

Esercizi su indipendenza lineare, basi e dimensione
Corso di Laurea in Informatica A.A. 2006-2007
Docente: Andrea Loi

0. Per quali valori di λ i vettori $v_1 = 2\lambda\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $v_2 = \mathbf{j}$ sono linearmente indipendenti?
1. Provare che i vettori $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ sono linearmente indipendenti. Dire, inoltre se il vettore \mathbf{j} è esprimibile come combinazione lineare di \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 , e se lo è, dire in quanti modi.
2. Vero o falso:
 - 4 vettori in \mathbb{R}^6 sono sempre linearmente dipendenti;
 - 6 vettori in \mathbb{R}^4 sono linearmente dipendenti;
 - 4 vettori in \mathbb{R}^6 sono sempre linearmente indipendenti.
3. Dire se i seguenti vettori di \mathbb{R}^3 sono linearmente indipendenti; scrivere, quando possibile, un vettore come combinazione lineare dei rimanenti:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Stessa domanda per i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Provare che i vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^3 .

5. Siano $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1, 3)$ e $v_3 = (0, 1, 1, 1)$ tre vettori di \mathbb{R}^4 . Trovare la dimensione del sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori v_1 , v_2 e v_3 .
6. Trovare i valori del parametro reale λ per i quali i vettori $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ e $v_3 = (0, -1, \lambda)$ di \mathbb{R}^3 sono linearmente indipendenti.
7. Trovare la dimensione del sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1, 3)$ e $v_3 = (2, 2, -1, -1)$.
8. Trovare la dimensione del sottospazio di \mathbb{R}^7 generato dai seguenti vettori
 $v_1 = (1, 2, -1, 1, 5, 0, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1, 3, \sqrt{2}, \pi, -3)$ e $v_3 = (2, 4, -2, 2, 10, 0, 2)$.
9. Trovare i valori del parametro reale λ per i quali i tre vettori $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 0)$ e $v_3 = (0, -1, \lambda, 1)$ di \mathbb{R}^4 sono linearmente indipendenti.
10. Trovare la dimensione del sottospazio di \mathbb{R}^8 generato dai seguenti vettori:
 $v_1 = (1, 2, -1, 1, 5, 0, 1, 2)$ $v_2 = (0, 2, 1, 3, \sqrt{2}, \pi, -3, e)$
 $v_3 = (2, 4, -2, 2, 10, 0, 2, 4)$ $v_4 = (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{e}{2})$