1. Esercizi sulle varietà topologiche

1) Dimostrare che B^m è una m-varietà topologica con bordo S^{m-1}.

2) Dimostrare che $B^m \cong I^m$, dove $I = [0, 1]$.

3) Sia $A = \{(x, y) \in R^2 \mid xy = 0\}$ con la topologia indotta da R^2. Dire se A è una varietà topologica con bordo.

4) Poniamo $S = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 < z \leq 1\}$. Dimostrare che S è una varietà e determinarne bordo e dimensione. S è compatta?

5) Sia $C = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1\}$. Dimostrare che C è una varietà, determinandone anche bordo e dimensione. C è compatta?

2. Esercizi sulle curve

1) Su $R \sqcup R$ consideriamo la relazione d'equivalenza che identifica x appartenente alla prima copia di R con x della seconda copia, $\forall\, x \neq 0$. Sia X lo spazio quoziente (chiamato retta con due origini). Dimostrare che X è loc. euclideo e II-numerabile, ma non T_2.

2) Se $U \subset R$ è un aperto, le sue componenti connesse possono essere ordinate con l'ordine indotto da R nel modo seguente: se $A, B \subset U$ sono due componenti, diciamo che $A < B$ sse $\forall\, a \in A$ e $\forall\, b \in B$ si ha $a < b$. Si mostri che questo è un ordine totale sulle componenti di U. Esiste U t.c. l'ordine delle sue componenti sia isomorfo a $\mathbb{Q}$ con l'ordine usuale?

3) L'insieme delle componenti connesse di un compatto $K \subset R$ è al più numerabile?

3. Esercizi di topologia del piano

1) Trovare un omeomorfismo esplicito di R^2 che manda la circonferenza nel bordo di un triangolo.

2) Trovare un omeomorfismo esplicito di R^2 che manda la circonferenza nel bordo di un quadrato.

3) Sia $C \subset S^2$ una curva di Jordan (cioè $C \cong S^1$). Dimostrare che $S^2 - C$ ha esattamente due componenti connesse di cui C è la frontiera.

4) Sia $C \subset R^2$ una curva di Jordan. Dimostrare che esiste un triangolo equilatero inscritto in C (ovvero che esistono $a, b, c \in C$ t.c. $d(a, b) = d(a, c) = d(b, c) > 0$ dove d è la distanza euclidea di R^2).

5) Nel toro $T^2 = R^2/\mathbb{Z}^2$ è vero l'analogo del teorema di Jordan? In altre parole, se $C \subset T^2$ soddisfa $C \cong S^1$, è sempre vero che $T^2 - C$ è non connesso?

6) Nel piano proiettivo reale vale l'analogo del teorema di Jordan?

4. Esercizi sulle superfici

1) Siano X e Y spazi connessi per archi e $f, g : X \to Y$ applicazioni omotope. Dimostrare che $f_* = g_* : H_1(X) \to H_1(Y)$. Dedurne che $X \simeq Y$ implica $H_1(X) \cong H_1(Y)$.
2) Trovare una triangolazione per S^2, T^2 e P^2.
3) Dimostrare che $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$.
4) Classificare la superficie $S(p)$ con $p = a_1 a_2 a_3 a_4 a_1 a_2^{-1} a_3 a_4^{-1}$, utilizzando i passi da 1 a 5 della dimostrazione del teorema di classificazione. Calcolare il gruppo fondamentale di $S(p)$.
5) Determinare le superfici connesse compatte con gruppo fondamentale abeliano.
6) Classificare la superficie rappresentata dalla parola $abacbc^{-1}$ utilizzando i risultati noti e calcolarne il primo gruppo d'omologia.
7) Classificare la superficie rappresentata dalla parola $abc^{-1}dca^{-1}d^{-1}$ e calcolarne il gruppo fondamentale e la caratteristica di Eulero.