Esercizi sui sistemi di equazioni lineari
Corso di Laurea in Informatica A.A. 2006-2007
Docente: Andrea Loi

-2. Indicare se le seguenti equazioni sono lineari: (a) $5x + 7y - 8yz$, (b) $x + \pi y + ez = \log 5$, (c) $3x + ky - 8z = 16, k \in \mathbb{R}$.

-1. Dire se $u = (1, 1, 1)$ è soluzione della seguente equazione: $x + 2y - 3z = 4$.

0. Dire se (a) $u = (3, 2, 1, 0)$ (b) $v = (1, 2, 4, 5)$ sono soluzioni dell'equazione: $x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 3$.

1. Risolvere le seguenti equazioni: (a) $ex = \log 5$, (b) $cx = 0$, (c) $3x - 4 - x = 2x + 3$, (d) $z + 2x - 4 = 3x + 3 - x$.

2. Descrivere le soluzioni dell'equazione $2x + y + x - 5 = 2y + 3x - y + 4$.

3. Indicare le soluzioni dell'equazione $2y + 3x - y + 4 = x + 3 + y + 1 + 2x$.

4. Data l'equazione lineare $x-2y+3z = 4$. Trovare (a) tre soluzioni particolari, (b) la soluzione generale.

5. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 2t = 0 \\ 5y - z + 3t = 1 \\ 7z - t = 3 \\ 2t = 8 \end{cases}$$

6. Determinare le variabili libere nei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z - 6s + 2t = 4 \\ z + 8s - 3t = 6 \\ s - 5t = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - 3y + 7z = 1 \\ 4y + 5z = 6 \\ 4z = 9 \end{cases}$$

7. Scrivere il seguente sistema in forma matriciale e trovare le sue soluzioni usando l'eliminazione di Gauss.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 2x - y + 4z = 17 \\ 3x - 2y + 2z = 14 \end{cases}$$

8. Trovare le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t = 0 \\ 3x - 7y + 2z - 5s + 4t = 9 \\ 5x - 10y - 5z - 4s + 7t = 22 \end{cases}$$

9. Trovare le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = 2 \\ 2x + 5y - 2z + t = 1 \\ 5x + 12y - 7z + 6t = 7 \end{cases}$$

10. Trovare i valori del parametro reale λ in modo tale che il seguente sistema nelle incognite x, y, z abbia: (a) una soluzione unica, (b) nessuna soluzione, (c) un numero infinito di soluzioni:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \lambda z = 3 \\ x + \lambda y + 3y = 2 \end{cases}$$

11. Trovare le condizioni su a, b, c (numeri reali) tali che il seguente sistema nelle incognite x, y, z abbia una soluzione:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

12. Vero o falso (la matrice dei coefficienti è sempre diversa dalla matrice nulla):

   - Un sistema omogeneo è sempre compatibile
   - Un sistema omogeneo di 4 equazioni in 12 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono da almeno 8 parametri.
   - Un sistema omogeneo di 4 equazioni in 12 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono esattamente da 8 parametri.
   - Un sistema di 2 equazioni in 4 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono da almeno 4 parametri.
   - Un sistema omogeneo di 4 equazioni in 2 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono da almeno 2 parametri.
   - Un sistema omogeneo di 4 equazioni in 2 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono esattamente da 2 parametri.
   - Se $A \in M_{m,n}$ con $m < n$, allora il sistema omogeneo $Ax = 0$ ammette soluzioni non banali.
   - Se $A \in M_{m,n}$ e il sistema omogeneo $Ax = 0$ ammette soluzioni non banali, allora $m < n$.
   - $A \in M_{m,n}$ con $m > n$, allora il sistema omogeneo $Ax = 0$ ammette soluzioni non banali.

13. Trovare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1, 3)$ e $v_3 = (2, 2, -1, -1)$.

14. Trovare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^7$ generato dai seguenti vettori $v_1 = (1, 2, -1, 1, 5, 0, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1, 3, \sqrt{2}, \pi, -3)$ e $v_3 = (2, 4, -2, 2, 10, 0, 2)$.

15. Trovare i valori del parametro reale λ per i quali i tre vettori $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 0)$ e $v_3 = (0, -1, \lambda, 1)$ di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti.

16. Trovare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^8$ generato dai seguenti vettori:

   $v_1 = (1, 2, -1, 1, 5, 0, 1, 2)$ $v_2 = (0, 2, 1, 3, \sqrt{2}, \pi, -3, e)$

   $v_3 = (2, 4, -2, 2, 10, 0, 2, 4)$ $v_4 = (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{e}{2})$