

## 0.1 I numeri complessi

Introduciamo un simbolo  $i$ , detto unità immaginaria definito dalla condizione

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

Il simbolo  $i$  soddisfa l'equazione

$$x^2 + 1 = 0.$$

Un numero complesso è un'espressione del tipo:

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

I numeri  $a$  e  $b$  si chiamano parte reale e parte immaginaria del numero complesso  $z$ .

Indicheremo con  $\operatorname{Re} z$  e con  $\operatorname{Im} z$  la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso  $z$ .

Sia  $\mathbb{C}$  l'insieme dei numeri complessi.

L'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{C}$ . Infatti i numeri reali si possono identificare con l'insieme

$$\{z = a + ib \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = b = 0\}.$$

I numeri complessi  $z = a + ib$  tali che  $\operatorname{Re} z = 0$  si dicono immaginari puri.

Due numeri complessi  $z = a + ib$  e  $w = c + id$  sono *uguali* se  $a = c$  e  $b = d$ .

Definiamo la somma e la moltiplicazione di due numeri complessi  $z = a + ib$  e  $w = c + id$  con le solite regole del calcolo algebrico.

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d),$$

$$z \cdot w = (a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + i^2 bd = ac - bd + i(bc + ad).$$

Dato un numero complesso  $z = a + ib \neq 0$  esiste un numero complesso  $w$ , chiamato l'inverso di  $z$  tale che

$$z \cdot w = 1.$$

Denoteremo l'inverso di  $z$  con  $\frac{1}{z}$ .

Per trovare  $\frac{1}{z}$  scriviamo  $\frac{1}{z} = x + iy$ . Allora

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1 = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay),$$

quindi

$$ax - by = 1, \quad bx + ay = 0.$$

Abbiamo quindi un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite  $x, y$ . Usando, il fatto che  $z \neq 0$  e quindi  $a^2 + b^2 \neq 0$  otteniamo:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Equivalentemente

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Quindi il quoziente di due numeri complessi  $w = c + id$  e  $z = a + ib \neq 0$  è dato da:

$$\frac{w}{z} = w \cdot \frac{1}{z} = \frac{c + id}{a + ib} = \frac{(c + id)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + i \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}.$$

**Osservazione 1** Le operazioni di somma e prodotto dei numeri complessi, ristrette ai numeri reali (cioè ai numeri complessi con parte immaginaria uguale a zero), coincidono con le operazioni di somma e prodotto sui numeri reali. Per questo motivo si dice che il campo dei numeri complessi  $\mathbb{C}$  è un *estensione* del campo dei numeri reali  $\mathbb{R}$ .

**Osservazione 2** Una differenza sostanziale tra il campo dei numeri reali e quello dei numeri complessi è quella dell'ordinamento.

Il campo dei numeri reali è un *campo ordinato* in quanto sussistono le seguenti proprietà:

- 1) se  $x \leq y$  e  $y \leq x$  allora  $x = y$ ;
- 2) se  $x \leq y$  e  $y \leq z$  allora  $x \leq z$ ;
- 3)  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  si ha  $x \leq y$  oppure  $y \leq x$ ;
- 4) se  $x \leq y$ , allora  $x + z \leq y + z, \forall z \in \mathbb{R}$ ;
- 5) se  $0 \leq x$  e  $0 \leq y$ , allora  $0 \leq xy$ .

Nel campo dei numeri complessi  $\mathbb{C}$  non è possibile definire una struttura “ $\leq$ ” di campo ordinato.

Infatti dalle proprietà 4) e 5) seguirebbe che una relazione d'ordine  $\leq$  soddisfa le seguenti proprietà:

- se un numero è positivo (negativo) il suo opposto è negativo (positivo);
- il quadrato di un numero qualsiasi non è mai negativo.

D'altra parte  $1^2 = 1$  e  $i^2 = -1$ . Quindi abbiamo due quadrati che sono l'uno l'opposto dell'altro. Nessuno dei due però può essere negativo (perchè sono quadrati) e questo è assurdo (perchè tra  $a$  e  $-a$  uno dev'essere negativo se  $a \neq 0$ ).

Il complesso coniugato di un numero complesso  $z = a + ib$  è il numero, che si indica con  $\bar{z}$ , dato da  $\bar{z} = a - ib$ .

Un numero complesso è reale se e solo se coincide col suo coniugato.

Inoltre valgono le seguenti proprietà (esercizio!):

- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ;

- $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ ;
- $z\bar{z} = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2$ ;
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ ;
- $\bar{\bar{z}} = z$ ; (l'operazione di coniugio è involutoria);
- $\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}$ ;
- $\overline{(zw)} = \bar{z}\bar{w}, \forall z, w \in \mathbb{C}$ ;
- $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$ .

**Esempio 3** Vogliamo scrivere la forma algebrica, cioè la forma  $z = a + ib$  del numero complesso

$$z = \frac{2 + 5i}{1 - 3i}.$$

Per fare questo moltiplichiamo numeratore e denominatore per  $1 + 3i$  (il complesso coniugato di  $1 - 3i$ ) e otteniamo:

$$z = \frac{2 + 5i}{1 - 3i} = \frac{(2 + 5i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{1}{10}(-13 + 11i).$$

Quindi  $a = \operatorname{Re}(z) = -\frac{13}{10}$  e  $b = \operatorname{Im}(z) = \frac{11}{10}$ .

**Esempio 4** Scriviamo in forma algebrica il numero complesso

$$i(5 + 6i)^2 - \frac{4}{1 - i}.$$

Si ha:

$$i(25 + 60i + 36i^2) - \frac{4(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = -60 - 11i - 2(1 + i) = -62 - 13i$$

## 0.2 Rappresentazione geometrica e trigonometrica dei numeri complessi

Ricordiamo che i numeri reali si possono rappresentare come i punti di una retta una volta scelto un sistema di riferimento su di essa. Analogamente i numeri complessi si possono rappresentare con i punti di un piano, che prende il nome di *piano di Gauss*.

Fissato un sistema di coordinate ortogonali, associamo al numero complesso  $z = a + ib$  il punto  $P$  del piano di coordinate  $(a, b)$ .

In questo modo ai numeri reali vengono associati i punti dell'asse  $x$ , che viene detto *asse reale*, mentre gli immaginari puri sono rappresentati dai punti dell'asse  $y$ , detto *asse immaginario*.

L'unità immaginaria viene quindi rappresentata come la coppia  $(0, 1)$ .

Il punto che rappresenta il complesso coniugato  $\bar{z}$  è il simmetrico rispetto all'asse  $x$  del punto che rappresenta  $z$ .

La distanza dall'origine  $O$  (che rappresenta lo zero  $0$  in  $\mathbb{C}$ ) del punto  $P$  che rappresenta  $z$  si chiama modulo di  $z$  e si indica con  $\rho = |z|$ .

Per il Teorema di Pitagora

$$\rho = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Supponiamo  $z \neq 0$  (e quindi  $P \neq O$ ). Denotiamo con

$$\theta = \text{Arg}(z)$$

la misura in radianti di una qualsiasi rotazione che sovrappone l'asse delle  $x$  al segmento orientato  $OP$ , presa con il



segno positivo se avviene in senso antiorario, negativo nel caso opposto, si chiama *argomento* di  $z$ .

Osserviamo che l'argomento di  $z$  è definito a meno di multipli di  $2\pi$ . Inoltre se  $z = 0$ , l'argomento è indeterminato.

Per assegnare un ben determinato argomento basta assegnare un intervallo di ampiezza  $2\pi$  nel quale far variare l'angolo  $\theta$ . Noi fisseremo l'intervallo  $[0, 2\pi)$ .

Dato un numero complesso  $z = a + ib$  sussistono le relazioni:

$$a = \operatorname{Re}(z) = \rho \cos \theta, \quad b = \operatorname{Im}(z) = \rho \sin \theta. \quad (0.1)$$

Quindi

$$\boxed{z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)}, \quad (0.2)$$

che prende il nome di rappresentazione trigonometrica del numero complesso  $z$ .

Per trovare la forma trigonometrica (1.2) di un numero complesso  $z = a + ib$  si usano le (1.1). Prima di tutto si calcola il modulo di  $z$  dato da

$$\boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Inoltre

$$\boxed{\cos \theta = \frac{a}{\rho} \quad \sin \theta = \frac{b}{\rho}}.$$

e quindi possiamo trovare univocamente  $\theta$  restringendosi all'intervallo  $[0, 2\pi)$ .

**Esempio 5** Scriviamo la forma trigonometrica del numero complesso  $z = 1 - i$ . Si ha

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

mentre

$$\cos \theta = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ oppure } \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{-1}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ oppure } \theta = \frac{7\pi}{4}$$

Segue che  $\theta = \frac{7\pi}{4}$  e la forma trigonometrica di  $z$  è data da

$$z = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}).$$

Due numeri complessi

$$z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

sono uguali se e solo se

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dati

$$z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

usando le relazioni trigonometriche

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

e

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1$$

si ottiene

$$\boxed{z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]}. \quad (0.3)$$

**Proprietà** *il prodotto di due numeri complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti*

In particolare per ogni intero non negativo  $n$  e per ogni numero complesso  $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$  si ottiene la cosiddetta *formula di De Moivre*:

$$\boxed{z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]} \quad (0.4)$$

Inoltre è immediato verificare che:

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\rho}, \quad \text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Arg}(z) = -\theta.$$

Equivalentemente

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = \frac{1}{\rho}(\cos \theta - i \sin \theta).$$

Dati

$$z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

con  $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (0.5)$$

**Proprietà** *il quoziente di due numeri complessi ha come modulo il quoziente dei moduli e come argomento la differenza degli argomenti.*

**Esempio 6** Calcoliamo  $z = (2 - 2i)^5$ . Si ha:

$$z = (2 - 2i)^5 = 2^5(1 - i)^5 = 32(1 - i)^5.$$

Per l'esempio (5)

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$$

Usando formula di formula di De Moivre (1.4) otteniamo:

$$(1-i)^5 = (\sqrt{2})^5(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})^5 = 4\sqrt{2}(\cos \frac{35\pi}{4} + i \sin \frac{35\pi}{4}).$$

Siccome  $\frac{35\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 8\pi$ , otteniamo

$$(1-i)^5 = 4\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4(-1+i).$$

Quindi  $z = 128(-1 + i)$ .

**Esempio 7** Cerchiamo i numeri complessi  $z$  che soddisfano l'equazione:

$$z^3 - |z|^2 = 0. \quad (0.6)$$

**Primo metodo** Scriviamo  $z$  in forma algebrica  $z = x + iy$ .

L'equazione (1.6) diventa

$$z^3 = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = x^2 + y^2,$$

la quale è equivalente al sistema (non lineare!)

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = x^2 + y^2 \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases} \quad (0.7)$$

nelle incognite reali  $x$  e  $y$ .

Dalla seconda equazione ricaviamo  $y(3x^2 - y^2) = 0$  le cui soluzioni sono  $y = 0$  e  $y^2 = 3x^2$ .

Sostituendo  $y = 0$  nella prima equazione otteniamo

$$x^3 = x^2$$

le cui soluzioni sono  $x = 0$  e  $x = 1$ . Quindi le coppie  $(x = 0, y = 0)$  e  $(x = 1, y = 0)$  sono soluzioni del sistema. Sostituendo  $y^2 = 3x^2$  nella prima equazione si ottiene

$$x^3 - 9x^3 = -8x^3 = x^2 + 3x^2 = 4x^2,$$

o, equivalentemente,

$$4x^2(2x + 1) = 0,$$

le cui soluzioni sono  $x = 0$  e  $x = -\frac{1}{2}$ . La soluzione  $x = 0$  sostituita in  $y^2 = 3x^2$  ci dà  $y = 0$  mentre  $x = -\frac{1}{2}$  sostituita in  $y^2 = 3x^2$  ci dà  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Abbiamo trovato quindi due nuove soluzioni  $(x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2})$  e  $(x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{2})$

In definitiva abbiamo trovato le quattro coppie di soluzioni

$$(0, 0), (1, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}),$$

e quindi le soluzioni dell'equazione (1.6) sono fornite dai quattro numeri complessi:

$$z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Secondo metodo** Scriviamo  $z$  in forma trigonometrica

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Per la formula di De Moivre, l'equazione (1.6) è equivalente all'equazione

$$\rho^3(\cos(3\theta) + i \sin(3\theta)) = \rho^2,$$

la quale è a sua volta equivalente al sistema

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho^2 \\ \cos(3\theta) + i \sin(3\theta) = 1 \end{cases} \quad (0.8)$$

nelle incognite  $\rho \geq 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Le soluzioni della prima equazione sono  $\rho = 0$  e  $\rho = 1$ . Mentre le soluzioni della seconda equazione sono  $3\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  ossia le tre soluzioni  $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ . In questo modo ritroviamo le soluzioni già trovate in precedenza e cioè:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, z_2 = \cos 0 + i \sin 0 = 1, \\ z_3 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_4 &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

**Esempio 8** Calcoliamo il quoziente  $\frac{z_1}{z_2}$  dove  $z_1 = i$  e  $z_2 = 1 - i$  usando le loro forme trigonometriche. Il modulo e

l'argomento di  $z_1 = i$  sono  $\rho_1 = 1$  e  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ , mentre il modulo e l'argomento di  $z_2$  sono dati da  $\rho_2 = \sqrt{2}$  e  $\theta_2 = \frac{7\pi}{4}$ .  
 Quindi per la formula (1.5)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4}\right).$$

Osserviamo che

$$\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4} = 2\pi - \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

da cui

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} (-1 + i)$$

### 0.3 Radici di un numero complesso

Vogliamo estendere il concetto di radice  $n$ -esima valido per i numeri reali positivi a tutti i numeri complessi.

**Definizione 9** *Dati un numero naturale  $n \geq 1$  e un numero complesso  $w$ , diremo che il numero complesso  $z$  è una radice  $n$ -esima di  $w$ , e scriveremo  $z = \sqrt[n]{w}$  se  $z^n = w$ .*



**Teorema 10** Sia  $w \in \mathbb{C}$ ,  $w \neq 0$ , e  $n$  un intero  $\geq 1$ . Esistono esattamente  $n$  radici  $n$ -esime complesse  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  di  $w$ . Posto  $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  e  $z_k = \rho_k(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$  abbiamo

$$\rho_k = \sqrt[n]{r}$$

$$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

*Equivalentemente*

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi+2k\pi}{n}) + i \sin(\frac{\varphi+2k\pi}{n})), \quad k = 0, 1, \dots, n-1} \quad (0.9)$$

**Dimostrazione:** I numeri  $z_k$  sono evidentemente radici  $n$ -esime di  $w$ , come risulta applicando la formula di De Moivre (1.4). Mostriamo che non ce ne sono altre. Infatti affinché un numero complesso  $R(\cos \psi + i \sin \psi)$  sia radice  $n$ -esima di  $w$ , dovrebbe risultare:

$$R^n = r \quad \text{e} \quad n\psi = \varphi + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}$$

e cioè

$$R = \sqrt[n]{r} \quad \text{e} \quad \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2h\pi}{n}.$$

Attribuendo a  $n$  i valori  $0, 1, \dots, n-1$  troviamo appunto i numeri  $z_k$ . Dando a  $h$  un qualsiasi altro valore  $\tilde{h}$  diverso dai precedenti, questo può scriversi nella forma  $\tilde{h} = k + mn, m \in \mathbb{Z}$  ( $m \in \mathbb{Z}$  è il quoziente e  $k$  il resto della divisione di  $\tilde{h}$  per  $n$ ) per cui sarebbe

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2m\pi = \theta_k + 2m\pi$$

e ritroveremmo ancora gli stessi  $z_k$  precedenti.  $\square$

Indichiamo con  $\epsilon_k$  le radici  $n$ -esime del numero 1. Osserviamo che il modulo del numero 1 è uguale a 1 mentre l'argomento è  $\theta = 0$ .

Dalla formula (1.9) si ottiene allora:

$$\boxed{\epsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1} \quad (0.10)$$

**Esempio 11** Calcoliamo le radici quarte di 1. In questo caso nella formula (1.10)  $k = 0, 1, 2, 3$ . Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1 \\ \epsilon_1 &= \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_2 &= \cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \\ \epsilon_3 &= \cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.\end{aligned}$$

**Proposizione 12** *Le radici  $n$ -esime di un qualunque numero complesso  $z$  si possono ottenere moltiplicando una di esse per le  $n$  radici  $n$ -esime del numero 1.*

**Dimostrazione:** se  $z_1$  è una radice  $n$ -esima di  $z$  ed  $\epsilon_k$  una qualsiasi radice  $n$ -esima di 1 si ha:

$$(z_1 \epsilon_k)^n = z_1^n (\epsilon_k)^n = z_1^n = z$$

e quindi  $z_1 \epsilon_k$  è una radice  $n$ -esima di  $z$ ; inoltre, al variare di  $\epsilon_k, k = 0, 1, \dots, n-1$ , i numeri  $z_1 \epsilon_k$  sono tutti distinti.  $\square$

**Esempio 13** Calcoliamo le radici terze di  $-27$ . Sicuramente ci sono tre radici complesse. Una di queste è  $-3$ . Per la Proposizione 12 le radici terze di  $-27$  si possono ottenere moltiplicando  $-3$  per le radici terze di 1.

Dalla formula (1.10) queste ultime sono date da:

$$\epsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \epsilon_2 &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Quindi le radici terze di  $-27$  sono date  $z_0 = -3, z_1 = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

Il Teorema 10 ci dice che un polinomio del tipo  $z^n = z_0$  ammette  $n$  radici complesse. Vale un risultato più generale noto come il *teorema fondamentale dell'algebra* del quale riportiamo l'enunciato.

Abbiamo bisogno di una definizione

**Definizione 14** *Se  $P(z)$  è un polinomio in  $z$  di grado  $n$  e  $z_0$  una sua radice, si dice che  $z_0$  è di molteplicità  $k$  ( $k$  intero  $\geq 1$ ) se vale la formula*

$$P(z) = (z - z_0)^k Q(z),$$

*dove  $Q$  è un polinomio tale che  $Q(z_0) \neq 0$ .*

**Esempio 15** *L'unità immaginaria  $i$  è radice di molteplicità due del polinomio  $P(z) = z^3 - iz^2 + z - i = z^2(z - i) + (z - i) = (z - i)(z^2 + 1) = (z - i)^2(z + i)$*

**Teorema 16** *(teorema fondamentale dell'algebra) Un'equazione polinomiale*

$$a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n = 0, \quad a_n \neq 0$$

*con coefficienti complessi qualsiasi ammette precisamente  $n$  radici in  $\mathbb{C}$ , se ognuna di esse viene contata con la sua molteplicità.*