Capitolo 1

Matrici e applicazioni lineari

Gli appunti che seguono sono solo un reassunto di quello che si è fatto a lezione e non sono pertanto sufficienti per affrontare l'esame !!

1.1 Matrici

Una tabella

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

si chiama *matrice m per n*.

Le m n-uple orizzontali

$$(a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n})\ ,\ (a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2n})\ ,\ldots\ (a_{m1},\ a_{m2},\ \ldots,\ a_{mn})$$

si chiamano *righe* della matrice e le n m-uple

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

verticali sono chiamate *le colonne* di A.

Indicheremo una matrice con il simbolo

$$A = (a_{ij}), i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Siano A e B due matrici $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \vdots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

La *somma* di A e B si scrive $A+B$ ed è la matrice $m \times n$ ottenuta come segue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Usando la notazione (1.2)

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Osservazione 1 *Osserviamo che la somma tra due matrici è possibile solo quando le due matrici hanno lo stesso numero di righe e di colonne.*

Il *prodotto* di una matrice A e uno scalare λ si scrive λA ed èla matrice $m \times n$ che si ottiene moltiplicando per λ ogni elemento di A:

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ & & \vdots & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Vale il seguente:

Teorema 2 *L'insieme delle matrici $m \times n$ è uno spazio vettoriale rispetto alle operazione di somma e moltiplicazione per uno scalare definite da (1.3) e (1.4) rispettivamente. Il vettore nullo è la matrice nulla $m \times n$ mentre l'opposto della matrice $A = (a_{ij})$ è la matrice $-A = (-a_{ij})$.*

Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{jk})$ due matrici $m \times p$ e $p \times n$ rispettivamente (il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B). Allora il prodotto AB è la matrice $m \times n$ il cui elemento ij è ottenuto moltiplicando la riga i-ma A_i di A per la riga j-ma B_j di B (qui si intende il prodotto scalare della riga e la colonna considerati come vettori in $\mathbb{R}^p$). In altre parole se $C = (c_{ij}), i = i, 2, \dots m, j = 1, 2 \dots n$ è il prodotto tra A e B allora:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \ a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{ip}b_{pk} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}.$$

Osserviamo che che il prodotto AB tra due matrici A e B non è definito se il numero di colonne di A è diverso dal numero di righe di B. Osserviamo inoltre che anche se definito il prodotto di due matrici è , in generale, non commutativo (costruire un esempio).

Valgono le seguenti relazioni:

(i) $(AB)C = A(BC), \forall A \in \mathrm{M}_{mp}, B \in \mathrm{M}_{pq}, C \in \mathrm{M}_{qn}$;

(ii) $A(B + C) = AB + AC, \forall A \in \mathrm{M}_{mp}, B, C \in \mathrm{M}_{pn}$;

(iii) $(B + C)A = BA + CA, \forall B, C \in \mathrm{M}_{mp}, A \in \mathrm{M}_{pn}$;

(iv) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B), \forall A, B \in \mathrm{M}_{mp}, \lambda \in \mathbb{R}$;

(v) $OA = O$, O matrice nulla $m \times p, A \in \mathrm{M}_{pn}$;

(vi) $B0 = 0$, O matrice nulla $p \times n, B \in \mathrm{M}_{mp}$

La *trasposta* A^T di una matrice $A \in \mathrm{M}_{mn}$ è la matrice in M_{nm} ottenuta da A scambiando le sue righe con le sue colonne.
Una matrice $n \times n$ cioè che presenta lo stesso numero di righe e colonne si dice *quadrata.* Il numero di righe (e quello delle colonne) si chiama ordine della matrice. L'insieme delle matrici quadrate verrà denotato con M_n.
Una matrice quadrata $A \in M_n$ si dice *simmetrica* se $A^T = A$.
Una matrice quadrata $A \in M_n$ si dice *antisimmetrica* se $A^T = -A$.

La *diagonale* principale di $A = (a_{ij}) \in M_n$ è costituita dagli elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.
Data una matrice quadrata $A \in M_n$ la *traccia* di A è il numero reale che si ottiene sommando gli elementi della sua diagonale principale. e si indica con $\mathrm{tr}\, A$, cioè

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}.$$

Osserviamo che se A e B sono due matrici quadrate allora ha senso considerare sia AB che BA. Se $A = (a_{ij})$ è una matrice quadrata. La *diagonale* di A è costituita dagli elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

La matrice diagonale che ha tutti gli elementi 1 nella diagonale e 0 altrove si chiama la matrice *identica* e si indica con I_n

Osserviamo che la matrice identica $I_n = (\delta_{ij})$ è tale che

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Essa soddisfa: $AI_n = I_nA$ per ogni $A \in M_n$. Uno matrice $A = (a_{ij})$ è detta *triangolare superiormente* se $a_{ij} = 0, i \leq j$ mentre è *triangolare inferiormente* se $a_{ij} = 0, i \geq j$.
Una matrice quadrata A di ordine n si dice *invertibile* se esiste una matrice B tale che:

$$AB = BA = I_n. \tag{1.5}$$

La matrice B che soddisfa la (1.5) è unica:

$AB_1 = B_1A = I_n$ e $AB_2 = B_2A = I_n$ implicano

$$B_1 = B_1I_n = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2.$$

La matrice B che soddisfa (1.5) si chiama la matrice *inversa* di A e si indica con A^{-1}.

Osserviamo che che la moltiplicazione di due matrici di ordine n A e B da origine ad una matrice invertibile AB la cui inversa è $B^{-1}A^{-1}$. Più in generale se $A_1, A_2, \ldots A_p$

sono matrici invertibili allora $A_1 A_2 \dots A_p$ è invertibile con inversa $A_p \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

Il primo caso non banale di inversione di una matrice quadrata è il caso 2×2 (se a è una matrice non nulla 1×1, cioè un numero non nullo allora il suo inverso è dato da $\frac{1}{a}$).

Sia allora

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matrice 2×2. Cerchiamo degli scalari x, y, z, t tali che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} ax + bz &= 1 \\ cx + dz &= 0 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} ay + bt &= 0 \\ cy + dt &= 1 \end{aligned}$$

I due sistemi ammettono soluzione se e solo se $\det A = ad - bc \neq 0$ e si ottiene facilmente

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Per trovare l'inversa di una matrice di ordine n qualunque o per capire se una tale inversa esiste abbiamo bisogno di alcune definizioni.

Il *determinante* di una matrice quadrata $n \times n$ si definisce come (sviluppo rispetto alla prima riga)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} A_{1j},$$

dove A_{1j} è la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta eleminando la prima riga e la colonna j-sima dalla matrice A.
Si può dimostrare che il determinante può essere sviluppato anche secondo una riga qualunque tenendo conto opportunamente dei segni. Più precisamente vale la seguente formula, che rappresenta lo sviluppo rispetto alla i-sima riga.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{1j} A_{ij}.$$

Definiamo ora le operazioni elementari sulle righe di una matrice $A \in M_{m,n}$.
Sia A_i la riga i-esima di A.
Allora

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}.$$

Consideriamo le seguenti operazioni elementari:

1. Scambiare la riga i-esima con la riga j-esima $A_i \leftrightarrow A_j$;
2. moltiplicare la riga i-ma per uno scalare non nullo λ, $A_i \to \lambda A_i$;
3. sostituire alla riga i-esima λ volte la j-esima sommata alla riga i-esima stessa, $A_i \to \lambda A_j + A_i$.

Valgono le seguenti proprietà:

- il determinanrte cambia di segno se si scambiano due righe tra loro;
- il determinante risulta moltiplicato per λ se si moltiplica una riga per λ;
- il determinante se si applica un' operazione elementare di tipo 3;
- il detemrinante di una matrice con due righe uguali è nullo;
- il detemrinante di una matrice con due righe proporzionali è nullo;
- è nullo il determinante di una matrice che ha una riga che è combinazione lineare delle altre righe;
- $\det(A) = \det(A^T)$;

- $\det(AB) = \det A \det B$

Un criterio per capire se una matrice è invertibile è il seguente: una matrice invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

Un criterio per capire se n vettori in $\mathbb{R}^n$ formano una base è il seguente: n-vettori in $\mathbb{R}^n$ formano una base se e solo se la matrice $n \times n$ che ha come righe i vettori in questione ha determinante diverso da zero.

L' algoritmo per trovare l'inversa di una matrice quadrata A di ordine n, o per determinare se A non è invertibile è il seguente:

Passo 1. formare la matrice $n \times 2n$ $M = (A|I_n)$: A nella metà sinistra I_n nella metà destra di M.

Passo 2. usando operazioni elementari sulle righe ridurre M nella forma $(I_n|B)$, dove I_n è la matrice identità $n \times n$

Passo 3. porre $A^{-1} = B$.

Esempio 3 Trovare l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Scriviamo la matrice 4×8

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando le operazioni elementari:

$A_3 \to -A_1 + A_3, A_4 \to -A_1 + A_4$

si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando le operazioni elementari:

$A_1 \to -2A_2 + A_1, A_3 \to -A_2 + A_3, A_4 \to -2A_2 + A_4$

si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando le operazioni elementari:

$A_1 \to -3A_3 + A_1, A_2 \to A_3 + A_2, A_4 \to A_3 + A_4$

si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando l' operazione elementare: $A_4 \to -A_4$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Infine, applicando le operazioni elementari:

$A_3 \to 3A_4 + A_3, A_2 \to 2A_4 + A_2, A_1 \to -7A_4 + A_1$

si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & -20 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 8 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -20 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & -1 & -2 \\ 5 & 8 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lo studente è inviatato a verificare che questa matrice rappresenta effettivimente l'inversa della matrice A.

Osservazione 4 Se applicando l'algoritmo precedente si viene a creare nella metà sinistra di M una riga o una colonna nulla questo significa che la matrice non è invertibile.

Sia $A \in M_{m,n}$. Un *minore di ordine* p di A è una matrice $p \times p$ che si ottiene da A cancellando $m - p$ righe e $n - p$ colonne. Diremo che il *rango* di A è r, e scriveremo $\mathrm{rg}(A) = r$, se A ha un minore M di ordine di r con $\det M \neq 0$ e tutti i minori di ordine maggiore di r hanno determinante nullo.

Il rango di una matrice è invariante per operazioni elementari. Questo fornisce anche un metodo per il calcolo del rango di una matrice.

Un criterio per capire quale è la dimensione d dello spazio generato da k vettori in in $\mathbb{R}^n$ è il seguente: costruire la matrice $A \in M_{kn}$ che ha come righe i vettori in questione. Allora $\operatorname{rg} A = d$.

1.2 Rotazioni, riflessioni del piano

Un'applicazione $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice *applicazione lineare* (o *operatore* se $m = n$) se valgono le seguenti proprietà:

$$L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}),\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

$$L(\lambda \mathbf{v}) = \lambda L(\mathbf{v}),\ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Notiamo che se L è un'applicazione lineare, $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Il nostro interesse per le applicazioni lineare nasce dal fatto che ogni matrice $A \in M_{m,n}$ individua un'applicazione lineare

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

nel seguente modo:

$$L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x},$$

dove $\mathbf{x}$ e il vettore colonna le cui entrate sono $(x_1, \ldots, x_n)$.

Il fatto che L_A sia un'applicazione lineare si verifica come segue:

$$L_A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = L_A(\mathbf{x}) + L_A(\mathbf{y}),$$

$$L_A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda L_A(\mathbf{x}).$$

Siamo interessati alle applicazioni lineari della forma L_A dove A è una matrice *ortogonale* 2×2.

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice ortogonale 2×2. La condizione di ortogonalità $A^T A = I$ si traduce nelle seguenti equazioni per a, b, c, d:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1, \ ab + cd = 0.$$

Due numeri reali che verificano la prima uguaglianza possono essere rappresentati come il coseno e il seno di un opportuno angolo.

Si ha allora

$$a = \cos\alpha, c = \sin\alpha, b = \sin\beta, d = \cos\beta,$$

per qualche α e β, mentre l'identità $ab + cd = 0$ si traduce nella

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) = 0.$$

Quindi $\alpha + \beta = k\pi$ dove k è un intero.

Si distinguono due casi:

a) se k è pari $\cos\beta = \cos\alpha$ e $\sin\beta = -\sin\alpha$ e quindi

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix};$$

b) se k è dispari $\cos\beta = -\cos\alpha$ e $\sin\beta = \sin\alpha$ e quindi

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

In particolare, il determinante di A vale 1 se k e pari e -1 se k è dispari.

Vediamo ora quale è il significato geometrico dei due tipi di operatori ottenuti.

a) Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

e un vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Calcolando il prodotto scalare di $\mathbf{v}$ con $A\mathbf{v}$ si ottiene:

$$\mathbf{v} \cdot A\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^{\mathbf{2}} \cos\alpha.$$

Inoltre si verifica che $\|A\mathbf{v}\| = \|v\|$.

Se indichiamo con θ_v l'angolo tra $\mathbf{v}$ e $A\mathbf{v}$ segue che.

$$\cos\theta_v = \frac{\mathbf{v} \cdot A\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|\|A\mathbf{v}\|} = \cos\alpha.$$

Dunque l'angolo tra $\mathbf{v}$ e $A\mathbf{v}$ non cambia a seconda del vettore v, ma è sempre α. Quindi, l'operatore associato ad A è la *rotazione* dei vettori di un angolo α (in senso antiorario, dato che $A\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$)

b) Per quanto riguarda l'operatore associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

si consideri la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ formata dai due vettori ortonormali

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

Si ottiene allora $A\mathbf{v_1} = \mathbf{v_1}$ e $A\mathbf{v_2} = -\mathbf{v_2}$.

Dato un vettore $\mathbf{v} = x\mathbf{v_1} + y\mathbf{v_2} \in \mathbb{R}^2$, risulta

$$L_A(\mathbf{v}) = xL_A(\mathbf{v_1}) + yL_A(\mathbf{v_2}) = x\mathbf{v_1} - y\mathbf{v_2}.$$

Dunque, L_A lascia inalterata la componente lungo $\mathbf{v_1}$ di ogni vettore, ma cambia di segno quella lungo $\mathbf{v_2}$. In questo caso, l' operatore associato a A è la riflessione rispetto alla retta per l'origine di direzione $\mathbf{v_1}$, cioè la riflessione rispetto ad una retta che forma un angolo $\frac{\alpha}{2}$ con l'asse delle x.

Reassumendo abbiamo dimostrato la seguente:

Proposizione 5 *Sia A una matrice ortogonale 2×2. Se $det\, A = +1$, allora esiste un angolo α tale che*

$$A = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & -\,sin\,\alpha \\ sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} \textit{(matrice di rotazione)}$$

Se $det\, A = -1$, allora esiste un angolo α tale che

$$A = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & sin\,\alpha \\ sin\,\alpha & -\,cos\,\alpha \end{pmatrix} \textit{(matrice di riflessione)}$$

1.3 Sistemi di equazioni lineari

Consideriamo un sistema di m equazioni lineari, diciamo $L_1, L_2, \ldots, L_m$ in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nella forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{1.6}$$

dove le a_{ij} e le b_i sono costanti. Una *soluzione* (o *soluzione particolare*) di detto sistema è un n-upla $u = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ di costanti soluzione di ogni equazione del sistema. L'insieme di tutte queste soluzioni si chiama *soluzione generale* del sistema. Sistemi di equazioni lineari nelle stesse incognite si dicono *equivalenti* quando hanno la stessa soluzione generale. Un modo per ottenere un sistema equivalente ad uno assegnato è di applicare una sequenza delle seguenti operazioni elementari:

- Scambiare l'equazione i-ma con la j-ma;
- moltiplicare l'equazione i-ma per uno scalare non nullo λ;

- sostituire l'equazione i-ma con λ volte la j-ma sommata alla i-ma.

Un metodo per risolvere un sistema di equazioni lineari è quello di *eliminazione di Gauss*:

Passo 1. Usando le operazioni elementari ridurre il sistema ad uno equivalente più semplice (in forma triangolare o a gradini, vedi oltre).

Passo 2. Trovare le soluzioni del sistema semplificato

Supponiamo che durante l'applicazione del passo 1 si ottenga l'equazione

$$L : 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$$

allora:

- se $b = 0$, L si può cancellare senza che l'insieme delle soluzioni cambi;
- se $b \neq 0$ allora il sistema non ha soluzioni.

Sistemi in forma triangolare

Un sistema di equazioni lineari è in *forma triangolare* se il numero di equazioni è uguale a quello delle incognite, e se x_k è incognita iniziale dell'equazione k-ma. Perciò un sistema triangolare di equazioni lineari avrà la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n-1}x_{n-1} = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

dove $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0 \ldots a_{nn} \neq 0$.

Il suddetto sistema ha una soluzione unica, che si può ottenere con un procedimento di sostituzione a posteriori: si ricava x_n dall'ultima equazione lo si sostituisce nella penultima che si risolve rispetto all'incognita x_{n-1} etc. Il procedimento ha fine quando si trova la prima incognita x_1.

Sistema a gradini

Un sistema di equazioni lineari è in *forma a gradini* se è della forma seguente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad a_{rj_r}x_{j_r} + a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

dove $1 < j_2 < \cdots < j_r$ e $a_{11} \neq 0, a_{2j_2} \neq 0, \ldots, a_{rj_r} \neq 0$.

Un'incognita x_k in un sistema a scaglioni si chiama *variabile libera* se essa non è incognita iniziale in alcuna equazione, ovvero $x_k \neq x_1, x_k \neq x_{j_2}, \ldots, x_k \neq x_{j_r}$.

Osserviamo che $r \leq n$. Se $r = n$ il sistema è allora in forma triangolare e quindi ammette un'unica soluzione; se $r < n$ ci sono meno equazioni che incognite. Si possono allora assegnare valori arbitrari alle $n - r$ variabili libere e ottenere una soluzione del sistema. Al variare di questi valori arbitrari si ottengono soluzioni diverse, quindi il sistema ha infinite soluzioni.

Algoritmo di Gauss–Jordan

Quest'algoritmo permette di ridurre un sistema di m equazioni in n incognite ad un sistema a gradini (o in forma) triangolare ovvero determina se il sistema non ha soluzioni.

Passo 1. Scambiare le righe in modo che la prima incognita x_1 appaia con un coefficiente non nullo nella prima equazione: $a_{11} \neq 0$;

Passo 2. Usare a_{11} come perno per eliminare x_1 da tutte le equazioni meno che la prima (sostituendo la i-ma equazione $i > 1$ con la prima equazione moltiplicata per $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ sommata alla i-ma equazione);

Passo 3. Esaminare ogni nuova equazione L:

(a) se L ha la forma

$$L : 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$$

o se L è multipla di un'altra equazione, cancellarla dal sistema;

(b) se L ha la forma

$$L : 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b,$$

$b \neq 0$, uscire dall'algoritmo: il sistema non ha soluzioni.

Passo 4. Ripetere i passi $1, 2, 3$ sul sottosistema formato da tutte le equazioni meno la prima;

Passo 5. Continuare il procedimento finchè il sistema non si presenta in forma a gradini, o finche nel caso (b) non si ottiene un'equazione degenere.

Sistemi omogenei

Una classe importanza di sistemi sono quelli *omogenei*

Un sistema omogeneo di m equazioni in n incognite ha la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Un tale sistema ha sempre una soluzione, la soluzione nulla consistente della n-upla $(0,0,\ldots,0)$, detta anche *soluzione banale*. Ogni altra soluzione, se esiste, si chiama *soluzione non banale*.

Come conseguenza un sistema omogeneo potrà essere sempre ricondotto ad un sistema omogeno in forma a gradini:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
\qquad a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\qquad \vdots \\
\qquad a_{rj_r}x_{j_r} + a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = 0
\end{cases}
$$

dove $1 < j_2 < \cdots < j_r$ e $a_{11} \neq 0, a_{2j_2} \neq 0, \ldots, a_{rj_r} \neq 0$.

Ci sono quindi due possibilità :

(i) $r = n$, il sistema è triangolare e ammette quindi la sola soluzione nulla.

(ii) $r < n$, il sistema ha una soluzione non zero.

Come conseguenza otteniamo: *un sistema omogeneo di equazioni lineari con un numero maggiore di incognite che equazioni ha una soluzione non banale.*

Concludiamo enunciando due teoremi.

Teorema 6 *Sia $Ax = b$ un sistema lineare compatibile. Allora tutte le sue soluzioni si ottengono sommando ad una sua soluzione particolare X_0 tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$.*

Teorema 7 *Sia A una matrice $m \times n$. Allora il sistema $Ax = b$ è copatibile se e solo se $rg\, A = rg(A|b)$. Quando il sistema è compatibile, le soluzioni dipendono da $n - rg\, A$ parametri (variabili libere). Il numero $n - rg\, A$ è detta la dimensione dell'insieme delle soluzioni. In particolare la soluzione è unica se $rg\, A = n$.*

Corollario 8 *Sia A una matrice $m \times n$. Allora il sistema omogeneo $Ax = 0$ ha una soluzione non banale $x \neq 0$ se e solo se $rg\, A < n$. Perciò se $m < n$, $Ax = 0$ ha sempre una soluzione non banale. Nel caso $m = n$:*

- *Ax=0 ha una soluzione non banale se e solo se A è singolare,*
- *$Ax = b$ ha esattamente una soluzione se e solo se A è non singolare.*