Gruppi algebre di Lie 3.1-3.6
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2020-2021
Docente: Andrea Loi

1. Dimostrare che il prodotto diretto di due gruppi di Lie é un gruppo di Lie.

2. Sia $\pi : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1, (t,s) \mapsto (e^{2\pi it}, e^{2\pi is})$, $L = \{(t, \alpha t) \mid \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ e $f = \pi_{|L} : L \to S^1 \times S^1$. Sia τ_f la topologia indotta da f su $H = \pi(L)$ e τ_s quella indotta dall'inclusione $H \subset S^1 \times S^1$. Dimostrare che $\tau_s \subset \tau_f$.

3. Sia $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dimostrare che $e^X = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$.

4. Trovare due matrici A e B tali che $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

5. Dimostrare che il gruppo unitario $U(n)$ é compatto per ogni $n \geq 1$.

6. Sia G un gruppi di Lie e sia G_0 la componente connessa di G che contiene e (elemento neutro di G). Se μ e i denotano la moltiplicazione e l'inversione in G, provare che

   1. $\mu(\{x\} \times G_0) \subset G_0, \forall x \in G$;
   2. $i(G_0) \subset G_0$;
   3. G_0 é un sottoinsieme aperto di G
   4, G_0 é un sottogruppo di Lie di G.

7. Sia H un sottogruppo (algebrico) di un gruppo di Lie G. Supponiamo che G sia connesso e H aperto in G. Dimostrare che $H = G$.

8. Sia G un gruppo di Lie e $\mu : G \times G \to G$ la moltiplicazione. Dimostrare che

$$\mu_{*(a,b)}(X_a, Y_b) = (R_b)_{*a}(X_a) + (L_a)_{*b}(Y_b),\ \forall (a,b) \in G \times G,\ \forall X_a \in T_aG,\ \forall Y_b \in T_bG,$$

   dove L_a (risp. R_b) denota la traslazione a sinistra (risp. a destra) associata ad a (risp. b).

9. Sia G un gruppo di Lie con inversione $i : G \to G, a \mapsto i(a) = a^{-1}$. Dimostrare che

$$I_{*a}(Y_a) = -(R_{a^{-1}})_{*e}(L_{a^{-1}})_{*a}(Y_a),\ \forall a \in G,\ \forall Y_a \in T_aG.$$

10. Verificare che il commutatore tra matrici $[A,B] = AB - BA$ definisce un'algebra di Lie sullo spazio tangente all'identità dei gruppi $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $SL_n(\mathbb{R})$ e $SL_n(\mathbb{C})$.

11. Dimostrare che $\mathbb{R}^3$ con il prodotto vettoriale é un'algebra di Lie isomorfa all'algebra di Lie del gruppo ortogonale $O(3)$.

12. Dimosatrare che $SO(2)$ è diffeomorfo a S^1 e $SU(2)$ è diffeomorfo a S^3.

13. Dimostrare le algebre di Lie di $SU(2)$ e $SO(3)$ sono isomorfe.

14. Verificare che l'esponenziale di una matrice definisce un'applicazione $e : T_{I_n}G \to G,\ A \mapsto e^A$ per $G = GL_n(\mathbb{R}), GL_n(\mathbb{C}), O(n), SO(n), U(n), SU(n), SL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{C})$.

15. Sia $G = G_1 \times \cdots \times G_s$ il prodotto diretto di gruppi di Lie. Dimostrare che l'algebra di Lie di G é isomorfa alla somma diretta delle algebre di Lie dei G_i.

16. Siano H e K due sottogruppi di Lie di un gruppo di Lie G. Dimostare che l'algebra di Lie di $H \cap K$ é isomorfa all'intersezione delle algebre di Lie di H e di K.

17. Dimostrare che ogni gruppo di Lie é parallelizzabile.