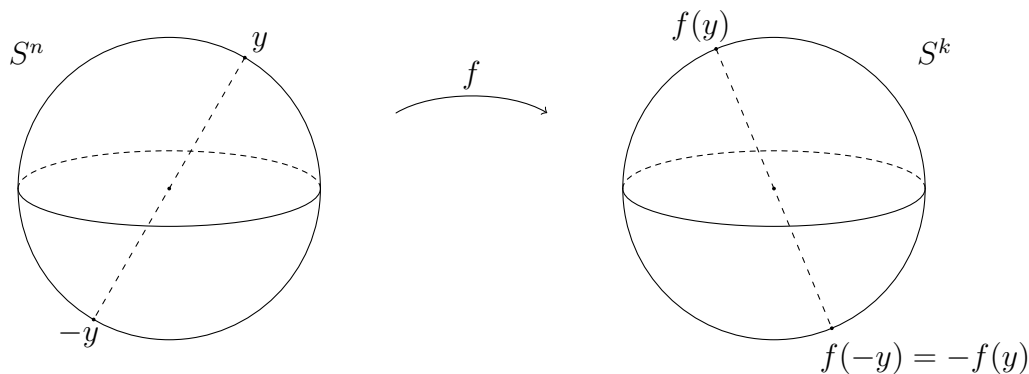
<sup>1</sup>Uno spazio topologico  $X$  è **localmente connesso** se per ogni  $x \in X$  e per ogni intorno aperto  $U$  di  $x$  esiste un intorno connesso di  $x$  contenuto in  $U$  (cfr. Appendice A per maggiori dettagli).

# Capitolo 4

## Applicazioni della teoria dei rivestimenti

### 4.1 Il teorema di Borsuk–Ulam

Siano  $n$  e  $k$  due numeri naturali. Diremo che un'applicazione  $f : S^n \rightarrow S^k$  **preserva i punti antipodali** se  $f(-y) = -f(y)$ , per ogni  $y \in S^n$ .



**Teorema 4.1.1** (*Borsuk–Ulam per  $n = 2$* ) Non esistono applicazioni continue  $f : S^2 \rightarrow S^1$  che preservano i punti antipodali cioè  $f(-y) = -f(y)$  per ogni  $y \in S^2$ .

**Osservazione 4.1.2** Il teorema si generalizza a sfere di dimensione arbitraria. Si può infatti dimostrare che non esistono applicazioni continue  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  che conservano i punti antipodali per ogni  $n \geq 1$ . Per  $n = 1$  la dimostrazione segue dal fatto che  $S^1$  è connesso mentre  $S^0 = \{\pm 1\}$  non lo è. Per  $n \geq 3$  si utilizza la teoria dell'omologia.

Per dimostrare il Teorema di Borsuk–Ulam abbiamo bisogno dei due lemmi seguenti.

**Lemma 4.1.3** *Siano  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento e  $f : S^2 \rightarrow X$  un'applicazione continua. Sia  $y_0 \in S^2$  e  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(f(y_0))$ . Allora esiste un unico sollevamento  $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \tilde{X}$  tale che  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ .*

**Dimostrazione:** L'unicità del sollevamento  $\tilde{f}$  segue dalla connessione delle sfera  $S^2$  e dalla Proposizione 3.3.1. dal momento che  $I^2 \cong D^2$  allora, per il Corollario B.3.3 dell'Appendice B, esiste un'identificazione  $q : I^2 \rightarrow S^2$  tale che  $q(\partial I^2) = y_0$  e  $q|_{\text{Int } I^2} : \text{Int } I^2 \rightarrow S^2 \setminus \{y_0\}$  sia un omeomorfismo. Per la Proposizione 3.3.4 esiste un unico sollevamento  $h : I^2 \rightarrow \tilde{X}$  di  $f \circ q : I^2 \rightarrow X$  tale che  $h(0, 0) = \tilde{x}_0$ . Quindi  $p \circ h = f \circ q$  e il seguente diagramma è commutativo.

$$\begin{array}{ccc} I^2 & \xrightarrow{h} & \tilde{X} \\ q \downarrow & \searrow f \circ q & \downarrow p \\ S^2 & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Segue che

$$p(h(\partial I^2)) = f(q(\partial I^2)) = f(y_0)$$

e quindi  $h(\partial I^2) \in p^{-1}(f(y_0))$ . Ma la fibra di  $f(y_0)$  è discreta e quindi essendo  $\partial I^2$  connesso e  $h$  continua segue che  $h(\partial I^2) = \tilde{x}_0$ . Segue allora che  $h$  scende al quoziente rispetto all'identificazione  $q$ . Esiste quindi un'unica applicazione  $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \tilde{X}$  continua tale che  $\tilde{f} \circ q = h$ .

$$\begin{array}{ccc} I^2 & \xrightarrow{h} & \tilde{X} \\ q \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ S^2 & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

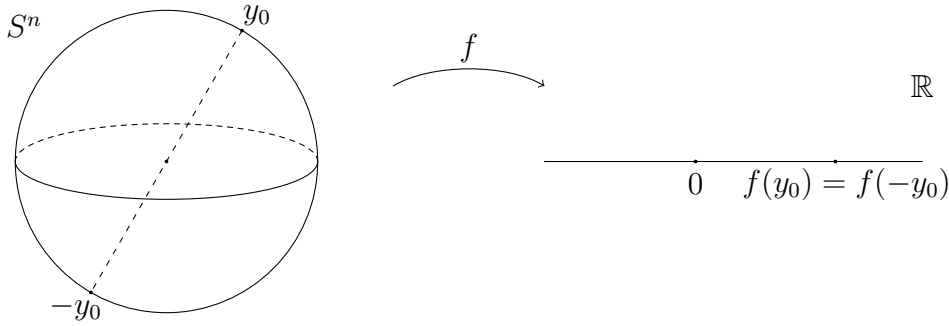
Allora

$$\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}(q(0, 0)) = h(0, 0) = \tilde{x}_0.$$

Inoltre  $p \circ \tilde{f} \circ q = p \circ h = f \circ q$  e siccome  $q$  è suriettiva allora  $p \circ \tilde{f} = f$ ; questo conclude la dimostrazione del lemma.  $\square$

**Osservazione 4.1.4** Si può dimostrare che il lemma precedente vale anche per  $S^n$  con  $n \geq 2$  e, più in generale, per ogni varietà topologica semplicemente connessa.

**Lemma 4.1.5** *Sia  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un'applicazione continua. Allora esiste un punto  $y_0 \in S^2$  tale che  $f(y_0) = f(-y_0)$ .*



**Dimostrazione:** Sia  $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  l'applicazione continua definita da

$$g(y) := f(y) - f(-y).$$

Osserviamo che  $g(-y) = -g(y)$  per ogni  $y \in S^2$ . Dal momento che  $S^2$  è connesso allora  $g(S^2)$  è un sottoinsieme connesso di  $\mathbb{R}$  e quindi  $g(S^2)$  è un punto ovvero un intervallo di  $\mathbb{R}$ . Se  $g(S^2)$  è un punto allora  $g$  è l'applicazione nulla. Infatti  $g(y) = g(-y) = -g(y)$  per ogni  $y \in S^2$  implica che  $g(y) = 0$  per ogni  $y \in S^2$ . Quindi, in questo caso,  $f(y) = f(-y)$  per ogni  $y \in S^2$ . Se invece  $g(S^2)$  è un intervallo (diverso da un punto) possiamo trovare  $y_1 \in S^2$  tale che  $g(y_1) \neq g(-y_1)$ . Ma essendo  $g(S^2)$  convesso il punto

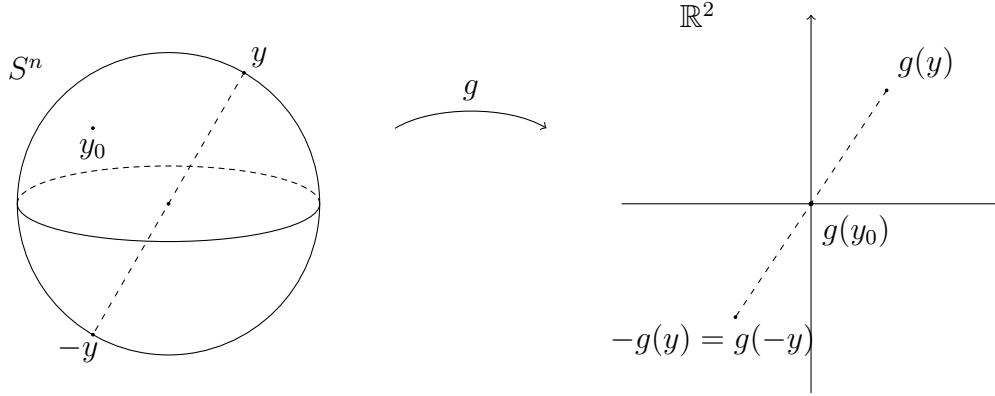
$$\frac{1}{2}(g(y_1) + g(-y_1)) = \frac{1}{2}(g(y_1) - g(y_1)) = 0$$

appartiene ancora a  $g(S^2)$ . Quindi esiste  $y_0 \in S^2$  tale che  $g(y_0) = 0$ , ossia  $f(y_0) = f(-y_0)$ .  $\square$

**Osservazione 4.1.6** Il Lemma 4.1.5 si estende (con una dimostrazione analoga) a tutte le applicazioni continue da  $S^n$  a  $\mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ .

**Dimostrazione del Teorema 4.1.1** Sia  $f : S^2 \rightarrow S^1$  un'applicazione continua. Consideriamo il rivestimento  $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  descritto nell'Esempio 3.1.5 del Capitolo 3. Per il Lemma 4.1.3 esiste un'applicazione continua  $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $e \circ \tilde{f} = f$ . Per il Lemma 4.1.5 esiste  $y_0 \in S^2$  tale che  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}(-y_0)$ . Segue che  $f(y_0) = e(\tilde{f}(y_0)) = e(\tilde{f}(-y_0)) = f(-y_0)$  e quindi  $f(-y_0) \neq -f(y_0)$  (in quanto  $f(y_0) \in S^1$ ). Quindi l'applicazione  $f$  non preserva i punti antipodali.  $\square$

**Corollario 4.1.7** Sia  $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un'applicazione continua tale che  $g(-y) = -g(y)$  per ogni  $y \in S^2$ . Allora esiste  $y_0 \in S^2$  tale che  $g(y_0) = 0$ .

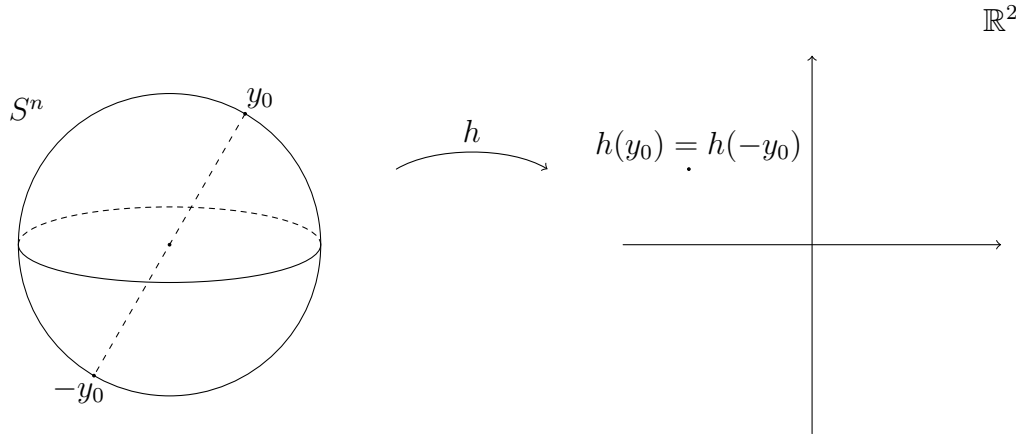


**Dimostrazione:** Se per assurdo  $g(y) \neq 0$  per ogni  $y \in S^2$  allora l'applicazione continua  $f : S^2 \rightarrow S^1$  definita da

$$f(y) := \frac{g(y)}{\|g(y)\|}, y \in S^2$$

è tale che  $f(-y) = -f(y)$  per ogni  $y \in S^2$ , in contrasto con il Teorema di 4.1.1.  $\square$

**Corollario 4.1.8** Sia  $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un'applicazione continua. Allora esiste  $y_0 \in S^2$  tale che  $h(y_0) = h(-y_0)$ . In particolare  $h$  non è iniettiva.



**Dimostrazione:** Sia per assurdo  $h(y) \neq h(-y)$  per ogni  $y \in S^2$ . Allora l'applicazione continua  $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$g(y) := h(y) - h(-y), y \in S^2$$

soddisfa  $g(-y) = -g(y)$ . Segue quindi dal Corollario 4.1.7 che esiste  $y_0 \in S^2$  tale che  $g(y_0) = 0$  e quindi  $h(y_0) = h(-y_0)$ .  $\square$

**Osservazione 4.1.9** Il corollario ha la seguente interpretazione meteorologica: **in ogni istante, esistono sulla superficie terrestre due punti antipodali con la stessa temperatura e la stessa pressione atmosferica.**

**Corollario 4.1.10** *La sfera  $S^2$  non è omeomorfa a nessun sottospazio di  $\mathbb{R}^2$ .*

**Dimostrazione:** Supponiamo per assurdo che esista un  $S$  sottospazio di  $\mathbb{R}^2$  e un omeomorfismo  $g : S^2 \rightarrow S$ . Se  $i : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  denota l'inclusione di  $S$  in  $\mathbb{R}^2$  allora  $h = i \circ g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  è un'applicazione continua e iniettiva, in contrasto con il Corollario 4.1.8.  $\square$

**Corollario 4.1.11** *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  un aperto non vuoto. Allora ogni applicazione continua da  $A$  in  $\mathbb{R}^2$  non è iniettiva.*

**Dimostrazione:** Supponiamo, per assurdo, che  $g : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  sia un'applicazione continua e iniettiva. Siccome  $A$  è aperto in  $\mathbb{R}^3$  contiene un sottospazio omeomorfo a  $S^2$ . Allora l'applicazione  $g|_{S^2} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  è un'applicazione continua e iniettiva in contrasto con il Corollario 4.1.8.  $\square$

**Corollario 4.1.12** *Dati tre sottoinsiemi limitati e misurabili di  $\mathbb{R}^3$  esiste un piano di  $\mathbb{R}^3$  che divide ognuno dei tre insiemi in due insiemi dello stesso volume.*

**Dimostrazione:** Siano  $A$ ,  $B$  e  $C$  i tre insiemi. Per ogni  $y \in S^2$  consideriamo il piano  $P_y$  perpendicolare al vettore  $0y$  e che divide  $A$  in due insiemi dello stesso volume (questo piano esiste per il teorema del valor medio e perché il volume è una funzione continua). Indichiamo inoltre, con  $P_y^+$  e  $P_y^-$  i due semispazi nei quali il piano  $P_y$  divide lo spazio.

Dato  $y \in S^2$  siano  $B^+(y) \subseteq P_y^+$  e  $B^-(y) \subseteq P_y^-$  (risp.  $C^+(y) \subseteq P_y^+$  e  $C^-(y) \subseteq P_y^-$ ) i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^3$  nei quali risulta suddiviso  $B$  (risp.  $C$ ) dal piano  $P_y$ . Siano inoltre  $\text{vol}(B^+(y))$  e  $\text{vol}(B^-(y))$  (risp.  $\text{vol}(C^+(y))$  e  $\text{vol}(C^-(y))$ ) i loro volumi. Consideriamo l'applicazione continua

$$g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, y \mapsto (\text{vol}(B^+(y)) - \text{vol}(B^-(y)), \text{vol}(C^+(y)) - \text{vol}(C^-(y))).$$

Per costruzione  $g(-y) = -g(y)$  per ogni  $y \in S^2$ . Segue dal Corollario 4.1.7 che esiste  $y_0 \in S^2$  tale che  $g(y_0) = 0$  ossia  $\text{vol}(B^+(y_0)) = \text{vol}(B^-(y_0))$  e  $\text{vol}(C^+(y_0)) = \text{vol}(C^-(y_0))$ . Quindi  $P_{y_0}$  è il piano che divide ognuno dei tre insiemi  $A$ ,  $B$  e  $C$  in due insiemi dello stesso volume.  $\square$

**Osservazione 4.1.13** Il corollario prende anche il nome dal **problema della divisione di un panino al prosciutto**, dove per panino al prosciutto si intende l'insieme costituito da due fette di pane e da una fetta di prosciutto. Il corollario mostra che è possibile dividere un panino al prosciutto con un solo taglio netto in modo che la fetta di pane inferiore, la fetta di prosciutto e la fetta di pane superiore siano simultaneamente tagliate esattamente a metà. Osserviamo, inoltre, che gli insiemi  $A$ ,  $B$  e  $C$  non devono essere necessariamente connessi.

## 4.2 Il gruppo fondamentale del cerchio

In questo paragrafo calcoleremo il gruppo fondamentale delle curve topologiche cioè le varietà topologiche di dimensione uno. Non è difficile vedere (noi non lo faremo) che le curve topologiche connesse sono, a meno di omeomorfismi, la retta reale  $\mathbb{R}$  e il cerchio unitario  $S^1$ . Il gruppo fondamentale di  $\mathbb{R}$  è quello banale. Quindi ci resta da calcolare il gruppo fondamentale di  $S^1$ . Fissiamo il punto base  $(1, 0)$  che in notazione complessa è il punto 1. In questo paragrafo dimostreremo il seguente:

**Teorema 4.2.1**  $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ .

**Dimostrazione:** L'idea che sta alla base di questo isomorfismo di gruppi è che ogni arco chiuso  $f : I \rightarrow S^1$  di base 1 “gira” un certo numero di volte su  $S^1$ . Questo numero intero si può pensare ottenuto euristicamente come segue: ogni volta che abbiamo compiuto un giro completo in senso antiorario registriamo un valore 1; se invece si è compiuto un giro completo ma in senso orario registriamo un valore  $-1$ . La somma di questi valori è l'intero cercato. Per dimostrare che effettivamente  $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$  bisogna dimostrare che se  $f$  e  $g$  sono due archi chiusi di base 1 tali che  $f \sim_{\{0,1\}} g$  allora l'intero associato a  $f$  è lo stesso dell'intero associato a  $g$  e che questo avviene tramite un isomorfismo di gruppi.

Per ottenere un'applicazione che a  $[f] \in \pi_1(S^1, 1)$  associa il numero intero che tiene conto di quante volte  $[f]$  gira intorno a 1, usiamo il rivestimento  $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dell'Esempio 3.1.5 del Capitolo 3 e i risultati sui sollevamenti degli archi. Dato  $[f] \in \pi_1(S^1, 1)$  e sia  $f \in [f]$  un suo rappresentante. Consideriamo  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$  l'unico sollevamento di  $f$  tale che  $\tilde{f}(0) = 0$ . Possiamo definire allora

$$\Phi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}, [f] \mapsto \Phi([f]) = \tilde{f}(1) \quad (4.1)$$

Segue dal Corollario 3.3.5 del Capitolo 3 che  $\Phi$  è ben definita.



Per dimostrare il Teorema 4.2.1 faremo vedere che  $\Phi$  è un isomorfismo di gruppi.

Per dimostrare che  $\Phi$  è un omomorfismo introduciamo qualche notazione. Dato un laccio  $f$  in  $S^1$  di base 1 e  $a \in \mathbb{Z} = e^{-1}(1)$ , denotiamo con  $\ell_a(f)$  l'unico sollevamento di  $f$  che inizia in 0, cioè  $e \circ \ell_a(f) = f$  e  $\ell_a(f)(0) = a$ . Ovviamente se  $\tilde{f}$  è il sollevamento di  $f$  che inizia in 0 allora  $\ell_0(f) = \tilde{f}$  e quindi  $\Phi([f]) = \ell_0(f)(1)$ . Inoltre

$$\ell_a(f) = \ell_0(f) + \epsilon_a, \quad (4.2)$$

dove  $\epsilon_a : I \rightarrow \mathbb{R}$  è l'arco costante  $\epsilon_a(t) = a$ . Infatti

$$\ell_a(f)(0) = \ell_0(f)(0) + \epsilon_a(0) = 0 + a = a$$

e

$$e(\ell_0(f) + \epsilon_a) = e(\ell_0(f))e(\epsilon_a) = e(\ell_0(f))\epsilon_1 = f$$

e la (4.2) segue dall'unicità deli sollevamento di archi con lo stesso punto iniziale (cfr. Proposizione 3.3.2). Inoltre, se  $f$  e  $g$  sono due lacci in  $S^1$  di base 1 e  $a \in \mathbb{Z} = e^{-1}(1)$  vale la seguente formula che lega il sollevamento di due lacci con la loro concatenazione  $f \cdot g$ :

$$\ell_a(f \cdot g) = \ell_a(f) \cdot \ell_b(g), \quad b = \ell_a(f)(1) = \ell_0(f)(1) + a. \quad (4.3)$$

La formula segue ancora una volta dall'unicità del sollevamento degli archi. Infatti

$$(\ell_a(f) \cdot \ell_b(g))(0) = \ell_a(f)(0) = a$$

e

$$e \circ (\ell_a(f) \cdot \ell_b(g)) = (e \circ \ell_a(f)) \cdot (e \circ \ell_b(g)) = f \cdot g.$$

Possiamo ora dimostrare che  $\Phi$  è un omomorfismo. Dati  $[f], [g] \in \pi_1(S^1, 1)$  allora, per la (4.3),

$$\Phi([f] \cdot [g]) = \Phi([f \cdot g]) = \ell_0(f \cdot g)(1) = (\ell_0(f) \cdot \ell_b(g))(1) = \ell_b(g)(1),$$

dove  $b = \ell_0(f)(1)$ . D'altra parte, per la (4.2),

$$\ell_b(g)(1) = \ell_0(g)(1) + b = \ell_0(g)(1) + \ell_0(f)(1) = \tilde{f}(1) + \tilde{g}(1) = \Phi([f]) + \Phi([g]).$$

Mostriamo ora che  $\Phi$  è suriettivo. Sia  $k$  intero e  $f : I \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2ik\pi t}$ . Sia  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto kt$ . Allora  $f = e \circ \tilde{f}$  è un laccio di base 1 e il suo (unico) sollevamento che inizia in 0 è esattamente  $\tilde{f}$ . Segue che  $\Phi([f]) = \tilde{f}(1) = k$ .

Infine dimostriamo l'iniettività di  $\Phi$ . Sia  $[f] \in \pi_1(S^1, 1)$  tale che  $\Phi([f]) = 0$ . Allora, per definizione di  $\Phi$ ,  $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = 0$ . Essendo  $\mathbb{R}$  semplicemente connesso

esiste un'omotopia  $F : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  relativa a  $\{0, 1\}$  tale che  $\tilde{f} \sim_{\{0,1\},F} \epsilon_0$ . Allora  $f = (e \circ \tilde{f}) \sim_{\{0,1\},e \circ F} (e \circ \epsilon_0) = \epsilon_1$ , cioè  $[f] = [\epsilon_1]$ . Questo mostra che  $[f]$  appartiene al nucleo di  $\Phi$  e che quindi  $\Phi$  è iniettiva e conclude la dimostrazione del Teorema 4.2.1.  $\square$

**Corollario 4.2.2** *Non esiste una retrazione da  $D^2$  a  $S^1$ .*

**Dimostrazione:** Supponiamo per assurdo che esista una retrazione  $r : D^2 \rightarrow S^1$  cioè un'applicazione continua tale che  $r \circ i = \text{id}_{S^1}$  dove  $i : S^1 \rightarrow D^2$  denota l'inclusione. Segue dalle proprietà degli omomorfismi indotti (cfr. Teorema 2.3.1) che

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \text{id}_{\pi_1(S^1,1)}$$

In particolare  $i_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(D^2, 1)$  dev'essere iniettiva. Ma questo è assurdo in quanto non può esistere un'applicazione iniettiva da  $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$  a  $\pi_1(D^2, 1) = \{1\}$ .  $\square$

**Corollario 4.2.3** *L'applicazione identità  $\text{id}_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$  non è omotopa a un'applicazione costante.*

**Dimostrazione:** Se  $\text{id}_{S^1} \sim \epsilon_x$ , per qualche  $x \in S^1$ , allora, per la Proposizione 1.3.6 del Capitolo 1, dovrebbe esistere una retrazione  $r : D^2 \rightarrow S^1$  in contrasto con il Corollario 4.2.2.  $\square$

**Corollario 4.2.4** *Il toro  $n$ -dimensionale  $\mathbb{T}^n$  ha gruppo fondamentale dato dal prodotto diretto di  $n$  copie di  $\mathbb{Z}$ . Conseguentemente  $\mathbb{T}^n$  e la sfera  $S^n$  non sono omotopicamente equivalenti per  $n \geq 2$ .*

**Dimostrazione:** segue dal Teorema 4.2.1, dal Teorema 2.6.1 e dal Teorema 2.5.1.  $\square$

**Corollario 4.2.5** *(il teorema fondamentale dell'algebra) Ogni polinomio di grado  $k \geq 1$  a coefficienti in  $\mathbb{C}$  ha una radice in  $\mathbb{C}$*

**Dimostrazione:** Senza ledere alla generalità della dimostrazione possiamo assumere che il coefficiente che moltiplica  $z^k$  sia uguale a 1 cioè che il polinomio sia delle forma

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-1} z^{k-1} + z^k.$$

Supponiamo per assurdo che  $p$  non abbia radici, cioè  $p(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Allora l'applicazione

$$G : I \times [0, +\infty) \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$$

definita da

$$G(t, r) = \frac{p(re^{2\pi it})}{|p(re^{2\pi it})|} \frac{|p(r)|}{p(r)}$$

è continua. Consideriamo l'applicazione  $F : I \times I \rightarrow S^1$  definita da:

$$F(t, s) = \begin{cases} G(t, \frac{s}{1-s}) & \text{se } t \in I, 0 \leq s < 1 \\ e^{2\pi ikt} & \text{se } t \in I, s = 1. \end{cases}$$

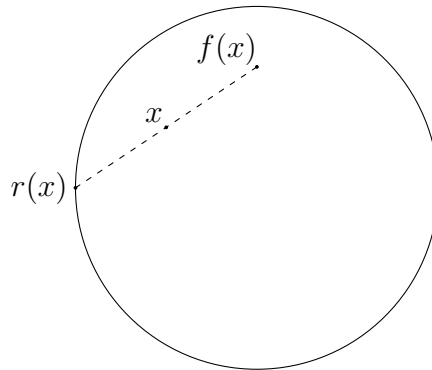
Non è difficile vedere che  $F$  è continua. Infatti, un calcolo diretto mostra che

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} F(t, s) = \lim_{s \rightarrow 1^-} G(t, \frac{s}{1-s}) = \lim_{r \rightarrow +\infty} G(t, r) = 1$$

Inoltre  $F(t, 0) = 1$ ,  $F(t, 1) = e^{2\pi ikt}$ ,  $F(0, s) = F(1, s) = 1$ , per ogni  $s \in I$ . Quindi  $F$  definisce un'omotopia relativa a  $\{0, 1\}$  tra il laccio costante  $\epsilon_1$  e il laccio  $f(t) = e^{2\pi ikt}$  (lacci basati in  $1 \in S^1$ ). Considerato allora l'isomorfismo  $\Phi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$  usato nel Teorema 4.2.1 si ha che  $\Phi([\epsilon_1]) = \Phi([f])$ . D'altra parte  $\Phi([\epsilon_1]) \neq \Phi([f])$  in quanto  $\Phi([\epsilon_1]) = \epsilon_0(1)$  e  $\Phi([f]) = k$  e  $k \geq 1$ . Questa contraddizione conclude la dimostrazione.  $\square$

**Corollario 4.2.6** (*il teorema del punto fisso di Brouwer*) Sia  $f : D^2 \rightarrow D^2$  un'applicazione continua. Allora  $f$  ha un punto fisso, cioè esiste  $x_0 \in D^2$  tale che  $f(x_0) = x_0$ .

**Dimostrazione:** Supponiamo per assurdo che  $f(x) \neq x$  per ogni  $x \in D^2$ . Allora possiamo definire un'applicazione  $r : D^2 \rightarrow S^1$  che al punto  $x \in D^2$  associa l'intersezione della semiretta affine di  $\mathbb{R}^2$  con origine in  $x$  e vettore direttore  $x - f(x)$ , con la frontiera di  $D^2$  (cioè  $S^1$ ).



Non è difficile scrivere l'espressione analitica di  $r$  e verificare che è continua. Infatti, un'equazione parametrica della semiretta in questione è la seguente :

$$s(x) = x + tg(x), \quad t \geq 0, \quad g(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}$$

L'intersezione di tale semiretta con  $S^1$  si ottiene per quei valori di  $t$  tali che  $\|s(x)\|^2 = 1$  cioè:

$$t^2 + 2tx \cdot g(x) + \|x\|^2 = 1$$

dove “ $\cdot$ ” denota il prodotto scalare euclideo di  $\mathbb{R}^2$ . L'unica soluzione positiva di quest'equazione è:

$$t = -x \cdot g(x) + \sqrt{(x \cdot g(x))^2 + 1 - \|x\|^2}$$

e quindi l'espressione analitica di  $r : D^2 \rightarrow S^1$  diventa:

$$r(x) = x + \left( \sqrt{(x \cdot g(x))^2 + 1 - \|x\|^2} - x \cdot g(x) \right) g(x),$$

dalla quale si vede che  $r$  è continua. Osserviamo infine che  $r$  è un retrazione da  $D^2$  a  $S^1$  (come si verifica facilmente dalla sua espressione analitica o dalla sua costruzione geometrica). Questo è in contrasto con il Corollario 4.2.2 e mostra che deve esistere un punto fisso per  $f$ .  $\square$

**Corollario 4.2.7** (*Teorema di Frobenius*) *Sia  $A$  un matrice  $3 \times 3$  con entrate strettamente positive. Allora  $A$  ammette un autovalore reale positivo.*

**Dimostrazione:** Sia  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare che rappresenta  $A$  rispetto alla base canonica,  $T(p) = A(x, y, z)^T$ , dove  $(x, y, z)$  sono le coordinate di  $p$  rispetto alla base canonica. Consideriamo il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  ottenuto dall'intersezione di  $S^2$  con il primo ottante e cioè:

$$B = S^2 \cap \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Osserviamo che, per le ipotesi sulla matrice  $A$ , dato  $p \in B$ ,  $T(p) \in \mathbb{R}^3$  è non nullo e tutte le sue componenti sono maggiori o uguali a zero. Resta così definita un'applicazione continua  $p \mapsto \frac{T(p)}{\|T(p)\|}$  da  $B$  in  $B$ . Essendo  $B$  omeomorfo a  $D^2$  per il Teorema di Brouwer (cfr. Esercizio 4.11) esiste  $p_0 \in B$  tale che  $\frac{T(p_0)}{\|T(p_0)\|} = p_0$ , o equivalentemente  $T(p_0) = \|T(p_0)\|p_0$  e quindi  $\|T(p_0)\|$  è un autovalore positivo di  $A$ .  $\square$

**Osservazione 4.2.8** Il Teorema del punto fisso di Brouwer può essere generalizzato al disco  $D^n$ , per ogni  $n$ , usando la teoria dell'omologia. Una dimostrazione geniale di questo teorema che fa uso del teorema delle funzione inversa è stata ottenuta da John Milnor in [10].

### 4.3 Il gruppo fondamentale del proiettivo reale

La tecniche usate nel calcolo del gruppo fondamentale di  $S^1$  possono essere usate per calcolare il gruppo fondamentale del proiettivo reale  $\mathbb{RP}^n$   $n$ -dimensionale (vedi corso di topologia generale). Per  $n = 1$ ,  $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ , del quale abbiamo già calcolato il gruppo fondamentale. Quindi possiamo assumere  $n \geq 2$ . Dimostriamo dapprima una proprietà generale sui rivestimenti che generalizza il Teorema 3.3.6. Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento, sia  $x_0 \in X$  e  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$  un punto fissato della fibra di  $x_0$ . Analogamente a ciò fatto per il calcolo del gruppo fondamentale di  $S^1$  possiamo definire un'applicazione

$$\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0), [f] \mapsto \tilde{f}(1) \quad (4.4)$$

dove  $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$  è l'unico sollevamento di  $f$  tale che  $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ . Segue dal Corollario 3.3.5 del Capitolo 3 che  $\Phi$  è un'applicazione ben definita. Il risultato del quale abbiamo bisogno è il seguente:

**Teorema 4.3.1** *Se  $\tilde{X}$  è connesso per archi allora  $\Phi$  è suriettiva. Se inoltre  $\tilde{X}$  è semplicemente connesso allora  $\Phi$  è una bigezione.*

**Dimostrazione:** Dato  $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$  sia  $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$  un arco che unisce  $\tilde{x}_0 = \tilde{f}(0)$  con  $\tilde{x}_1 = \tilde{f}(1)$ . Allora  $f := p \circ \tilde{f} : I \rightarrow X$  è un laccio di base  $x_0$  in  $X$  e, per definizione di  $\Phi$ ,  $\Phi([f]) = \tilde{f}(1) = \tilde{x}_1$ . Questo mostra che  $\Phi$  è suriettiva. Supponiamo ora che  $\tilde{X}$  sia semplicemente connesso. Allora  $\tilde{X}$  è connesso per archi e  $\Phi$  è suriettiva per la prima parte. Resta da dimostrare che  $\Phi$  è iniettiva. Siano  $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$  tali che  $\Phi([f]) = \Phi([g])$ . Equivalentemente  $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$  dove  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  sono i sollevamenti rispettivamente di  $f$  e  $g$  tali che  $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$ . Siccome  $\tilde{X}$  è semplicemente connesso  $\tilde{f} \sim_{\{0,1\}} \tilde{g}$  tramite un'omotopia  $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$  (cfr. (a) in Lemma 2.4.5). Segue che  $f \sim_{\{0,1\}, F} g$  tramite l'omotopia  $F := p \circ \tilde{F} : I \times I \rightarrow X$ . Quindi  $[f] = [g]$  e  $\Phi$  è una bigezione.  $\square$

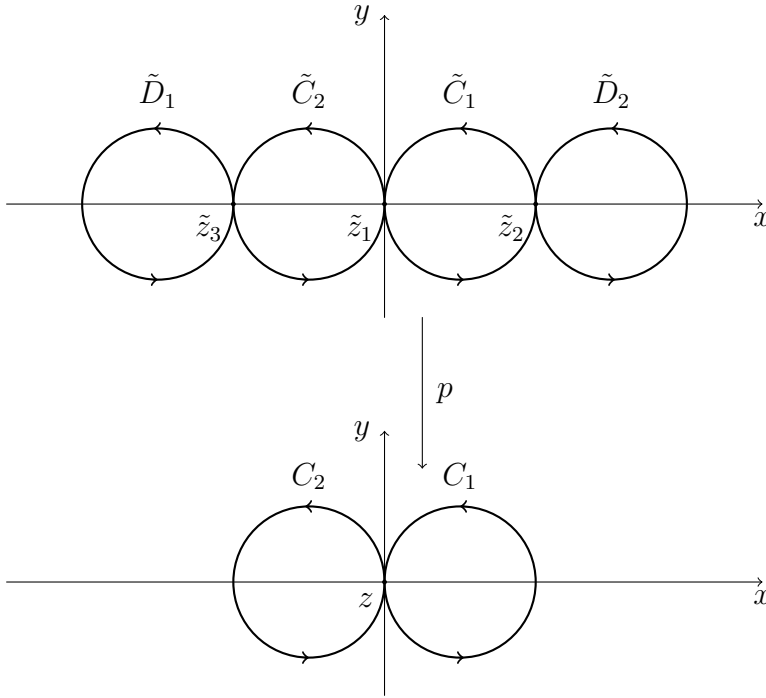
**Teorema 4.3.2** *Il gruppo fondamentale di  $\mathbb{RP}^n$ ,  $n \geq 2$ , è il gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_2$ .*

**Dimostrazione:** Consideriamo l'identificazione  $p : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n, x \mapsto [x]$  tale che  $y \in [x]$  se e solo se  $y = \pm x$ . Allora  $p$  è un omeomorfismo locale. Infatti per ogni punto  $x \in S^n$  sia  $V$  un aperto di  $S^n$  che contiene  $x$  e tale che  $V \cap (-V) = \emptyset$ . Allora la restrizione  $p|_V : V \rightarrow p(V)$  è un omeomorfismo tra  $V$  e l'aperto  $p(V)$  di  $\mathbb{RP}^n$  ( $p(V)$  è aperto in quanto  $p^{-1}(p(V)) = V \cup (-V)$  aperto di  $S^n$ ). Segue allora dal Teorema 3.2.4 del Capitolo 3 che  $p$  è un rivestimento di grado due. Usando il fatto che  $S^n$  è semplicemente connessa (cfr. Proposizione 2.5.1) e il Teorema 4.3.1 segue che  $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$  è un gruppo con due elementi e quindi isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ .  $\square$

**Osservazione 4.3.3** Dal Teorema 4.3.2 e dal Corollario 4.2.4 deduciamo che le superfici  $S^2$ ,  $\mathbb{T}^2$  e  $\mathbb{RP}^2$  sono topologicamente distinte. Nel Capitolo 8 calcoleremo il gruppo fondamentale di tutte le superfici compatte e connesse.

## 4.4 Un esempio di gruppo fondamentale non abeliano

Vogliamo dimostrare che lo spazio  $X = C_1 \cup C_2$  dove  $C_1 = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ ,  $C_2 = \{(x, y) \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}$  ha gruppo fondamentale non abeliano (cfr. Esempio 1.4.10). Lo studente è rinviato al Capitolo 7 per il calcolo esplicito del gruppo fondamentale di questo spazio. Consideriamo lo spazio topologico  $\tilde{X} = \tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2 \cup \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2$  unione di quattro circonferenze, dove  $\tilde{C}_1 = C_1$ ,  $\tilde{C}_2 = C_2$ ,  $\tilde{D}_2 = \{(x, y) \mid (x+3)^2 + y^2 = 1\}$  e  $\tilde{D}_1 = \{(x, y) \mid (x-3)^2 + y^2 = 1\}$ .



Possiamo parametrizzare questi cerchi (in notazione complessa) come:

$$\tilde{C}_1 = \{e^{2\pi it} + 1 \mid t \in I\}, \quad \tilde{C}_2 = \{e^{2\pi it} - 1 \mid t \in I\}$$

$$\tilde{D}_1 = \{e^{2\pi it} - 3 \mid t \in I\}, \quad \tilde{D}_2 = \{e^{2\pi it} + 3 \mid t \in I\}.$$

Consideriamo l'applicazione  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  definita da:

$$p(\tilde{z}) = \begin{cases} -e^{4\pi it} + 1 & \text{se } \tilde{z} = e^{2\pi it} + 1 \in \tilde{C}_1, t \in I \\ e^{4\pi it} - 1 & \text{se } \tilde{z} = e^{2\pi it} - 1 \in \tilde{C}_2, t \in I \\ -e^{2\pi it} + 1 & \text{se } \tilde{z} = e^{2\pi it} - 3 \in \tilde{D}_1, t \in I \\ -e^{2\pi it} - 1 & \text{se } \tilde{z} = e^{2\pi it} + 3 \in \tilde{D}_2, t \in I. \end{cases} \quad (4.5)$$

Quest'applicazione “avvolge” due volte il cerchio  $\tilde{C}_1$  (risp.  $\tilde{C}_2$ ) su  $C_1$  (risp.  $C_2$ ) mentre invia  $\tilde{D}_1$  (risp.  $\tilde{D}_2$ ) omeomorficamente su  $C_1$  (risp.  $C_2$ ). I punti  $\tilde{z}_3 = (-2, 0)$ ,  $\tilde{z}_1 = (0, 0)$ ,  $\tilde{z}_2 = (2, 0)$  vengono inviati da  $p$  in  $z = (0, 0)$ . Non è difficile vedere che  $p$  è un rivestimento di grado 3 (cfr. Esercizio 4.13). Consideriamo i due lacci di base  $z$ ,  $f : I \rightarrow X, t \mapsto e^{2\pi it} + 1$  e  $g : I \rightarrow X, t \mapsto e^{2\pi it} - 1$  (che parametrizzano rispettivamente  $C_1$  e  $C_2$ ). Osserviamo che il sollevamento di  $f \cdot g$  che inizia in  $\tilde{z}_1$  termina nel punto  $\tilde{z}_2$ , mentre il sollevamento di  $g \cdot f$  che inizia in  $\tilde{z}_1$  termina nel punto  $\tilde{z}_3$ . Segue allora dal Corollario 3.3.5 che i lacci  $f \cdot g$  e  $g \cdot f$  di base  $z$  non sono omotopicamente equivalenti tramite un'omotopia relativa a  $\{0, 1\}$ , ossia  $[f] \cdot [g] \neq [g] \cdot [f]$  e quindi il gruppo fondamentale  $\pi_1(X, z)$  non è abeliano.

## 4.5 Esercizi

**Esercizio 4.1** Si dimostrino le affermazioni fatte negli Esempi 1.1.2 e 1.2.2 del Capitolo 1.

**Esercizio 4.2** Si dimostri che il nastro di Möbius ha gruppo fondamentale isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

**Esercizio 4.3** Dimostrare che per ogni  $n \geq 2$  non esiste un'applicazione continua  $f : S^n \rightarrow S^1$  tale che  $f(-x) = -f(x)$ . (Suggerimento: imitare la dimostrazione del Teorema di Borsuk–Ulam ( $n = 2$ )).

**Esercizio 4.4** Dimostrare che dati due insiemi misurabili nel piano esiste una retta che divide ognuno di essi in due parti della stessa area.

**Esercizio 4.5** Trovare due spazi topologici  $X$  e  $Y$  e una funzione continua  $\varphi : X \rightarrow Y$  iniettiva (risp. suriettiva) tale che  $\varphi_*$  non sia iniettiva (risp. non sia suriettiva).

**Esercizio 4.6** Calcolare il gruppo fondamentale dei seguenti sottospazi di  $\mathbb{R}^2$ :  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| > 1\}$ ;  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$ ;  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \geq 1\}$ ;  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$ ;  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$ ;  $S^1 \cup (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ ;  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$ , dove  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ .

**Esercizio 4.7** Calcolare il gruppo fondamentale di  $S^n \times S^m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ .

**Esercizio 4.8** Dimostrare che  $\mathbb{R}^2$  non è omeomorfo a  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ .

**Esercizio 4.9** Sia  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 > 4xz\}$ . Calcolare il gruppo fondamentale di  $X$ . (Suggerimento: dimostrare che  $X$  ha lo stesso tipo di omotopia di  $S^1$ ).

**Esercizio 4.10** Si dimostri che uno spazio topologico non può essere contemporaneamente una 2-varietà e una  $n$ -varietà per  $n > 2$ .

**Esercizio 4.11** Sia  $B$  uno spazio topologico omeomorfo al disco  $D^2$ . Dimostrare che un'applicazione continua  $f : B \rightarrow B$  ha un punto fisso.

**Esercizio 4.12** Sia  $A$  un retracts del disco  $D^2$ . Dimostrare che un'applicazione continua  $f : A \rightarrow A$  ha un punto fisso.

**Esercizio 4.13** Dimostrare che l'applicazione (4.5) è un rivestimento (usare il Teorema 3.2.4 del Capitolo 3).



# Capitolo 5

## Categori e funtori

In questo capitolo daremo un cenno alla teoria delle categorie e dei funtori. Per maggiori informazioni sull'argomento lo studente può consultare [9] in bibliografia.

### 5.1 Categorie

Una categoria  $\mathcal{C}$  consiste di:

- una classe di **oggetti**;
- per ogni coppia di oggetti  $X, Y$  un insieme  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  (eventualmente vuoto) di **morfismi**;
- per ogni terna  $X, Y, Z$  di oggetti una funzione, chiamata **composizione**,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), (\varphi, \psi) \mapsto \psi \circ \varphi$$

tale che valgano i seguenti assiomi:

1. la composizione è associativa:  $\eta \circ (\psi \circ \varphi) = (\eta \circ \psi) \circ \varphi$  ogniqualvolta i due membri dell'uguaglianza hanno senso;
2. per ogni oggetto  $X$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  contiene un morfismo  $\text{id}_X$ , detto **identità**, tale che per ogni morfismo  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  si ha

$$\text{id}_Y \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ \text{id}_X.$$

La maggior parte dei concetti che lo studente ha incontrato nel suo corso di studi sono o possono essere visti come categorie. Descriviamo ora alcuni esempi

di categorie (le verifica che si tratti effettivamente di categorie è lasciata come esercizio per lo studente).

**Notazione:** indicheremo con  $\varphi : X \rightarrow Y$  oppure con  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  un morfismo, ossia un elemento di  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ . In generale non è detto che le freccia “ $\rightarrow$ ” rappresenti un’applicazione dall’oggetto  $X$  all’oggetto  $Y$  nel senso usuale del termine.

### Esempi

1. La categoria  $\mathcal{I}ns$  i cui oggetti sono gli insiemi e i cui morfismi sono le applicazioni di insiemi e la composizione di morfismi è l’usuale composizione di applicazioni.
2. La categoria  $\mathcal{G}$  i cui oggetti sono i gruppi e i cui morfismi sono gli omomorfismi di gruppi e la composizione di morfismi è l’usuale composizione di applicazioni.
3. La categoria  $\mathcal{A}b$  i cui oggetti sono i gruppi abeliani e i cui morfismi sono gli omomorfismi di gruppi abeliani e la composizione di morfismi è l’usuale composizione di applicazioni.
4. La categoria  $\mathcal{A}n$  i cui oggetti sono gli anelli e i cui morfismi sono gli omomorfismi di anelli e la composizione di morfismi è l’usuale composizione di applicazioni.
5. La categoria  $\mathcal{A}n_{Ab}$  i cui oggetti sono gli anelli commutativi e i cui morfismi sono gli omomorfismi di anelli commutativi e la composizione di morfismi è l’usuale composizione di applicazioni.
6. La categoria  $\mathcal{K}$  i cui oggetti sono i campi e i cui morfismi sono gli omomorfismi di campi e la composizione di morfismi è l’usuale composizione di applicazioni.
7. La categoria  $\mathcal{V}ett$  i cui oggetti sono gli spazi vettoriali sui  $\mathbb{R}$  e i cui morfismi sono le applicazioni  $\mathbb{R}$ -lineari e la composizione di morfismi è l’usuale composizione di applicazioni.
8. La categoria  $\mathcal{T}op$  i cui oggetti sono gli spazi topologici e i cui morfismi sono le applicazioni continue e la composizione di morfismi è l’usuale composizione di applicazioni.
9. La categoria  $\mathcal{T}op_*$  i cui oggetti sono gli spazi topologici con un punto fissato (cioè le coppie  $(X, x)$ ,  $X$  spazio topologico e  $x \in X$ ) e i cui morfismi sono le applicazioni continue che mandano il punto fissato di uno spazio nel punto fissato dell’altro (la composizione di morfismi è l’usuale composizione di applicazioni).
10. La categoria  $\mathcal{H}Top$  i cui oggetti sono gli spazi topologici e i cui morfismi sono le classi di omotopia di applicazioni continue. La composizione tra due classi di equivalenza  $[\varphi]$ ,  $[\psi]$ ,  $\varphi \in C(X, Y)$ ,  $\psi \in C(Y, Z)$  è definita come  $[\psi \circ \varphi]$ .

**11.** La categoria  $\mathcal{HTop}_*$  i cui oggetti sono gli spazi topologici con un punto fissato e i cui morfismi sono le classi d'equivalenza di applicazioni continue modulo omotopia relativa al punto fissato. La composizione di due classi è definita come nell'esempio precedente.

Osserviamo che in tutti gli esempi precedenti, tranne negli ultimi due le categorie sono costituite da insiemi dotati di una struttura che viene rispettata dai rispettivi morfismi. Esempi di categorie siffatte sono chiamate **concrete**.

Sia  $\mathcal{C}$  una categoria. Un morfismo  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  è detto **isomorfismo** se esiste un morfismo  $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  tale che  $\varphi \circ \psi = \text{id}_Y$  e  $\psi \circ \varphi = \text{id}_X$ . Per esempio nella categoria  $\mathcal{Ins}$  gli isomorfismi sono le bigezioni, nella categoria  $\mathcal{G}$  sono gli isomorfismi di gruppi, nella categoria  $\mathcal{Top}$  sono gli omeomorfismi e nella categoria  $\mathcal{HTop}$  sono le classi di equivalenze omotopiche.

Una **sottocategoria**  $\mathcal{D}$  di una categoria  $\mathcal{C}$  è una categoria i cui oggetti sono alcuni degli oggetti della categoria  $\mathcal{C}$  e i cui morfismi sono un sottoinsieme dei morfismi di  $\mathcal{C}$  con la legge di composizione e le identità di  $\mathcal{C}$ . La sottocategoria  $\mathcal{D}$  di  $\mathcal{C}$  è detta **piena** se  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  per ogni coppia di oggetti  $X, Y \in \mathcal{C}$ . Per esempio  $\mathcal{Ab}$  è una sottocategoria piena di  $\mathcal{G}$  mentre  $\mathcal{G}$  è una sottocategoria di  $\mathcal{Ins}$  che non è piena.

**Esempio 5.1.1** (gruppi come categorie) Supponiamo che  $\mathcal{C}$  sia una categoria con un solo oggetto  $X$ , dove ogni morfismo sia un isomorfismo. Tutta la struttura della categoria è contenuta nell'insieme dei morfismi  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  e nelle loro composizioni. Gli assiomi di una categoria ci dicono che due morfismi possono essere composti per ottenere un altro morfismo, che la composizione è associativa e che esiste un morfismo identità. Dal momento che stiamo assumendo che tutti i morfismi siano isomorfismi allora ogni morfismo è invertibile. Quindi  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  ha la struttura di gruppo rispetto alla composizione. Viceversa ogni gruppo  $G$  può essere identificato con una categoria. Basta pensare il gruppo  $G$  come una sottocategoria di  $\mathcal{Ins}$  che consiste di un solo oggetto  $G$  e delle applicazioni  $L_g : G \rightarrow G$  definite da  $L_g(h) = gh$ , per ogni  $h \in G$ .

## 5.2 Funtori

Siano  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  due categorie. Un **funtoe covariante** (risp. **controvariante**)  $\mathcal{F}$  da  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$  è una coppia di applicazioni (ciascuna delle quali verrà indicata ancora con  $\mathcal{F}$ ) la prima delle quali associa a ogni oggetto  $X$  di  $\mathcal{C}$  un oggetto  $\mathcal{F}(X)$  di  $\mathcal{D}$  e la seconda associa ad ogni morfismo  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  un **morfismo indotto**

$\mathcal{F}(\varphi) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$  (risp.  $\mathcal{F}(\varphi) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$ ) tale che:

$$\mathcal{F}(\eta \circ \psi) = \mathcal{F}(\eta) \circ \mathcal{F}(\psi) \quad (\text{risp. } \mathcal{F}(\eta \circ \psi) = \mathcal{F}(\psi) \circ \mathcal{F}(\eta)); \quad \mathcal{F}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathcal{F}(X)}.$$

Il morfismo indotto  $\mathcal{F}(\varphi)$  viene solitamente denotato con  $\varphi_*$  se  $\mathcal{F}$  è un funtore covariante e con  $\varphi^*$  se  $\mathcal{F}$  è un funtore controvariante.

### Esempi

1. Data una categoria  $\mathcal{C}$  il funtore covariante identità  $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  per il quale  $\text{id}_{\mathcal{C}}(X) = X$  e  $\text{id}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \varphi$  per ogni oggetto  $X$  di  $\mathcal{C}$  e ogni  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ .

2. Il funtore covariante **distratto** dalla categoria  $\mathcal{Top}$  alla categoria  $\mathcal{Ins}$  che associa ad ogni spazio topologico il suo supporto e ad ogni applicazione continua l'applicazione stessa. Lo studente potrà costruire altri esempi di funtori covarianti “distratti” dagli esempi di categorie descritti sopra.

3. Il funtore covariante 0-esimo **gruppo di omotopia**  $\pi_0 : \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Ins}$  che assegna ad ogni spazio topologico  $X$  l'insieme  $\pi_0(X)$  delle sue componenti connesse (cfr. Paragrafo 2.7) e ad ogni applicazione continua  $\varphi : X \rightarrow Y$  l'applicazione indotta  $\varphi_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  che porta la componente connessa  $C$  di  $X$  nella componente connessa di  $Y$  che contiene  $\varphi(C)$ .

4. Il funtore covariante **gruppo fondamentale**  $\pi_1 : \mathcal{Top}_* \rightarrow \mathcal{G}$  che assegna ad ogni spazio topologico  $(X, x)$  il suo gruppo fondamentale  $\pi_1(X, x)$  e per ogni applicazione continua  $\varphi : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  tale che  $\varphi(x) = y$  l'omomorfismo indotto  $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ . Il fatto che  $\pi_1$  sia un funtore covariante segue dal Teorema 2.3.1. Osserviamo che, per il Teorema 2.4.2, resta definito anche un funtore covariante  $\pi_1 : \mathcal{HTop}_* \rightarrow \mathcal{G}$ .

5. Il funtore covariante  $n$ -esimo **gruppo di omotopia**  $\pi_n : \mathcal{Top}_* \rightarrow \mathcal{Ab}$ ,  $n \geq 2$ , che assegna ad ogni spazio topologico  $(X, x)$  il suo  $n$ -esimo gruppo di omotopia  $\pi_n(X, x)$  basato in  $x$  e per ogni applicazione continua  $\varphi : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  tale che  $\varphi(x) = y$  l'omomorfismo indotto  $\varphi_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, y)$ . Il fatto che  $\pi_n$  sia un funtore covariante segue dal punto 4. del Teorema 2.7.1. Osserviamo che allo stesso modo resta anche definito un funtore covariante  $\pi_n : \mathcal{HTop}_* \rightarrow \mathcal{Ab}$ ,  $n \geq 2$ .

6. Il funtore controvariante da  $\mathcal{Vett}$  in se stesso che associa ad ogni spazio vettoriale  $V$  il suo spazio duale  $V^*$  (l'insieme delle applicazioni  $\mathbb{R}$ -lineari da  $V$  in  $\mathbb{R}$ ) e ad ogni applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare  $\varphi : V \rightarrow W$  la sua applicazione duale  $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$  definita da  $\varphi^*(f) := f \circ \varphi$  per ogni  $f \in W^*$ .

7. Il funtore controvariante  $C : \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{An}_{\mathcal{Ab}}$  che ad ogni spazio topologico  $X$  associa l'anello commutativo  $C(X, \mathbb{R})$  delle funzioni continue da  $X$  in  $\mathbb{R}$  e ad

ogni funzione continua  $\varphi : X \rightarrow Y$  il morfismo indotto  $\varphi^* : C(Y, \mathbb{R}) \rightarrow C(X, \mathbb{R})$  definito da  $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$  per ogni  $f \in C(Y, \mathbb{R})$ .

8. Sia  $H$  un gruppo abeliano fissato. Definiamo un funtore controvariante da  $\mathcal{A}b$  a se stesso tale che ad ogni gruppo abeliano  $G$  associa il gruppo  $\text{Hom}(G, H)$  (gruppo abeliano degli omomorfismi da  $G$  a  $H$ ) e ad ogni omomorfismo  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  l'omomorfismo duale  $\varphi^* : \text{Hom}(G_2, H) \rightarrow \text{Hom}(G_1, H)$  definito da  $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$  per ogni  $f \in \text{Hom}(G_2, H)$ .

## 5.3 Prodotti e coprodotti

Sia  $\{X_j\}_{j \in J}$  una famiglia di oggetti di una categoria  $\mathcal{C}$ . Un oggetto  $P$  di  $\mathcal{C}$  con un insieme di morfismi  $\pi_j : P \rightarrow X_j$ , per ogni  $j \in J$ , chiamati **proiezioni**, è detto un **prodotto** ovvero **prodotto categoriale** degli oggetti  $\{X_j\}_{j \in J}$  se è soddisfatta la seguente **proprietà universale**: dati un qualunque oggetto  $Y$  di  $\mathcal{C}$  e una famiglia di morfismi  $\varphi_j : Y \rightarrow X_j$ , esiste un **unico** morfismo  $\varphi : Y \rightarrow P$  che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \nearrow \varphi & \downarrow \pi_j \\ Y & \xrightarrow{\varphi_j} & X_j \end{array}$$

In una data categoria  $\mathcal{C}$  non è detto che un prodotto esista. Se però esiste esso è unico come mostra la seguente:

**Proposizione 5.3.1** *Sia  $\mathcal{C}$  una categoria,  $\{X_j\}_{j \in J}$  una sua famiglia di oggetti. Se  $(P, \pi_j)$  e  $(P', \pi'_j)$  sono prodotti degli oggetti  $\{X_j\}_{j \in J}$  allora esiste un unico isomorfismo  $\varphi : P \rightarrow P'$  che rispetta le proiezioni cioè  $\pi'_j \circ \varphi = \pi_j$ .*

**Dimostrazione:** Per la proprietà universale del prodotto esistono due morfismi  $\varphi : P \rightarrow P'$  e  $\varphi' : P' \rightarrow P$  che rendono commutativi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} & P' & \\ \varphi \nearrow & \downarrow \pi'_j & \\ P & \xrightarrow{\pi_j} & X_j \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & P & \\ \varphi' \nearrow & \downarrow \pi_j & \\ P' & \xrightarrow{\pi'_j} & X_j \end{array}$$

Si ottengono quindi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc}
& P & \\
\varphi' \circ \varphi \nearrow & \downarrow \pi_j & \\
P & \xrightarrow{\pi_j} & X_j
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
& P' & \\
\varphi \circ \varphi' \nearrow & \downarrow \pi'_j & \\
P' & \xrightarrow{\pi'_j} & X_j
\end{array}$$

D'altra parte i seguenti diagrammi commutano (banalmente)

$$\begin{array}{ccc}
& P & \\
\text{id}_P \nearrow & \downarrow \pi_j & \\
P & \xrightarrow{\pi_j} & X_j
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
& P' & \\
\text{id}_{P'} \nearrow & \downarrow \pi'_j & \\
P' & \xrightarrow{\pi'_j} & X_j
\end{array}$$

Segue allora dall'unicità dei due prodotti categoriali che  $\varphi' \circ \varphi = \text{id}_P$  e  $\varphi \circ \varphi' = \text{id}_{P'}$ . Quindi  $\varphi$  (risp.  $\varphi'$ ) è l'unico isomorfismo che soddisfa  $\pi'_j \circ \varphi = \pi_j$  (risp.  $\pi_j \circ \varphi' = \pi'_j$ ) per ogni  $j \in J$ .  $\square$

**Esempio 5.3.2** (prodotto categoriale in  $\mathcal{I}ns$ ) Sia  $\{X_j\}$  una famiglia di insiemi. Ricordiamo che il prodotto cartesiano  $\prod_{j \in J} X_j$  di una famiglia di insiemi  $\{X_j\}_{j \in J}$  ( $J$  non necessariamente finito o numerabile) è dato da:

$$\prod_{j \in J} X_j = \{f : J \rightarrow \cup_{j \in J} X_j \mid f(j) \in X_j, j \in J\}$$

cioè come l'insieme delle funzioni definite su  $J$  che mandano ogni elemento  $j \in J$  in un elemento di  $X_j$ . Osserviamo che l'affermazione “il prodotto cartesiano di una famiglia non vuota di insiemi non vuoti è non vuoto” è equivalente all'assioma di scelta. Ovviamente se  $J$  è finito,  $J = \{1, \dots, n\}$ , si ottiene la definizione usuale di prodotto cartesiano  $X_1 \times \dots \times X_n$ . Denotiamo con  $\pi_k : \prod_{j \in J} X_j \rightarrow X_k$  la proiezione nel fattore  $k$ -esimo definita da:

$$\pi_k(f) := f(k), \quad f \in \prod_{j \in J} X_j. \quad (5.1)$$

Allora la coppia  $(\prod_{j \in J} X_j, \pi_j)$  è il prodotto categoriale degli oggetti  $\{X_j\}_{j \in J}$  nella categoria  $\mathcal{I}ns$ . Infatti dato un insieme qualunque  $Y$  e una famiglia di applicazioni  $\varphi_j : Y \rightarrow X_j$  allora l'applicazione  $\varphi : Y \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$  che a  $y \in Y$  associa  $\varphi(y) \in \prod_{j \in J} X_j$  definita da

$$\varphi(y)(j) := \varphi_j(y), \quad \forall j \in J \quad (5.2)$$

soddisfa  $\pi_j \circ \varphi = \varphi_j$ , per ogni  $j \in J$  ed è chiaramente unica per il modo in cui è stata definita.

**Esempio 5.3.3** (prodotto categoriale in  $\mathcal{Top}$ ) Sia  $\{X_j\}$  una famiglia di spazi topologici. Consideriamo la famiglia di insiemi di  $\prod_{j \in J} X_j$  costituita dal prodotto degli insiemi della forma  $\prod_{j \in J} U_j$ , dove  $U_j$  è aperto in  $X_j$  e  $U_j = X_j$  per ogni  $j \in J$ , tranne per al più un numero finito di  $j$ . Questa famiglia di insiemi è un ricoprimento di  $\prod_{j \in J} X_j$  e le intersezioni di due elementi qualunque di questa famiglia è ancora un elemento della famiglia. Segue allora da [6, Cap. 4] che esiste un'unica topologia, chiamata **la topologia prodotto**<sup>1</sup>, che ha questa famiglia di aperti come base. Nel caso  $J$  sia finito si tratta della topologia prodotto che lo studente ha incontrato nel corso di topologia generale (cfr. [6, Cap. 8], in bibliografia). Osserviamo che la proiezioni  $\pi_k : \prod_{j \in J} X_j \rightarrow X_k$ , definite da (5.1), sono applicazioni continue in quanto la controimmagine  $\pi_k^{-1}(U)$  di un aperto  $U$  di  $X_k$  è data da  $\pi_k^{-1}(U) = \prod_{j \in J} U_j$  con  $U_k = U$  e  $U_j = X_j$ , per  $j \neq k$ , che è un aperto (di base) nella topologia prodotto. La coppia  $(\prod_{j \in J} X_j, \pi_j)$  è il prodotto categoriale degli oggetti  $\{X_j\}_{j \in J}$  nella categoria  $\mathcal{Top}$ . Infatti dato uno spazio topologico  $Y$  e una famiglia di applicazioni continue  $\varphi_j : Y \rightarrow X_j$  allora l'applicazione  $\varphi : Y \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$  definita da (5.2) è continua (cfr. Esercizio 5.5) e soddisfa la relazione  $\pi_j \circ \varphi = \varphi_j$ .

**Esempio 5.3.4** (prodotto categoriale in  $\mathcal{G}$ ) Sia  $\{G_j\}_{j \in J}$  una famiglia di gruppi. Ricordiamo che il loro prodotto diretto è il gruppo ottenuto considerando il loro prodotto cartesiano  $\prod_{j \in J} G_j$  con il prodotto componente per componente

$$(g \cdot h)(j) := g(j) \cdot h(j), \quad g, h \in \prod_{j \in J} G_j,$$

cioè la componente  $j$ -esima del prodotto è il prodotto delle componenti  $j$ -esime dei singoli fattori. Osserviamo che per ogni  $k \in J$  il prodotto diretto  $\prod_{j \in J} G_j$  ha un sottogruppo isomorfo a  $G_k$  ossia il sottogruppo dove tutti i  $G_j$  sono uguali all'identità per  $j \neq k$  e  $G_j = G_k$ . Indicheremo questo sottogruppo con  $G_k$ . Per  $k \neq l$  è immediato verificare che i due sottogruppi  $G_k$  e  $G_l$  commutano.

Si verifica facilmente che la proiezione  $\pi_k : \prod_{j \in J} G_j \rightarrow G_k$  definita da (5.1) è un omomorfismo di gruppi e quindi un morfismo nella categoria  $\mathcal{G}$ . Allora  $(\prod_{j \in J} G_j, \pi_j)$  definisce il prodotto categoriale degli oggetti  $\{G_j\}_{j \in J}$  nella categoria  $\mathcal{G}$ . Infatti, dato un gruppo  $G$  e una famiglia di omomorfismi  $\varphi_j : G \rightarrow G_j$  allora l'applicazione  $\varphi : G \rightarrow \prod_{j \in J} G_j$  definita da  $\varphi(g)(j) = \varphi_j(g)$ , per ogni  $j \in J$ , è un omomorfismo:

$$\varphi(gh)(j) = \varphi_j(gh) = \varphi_j(g)\varphi_j(h) = \varphi(g)(j)\varphi(h)(j) = (\varphi(g)\varphi(h))(j)$$

---

<sup>1</sup>Nella topologia prodotto vale il sorprendente teorema di Tychonoff che asserisce che il prodotto di un numero arbitrario di spazi topologici compatti è uno spazio topologico compatto.

e  $\pi_j \circ \varphi = \varphi_j$ .

Il concetto di coprodotto si ottiene invertendo tutte le frecce nella definizione di prodotto come segue. Sia  $\{X_j\}_{j \in J}$  una famiglia di oggetti di una categoria  $\mathcal{C}$ . Un oggetto  $S$  di  $\mathcal{C}$  con un insieme di morfismi  $i_j : X_j \rightarrow S$ , per ogni  $j \in J$ , chiamati **inclusioni**, è detto un **coprodotto** ovvero **coprodotto categoriale** degli oggetti  $\{X_j\}_{j \in J}$  se è soddisfatta la seguente **proprietà universale**: dati un qualunque oggetto  $Y$  di  $\mathcal{C}$  e una famiglia di morfismi  $\varphi_j : X_j \rightarrow Y$ , esiste un unico morfismo  $\varphi : S \rightarrow Y$  che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ i_j \uparrow & \searrow \varphi & \\ X_j & \xrightarrow{\varphi_j} & Y \end{array}$$

In una data categoria  $\mathcal{C}$  non è detto che un coprodotto esista. Se però esiste esso è unico come mostra la seguente:

**Proposizione 5.3.5** *Sia  $\mathcal{C}$  una categoria,  $\{X_j\}_{j \in J}$  una famiglia di oggetti. Se  $(S, i_j)$  e  $(S', i'_j)$  sono coprodotti degli oggetti  $\{X_j\}_{j \in J}$  allora esiste un isomorfismo  $\varphi : S' \rightarrow S$  che rispetta le inclusioni cioè  $\varphi \circ i'_j = i_j$ .*

**Dimostrazione:** Per la proprietà universale del coprodotto esistono due morfismi  $\varphi : S' \rightarrow S$  e  $\varphi' : S \rightarrow S'$  che rendono commutativi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} S' & & S \\ i'_j \uparrow & \searrow \varphi & \uparrow i_j \\ X_j & \xrightarrow{i_j} & S \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S & & S' \\ i_j \uparrow & \searrow \varphi' & \uparrow i'_j \\ X_j & \xrightarrow{i'_j} & S' \end{array}$$

Si ottengono quindi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} S & & S' \\ i_j \uparrow & \searrow \varphi \circ \varphi' & \uparrow i'_j \\ X_j & \xrightarrow{i_j} & S \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S' & & S \\ i'_j \uparrow & \searrow \varphi' \circ \varphi & \uparrow i_j \\ X_j & \xrightarrow{i'_j} & S' \end{array}$$

Segue allora dall'unicità dei due coprodotti categoriali che  $\varphi \circ \varphi' = \text{id}_S$  e  $\varphi' \circ \varphi = \text{id}_{S'}$ . Quindi  $\varphi$  (risp.  $\varphi'$ ) è l'unico isomorfismo che soddisfa  $\varphi \circ i'_j = i_j$  (risp.  $\varphi' \circ i_j = i'_j$ ) per ogni  $j \in J$ .  $\square$

**Esempio 5.3.6** (coprodotto categoriale in  $\mathcal{I}ns$ ) Consideriamo l'unione disgiunta  $S = \cup_{j \in J} (X_j \times \{j\})$  di una famiglia di insiemi  $\{X_j\}_{j \in J}$  e le inclusioni naturali

$$i_j : X_j \rightarrow S, \quad x \mapsto i_j(x) := (x, j).$$



Allora la coppia  $(S, i_j)$  è il coprodotto categoriale degli oggetti  $\{X_j\}_{j \in J}$  nella categoria  $\mathcal{I}ns$ . Infatti dato un insieme qualunque  $Y$  e una famiglia di applicazioni  $\varphi_j : X_j \rightarrow Y$  allora l'applicazione  $\varphi : S \rightarrow Y$  che a  $s = (x, j) \in X_j \times \{j\} \subseteq S$  associa  $\varphi(s) = \varphi_j(x)$  è tale che  $\varphi \circ i_j = \varphi_j$ , per ogni  $j \in J$ .

**Esempio 5.3.7** (coprodotto categoriale in  $\mathcal{T}op$ ) Sia  $\{X_j\}$  una famiglia di spazi topologici. Consideriamo la **topologia dell'unione disgiunta** sull'insieme  $S = \bigcup_{j \in J} (X_j \times \{j\})$  definita come quella topologia dove un insieme  $U \subseteq S$  è aperto se e solo se  $U \cap X_j$  è aperto in  $X_j$  per ogni  $j \in J$ . Si verifica facilmente che le inclusioni naturali  $i_j : X_j \rightarrow S, x \mapsto (x, j)$  sono continue rispetto a questa topologia e che la coppia  $(S, i_j)$  è il coprodotto categoriale degli oggetti  $\{X_j\}_{j \in J}$  nella categoria  $\mathcal{T}op$ . Infatti, dato uno spazio topologico  $Y$  e una famiglia di applicazioni continue  $\varphi_j : X_j \rightarrow Y$ , allora l'applicazione  $\varphi : S \rightarrow Y : (x, j) \mapsto \varphi_j(x)$  è continua e soddisfa  $\varphi \circ i_j = \varphi_j$  (cfr. Esercizio 5.6).

## 5.4 Prodotto categoriale in $\mathcal{G}$ : il prodotto libero di gruppi

Come abbiamo visto nell'Esempio 5.3.4 data una famiglia  $\{G_j\}_{j \in J}$  di gruppi possiamo definire il loro prodotto diretto  $\prod_{j \in J} G_j$  che rappresenta il prodotto categoriale in  $\mathcal{G}$ . Inoltre per ogni  $j$  il gruppo  $G_j$  è (isomorfo a) un sottogruppo di  $\prod_{j \in J} G_j$  e  $G_k$  e  $G_l$ , per  $k \neq l$ , commutano. In questo paragrafo definiremo un prodotto più complicato, chiamato prodotto libero, denotato  $*_{j \in J} G_j$ , tra i gruppi  $G_j$  che corrisponde al coprodotto categoriale in  $\mathcal{G}$  e dove per ogni  $k$  il gruppo  $G_k$  è (isomorfo a) un sottogruppo di  $*_{j \in J} G_j$ ; inoltre, per  $k \neq l$ ,  $G_k$  e  $G_l$  **non** commutano.

Un **parola** in  $\{G_j\}_{j \in J}$  è una stringa di lunghezza  $m$ ,  $m \geq 0$ , di elementi dell'unione disgiunta  $\bigcup_{j \in J} (G_j \times \{j\})$ . Equivalentemente una parola è una  $m$ -upla della forma  $(g_1, \dots, g_m)$  dove ogni elemento  $g_i$  appartiene a un qualche  $G_j$ .

**Attenzione:** ricordiamo che un elemento dell'unione disgiunta  $\bigcup_{j \in J} (G_j \times \{j\})$  è della forma  $(g, j)$ , dove  $j$  è un indice per ricordarci da quale gruppo proviene  $g$ . Nella nostra notazione stiamo denotando l'elemento  $(g, j)$  con la lettera  $g$  ma bisogna tenere a mente che gruppi corrispondenti a indici diversi si devono considerare diversi anche se i gruppi sono gli stessi.

La stringa di lunghezza zero, chiamata la **parola vuota** sarà denotata come  $()$ . Sia  $\mathcal{W}$  l'insieme di tutte le parole in  $\bigcup_{j \in J} (G_j \times \{j\})$ . Sia  $1_j$  l'elemento neutro

in  $G_j$ . Definiamo un prodotto in  $\mathcal{W}$  per giustapposizione:

$$(g_1, \dots, g_m)(h_1, \dots, h_n) = (g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n).$$

Chiaramente questo prodotto è associativo e la parola vuota è l'elemento neutro sinistro e destro. D'altra parte  $\mathcal{W}$  con questo prodotto non è un gruppo. Per superare questo problema definiamo una relazione d'equivalenza sull'insieme delle parole come segue. Una **riduzione elementare** è un'operazione di uno dei due tipi che seguono:

1.  $(g_1, \dots, g_i, g_{i+1}, \dots, g_m) \mapsto (g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_m)$  se  $g_i, g_{i+1}$  appartengono a qualche  $G_k$ ;
2.  $(g_1, \dots, g_{i-1}, 1_j, g_{i+1}, \dots, g_m) \mapsto (g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_m)$ .

La prima operazione moltiplica due entrate consecutive se appartengono allo stesso gruppo; la seconda operazione cancella un elemento identità che appare in una data parola.

Diremo che due parole  $W, W' \in \mathcal{W}$  sono equivalenti e scriveremo  $W \sim W'$  se  $W$  può essere ottenuta da  $W'$  attraverso una successione finita di operazioni elementari o delle loro inverse. E' facile vedere che  $\sim$  definisce una relazione d'equivalenza su  $\mathcal{W}$ . L'insieme delle classi di equivalenza è chiamato il **prodotto libero** dei gruppi  $\{G_j\}_{j \in J}$ , e verrà denotato con  $*_{j \in J} G_j$  e se  $J$  è finito,  $J = \{1, \dots, n\}$ , verrà denotato con  $G_1 * \dots * G_n$ . Le classe d'equivalenza di una parola  $V \in \mathcal{W}$  verrà denotata con  $V$ .

**Teorema 5.4.1** *Data una famiglia di gruppi  $\{G_j\}_{j \in J}$  il loro prodotto libero  $*_{j \in J} G_j$  è un gruppo rispetto al prodotto indotto dalla giustapposizione di parole. In altre parole se  $[V]$  e  $[W]$  sono due elementi in  $*_{j \in J} G_j$ , allora  $[V][W] = [VW]$  definisce la struttura di gruppo in  $*_{j \in J} G_j$ .*

**Dimostrazione:** La prima cosa da verificare è che il prodotto in  $*_{j \in J} G_j$  rispetta la relazione d'equivalenza, cioè se  $V \sim V'$  e  $W \sim W'$  allora  $VW \sim V'W'$ . Osserviamo che se la parola  $V'$  si ottiene da  $V$  con una sola riduzione elementare allora  $V'W$  si ottiene da  $VW$  con una sola riduzione elementare (che agisce su  $V$  e lascia invariata  $W$ ). Quindi per induzione sul numero di operazioni elementari si ottiene che se  $V \sim V'$  allora

$$VW \sim V'W.$$

Analogamente se la parola  $W'$  si ottiene da  $W$  con una singola riduzione elementare allora  $V'W'$  si ottiene da  $V'W$  con una sola riduzione elementare. Quindi,

come prima, per induzione sul numero di operazioni elementari si ottiene che se  $W \sim W'$ , allora

$$V'W \sim V'W'.$$

Segue che se  $V \sim V'$ ,  $W \sim W'$ , allora

$$VW \sim V'W \sim V'W'$$

che è quello che volevamo dimostrare.

L'associatività del prodotto segue dal fatto che l'associatività è già associativa quando si effettua la giustapposizione tra parole. La classe d'equivalenza della parola vuota  $()$  è chiaramente l'elemento neutro (sinistro e destro per quest'operazione). Infine, il fatto che

$$(g_1, \dots, g_m)(g_m^{-1}, \dots, g_1^{-1}) = () = (g_m^{-1}, \dots, g_1^{-1})(g_1, \dots, g_m)$$

mostra che la classe d'equivalenza della parola  $(g_m^{-1}, \dots, g_1^{-1})$  è l'inversa della classe d'equivalenza della parola  $(g_1, \dots, g_m)$ .  $\square$

Vogliamo ora vedere che ogni  $G_k$  è (isomorfo ad) un sottogruppo di  $*_{j \in J} G_j$ . Per fare questo (e per altri motivi) vogliamo descrivere un modo per trovare un unico rappresentante di una data classe di equivalenza in  $*_{j \in J} G_j$ . Diremo che una parola  $(g_1, \dots, g_m)$  è **ridotta** se non è possibile “accorciarla” tramite operazioni elementari, cioè nessun elemento  $g_i$  è l'identità e ogni coppia di elementi consecutivi  $g_i, g_{i+1}$  non appartiene allo stesso gruppo. Ogni parola è equivalente ad un parola ridotta: basta applicare una successione finita di operazioni elementari fino a quando la parola non è ridotta. Inoltre si può dimostrare (noi non lo faremo) che la parola ridotta che rappresenta una data classe di equivalenza è unica, come espresso dal seguente:

**Teorema 5.4.2** *Ogni elemento del gruppo libero  $*_{j \in J} G_j$  è rappresentato da un'unica parola ridotta.*

**Osservazione 5.4.3** La dimostrazione del Teorema 5.4.2, pur non essendo particolarmente complicata non aggiunge niente all'intuizione della definizione di prodotto libero. Questo è uno dei motivi per i quali è stata omessa.

Per ogni  $k \in J$ , definiamo l'**inclusione canonica**  $i_k : G_k \rightarrow *_{j \in J} G_j$ ,  $g \mapsto [(g)]$  che associa a  $g \in G_k$  la classe d'equivalenza della parola  $(g)$  che lo rappresenta.

**Corollario 5.4.4** *L'inclusione canonica  $i_k : G_k \rightarrow *_{j \in J} G_j$  è un omomorfismo iniettivo di gruppi.*

**Dimostrazione:** Siano  $g_1, g_2 \in G_k$ . Allora

$$i_k(g_1 g_2) = [(g_1 g_2)] = [(g_1)(g_2)] = [(g_1)][(g_2)] = i_k(g_1) i_k(g_2),$$

dove la seconda uguaglianza segue da  $(g_1 g_2) \sim (g_1)(g_2)$  e la terza dal fatto che il prodotto libero è compatibile con la giustapposizione di parole (cfr. Teorema 5.4.1). Questo mostra che  $i_k$  è un omomorfismo di gruppi. Mostriamo che  $i_k$  è iniettiva: sia  $g \in G_k$ ,  $g \neq 1_k$ , allora  $i_k(g) = [(g)]$  è la classe d'equivalenza della parola ridotta  $(g)$  e  $i_k(1_k) = [()]$  è la classe d'equivalenza della parola (ridotta) vuota. Essendo  $g \neq 1_k$  segue dal Teorema 5.4.2 che  $i_k(g) \neq i_k(1_k)$ .  $\square$

Quindi ogni  $G_k$  è isomorfo ad un sottogruppo (che indicheremo ancora con  $G_k$ ) del prodotto libero  $*_{j \in J} G_j$ . In questo caso due sottogruppi non banali  $G_k$  e  $G_l$  di  $*_{j \in J} G_j$  non commutano tra loro (cfr. Esercizio 5.7).

**Notazione:** Denoteremo la classe d'equivalenza  $[(g)]$  della parola  $(g)$  semplicemente con  $g$  e la classe d'equivalenza  $[(g_1, g_2, \dots, g_m)]$  della parola  $(g_1, g_2, \dots, g_m)$  con  $g_1 g_2 \cdots g_m$ . Inoltre, il prodotto tra due classi  $g_1 g_2 \cdots g_m$  e  $h_1 h_2 \cdots h_n$  si denoterà semplicemente con la giustapposizione  $g_1 g_2 \cdots g_m h_1 h_2 \cdots h_n$ .

**Teorema 5.4.5** *Sia  $\{G_j\}_{j \in J}$  una famiglia di gruppi. Allora il prodotto libero  $*_{j \in J} G_j$  insieme alle inclusioni canoniche  $i_k : G_k \rightarrow *_{j \in J} G_j$  è il coprodotto nella categoria  $\mathcal{G}$ .*

**Dimostrazione:** dobbiamo dimostrare che è soddisfatta la proprietà universale del coprodotto e cioè che per ogni gruppo  $G$  e per ogni famiglia di omomorfismi  $\varphi_k : G_k \rightarrow G$  esiste un unico omomorfismo  $\varphi : *_{j \in J} G_j \rightarrow G$  tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} & *_{j \in J} G_j & \\ i_k \uparrow & \searrow \varphi & \\ G_k & \xrightarrow{\varphi_k} & G \end{array}$$

Se una tale  $\varphi$  esiste è unica. Infatti dalla commutatività del diagramma si ha  $\varphi \circ i_k = \varphi_k$ . Allora

$$\varphi(g) = \varphi_k(g), \quad \forall g \in G_k. \quad (5.3)$$

dove stiamo identificando  $G_k$  con la sua immagine tramite  $i_k$ . Il fatto che  $\varphi$  sia un omomorfismo ci dice che

$$\varphi(g_1 \cdots g_m) = \varphi(g_1) \cdots \varphi(g_m). \quad (5.4)$$

Le condizioni (5.3) e (5.4) implicano che  $\varphi$  è univocamente determinata.

Dimostriamo ora l'esistenza di  $\varphi$ . Data  $g_1 \cdots g_m \in \ast_{j \in J} G_j$  definiamo  $\varphi : \ast_{j \in J} G_j \rightarrow G$  usando le (5.3) e (5.4). Bisogna allora verificare che  $\varphi$  è ben definita sulle classi d'equivalenza ossia che il valore di  $\varphi$  non dipende dalle riduzioni elementari (il fatto che sia un omomorfismo che rende commutativo il diagramma segue da come  $\varphi$  è definita). Rispetto alla prima riduzione elementare dobbiamo verificare che se  $g_i$  e  $g_{i+1}$  appartengono allo stesso gruppo  $G_k$  allora  $\varphi(g_i g_{i+1}) = \varphi(g_i) \varphi(g_{i+1})$ . Infatti

$$\varphi(g_i g_{i+1}) = \varphi_k(g_i g_{i+1}) = \varphi_k(g_i) \varphi_k(g_{i+1}) = \varphi(g_i) \varphi(g_{i+1}).$$

Inoltre se  $1_k$  denota l'elemento neutro in  $G_k$  e  $1_G$  l'elemento neutro di  $G$  allora

$$\varphi(1_k) = \varphi_k(1_k) = 1_G$$

la quale mostra che  $\varphi$  non dipende da riduzioni elementari del secondo tipo e conclude la dimostrazione del teorema.  $\square$

## 5.5 Esercizi

**Esercizio 5.1** Dimostrare che le categorie descritte negli Esempi 1-11 del Paragrafo 5.1 sono effettivamente categorie.

**Esercizio 5.2** Dimostrare che i funtori descritti negli Esempi 1-8 del Paragrafo 5.2 sono effettivamente funtori.

**Esercizio 5.3** Dimostrare che un funtore (covariante o controvariante) da una categoria  $\mathcal{C}$  ad una categoria  $\mathcal{D}$  porta gli isomorfismi di  $\mathcal{C}$  negli isomorfismi di  $\mathcal{D}$ . (Suggerimento: si imiti la dimostrazione del Teorema 2.3.1).

**Esercizio 5.4** Dimostrare che  $\mathcal{K}$  è una sottocategoria non piena di  $\mathcal{A}n_{Ab}$ .

**Esercizio 5.5** Dimostrare che l'applicazione  $\varphi : Y \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$  dell'Esempio 5.3.3 è continua se e solo se le sue componenti  $\varphi_j : Y \rightarrow X_j$  sono continue.

**Esercizio 5.6** Dimostrare che la topologia dell'unione disgiunta (cfr. Esempio 5.3.7) è effettivamente una topologia. Dimostrare inoltre che tale topologia è la più fine tra tutte le topologie sull'insieme  $S = \cup_{j \in J} (X_j \times \{j\})$  rispetto alle quali le inclusioni naturali  $i_j : X_j \rightarrow S, x_j \mapsto (x_j, j)$  sono continue. Dimostrare che  $(S, i_j)$  è il coprodotto categoriale degli oggetti  $\{X_j\}_{j \in J}$  nella categoria  $\mathcal{Top}$ .

**Esercizio 5.7** Dimostrare che il prodotto libero di due o più gruppi non banali non è abeliano.



# Capitolo 6

## Gruppi liberi, presentazioni e abelianizzazioni

### 6.1 Gruppi liberi

Sia  $G$  un gruppo e  $S \subseteq G$  un suo sottoinsieme. Diremo che  $S$  **genera**  $G$  e gli elementi di  $S$  verranno chiamati **generatori** di  $G$ , se ogni elemento di  $G$  può essere scritto come prodotto di un numero finito di elementi di  $S$  e dei loro inversi. In altre parole se  $S \subseteq G$  genera  $G$  allora ogni elemento di  $G$  può essere scritto come prodotto finito di potenze intere di elementi di  $S$ . Diremo che  $G$  è **finitamente generato** se esiste un insieme finito  $S$  che genera  $G$ . Chiaramente ogni gruppo ha un insieme di generatori dati dal gruppo stesso. Solitamente si cerca un numero di generatori che sia minimale. Un esempio semplice ma importante è quello di gruppo ciclico che ha precisamente un generatore (e quindi è finitamente generato). Segue dai corsi di algebra che un gruppo ciclico è isomorfo a  $\mathbb{Z}$  (gruppo ciclico infinito) oppure a  $\mathbb{Z}_n$  per qualche  $n$  (gruppo ciclico finito). Dato un qualunque simbolo  $x$  possiamo formare il gruppo ciclico infinito generato da  $x$  (e quindi isomorfo  $\mathbb{Z}$ ) e denotato con  $F(x)$ . Gli elementi di  $F(x)$  sono le potenze intere di  $x$  con la moltiplicazione  $x^m x^n = x^{m+n}$  ed elemento neutro  $x^0$ .

I gruppi abeliani finitamente generati sono classificati.

**Teorema 6.1.1** (*classificazione dei gruppi abeliani finitamente generati*) Sia  $G$  un gruppo abeliano finitamente generato. Allora  $G$  è isomorfo al prodotto diretto:

$$\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{r_k}},$$

dove i  $p_j$  sono numeri primi non necessariamente distinti <sup>1</sup>. Inoltre il prodotto

---

<sup>1</sup>Per esempio  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  non è isomorfo a  $\mathbb{Z}_4$ . Infatti  $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  se e solo se  $m$  e  $n$  sono primi tra loro.

diretto è unico a meno di permutazione dei fattori e quindi il numero dei fattori  $\mathbb{Z}$  è unico e le potenze  $(p_j)^{r_j}$  sono uniche.

**Dimostrazione:** Lo studente interessato potrà trovare una dimostrazione in [1, Cap II, par. 11]).  $\square$

Il numero dei fattori  $\mathbb{Z}$  che appaiono nel teorema è chiamato il **rango** di  $G$  e il gruppo  $\mathbb{Z}_{(p_1)^{r_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{(p_k)^{r_k}}$ , il **sottogruppo di torsione** di  $G$ .

Sia  $S$  un insieme. Definiamo il **gruppo libero sull'insieme**  $S$ , denotato con  $F(S)$ , come il prodotto libero di tutti i gruppi ciclici infiniti generati da elementi di  $S$ , cioè:  $F(S) = *_{x \in S} F(x)$ . Chiaramente se  $S$  è in bigezione con  $S'$  allora  $F(S)$  è isomorfo a  $F(S')$ . Osserviamo che esiste un'inclusione naturale  $i : S \rightarrow F(S)$  che invia ogni  $x \in S$  nella parola  $x \in F(S)$  e quindi possiamo pensare  $S$  come un sottoinsieme di  $F(S)$ . Per il Teorema 5.4.2, ogni elemento di  $F(S)$  può essere scritto come una parola ridotta cioè come:

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m},$$

dove gli  $x_j$  sono elementi di  $S$ ,  $x_j \neq x_{j+1}$  per ogni  $j$  e  $n_j$  sono numeri interi. La moltiplicazione nel gruppo  $F(S)$  si ottiene semplicemente per giustapposizione e sostituendo potenze consecutive dello stesso  $x_j$  come  $x_j^m x_j^n = x_j^{m+n}$ . Nel caso che  $S = \{x_1, \dots, x_m\}$  sia un insieme finito denoteremo il gruppo libero generato da  $S$  con il simbolo  $F(x_1, \dots, x_m) \cong \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$  ( $m$  fattori). Gli  $x_j$  si chiamano i **generatori liberi** del gruppo  $S = \{x_1, \dots, x_m\}$ .

**Osservazione 6.1.2** Esistono gruppi che non sono liberi. Ad esempio ogni gruppo finito non è libero in quanto ogni gruppo libero ha un numero infinito di elementi.

La seguente proposizione mostra che il gruppo libero  $F(S)$  soddisfa una proprietà universale.

**Proposizione 6.1.3** (*proprietà universale dei gruppi liberi*) Sia  $S$  un'insieme. Il gruppo libero  $F(S)$  soddisfa la seguente proprietà universale: per ogni gruppo  $G$  e per ogni applicazione  $\varphi : S \rightarrow G$  esiste un unico omomorfismo  $\tilde{\varphi} : F(S) \rightarrow G$  che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} F(S) & & \\ \uparrow i & \searrow \tilde{\varphi} & \\ S & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$



**Dimostrazione:** Sia  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m} \in F(S)$  una parola non necessariamente ridotta. Definiamo

$$\tilde{\varphi}(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}) = \varphi(x_1)^{n_1} \varphi(x_2)^{n_2} \cdots \varphi(x_m)^{n_m}. \quad (6.1)$$

L'applicazione  $\tilde{\varphi}$  è ben definita. Infatti:

$$\tilde{\varphi}(x_j^{m+n}) = \varphi(x_j)^{m+n} = \varphi(x_j)^m \varphi(x_j)^n = \tilde{\varphi}(x_j^m) \tilde{\varphi}(x_j^n)$$

Inoltre, per costruzione,  $\tilde{\varphi}$  è l'unico omomorfismo di gruppi tale che  $\varphi = \tilde{\varphi} \circ i$ .  $\square$

Il gruppo libero  $F(S)$  su un insieme  $S$  è caratterizzato dalla precedente proprietà universale.

**Proposizione 6.1.4** (*caratterizzazione dei gruppi liberi*) Sia  $S$  un insieme,  $H$  un gruppo e  $j : S \rightarrow H$  un'applicazione tale che per ogni gruppo  $G$  e per ogni applicazione  $\psi : S \rightarrow G$  esiste un unico omomorfismo  $\tilde{\psi} : H \rightarrow G$  che rende commutativo il seguente diagramma.

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ j \uparrow & \searrow \tilde{\psi} & \\ S & \xrightarrow{\psi} & G \end{array}$$

Allora esiste un isomorfismo  $\tilde{j} : F(S) \rightarrow H$  tale che  $\tilde{j} \circ i = j$ .

**Dimostrazione:** Per la proprietà universale di  $F(S)$  e per le ipotesi esistono due morfismi  $\tilde{i} : H \rightarrow F(S)$  e  $\tilde{j} : F(S) \rightarrow H$  che rendono commutativi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} H & & F(S) \\ j \uparrow & \searrow \tilde{i} & \uparrow i \\ S & \xrightarrow{i} & F(S) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(S) & & H \\ i \uparrow & \searrow \tilde{j} & \xrightarrow{j} S \end{array}$$

Si ottengono quindi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} H & & F(S) \\ i \uparrow & \searrow \tilde{i} \circ \tilde{j} & \uparrow j \\ S & \xrightarrow{i} & H \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(S) & & F(S) \\ j \uparrow & \searrow \tilde{j} \circ \tilde{i} & \xrightarrow{j} S \end{array}$$

Segue allora dall'unicità che  $\tilde{i} \circ \tilde{j} = \text{id}_H$  e  $\tilde{j} \circ \tilde{i} = \text{id}_{F(S)}$ . Quindi  $\tilde{j}$  (risp.  $\tilde{i}$ ) è l'unico isomorfismo che soddisfa  $\tilde{j} \circ i = j$  (risp.  $\tilde{i} \circ j = i$ ).  $\square$

## 6.2 Presentazione di gruppi

A volte è utile descrivere un dato gruppo specificando un insieme di suoi “generatori” soggetti ad alcune “relazioni” che ci dicono come moltiplicare i generatori tra loro. Per esempio il gruppo ciclico di ordine  $n$  generato da  $x$  può essere descritto come il gruppo generato da  $x$  con la relazione  $x^n = 1$ . Tutte le altre relazioni “seguono” da questa, per esempio  $x^{2n} = 1$ . Oppure il gruppo  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  può essere descritto da due generatori  $x$  e  $y$  con la relazione  $xy = yx$ . Il gruppo  $F(x, y) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  può essere descritto dai generatori  $x, y$  senza relazioni. In effetti il fatto che alcune relazioni “seguano” da altre può essere reso rigoroso tramite il concetto di presentazione di gruppo. Per definirla abbiamo bisogno del concetto di chiusura normale. Sia  $G$  un gruppo e  $R$  un suo sottoinsieme. La **chiusura normale**  $N(R)$  di  $R$  in  $G$  è l’intersezione di tutti i sottogruppi normali di  $G$  che contengono  $R$  o, equivalentemente, come il più piccolo sottogruppo normale di  $G$  che contiene  $R$ .

Una descrizione equivalente di  $N(R)$  è descritta dal risultato seguente.

**Proposizione 6.2.1** *Sia  $G$  un gruppo e  $R$  un suo sottoinsieme. Allora  $N(R)$  è generato da tutti i coniugati di elementi di  $R$ .*

**Dimostrazione:** Sia  $N'$  il sottogruppo di  $G$  generato da tutti i coniugati di elementi di  $R$  (ossia elementi della forma  $grg^{-1}$  oppure  $gr^{-1}g^{-1}$  con  $g \in G$  e  $r \in R$ ). Vogliamo far vedere che  $N' = N(R)$ . Chiaramente  $N' \subseteq N(R)$  in quanto  $N(R)$  è normale in  $G$  e contiene  $R$ . Resta da far vedere che  $N'$  è normale in  $G$  e cioè che  $gn'g^{-1}$  appartiene a  $N'$  per ogni  $g \in G$  e  $n' \in N'$ . Ogni  $n' \in N'$  è il prodotto  $n' = g_1x_1g_1^{-1}g_2x_2g_2^{-1} \cdots g_mx_mg_m^{-1}$ ,  $g_j \in G$  e  $x_j \in R$  oppure  $x_j \in R^{-1} = \{r^{-1} \mid r \in R\}$ . Segue che  $gn'g^{-1}$  è uguale a:

$$g(g_1x_1g_1^{-1}g_2x_2g_2^{-1} \cdots g_mx_mg_m^{-1})g^{-1} = gg_1x_1(gg_1)^{-1}gg_2x_2(gg_2)^{-1} \cdots gg_mx_m(gg_m)^{-1}$$

che è ancora un elemento di  $N'$ . □

Sia ora  $S$  un insieme. Sia  $R$  un sottoinsieme del gruppo libero  $F(S)$  sull’insieme  $S$ . Consideriamo il gruppo  $\langle S \mid R \rangle$  definito come il quoziente

$$\langle S \mid R \rangle = F(S)/N(R),$$

dove  $N(R)$  è la chiusura normale di  $S$  in  $F(S)$ . La coppia  $(S, R)$  è detta una **presentazione** del gruppo  $\langle S \mid R \rangle$ , gli elementi di  $S$  sono chiamati i **generatori** e gli elementi di  $R$  le **relazioni** della presentazione. Ovviamente se  $R = \emptyset$  allora  $\langle S \mid R \rangle = \langle S \mid \emptyset \rangle = F(S)$ .

Diremo che un gruppo  $G$  è **presentato** da una coppia  $(S, R)$  con  $R \subseteq F(S)$ , se  $G$  è isomorfo al gruppo  $\langle S \mid R \rangle$ . Il gruppo  $\langle S \mid R \rangle$  si può pensare come il più grande gruppo quoziente di  $F(S)$  dove gli elementi di  $R$  si identificano con l'identità. Osserviamo che ogni gruppo  $G$  ammette una presentazione. Infatti gli elementi di  $G$  chiaramente generano  $G$ . Inoltre, per la proprietà universale dei gruppi liberi, l'identità di  $G$  si estende in modo unico ad un omomorfismo suriettivo  $\tilde{\varphi} : F(G) \rightarrow G$ . Se  $R = N(R)$  denota il nucleo di  $\tilde{\varphi}$  allora per il primo teorema di isomorfismo

$$G \cong F(G)/N(R) = \langle G \mid R \rangle.$$

Ovviamente questa presentazione non è molto efficiente: ci piacerebbe avere delle presentazioni con il minor numero di generatori e relazioni. Se un gruppo  $G$  ammette una presentazione  $\langle S \mid R \rangle$  dove  $S$  e  $R$  sono finiti, diremo che  $G$  è **finitamente presentato**. In questo caso scriveremo la presentazione come  $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ . Useremo anche la notazione

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1 = q_1, \dots, r_m = q_m \rangle$$

per indicare  $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1 q_1^{-1}, \dots, r_m q_m^{-1} \rangle$ .

**Esempio 6.2.2** Il gruppo libero  $F(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$  ( $n$  fattori) ha una presentazione

$$F(x_1, \dots, x_n) \cong \langle x_1, \dots, x_n \mid \emptyset \rangle.$$

**Esempio 6.2.3** Il gruppo  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ha una presentazione

$$\langle x, y \mid xy = yx \rangle = \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle.$$

Diamo una dimostrazione di questo fatto. Osserviamo che i simboli  $x$  e  $y$  sono i generatori del gruppo libero  $F(x, y)$  oppure possono essere visti nel quoziente  $\langle x, y \mid xy = yx \rangle = F(x, y)/N(R)$  dove  $R$  è costituito da una sola parola  $R = \{xyx^{-1}y^{-1}\}$ . Usando la relazione  $R$  si deduce facilmente (con un ragionamento induttivo) che il gruppo  $F(x, y)/N(R)$  è abeliano. Consideriamo l'applicazione  $\varphi : \{x, y\} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  tale che  $\varphi(x) = (1, 0)$  e  $\varphi(y) = (0, 1)$ . Per la proprietà universale dei gruppi liberi esiste un unico omomorfismo  $\tilde{\varphi} : F(x, y) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  dato da (cfr. (6.1)):

$$\tilde{\varphi}(x^{n_1}y^{m_1} \dots x^{n_k}y^{m_k}) = n_1\varphi(x) + m_1\varphi(y) + \dots + n_k\varphi(x) + m_k\varphi(y) =$$

$$(n_1, 0) + (0, m_1) + \dots + (n_k, 0) + (0, m_k) = (n_1 + \dots + n_k, m_1 + \dots + m_k)$$

Segue che il  $R \subseteq \text{Ker } \tilde{\varphi}$  e quindi  $N(R) \subseteq \text{Ker } \tilde{\varphi}$ . Resta così definito un omomorfismo

$$\tilde{\Phi} : F(x, y)/N(R) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad x^{n_1}y^{m_1} \cdots x^{n_k}y^{m_k} \mapsto (n_1 + \cdots + n_k, m_1 + \cdots + m_k),$$

dove questa volta  $x^{n_1}y^{m_1} \cdots x^{n_k}y^{m_k}$  denota la classe d'equivalenza nel quoziente  $F(x, y)/N(R)$ . Definiamo un'applicazione

$$\tilde{\Psi} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow F(x, y)/N(R), \quad (m, n) \mapsto x^m y^n$$

(anche qui  $x^m y^n$  denota la classe d'equivalenza nel quoziente  $F(x, y)/N(R)$ ). Il fatto che  $F(x, y)/N(R)$  sia abeliano implica che  $\tilde{\Psi}$  è un omomorfismo. Inoltre è immediato verificare che  $\tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi} = \text{id}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$  e  $(\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi}) = \text{id}_{F(x, y)/N(R)}$ , le quali mostrano che  $\tilde{\Phi}$  è un isomorfismo di gruppi con inversa  $\tilde{\Psi}$ .

**Esempio 6.2.4** Il gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_n$  ha una presentazione  $\mathbb{Z}_n \cong \langle x \mid x^n = 1 \rangle$ . La verifica è lasciata allo studente.

**Esempio 6.2.5** Il gruppo  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$  ha una presentazione

$$\langle x, y \mid x^n = 1, y^m = 1, xy = yx \rangle$$

la verifica è lasciata allo studente.

**Esempio 6.2.6** I due gruppi  $G = \langle a, b \mid baba^{-1} \rangle$  e  $H = \langle a, c \mid a^2c^2 \rangle$  sono isomorfi. Sia

$$\varphi : \{a, b\} \rightarrow H$$

definita da  $\varphi(a) = a$  e  $\varphi(b) = ca$ , dove nei secondi membri  $a$  e  $ca$  denotano le classi di  $a$  e  $ca$  (elementi di  $F(a, c)$ ) in  $H = F(a, c)/N(R_2)$ ,  $R_2 = \{a^2c^2\}$ . Per la proprietà universale dei gruppi liberi esiste un unico omomorfismo  $\tilde{\varphi} : F(a, b) \rightarrow H$  tale che  $\tilde{\varphi}(a) = \varphi(a) = a$  e  $\tilde{\varphi}(b) = \varphi(b) = ca$ . Osserviamo che  $baba^{-1} \in \text{Ker } \tilde{\varphi}$ . Infatti, usando la (6.1),

$$\tilde{\varphi}(baba^{-1}) = \varphi(b)\varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)^{-1} = caacaa^{-1} = ca^2c = c(a^2c^2)c^{-1} = cc^{-1} = 1.$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la relazione  $a^2c^2 = 1$  valida in  $H$ . Quindi, essendo  $G = F(a, b)/N(R_1)$ ,  $R_1 = \{baba^{-1}\}$  allora  $N(R_1) \subseteq \text{Ker } \tilde{\varphi}$  e quindi resta definito un unico omomorfismo  $\tilde{\Phi} : G \rightarrow H$  tale che  $\tilde{\Phi}(a) = a$  e  $\tilde{\Phi}(b) = ca$ , dove  $a$  e  $b$  al primo membro denotano le classi di  $a$  e  $b$  in  $G = F(a, b)/N(R_1)$ . Per costruire l'inversa di  $\tilde{\Phi}$ , sia

$$\psi : \{a, c\} \rightarrow G$$

definita da  $\psi(a) = a$  e  $\psi(c) = ba^{-1}$  (dove nei secondi membri  $a$  e  $ba^{-1}$  rappresentano le classi di  $a$  e  $ba^{-1}$  in  $G$ ). Per la proprietà universale dei gruppi liberi esiste un unico omomorfismo  $\tilde{\psi} : F(a, c) \rightarrow G$  tale che  $\tilde{\psi}(a) = \psi(a) = a$  e  $\tilde{\psi}(c) = \psi(c) = ba^{-1}$ . Osserviamo che  $a^2c^2 \in \text{Ker } \tilde{\psi}$ . Infatti, sempre per la (6.1),

$$\tilde{\psi}(a^2c^2) = \psi(a)^2\psi(c)^2 = a^2ba^{-1}ba^{-1} = ab^{-1}(baba^{-1})ba^{-1} = ab^{-1}ba^{-1} = 1.$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la relazione  $baba^{-1} = 1$  valida in  $G$ . Quindi,  $N(R_2) \subseteq \text{Ker } \tilde{\psi}$  e resta definito un unico omomorfismo  $\tilde{\Psi} : H \rightarrow G$  tale che  $\tilde{\Psi}(a) = a$  e  $\tilde{\Psi}(c) = ba^{-1}$  (dove  $a$  e  $c$  al primo membro rappresentano le classi di  $a$  e  $c$  in  $H$ ). Osserviamo, infine, che  $(\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi})(a) = a$ ,  $(\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi})(b) = b$ ,  $(\tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi})(a) = a$ ,  $(\tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi})(c) = c$ , le quali mostrano che  $\tilde{\Phi}$  è un isomorfismo con inversa  $\tilde{\Psi}$ .

Concludiamo questo paragrafo osservando che, nonostante le presentazioni finite di un gruppo forniscano un modo semplice e concreto per il suo studio, molte delle questioni basilari riguardanti il gruppo in questione non sono facilmente accessibili. Intorno al 1910, appena dopo l'invenzione del gruppo fondamentale, i due topologi Henrich Tietze e Max Dehn posero i seguenti problemi:

- **Il problema dell'isomorfismo:** date due presentazioni finite di due gruppi capire se i gruppi sono isomorfi;
- **Il problema della parola:** data una presentazione finita  $\langle S \mid R \rangle$  e una parola  $s \in F(S)$  capire quando  $s = 1$  in  $\langle S \mid R \rangle$  (equivalentemente capire quando due parole sono uguali).

Non esiste una procedura generale che permetta di risolvere nessuno dei due problemi. Per esempio la presentazione

$$\langle x, y \mid xy^2x^{-1}y^{-3}, yx^2y^{-1}x^{-3} \rangle$$

è isomorfa al gruppo banale ma la dimostrazione è tutt'altro che immediata (provare per credere!).

## 6.3 Abelianizzazioni

Sia  $G$  un gruppo e  $S$  un suo sottoinsieme. Ricordiamo che il sottogruppo  $\langle S \rangle$  di  $G$  generato da  $S$  è il più piccolo sottogruppo che contiene  $S$  o equivalentemente, l'intersezione di tutti i sottogruppi di  $G$  che contengono  $S$ . Siano  $x, y \in G$ .

Denotiamo con  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$  il **commutatore** di  $x$  e  $y$ . Consideriamo il sottogruppo  $G' \subseteq G$  generato dal sottoinsieme di  $G$  costituito da tutti i commutatori di  $G$ , ossia

$$G' = \langle [x, y], x, y \in G \rangle.$$

Chiameremo  $G'$  il **commutatore** del gruppo  $G$ . Chiaramente  $G'$  è banale se e solo se  $G$  è abeliano. La seguente proposizione riassume la proprietà principali del commutatore.

**Proposizione 6.3.1** *Sia  $G$  un gruppo e  $G'$  il suo commutatore. Valgono i seguenti fatti:*

- 1)  $G'$  è un sottogruppo normale di  $G$ ;
- 2) il quoziente  $G/G'$  è un gruppo abeliano, il quale verrà chiamato **l'abelianizzazione** di  $G$  e indicato con  $Ab(G)$ ;
- 3) se  $N$  è un sottogruppo normale di  $G$  e  $G/N$  è abeliano allora  $G' \subseteq N$ ;
- 4) se  $G_1$  e  $G_2$  sono due gruppi isomorfi allora  $Ab(G_1)$  è isomorfo a  $Ab(G_2)$ ;
- 5) vale la seguente proprietà universale: per ogni gruppo abeliano  $H$  e per ogni omomorfismo  $\varphi : G \rightarrow H$  esiste un unico omomorfismo  $\tilde{\varphi} : Ab(G) \rightarrow H$  che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\varphi} & \\ Ab(G) & & \end{array}$$

dove  $\pi : G \rightarrow Ab(G)$  denota la proiezione sul quoziente;

- 6)  $Ab(G)$  è univocamente determinato a meno di isomorfismi dalla precedente proprietà universale.

**Dimostrazione:** Per dimostrare la 1) ossia che  $G'$  è un sottogruppo normale di  $G$  bisogna verificare che  $gzg^{-1}$  appartiene a  $G'$  per ogni  $z \in G'$  e  $g \in G$ . Osserviamo che ogni  $z \in G'$  è il prodotto di commutatori e dei loro inversi e siccome  $[x, y]^{-1} = [y, x]$  allora  $z$  è prodotto di commutatori, ossia  $z = z_1 \dots z_n$  dove  $z_j$  sono commutatori. Segue che

$$gzg^{-1} = (gz_1g^{-1}) \cdots (gz_ng^{-1})$$

e per dimostrare la 1) è sufficiente verificare che il coniugato  $g[x, y]g^{-1}$  di un commutatore  $[x, y]$  appartiene a  $G'$  per ogni  $x, y, g \in G$ . Ma  $g[x, y]g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}] \in G'$ .

Dimostriamo la 2) ossia che  $\text{Ab}(G)$  è un gruppo abeliano. Siano  $xG', yG'$  due elementi arbitrari di  $\text{Ab}(G)$ . Allora  $\text{Ab}(G)$  è abeliano se e solo se  $xyG' = yxG'$  ossia  $xyx^{-1}y^{-1}G' = [x, y]G' = G'$ . Questo è equivalente al fatto che  $[x, y] \in G'$  che è vero per la definizione di  $G'$ .

La 3) e la 4) sono lasciate come esercizio per lo studente.

Per dimostrare la 5) osserviamo che essendo  $H$  abeliano allora  $G' \subseteq \text{Ker } \varphi$ . Quindi  $\varphi$  scende al quoziente rispetto a  $\pi$ , cioè esiste un unico omomorfismo  $\tilde{\varphi} : \text{Ab}(G) = G/G' \rightarrow H$  tale che  $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$ .

Infine per dimostrare la 6) supponiamo che esista un gruppo abeliano  $A$  e un omomorfismo  $\pi' : G \rightarrow A$  tale che per ogni gruppo abeliano  $K$  e per ogni omomorfismo  $\psi : G \rightarrow K$  esista un unico omomorfismo  $\tilde{\psi} : A \rightarrow K$  che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\psi} & K \\ \pi' \downarrow & \nearrow \tilde{\psi} & \\ A & & \end{array}$$

Allora per la proprietà universale data dal punto 5) si ottengono i due diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi'} & A \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\pi}' & \\ \text{Ab}(G) & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & \text{Ab}(G) \\ \pi' \downarrow & \nearrow \tilde{\pi} & \\ A & & \end{array}$$

i quali implicano

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & \text{Ab}(G) \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\pi} \circ \tilde{\pi}' & \\ \text{Ab}(G) & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi'} & A \\ \pi' \downarrow & \nearrow \tilde{\pi}' \circ \tilde{\pi} & \\ A & & \end{array}$$

Segue dall'unicità che  $\tilde{\pi} \circ \tilde{\pi}' = \text{id}_{\text{Ab}(G)}$  e  $\tilde{\pi}' \circ \tilde{\pi} = \text{id}_A$  e quindi  $\tilde{\pi}$  è un isomorfismo con inversa  $\tilde{\pi}'$  (e quindi  $\text{Ab}(G)$  è unico a meno di isomorfismi).  $\square$

**Osservazione 6.3.2** Se  $G$  è un gruppo e  $N$  un suo sottogruppo normale tale che  $G/N$  sia abeliano. Allora segue dalla 3) del teorema precedente che  $G/N \subseteq \text{Ab}(G)$ . Quindi  $\text{Ab}(G)$  è il “più grande” quoziente abeliano di  $G$ .

I due esempi che seguono saranno importanti per la classificazione delle superfici compatte nel Capitolo 8.

**Esempio 6.3.3** Sia  $g$  un numero naturale. Consideriamo la presentazione data da:

$$G = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle.$$

Vogliamo mostrare che  $\text{Ab}(G) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ . Cominciamo a definire un'applicazione

$$\varphi : \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g\} \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}, \quad \varphi(a_j) := e_j, \quad \varphi(b_j) := e_{j+g}, \quad j = 1, \dots, g,$$

dove  $e_k$ ,  $k = 1, \dots, 2g$  è l'elemento in  $\mathbb{Z}^{2g}$  con 1 nella posizione  $k$ -esima e 0 altrove. Per la proprietà universale dei gruppi liberi esiste un unico omomorfismo

$$\tilde{\varphi} : F(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g) \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$$

definito dall'equazione:

$$\tilde{\varphi}(a_j) = \varphi(a_j) = e_j, \quad \tilde{\varphi}(b_j) = \varphi(b_j) = e_{j+g}, \quad j = 1, \dots, g$$

e dalla (6.1), cioè

$$\tilde{\varphi}(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}) = n_1 \varphi(x_1) + n_2 \varphi(x_2) + \dots + n_m \varphi(x_m).$$

dove gli  $x_r$  sono uguali a qualche  $a_j$  oppure  $b_j$ . Segue facilmente che

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \in \text{Ker } \tilde{\varphi}.$$

Siccome

$$G = F(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g) / N(R), \quad R = \{a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}\},$$

si deduce che  $N(R) \subseteq \text{Ker } \tilde{\varphi}$  e quindi resta definito un unico omomorfismo  $\tilde{\Phi} : G \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$  tale che

$$\tilde{\Phi}(a_j) = e_j, \quad \tilde{\Phi}(b_j) = e_{j+g}, \quad j = 1, \dots, g,$$

dove  $a_j$  e  $b_j$  denotano le classi d'equivalenza nel gruppo  $G$ .

Per la proprietà universale delle abelianizzazioni (punto 5) della Proposizione 6.3.1) esiste un unico omomorfismo  $\tilde{\tilde{\Phi}} : \text{Ab}(G) \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$  tale che  $\tilde{\tilde{\Phi}} \circ \pi = \tilde{\Phi}$ , dove  $\pi : G \rightarrow \text{Ab}(G)$  è l'applicazione quoziente. Sia ora  $\tilde{\tilde{\Psi}} : \mathbb{Z}^{2g} \rightarrow \text{Ab}(G)$  l'omomorfismo univocamente determinato dalle equazioni:

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(e_k) = \begin{cases} [a_k] & \text{se } 1 \leq k \leq g \\ [b_{k-g}] & \text{se } g+1 \leq k \leq 2g, \end{cases}$$



e

$$\tilde{\Psi}(m_1 e_1 + \cdots + m_{2g} e_{2g}) = \tilde{\Psi}(e_1)^{m_1} \cdots \tilde{\Psi}(e_{2g})^{m_{2g}}, \quad \forall m_j \in \mathbb{Z},$$

dove le parentesi quadre rappresentano le classi d'equivalenza in  $\text{Ab}(G)$ .

Si verifica immediatamente che:

$$(\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi})([a_j]) = [a_j], \quad (\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi})([b_j]) = [b_j], \quad j = 1, \dots, g,$$

e

$$(\tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi})(e_k) = e_k, \quad k = 1, \dots, 2g,$$

dalle quali segue che  $\tilde{\Phi}$  è un isomorfismo con inversa  $\tilde{\Psi}$ .

**Esempio 6.3.4** Sia  $g$  un numero naturale positivo. Consideriamo la presentazione data da:

$$H = \langle a_1, a_2, \dots, a_g \mid a_1^2 a_2^2 \cdots a_g^2 \rangle.$$

Vogliamo mostrare che  $\text{Ab}(H) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$ . Definiamo un'applicazione

$$\varphi : \{a_1, a_2, \dots, a_g\} \rightarrow \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2,$$

come:

$$\varphi(a_k) = \begin{cases} e_k & \text{se } 1 \leq k \leq g-1 \\ f - e_1 - \cdots - e_{g-1} & \text{se } k = g, \end{cases}$$

dove  $e_k$ ,  $k = 1, \dots, g-1$  è l'elemento in  $\mathbb{Z}^g$  con 1 nella posizione  $k$ -esima e 0 altrove e  $f = (0, \dots, 0, e) \in \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$ , dove  $e \neq 0$  e  $e + e = 2e = 0$ . Per la proprietà universale dei gruppi liberi esiste un unico omomorfismo

$$\tilde{\varphi} : F(a_1, a_2, \dots, a_g) \rightarrow \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$$

definito dall'equazione:

$$\tilde{\varphi}(a_k) = \varphi(a_k) = e_k, \quad \tilde{\varphi}(a_g) = \varphi(a_g) = f - e_1 - \cdots - e_{g-1}, \quad k = 1, \dots, g-1$$

e dalla (6.1), cioè

$$\tilde{\varphi}(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}) = n_1 \varphi(x_1) + n_2 \varphi(x_2) + \cdots + n_m \varphi(x_m).$$

dove gli  $x_r$  sono uguali a qualche  $a_j$ . Si verifica facilmente che  $\tilde{\varphi}(a_1^2 a_2^2 \cdots a_g^2) = 0$  e quindi  $a_1^2 a_2^2 \cdots a_g^2 \in \text{Ker } \tilde{\varphi}$ . Siccome

$$H = F(a_1, a_2, \dots, a_g) / N(R), \quad R = \{a_1^2 a_2^2 \cdots a_g^2\}$$

segue che  $N(R) \subseteq \text{Ker } \tilde{\varphi}$  e resta quindi così definito un unico omomorfismo  $\tilde{\Phi} : H \rightarrow \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$  tale che

$$\tilde{\Phi}(a_k) = \begin{cases} e_k & \text{se } 1 \leq k \leq g-1 \\ f - e_1 - \cdots - e_{g-1} & \text{se } k = g, \end{cases}$$

dove gli  $a_k$  denotano le classi d'equivalenza nel gruppo  $H$ .

Per la proprietà universale delle abelianizzazioni esiste un unico omomorfismo  $\tilde{\tilde{\Phi}} : \text{Ab}(H) \rightarrow \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$  tale che  $\tilde{\tilde{\Phi}} \circ \pi = \tilde{\Phi}$ , dove  $\pi : H \rightarrow \text{Ab}(H)$  è l'applicazione quoziente. Sia ora  $\tilde{\tilde{\Psi}} : \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Ab}(H)$  l'omomorfismo definito dalle equazioni:

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(e_k) = [a_k], \quad k = 1, \dots, g-1, \quad \tilde{\tilde{\Psi}}(f) = [a_1 \cdots a_g]$$

e

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(m_1 e_1 + \cdots + m_{g-1} e_{g-1} + m f) = \tilde{\tilde{\Psi}}(e_1)^{m_1} \cdots \tilde{\tilde{\Psi}}(e_{g-1})^{m_{g-1}} \tilde{\tilde{\Psi}}(f)^m, \quad \forall m_j, m \in \mathbb{Z},$$

dove le parentesi quadre rappresentano le classi d'equivalenza in  $\text{Ab}(H)$ . Si verifica immediatamente che

$$(\tilde{\tilde{\Psi}} \circ \tilde{\tilde{\Phi}})([a_k]) = [a_k], \quad (\tilde{\tilde{\Phi}} \circ \tilde{\tilde{\Psi}})(e_k) = e_k, \quad k = 1, \dots, g-1,$$

$$(\tilde{\tilde{\Psi}} \circ \tilde{\tilde{\Phi}})([a_g]) = [a_g], \quad (\tilde{\tilde{\Phi}} \circ \tilde{\tilde{\Psi}})(f) = f$$

e quindi  $\tilde{\tilde{\Psi}}$  è l'inversa di  $\tilde{\tilde{\Phi}}$ .

## 6.4 Esercizi

**Esercizio 6.1** Sia  $S$  un sottoinsieme di un gruppo  $G$ . Dimostrare che  $S$  genera  $G$  se e solo se  $S$  non è contenuto in nessun sottogruppo proprio di  $G$ .

**Esercizio 6.2** Dimostrare gli isomorfismi degli Esempi 6.2.4 e 6.2.5.

**Esercizio 6.3** Dimostrare che il gruppo  $G = \langle a, b \mid a^4, b^2, aba^{-1}b^{-1} \rangle$  è isomorfo  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ .

**Esercizio 6.4** Siano  $S_1$  e  $S_2$  due insiemi disgiunti e  $R_1 \subseteq F(S_1)$  e  $R_2 \subseteq F(S_2)$ . Dimostrare che  $\langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle$  è una presentazione del gruppo  $\langle S_1 \mid R_1 \rangle * \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ .

**Esercizio 6.5** Dimostrare la (3) e la (4) della Proposizione 6.3.1.

**Esercizio 6.6** Sia  $\langle S \mid R \rangle$  una presentazione di un gruppo  $G$ . Sia  $\tilde{R} \subset F(S)$  l'insieme  $\tilde{R} = \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in F(S)\}$ . Dimostrare che  $\langle S \mid R \cup \tilde{R} \rangle$  è una presentazione del gruppo  $\text{Ab}(G)$ .

**Esercizio 6.7** Dimostrare che il gruppo  $G = \langle a, b \mid a^4ba^{-3}b^{-1}, a^5b^2a^{-4}b^{-2} \rangle$  non è il gruppo banale.

**Esercizio 6.8** Dimostrare che l'abelianizzazione definisce un funtore dalla categoria dei gruppi  $\mathcal{G}$  a quella dei gruppi abeliani  $\mathcal{Ab}$ .

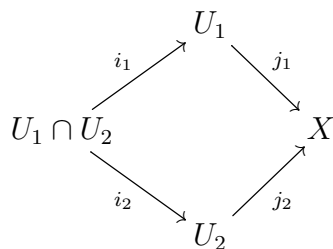


# Capitolo 7

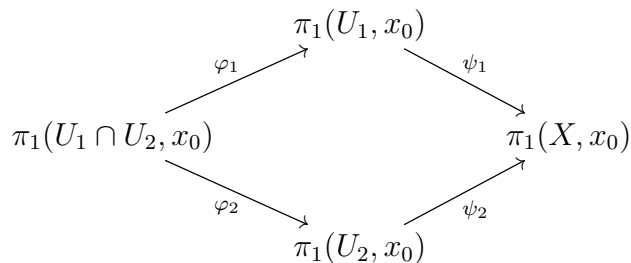
## Il Teorema di Seifert–Van Kampen

### 7.1 Enunciato e dimostrazione parziale

Sia  $X$  uno spazio topologico e siano  $U_1$  e  $U_2$  due suoi sottoinsiemi aperti e connessi per archi tali che  $X = U_1 \cup U_2$  e la cui intersezione  $U_1 \cap U_2$  sia non vuota e connessa per archi. Sia  $x_0 \in U_1 \cap U_2$ . Consideriamo le inclusioni naturali  $i_1 : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_1$ ,  $i_2 : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_2$ ,  $j_1 : U_1 \rightarrow X$ ,  $j_2 : U_2 \rightarrow X$  e il seguente diagramma:



Questo induce un diagramma sui gruppi fondamentali:



dove  $\varphi_1 = (i_1)_*$ ,  $\varphi_2 = (i_2)_*$ ,  $\psi_1 = (j_1)_*$ ,  $\psi_2 = (j_2)_*$  sono le applicazioni indotte sui rispettivi gruppi fondamentali. Inseriamo nel mezzo del diagramma il prodotto libero  $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$  e siano  $i_{U_j} : \pi_1(U_j, x_0) \rightarrow \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ ,

$j = 1, 2$ , le inclusioni canoniche. Per la proprietà universale del prodotto libero (cfr. Teorema 5.4.5) esiste un unico omomorfismo

$$\Phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \quad (7.1)$$

che rende commutativo la parte destra del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_1(U_1, x_0) & & \\
 & \nearrow \varphi_1 & \downarrow i_{U_1} & \searrow \psi_1 & \\
 \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) & \xrightarrow{F} & \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) & \xrightarrow{\Phi} & \pi_1(X, x_0) \\
 & \searrow \varphi_2 & \uparrow i_{U_2} & \nearrow \psi_2 & \\
 & & \pi_1(U_2, x_0) & & 
 \end{array}$$

Definiamo inoltre un'applicazione (la quale non è un omomorfismo)

$$F : \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \rightarrow \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$$

che a  $\gamma \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$  associa  $F(\gamma) = \varphi_1(\gamma)\varphi_2(\gamma)^{-1}$ , dove stiamo identificando  $\gamma$  con  $i_{U_j}(\gamma)$ ,  $j = 1, 2$ . Consideriamo l'immagine di  $F$ ,

$$F(\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)) = \{\varphi_1(\gamma)\varphi_2(\gamma)^{-1} \mid \gamma \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)\}$$

e sia

$$N_F := N(F(\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0))) \subseteq \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$$

la sua chiusura normale in  $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ . Possiamo ora enunciare il risultato principale di questo capitolo che risulterà un strumento utilissimo per il calcolo del gruppo fondamentale di vari spazi.

**Teorema 7.1.1** (*Seifert–Van Kampen*<sup>1</sup>) *Sia  $X$  uno spazio topologico e  $U_1$  e  $U_2$  due sottoinsiemi aperti di  $X$  connessi per archi tali che  $X = U_1 \cup U_2$  e  $U_1 \cap U_2$  sia non vuoto e connessi per archi. Allora per ogni  $x_0 \in U_1 \cap U_2$  l'omomorfismo (7.1) è suriettivo e il suo nucleo è  $N_F$ . Conseguentemente*

$$\pi_1(X, x_0) \cong (\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)) / N_F.$$

**Notazioni.** Prima di dimostrare (parzialmente) il teorema introduciamo alcune notazioni. Se  $f$  e  $g$  sono due archi in  $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$  oppure  $X$  scriveremo

$$f \sim_{U_1} g, f \sim_{U_2} g, f \sim_{U_1 \cap U_2} g, f \sim_X g$$

---

<sup>1</sup>Herbert Siefert e Egbert Van Kampen dimostrarono il teorema indipendentemente agli inizi del 1930.

per indicare che  $f$  è omotopo relativamente a  $\{0, 1\}$  a  $g$  in  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_1 \cap U_2$  oppure in  $X$ . Scriveremo anche  $[f]_{U_1}, [f]_{U_2}$ ,  $[f]_{U_1 \cap U_2}$  o  $[f]_X$  per indicare la classe di equivalenza di omotopia dell'arco  $f$  relativa a  $\{0, 1\}$  in  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_1 \cap U_2$  o  $X$ . Inoltre denoteremo il prodotto libero con uno  $*$ . Consideriamo per esempio un elemento

$$[g_1]_{U_1} * [g_2]_{U_2} * \cdots * [g_{q-1}]_{U_1} * [g_q]_{U_2}$$

di  $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ , allora

$$\Phi([g_1]_{U_1} * [g_2]_{U_2} * \cdots * [g_{q-1}]_{U_1} * [g_q]_{U_2}) = \psi_1([g_1]_{U_1}) \psi_2([g_2]_{U_2}) \cdots \psi_1([g_{q-1}]_{U_1}) \psi_2([g_q]_{U_2})$$

$$= [g_1]_X [g_2]_X \cdots [g_{q-1}]_X [g_q]_X = [g_1 \cdot g_2 \cdots g_{q-1} \cdot g_q]_X, \quad (7.2)$$

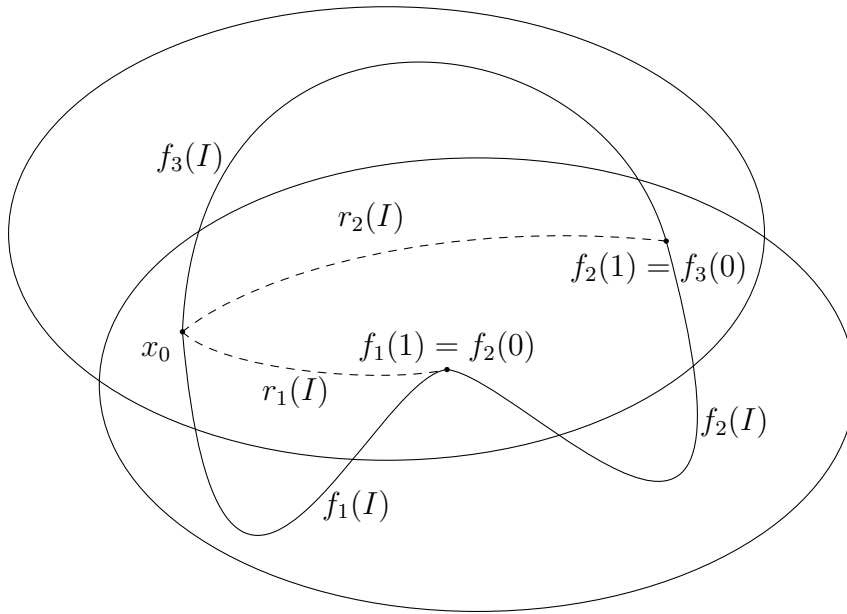
dove  $g_1 \cdot g_2 \cdots g_{q-1} \cdot g_q$  denota la concatenazione dei lacci  $g_j$ .

**Dimostrazione parziale del Teorema 7.1.1** Mostriamo che  $\Phi$  è suriettiva. Sia  $f : I \rightarrow X$  un laccio di base  $x_0$  in  $X$ ,  $f(0) = f(1) = x_0$ . Ragionando come nel Teorema 2.5.1 possiamo trovare una suddivisione di  $I$ ,  $a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_q = 1$ , tale che per ogni  $\alpha = 1, 2, \dots, q$ ,  $f([a_{\alpha-1}, a_\alpha])$  sia contenuto in  $U_1$  oppure in  $U_2$  e inoltre  $f(a_\alpha) \in U_1 \cap U_2$ . Sia ora  $f_\alpha : I \rightarrow X$  l'arco definito da:

$$f_\alpha(t) = f((1-t)a_{\alpha-1} + ta_\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, q.$$

Dal Teorema 2.1.6 segue che  $f \sim_X f_1 \cdots f_q$  o, equivalentemente,  $[f]_X = [f_1 \cdots f_q]_X$ . Ciascuno degli archi  $f_\alpha$  non è un laccio basato in  $x_0$ . Per rimediare a questo fatto usiamo la connessione per archi di  $U_1 \cap U_2$  e definiamo un arco  $r_\alpha : I \rightarrow U_1 \cap U_2$  da  $x_0 \in U_1 \cap U_2$  a  $f(a_\alpha) = f_\alpha(1)$  per ogni  $\alpha = 1, \dots, q-1$ , e poniamo  $r_0 = r_q = \epsilon_{x_0}$ .

(arco costante di base  $x_0$ ). In figura è illustrato il caso  $q = 3$ .



Segue dal Lemma 2.1.2 che

$$r_0 \cdot f_1 \cdot i(r_1) \cdot r_1 \cdot f_2 \cdot i(r_2) \cdots r_{q-1} \cdot f_q \cdot i(r_q) \sim_X f$$

e quindi  $[f]_X = [g_1 \cdots g_q]_X$  dove  $g_\alpha = r_{\alpha-1} \cdot f_\alpha \cdot i(r_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, \dots, q$ , è un laccio di base  $x_0$  interamente contenuto in  $U_1$  o in  $U_2$ . Supponiamo, per esempio, che  $g_1$  sia contenuto in  $U_1$ ,  $g_2$  in  $U_2, \dots$ ,  $g_{q-1}$  in  $U_1$  e  $g_q$  in  $U_2$  e consideriamo l'elemento

$$s = [g_1]_{U_1} * [g_2]_{U_2} * \cdots * [g_{q-1}]_{U_1} * [g_q]_{U_2}$$

Allora, per la (7.2), si ottiene

$$\Phi(s) = [g_1 \cdots g_q]_X = [f]_X$$

e quindi  $\Phi$  è suriettiva. Vogliamo dimostrare adesso che  $N_F = \text{Ker } \Phi$ . La dimostrazione dell'inclusione  $\text{Ker } \Phi \subseteq N$  è la parte più delicata del teorema e non verrà dimostrata (lo studente è rinviato a [8] in bibliografia). Dimostreremo solo l'inclusione  $N_F \subseteq \text{Ker } \Phi$ . Per fare questo è sufficiente dimostrare che  $F(\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)) \subseteq \text{Ker } \Phi$ . Sia dunque  $[f]_{U_1 \cap U_2} \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ . Allora

$$\begin{aligned} \Phi(F([f]_{U_1 \cap U_2})) &= \Phi(\varphi_1([f]_{U_1 \cap U_2}) * \varphi_2([f]_{U_1 \cap U_2})^{-1}) = \\ &= \Phi([f]_{U_1} * [i(f)]_{U_2}) = [f]_X [i(f)]_X = 1 \end{aligned}$$



che è quello che si voleva dimostrare.  $\square$

Quando i gruppi fondamentali coinvolti hanno una presentazione finita il Teorema di Seifert–Van Kampen può essere espresso in termini di generatori e relazioni.

**Proposizione 7.1.2** *Nelle stesse ipotesi del Teorema 7.1.1 supponiamo inoltre che i gruppi fondamentali di  $U_1, U_2$  e  $U_1 \cap U_2$  abbiano le presentazioni finite:*

$$\pi_1(U_1, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \mid \rho_1, \dots, \rho_r \rangle;$$

$$\pi_1(U_2, x_0) = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \mid \sigma_1, \dots, \sigma_s \rangle;$$

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_p \mid \tau_1, \dots, \tau_t \rangle.$$

Allora il gruppo fondamentale  $\pi_1(X, x_0)$  può essere presentato come:

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \mid \rho_1, \dots, \rho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s, u_1 = v_1, \dots, u_p = v_p \rangle$$

dove, per ogni  $\alpha = 1, \dots, p$ ,  $u_\alpha$  è un'espressione di  $\varphi_1(\gamma_\alpha) \in \pi_1(U_1, x_0)$  rispetto ai generatori  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  e  $v_\alpha$  è un'espressione di  $\varphi_2(\gamma_\alpha) \in \pi_1(U_2, x_0)$  rispetto ai generatori  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ .

**Dimostrazione:** la dimostrazione verrà ommessa (si veda [8] in bibliografia).  $\square$

**Osservazione 7.1.3** Notiamo che le relazioni  $\{\tau_1, \dots, \tau_t\}$  della presentazione del gruppo  $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$  non giocano alcun ruolo nel calcolo di  $\pi_1(X, x_0)$ .

## 7.2 Prima applicazione: $U_1$ e $U_2$ semplicemente connessi

Il corollario che segue è una conseguenza immediata del Teorema 7.1.1.

**Corollario 7.2.1** *Sia  $X$  uno spazio topologico che possa essere scritto come unione di due aperti semplicemente connessi  $U_1$  e  $U_2$  la cui intersezione è non vuota e connessa per archi. Allora  $X$  è semplicemente connesso.*

Vogliamo usare il corollario per dimostrare che la sfera, il complementare di un numero finito di punti di  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , e il proiettivo complesso sono semplicemente connessi.

**Esempio 7.2.2** Siano  $N$  e  $S$  il polo nord e il polo sud della sfera  $S^n$ ,  $n \geq 2$ . Allora gli aperti  $U_1 = S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$  e  $U_2 = S^n \setminus \{S\} \cong \mathbb{R}^n$  e  $U_1 \cap U_2 \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  soddisfano le ipotesi del Corollario 7.2.1 e quindi  $S^n$  è semplicemente connessa, in accordo con il Teorema 2.5.1.

**Esempio 7.2.3** Siano  $p_1, \dots, p_k$  un numero finito di punti distinti di  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ . Sia  $X = \mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ . Per dimostrare che  $X$  è semplicemente connesso, ragioniamo per induzione sul numero  $k$  dei punti in questione. Se  $k = 0$ ,  $\mathbb{R}^n$  è semplicemente connesso (addirittura convesso e quindi contraibile). Per  $k = 1$ ,  $\mathbb{R}^n \setminus \{p_1\}$  è semplicemente connessa per il Corollario 2.5.3. Sia quindi  $k \geq 2$  e supponiamo che  $\mathbb{R}^n \setminus \{s \text{ punti}\}$  sia semplicemente connesso per tutti gli  $s < k$ . Consideriamo un'applicazione lineare  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $h(p_1) \neq h(p_2)$ . Scambiando eventualmente  $p_1$  con  $p_2$  possiamo assumere  $h(p_1) < h(p_2)$ . Allora  $U_1 = \{x \in X \mid h(x) > h(p_1)\}$ ,  $U_2 = \{x \in X \mid h(x) < h(p_2)\}$  e  $U_1 \cap U_2 = \{x \in X \mid h(p_1) < h(x) < h(p_2)\}$  sono tutti omeomorfi rispettivamente a  $\mathbb{R}^n \setminus \{s_1 \text{ punti}\}$ ,  $\mathbb{R}^n \setminus \{s_2 \text{ punti}\}$  e  $\mathbb{R}^n \setminus \{s_3 \text{ punti}\}$  con  $s_j < k$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Applicando l'ipotesi induttiva e il Corollario 7.2.1 si deduce allora che  $X$  è semplicemente connesso.

**Esempio 7.2.4** (lo spazio proiettivo complesso) La definizione dello spazio proiettivo complesso è simile a quella dello spazio proiettivo reale estesa al caso dei numeri complessi. Sia  $n \geq 0$  un numero naturale e sia  $X = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Definiamo una relazione di equivalenza  $\sim$  su  $X$  dichiarando  $z \sim w$  se e solo se esiste  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tale che  $w = \lambda z$ . Lo spazio quoziente (con la topologia quoziente) si chiama **lo spazio proiettivo complesso  $n$ -dimensionale** e verrà indicato con  $\mathbb{CP}^n$ . Un punto di  $\mathbb{CP}^n$  verrà denotato con  $[z]$ . Se restringiamo la relazione d'equivalenza alla sfera unitaria in  $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  possiamo pensare a  $\mathbb{CP}^n$  come l'insieme delle classi d'equivalenza in  $S^{2n+1}$  dove  $z \sim w$ ,  $z, w \in S^{2n+1}$  se e solo se esiste  $\lambda \in S^1$  tale che  $w = \lambda z$ . Esattamente come nel caso di  $\mathbb{RP}^n$  (cfr. Teorema 11.5.1 di [6] in bibliografia) si dimostra che  $\mathbb{CP}^n$  è una varietà topologica compatta e connessa di dimensione  $2n$  (i dettagli sono lasciati come esercizio per lo studente). Analogamente al caso di  $\mathbb{RP}^n$ , l'atlante canonico  $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j=0, \dots, n}$  è dato dagli aperti

$$U_j = \{[z] = [z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{CP}^n \mid z_j \neq 0\},$$

insieme alle carte

$$\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}, \quad [z] \mapsto \left( \frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right). \quad (7.3)$$

Osserviamo che per  $n = 0$ ,  $\mathbb{CP}^0$  si riduce ad un punto. Mentre, per  $n = 1$ ,  $\mathbb{CP}^1$  è omeomorfo alla sfera  $S^2$ . Per vedere questo fatto diamo una descrizione

esplicita delle carte  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  dell'atlante canonico  $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j=0,1}$  di  $\mathbb{CP}^1$ . Da (7.3) otteniamo:

$$\varphi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}, [z_0, z_1] \mapsto \frac{z_1}{z_0} = z = x + iy \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2,$$

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}, [z_0, z_1] \mapsto \frac{z_0}{z_1} = w = u + iv \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

Mentre le loro inverse sono:

$$\varphi_0^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow U_0, z \mapsto [1, z],$$

$$\varphi_1^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow U_1, w \mapsto [w, 1].$$

Siano  $N = (0, 0, 1)$  e  $S = (0, 0, -1)$  il polo nord e il polo sud della sfera

$$S^2 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + t^2 = 1\} = \{(z, t) \mid |z|^2 + t^2 = 1\}, \quad z = x + iy.$$

Consideriamo l'atlante su  $S^2$  costituito dalle due carte  $(U_N = S^2 \setminus \{N\}, \varphi_N)$  e  $(U_S = S^2 \setminus \{S\}, \bar{\varphi}_S)$  di  $S^2$  date da:

$$\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, (x, y, t) \mapsto \left(\frac{x}{1-t}, \frac{y}{1-t}\right) = \frac{z}{1-t}$$

$$\bar{\varphi}_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, (x, y, t) \mapsto \left(\frac{x}{1+t}, \frac{-y}{1+t}\right) = \frac{\bar{z}}{1+t},$$

dove  $z = x + iy$ . Lo studente avrà notato che  $\varphi_N$  è esattamente la proiezione stereografica dal polo nord mentre  $\bar{\varphi}_S$  è la coniugata della proiezione stereografica  $\varphi_S$  dal polo sud. Osserviamo che per

$$(z, t) \in U_N \cap U_S = \{(z, t) \mid |z|^2 + t^2 = 1, \quad t \neq \pm 1\}$$

si ha:

$$\frac{z}{1-t} = \frac{1+t}{\bar{z}}.$$

Segue che l'applicazione  $F : S^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$

$$F(z, t) = \begin{cases} \varphi_0^{-1}(\varphi_N(z, t)) = [1, \frac{z}{1-t}] & \text{se } (z, t) \in U_N \\ \varphi_1^{-1}(\bar{\varphi}_S(z, t)) = [\frac{\bar{z}}{1+t}, 1] & \text{se } (z, t) \in U_S, \end{cases}$$

definisce un omeomorfismo da  $S^2$  a  $\mathbb{CP}^1$ .

Per dimostrare che  $\mathbb{CP}^n$  è semplicemente connesso consideriamo i due aperti  $U_0 = \{z_0 \neq 0\} = \mathbb{CP}^n \setminus H$ ,  $H = \{z_0 = 0\}$  e  $V = \mathbb{CP}^n \setminus \{p_0\}$ ,  $p_0 = [1, 0, \dots, 0]$ . Ora  $U_0 \cong \mathbb{R}^{2n}$  e  $U_0 \cap V = \mathbb{CP}^n \setminus \{H \cup p_0\} \cong \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$  che è connesso per archi e non

vuoto per ogni  $n \geq 1$ . Inoltre  $V$  si retrae per deformazione forte su  $H \cong \mathbb{CP}^{n-1}$  tramite la retrazione

$$r : V \rightarrow H, \quad r([z_0, z_1, \dots, z_n]) = [0, z_1, \dots, z_n].$$

Infatti l'omotopia

$$F : V \times I \rightarrow V, \quad F([z], t) = [(1-t)z_0, z_1, \dots, z_n], \quad [z] = [z_0, z_1, \dots, z_n], \quad (7.4)$$

soddisfa  $F([z], 0) = [z]$ ,  $F([z], 1) = [0, z_1, \dots, z_n] \in H$  e  $F([w], t) = [w]$ ,  $\forall [w] \in H$  e  $\forall t \in I$ . Con un ragionamento induttivo su  $n \geq 1$  e usando il Corollario 7.2.1 si ottiene allora che  $\mathbb{CP}^n$  è semplicemente connesso.

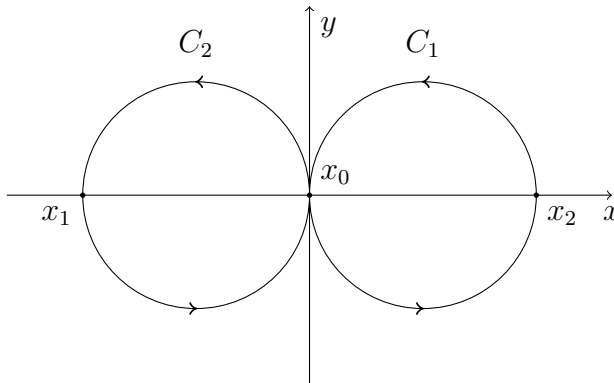
### 7.3 Seconda applicazione: $U_1 \cap U_2$ semplicemente connesso

Se  $U_1 \cap U_2$  è semplicemente connesso dal Teorema 7.1.1 si ottiene immediatamente il seguente risultato.

**Corollario 7.3.1** *Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema 7.1.1 e che  $U_1 \cap U_2$  sia semplicemente connesso. Allora l'omomorfismo  $\Phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  è un isomorfismo.*

Di seguito calcoleremo il gruppo fondamentale di alcuni spazi usando il Corollario 7.3.1.

**Esempio 7.3.2** Sia  $X = C_1 \cup C_2$  la figura  $\infty$  come dell'Esempio 1.4.10. Dal Paragrafo 4.4, sappiamo che il gruppo fondamentale di  $X$  non è abeliano. Vogliamo calcolarlo esplicitamente. Siano  $x_1 \in C_1$  e  $x_2 \in C_2$  due punti diversi dal punto  $x_0$ .



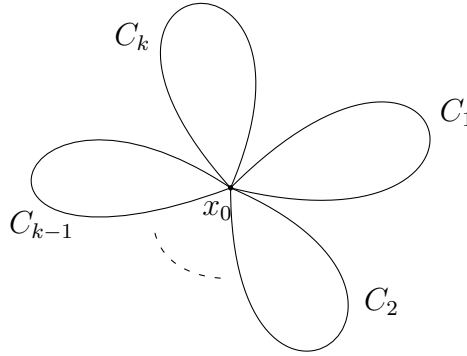
Allora  $U_1 = X \setminus \{x_2\}$  e  $U_2 = X \setminus \{x_1\}$  sono due aperti di  $X$  connessi per archi e  $U_1 \cap U_2$  è un aperto che si retrae per deformazione al punto  $x_0$  e quindi

semplicemente connesso. D'altra parte  $U_j$  si retrae per deformazione a  $C_j$ ,  $j = 1, 2$  e quindi  $\pi_1(U_j, x_0) \cong \pi_1(C_j, x_0)$ ,  $j = 1, 2$ . Applicando il Corollario 7.3.1 si ottiene

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) = \pi_1(C_2, x_0) * \pi_1(C_1, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

I due generatori liberi di  $\pi_1(X, x_0)$  sono rappresentati da due lacci chiusi di base  $x_0$  che girano una volta intorno ai punti  $(-1, 0)$  e  $(0, 1)$ .

**Esempio 7.3.3** Più in generale, consideriamo lo spazio  $X_n$  unione di numero finito  $C_1, \dots, C_n$  di spazi omeomorfi a  $S^1$  con un solo punto  $x_0$  in comune.



Lo spazio  $X_n$  è chiamato il **il bouquet di  $n$  cerchi**. Ci proponiamo di dimostrare che il gruppo fondamentale di  $X_n$  è il gruppo libero su  $n$  generatori. La dimostrazione si ottiene per induzione sul numero  $n$ ,  $n \geq 2$ , di circonferenze. Sappiamo, dall'esempio precedente, che il risultato è vero per  $n = 2$ . Supponiamo che l'affermazione sia vera per  $2 \leq k < n$ , cioè  $\pi_1(X_k, x_0) \cong \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$  ( $k$  fattori). Siano  $x_j \in C_j$  tali che  $x_j \neq x_0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Consideriamo i due sottoinsiemi aperti e connessi per archi di  $X_n$  dati da  $U_1 = X_n \setminus \{x_n\}$  e  $U_2 = X_n \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ . Allora  $U_1$  si retrae per deformazione a  $X_{n-1}$ ,  $U_2$  si retrae per deformazione a  $C_n \cong S^1$  e  $U_1 \cap U_2 = X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  è non vuoto e semplicemente connesso (si retrae per deformazione al punto  $x_0$ ). Applicando allora il Corollario 7.3.1 e l'ipotesi induttiva si ottiene:

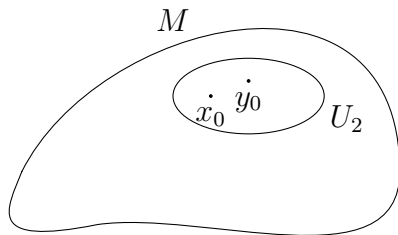
$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_{n-1}, x_0) * \pi_1(C_n, x_0) = (\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}) * \mathbb{Z} = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z} \quad (n \text{ fattori}).$$

Osserviamo, infine, che ogni generatore  $\gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , di  $\pi_1(X_n, x_0)$  è rappresentato da un laccio di base  $x_0$  che gira intorno al cerchio  $C_j$  una volta.

**Esempio 7.3.4** Siano  $p_1, \dots, p_k$  un numero finito di punti distinti in  $\mathbb{R}^2$  e sia  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ . Non è difficile vedere che lo spazio  $X$  si retrae per deformazione

forte su un bouquet di  $k$  cerchi (cfr. Esempio 1.4.11 nel Capitolo 1 per il caso  $k = 2$ ). Per l'Esempio precedente il gruppo fondamentale di  $X$  è il gruppo libero con  $k$  generatori. Ogni generatore è rappresentato da un laccio  $\alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , ottenuto percorrendo una sola volta un cerchio  $C_j$  centrato in  $p_j$  e di raggio  $r_j < \inf_{k \neq j} d(p_j, p_k)$ .

**Esempio 7.3.5** Sia  $M$  una varietà topologica connessa (e quindi connessa per archi) di dimensione  $n \geq 3$ . Ci proponiamo di dimostrare che il gruppo fondamentale di  $M$  è lo stesso del gruppo fondamentale di  $M$  privata di un suo punto. Siano dunque  $y_0 \in M$ ,  $U_2$  un aperto che contiene  $y_0$  tale che  $U_2 \cong \mathbb{R}^n$  (un tale aperto esiste in quanto  $M$  è localmente euclidea),  $x_0 \in U_2$  tale che  $x_0 \neq y_0$  e  $U_1 = M \setminus \{y_0\}$ .



I due aperti  $U_1$  e  $U_2$  sono connessi per archi e la loro intersezione  $U_1 \cap U_2 = U_2 \setminus \{y_0\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  è non vuota e semplicemente connessa per  $n \geq 3$  (cfr. Corollario 2.5.3). Possiamo allora applicare il Corollario 7.3.1 e dedurre che:

$$\pi_1(M, x_0) = \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) = \pi_1(M \setminus \{y_0\}, x_0). \quad (7.5)$$

Osserviamo che il risultato vale per qualunque  $x_0 \in M$  in quanto sia  $M$  che  $M \setminus \{y_0\}$  sono connessi per archi (per questo è sufficiente l'ipotesi  $n \geq 2$ ).

**Esempio 7.3.6** Sia  $L$  è una retta affine di  $\mathbb{R}^3$ . Vogliamo calcolare il gruppo fondamentale di  $Y = \mathbb{R}^3 \setminus L$ . Possiamo supporre  $L$  sia l'asse  $x_3$  ( $x_1 = x_2 = 0$ ). Consideriamo il semipiano aperto  $S = \{(x_2, x_3) \mid x_3 > 0, x_1 = 0\}$  di  $\mathbb{R}^3$ . Lo spazio ottenuto tramite una rotazione completa di  $S$  intorno all'asse  $x_3$  è omeomorfo allo spazio  $Y$ . Quindi  $Y \cong S \times S^1$ . Il gruppo fondamentale di  $Y$  è quindi

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(S \times S^1) \cong \pi_1(S) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

in quanto  $S$  è semplicemente connesso ( $S$  è convesso) e  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ . Un generatore di  $\pi_1(Y, y)$ ,  $y \in Y$ , è rappresentato da un laccio basato in  $y$  e gira una volta intorno alla retta  $L$ .

**Esempio 7.3.7** Sia  $C$  una circonferenza di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $X = \mathbb{R}^3 \setminus C$ . Vogliamo calcolare il gruppo fondamentale di  $X = \mathbb{R}^3 \setminus C$ . Per fare questo consideriamo la proiezione stereografica

$$\pi_N : S^3 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \left( \frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4} \right)$$

della sfera unitaria  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  privata del polo nord  $N = (0, 0, 0, 1)$  allo spazio  $\mathbb{R}^3$  considerato come lo spazio equatoriale  $\mathbb{R}^3 = \{x_4 = 0\}$ . Assumiamo che il cerchio  $C$  sia il cerchio di centro l'origine e raggio 1 nel piano  $x_3 = 0$  di  $\mathbb{R}^3$  e cioè

$$C = \{x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}.$$

Osserviamo che  $C$  giace nello spazio equatoriale  $x_4 = 0$  di  $S^3$  ( $C$  vista in  $S^3$  ha equazione  $C = \{x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = x_4 = 0\}$ ) e che quindi  $\pi_N^{-1}(C) = C$ . Si ottiene allora

$$\pi_N^{-1}(X) \cong S^3 \setminus \{N \cup C\}$$

e quindi

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(S^3 \setminus \{N \cup C\}) \cong \pi_1(S^3 \setminus C)$$

dove l'ultimo isomorfismo segue dal punto 4. in quanto  $S^3 \setminus C$  è una varietà topologica tridimensionale. Ora  $S^3 \setminus C$  è omeomorfa a  $S^3 \setminus \tilde{C}$  dove  $\tilde{C}$  è la circonferenza di  $S^3$  data da:

$$\tilde{C} = \{x_3^2 + x_4^2 = 1, x_1 = x_2 = 0\}.$$

Osserviamo che  $N \in \tilde{C}$  e quindi

$$S^3 \setminus \tilde{C} = S^3 \setminus (N \cup \tilde{C}) \cong \mathbb{R}^3 \setminus \pi_N(\tilde{C}).$$

Inoltre  $\pi_N(\tilde{C} \setminus N) = L$ , dove  $L$  è l'asse  $x_3$  in  $\mathbb{R}^3$ . Quindi

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(S^3 \setminus C) \cong \pi_1(S^3 \setminus \tilde{C}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L) \cong \mathbb{Z},$$

dove l'ultimo isomorfismo segue dall'Esempio 7.3.5. Un generatore di  $\pi_1(X, x_0)$ ,  $x_0 \in X$ , è rappresentato da un laccio basato in  $x_0$  che gira una volta intorno alla circonferenza  $C$ .

**Osservazione 7.3.8** Nell'esempio precedente è importante che la circonferenza  $C$  sia effettivamente una circonferenza euclidea e non semplicemente uno spazio omeomorfo a  $S^1$ . Infatti il gruppo fondamentale del complementare in  $\mathbb{R}^3$  di uno spazio omeomorfo a  $S^1$  può essere molto complicato. Uno spazio topologico  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  omeomorfo a  $S^1$  si chiama **nodo** e il gruppo fondamentale di  $\mathbb{R}^3 \setminus K$  si chiama il gruppo fondamentale del nodo. La teoria dei nodi è una branca

importantissima della topologia di **dimensione bassa** cioè di quella teoria che studia le varietà topologiche di dimensione  $\leq 4$ . In queste note non tratteremo questa affascinante teoria. Lo studente interessato potrà consultare il classico testo [13] in bibliografia.

## 7.4 Terza applicazione: $U_2$ semplicemente connesso

Dalla Proposizione 7.1.2 si ottiene immediatamente il seguente risultato.

**Corollario 7.4.1** *Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema 7.1.1,  $U_2$  sia semplicemente connesso e siano*

$$\pi_1(U_1, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \mid \rho_1, \dots, \rho_r \rangle;$$

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_p \mid \tau_1, \dots, \tau_t \rangle$$

*presentazioni finite dei gruppi fondamentali  $U_1$  e  $U_1 \cap U_2$ . Allora  $\pi_1(X, x_0)$  ha la presentazione finita*

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \mid \rho_1, \dots, \rho_r, u_1, \dots, u_p \rangle,$$

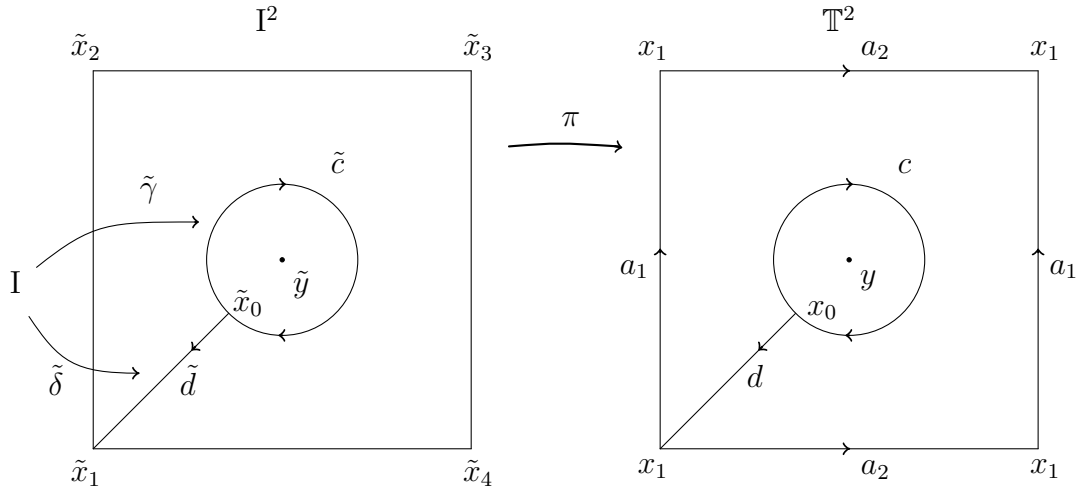
*dove per ogni  $\alpha = 1, \dots, p$ ,  $u_\alpha$  è un'espressione di  $\varphi_1(\gamma_\alpha) \in \pi_1(U_1, x_0)$  rispetto ai generatori  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ .*

Useremo questo corollario per ricalcolare il gruppo fondamentale del toro  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$  e del proiettivo  $\mathbb{RP}^n$ ,  $n \geq 2$ , senza l'ausilio della teoria dei rivestimenti. Le tecniche sviluppate in questi esempi ci permetteranno di calcolare il gruppo fondamentale delle superfici compatte nel prossimo capitolo.

**Esempio 7.4.2** (gruppo fondamentale del toro) Pensiamo al toro  $\mathbb{T}^2$  come al quadrato  $I^2$  con i lati identificati come in figura e sia  $\pi : I^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  la proiezione



sul quoziente.



Nella figura i vertici del quadrato  $I^2$  e cioè  $\tilde{x}_1 = (0, 0)$ ,  $\tilde{x}_2 = (0, 1)$ ,  $\tilde{x}_3 = (1, 1)$  e  $\tilde{x}_4 = (1, 0)$  si identificano tutti a  $x_1 \in \mathbb{T}^2$  così come i lati verticali  $\{0\} \times I$  e  $\{1\} \times I$  (risp. orizzontali  $I \times \{0\}$  e  $I \times \{1\}$ ) di  $I^2$  corrispondono ad un laccio  $a_1 = \pi(\{0\} \times I)$  (risp.  $a_2 = \pi(I \times \{1\})$ ) di  $\mathbb{T}^2$  di base  $x_1$ . Osserviamo che l'interno del quadrato  $\text{Int}(I^2)$  è omeomorfo a  $\mathbb{T}^2 \setminus \{a_1 \cup a_2\}$  tramite  $\pi$ . Sia  $\tilde{y} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in I^2$  il centro del quadrato e  $y = \pi(\tilde{y}) \in \mathbb{T}^2$ . Consideriamo i due aperti connessi per archi  $\tilde{U}_1 = I^2 \setminus \{\tilde{y}\}$  e  $\tilde{U}_2 = \text{Int}(I^2)$  di  $I^2$ . Allora  $U_1 = \pi(\tilde{U}_1) = \mathbb{T}^2 \setminus \{y\}$  e  $U_2 = \pi(\tilde{U}_2) = \mathbb{T}^2 \setminus \{a_1 \cup a_2\}$  sono due aperti connessi per archi di  $\mathbb{T}^2$  tali che  $\mathbb{T}^2 = U_1 \cup U_2$ . La loro intersezione è l'aperto  $U_1 \cap U_2 = \mathbb{T}^2 \setminus \{y \cup a_1 \cup a_2\}$  di  $\mathbb{T}^2$  il quale è connesso per archi in quanto immagine del connesso per archi  $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \text{Int}(I^2) \setminus \{\tilde{y}\}$  tramite  $\pi$ . Sia  $x_0 \in U_1 \cap U_2$ . Calcoliamo i gruppi fondamentali  $\pi_1(U_1, x_0)$ ,  $\pi_1(U_2, x_0)$  e  $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ .

L'aperto  $U_2$  è semplicemente connesso essendo omeomorfo al convesso  $\text{Int}(I^2)$ . L'aperto  $U_1$  si retrae per deformazione (forte) ad un bouquet di due cerchi basati in  $x_1$  (cfr. Esercizio 1.10 del Capitolo 1). Segue allora dall'Esempio 7.3.2 che

$$\pi_1(U_1, x_1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle [\alpha_1], [\alpha_2] \rangle,$$

dove  $[\alpha_j]$ ,  $j = 1, 2$ , denota la classe in  $\pi_1(U_1, x_1)$  del laccio  $\alpha_j : I \rightarrow U_1$  di base  $x_1$  ottenuto percorrendo  $a_j$  e compiendo un singolo giro. Sia  $\tilde{\delta} : I \rightarrow I^2$  l'arco nel quadrato  $I^2$  che si ottiene percorrendo il segmento di retta  $\tilde{d}$  che unisce  $\tilde{x}_0$  a  $\tilde{x}_1 = (0, 0)$ , dove  $\tilde{x}_0$  è l'unico punto di  $I^2$  tale che  $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$ . Siano  $\delta : I \rightarrow \mathbb{T}^2$ ,  $\delta = \pi \circ \tilde{\delta}$  e  $d = \pi(\tilde{d})$  le loro immagini nel quoziente. Segue che

$$\pi_1(U_1, x_0) = \langle A_1, A_2 \rangle,$$

dove

$$A_j = [\delta \cdot \alpha_j \cdot i(\delta)], \quad j = 1, 2, \quad (7.6)$$

è la classe in  $\pi_1(U_1, x_0)$  del laccio  $\delta \cdot \alpha_j \cdot i(\delta) : I \rightarrow \mathbb{T}^2$  di base  $x_0$  (qui, come al solito, “ $\cdot$ ” denota la concatenazione e  $i(\delta)$  l’arco definito da  $i(\delta)(t) = \delta(1-t)$ ).

Sia  $\tilde{c}$  il cerchio di  $I^2$  passante per  $\tilde{x}_0$  centrato in  $\tilde{y}$ . Allora  $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$  si retrae per deformazione (forte) a  $\tilde{c}$  e quindi  $U_1 \cap U_2$  si retrae per deformazione (forte) a  $c = \pi(\tilde{c})$ . Si ha quindi che

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \cong \langle [\gamma] \rangle,$$

dove  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{T}^2$  è il laccio di base  $x_0$  dato da  $\gamma = \pi(\tilde{\gamma})$  e  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow I^2$  è il laccio di base  $\tilde{x}_0$  ottenuto percorrendo  $\tilde{c}$  e compiendo un singolo giro.

Siamo nelle ipotesi del Corollario 7.4.1. Dobbiamo quindi scrivere  $\varphi_1([\gamma])$  in termini dei generatori  $A_1$  e  $A_2$  di  $\pi_1(U_1, x_0)$ , dove gli  $A_j$  sono dati dalla (7.6). Vogliamo dimostrare che

$$\varphi_1([\gamma]) = A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1}. \quad (7.7)$$

Per fare questo, sia  $\tilde{\sigma} : I \rightarrow I^2$  il laccio di base  $\tilde{x}_0$  ottenuto come concatenazione  $\tilde{\delta} \cdot q \cdot i(\tilde{\delta})$  dove  $q : I \rightarrow I^2$  è il laccio di base  $\tilde{x}_1 = (0, 0)$  ottenuto percorrendo una volta in senso orario il bordo del quadrato. Allora esiste un’omotopia  $\tilde{F} : I^2 \rightarrow \tilde{U}_1$  relativa a  $\{0, 1\}$  tra  $\tilde{\gamma}$  e  $\tilde{\sigma}$  cioè, con le notazioni della dimostrazione dal Teorema 7.1.1,  $\tilde{\gamma} \sim_{\tilde{U}_1} \tilde{\sigma}$ . Segue che  $\gamma \sim_{U_1} \sigma$ ,  $\sigma = \pi(\tilde{\sigma})$ , tramite l’omotopia  $F = \pi \circ \tilde{F} : I^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ . Osserviamo che  $\sigma : I \rightarrow U_1$  è il laccio di base  $x_0$  dato da

$$\sigma = \delta \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot i(\alpha_1) \cdot i(\alpha_2) \cdot i(\delta).$$

Allora

$$\gamma \sim_{U_1} \sigma \sim_{U_1} \delta \cdot \alpha_1 \cdot i(\delta) \cdot \delta \cdot \alpha_2 \cdot i(\delta) \cdot \delta \cdot i(\alpha_1) \cdot i(\delta) \cdot \delta \cdot i(\alpha_2) \cdot i(\delta)$$

e quindi

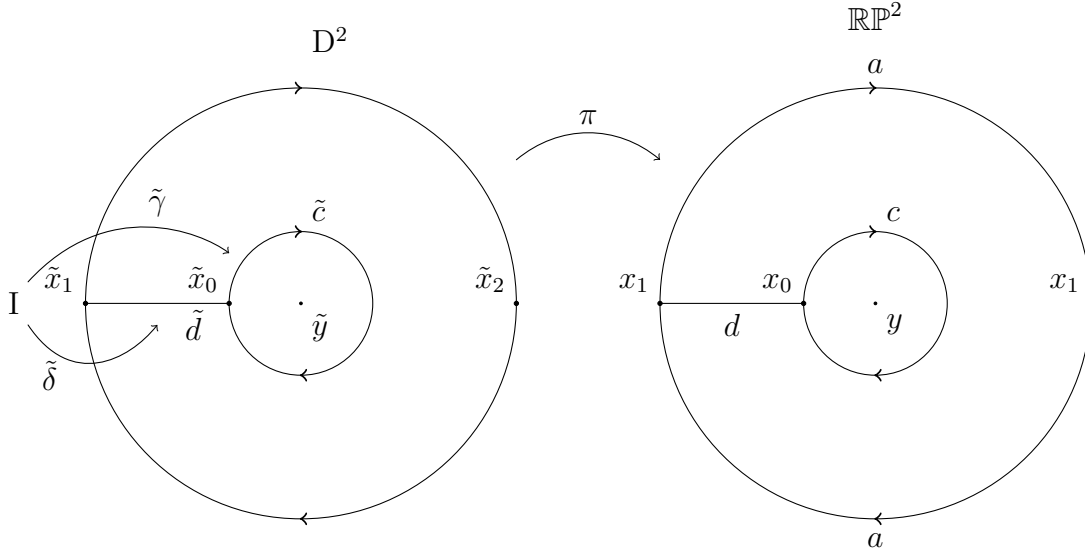
$$\varphi_1([\gamma]) = [\gamma]_{U_1} = A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1}$$

ossia la (7.7). Segue allora dal Corollario 7.4.1 che

$$\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) \cong \langle A_1, A_2 \mid A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1} \rangle$$

il quale, per l’Esempio 6.3.3 è omeomorfo, a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Abbiamo così ottenuto una dimostrazione alternativa del fatto che il gruppo fondamentale di  $\mathbb{T}^2$  è isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  in accordo con il Corollario 4.2.4.

**Esempio 7.4.3** (gruppo fondamentale del proiettivo reale) Calcoliamo, infine. il gruppo fondamentale del proiettivo reale  $\mathbb{RP}^n$ ,  $n \geq 2$ . Cominciamo dal caso  $n = 2$ . Con un ragionamento simile a quello del punto precedente e seguendo le indicazioni del seguente disegno



non è difficile dimostrare che:

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) = \langle A \mid A^2 \rangle = \mathbb{Z}_2.$$

I dettagli sono lasciati come esercizio allo studente.

Per calcolare  $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$ , per  $n \geq 3$ , osserviamo che per la (7.5) abbiamo che

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \pi_1(\mathbb{RP}^n \setminus \{y_0\})$$

dove  $y_0$  è un punto qualunque di  $\mathbb{RP}^n$ . Sia  $y_0 = [1, 0, \dots, 0]$ . Allora  $\mathbb{RP}^n \setminus \{y_0\}$  si retrae per deformazione su  $\mathbb{RP}^{n-1} \cong H = \{[x_0, x_1, \dots, x_n] \mid x_0 \neq 0\}$  tramite la retrazione

$$r : \mathbb{RP}^n \setminus \{y_0\} \rightarrow H \cong \mathbb{RP}^{n-1} : [x_0, \dots, x_n] \mapsto [0, x_1, \dots, x_n].$$

Infatti il fatto che  $r$  sia una retrazione per deformazione si ottiene tramite l'omotopia  $F : \mathbb{RP}^n \setminus \{y_0\} \times I \rightarrow \mathbb{RP}^n \setminus \{y_0\}$  definita da:

$$F([x], t) = [(1-t)x_0, x_1, \dots, x_n], \quad [x] = [x_0, x_1, \dots, x_n],$$

analogamente a quello fatto per il proiettivo complesso (cfr. (7.4)). Segue che

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \pi_1(\mathbb{RP}^n \setminus \{y_0\}) \cong \pi_1(\mathbb{RP}^{n-1}).$$

Quindi, per induzione su  $n \geq 2$ , si ottiene che  $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$  in accordo con il Teorema 4.3.2.

## 7.5 Esercizi

**Esercizio 7.1** Sia  $X = U_1 \cup U_2$  uno spazio topologico connesso per archi unione di due aperti  $U_1$  e  $U_2$ . Dimostrare che se  $U_1 \cap U_2$  è connesso per archi allora  $U_1$  e  $U_2$  sono connessi per archi. (Suggerimento: imitare la dimostrazione della prima parte del Teorema 7.1.1).

**Esercizio 7.2** Dimostrare che lo spazio proiettivo complesso  $\mathbb{CP}^n$  è una varietà topologica compatta e connessa di dimensione  $2n$  (cfr. Esempio 7.2.4).

**Esercizio 7.3** Calcolare il gruppo fondamentale dello spazio  $X$  unione di  $n$  circonferenze di  $\mathbb{R}^2$  di centro i punti  $P_j$  dell'asse delle ascisse di coordinate  $P_j = (2j - 1, 0)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , e di raggio unitario.

**Esercizio 7.4** Calcolare il gruppo fondamentale del complementare di  $k$  punti in  $S^2$ .

**Esercizio 7.5** Dimostrare che la “salsiccia”  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \sin^2(\pi z)\}$  e la “collana”  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = \max(0, \sin(\pi z))\}$  sono semplicemente connessi.

**Esercizio 7.6** Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in  $\mathbb{R}^3$  dell'unione dei 3 semiassi coordinati

$$\{y = z = 0, x \geq 0\} \cup \{z = x = 0, y \geq 0\} \cup \{y = x = 0, z \geq 0\}.$$

**Esercizio 7.7** Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in  $\mathbb{R}^3$  dell'unione dei 3 semiassi positivi coordinati

$$\{y = z = 0, x > 0\} \cup \{z = x = 0, y > 0\} \cup \{y = x = 0, z > 0\}.$$

**Esercizio 7.8** Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in  $\mathbb{R}^3$  di

$$\{z = y = 0, x \geq 1\} \cup \{y = 0, x^2 + z^2 = 1\}.$$

(Suggerimento: usare le idee sviluppate nell'Esempio 7.3.7).

**Esercizio 7.9** Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in  $\mathbb{R}^3$  dell'unione di una retta e di un cerchio distinguendo tutte le possibilità che si possono presentare. (Suggerimento: stesso dell'esercizio precedente).

**Esercizio 7.10** Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in  $\mathbb{R}^3$  di due rette (risp. due cerchi) distinguendo tutte le possibilità che si possono presentare. (Suggerimento: stesso dell'esercizio precedente).

**Esercizio 7.11** Siano  $X_1$  e  $X_2$  due spazi topologici connessi per archi con gruppi fondamentali rispettivamente  $G_1$  e  $G_2$ . Costruire uno spazio topologico con gruppo fondamentale  $G_1 * G_2$  (Suggerimento: considerare lo spazio topologico  $X$  ottenuto come unione disgiunta dei tre spazi  $X_1$ ,  $X_2$  e  $[0, 1]$  con la relazione d'equivalenza che identifica un punto  $x_1 \in X_1$  con il punto  $0 \in [0, 1]$ , un punto  $x_2 \in X_2$  con il punto  $1 \in [0, 1]$  e che identifica gli altri punti a se stessi).

**Esercizio 7.12** Dimostrare che  $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}_2$  usando il Corollario 7.4.1 e le indicazioni fornite nell'Esempio 7.4.3.



# Capitolo 8

## Classificazione delle superfici

In questo capitolo daremo un'idea della classificazione delle superfici <sup>1</sup> (varietà topologiche di dimensione due) compatte e connesse con o senza bordo e calcoleremo il loro gruppo fondamentale. Lo studente è rinviato a [8] e [12] in bibliografia per una descrizione più completa e dettagliata.

### 8.1 Somma connessa di due superfici

Date due superfici  $S_1$  e  $S_2$  possiamo costruire una nuova superficie, chiamata la **somma connessa** di  $S_1$  e  $S_2$  e denotata con  $S_1 \# S_2$  come quella superficie ottenuta togliendo un disco aperto da ognuna delle superfici e poi incollando insieme i bordi dei due dischi. Più precisamente scegliamo  $D_1 \subset S_1$  e  $D_2 \subset S_2$  entrambi omeomorfi al disco unitario  $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $S'_1 = S_1 \setminus \text{Int}(D_1)$  e  $S'_2 = S_2 \setminus \text{Int}(D_2)$  e  $h : \text{Fr}(D_1) \rightarrow \text{Fr}(D_2)$  un omeomorfismo. La **somma connessa** di  $S_1$  e  $S_2$  è definita come lo spazio quoziente

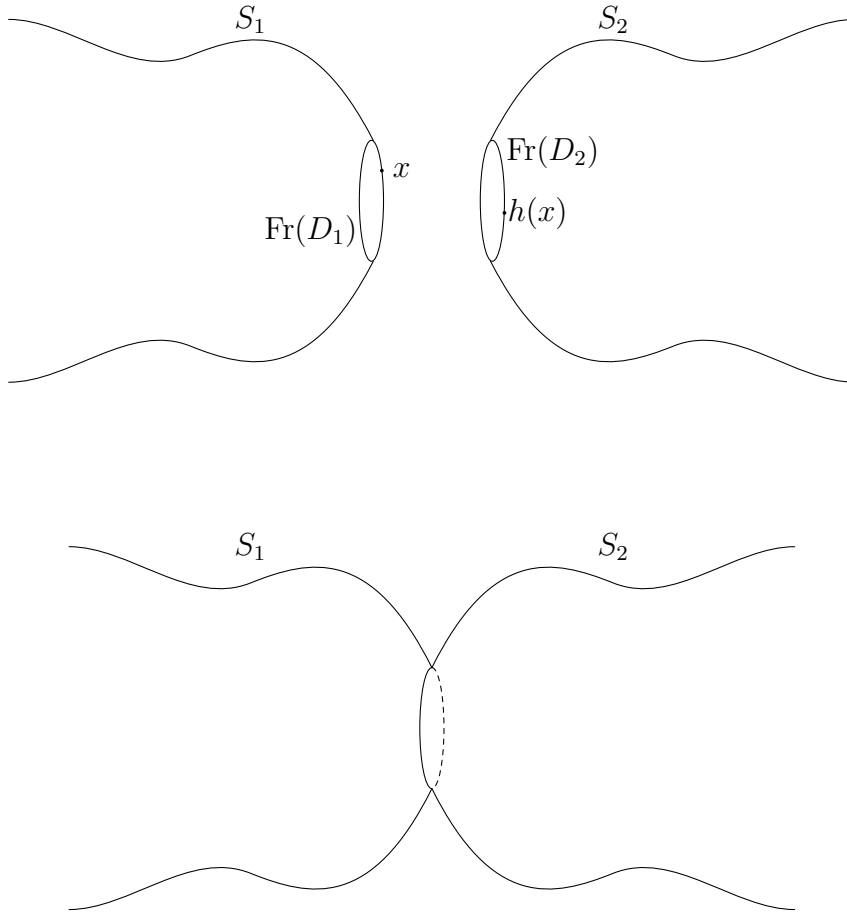
$$S_1 \# S_2 = S'_1 \times \{1\} \cup S'_2 \times \{2\} / \sim_h,$$

dove  $\sim_h$  è la relazione d'equivalenza che identifica i punti delle frontiere di  $D_1$  e  $D_2$  cioè  $x \sim h(x)$  per ogni  $x \in \text{Fr}(D_1)$  (i punti di  $S'_1 \times \{1\}$  e di  $S'_2 \times \{2\}$  vengono

---

<sup>1</sup>Osserviamo, che si può dimostrare che una curva (varietà topologica di dimensione uno) compatta e connessa è omeomorfa a  $S^1$ .

identificati a se stessi).



Vale il seguente fondamentale risultato che enunciamo senza dimostrazione.

**Teorema 8.1.1** *Siano  $S_1$  e  $S_2$  due superfici. La loro somma connessa  $S_1 \# S_2$  è una superficie. Inoltre il tipo <sup>2</sup> topologico di  $S_1 \# S_2$  non dipende ne dai dischi  $D_1$  e  $D_2$  scelti ne dall'omeomorfismo  $h : Fr(D_1) \rightarrow Fr(D_2)$ .*

**Esempio 8.1.2** Sia  $S^2$  sia la sfera. Allora

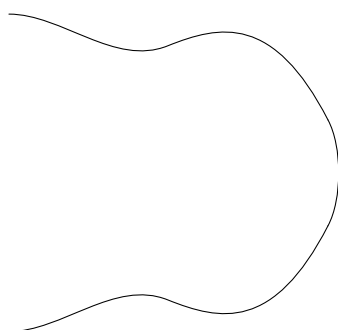
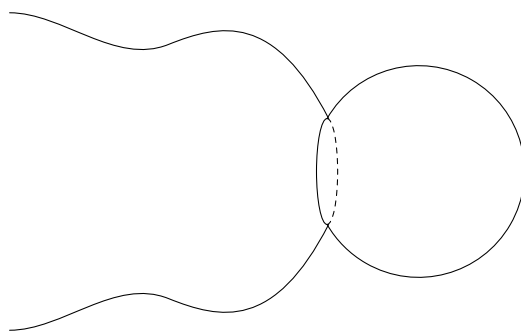
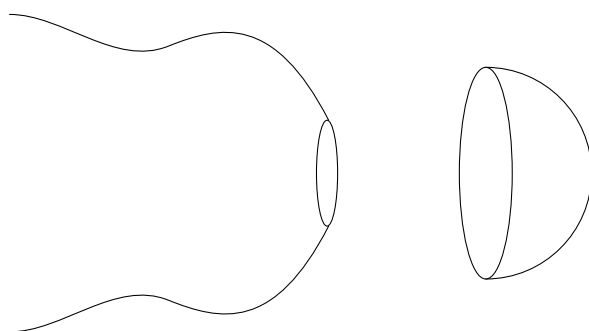
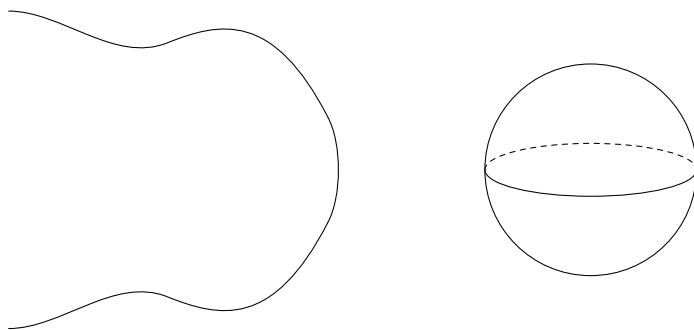
$$S \# S^2 \cong S$$

per ogni superficie  $S$ . Questo segue dal fatto che se tolgo da  $S^2$  il disco aperto  $D_2 = S^2 \cap \{z > 0\}$  si ottiene un disco chiuso.

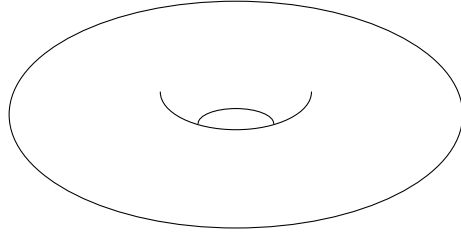
---

<sup>2</sup>Due superfici sono dello stesso **tipo topologico** se sono omeomorfe

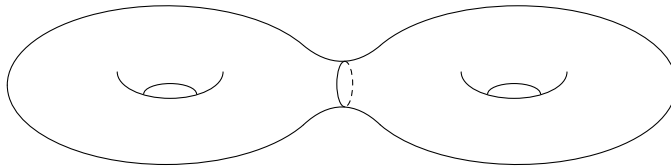
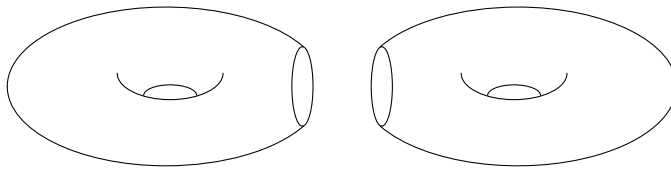




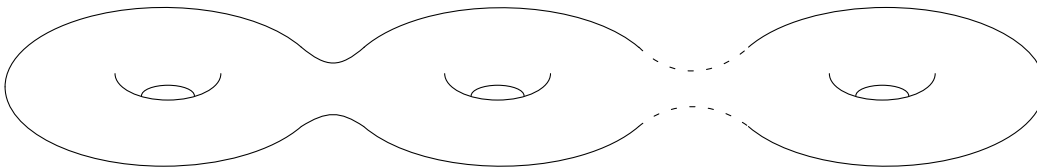
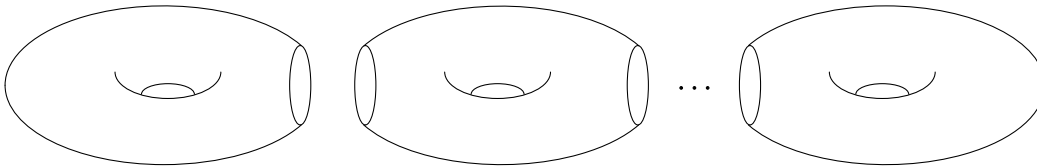
**Esempio 8.1.3** Siano  $S_1 = S_2 \cong \mathbb{T}^2$



Allora la superficie  $S_1 \# S_2$  è un toro con due buchi.

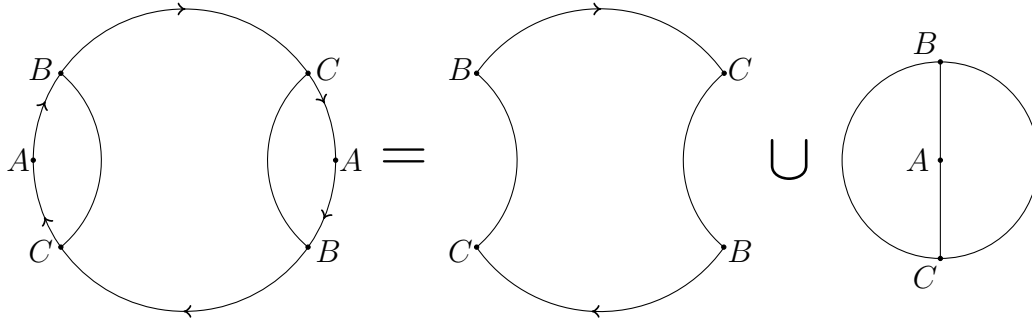


Più in generale se  $S_1 = \dots = S_g \cong \mathbb{T}^2$  allora si ottiene un toro con  $g$  buchi.

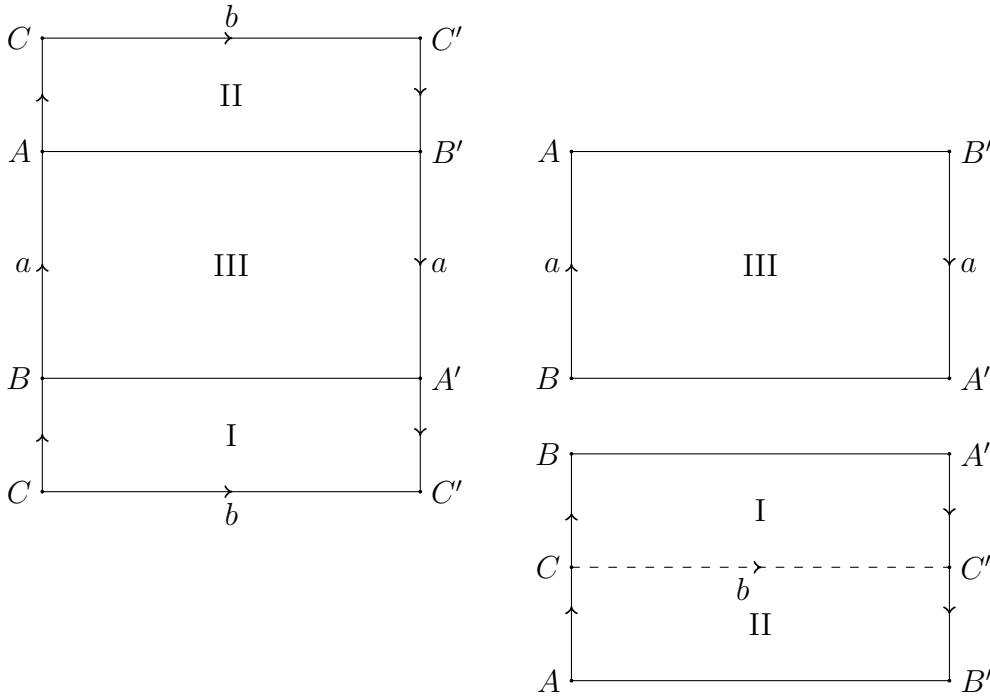


**Esempio 8.1.4** Sia  $\mathbb{RP}^2$  il piano proiettivo reale e  $S$  una superficie. Allora la somma connessa  $S \# \mathbb{RP}^2$  si ottiene togliendo un disco aperto di  $S$  e incollando la frontiera del nastro di Möbius (che è omeomorfa a  $S^1$ ) alla frontiera di tale disco.

Infatti se  $D$  è un disco in  $\mathbb{RP}^2$  allora  $\mathbb{RP}^2 \setminus \text{Int}(D)$  è omeomorfo ad un nastro di Möbius  $N$ :



**Esempio 8.1.5** La somma connessa  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$  è omeomorfa alla bottiglia di Klein, in simboli  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong \text{Klein}$ . Infatti, dall'esempio precedente,  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$  si ottiene unendo due nastri di Möbius lungo la loro frontiera (che è un cerchio). D'altra parte anche la bottiglia di *Klein* si può ottenere come somma connessa di due nastri di Möbius uniti lungo la loro frontiera come mostra la seguente figura:



La seguente proposizione mostra che la somma connessa di un toro e di un piano proiettivo reale è omeomorfa alla somma connessa di tre piani proiettivi reali (si veda anche l'Esempio 8.6.11 per una dimostrazione alternativa).

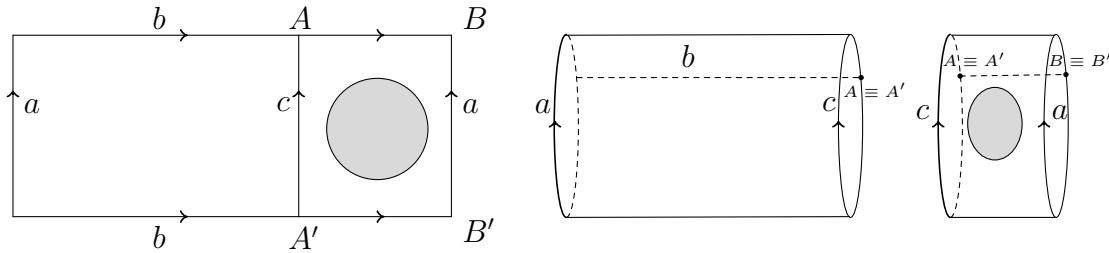
**Proposizione 8.1.6**

$$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2.$$

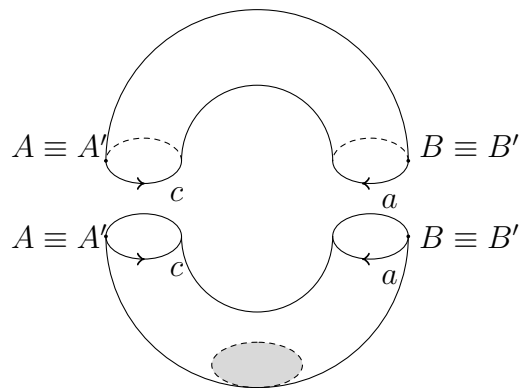
**Dimostrazione:** Dall'Esempio 8.1.5 sappiamo che  $Klein \cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ . Per l'associatività della somma connessa è sufficiente allora dimostrare che

$$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong Klein \# \mathbb{RP}^2.$$

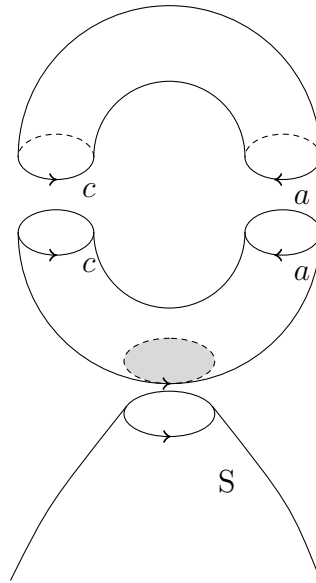
Cominciamo a vedere come si ottiene la somma connessa  $\mathbb{T}^2 \# S$  con una superficie  $S$  (non necessariamente  $\mathbb{RP}^2$ ). Questa somma connessa si ottiene togliendo un disco aperto  $\text{Int } D_1$  da  $\mathbb{T}^2$  togliendo un disco aperto  $\text{Int } D_2$  dalla superficie  $S$  e incollando il bordo dei due dischi lungo la loro frontiera. Possiamo visualizzare  $\mathbb{T}^2 \setminus \text{Int}(D_1)$  come segue:



dove il disco  $D_1$  è rappresentato dalla zona ombreggiata. Oppure come:



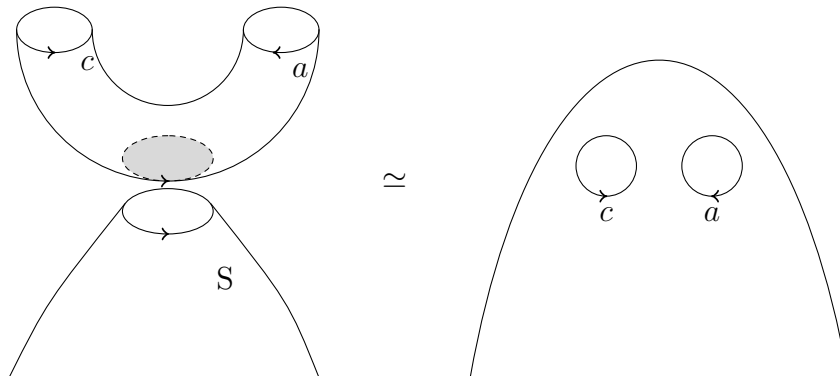
La somma connessa  $\mathbb{T}^2 \# S$  può essere visualizzata come segue:



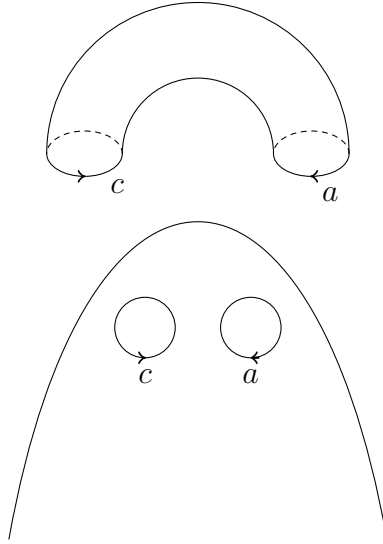
Quindi  $\mathbb{T}^2 \# S$  può essere ottenuta in due fasi:

- nella prima fase uniamo la parte di  $\mathbb{T}^2$  data da  $ABA'B' \setminus \text{Int } D_1$  alla superficie  $S \setminus \text{Int } D_2$ ;
- nella seconda fase uniamo il resto di  $\mathbb{T}^2$  cioè  $\mathbb{T}^2 \setminus ABA'B'$ .

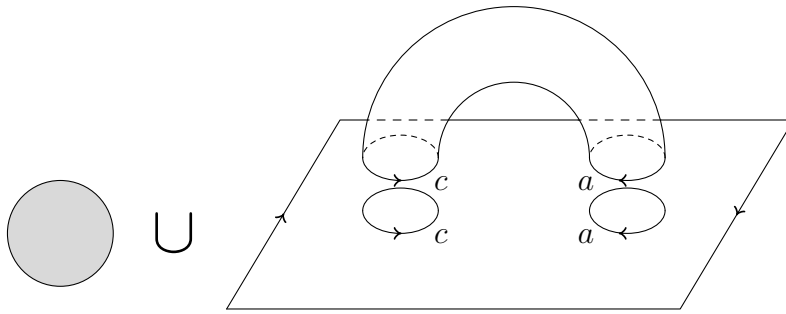
Nella prima fase stiamo facendo la somma connessa del tubo  $ABA'B'$  con la superficie  $S$ . Questo tubo è omeomorfo alla sfera  $S^2$  con due buchi (cioè  $S^2$  meno due dischi aperti). Visto che  $S^2$  è l'elemento neutro rispetto alla somma connessa si ottiene semplicemente la superficie  $S$  con due buchi:



La seconda fase consiste nel connettere insieme la superficie  $S$  con due buchi con un tubo costituito da  $\mathbb{T}^2 \setminus ABA'B'$ :

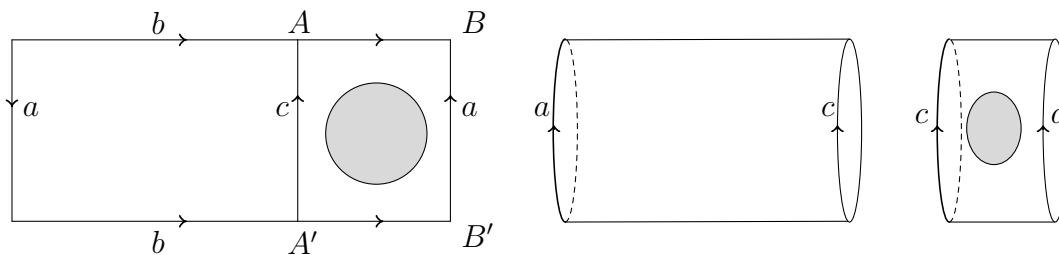


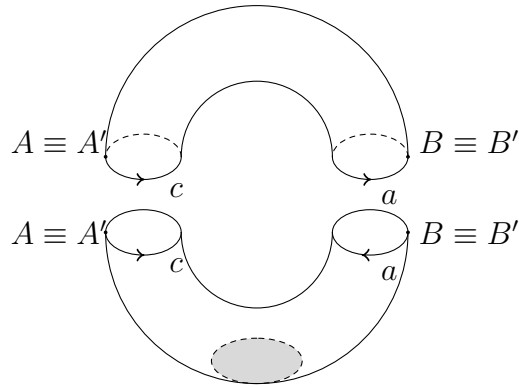
Consideriamo ora il caso  $S = \mathbb{RP}^2$ . Se togliamo da  $\mathbb{RP}^2$  un disco aperto otteniamo un nastro di Möbius (cfr. Esempio 8.1.4). Quindi la somma connessa di  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2$  si può ottenere togliendo due dischi aperti dal nastro di Möbius e attaccandoci  $\mathbb{T}^2 \setminus ABA'B'$  e poi dopo riattaccando il disco alla frontiera del nastro di Möbius. Il tutto è visualizzato nella seguente figura:



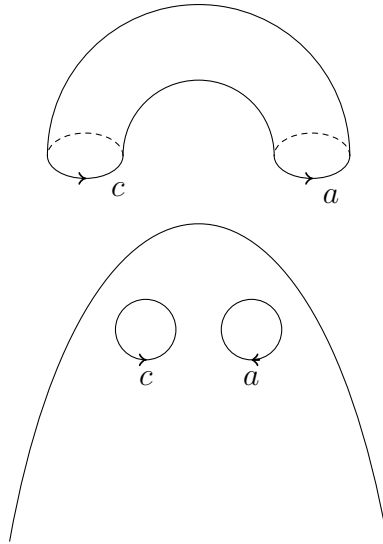
Disegno 1

Analogamente possiamo visualizzare  $Klein \setminus \text{Int } D_1$  come nelle figure seguenti (si notino le orientazioni di  $a$ ):

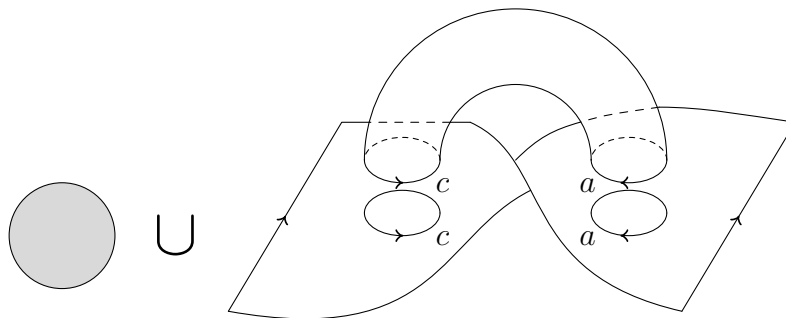




Con un ragionamento simile a quello precedente la somma connessa  $Klein \# S$  della bottiglia di Klein con una superficie  $S$  consiste nel connettere insieme la superficie  $S$  con due buchi con un tubo costituito da  $Klein \setminus ABA'B'$ :



Quindi (analogamente al caso precedente) la somma connessa di  $Klein \# \mathbb{RP}^2$  si può ottenere togliendo due dischi aperti dal nastro di Möbius e attaccandoci  $Klein \setminus ABA'B'$  e poi dopo riattaccando il disco alla frontiera del nastro di Möbius. Il tutto è visualizzato nella seguente figura:



Disegno 2

Confrontando i Disegni 1 e 2 si deduce che  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong Klein \# \mathbb{RP}^2$ , quello che si voleva dimostrare.  $\square$

Osserviamo che la somma connessa definisce una struttura di monoide commutativo sull'insieme di tutte le superfici compatte e connesse. Infatti vale l'associatività

$$(S_1 \# S_2) \# S_3 \cong S_1 \# (S_2 \# S_3),$$

la commutatività  $S_1 \# S_2 \cong S_2 \# S_1$  e l'elemento neutro è la sfera (per l'Esempio 8.1.2). Questo monoide non è un gruppo non esistendo l'inverso di una data superficie diversa dalla sfera.

Il seguente fondamentale teorema mostra che ogni superficie compatta e connessa può essere ottenuta come somma connessa di un numero finito di copie di  $\mathbb{T}^2$  e  $\mathbb{RP}^2$  e che il numero di copie utilizzate determina la superficie a meno di omeomorfismi (un'idea della dimostrazione di questo teorema verrà fornita nel Paragrafo 8.3).

**Teorema 8.1.7** (*classificazione delle superfici compatte e connesse*) *Una superficie compatta e connessa è omeomorfa ad una e una sola delle seguenti superfici:*

- la sfera  $S^2$ ;
- la somma connessa di numero finito di tori;
- la somma connessa di un numero finito di piani proiettivi reali.

## 8.2 Presentazioni poligonali

Consideriamo una **regione poligonale**  $P$  chiusa nel piano di vertici  $p_0, \dots, p_n$ ,  $p_0 = p_n$ . Il segmento che unisce  $p_i$  con  $p_{i+1}$  si chiama un **lato** di  $P$ . L'unione dei lati di  $P$  verrà chiamato il **bordo** di  $P$  e sarà indicato con  $\partial P$ ;  $P \setminus \partial P$  verrà chiamato l'**interno** di  $P$  e denotato con  $\text{Int } P$ .

Sia  $L$  un segmento di  $\mathbb{R}^2$ . Un'**orientazione** di  $L$  è semplicemente un ordine dei suoi estremi. Il primo vertice  $p$  è chiamato il **punto iniziale** mentre il secondo vertice  $q$  è chiamato il **punto finale** del segmento orientato. Diremo che  $L$  è orientato da  $p$  a  $q$  e disegneremo l'orientazione tramite un freccia che va da  $p$  a  $q$ . Se  $\tilde{L}$  è un altro segmento orientato da  $\tilde{p}$  a  $\tilde{q}$  denoteremo con  $h : L \rightarrow \tilde{L}$  l'omeomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che porta il punto  $x = (1 - t)p + tq$  nel punto  $h(x) = (1 - t)\tilde{p} + t\tilde{q}$  e chiameremo quest'omeomorfismo l'**applicazione lineare positiva** da  $L$  a  $\tilde{L}$ .



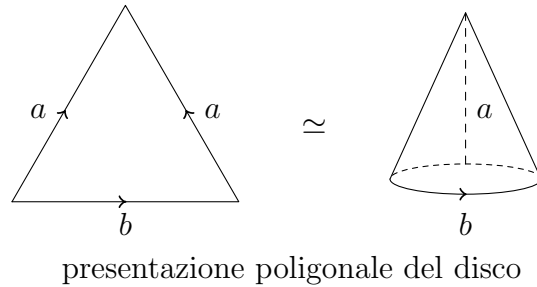
Sia  $P$  una regione poligonale nel piano. Un'**etichettatura** dei lati di  $P$  è un'applicazione dall'insieme dei lati di  $P$  all'insieme delle etichette. Data un'orientazione di ogni lato ed un'etichettatura definiamo una relazione d'equivalenza sui punti di  $P$  generata come segue:

- ogni punto  $\text{Int } P$  è equivalente a se stesso;
- due lati  $L$  e  $\tilde{L}$  che hanno la stessa etichetta vengono identificati tramite l'applicazione lineare positiva da  $L$  a  $\tilde{L}$ , cioè  $x \in L$  è equivalente a  $h(x) \in \tilde{L}$ .

Lo spazio quoziente  $X$  ottenuto da questa relazione d'equivalenza, dotato della topologia quoziente si dirà ottenuto da  $P$  **incollando i lati insieme** in accordo con le relative orientazioni e etichette.

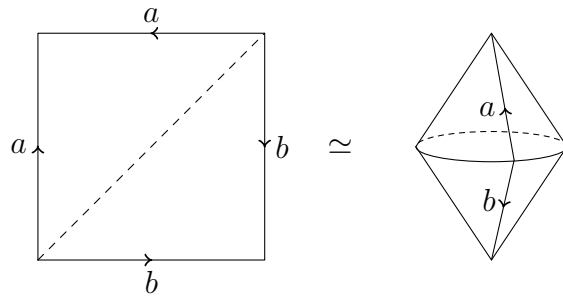
Sia  $P$  una regione poligonale chiusa di vertici  $p_0, \dots, p_n$ ,  $p_0 = p_n$ . Fissate le orientazioni dei segmenti di  $\partial P$  e una loro etichettatura, denotiamo con  $a_1, \dots, a_m$  le etichette distinte assegnate ad ogni lato di  $P$ . Per ogni  $k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , sia  $a_{i_k}$  l'etichetta associata al lato  $p_{k-1}p_k$  e sia  $\epsilon_k = +1$  (risp.  $-1$ ) se l'orientazione assegnata al lato va da  $p_{k-1}$  a  $p_k$  (risp. da  $p_k$  a  $p_{k-1}$ ). Allora il numero dei lati, le loro etichettature e la loro orientazione sono completamente determinati dal simbolo  $a_{i_1}^{\epsilon_1} a_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}$ . Chiameremo questo simbolo una **presentazione poligonale di lunghezza  $n$**  dello spazio quoziente  $X$ . Di solito non scriveremo l'esponente che è uguale a 1. Osserviamo che una permutazione ciclica dei termini di un'etichettatura cambierà lo spazio quoziente  $S$  solo a meno di omeomorfismi.

**Esempio 8.2.1** Il disco unitario  $D^2$  può essere descritto dalla presentazione poligonale di lunghezza tre  $aa^{-1}b^{-1}$ :



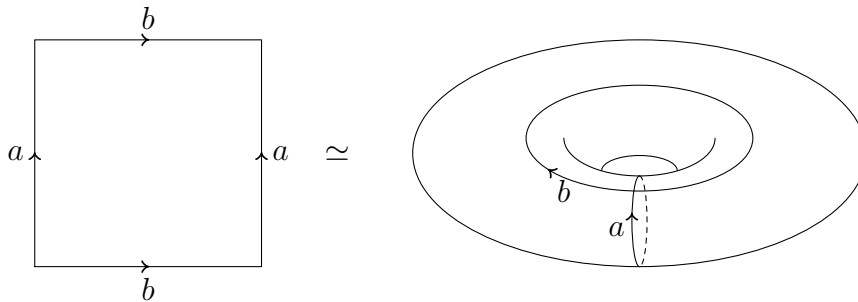
**Esempio 8.2.2** La sfera  $S^2$  può essere descritta dalla presentazione poligonale

di lunghezza quattro  $aa^{-1}bb^{-1}$ :



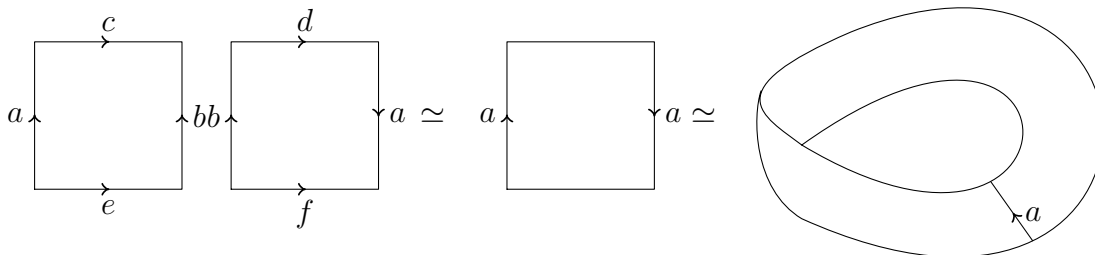
presentazione poligonale della sfera

**Esempio 8.2.3** Per quanto riguarda il toro conosciamo già una sua presentazione poligonale di lunghezza 4 e cioè  $aba^{-1}b^{-1}$ :

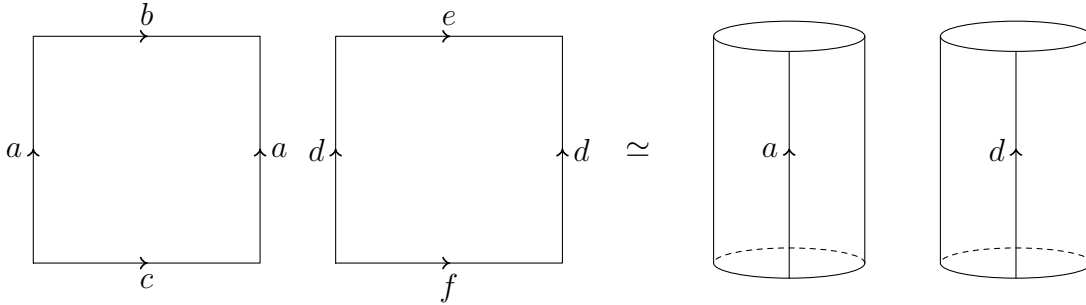


presentazione poligonale del toro

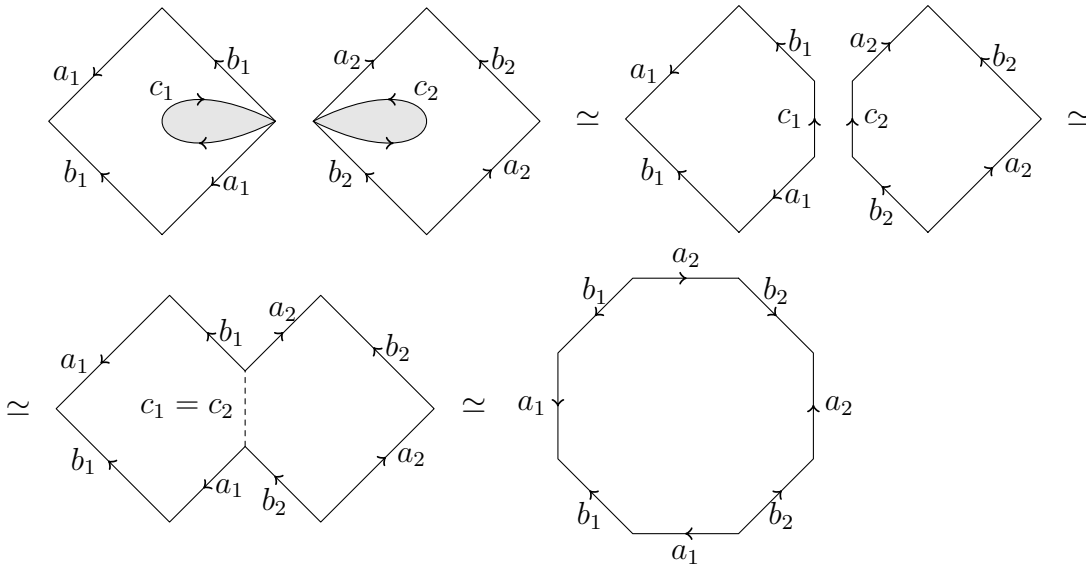
**Esempio 8.2.4** Non c'è nessun motivo per considerare una sola regione poligonale. Dato un numero finito  $P_1, \dots, P_k$  di regioni poligonali disgiunte, con etichettature e con i lati orientati si può considerare lo spazio quoziente  $X$  ottenuto incollando i lati come nel caso di una sola regione poligonale. Lo spazio  $X$  potrebbe essere connesso oppure no. Per esempio il nastro di Möbius si può rappresentare come:



Oppure due cilindri disgiunti posso essere ottenuti come:



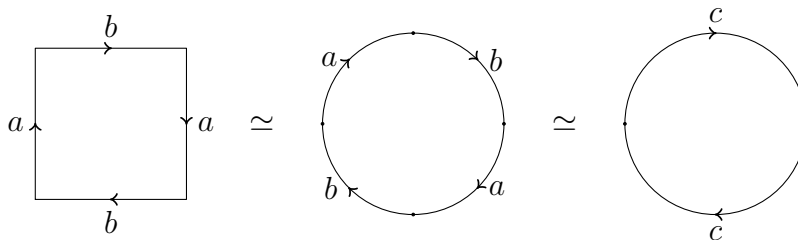
**Esempio 8.2.5** La somma connessa di due tori ha la presentazione poligonale di lunghezza otto,  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ :



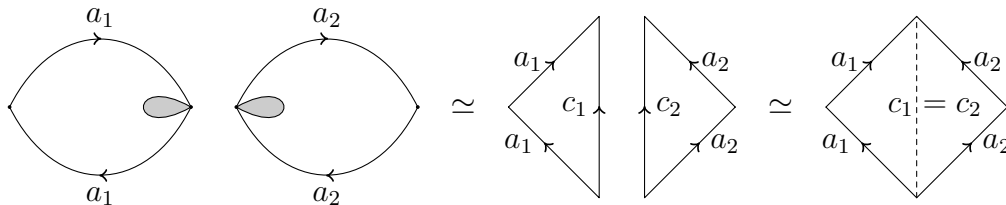
Si deduce allora che la somma connessa di  $g$  tori potrà essere descritta come la seguente presentazione poligonale di lunghezza  $4g$ :

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \quad (8.1)$$

**Esempio 8.2.6** Una presentazione poligonale di  $\mathbb{RP}^2$  di lunghezza quattro è data da  $abab$ :



**Esempio 8.2.7** La somma connessa di due copie di  $\mathbb{RP}^2$  (che è omeomorfa alla bottiglia di Klein per l'Esempio 8.1.5) ha la seguente presentazione poligonale di lunghezza quattro:  $a_1a_1a_2a_2$ :



In generale la somma connessa di  $g$  copie di  $\mathbb{RP}^2$  potrà essere descritta la seguente presentazione poligonale di lunghezza  $2g$ :

$$a_1a_1a_2a_2 \cdots a_ga_g. \quad (8.2)$$

Osserviamo che nelle presentazioni poligonali fino ad ora descritte, se si tratta di una superficie, allora ogni lato viene identificato esattamente ad un altro lato. Ci si potrebbe chiedere se questo fatto determina una superficie. E in effetti la risposta è sì come mostra il seguente risultato.

**Teorema 8.2.8** Sia  $X$  uno spazio topologico che ammette una presentazione poligonale  $a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}$ ,  $\epsilon_j = \pm 1$ , e siano  $a_1, \dots, a_m$  le etichette distinte. Allora  $X$  è una superficie compatta e connessa se e solo se ogni lato si identifica esattamente con un altro lato (quindi  $n = 2m$ ). Se inoltre i vertici di  $P$  vengono identificati tutti ad uno stesso punto allora il gruppo fondamentale di  $X$  ha la seguente presentazione:

$$\pi_1(X) \cong \langle A_1, \dots, A_m \mid A_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots A_{i_n}^{\epsilon_n} \rangle.$$

**Dimostrazione:** Diamo un'idea della dimostrazione lasciando i dettagli allo studente volenteroso. Lo spazio topologico  $X$  con la topologia quoziente è compatto e connesso in quanto quoziente di  $P$  che è compatto e connesso. Si verifica facilmente che l'applicazione quoziente  $\pi : P \rightarrow S$  è chiusa, ossia che se  $C$  è un chiuso in  $P$  non è difficile vedere che  $\pi^{-1}(\pi(C))$  è chiuso in  $P$ . Segue allora dal seguente Lemma 8.2.9 che  $X$  è di Hausdorff. Il fatto che  $X$  sia localmente euclideo di dimensione due se e solo se i lati della regione poligonale sono pari si verifica considerando separatamente i vertici e i lati della poligonazione. La seconda parte del teorema si ottiene seguendo la falsariga del calcolo del gruppo fondamentale di  $T^2$  e  $\mathbb{RP}^2$  (cfr. Esempi 7.4.2 e 7.4.3).  $\square$

**Lemma 8.2.9** Siano  $X$  e  $Y$  spazi topologici,  $X$  compatto e di Hausdorff. Sia  $\pi : X \rightarrow Y$  un'applicazione suriettiva e chiusa. Allora  $Y$  è compatto e di Hausdorff.

**Dimostrazione:** Lo spazio topologico  $Y$  è compatto in quanto immagine del compatto  $X$  tramite l'applicazione continua  $\pi$ . Per dimostrare che  $Y$  è di Hausdorff siano  $y_1$  e  $y_2$  due punti distinti di  $Y$ . Allora esistono due punti  $x_1$  e  $x_2$  in  $X$  tali che  $y_1 = \pi(x_1)$  e  $y_2 = \pi(x_2)$ . Siccome  $X$  è di Hausdorff i suoi punti sono chiusi e quindi  $y_1$  e  $y_2$  sono chiusi essendo l'immagine di due chiusi  $x_1$  e  $x_2$  tramite  $\pi$  che è chiusa. Il fatto che  $\pi$  sia un'identificazione implica che  $\pi^{-1}(y_1)$  e  $\pi^{-1}(y_2)$  sono due chiusi disgiunti di  $X$ . Essendo  $X$  compatto e di Hausdorff allora  $X$  è normale (si veda il corso di topologia generale). Quindi esistono due aperti disgiunti  $U_1$  e  $U_2$  di  $X$  tali che  $\pi^{-1}(y_1) \subset U_1$  e  $\pi^{-1}(y_2) \subset U_2$ . Poiché  $\pi$  è chiusa  $\pi(X \setminus U_1)$  e  $\pi(X \setminus U_2)$  sono due chiusi in  $Y$  tali che  $y_i \notin \pi(X \setminus U_j)$ ,  $j = 1, 2$ . Segue che  $W_1 = Y \setminus \pi(X \setminus U_1)$  e  $W_2 = Y \setminus \pi(X \setminus U_2)$  sono due aperti di  $Y$  che contengono rispettivamente  $y_1$  e  $y_2$ . Resta da far vedere che  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ . Supponiamo per assurdo che esista  $y \in W_1 \cap W_2 = Y \setminus (\pi(X \setminus U_1) \cup \pi(X \setminus U_2))$ . Allora  $y \notin \pi(X \setminus U_1) \cup \pi(X \setminus U_2)$ . Segue che  $\pi^{-1}(y) \cap (X \setminus U_j) = \emptyset$ ,  $j = 1, 2$ , quindi  $\pi^{-1}(y) \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , che è assurdo.  $\square$

Nel seguito indicheremo con  $g\mathbb{T}^2$ ,  $g \geq 0$ , la somma connessa di  $g$  tori con la convenzione che  $0\mathbb{T}^2 \cong S^2$ . Analogamente indicheremo con  $g\mathbb{RP}^2$ ,  $g \geq 1$ , la somma di  $g$  piani proiettivi reali. Osserviamo che la presentazioni poligonali di  $g\mathbb{T}^2$  data da (8.1) e di  $g\mathbb{RP}^2$  data da (8.2) identificano i vertici della regione poligonale tutti ad uno stesso punto. Dal Teorema 8.2.8 si ottiene allora il seguente risultato:

**Corollario 8.2.10** *Il gruppo fondamentale di  $g\mathbb{T}^2$  ha la seguente presentazione:*

$$\pi_1(g\mathbb{T}^2) = \langle A_1, B_1, \dots, A_g, B_g \mid A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} \rangle \quad (8.3)$$

*mentre il gruppo fondamentale di  $g\mathbb{RP}^2$  ha la seguente presentazione:*

$$\pi_1(g\mathbb{RP}^2) = \langle A_1, A_2, \dots, A_g \mid A_1^2 A_2^2 \dots A_g^2 \rangle. \quad (8.4)$$

## 8.3 Dimostrazione del teorema di classificazione

Possiamo ora dare un'idea della dimostrazione del teorema di classificazione delle superfici.

### Dimostrazione del Teorema 8.1.7

Sia  $S$  una superficie compatta e connessa. Supponiamo che esista una curva  $C \subset S$  chiusa e semplice (cioè senza autointersezioni) che non separi  $S$  (cioè tale che  $S \setminus C$  sia connesso). Si può dimostrare che un intorno di  $C$  in  $S$  è omeomorfo ad un cilindro o ad un nastro di Möbius. Rimuoviamo il cilindro o il nastro di

Möbius tranne il loro bordo (due cerchi nel caso del cilindro e un cerchio nel caso del nastro di Möbius) dalla superficie  $S$  e ricuciamoci sopra due dischi nel caso del cilindro o un disco nel caso del nastro di Möbius. Otteniamo così una nuova superficie  $S_1$ . Quindi  $S$  si ottiene da  $S_1$  attaccandoci un cilindro o un nastro di Möbius. Si hanno dunque tre possibilità (cfr. dimostrazione della Proposizione 8.1.6)

$$S = S_1 \# \mathbb{T}^2, \quad S = S_1 \# Klein, \quad S = S_1 \# \mathbb{RP}^2.$$

Consideriamo una curva chiusa semplice in  $S_1$  che non separi  $S_1$ . Ripetendo il procedimento precedente si ottiene una superficie  $S_2$  tale che

$$S_1 = S_2 \# \mathbb{T}^2, \quad S_1 = S_2 \# Klein, \quad S_1 = S_2 \# \mathbb{RP}^2.$$

Iterando il procedimento si ottiene dopo  $j$  passi una superficie  $S_j$  tale che

$$S = S_j \# j_1 \mathbb{T}^2 \# j_2 Klein \# j_3 \mathbb{RP}^2, \quad j = j_1 + j_2 + j_3,$$

dove stiamo indicando con  $j_1 \mathbb{T}^2$  (risp.  $j_2 Klein$  e  $j_3 \mathbb{RP}^2$ ) la somma connessa di  $j_1$  tori (risp.  $j_2$  bottiglie di Klein e  $j_3$  piani proiettivi). Si dimostra che dopo un numero finito  $k$  di passi il procedimento termina e cioè che ogni curva semplice chiusa in  $S_k$  separa  $S_k$ . Inoltre si dimostra <sup>3</sup> che l'unica superficie separata da ogni curva chiusa semplice è la sfera  $S^2$ . Otteniamo quindi che:

$$S = S^2 \# p \mathbb{T}^2 \# q Klein \# r \mathbb{RP}^2 \cong p \mathbb{T}^2 \# q Klein \# r \mathbb{RP}^2, \quad p, q, r \geq 0, \quad p + q + r = k.$$

Dalla Proposizione 8.1.6 e dall'Esempio 8.1.5 segue allora che:

$$S \cong \begin{cases} p \mathbb{T}^2 & \text{se } q + r = 0 \\ (2p + 2q + r) \mathbb{RP}^2 & \text{se } q + r > 0, \end{cases}$$

Quindi  $S$  è omeomorfa ad una somma connessa di un numero finito di tori o di piani proiettivi reali. Resta da dimostrare che  $S$  è omeomorfa ad una sola di queste superfici e quindi i seguenti fatti:

1. siano  $g, \tilde{g} \geq 0$ , se  $g \mathbb{T}^2$  è omeomorfo a  $\tilde{g} \mathbb{T}^2$  allora  $g = \tilde{g}$ ;
2. siano  $g, \tilde{g} \geq 1$ , se  $g \mathbb{RP}^2$  è omeomorfo a  $\tilde{g} \mathbb{RP}^2$  allora  $g = \tilde{g}$ ;
3. sia  $g \geq 0$  e  $\tilde{g} \geq 1$ ,  $g \mathbb{T}^2$  non è omeomorfa a  $\tilde{g} \mathbb{RP}^2$  per nessun  $g$  e  $\tilde{g}$ .

---

<sup>3</sup>Quest'affermazione anche se intuitivamente plausibile è un famoso teorema dovuto a Schönflies.

Supponiamo  $g\mathbb{T}^2 \cong \tilde{g}\mathbb{T}^2$  (risp.  $g\mathbb{RP}^2 \cong \tilde{g}\mathbb{RP}^2$ ). Segue dell'invarianza topologica del gruppo fondamentale (Teorema 2.3.1), da (8.3) (risp. (8.4)) e dall'Esempio 6.3.3 (risp. dall'Esempio 6.3.4) che

$$\mathbb{Z}^{2g} \cong \text{Ab}(\pi_1(g\mathbb{T}^2)) \cong \text{Ab}(\pi_1(\tilde{g}\mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^{2\tilde{g}}$$

(risp.

$$\mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2 \cong \text{Ab}(\pi_1(g\mathbb{RP}^2)) \cong \text{Ab}(\pi_1(\tilde{g}\mathbb{RP}^2)) \cong \mathbb{Z}^{\tilde{g}-1} \times \mathbb{Z}_2)$$

e quindi  $g = \tilde{g}$  (cfr. la classificazione dei gruppi abeliani finitamente generati, Teorema 6.1.1). D'altra parte  $\text{Ab}(\pi_1(g\mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^{2g}$  non può essere isomorfo a  $\text{Ab}(\pi_1(\tilde{g}\mathbb{RP}^2)) \cong \mathbb{Z}^{\tilde{g}-1} \times \mathbb{Z}_2$  per nessun  $g$  e  $\tilde{g}$  ( $\mathbb{Z}^{\tilde{g}-1} \times \mathbb{Z}_2$  ha, a differenza di  $\mathbb{Z}^{2g}$ , un elemento di ordine 2). Questo conclude la dimostrazione del teorema.  $\square$

**Osservazione 8.3.1** L'abelizzanzione  $\text{Ab}(\pi_1(S))$  del gruppo fondamentale  $\pi_1(S)$  di una superficie compatta e connessa si chiama il **primo gruppo omologia** della superficie  $S$ . Più in generale, il primo gruppo di omologia di uno spazio topologico connesso per archi  $X$  è dato da  $\text{Ab}(\pi_1(X))$ , l'abelianizzazione del suo gruppo fondamentale <sup>4</sup>.

La dimostrazione del Teorema 8.1.7 insieme all'invarianza omotopica del gruppo fondamentale (Corollario 2.4.3) mostra la validità del seguente risultato.

**Corollario 8.3.2** *Due superfici compatte e connesse sono omeomorfe se e solo se sono omotopicamente equivalenti.*

**Osservazione 8.3.3** La classificazione delle varietà topologiche di dimensione 3 (soluzione della **congettura di geometrizzazione di Thurston**) è stata ottenuta nei primi anni del 2000 da Gregori Perelman tramite l'uso di tecniche sofisticate di Geometria Riemanniana. Osserviamo che in dimensione 3 non è più vero come per le superfici (Corollario 8.3.2) che due varietà compatte e connesse sono omeomorfe se e solo se sono omotopicamente equivalenti. Dal risultato di Perelman si può dedurre (in modo non banale) che  $S^3$  è, a meno di omeomorfismi, l'unica varietà di dimensione 3 compatta e semplicemente connessa. Questo fornisce una soluzione ad una famosa **congettura di Poincaré**. In dimensione due l'analogo della congettura di Poincaré (cioè che una superficie compatta e semplicemente connessa è omeomorfa alla sfera  $S^2$ ) segue immediatamente dal Teorema

---

<sup>4</sup>Lo studente che seguirà un corso sull'omologia incontrerà una definizione molto diversa del primo gruppo di omologia di uno spazio topologico.

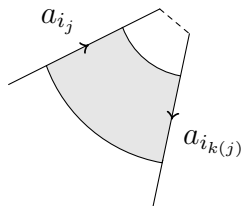
8.1.7. In dimensione  $\geq 4$  esistono varietà compatte e semplicemente connesse che non sono omeomorfe alla sfera (per esempio  $S^2 \times S^2$ ). La **congettura di Poincarè generalizzata** asserisce che una varietà  $n$ -dimensionale compatta e omotopicamente equivalente a  $S^n$  è omeomorfa a  $S^n$ . Questa congettura è stata dimostrata in dimensione  $n \geq 5$  da Stephen Smale agli inizi degli anni 60 e in dimensione 4 da Michael Freedman agli inizi degli anni 80. Entrambi vinsero la medaglia fields per i loro risultati. Per quanto riguarda le varietà di dimensione  $\geq 4$  si dimostra che non esiste una loro classificazione. In effetti si dimostrano i seguenti fatti: 1) non esiste una classificazione delle presentazioni finite di gruppi; 2) per ogni presentazione finita  $\langle S \mid R \rangle$  esiste una varietà  $M$  di dimensione 4 compatta e connessa tale che  $\pi_1(M) \cong \langle S \mid R \rangle$ .

**Osservazione 8.3.4** Non esiste una classificazione delle superfici noncompatte. Si presenta una grande quantità di tali superfici (si pensi che un aperto qualunque di una superficie compatta e connessa è ancora una superficie). Se una superficie noncompatta è semplicemente connessa un famoso teorema dovuto a Riemann asserisce che allora la superficie è omeomorfa a  $\mathbb{R}^2$ .

## 8.4 Orientabilità e genere di una superficie

Sia  $S$  una superficie. Diremo che  $S$  è **orientabile** se non esiste un embedding  $N \rightarrow S$  dove  $N$  è un nastro di Möbius. Segue immediatamente che l'orientabilità di una superficie è un invariante topologico.

L'orientabilità può essere espressa in termini di presentazione poligonale. Infatti sia  $a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}$ ,  $\epsilon_j = \pm 1$ , una presentazione poligonale della superficie  $S$ . Dal Teorema 8.2.8 segue che  $n = 2m$  e, per ogni  $j = 1, \dots, n$ , esiste un unico  $k(j) \neq j$  tale che  $a_{i_j} = a_{i_{k(j)}}$ . Allora,  $S$  è orientabile se e solo se per ogni  $j = 1, \dots, n$  si ha  $\epsilon_j = -\epsilon_{k(j)}$ . Infatti, se esiste un  $j$  tale che  $\epsilon_j = \epsilon_{k(j)}$ , allora esiste un nastro di Möbius  $N \rightarrow S$ :



D'altra parte, non è difficile convincersi che può esistere un embedding  $N \rightarrow S$  di un nastro di Möbius  $N$  solo se esiste un  $j$  tale che  $\epsilon_j = \epsilon_{k(j)}$ .

Dalle presentazioni poligonali della sfera, del toro e del proiettivo si deduce che  $S^2$  e  $\mathbb{T}^2$  sono superfici orientabili mentre  $\mathbb{RP}^2$  non è orientabile. Inoltre la



somma connessa  $S_1 \# S_2$  di due superfici è orientabile se e solo se  $S_1$  e  $S_2$  sono entrambe orientabili. Quindi la somma connessa di un numero finito di tori è una superficie orientabile mentre la superficie ottenuta come somma connessa di un numero finito di piani proiettivi reali non è orientabile.

Diremo che la sfera  $S^2$  ha **genere zero** e la somma connessa di  $g$  tori (risp.  $g$  piani proiettivi reali) ha **genere  $g$** . Quindi, per esempio, il genere della bottiglia di Klein è due, come segue dall'Esempio 8.1.5. Il genere di una superficie orientabile si può pensare anche come il numero di “buchi” della superficie. Si può dimostrare che nel caso la superficie sia orientabile il genere rappresenta il massimo numero di curve chiuse semplici (senza autointersezioni) e disgiunte dalla superficie che non separino la superficie. Osserviamo che il genere di una superficie non è un invariante topologico. Un fatto notevole è che il genere di una superficie insieme alla sua orientabilità costituiscono un **sistema completo di invarianti** cioè caratterizzano una superficie a meno di omeomorfismi, come espresso dal seguente teorema che segue immediatamente dal Teorema 8.1.7.

**Teorema 8.4.1** *Due superfici compatte e connesse sono omeomorfe se e solo se valgono i seguenti fatti:*

1. *sono entrambe orientabili o non orientabili;*
2. *hanno lo stesso genere.*

## 8.5 Classificazione delle superfici con bordo

Una superficie  $S$  compatta e connessa con bordo si ottiene (per definizione) da una superficie  $\tilde{S}$  compatta e connessa alla quale sono stati rimossi un numero finito di dischi aperti disgiunti. Le circonferenze frontiere di questi dischi sono chiamate le **componenti di bordo** di  $S$ . Il **genere** di  $S$  è per definizione il genere della superficie  $\tilde{S}$ . Diremo che  $S$  è **orientabile** (risp. **non orientabile**) se  $\tilde{S}$  è orientabile (risp. non orientabile).

**Esempio 8.5.1** Il disco  $D^2$  è una superficie orientabile di genere zero con una componente di bordo.

**Esempio 8.5.2** Il nastro di Möbius è una superficie non orientabile di genere uno con una componente di bordo, come segue dalla prima parte dell'Esempio 8.1.5.

Il risultato seguente è l'analogo del Teorema 8.4.1.

**Teorema 8.5.3** *Due superfici compatte e connesse con bordo sono omeomorfe se e solo se e valgono i seguenti fatti:*

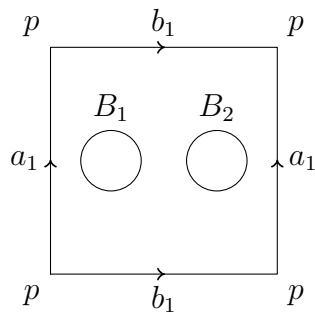
1. *hanno lo stesso numero di componenti di bordo;*
2. *sono entrambe orientabili o non orientabili;*
3. *hanno lo stesso genere.*

**Dimostrazione:** Siano  $S$  e  $S'$  due superfici compatte, connesse con bordo entrambe orientabili o non orientabili dello stesso genere. Quindi le superfici  $\tilde{S}$  e  $\tilde{S}'$  senza bordo ottenute riempiendo i buchi delle due superfici  $S$  e  $S'$  sono omeomorfe (per il Teorema 8.4.1) tramite un omeomorfismo  $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$ . Se inoltre le due superfici hanno lo stesso numero di componenti di bordo l'omeomorfismo  $\tilde{f}$  si restringe ad un omeomorfismo tra  $S$  e  $S'$ .

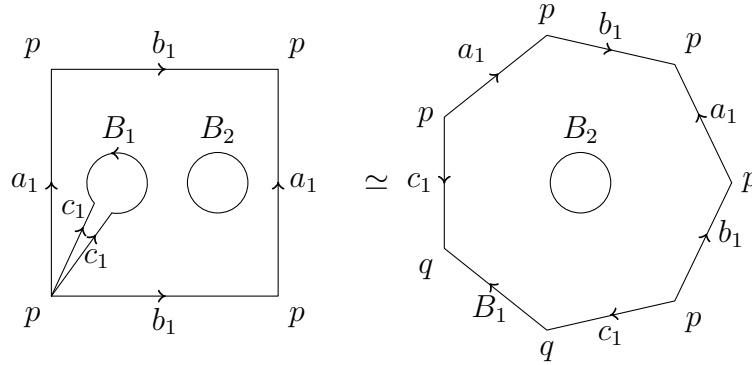
Viceversa, supponiamo che due superfici compatte, connesse con bordo  $S$  e  $S'$  siano omeomorfe tramite un omeomorfismo  $f : S \rightarrow S'$ . L'omeomorfismo  $f$  si restringe ad un omeomorfismo tra  $\text{Fr } S$  e  $\text{Fr } S'$  e quindi  $S$  e  $S'$  hanno lo stesso numero di componenti di bordo (per l'invarianza topologica delle componenti connesse). Esiste quindi un omeomorfismo  $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$  (che estende  $f$ ) tra le superfici  $\tilde{S}$  e  $\tilde{S}'$  ottenute riempiendo i buchi di  $S$  e  $S'$ . Segue ancora dal Teorema 8.4.1 che le superfici  $S$  e  $S'$  hanno lo stesso genere e sono entrambe orientabili o non orientabili.  $\square$

### Presentazione poligonale delle superfici compatte e connesse con bordo

La dimostrazione del Teorema 8.5.3 non usa il calcolo del gruppo fondamentale di una superficie con bordo. Il calcolo del gruppo fondamentale di tali superfici si può ottenere tramite una **presentazione poligonale** di una superficie compatta e connessa con bordo come segue. Consideriamo, per esempio, il caso di una superficie compatta, connessa con bordo orientabile di genere  $g = 1$  con  $h = 2$  componenti di bordo:



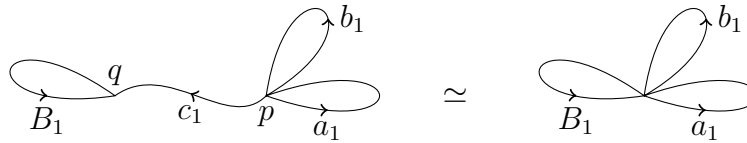
Applicando la seguente operazione



Otteniamo allora che la superficie ha la presentazione poligonale con un buco

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} c_1 B_1 c_1^{-1}$$

ed è omotopicamente equivalente ad un bouquet di tre circonferenze:



Iterando questo procedimento su tutti i buchi meno uno si ottiene che una superficie compatta connessa con bordo orientabile di genere  $g$  e  $h$  componenti di bordo ha una “presentazione poligonale con un buco” data da:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} c_1 B_1 c_1^{-1} \cdots c_{h-1} B_{h-1} c_{h-1}^{-1}.$$

Con lo stesso ragionamento una superficie compatta connessa con bordo non orientabile di genere  $g$  e  $h$  componenti di bordo ha la presentazione poligonale con un buco

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_g a_g c_1 B_1 c_1^{-1} \cdots c_{h-1} B_{h-1} c_{h-1}^{-1}.$$

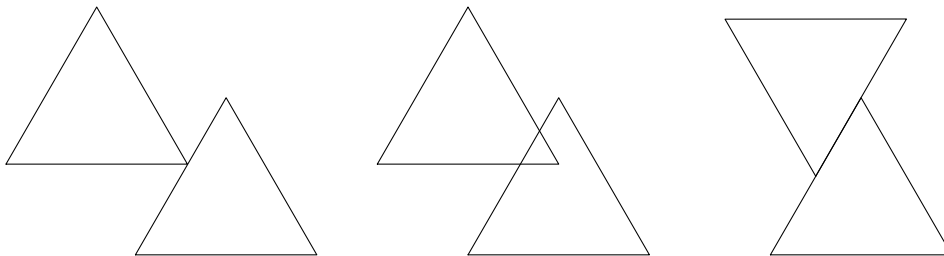
Indichiamo con  $\Sigma_g^h$  la superficie compatta, connessa con bordo di genere  $g$  con  $h$  componenti di bordo. Segue allora che  $\Sigma_g^h$  è omotopicamente equivalente ad un bouquet di  $2g + h - 1$  circonferenze nel caso orientabile e ad un bouquet di  $g + h - 1$  circonferenze nel caso non orientabile. Si ottiene allora che:

$$\pi_1(\Sigma_g^h) = \begin{cases} *^{2g+h-1} \mathbb{Z} & \text{se } g \geq 0, \text{ se } \Sigma_g^h \text{ è orientabile} \\ *^{g+h-1} \mathbb{Z} & \text{se } g \geq 1, \text{ se } \Sigma_g^h \text{ non è orientabile.} \end{cases}$$

**Osservazione 8.5.4** Date due superfici con bordo non possiamo concludere (come nel Corollario 8.3.2) che esse sono omeomorfe se sono omotopicamente equivalenti. Si consideri, per esempio, la sfera  $S^2$  meno tre dischi aperti e il toro  $\mathbb{T}^2$  meno un disco aperto. Queste superfici con bordo sono orientabili non sono omeomorfe (hanno genere diverso) ma sono omotopicamente equivalenti ad un bouquet di due circonferenze. Un altro esempio è dato dalla sfera  $S^2$  meno due dischi aperti e  $\mathbb{RP}^2$  meno un disco aperto (ossia un nastro di Möbius). Queste superfici sono omotopicamente equivalenti a  $S^1$  ma non sono omeomorfe (la prima è orientabile e la seconda no).

## 8.6 Caratteristica di Eulero

Sia  $S$  una superficie compatta e connessa. Un **triangolo**  $T$  di  $S$  è l'immagine di un embedding  $f : \tau \rightarrow S$ ,  $T = f(\tau)$ , dove  $\tau$  un triangolo di  $\mathbb{R}^2$ . I **vertici** e i **lati** del triangolo  $T$  sono rispettivamente le immagini dei vertici e dei lati di  $\tau$ . Una **triangolazione**  $\mathcal{T}$  di  $S$  è una famiglia finita di triangoli di  $S$  che ricoprono  $S$  tali che due triangoli di questa famiglia o hanno intersezione vuota o si intersecano in un punto o hanno esattamente un lato in comune. Vogliamo quindi escludere situazioni come quelle in figura:



Più in generale, si dice **poligono**  $P$  di una superficie compatta e connessa  $S$  l'immagine di un poligono  $p$  di  $\mathbb{R}^2$  tramite un embedding  $g : p \rightarrow S$ ,  $P = g(p)$ . Un **poligonazione** della superficie  $S$  è una famiglia finita di poligoni di  $S$ , che ricoprono  $S$ , tali che due poligoni o hanno intersezione vuota, o si intersecano in un punto o hanno esattamente un lato in comune. Vale il seguente importante risultato.

**Teorema 8.6.1** *Sia  $S$  una superficie compatta. Allora esiste un triangolazione di  $S$ .*

Questo teorema è stato dimostrato per la prima volta da Tibor Radò nel 1925. La dimostrazione è molto tecnica. Lo studente interessato potrà trovare la dimostrazione nel libro [11] in bibliografia.

Sia  $S$  una superficie compatta e connessa e sia  $\mathcal{T}$  una sua triangolazione. La **caratteristica di Eulero**  $\chi(\mathcal{T})$  di  $\mathcal{T}$  è il numero intero dato da:

$$\chi(T) = F - L + V, \quad (8.5)$$

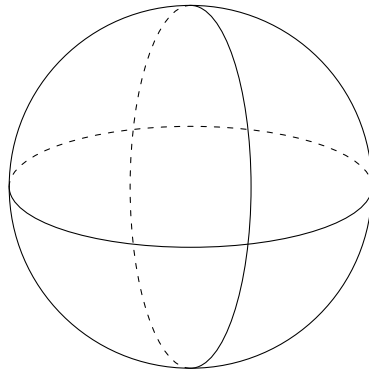
dove  $F$  rappresenta il numero dei triangoli,  $L$  il numero di lati e  $V$  il numero di vertici della triangolazione. Vale il seguente risultato del quale omettiamo la dimostrazione.

**Teorema 8.6.2** *Siano  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$  due triangolazioni di una superficie compatta  $S$ . Allora  $\chi(\mathcal{T}_1) = \chi(\mathcal{T}_2)$ .*

In virtù dei teoremi precedenti possiamo quindi definire la **caratteristica di Eulero** di una superficie compatta  $S$ , che indicheremo con  $\chi(S)$ , come la caratteristica di Eulero di una sua triangolazione. Il seguente teorema è di immediata dimostrazione.

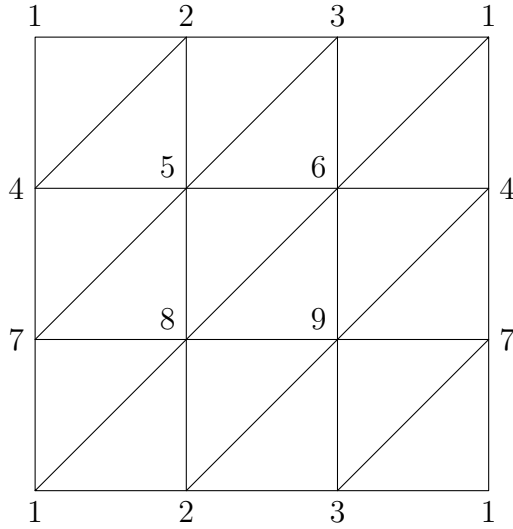
**Teorema 8.6.3** *Siano  $S$  e  $\tilde{S}$  due superfici compatte e connesse. Se  $S$  è omeomorfa a  $\tilde{S}$  allora  $\chi(S) = \chi(\tilde{S})$ .*

**Esempio 8.6.4** Una triangolazione della sfera  $S^2$  è data da:



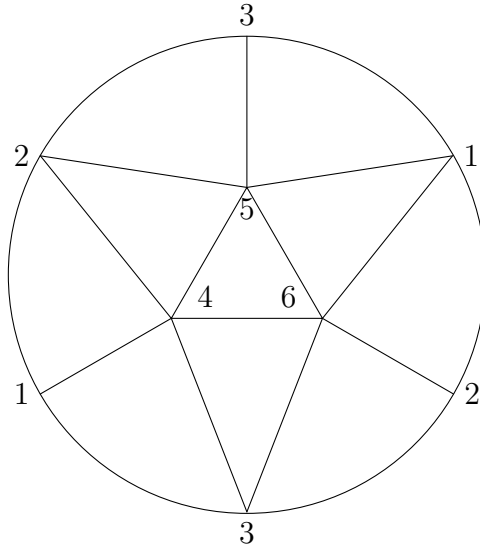
Questa triangolazione consiste di 8 facce, 12 lati e 6 vertici e quindi  $\chi(S^2) = 8 - 12 + 6 = 2$ .

**Esempio 8.6.5** Una triangolazione del toro è data da:



Questa triangolazione consiste di 18 facce, 27 lati e 9 vertici e quindi  $\chi(\mathbb{T}^2) = 18 - 27 + 9 = 0$ .

**Esempio 8.6.6** Il piano proiettivo reale può essere triangolato come in figura:



Questa triangolazione consiste di di 10 facce, 15 lati e 6 vertici e quindi e quindi  $\chi(\mathbb{RP}^2) = 10 - 15 + 6 = 1$ .

**Proposizione 8.6.7** Siano  $S_1$  e  $S_2$  due superficie compatte e connesse e  $S_1 \# S_2$  la loro somma connessa. Allora

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

**Dimostrazione:** Consideriamo due triangolazioni delle superfici  $S_1$  e  $S_2$ . Dal momento che un triangolo è omeomorfo ad un disco per ottenere la somma connessa di  $S_1$  e  $S_2$  possiamo rimuovere l'interno di un triangolo  $T_1$  della triangolazione di  $S_1$  e l'interno di un triangolo  $T_2$  della superficie  $S_2$  e incollare insieme i bordi di questi triangoli. Otteniamo quindi che la somma connessa  $S_1 \# S_2$  ha  $F_1 + F_2 - 2$  triangoli,  $L_1 + L_2 - 3$  lati e  $V_1 + V_2 - 3$  vertici dove  $F_1$ ,  $L_1$  e  $V_1$  (risp.  $F_2$ ,  $L_2$  e  $V_2$ ) rappresentano il numero di triangoli, lati e vertici della triangolazione di  $S_1$  (risp.  $S_2$ ). Allora

$$\chi(S_1 \# S_2) = (F_1 + F_2 - 2) - (L_1 + L_2 - 3) + (V_1 + V_2 - 3) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2,$$

che è quello che si voleva dimostrare.  $\square$

Usando la proposizione e gli esempi che la precedono possiamo calcolare la caratteristica di Eulero di una qualunque superficie compatta e connessa come espresso dal seguente:

**Corollario 8.6.8** *Sia  $g\mathbb{T}^2$ ,  $g \geq 0$  la superficie compatta e connessa orientabile di genere  $g$  (somma connessa di  $g$  tori) e  $g\mathbb{RP}^2$ ,  $g \geq 1$ , la superficie compatta e connessa non orientabile di genere  $g$  (somma connessa di  $g$  piani proiettivi reali). Allora*

$$\chi(g\mathbb{T}^2) = 2 - 2g$$

mentre

$$\chi(g\mathbb{RP}^2) = 2 - g.$$

e quindi il genere  $g$  è dato da:

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(g\mathbb{T}^2)) & \text{se } g \geq 0, \\ 2 - \chi(g\mathbb{RP}^2) & \text{se } g \geq 1. \end{cases} \quad (8.6)$$

Dal corollario e dal Teorema 8.4.1 si ottiene anche il seguente:

**Corollario 8.6.9** *Due superfici compatte e connesse sono omeomorfe se e solo se hanno la stessa caratteristica di Eulero e sono entrambi orientabili o non orientabili.*

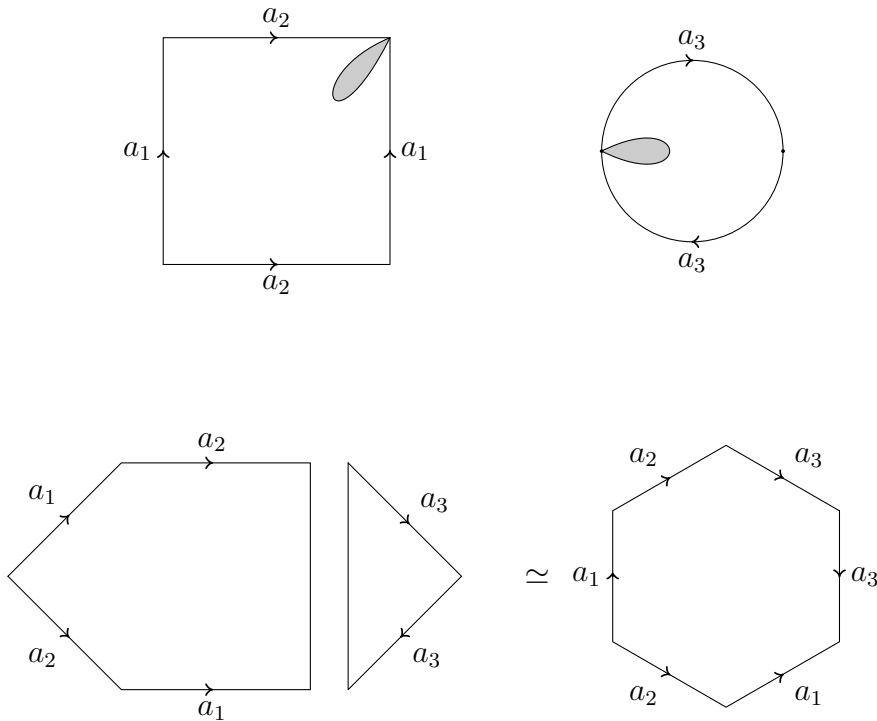
Concludiamo questo paragrafo con il seguente teorema che descrive come trovare la caratteristica di Eulero di una superficie conoscendo una sua presentazione poligonale.

**Teorema 8.6.10** *Sia  $a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}$ ,  $\epsilon_j = \pm 1$  una presentazione poligonale di una superficie  $S$  e siano  $a_1, \dots, a_m$ ,  $2m = n$ , le etichette distinte (cfr. Teorema*

8.2.8). Sia  $v$  il numero di punti distinti di  $S$  ottenuti identificando i vertici della poligonale. Allora

$$\chi(S) = 1 - m + v.$$

**Esempio 8.6.11** Vogliamo verificare in due modi differenti che la presentazione poligonale:  $a_1 a_2 a_3 a_3 a_1^{-1} a_2^{-1}$  rappresenta  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$  (cfr. Proposizione 8.1.6). Il primo modo è tramite le seguenti figure:



Il secondo modo usa il Teorema 8.6.10. Osserviamo che lo spazio in questione è una superficie non orientabile e quindi per il teorema di classificazione è della forma  $g\mathbb{RP}^2$ . D'altra parte, per il Teorema 8.6.10, la sua caratteristica di Eulero è  $-1$  (i vertici della poligonale vengono identificati tutti ad uno stesso punto). Segue quindi da (8.6) che  $g = 3$ .

### 8.6.1 Solidi convessi

Concludiamo questo capitolo con la dimostrazione che esistono esattamente cinque solidi convessi e regolari nello spazio i cosiddetti **solidi platonici**. Un **solido convesso**  $S$  è un sottoinsieme limitato dello spazio  $\mathbb{R}^3$  definito dalle due condizioni seguenti:

- $S$  non è contenuto in un sottospazio affine proprio di  $\mathbb{R}^3$ ;



- $S$  è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di  $\mathbb{R}^3$ .

Un solido convesso  $S$  è effettivamente un sottoinsieme convesso di  $\mathbb{R}^3$  in quanto intersezione di semispazi di  $\mathbb{R}^3$  che sono convessi. Inoltre  $S$  compatto in quanto chiuso e limitato.

Sia  $S$  un solido convesso di  $\mathbb{R}^3$  e  $\alpha$  un piano di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $S$  sia contenuto in uno dei due semispazi chiusi definiti da  $\alpha$ . Si hanno le seguenti possibilità:

- $S \cap \alpha = \emptyset$ ;
- $S \cap \alpha$  è un punto che si chiama **vertice** di  $S$ ;
- $S \cap \alpha$  è un segmento che si chiama **spigolo** o **lato** di  $S$ ;
- $S \cap \alpha$  è un poligono, che si chiama **faccia** di  $S$ .

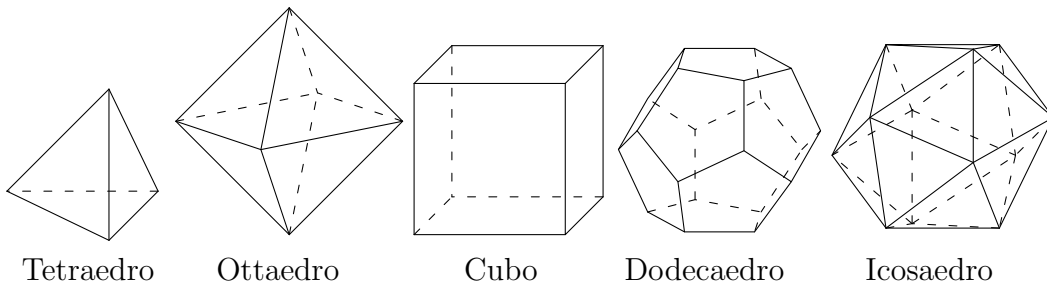
Dal momento che  $S$  è intersezione di un numero finito di semispazi segue che esso possiede un numero finito di vertici  $V$ , di lati  $L$  e di facce  $F$ . Inoltre ogni spigolo è un lato di due facce e ogni vertice è vertice di almeno tre facce e di altrettanti spigoli. Vale il seguente risultato che era già noto a Cartesio nel 1640 ma che fu poi dimostrato da Eulero nel 1752.

**Teorema 8.6.12** *Sia  $S$  un solido convesso di  $\mathbb{R}^3$  e siano  $V$ ,  $L$  e  $F$  come sopra. Allora*

$$V - L + F = 2.$$

**Dimostrazione:** Consideriamo un omeomorfismo  $f : S \rightarrow D^3$  tale che  $f|_{\text{Fr}(S)} : \text{Fr}(S) \rightarrow S^2$ . Otteniamo quindi che la sfera  $S^2$  ammette una polygonazione con lo stesso numero di vertici, lati e facce del poligono  $S$ . Il risultato segue allora dall'Esercizio 8.4 e dal fatto che  $\chi(S^2) = 2$ .  $\square$

Un **solido regolare** è un solido convesso di  $\mathbb{R}^3$  avente per facce poligoni regolari tutti uguali tra loro e con lo stesso numero di lati uscenti da ogni vertice (quindi lo stesso numero di facce che si incontrano in un vertice). Esempi di solidi regolari sono: il **tetraedro**, l'**ottaedro**, il **cubo**, il **dodecaedro** e l'**icosaedro**.



Questi sono chiamati anche **solidi platonici** in quanto Platone ne parla nel Timeo. Di essi tratta il XIII libro (l'ultimo) degli **Elementi** di Euclide dove si fornisce una dimostrazione della loro esistenza. Il fatto notevole, che a differenza dei poligoni regolari, i solidi platonici sono precisamente i 5 appena descritti. La dimostrazione di questo fatto si ottiene tramite l'uso della caratteristica di Eulero. Sia infatti  $S$  un solido platonico. Denotiamo con  $n$ ,  $n \geq 3$ , il numero di lati di ogni faccia (e quindi il numero di vertici in ogni faccia) e con  $m$ ,  $m \geq 3$ , il numero di lati uscenti da un vertice (e quindi il numero di facce che si incontrano in un vertice). Si osservi che  $n$  e  $m$  non dipendono dalla faccia o dal vertice scelto perché il solido è, per ipotesi, regolare. Dal momento che ogni lato ha in comune due facce si ottiene allora che il numero di lati  $L$  e il numero di vertici  $V$  si possono scrivere in funzione del numero di facce  $F$  del poligono come segue:

$$L = \frac{nF}{2}, \quad V = \frac{nF}{m}.$$

Per il Teorema 8.6.12 si ottiene allora:

$$F - L + V = F \left( \frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1 \right) = 2.$$

e quindi  $F = \frac{4m}{2n-mn+2m}$  dalla quale segue (essendo  $F > 0$ ) che

$$\frac{2n}{n-2} > m. \quad (8.7)$$

Usando questa disuguaglianza e il fatto che  $m \geq 3$  si ottiene che  $n < 6$  e  $m < 6$ . Dalla (8.7) le uniche possibilità per le coppie  $(n, m)$  con  $3 \leq n < 6$  e  $3 \leq m < 6$  sono cinque e cioè:

$$(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$$

che corrispondono rispettivamente al tetraedro, all'ottaedro, all'icosaedro, al cubo e al dodecaedro.

## 8.7 Esercizi

**Esercizio 8.1** Dimostrare che i gruppi  $G = \langle a, b \mid baba^{-1} \rangle$  e  $H = \langle a, c \mid a^2c^2 \rangle$  dell'Esempio 6.2.6 sono isomorfi mostrando le presentazioni poligonali  $baba^{-1}$  e  $a^2c^2$  sono omeomorfe alla bottiglia di Klein.

**Esercizio 8.2** Calcolare il gruppo fondamentale della seguente presentazione poligonale  $a \cdot a \cdots a$  ( $n$  fattori).

**Esercizio 8.3** Sia  $G$  un gruppo abeliano finitamente generato. Dimostrare che esiste uno spazio topologico  $X$  connesso per archi tale che  $\pi_1(X) \cong G$ . (Suggerimento: usare l'esercizio precedente e il Teorema 6.1.1).

**Esercizio 8.4** Sia  $S$  una superficie compatta e connessa e sia  $\mathcal{P}$  una sua poligonazione costituita da un numero finito di facce  $F$ , di lati  $L$  e di vertici  $V$ . Dimostrare che

$$\chi(S) = F - L + V.$$

(Suggerimento: suddividere i poligoni di  $\mathcal{P}$  in triangoli).

**Esercizio 8.5** Calcolare la caratteristica di Eulero  $\chi(\Sigma_g^h)$  di una superficie  $\Sigma_g^h$  compatta, connessa di genere  $g$  e  $h$  componenti di bordo distinguendo il caso orientabile dal caso non orientabile.

**Esercizio 8.6** Dimostrare che la caratteristica di Eulero di una superficie ottenuta come somma connessa di un piano proiettivo e di  $n$  tori è  $1 - 2n$  mentre la caratteristica di Eulero della somma connessa di una bottiglia di Klein con  $n$  tori è  $-2n$ .

**Esercizio 8.7** Dimostrare che  $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$  è una presentazione poligonale di  $\mathbb{T}^2$ .

**Esercizio 8.8** Dimostrare che  $a_1 \cdots a_n a_1 \cdots a_n$  è una presentazione poligonale di  $\mathbb{RP}^2$ . (Suggerimento: osservare che i vertici del poligono vengono identificati con  $n$  punti).

**Esercizio 8.9** I lati di un ottagono regolare sono identificati in modo tale che il quoziente sia una superficie compatta. Dimostrare che la caratteristica di Eulero di questa superficie è  $\geq -2$ . Dimostrare, inoltre, che ogni superficie orientabile o non orientabile la cui caratteristica di Eulero è  $\geq -2$  può essere ottenuta identificando opportunamente i lati di un ottagono regolare.

**Esercizio 8.10** Cosa rappresenta la presentazione poligonale  $abcdec^{-1}da^{-1}b^{-1}e^{-1}$ ?

**Esercizio 8.11** Dimostrare che la presentazione poligonale

$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_n$$

è omeomorfa alla somma connessa di  $n$  piani proiettivi reali. (Suggerimento: osservare che i vertici del poligono vengono identificati tutti ad uno stesso punto).

**Esercizio 8.12** Cosa rappresenta la presentazione poligonale

$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_n^{-1}?$$

(Suggerimento: osservare che se  $n$  è dispari i vertici del poligono vengono identificati con due punti mentre se  $n$  è pari vengono identificati ad uno stesso punto).

**Esercizio 8.13** Dimostrare che non esiste una poligonazione della sfera dove le facce sono tutti esagoni e da ogni vertice escono almeno tre lati.

**Esercizio 8.14** Una palla da calcio è formata da pentagoni e esagoni tali che tre facce si incontrano in un vertice e due facce distinte si incontrano al più in un vertice o in un lato. Mostrare che il numero di pentagoni è 12.

**Esercizio 8.15** Sia  $P$  un solido convesso in  $\mathbb{R}^3$  dove tutte le facce sono triangoli e da ogni vertice escono cinque o sei lati. Dimostrare che  $P$  ha esattamente 12 vertici dai quali escono 5 lati.

# Appendice A

## Spazi connessi e connessi per archi

Lo studente può consultare [6, Capitolo 9] per le definizioni e le principali proprietà degli spazi connessi e connessi per archi.

### A.1 Componenti connesse e connesse per archi

Consideriamo uno spazio topologico  $X$ . Esiste un modo naturale per scrivere lo spazio come unione di sottospazi connessi e connessi per archi. Cominciamo con i connessi. Diremo che due punti  $x$  e  $y$  di  $X$  sono in relazione se esiste un sottospazio connesso di  $X$  che contiene  $x$  e  $y$ . La riflessività e la simmetria di questa relazione sono immediate. La transitività segue dal fatto che se  $A$  è un sottospazio di  $X$  che contiene  $x$  e  $y$  e  $B$  un sottospazio che contiene  $y$  e  $z$  allora  $A \cup B$  è un sottospazio connesso (unione di due connessi  $A$  e  $B$  con il punto  $y$  in comune) che contiene  $x$  e  $z$ . Le classi di equivalenza rispetto a questa relazione d'equivalenza sono chiamate le **componenti connesse di**  $X$ . Vale il seguente risultato lasciato come esercizio per lo studente.

**Teorema A.1.1** *Le componenti connesse di  $X$  sono sottospazi connessi, chiusi e disgiunti di  $X$  che ricoprono  $X$ . Ogni connesso è contenuto in una e una sola componente connessa. Inoltre la cardinalità delle componenti connesse è un invariante topologico.*

Se la cardinalità delle componenti connesse è finita allora ogni componente connessa è un sottoinsieme aperto (oltre che chiuso) di  $X$ . Infatti in questo caso una componente connessa è il complementare del chiuso ottenuto come unione finita delle altre componenti connesse. Ma in generale una componente connessa

non è aperta. Si pensi, ad esempio, alle componenti connesse di  $\mathbb{Q}$  che sono costituite dai singoli punti (che non sono aperti di  $\mathbb{Q}$ ).

Veniamo ora ai connessi per archi. Diremo che due punti  $x$  e  $y$  di  $X$  sono in relazione se esiste un arco in  $X$  che congiunge  $x$  con  $y$ . La riflessività di questa relazione si ottiene usando l'arco costante, la simmetria usando l'arco  $i(f) : I \rightarrow X$ ,  $i(f)(t) = f(1 - t)$  e la transitività usando la concatenazione tra archi (cf.(2.1) del Capitolo 2). Le classi di equivalenza rispetto a questa relazione d'equivalenza sono chiamate **componenti connesse per archi** di  $X$ .

Anche la dimostrazione del seguente teorema è lasciata per esercizio allo studente.

**Teorema A.1.2** *Le componenti connesse per archi di  $X$  sono sottospazi connessi per archi e disgiunti di  $X$  che ricoprono  $X$ . Ogni sottospazio connesso per archi è contenuto in una e una sola componente connessa per archi. Inoltre la cardinalità delle componenti connesse per archi è un invariante topologico.*

Le componenti connesse per archi di uno spazio  $X$  possono essere aperte oppure chiuse. Consideriamo per esempio i seguenti sottoinsiemi del piano:

$$C = \{(\frac{1}{n}, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, 1], n \geq 1 \text{ intero}\}, \quad I_x = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1]\}$$

E' immediato verificare che  $C \cup I_x$  è connesso per archi e quindi connesso. Inoltre si dimostra (cf. [6, Esempio 9.2.6]) che

$$X = \{P_0\} \cup C \cup I_x, \quad P_0 = (0, 1) \tag{A.1}$$

è connesso ma non connesso per archi. Lo spazio  $X$  ha una componente connessa (essendo connesso) mentre le componenti connesse per archi sono due: una è costituita dal punto  $P_0 = (0, 1)$  che è chiusa ma non aperta e l'altra da  $X \setminus P_0$  che è aperta ma non chiusa. Osserviamo che esistono spazi dove le componenti connesse per archi non sono né aperte né chiuse (non ne parleremo).

Sia  $x$  un punto di uno spazio topologico  $X$ . Diremo che  $X$  è **localmente connesso in**  $x$  se per ogni aperto  $U$  contenente  $x$  esiste un intorno <sup>1</sup> connesso  $V$  di  $x$  contenuto in  $U$ . Se  $X$  è localmente connesso in ogni suo punto diremo che  $X$  è **localmente connesso**. Analogamente  $X$  è **localmente connesso per archi in**  $x$  se per ogni intorno aperto  $U$  di  $x$  esiste un intorno connesso per archi  $V$  di  $x$  contenuto in  $U$ . Se  $X$  è localmente connesso per archi in ogni suo punto diremo

---

<sup>1</sup>Un intorno di un punto  $x$  di uno spazio topologico  $X$  è un sottoinsieme  $N$  di  $X$  per il quale esiste un aperto  $A$  di  $X$  tale che  $x \in A \subseteq N$ .

che  $X$  è **localmente connesso per archi**. Dal momento che uno spazio connesso per archi è anche connesso segue che uno spazio localmente connesso per archi è localmente connesso. Esistono spazi localmente connessi ma non localmente connessi per archi (non ne parleremo). Osserviamo che una varietà topologica (o più in generale uno spazio localmente euclideo) è localmente connessa per archi.

**Osservazione A.1.3** Non esiste nessun legame tra la locale connessione e la connessione oppure tra la locale connessione per archi e la connessione per archi. Per esempio l'unione di due intervalli di  $\mathbb{R}$  non è connesso per archi (e neppure connesso) ma localmente connesso per archi (e quindi localmente connesso). Un esempio di spazio connesso per archi ma non localmente connesso (per archi) si ottiene considerando lo spazio  $Y = X \cup S$  dove  $X$  è lo spazio dato da (A.1) e  $S$  è il segmento di retta verticale che congiunge l'origine con il punto  $P_0$ .

**Teorema A.1.4** *Sia  $X$  uno spazio topologico localmente connesso per archi. Allora le componenti connesse per archi di  $X$  sono sia aperte che chiuse e coincidono con le componenti connesse di  $X$ . In particolare uno spazio connesso e localmente connesso per archi è connesso per archi.*

**Dimostrazione:** Sia  $A$  una componente connessa per archi di  $X$  diversa dal vuoto. Vogliamo mostrare che  $A$  è aperta e chiusa. Sia  $x \in A$  e sia  $V$  un intorno di  $x$  connesso per archi (che esiste perché  $X$  è localmente connesso per archi in  $x$ ). Allora  $V \subseteq A$  altrimenti  $V \cup A$  sarebbe un connesso per archi che contiene  $A$ . Questo mostra che  $x$  è un punto interno di  $A$  e quindi  $A$  è aperto. Ma allora  $A$  è anche chiuso in quanto complementare dell'unione delle componenti connesse per archi diverse da  $A$ .

Sia ora  $C$  una componente connessa di  $X$ . Esisterà quindi una componente connessa per archi  $A$  di  $X$  tale che  $A \cap C \neq \emptyset$ . Quindi  $A \cap C$  è un sottoinsieme non vuoto sia aperto che chiuso di  $C$ ; essendo  $C$  connesso  $A \cap C = C$  ossia  $C \subseteq A$ . D'altra parte  $A \subseteq C$  (altrimenti  $A \cup C$  sarebbe un connesso che contiene  $C$ ). Concludiamo che  $A = C$  quello che si voleva dimostrare.  $\square$

## A.2 Esercizi

**Esercizio A.1** Dimostrare i Teoremi A.1.1 e A.1.2.





# Appendice B

## Spazi localmente compatti

Lo studente può consultare [6, Capitolo 10] per le definizioni e le principali proprietà degli spazi compatti. Inoltre nella dimostrazione della Proposizione B.3.2 faremo uso di alcune proprietà degli spazi quoziente che lo studente può trovare in [6, Capitolo 11]).

### B.1 Definizioni e prime proprietà

Sia  $x$  un punto di uno spazio topologico  $X$ . Diremo che  $X$  è **localmente compatto in**  $x$  se esiste un intorno compatto di  $x$ , cioè se esiste un compatto  $K \subseteq X$ ,  $x \in K$  e un aperto  $U$  di  $X$  tale che  $x \in U \subseteq K$ . Se  $X$  è localmente compatto in ogni suo punto diremo che  $X$  è **localmente compatto**.

I seguenti fatti sono di facile verifica e sono lasciati come esercizio per lo studente (cf. Esercizio B.1):

- (i) Ogni varietà topologica è localmente compatta.
- (ii) Ogni spazio topologico compatto è localmente compatto.
- (iii) Il prodotto di due spazi localmente compatti è localmente compatto.
- (iv) Se  $f : X \rightarrow Y$  è un'applicazione continua, aperta e suriettiva (un'identificazione aperta) e  $X$  è localmente compatto allora  $Y$  è localmente compatto. In particolare la locale compattezza è una proprietà topologica.

**Teorema B.1.1** *Uno spazio topologico  $X$  è localmente compatto e di Hausdorff se e solo se esiste uno spazio topologico  $X^\infty$  che soddisfa le condizioni seguenti:*

- a)  $X$  è un sottospazio di  $X^\infty$ ;

b)  $X^\infty \setminus X$  è un solo punto;

c)  $X^\infty$  è uno spazio compatto e di Hausdorff.

Inoltre, se  $X^\infty$  e  $\tilde{X}^\infty$  sono due spazi topologici che soddisfano le condizioni a), b), c), allora esiste un omeomorfismo da  $X^\infty$  a  $\tilde{X}^\infty$  che è uguale all'identità ristretto a  $X$ .

**Dimostrazione:** Dimostriamo prima l'ultima parte del teorema. Definiamo un'applicazione  $f : X^\infty \rightarrow \tilde{X}^\infty$  che porta il punto  $\infty := X^\infty \setminus X$  nel punto  $\tilde{\infty} := \tilde{X}^\infty \setminus X$  e che sia l'identità su  $X$ . Vogliamo dimostrare che  $f$  è un omeomorfismo. Per fare questo sarà sufficiente far vedere che  $f$  è aperta (per simmetria infatti lo sarà anche  $f^{-1}$ ). Sia  $U$  un aperto di  $X^\infty$ . Se  $\infty \notin U$  allora  $f(U) = U$ . Siccome  $U$  è aperto in  $X^\infty$  e  $U \subseteq X$  allora  $U = U \cap X$  è aperto in  $X$ . Siccome  $X$  è aperto anche in  $\tilde{X}^\infty$ , l'insieme  $U$  è aperto in  $\tilde{X}^\infty$ . Supponiamo che invece  $\infty \in U$ . Siccome  $K = X^\infty \setminus U$  è chiuso in  $X^\infty$  allora è compatto in  $X^\infty$  (in quanto  $X^\infty$  è compatto). Dal momento che  $K$  è contenuto in  $X$  allora  $K$  è un compatto di  $X$  (per la proprietà assoluta dei compatti). Ma allora  $K$  è anche un compatto di  $\tilde{X}^\infty$  (sempre per la proprietà assoluta dei compatti) e quindi chiuso in  $\tilde{X}^\infty$  (in quanto  $\tilde{X}^\infty$  è di Hausdorff). Allora  $f(U) = f(X^\infty \setminus K) = \tilde{X}^\infty \setminus K$  è aperto in  $\tilde{X}^\infty$ .

Mostriamo ora che se  $X^\infty$  è uno spazio topologico che soddisfa le condizioni a), b), c) allora  $X$  è localmente compatto e di Hausdorff. Il fatto che  $X$  sia di Hausdorff segue dal fatto che  $X$  è un sottospazio di  $X^\infty$  che è di Hausdorff. Dato  $x \in X$  mostriamo ora che  $X$  è localmente compatto in  $x$ . Come sopra denotiamo con  $\infty$  il punto  $X^\infty \setminus X$  dato da b). Dal momento che  $X^\infty$  è di Hausdorff esistono due aperti disgiunti  $U$  e  $V$  di  $X^\infty$  che contengono rispettivamente il punto  $x$  e il punto  $\infty$ . Allora  $K = X^\infty \setminus V$  è un chiuso di  $X^\infty$  e quindi compatto in quanto  $X^\infty$  è compatto. Ma  $K$  è un sottoinsieme di  $X$  e quindi è compatto anche in  $X$ . Inoltre  $x \in U \subseteq K$ , e quindi  $K$  è un intorno compatto di  $x$  e quindi  $X$  è localmente compatto in  $x$ .

Supponiamo ora che  $X$  sia uno spazio topologico localmente compatto e di Hausdorff e costruiamo uno spazio  $X^\infty$  che soddisfa le condizioni a), b) e c). Sia  $\infty$  un punto qualsiasi che non appartiene a  $X$  e poniamo  $X^\infty := X \cup \{\infty\}$ . Definiamo una topologia su  $X^\infty$  come la famiglia dei sottoinsiemi di  $X^\infty$  costituita da (1) tutti i sottoinsiemi  $U$  aperti di  $X$  e (2) da tutti gli insiemi della forma  $X^\infty \setminus K$ , dove  $K$  è un sottoinsieme compatto di  $X$ . La verifica che si tratta effettivamente di una topologia è lasciata allo studente (cf. Esercizio B.3). Mostriamo ora che  $X$  è un sottospazio di  $X^\infty$  cioè un insieme  $U$  è aperto in  $X$  se e solo se esiste

un aperto  $V$  di  $X^\infty$  tale che  $U = X \cap V$ . Se l'aperto di  $X^\infty$  è di tipo (1) allora  $U = X \cap U$ , che è aperto in  $X$ . Mentre se l'aperto di  $X^\infty$  è di tipo (2), cioè della forma  $V = X^\infty \setminus K$  con  $K$  compatto di  $X$ , allora  $V \cap X = X \setminus K$  che è aperto in  $X$  (complementare del chiuso  $K$ ). Mostriamo ora che  $X^\infty$  è compatto. Sia  $\mathcal{U}$  un ricoprimento aperto di  $X^\infty$ . La famiglia  $\mathcal{U}$  deve contenere un aperto di tipo (2),  $X^\infty \setminus K$  perché gli insiemi aperti di tipo (1) non contengono il punto  $\infty$ . Si consideri la famiglia di tutti gli elementi di  $\mathcal{U}$  escluso l'aperto  $X^\infty \setminus K$ . Otteniamo così una famiglia di aperti di  $X^\infty$  che ricopre  $K$ . Essendo  $K$  un compatto di  $X$  e quindi di  $X^\infty$  (per la proprietà assoluta dei compatti), un numero finito di questi aperti ricopre  $K$ . Si ottiene quindi un numero finito di aperti di  $\mathcal{U}$  che, insieme all'aperto  $X^\infty \setminus K$ , costituisce un sottoricoprimento finito del ricoprimento  $\mathcal{U}$ .

Mostriamo infine che  $X^\infty$  è di Hausdorff. Siano  $x$  e  $y$  due punti distinti di  $X^\infty$ . Se entrambi stanno in  $X$  allora esistono due aperti di  $X$  (e quindi di  $X^\infty$ ) disgiunti  $U$  e  $V$  contenenti rispettivamente  $x$  e  $y$ . Se  $x \in X$  e  $y = \infty$ . Sia  $U$  un aperto di  $X$  e  $K$  un sottoinsieme compatto di  $X$  tali che  $x \in U \subseteq K$  (qui si sfrutta il fatto che  $X$  è localmente compatto). Allora  $U$  e  $X^\infty \setminus K$  sono due aperti disgiunti che contengono  $x$  e  $\infty$  rispettivamente.  $\square$

## B.2 Altre proprietà degli spazi localmente compatti

La definizione di spazio localmente compatto non è una proprietà locale. Di solito uno spazio  $X$  soddisfa una data proprietà “localmente” se ogni  $x \in X$  ammette un intorno “arbitrariamente piccolo” che soddisfa la proprietà. La definizione di compattezza locale non ha a che fare con il concetto di “arbitrariamente piccolo”. Se però  $X$  è di Hausdorff esiste una caratterizzazione “locale” degli spazi localmente compatti.

**Teorema B.2.1** *Sia  $X$  uno spazio di Hausdorff. Allora  $X$  è localmente compatto se e solo se per ogni  $x \in X$  e per ogni aperto  $U$  contenente  $x$  esiste un aperto  $V$  contenente  $x$  tale che  $\overline{V}$  è compatto e  $\overline{V} \subseteq U$ .*

**Dimostrazione:** Se è soddisfatta la condizione del teorema allora  $X$  è localmente compatto. Infatti dato  $x \in X$  e l'aperto  $U = X$  basta definire  $K = \overline{V}$  (dove  $V$  è l'aperto tale che  $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X$ ). Viceversa sia  $X$  localmente compatto. Sia  $x \in X$  e  $U$  un aperto di  $X$  che contiene  $x$ . Sia  $X^\infty$  come nel Teorema B.1.1 e sia  $H = X^\infty \setminus U$ . Allora  $H$  è un chiuso in  $X^\infty$  e quindi compatto in  $X^\infty$ . Siano  $V$  e  $W$  due aperti disgiunti di  $X^\infty$  che contengono rispettivamente  $x$  e  $H$

(due compatti disgiunti in uno spazio di Hausdorff possono essere separati da aperti). La chiusura  $\overline{V}$  di  $V$  in  $X^\infty$  è compatta. Inoltre  $W \cap V = \emptyset$  implica  $W \cap \overline{V} = \emptyset$  e quindi  $H \cap \overline{V} = \emptyset$ . Deduciamo che  $\overline{V} \subseteq U$  è un compatto di  $X$  tale che  $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ .  $\square$

Gli spazi topologici “fatti bene” sono gli spazi metrizzabili e gli spazi compatti e di Hausdorff. Inoltre ogni sottospazio di uno spazio metrizzabile è metrizzabile ma in generale un sottoinsieme di uno spazio compatto e di Hausdorff (pur essendo di Hausdorff) non è compatto. Se il sottoinsieme è chiuso allora è compatto. Ma se il sottoinsieme è aperto questo non è vero. Per gli spazi localmente compatti e di Hausdorff questo continua a essere vero come mostra il seguente:

**Corollario B.2.2** *Sia  $X$  uno spazio localmente compatto e di Hausdorff e sia  $C$  (risp.  $A$ ) un sottoinsieme chiuso (risp. aperto) di  $X$ . Allora  $C$  (risp.  $A$ ) è localmente compatto (e di Hausdorff).*

**Dimostrazione:** Sia  $x \in C$  e siano  $U$  e  $K$  rispettivamente un aperto e un sottospazio compatto di  $X$  tali che  $x \in U \subseteq K$ . Allora  $K \cap C$  è chiuso in  $K$  e quindi compatto e contiene l'aperto  $U \cap C$  che contiene  $x$ . Sia  $x \in A$ . Per il Teorema B.2.1 esiste un aperto  $V$  contenente  $x$  tale che  $\overline{V}$  è compatto e  $\overline{V} \subseteq A$ . Allora  $K = \overline{V}$  è un sottoinsieme compatto di  $A$  tale che  $x \in V \subseteq K$ .  $\square$

Il corollario seguente mostra che la condizione che caratterizza gli aperti degli spazi compatti e di Hausdorff è quella di spazio localmente compatto e di Hausdorff.

**Corollario B.2.3** *Uno spazio topologico  $X$  è omeomorfo ad un sottoinsieme aperto di uno spazio compatto e di Hausdorff se e solo se  $X$  è localmente compatto e di Hausdorff.*

**Dimostrazione:** Se  $X$  è localmente compatto e di Hausdorff allora  $X$  è un aperto dello spazio compatto e di Hausdorff  $X^\infty$  (si veda il Teorema B.1.1). Viceversa se  $X$  è omeomorfo ad un aperto di uno spazio compatto e di Hausdorff allora è localmente compatto e di Hausdorff per il Corollario B.2.2.  $\square$

## B.3 Compattificazioni di Alexandrov

Nel Teorema B.1.1 se  $X$  è compatto allora lo spazio  $X^\infty$  non è molto interessante: è semplicemente  $X$  al quale è stato aggiunto un punto isolato  $\infty$  (infatti in questo caso  $\{\infty\}$  è un aperto di  $X^\infty$  in quanto complementare del chiuso  $X$ ). Se invece

$X$  non è compatto allora il punto  $\infty = X^\infty \setminus X$  è un punto di accumulazione di  $X$ . Infatti un aperto di  $X^\infty$  che contiene  $\infty$  è della forma  $X^\infty \setminus K$  con  $K$  compatto di  $X$  il quale interseca  $X$  in un punto diverso  $\infty$  in quanto  $X \setminus K \neq \emptyset$  (altrimenti  $X$  sarebbe uguale a  $K$  e quindi compatto). Segue allora che  $X$  è denso in  $X^\infty$ , cioè  $\overline{X} = X^\infty$ . Se  $X^\infty$  è uno spazio compatto e di Hausdorff e  $X$  è un sottospazio proprio tale che  $X^\infty \setminus X$  sia un solo punto allora  $X^\infty$  è chiamata la **compattificazione di Alexandrov** (o con un punto) di  $X$ . Il Teorema B.1.1 mostra che esiste una compactificazione di Alexandrov di uno spazio  $X$  se e solo se  $X$  è localmente compatto e di Hausdorff. Notiamo anche che la compactificazione di Alexandrov  $X^\infty$  di  $X$  è univocamente determinata a meno di omeomorfismi come segue dall'ultima parte del Teorema B.1.1.

**Esempio B.3.1** La sfera  $n$ -dimensionale  $S^n$  è la compactificazione di Alexandrov di  $\mathbb{R}^n$ . Infatti usando la proiezione stereografica  $\mathbb{R}^n$  è omeomorfo a  $S^n \setminus N$ , dove  $N$  è il polo nord.

**Proposizione B.3.2** *Sia  $X$  uno spazio compatto e di Hausdorff e  $U \subseteq X$  un suo sottoinsieme aperto. Allora esiste  $U^\infty$  la compactificazione di Alexandrov di  $U$  e*

$$\frac{X}{X \setminus U} \cong U^\infty,$$

dove  $\frac{X}{X \setminus U}$  denota lo spazio quoziente di  $X$  tramite la relazione d'equivalenza che identifica due punti di  $X$  se e solo se appartengono a  $X \setminus U$ .

**Dimostrazione:** L'esistenza di  $U^\infty$  segue dal Corollario B.2.2. Consideriamo l'applicazione  $f : X \rightarrow U^\infty$  definita da:  $f(x) = x$ , se  $x \in U$  e  $f(x) = \infty$  se  $x \in X \setminus U$ . Dimostriamo che  $f$  è continua facendo vedere che la controimmagine di sottoinsieme aperto di  $U^\infty$  è aperto in  $X$ . Sia  $V \subseteq U^\infty$  aperto, abbiamo due casi:

- $V \subseteq U$  aperto, ma allora, dato che  $U \subseteq X$  è aperto questo significa che  $V$  è aperto in  $X$  e quindi per definizione  $f^{-1}(V) = V$  aperto.
- $V = U^\infty \setminus K$  con  $K$  compatto in  $U$ , per la proprietà universale dei compatti,  $K$  è compatto in  $X$  e quindi è chiuso (dato che  $X$  è di Hausdorff); inoltre, osservando che  $\infty \notin K$  e che  $U \setminus K \subset U$ , abbiamo

$$f^{-1}(U^\infty \setminus K) = f^{-1}(\infty) \cup f^{-1}(U \setminus K) = (X \setminus U) \cup (U \setminus K) = X \setminus K$$

che è aperto in quanto complementare di un chiuso.

Notiamo inoltre che  $f$  passa al quoziente rispetto alla proiezione canonica

$$\pi : X \rightarrow \frac{X}{X \setminus U}, \quad \pi(x) = [x].$$

Infatti l'unico insieme in cui  $\pi$  non è iniettiva è  $X \setminus U$  ma  $f(X \setminus U) = \infty$ . Per il [6, Corollario 10.2.3]) esiste un'unica applicazione continua

$$\tilde{f} : \frac{X}{X \setminus U} \rightarrow U^\infty$$

tale che  $\tilde{f} \circ \pi = f$ . Osserviamo che  $\tilde{f}$  è iniettiva. Siano infatti  $[x], [y] \in \frac{X}{X \setminus U}$  tali che  $[x] \neq [y]$  e siano  $x, y \in X$  tali che  $\pi(x) = [x]$  e  $\pi(y) = [y]$ . Si hanno due possibilità (a meno di scambiare  $x$  con  $y$ ): 1)  $x, y \in U$ ,  $x \neq y$ , 2)  $x \in U$ ,  $y \in X \setminus U$ . Nel primo caso  $\tilde{f}([x]) = f(x) = x \neq y = f(y) = \tilde{f}([y])$  e nel secondo caso  $\tilde{f}([x]) = f(x) = x \neq \infty = f(y) = \tilde{f}([y])$ .

Infine,  $\tilde{f}$  è anche chiusa in quanto applicazione continua dal compatto  $\frac{X}{X \setminus U}$  (quoziente del compatto  $X$ ) allo spazio di Hausdorff  $U^\infty$ . Concludiamo che  $\tilde{f}$  è un omeomorfismo.  $\square$

**Corollario B.3.3** *Sia  $D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$  il disco unitario e  $\partial D^n = S^{n-1}$  la sua frontiera. Allora*

$$S^n \cong \frac{D^n}{S^{n-1}}.$$

**Dimostrazione:** Dalla Proposizione B.3.2 con  $X = D^n$  e  $U = D^n \setminus S^{n-1}$ . L'aperto  $U$  (il disco unitario aperto) è omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Si ottiene quindi, usando l'Esempio B.3.1,

$$S^n = (\mathbb{R}^n)^\infty = U^\infty = \frac{D^n}{D^n \setminus U} = \frac{D^n}{S^{n-1}}.$$

$\square$

## B.4 Esercizi

**Esercizio B.1** Dimostrare le affermazioni (i), (ii), (iii) e (iv) del Paragrafo B.1.

**Esercizio B.2** Dimostrare che i numeri razionali non sono uno spazio localmente compatto.

**Esercizio B.3** Sia  $X$  uno spazio di Hausdorff. Dimostrare che la famiglia di sottoinsiemi di  $X^\infty = X \cup \{\infty\}$  costituita da tutti gli aperti di  $X$  e dagli insiemi della forma  $X^\infty \setminus K$  al variare di  $K$  compatto in  $X$  definisce una topologia su  $X^\infty$ .

# Appendice C

## Numero di Lebesgue

Lo studente può consultare [6, Capitolo 2] per le definizioni e le principali proprietà degli spazi metrici.

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $S \subseteq X$  un sottoinsieme arbitrario di  $X$ . Il **diametro** di  $S$ , indicato con  $\text{diam}(S)$ , è definito come  $\text{diam}(S) := \sup_{x,y \in S} d(x, y)$  mentre la **distanza di un punto**  $x \in X$  **dall'insieme**  $S$ , indicato con  $d(x, S)$ , è definito come  $d(x, S) := \inf_{s \in S} d(x, s)$ .

**Lemma C.0.1** (*esistenza del numero di Lebesgue*) Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico compatto e sia  $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$  un ricoprimento aperto di  $X$ . Allora esiste un numero  $\delta$ , detto **numero di Lebesgue del ricoprimento**  $\mathcal{U}$ , tale che per ogni sottoinsieme  $S \subseteq X$  con  $\text{diam}(S) < \delta$  esiste  $k \in J$  tale che  $S \subseteq U_k$ .

**Dimostrazione:** Poichè  $X$  è compatto possiamo supporre che  $J$  sia un insieme finito. Definiamo una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  come:

$$f(x) = \max_{j \in J} \{f_j(x)\}, \quad (\text{C.1})$$

dove, dato  $j \in J$ ,  $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$  è la funzione definita da  $f_j(x) = d(x, X \setminus U_j)$ . Si verifica facilmente che la funzione  $f$  è continua (cf. Esercizio C.2). Inoltre  $f(x) > 0$  per ogni  $x \in X$ . Infatti per definizione  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \in X$ . Se per assurdo  $f(x)$  fosse uguale a zero per qualche  $x \in X$  allora  $d(x, X \setminus U_j) = 0$  per ogni  $j \in J$  e quindi, essendo  $X \setminus U_j$  chiuso,  $x \in X \setminus U_j$  per ogni  $j \in J$  (cf. [6, Lemma 5.2.9]). Quindi  $x \in \bigcap_{j \in J} (X \setminus U_j) = X \setminus \bigcup_{j \in J} U_j = X \setminus X = \emptyset$ , la quale fornisce la contraddizione desiderata.

Essendo  $X$  è compatto esiste  $\delta > 0$  tale che  $f(x) > \delta$ , per ogni  $x \in X$ . Vogliamo dimostrare che  $\delta$  è un numero di Lebesgue del ricoprimento  $\mathcal{U}$ . Sia dunque  $S \subseteq X$ ,  $S \neq \emptyset$ , tale che  $\text{diam}(S) < \delta$  e sia  $x_0 \in S$ . Allora  $f(x_0) > \delta$

e quindi esiste  $k \in J$  tale che  $f_k(x_0) = d(x_0, X \setminus U_k) > \delta$  e quindi  $x_0 \in U_k$ . Resta da dimostrare che ogni  $y \in S$  appartiene a  $U_k$  o, equivalentemente che  $d(y, X \setminus U_k) > 0$ . Questo segue da:

$$d(y, X \setminus U_k) \geq d(x_0, X \setminus U_k) - d(x_0, y) > \delta - \delta = 0,$$

dove si è usato l'Esercizio C.1 e il fatto che  $d(x_0, y) \leq \text{diam}(S) < \delta$ .  $\square$

## C.1 Esercizi

**Esercizio C.1** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $S \subseteq X$  un sottoinsieme di  $X$ . Dimostrare che per ogni  $x, y \in X$  si ha  $d(x, S) \leq d(x, y) + d(y, S)$ .

**Esercizio C.2** Dimostrare che la funzione  $f$  definita da (C.1) è continua.



# Appendice D

## Spazi metrici completi e la curva di Peano

Lo studente può consultare [6, Paragrafo 10.4.2]) per le definizioni e le principali proprietà degli spazi metrici completi.

### D.1 Spazi metrici completi

Ricordiamo qui di seguito alcuni fatti sugli spazi metrici completi. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Una successione  $x_n$  di punti di  $X$  è detta di **Cauchy** se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n, m \geq n_0$  si ha  $d(x_n, x_m) < \epsilon$ . Si dimostra facilmente che se  $x_n$  è una successione convergente ad un punto  $x \in X$  allora  $x_n$  è di Cauchy.

Diremo che uno spazio metrico  $(X, d)$  è **completo** se ogni sua successione di Cauchy è convergente. Non è difficile vedere che lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$  è completo mentre l'insieme dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$  non è completo (si consideri, per esempio, la successione  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  di numeri razionali che è di Cauchy ma converge al numero di Nepero  $e \notin \mathbb{Q}$ ).

**Lemma D.1.1** *Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico completo è completo.*

**Dimostrazione:** Sia  $(C, d)$  un sottospazio chiuso di uno spazio metrico completo  $(X, d)$  e sia  $x_n$  una successione di Cauchy di punti di  $C$ . Allora  $x_n$  è di Cauchy anche in  $(X, d)$  e quindi è convergente ad un punto  $x \in X$ . Essendo  $C$  chiuso (e quindi chiuso per successioni) il punto  $x$  appartiene a  $C$ .  $\square$

Siano  $(X, d)$  e  $(Y, \hat{d})$  due spazi metrici. Diremo che una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è **limitata** se  $f(X)$  è un sottoinsieme limitato di  $(Y, \hat{d})$ . Denotiamo con  $(L(X, Y), \rho)$

lo spazio delle funzioni limitate da  $X$  a  $Y$  dotato della metrica

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \hat{d}(f(x), g(x)), \quad f, g \in L(X, Y), \quad (\text{D.1})$$

e con  $C_L(X, Y) \subseteq L(X, Y)$  lo spazio metrico delle funzioni continue e limitate da  $X$  a  $Y$ , dotato della metrica indotta da  $\rho$  (che indichiamo ancora con  $\rho$ ).

**Teorema D.1.2** *Siano  $(X, d)$  e  $(Y, \hat{d})$  due spazi metrici. Supponiamo che  $(Y, \hat{d})$  sia completo. Allora  $(L(X, Y), \rho)$  e  $(C_L(X, Y), \rho)$  sono spazi metrici completi.*

**Dimostrazione:** Sia  $f_n$  una successione di Cauchy in  $L(X, Y)$ . Per ogni  $x \in X$  la successione  $f_n(x)$  di  $(Y, \hat{d})$  è di Cauchy (questo segue dalla disuguaglianza  $\hat{d}(f_n(x), f_m(x)) \leq \rho(f_n, f_m)$ , per ogni  $m, n \in \mathbb{N}$ ). Essendo  $(Y, \hat{d})$  completo, per ipotesi,  $f_n(x)$  converge ad un punto  $f(x)$  di  $Y$ . Abbiamo così definito una funzione  $f : X \rightarrow Y$  come  $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ . Per mostrare che  $(L(X, Y), \rho)$  è completo dobbiamo far vedere che  $f_n$  converge a  $f$  in  $(L(X, Y), \rho)$  e che  $f$  è limitata. Essendo  $f_n$  di Cauchy, per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n, m \geq n_0$  si ha  $\rho(f_n, f_m) < \epsilon$ . Questo implica che  $\hat{d}(f_n(x), f_m(x)) \leq \epsilon$ , per ogni  $x \in X$ . Facendo tendere  $m \rightarrow +\infty$  si ottiene che  $\hat{d}(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon$  e quindi  $\rho(f_n, f) \leq \epsilon$ , per ogni  $n \geq n_0$ . Segue che la successione di funzioni  $f_n$  converge alla funzione  $f$  nella metrica  $\rho$ . Inoltre, dalla disuguaglianza

$$\text{diam}(g(X)) \leq \text{diam}(f(X)) + 2\rho(g, f), \quad (\text{D.2})$$

valida per ogni coppia di funzioni  $f, g : X \rightarrow Y$  (cf. Esercizio D.1), si deduce che, per ogni  $n$ ,

$$\text{diam}(f(X)) \leq \text{diam}(f_n(X)) + 2\rho(f_n, f),$$

la quale implica, insieme al fatto che  $f_n$  converge alla funzione  $f$  nella metrica  $\rho$ , che  $f$  è limitata.

Per dimostrare che  $(C_L(X, Y), \rho)$  è uno spazio metrico completo è sufficiente, per il Lemma D.1.1, far vedere che  $(C_L(X, Y), \rho)$  è un sottoinsieme chiuso di  $(L(X, Y), \rho)$ , ossia che se  $f_n$  è una successione di funzioni in  $(L(X, Y), \rho)$  convergente ad una funzione  $f : X \rightarrow Y$  (nella metrica  $\rho$ ) allora  $f$  è continua e limitata. Abbiamo già mostrato che  $f$  è limitata quindi resta da dimostrare che  $f$  è continua. Sia  $x_0 \in X$ . Osserviamo che, dalla disuguaglianza triangolare, si ottiene:

$$\hat{d}(f(x), f(x_0)) \leq \hat{d}(f_n(x), f(x)) + \hat{d}(f_n(x), f_n(x_0)) + \hat{d}(f_n(x_0), f(x_0)),$$

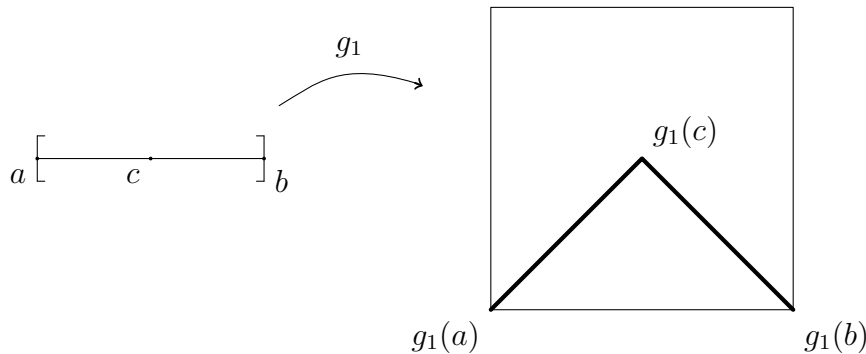
per ogni  $n$ . Dato  $\epsilon > 0$  esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq n_0$  si ha  $\rho(f_n, f) < \frac{\epsilon}{3}$ . Fissiamo  $n = n_0$ . Allora  $\hat{d}(f_{n_0}(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3}$  e  $\hat{d}(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$ . Inoltre,

essendo  $f_{n_0}$  continua esiste  $\delta > 0$  tale che se  $d(x, x_0) < \delta$  si ha  $\hat{d}(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$ . Mettendo insieme le cose abbiamo dimostrato che dato  $x_0 \in X$  e dato  $\epsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che se  $d(x, x_0) < \delta$  allora  $\hat{d}(f(x), f(x_0)) < \epsilon$  e quindi  $f$  è continua in  $x_0$ ; questo conclude la dimostrazione del teorema.  $\square$

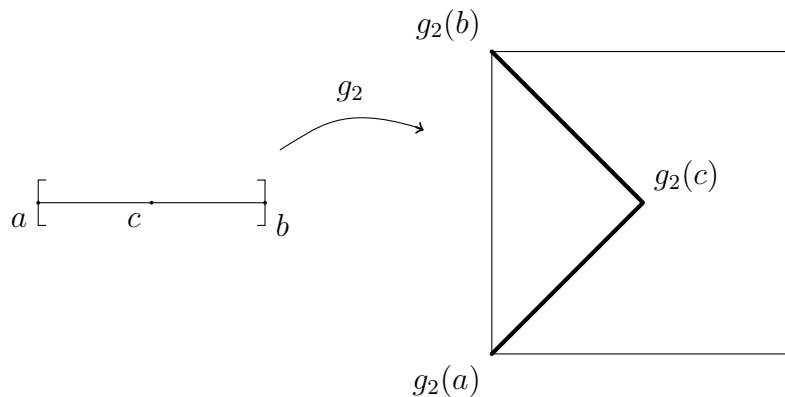
## D.2 La curva di Peano

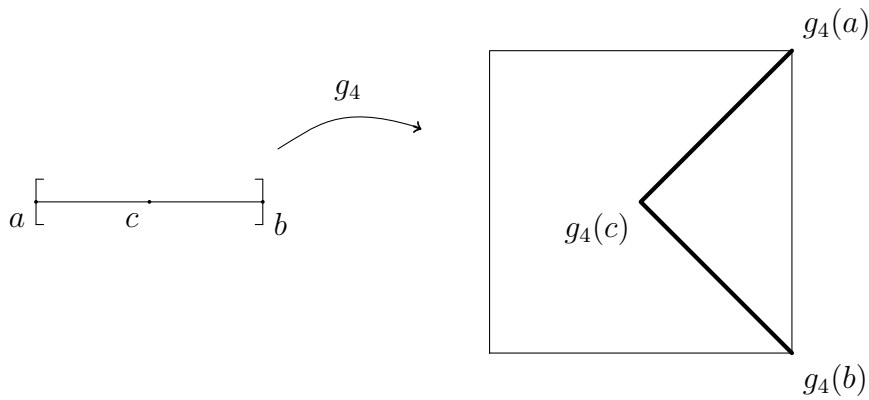
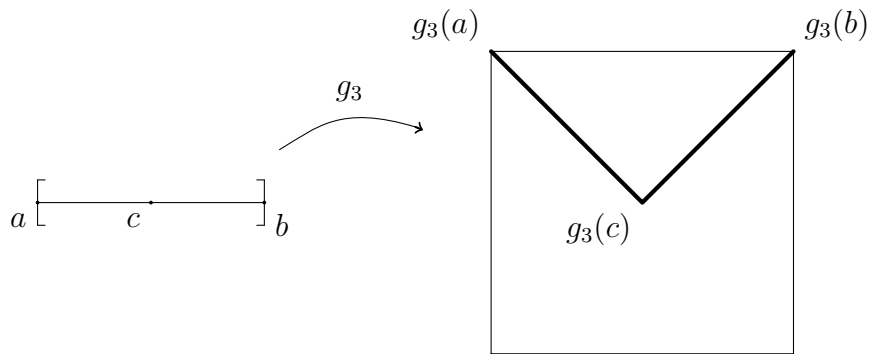
Vogliamo dimostrare l'esistenza di una **curva di Peano** cioè di un'applicazione continua e suriettiva  $p : I \rightarrow I^2$ ,  $I = [0, 1]$ .

La curva di Peano verrà costruita come limite di una successione di curve continue. Per costruire una tale successione partiamo dalla curva continua  $g_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ) il cui grafico è costituito dai due segmenti che uniscono  $g_1(a)$  e  $g_1(c)$  e  $g_1(c)$  con  $g_1(b)$  come in figura. La curva è contenuta nel quadrato che ha come lato il segmento che unisce  $g_1(a)$  con  $g_1(b)$  dell'asse delle  $x$  e il punto  $g_1(c)$  è il centro di questo quadrato.

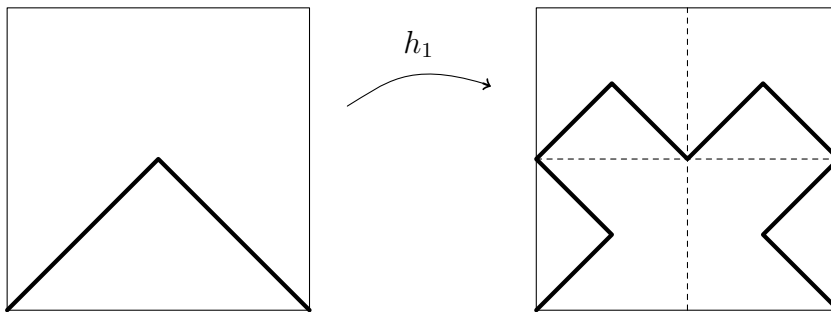


In modo analogo possiamo considerare le curve continue  $g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g_3 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $g_4 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  i cui grafici illustrati nelle tre figure seguenti.

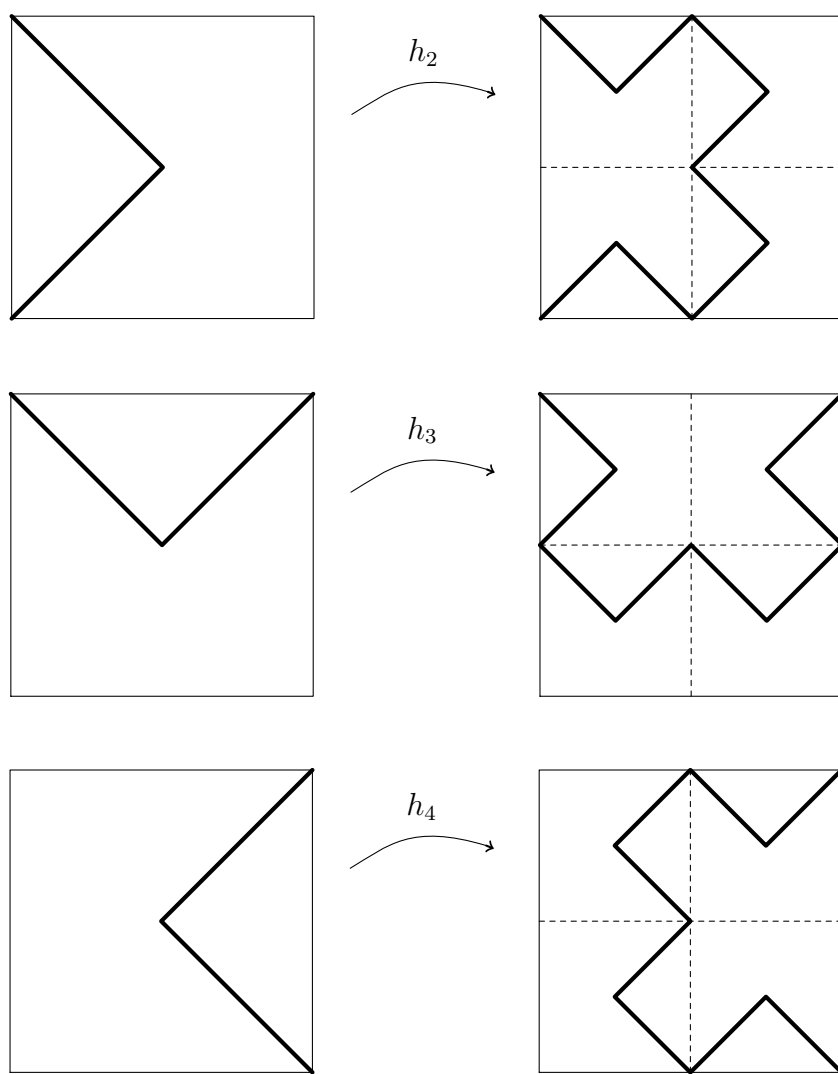




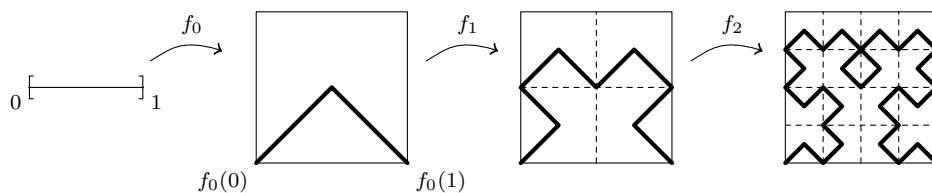
Consideriamo poi la curva  $h_1 : g_1([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^2$  che trasforma l'immagine di  $g_1$  nella spezzata costituita da 8 segmenti tutti della stessa lunghezza come in figura. Osserviamo che la curva inizia sempre in  $g_1(a)$  e finisce in  $g_1(b)$ .



In modo analogo possiamo considerare le tre curve continue  $h_i : g_i([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $i = 2, 3, 4$ , che trasformano l'immagine di  $g_i$  nella spezzata costituita da 8 segmenti tutti della stessa lunghezza illustrati nelle tre figure seguenti.



Consideriamo infine la successione di applicazioni continue  $f_n : I \rightarrow I^2$  costruita usando le applicazioni precedenti e illustrata nella figura seguente:



Vogliamo mostrare che  $f_n$  converge ad una funzione continua e suriettiva  $p : I \rightarrow I^2$  (la curva di Peano), rispetto alla metrica  $\rho$  su  $C(I, I^2)$  (lo spazio delle funzioni continue da  $I$  a  $I^2$ ) data da:

$$\rho(g, h) = \sup_{t \in I} d(g(t), h(t)), \quad g, h \in C(I, I^2),$$

dove  $d$  è la distanza su  $\mathbb{R}^2$  definita da:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Dal Teorema D.1.2 segue che  $(C(I, I^2), \rho)$  è completo (cf. Esercizio D.2) quindi per mostrare che  $f_n$  è convergente è sufficiente mostrare che è di Cauchy. Per fare ciò osserviamo che ogni triangolo del quale è costituito  $f_n(I)$  è contenuto in un quadrato di diametro  $\frac{1}{2^n}$ . Quando si passa da  $f_n$  a  $f_{n+1}$  stiamo rimpiazzando ognuno di questi triangoli con 4 triangoli che stanno nello stesso quadrato. Quindi la distanza tra  $f_n(t)$  e  $f_{n+1}(t)$  è al più  $\frac{1}{2^n}$ , cioè  $d(f_n(t), f_{n+1}(t)) \leq \frac{1}{2^n}$ , per ogni  $t \in I$ . Segue che  $\rho(f, g) \leq \frac{1}{2^n}$ .

Quindi per ogni  $m, n$  si ha:

$$\begin{aligned} \rho(f_n, f_{n+m}) &\leq \rho(f_n, f_{n+1}) + \rho(f_{n+1}, f_{n+2}) + \cdots + \rho(f_{n+m-1}, f_{n+m}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+m-1}} \leq \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}}\right) < \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

dalla quale segue che  $f_n$  è una successione di Cauchy e quindi converge in  $(C(I, I^2), \rho)$  ad una funzione continua  $p : I \rightarrow I^2$ . Per concludere resta da dimostrare la seguente:

**Proposizione D.2.1** *L'applicazione  $p$  è suriettiva.*

**Dimostrazione:** Sia  $x$  un punto arbitrario di  $I^2$ . Mostriamo che per ogni  $\epsilon > 0$  il disco aperto  $D_\epsilon(x)$  di centro  $x$  e raggio  $\epsilon$  in  $\mathbb{R}^2$  (rispetto alla metrica  $d$ ) interseca  $p(I)$ . Da questo seguirà che  $x \in \overline{p(I)}$  e siccome  $p(I) \subset I^2$  è chiuso (compatto in uno spazio di Hausdorff) si ha che  $x \in \overline{p(I)} = p(I)$  e quindi  $p$  è suriettiva. Per dimostrare che  $D_\epsilon(x) \cap p(I) \neq \emptyset$  sia  $n_0$  un numero naturale tale che  $\rho(f_{n_0}, p) < \frac{\epsilon}{2}$  e  $\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\epsilon}{2}$  (tale  $n_0$  esiste in quanto  $f_n$  converge a  $p$ ). Segue che  $d(f_{n_0}(t), p(t)) < \frac{\epsilon}{2}$  per ogni  $t \in I$ . Scegliamo  $t_0 \in I$  tale che  $d(f_{n_0}(t_0), x) < \frac{1}{2^{n_0}}$  (un tale  $t_0$  esiste in quanto  $f_{n_0}(I)$  è contenuto in ogni quadrato di lato  $\frac{1}{2^{n_0}}$  nel quale è suddiviso  $I^2$  (al passo  $n_0$  ci sono  $4^{n_0}$  di questi quadrati). Allora

$$d(x, p(t_0)) \leq d(x, f_{n_0}(t_0)) + d(f_{n_0}(t_0), p(t_0)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

che implica  $p(t_0) \in D_\epsilon(x)$  e quindi  $D_\epsilon(x) \cap p(I) \neq \emptyset$ . □

## D.3 Esercizi

**Esercizio D.1** Dimostrare la disuguaglianza (D.1).

**Esercizio D.2** Dimostrare la completezza di  $(C(I, I^2), \rho)$ .

# Bibliografia

- [1] Fraleigh J. B., *A First Course in Abstract Algebra, 7th Edition*, Narosa Publishing House, 1986.
- [2] Richeson D. S., *Euler's Gem*, Princeton University Press, 2008.
- [3] Hatcher A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [4] Kosnioskowski C., *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli 1989.
- [5] Lee J. M., *Introduction to Topological Manifolds*, Springer 2000.
- [6] Loi A., *Introduzione alla Topologia Generale*, Aracne Editrice (2013).
- [7] Manetti M., *Topologia*, Springer-Verlag Italia, 2008.
- [8] Massey W., *A basic course in algebraic topology*, Springer-Verlag, 1991.
- [9] Mac Lane, S., *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, 1998.
- [10] Milnor J., *Analytic proofs of the "Hair ball theorem" and the Brouwer fixed point theorem*, The American Mathematical Monthly Vol. 85 No. 7, (1978) 521-524.
- [11] Moise E.E., *Geometric Topology in Dimension 2 and 3*, Springer-Verlag, 1977.
- [12] Munkres J. R., *Topology, A First Course*, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J. 1975.
- [13] Rolfsen D., *Knots and Links*, Berkley, Publish or Perish, 1978.
- [14] Sernesi E., *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, Torino 1994.
- [15] Singer I.M., Thorpe J.A., *Lezioni di Topologia elementare e di Geometria*, trad. it. Boringhieri Torino 1980.