

1 Richiami sulle Varietà topologiche.

1.1

X spazio topologico, $X \in T_2$ (o di Hausdorff) \Leftrightarrow
 $\forall x \neq y \in X \exists U, V$ intorno wsp. s.t. $x \in U$ e $y \in V$ con $U \cap V = \emptyset$.

X è \mathbb{II} -numerabile $\Leftrightarrow \exists \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base numerabile per le topologie di X.

$$R_+^m \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_m) \in R^m \mid x_1 > 0\} \quad \boxed{\text{diagramma: un rettangolo con la parte inferiore sinistra tagliata}} \\$$

Consideriamo $R^{m-1} \subset R_+^m$ definito da $\{x_1 = 0\}$.

Def. M spazio topologico \mathbb{II} -numerabile d. Hausdorff.

Diciamo che M è una m-varietà topologica con bordo se $\forall p \in M \exists U \ni p$ intorno aperto di p in M ed $\exists V \subset R_+^m$ aperto con un homeomorfismo $\varphi: U \rightarrow V$.

M è senza bordo se possiamo assumere $V \subset R_+^m - R^{m-1} \cong R^m$

Il numero m si chiama dimensione di M.

(U, φ) è detta corte locale.

Una famiglia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ di corte locali t.c.

$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ è detta atlante.

$\exists \{(U_n, \varphi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ atlante numerabile t.c. U_n le chiusure compatte e $\varphi(U_n) = \begin{cases} R_+^m & (\text{atlante/corte speciale}) \\ R^m \cong R_+^m - R^{m-1} & \end{cases}$

Def. M m-versete con bordo . 1.2

$p \in M$ punto interno $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists U$ intorno di p in M
con $U \cong \mathbb{R}^m$

$p \in M$ punto di bordo $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ p non è punto interno

Interno di M $\text{Int } M \stackrel{\text{def}}{=} \{ p \in M \mid p \text{ è punto interno} \}$

Bordo di M $\text{Bd } M \stackrel{\text{def}}{=} M - \text{Int } M$

OSS. $\text{Int } M \neq \emptyset$ e $\text{Int } M$ è una m-versete-
senza bordo .

M senza bordo $\Leftrightarrow \text{Bd } M = \emptyset$

È anche utilizzata la notazione $\text{Bd } M = \partial M$.

Le Versete con bordo includono quelle senza bordo.

Def. M è aperto \Leftrightarrow Senza bordo e non compatto .

M è chiuso \Leftrightarrow Senza bordo e compatto .

Ese. R^m , R_+^m

$$S^m = \{ x \in R^{m+1} \mid \|x\| = 1 \}$$

$$B^m = \{ x \in R^m \mid \|x\| \leq 1 \}, \quad I^m = [0, 1]^m \cong B^m$$

$$P^m = R^{m+1} - \{0\} \quad / (x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in R - \{0\} \text{ t.c. } y = \lambda x)$$

$$CP^m = C^{m+1} - \{0\} \quad / (x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in C - \{0\} \text{ t.c. } y = \lambda x)$$

R^m è aperto, mentre S^m , P^m e CP^m sono chiusi.

Non è banale che R_+^m e B^m hanno Bd non vuoto (anche se intuitivamente $Bd R_+^m = R^{m-1}$ e $Bd B^m = S^{m-1}$).

Teorema del bordo. $p \in M$ e (U, φ) carta loc. intorno a p .

Allora $p \in Bd M \Leftrightarrow \varphi(p) \in R^{m-1} \subset R_+^m$ e

$p \in Int M \Leftrightarrow \varphi(p) \in R_+^m - R^{m-1}$.

Dim (per $m \leq 2$). Basta far vedere che

$$p \in Bd M \Leftrightarrow \varphi(p) \in R^{m-1}.$$

\Leftarrow) Possiamo assumere $\varphi(p) = 0$

Supponiamo per assurdo che $p \in Int M$.

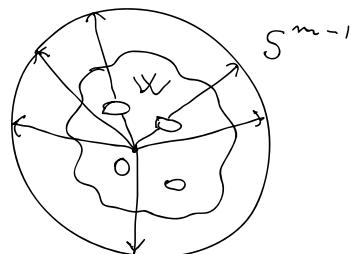
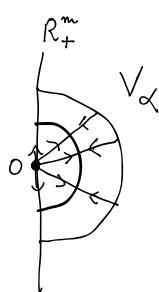
Allora $\exists U' \ni p$ intorno aperto e $\varphi': U' \xrightarrow{\cong} R^m$ omom. con $\varphi'(p) = 0$.

A meno di passare ad intorni più piccoli, trovo un intorno V di 0 in \mathbb{R}^m_+ omeomorfo ad un intorno V' di 0 in \mathbb{R}^m . Questo non è possibile perché 0 ammette basi d'intorni $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ in \mathbb{R}^m_+ t.c. $V_\alpha - \{0\}$ contriceibile $\forall \alpha$, mentre qualunque intorno W di 0 in \mathbb{R}^m ammette retrazione

$$\varrho: W - \{0\} \rightarrow S^{m-1}$$

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

e quindi $W - \{0\}$ non può essere contriceibile, dato che non lo è S^{m-1} (Contraddizione).



$\Rightarrow)$ Se $\varphi(p) \in \mathbb{R}^m_+ - \mathbb{R}^{m-1}$ possiamo trovare una bocca aperta $D_\varepsilon \subset \varphi(U) - \mathbb{R}^{m-1}$ di centro $\varphi(p)$. Ma $D_\varepsilon \cong \mathbb{R}^m$ e quindi è quindi $p \in \text{Int } U$ (Contraddizione).

OSS. Per dimostrarlo $\forall m$ serve sapere che S^m non è contriceibile. La teoria dell'omotopia permette questo.

Dalle dimostrazione segue il

Corollario. M m -varietà con bordo. Ogni $p \in \text{Bd } M$ ammette una base d'intorni $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ t. c.

$U_n - \{p\}$ è contabile. Al contrario, A base d'intorni $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di $p \in \text{Int } M \exists$ sottobase $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A'}$,

$A' \subset A$, t. c. $U_\alpha - \{p\}$ non è contabile $\forall \alpha \in A'$.

Questa proprietà distingue punti d. Bd da punti d. Int.

Esempi: $\text{Bd } R_+^m = R^{m-1}$

$$\text{Bd } B^m = S^{m-1}$$

Corollario (Interventi topologici del bordo).

M, N varietà con bordo, $f: M \rightarrow N$ omeo.

Allora $f(\text{Bd } M) = \text{Bd } N$ e $f(\text{Int } M) = \text{Int } N$.

Corollario. $\text{Bd } M$ se non è vuoto è una $(m-1)$ -varietà senza bordo ($\text{Bd}^2 M = \emptyset$).

Inoltre $\text{Int } M$ è un aperto denso in M .

Def. $f: M \rightarrow N$ è propria se $\text{Bd } M = f^{-1}(\text{Bd } N)$ e $f^{-1}(K)$ è compatto $\forall K \subset N$ compatto.

Prodotti

Tesimo. M, N varietà con bordo

$$\dim M = m, \quad \dim N = n.$$

$M \times N$ con la topologia prodotto è una varietà con bordo. Inoltre

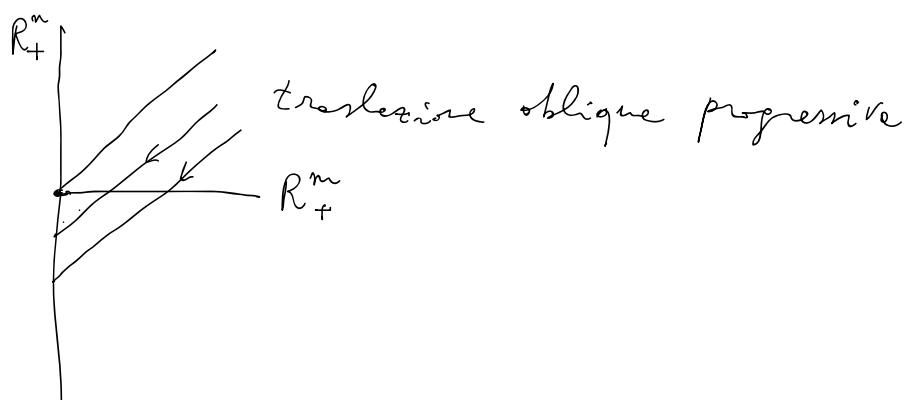
$$\dim(M \times N) = m + n$$

$$\text{Bd}(M \times N) = \text{Bd}M \times N \cup M \times \text{Bd}N$$

$$\text{Int}(M \times N) = \text{Int}M \times \text{Int}N.$$

Dimo. Sia $(p, q) \in M \times N$ e si analizzino le varie possibilità, tenendo presente che

$$R_+^m \times R_+^n \cong R_+^{m+n}.$$



Teorema (invarianza topologica delle dimensioni).

1.7

$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ omes. Allora $m = n$.

Dim (per $m \leq 2$). A meno di traslazioni possiamo

assumere $f(0) = 0$. Allora $f_1 : \mathbb{R}^m - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ omes. Quindi la composizione

$$\begin{array}{ccccc} S^{m-1} & \xrightarrow[i]{\cong} & \mathbb{R}^m - \{0\} & \xrightarrow[f_1]{\cong} & \mathbb{R}^n - \{0\} \xrightarrow[h]{\cong} S^{n-1} \\ & \downarrow & & & \uparrow \\ & & & & \cong \end{array}$$

è un'equivalenza omotopica $S^{m-1} \simeq S^{n-1}$

dove i è l'inclusione e $h(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

Ne segue $m = n$.

2 Varietà differentiabili

2.1

$A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow B$ è
differentiabile $\in C^\infty$ se $\exists U$ intorno
aperto di A in \mathbb{R}^m e $\exists \tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^\infty$
che estende f .

$f : A \rightarrow B$ diffeomorfismo $\Leftrightarrow f$ oneo e
 f, f^{-1} differentiabili.

In particolare sono ben definiti i
diffeomorfismi tra aperti di \mathbb{R}^m_+ e le
applicazioni differentiabili da un aperto di
 \mathbb{R}^m_+ ad uno di \mathbb{R}^n_+

Def. M m-varietà topologica con bordo.

Due carte loc. (U, φ) e (V, ψ) sono
differentiabilmente compatibili se
il cambiamento di coordinate

$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ è un
diffeomorfismo tra aperti di \mathbb{R}^m_+ .

Def. Un atlante differentiabile ($\circ C^\infty$)

In M è un atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$

felto d. carte a cui c'è una
differentiabilità competitiva.

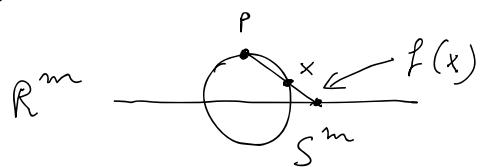
Def. Una struttura differentiabile su M
è un atlante differentiabile minimale.
 M munite di str. diff. si dice m-varietà diff. comp.

OSS. Ogni atlante differentiabile determina
univocamente una struttura differentiabile,
aggiungendo tutte le carte loc. differentiabilmente
competibili con tutte le carte dell'atlante.

E.s. R^n con le carte globali date dall'identità
 R_+^n , idem

S^m con l'atlante definito da due
proiezioni stereografiche

$$f: S^m - \{p\} \xrightarrow{\sim} R^n$$



B^m , P^m , CP^m

Oss. M m -Vetetà diff. con bordo

Int M m -Vetetà diff. senza bordo

But M Vmto oppure $(m-1)$ -Vetetà diff.
senza bordo,

Se M è una Vetetà diff. le carte loc. che
consideriamo sono solo quelle delle sue strutture
differentiali.

(U, φ) carta in M con $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m_+$

$x^1, \dots, x^m: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni coordinate

$$\begin{aligned} x^i(a^1, \dots, a^m) &= a^i \quad \forall (a^1, \dots, a^m) \in \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \\ x^i: U &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x^i(p) = x^i(\varphi(p)) \end{aligned}$$

(x^1, \dots, x^m) coordinate locali in M .

Def. M, N Vetetà diff. con $f: M \rightarrow N$.

Diciamo che f è differentiabile $\circ C^\infty$

$\forall p \in M \quad \exists (U, \varphi)$ carta intorno a p in M
e $\exists (V, \psi)$ carta intorno a $f(p)$ in N t.c.

$$f(U) \subset V \quad e \quad \varphi(U) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \psi(V)$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{C^\infty}$

(x^1, \dots, x^m) coordinate loc. determinate da φ
 \cup

2.4

(y^1, \dots, y^n) coordinate loc. determinate da φ su V

f si rappresenta mediante n funzioni C^∞ su M chiamate

$$f(x^1, \dots, x^m) = (y^1(x^1, \dots, x^m), \dots, y^n(x^1, \dots, x^m)).$$

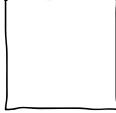
$f : M \rightarrow N$ C^∞ è un diffeomorfismo

se esiste $f^{-1} : N \rightarrow M$ C^∞ .

Ovviamente $f \circ f^{-1} = \text{id}_N$.

Prodotto:

Se M, N sono C^∞ con bordo, $M \times N$ non è
automaticamente differentiabile.

Ese. $I \times I$  ha angoli.

Si può ovviare al problema mediante una
tecniche chiamate "allisciamenti degli angoli".



Senza addentrarci, possiamo dire che $M \times N$ ammette
una struttura C^∞ unica e meno di diffeo, indotta
da M e da N . Il problema non si pone se $\partial M = \emptyset$ o $\partial N = \emptyset$.

Spazio Tangente

2.5

Da questo momento in poi considereremo solo
varietà con bordo e approssimazioni differentiabili.

M m-varietà, $p \in M$.

Come nel caso senza bordo, possiamo definire lo
spazio tangente $T_p M$ che è uno spazio vettoriale
reale di dim m (mediante derivazioni di germe'
di funzioni C^∞ intorno a p).

Ogni vettore $v \in T_p M$ si può rappresentare
come vettore velocità di un cammino C^∞

$$\alpha: J \longrightarrow M \quad \text{dove} \quad J = \begin{cases}]-\varepsilon, \varepsilon[& \text{se } p \in \text{int } M \\ [0, \varepsilon[& \{ \} \quad p \in \partial M \\]-\varepsilon, 0] & \end{cases}$$

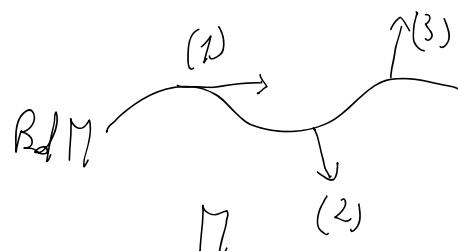
$\overset{\curvearrowright}{\alpha}$
 p

Se $p \in \partial M$ si presentano 3 casi:

(1) $v \in T_p \partial M$

(2) v interno $\alpha: [0, \varepsilon[\rightarrow M$

(3) v esterno $\alpha:]-\varepsilon, 0] \rightarrow M$



Nei casi (2) e (3) $\langle v \rangle \oplus T_p \partial M = T_p M$.

Si definiscono le metriche riemanniane, le forme C^∞ , i tensori etc.
come nel caso senza bordo.

$f: M \rightarrow N$ $p \in M \rightsquigarrow T_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 2.6
 applicazione tangente o
 differentiale di f in p .

$v \in T_p M$, $\alpha: J \rightarrow M$ rappresentante di v , con
 $\alpha(0) = p \rightsquigarrow f \circ \alpha: J \rightarrow N$ rappresentante di
 $T_p f(v) \in T_{f(p)} N$.

(U, φ) carta loc. con coordinate

$(x^1, \dots, x^m) \rightsquigarrow$ comp. coordinate $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}$ in U .

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$$

differentiale di f

$f: M \rightarrow R$, $p \in M \rightsquigarrow df: T_p M \rightarrow R$

$$df(v) = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \alpha) \right|_{t=0}$$

per $\alpha: J \rightarrow M$ rappresenta $v \in T_p M$.

$f: M \rightarrow N$ differenziabile \iff

$T_p f: T_p N \rightarrow T_{f(p)} N$ isomorfismo $\forall p \in M$

e $f(Bd M) \subset Bd N$.

Se $U \subset M$ aperto $i: U \hookrightarrow M$ identifichi
 $T_p U = T_p M \quad \forall p \in U$.

Varietà orientabili

Le coordinate standard (x^1, \dots, x^m) su \mathbb{R}^m determinano

le basi canoniche $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right)$ per $T_x \mathbb{R}^m$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$

$\rightsquigarrow T_x \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$ in modo canonico \rightsquigarrow orientazione

canonica su $T_x \mathbb{R}^m$ $\forall x \in \mathbb{R}^m$.

\forall aperto di \mathbb{R}^m_+ $\rightsquigarrow T_x V \cong \mathbb{R}^m$ (stesse coordinate)

\rightsquigarrow orientazione canonica su $T_x V$ $\forall x \in V$.

Def. $V, W \subset \mathbb{R}^m_+$ aperti, $g: V \rightarrow W$ diffe.

g preserva l'orientazione se $T_x g: T_x V \rightarrow T_{g(x)} W$ preserva l'orientazione come isomorfismo tra spazi vettoriali orientati (\Leftrightarrow mantiene basi positive in basi positive).

Oss. $g: V \rightarrow W$ preserva l'orientazione \Leftrightarrow lo jacobiano $\det(Jg)$ è positivo ovunque.

Def. M m-varietà con bordo. Una orientazione su M è l'assegnazione di una orientazione su $T_p M \wedge p$ (= classe d'equivalenza di basi positive). E' richiesto che $\forall p \in M \exists$ una certa loc. (U, φ) , $p \in U$, t. c. $T_x \varphi : T_x U \rightarrow T_{\varphi(x)} R^m \cong R^m$ preserva l'orientazione $\forall x \in U$.

Co tali certe si determina un atlante orientato. Un atlante è orientato \Leftrightarrow tutti i cambiamenti di certa preservano l'orientazione.

Viceversa, un atlante orientato induce un'orientazione su M (si orienta $T_p M$ mediante l'isomorfismo con R^m indotto da una certa dell'atlante intorno a p).

Def. M è orientabile se \exists orientazione. M è orientata se fissiamo un'orientazione.

OSS. M orientabile connexe \Rightarrow

\exists esattamente 2 orientazioni su M .

Se $k = \#$ componenti connexe di M

allora su M esistono esattamente 2^k orientazioni.

E.s. $R^m, R_+^m, B^m, S^m, CP^m,$
 P^m con m dispari sono orientabili.
 P^m con m pari non orientabile.

M orientabile e $U \subset M$ aperto \Rightarrow
 U orientabile.

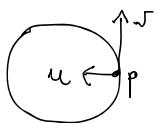
M orientata e $Bd M \neq \emptyset \Rightarrow$

$Bd M$ orientato

(v_1, \dots, v_{m-1}) base positiva per $T_p Bd M \Leftrightarrow$
 per un vettore interno $u \in T_p M$ le base

(v_1, \dots, v_{m-1}, u) per $T_p M$ è positiva.

$$S^1 = Bd B^2$$



(v, u) base positiva
 per $T_p B^2 = T_p \mathbb{R}^2$.

3 RICHIAMI SU R

3.1

Intervallo: insiem del tip $[a, b]$, $]a, b[$, $]a, b]$,
 $[a, b[$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, \mathbb{R} , con $a < b$.

T. $A \subset \mathbb{R}$ connesso non vuoto $\Leftrightarrow A$ è un punto oppure
 un intervallo. Quindi

$$A \cong \begin{cases} \{0\} \\ [0, 1] \\ [0, +\infty[\\ \mathbb{R} \end{cases}$$

Dm. $\#A = 1$ banch. Assumiamo $\#A > 1$.

\Leftarrow) ovvio perché gli intervall. Sono connessi p.e.

\Rightarrow) Siano $a, b \in A$ con $a < b$. Mostriamo che
 $[a, b] \subset A$. Infatti, per comodo, se $c \in]a, b[$
 non appartiene ad A allora

$$A \subset]-\infty, c[\cup]c, +\infty[. \quad \text{Ma } A_1 = A \cap]-\infty, c[$$

$$\text{e } A_2 = A \cap]c, +\infty[\text{ sono aperti non vuoti di } A$$

$$\text{t.c. } A = A_1 \cup A_2 \text{ e } A_1 \cap A_2 = \emptyset \text{ contraddizione.}$$

A questo punt. è facile concludere che A è un
 intervallo con estremi $\inf A$ e $\sup A$.

Segue subito la classificazione a meno d. omes. \square

Oss. $A \subset \mathbb{R}$ connesso $\Rightarrow A$ connesso per archi (p.a.).

$A \subset \mathbb{R}^m$ connesso, $n \geq 2 \not\Rightarrow A$ connesso p.a.

E.S. $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin \frac{1}{x}, x > 0 \right\} \cup \left\{ (0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1 \right\}$



T. $U \subset \mathbb{R}$ aperto $\Rightarrow U$ è unione di più numerabili di intervalli aperti e due e due disgiunti.

Dim. Del f.t. che \mathbb{R} è II-numerabile e loc. connesso p.a. segue che anche U è II-numerabile e loc. connesso p.a.

Segue che le componenti connesse di U sono aperte in U , e quindi in \mathbb{R} (perché U è aperto in \mathbb{R}) e il più numerabili. Inoltre U è unione topologica (disgiunta) delle sue componenti connesse che sono intervalli aperti.

O4 CURVE TOPOLOGICHE

4.1

Def. Curve topologiche = 1-varietà topologica
con bordo.

T. C curve topologiche connesse \Leftrightarrow C omomorfie ad
una delle seguenti:

- R (caso aperto)
- S^1 (caso chiuso)
- $[0, 1]$ (caso compatto con bordo)
- $[0, +\infty[$ (caso non compatto con bordo).

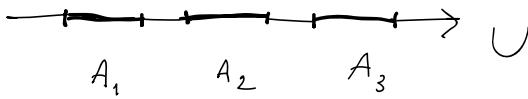
Dm (\Leftarrow ovvie).

\Rightarrow) Mostremo intanto che se $U, V \subset C$
sono aperti omomorfi ad intervalli allora

$U \cap V$ ha al più 2 componenti connesse.

Infatti, supponiamo per assurdo che ci siano almeno tre componenti $A_1, A_2, A_3 \subset U \cap V$.

Detto che A_i è omomorfo ad un connesso R ,
segue che $A_i \cong$ intervallo (loc. endes $\Rightarrow \#A_i > 1$).



Possiamo assumere che gli A_i siano come in figura
(è possibile che le diverse estremi siano in comune).

Ciascun A_i ha

almeno un punto di frontiera in U e A_2 ne ha esattamente 2. Questi sono anche punti di frontiera in C .

Con un ragionamento simile, A_2 ha un punto di frontiera in V , quindi trovo $\alpha \in \text{Fr}_U A_2 \cap \text{Fr}_V A_2$
 $\Rightarrow \alpha \in U \cap V$. Sono qui che $\alpha \notin A_2$ (perché A_2 è aperto)
e che $A'_2 = A_2 \cup \{\alpha\} \subset U \cap V$ è un intervallo,
quindi connesso. Questo contraddice il fatto che A_2 è
una componente连通的 di $U \cap V$.

Segue anche che $\text{Fr}_U A \cap \text{Fr}_V A = \emptyset \forall A \subset U \cap V$ componente连通的.
Consideriamo se un ricoperto aperto di C fatto di
intervalli. Per il teorema di Lindelöf esiste
un sottoricoperto al più numerabile $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Se U_1 è l'unico aperto del ricoperto, allora

$C = U_1$ è connessa ed un intervallo.

Altimenti $\exists j > 1$ t.c. $U_1 \cap U_j \neq \emptyset$ (in

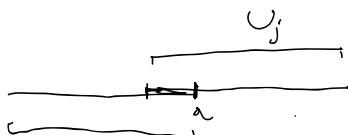
caso contrario U_1 e $\bigcup_{j>1} U_j$ sono due aperti
non vuoti e disgiunti, contro l'ipotesi che C è
connesso).

Scegliere il minimo $j > 1$ per cui

$U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Si hanno due casi:

1) $U_i \cap U_j$ connesso $\Rightarrow V_1 = U_i \cup U_j$ è

un intervallo. Infatti $F_{U_j}(U_i \cap U_j) = \{y_j\}$

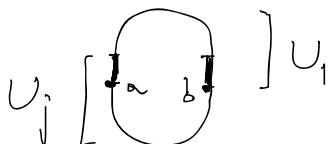


e $V_1 = U_i \cup (U_j - U_i)$ è unione di intervalli contigui $\Rightarrow V_1$ intervallo.

—————

2) $U_i \cap U_j$ ha due componenti connesse \Rightarrow

$$C = U_i \cup U_j \cong S^1$$



Infatti $F_{U_j}(U_i \cap U_j) = \{a, b\}$

Come sopra è facile ottenere che $U_i \cup U_j \cong S^1$.

Quindi C ammette un sottovarietà omotopica a S^1 , che quindi è chiusa (perché compatto) e aperta, perciò unione di aperti. (C connesso $\Rightarrow C \cong S^1$).

Nel caso (2) si conclude. Nel caso (1)

Consideriamo il riaperto aperto fronte di V_1 e degli U_i , $i \neq 1, j$.

Iterando il ragionamento si ottengono V_1, V_2, \dots

im e in ogni pernaggio $V_i \cong$ a intervalli oppure $\cong S^1$ (nel qual caso x conclude). Se il processo non termina, si ha $C = \bigcup_{i \geq 1} V_i$ (dato che ogni V_i è contenuto in qualche V_j perché C è connesso).

Dal fatto che $V_1 \subset V_2 \subset \dots$ e $V_i \hookrightarrow \mathbb{R}$ segue $C \hookrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow C \cong$ intervallo.

Corollario: C curva topologica $\Rightarrow C \cong \bigsqcup_{i \in I} C_i$ con $C_i \cong S^1$ oppure $C_i \cong$ intervalli e $\#I \leq \aleph_0$.

Dim basta prendere come C_i le componenti connesse di C . \mathbb{N} -numerabile $\Rightarrow \#I \leq \aleph_0$.

Corollario: C curva topologica compatta $\Rightarrow \#\text{Bd } C$ peri.

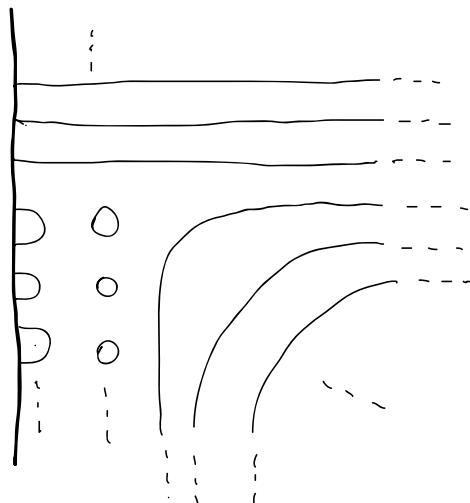
Dim $C \cong \bigsqcup_{i=1}^k S^1 \sqcup \bigsqcup_{i=1}^l [0, 1] \Rightarrow \#\text{Bd } C = 2k + l$.

Corollario: C curva t.p. semplicemente connessa $\Rightarrow C \cong$ intervalli $\Rightarrow C$ contrattibile.

Gallerie C curve top. $\Rightarrow C$ ammette una struttura
differenziabile e \exists embedding C^∞ proprio $C \hookrightarrow \mathbb{R}^2_+$. 4.5

Dim Basta osservare che ogni componente di C , essendo
omeomorfa ad una 1-varietà differenziabile con Bd , ammette
una struttura differenziabile. Inoltre:

$$Bd\mathbb{R}^2_+ \quad \mathbb{R}^2_+$$



CURVE DIFFERENZIABILI

5.1

Def. Curve differentiabili = 1-Varietà differentiabile con bordo.

Ragionone. Si dimostre, come nel caso senza bordo, che ogni Varietà diff. con bordo ammette una metrica riemanniana (mediante le partizioni dell'unità).

Def. Curve riemanniane = Curve diff. munite di metrica riemanniana.

Poniamo $S^1(r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = r\}$ come la metrica riemanniana standard. Sull'intervallo consideriamo la metrica isotropa di \mathbb{R} .

T. C curve riemanniane connesse \Rightarrow C isometriche
o: $\mathbb{R}, S^1(r)$ (così geodeticamente complete senza bordo)

$$]0, l[, \quad l > 0$$

$$[0, l[, \quad [0, l]$$

$$]0, +\infty[, \quad [0, +\infty[.$$

Altre tali curve sono anche non isometriche.

Dmo Fishiamo $p \in C$ e ($\text{e } \text{Bd}C = \emptyset$) prendiamo le due geodetiche da partire da p con velocità unitarie $\pm v \in T_p C \cong \mathbb{R}$, $\|v\|=1$.

Se $\text{Bd}C \neq \emptyset$ scegliamo $p \in \text{Bd}C$ e consideriamo solo le geodetiche uscite da p con velocità v vettore unitario interno.

Prolunghiamo tali geodetiche in modo massimale e indichiamoci con γ_{\pm} : $J_{\pm} \rightarrow C$ le estensioni, dove J_{\pm} è un intervallo del tipo $[0, \gamma_{\pm}]$ o $[0, \gamma_{\pm}[$

$$\text{con } 0 < \gamma_{\pm} \leq +\infty, \quad \gamma_{\pm}(0) = p \quad \text{e} \quad \gamma'_{\pm}(0) = \pm v \quad (\text{solo se } p \in \text{Bd}C)$$

Potremo definire $\gamma: \tilde{J} \rightarrow C$, con

$$\tilde{J} = -J_- \cup J_+ = \begin{cases} [-\gamma_-, \gamma_+] \\ [-\gamma_+, \gamma_+] \\ [-\gamma, \gamma] \\ [-\gamma, \gamma_+] \end{cases} \quad \text{a seconda di } J_{\pm}$$

$$\text{ponendo} \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_{-}(-t) & \text{se } t \in -J_- \\ \gamma_{+}(t) & \text{se } t \in J_+ \end{cases}$$

Saremo che γ è aperto (si vede immediatamente, si γ è il teorema di classificazione topologica delle curve). Se $C \cong$ intervallo allora

γ difeso $\Rightarrow \gamma$ isometria.

Se $C \cong S^1$ allora γ isometria è $S^1(r)$.

5.3

Tutt'è già isometrico perché è n. segue 2 > 0 in
bene alle lunghezze di C determinate dal primo ritorno di γ .

A quest. punto è facile considerare restando
nella curva γ il tenere le messe di isometrie.

Collage. C curve diff. connesse \Rightarrow

C differenti e: R , S^1 , $[0, +\infty[$, $[0, 1]$

Dove si sceglie una metrica riemanniana
su C , e segue subito dalla connessione
metrica.

Collage C curve top. \Rightarrow Connnette
una struttura differentiabile unica
a meno di diffeomorfismi.

Note. Un risultato analogo vale in dim ≤ 3 ,
ma è molto più difficile dimostrarlo.

In dim ≥ 4 è falso (esistono n-varietà top.
senza struttura diff., oppure con più strutture
diff. non differenziabili per $n \geq 4$).

TOPOLOGIA DEL PIANO

6.1

Def. $C \subset \mathbb{R}^2$ è detta curva di Jordan $\Leftrightarrow C \cong S^1$.

Teorema di Jordan. $C \subset \mathbb{R}^2$ curva di Jordan \Rightarrow

$\mathbb{R}^2 - C$ ha esattamente due componenti connesse $I(C)$ e $E(C)$, di cui la prima è limitata e la seconda illimitata. Inoltre $F_{\mathbb{R}^2} I(C) = F_{\mathbb{R}^2} E(C) = C$.

Def. $I(C)$ e $E(C)$ sono detti risp. interno ed esterno di C .

Oss. Dato che C è compatta, $I(C)$ e $E(C)$ sono aperti in \mathbb{R}^2 .

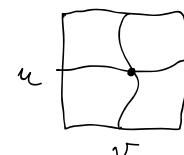
Dtm (dal libro di Adams-Francisce "Introduction to Topology", 2008).

La dimostrazione è di Malherbe.

Premettiamo il lemma seguente, con $B^1 = [-1, 1]$.

Lemma. Se $u, v : B^1 \rightarrow B^1 \times B^1$ soddisfano $u(-1) = (-1, 0)$, $u(1) = (1, 0)$, $v(-1) = (0, -1)$, $v(1) = (0, 1)$, allora $\exists s, t \in B^1$ t. c. $u(s) = v(t)$.

Dtm Supponiamo per assurdo che le tesi sia falsa, quindi $u(s) \neq v(t) \forall s, t \in B^1$.



In componenti: $u(s) = (u_1(s), u_2(s))$

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t))$$

Poniamo $M(s, t) = \|u(s) - v(t)\|_\infty = \max \left(|u_1(s) - v_1(t)|, |u_2(s) - v_2(t)| \right)$
 $\forall s, t \in \mathbb{B}^1$. Saremo $M(s, t) > 0 \quad \forall s, t \in \mathbb{B}^1$.

Sia $F: \mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^1 \longrightarrow \mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^1$

$$F(s, t) = \frac{1}{M(s, t)} \begin{pmatrix} v_1(t) - u_1(s), \\ u_2(s) - v_2(t) \end{pmatrix}.$$

Allora F è continua e dato che $\mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^1 \cong \mathbb{B}^2$,

dal teorema del punto fisso di Brower segue che F ammette un punto fisso $(s_0, t_0) \in \mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^1$.

S'noti che $M(s, t) = |u_i(s) - v_i(t)|$ per un certo $i = 1, 2$, quindi una componente di $F(s, t)$ è $\pm 1 \Rightarrow F(s, t) \in \text{bd}(\mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^1)$
 $\forall (s, t) \in \mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^1 \Rightarrow (s_0, t_0) = F(s_0, t_0) \in \text{bd}(\mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^1)$.

Si presentano 4 casi e vediamo che $s_0 = \pm 1 \circ t_0 = \pm 1$.

Supponiamo $s_0 = 1 \Rightarrow F(s_0, t_0) = (1, t_0) \quad \text{e } u_1(s_0) = 1 \Rightarrow$

$$0 > \frac{v_1(t_0) - 1}{M(s_0, t_0)} = \frac{v_1(t_0) - u_1(s_0)}{M(s_0, t_0)} = 1 \quad \text{contraddizione.}$$

Gli altri tre casi per esercizio.

Continuiamo la dimostrazione del teorema di Jordan. 6.3

1) $\mathbb{R}^2 - C$ ha almeno 2 componenti.

La funzione distanza indotta da \mathbb{R}^2 $d: C \times C \rightarrow [0, +\infty]$

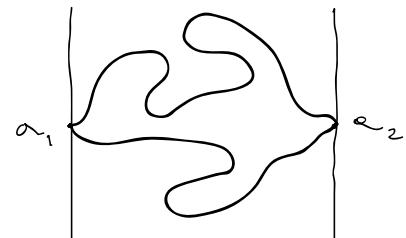
ammette minimo (dat. che C , e quindi $C \times C$, è compatto).

Sono $a_1, a_2 \in C$ due punti a distanza minima e

sono r_1, r_2 le rette per a_1 e a_2 risp. ortogonali al segmento ab . A meno di rotazione possiamo assumere

r_1, r_2 verticali.

Segue subito che r_1 e r_2 intersecano C solo in a_1 e a_2 ($a \in r_1 \cap C - \{a_1\} \Rightarrow d(a, a_2) > d(a_1, a_2)$).



C compatto $\Rightarrow \exists r_3, r_4$ rette ortogonali a r_1, r_2 t.c.

C è contenuto nel rettangolo determinato da queste 4 rette.

A meno di affinità possiamo assumere che il rettangolo coincida con $B^1 \times B^1 \subset \mathbb{R}^2$.

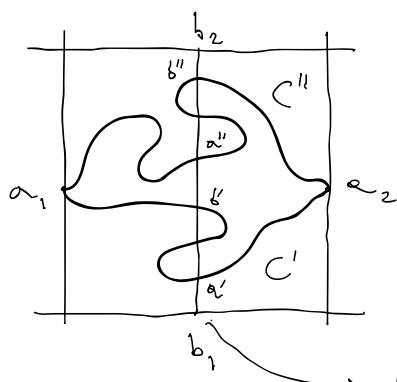
Possiamo anche assumere

$$a_1 = (-1, 0) \text{ e } a_2 = (1, 0).$$

C' e C'' archi di C

determinati da a_1 e a_2

($\text{arco} = \text{spazio omologo a } [0, 1]$)



$L = \text{segmento tra}$

$$b_1 = (0, -1) \text{ e } b_2 = (0, 1) \in B^1 \times B^1$$

In altre parole, senza perdere generalità possiamo.

6.4

restringerci ai casi in cui $C \subset B^1 \times B^1$ con

$$C \cap (\{-1\} \times B^1) = \{a_1\}, \quad C \cap (\{1\} \times B^1) = \{e_2\} \quad e \quad C \cap \text{bd}(B^1 \times B^1) = \{e_1, a_2\}$$

Per il lemma, L interseca C' e C'' .

Sia a' il primo punto d'intersezione di L con C , e b' l'ultimo con C' (L orientata verso l'alto). In altre parole $a' = \min_{L \cap C} (L \cap C)$ e $b' = \max_{L \cap C'} (L \cap C')$, essendo

$L \cap C$ e $L \cap C'$ compatti non vuoti in L (assumiamo $a' \in C'$).

L interseca C'' tra b' e b_2 . Infatti, se così non fosse,

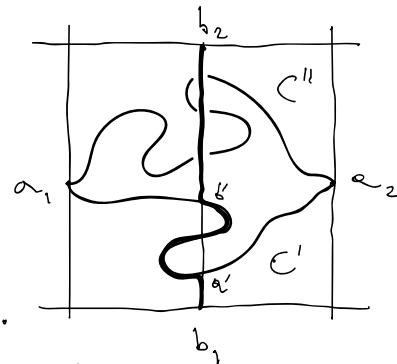
potremmo costruire un cammino tra b_1 e b_2 che evita C' :

Si siga L tra b_1 e

a' , poi C' fino a b' ,

e infine L fino a b_2

(contraddizione al lemma).



Sia a'' il primo punto d'intersezione tra il segmento $b' b_2$ con C'' , e b'' l'ultimo (eventualmente coincidono).

Si ha $b' \neq a''$ e sia c un punto di L intermedio tra

b' e a'' . Per costruzione c non appartiene né a C' né a C'' ,

quindi $c \in \mathbb{R}^2 - C$. Sia U la componente connesse di c in

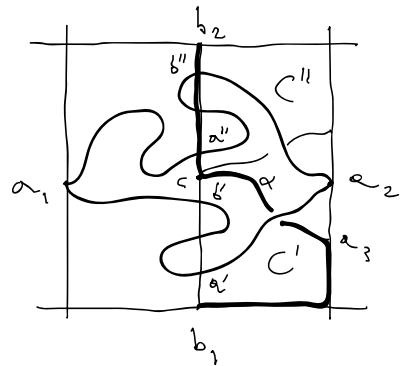
$\mathbb{R}^2 - C$. Mostriamo che U è limitata.

Infatti se per esempio U fosse illimitato,

6.5

essendo U connesso per archi (perché aperto
connesso in \mathbb{R}^2), esisterebbe un cammino

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2 - C$ tra c e un punto
fuori del quadrato.



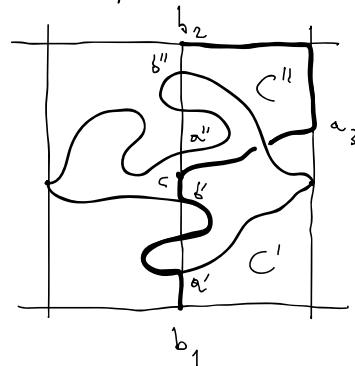
Sia α_3 il primo punto d'intersezione tra α e il bordo del quadrato. Si hanno 2 casi, la seconda che α_3 stia nella metà inferiore o superiore del quadrato.

Supponiamo che stia nella metà inferiore. Possiamo trovare un cammino tra b_1 e b_2 nel quadrato che evita C' (si segue il bordo tra b_1 e α_3 , poi α fino a c e quindi β fino a b_2), in contraddizione col Lemma.

In modo analogo se α_3 sta nella metà superiore:

da b_2 ad α_3 lungo $Bd(\mathcal{B}' \times \mathcal{B}')$, quindi

lungo α fino a c , si segue β fino a b' , poi C' fino ad α' e infine β fino a b_1 .



Le contraddizioni implicano che U è
limitato. D'altra parte $\mathbb{R}^2 - C$ è illimitato, quindi
esiste anche una componente illimitata e dunque
 $\mathbb{R}^2 - C$ non è connesso.

Moltre non ci sono altre componenti illimitate perché
il complementare del quadrato (col suo interno) è connesso.

2) C è la frontiera di ogni componente di $\mathbb{R}^2 - C$. 6.6

Ogni componente di $\mathbb{R}^2 - C$ è aperto in \mathbb{R}^2 . Sia V una di queste componenti. Le altre componenti hanno come unione l'aperto $\mathbb{R}^2 - (V \cup C)$ e quindi $V \cup C$ è chiuso in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ la chiusura $\text{Cl}(V) \subset V \cup C \Rightarrow F_2 V \subset V \cup C \Rightarrow F_2 V \subset C$ (perché V aperto).

Dobbiamo far vedere che $F_2 V = C$. Supponiamo per assurdo che $F_2 V \neq C$ e quindi $C - F_2 V \neq \emptyset$. Dato che $F_2 V$ è chiuso in $C \exists A \subset C$ esco t.c. $F_2 V \subset A$ (eser.)

Distinguiamo 2 casi.

1) V limitata. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un disco chiuso t.c.

$$V \cup C \subset \text{Int } D.$$

Lemme. $A \subset \text{Int } B^2$ esco $\exists r: B^2 \rightarrow A$ retrazione.

Dim. $f: A \xrightarrow{\cong} I$ esco. Teorema di estensione di Tietze $\exists \tilde{f}: B^2 \rightarrow I$ estensione di f .

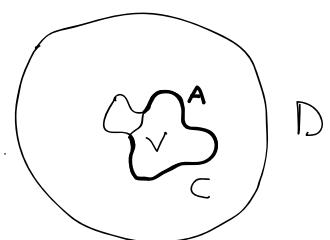
Allora $r = f^{-1} \circ \tilde{f}$ è una retrazione (eserc.)

(Il t.d. Tietze dice che se X spazio normale,
 $A \subset X$ chiuso non vuoto e $f: A \rightarrow I$ continua,
 $\exists \tilde{f}: X \rightarrow I$ estensione continua).

Per il lemma $\exists r: D \rightarrow A$ retrazione. Sia $f: D \rightarrow D$

$$\text{con } f(x) = \begin{cases} r(x) & \text{se } x \in \text{Cl } V \\ x & \text{se } x \in D - V. \end{cases}$$

$\text{Cl } V \subset D \Rightarrow F_2 V = \text{Cl } V \cap (D - V) \subset A \Rightarrow$
 f continua perché $f(x) = x \forall x \in A$.



Sia che $f(x) = x \quad \forall x \in \text{Bd } D \cong S^1 \Rightarrow f$ suriettiva (exer.) 6.7

Ma V non è contenuto nell'immagine di f contraddizione.

2) V illimitato. $D \subset \mathbb{R}^2$ disco t.c. $C \subset \text{Int } D \Rightarrow$

tutte le componenti limitate di $\mathbb{R}^2 - C$ stanno in D (exer.)

Dato che A per il lemma $\exists r: D \rightarrow A$ retrazione.

Sia $g: D \rightarrow D$ $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \text{Cl } V \cap D \\ r(x) & \text{se } x \in D - V. \end{cases}$

Come nel caso di f , anche g è continua e

$g(x) = x \quad \forall x \in \text{Bd } D \Rightarrow g$ suriettiva.

Sia $U \subset \mathbb{R}^2 - C$ componente limitata (che \exists per le prime poste) $\Rightarrow U \subset D$. Come sopra $U \notin g(D)$ perché $g(U) \subset A$ contraddizione.

Quindi $F_2 V = C$.

3) $\mathbb{R}^2 - C$ ha due componenti.

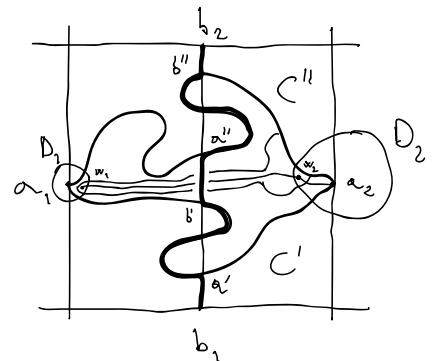
Sappiamo già che c'è solo una componente illimitata e almeno una limitata U . Supponiamo per ora che ce ne sia un'altra limitata $W \Rightarrow W$ è contenuta nel questo considerato sopra.

Il commissario A mentre in figura non incontra W (exer.).

$a_1, a_2 \notin A \Rightarrow$ dischi D_1 e D_2 centreti in

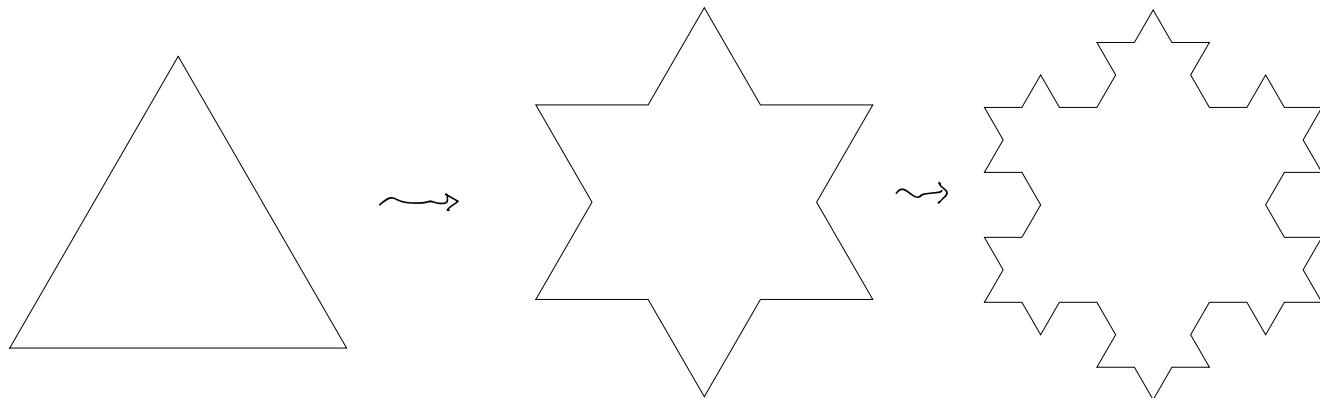
a_1, a_2 n.p. t.c. $D_i \cap A = \emptyset \quad i = 1, 2$.

Porte (2) $\Rightarrow a_i \in F_2 W \Rightarrow \exists w_i \in D_i \cap W$.

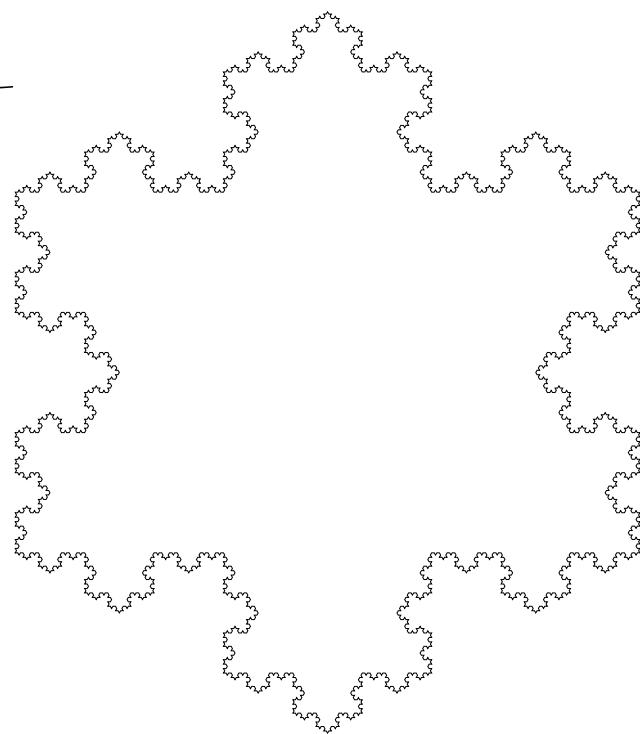


Possiamo costruire comunque A' tra a_1 e a_2 procedendo
prime in D_1 tra a_1 e w_1 , poi in W tra w_1 e w_2
e quindi in D_2 tra w_2 e a_2 . Si ha $A \cap A' = \emptyset$
in contraddizione col lemma.

Esempio (foglio di neve o curva di KOCH)



6^a iterazione



$K_1 = \text{triangolo equilatero}$

K_i ottenuto da K_{i-1} mediante \rightsquigarrow applicato
a ciascun lato verso l'esterno $\Rightarrow K = \lim_{i \rightarrow \infty} K_i$

Si dimostri che il limite esiste e $K \cong S^1$ (eserc.)

K si chiama foglio di neve o curva di Koch.

C di un'idea di quanto possa essere complessa una curva di Jordan. Per questo il teorema di Jordan non rivela uno strumento potente. Ancora di più lo è il

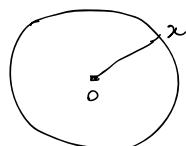
Teorema di Schoenflies. $C \subset \mathbb{R}^2$ curva di Jordan. Esiste

$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ omes. t.c. $h(C) = S^1$. Possiamo assumere h e rapporto compatto ($h = id$ fuori da un compatto di \mathbb{R}^2).

Teorema. $f: S^n \rightarrow S^n$ omes. Esiste

$\tilde{f}: B^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$ omes che estende f .

Dimo



$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ \|x\| \cdot f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Vediamo che \tilde{f} soddisfa le ten.

Segue che se $A, B \subset S^1$ ordi $\exists f: B^2 \rightarrow B^2$ omes t.c. $f(A) = B$

Dimo. del teorema di Schoenflies.

Possiamo $\bar{I}(C) = C \cup I(C) \subset \mathbb{R}^2$ compatto.

Sia $T \subset \mathbb{R}^2$ un triangolo egilatero. Si noti che il teorema è vero se $C = T$ (ex.). Quindi possiamo ragionare su T anziché su S^1 .

Faremo vedere intanto che $\exists h: \bar{I}(C) \xrightarrow{\cong} \bar{I}(T)$ omes.

1° caso) C curve di Jordan poligonale, cioè C è unione finita di segmenti l_1, \dots, l_n con vertici v_1, \dots, v_n .

Assumiamo che i vertici non siano mai ellimasti e poniamo $n(C) = n = \#\{\text{vertici di } C\}$.

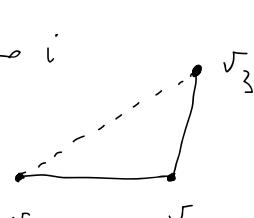
Si procede per induzione su $n(C)$. Se $n(C) = 3$ ovvio. Supponiamo $n(C) = n > 3$ e che l'enunciato sia

Vero per per tutte le curve di Jordan poligonali con meno di n vertici.

Sarà ovvio che $\exists v, w$ vertici distinti di C t.c. $\overline{vw} \cap C = \{v, w\}$, dove \overline{vw} è il segmento di estremi v, w .

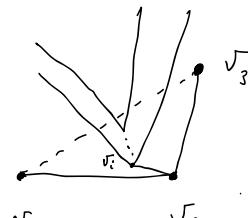
Infatti si ha:

tre casi:



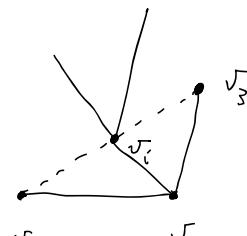
(1)

$$v = v_1, w = v_3$$



(2)

$$v = v_2, w = v_1$$



(3)

$$v = v_2, w = v_3$$

I punti v e w determinano due archi A_1, A_2 di $C \cong S^1$.

Poniamo $C_i = A_i \cup \overline{vw}$ curve di Jordan poligonale con $n(C_1) < n(C)$, $n(C_2) < n(C)$.

Per l'ipotesi induttiva $\exists h_i : \bar{I}(C_i) \longrightarrow \bar{I}(T)$ come.

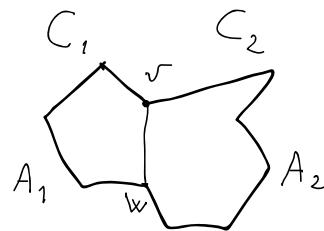
Possiamo esprimere che h_i manda \overline{vw} linearmente in un lato di T e che $h_{1|\overline{vw}} = h_{2|\overline{vw}}$.

Distinguiamo due casi.

$$1) \quad \sqrt{w} \subset \bar{I}(C)$$

Componiamo h_2 con w flessione

$$\text{su } \mathbb{R}^2 \rightarrow h'_2 = p \circ h_2$$



$$p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ flessione}$$

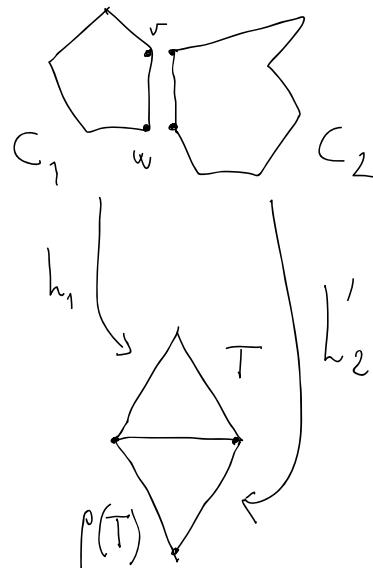
rispetto al lato inferiore di T .

Ora h_1 e h'_2 s'incollano
bene e definiscono

$$h: \bar{I}(C) \rightarrow T \cup p(T)$$

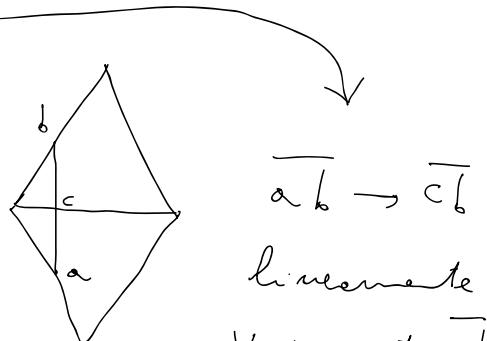
maesso (w diminuisce che

$$\bar{I}(C) = \bar{I}(C_1) \cup \bar{I}(C_2) \text{ e} \\ \bar{I}(C_1) \cap \bar{I}(C_2) = \sqrt{w}).$$



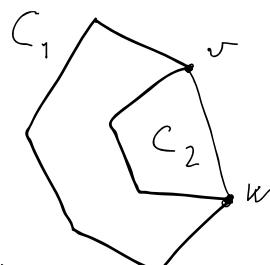
$$\text{Ora } \bar{I}(T) \cup \bar{I}(p(T)) \cong \bar{I}(T)$$

e questo conclude il caso (1).



$\overline{ab} \rightarrow \overline{cd}$
lineamente
A segmento \overline{cd}
verticale.

$$2) \quad \sqrt{w} \subset \bar{E}(C) \stackrel{\text{def}}{=} C \cup E(C).$$

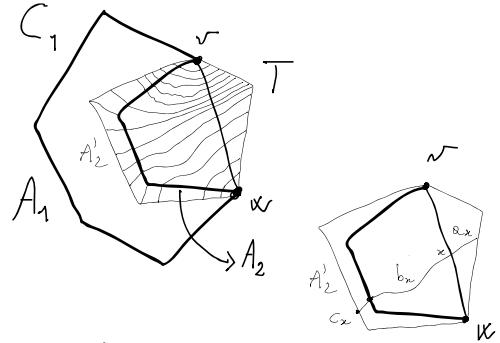


A'_2 sono poligoni in $\bar{I}(C_1)$

tra v e w abbastanza vicini ad

A_2 da non incontrare C
in altri punti (oltre v, w).

Come nel caso precedente,
 τ appoggia su triangolo T
lungo \sqrt{w} oltre una curva di



Jordan poligoni $C_3 = C_1 \cup T - \text{Int}(\sqrt{w})$ con
 $\bar{I}(C_3) \cong \bar{I}(T)$.

Scegliamo $h_2 : \bar{I}(C_2) \rightarrow \bar{I}(T)$ come
 $h_2(r) = r, \quad h_2(w) = w, \quad h_2(A_2) = \sqrt{w}$.

Per $x \in \sqrt{w}$ we $a_x \subset \bar{I}(T)$ il segmento $\perp \sqrt{w}$ tra
 x e un punto b_x un altro lato di T .

Poniamo $b_x = h_2^{-1}(a_x)$.

Scegliamo in modo continuo dei segmenti che descrivono
l'area tra A_2 e A'_2 e diammo c_x quello che corrisponde
a b_x lungo A_2 . Gli a_x li parametrizziamo rispetto
all'ordinata (e non do rotare T per avere $\sqrt{w} \parallel$
esse x e il 3° vertice in alto).

I b_x rimangono parametrizzati di conseguenza mediante
 h_2 . I c_x li parametrizziamo con le lunghezze
d'arco da A'_2 verso A_2 .

Sia $C'_2 = A'_2 \cup \sqrt{w}$.

Definiamo $k : \bar{I}(C_1) \rightarrow \bar{I}(C_3)$ mediante

l'identità fuori de $\bar{I}(C_2')$; in $\bar{I}(C_2') - I(C_2)$ 7.6

K manda C_n in $C_2 \cup b_n$ oneo a parte e l'invia a
rispetto alle permutazioni mantenendo fisso il
1° estremo; in $\bar{I}(C_2)$ K coincide con h_2 .

Si vede facilmente che K è onto e
 $K(\bar{I}(C)) = \bar{I}(C_1) \cong \bar{I}(T)$ e questo basta per concludere.

Lemme 1. C curve di Jordan poligonale e

$f: C \rightarrow T$ onto. Allora $\exists \tilde{f}: \bar{I}(C) \rightarrow \bar{I}(T)$
onto che estende f .

Dim Seppiamo che $\exists h: \bar{I}(C) \rightarrow \bar{I}(T)$ onto.

e che $\bar{I}(T) \cong \beta^2$. Invarianza del bordo $\Rightarrow h(C) = T$.

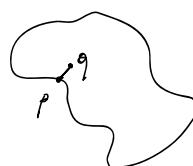
Sia $g: \bar{I}(T) \rightarrow \bar{I}(T)$ onto che estende

$f \circ h^{-1}: T \rightarrow T$ (col lemma). Allora

$\tilde{f} = g \circ h$ soddisfa le tesi.

Def. C curva di Jordan e $p \in C$. Diciamo che p
è accessibile da $I(C)$ se \exists un segmento \overline{pq} con
 $q \in I(C)$ e $\overline{pq} \cap C = \{p\}$.

E.s. Curve di Koch \rightarrow non è chiaro se
ogni punto è accessibile.



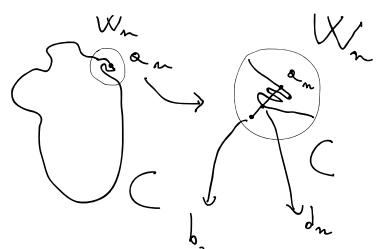
Lemme 2. $\forall C$ curva di Jordan $\exists D \subset C$

denso numerabile in C fatto di punti accessibili dall'interno.

Dim. Sia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base numerabile per C e

$V_n \subset \mathbb{R}^2$ aperto t.c. $U_n = V_n \cap C$.

Scelgo $a_n \in U_n$ e $W_n \subset V_n$ un disco aperto in \mathbb{R}^2 di centro a_n .



T. di Jordan $\Rightarrow \exists b_n \in I(C) \cap W_n$

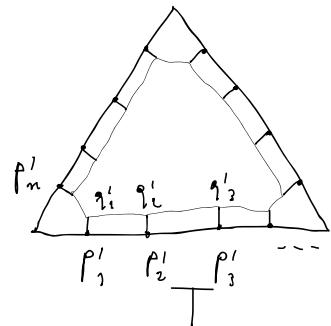
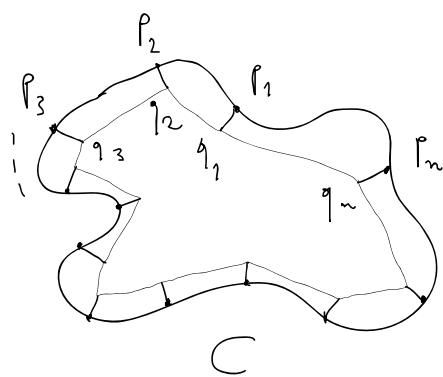
$\rightsquigarrow d_n$ prima intersezione del segmento

$\overline{b_n a_n}$ con $C \Rightarrow d_n$ accessibile.

Segno che

$D = \{d_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset C$ denso.

Caso generale. C curva di Jordan.



$f: C \rightarrow T$ oneo. Mostriamo che $\exists h: \bar{I}(C) \rightarrow \bar{I}(T)$ oneo che estende f .

Sceglieremo $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di numeri positivi convergenti a 0 (p.e. $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$).

Il lemma 2 ci permette di scegliere punti accessibili p_1, \dots, p_n ordinati in modo ciclico su C t.c. gli archi di C $\widehat{p_i p_{i+1}}$ e le loro immagini $\widehat{p'_i p'_{i+1}} \subset T$ tranne f ($p'_i = f(p_i)$, $p_{n+1} = p_1$) sono abbastanza piccoli (di diametro $< \frac{\varepsilon_1}{3}$). Si noti che p'_i è accessibile da $I(T)$, dato che ogni punto di T lo è.

Possiamo scegliere $q_i \in I(C)$ t.c. i segmenti $\overline{p_i q_i}$ sono anche a due disjunti, hanno lunghezza $< \frac{\varepsilon_1}{3}$ e $\overline{p_i q_i} \cap C = \{p_i\}$. In modo analogo scegliamo $q'_i \in I(T)$.

Possiamo costruire una curva di Jordan poligonale

$Q = q_1 \dots q_m \subset I(C)$ con eventualmente anche altri vertici. Questo perché gli spigoli comuni di R^n sono comuni per entrambi i poligoni (eser.). Analogamente costruiamo $Q' \subset I(T)$ curva di Jordan poligonale, $Q' = q'_1 \dots q'_m$.

Possiamo osservare che $\overline{p_i q_i} \cup \overline{q_i q_{i+1}} \cup \overline{q_{i+1} p_{i+1}}$ è contenuto in un intorno di $\widehat{p_i p_{i+1}}$ di diametro $\frac{\varepsilon_1}{3}$.

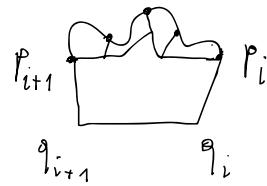
Possiamo estendere f a $\bigcup_i \overline{p_i q_i}$ rendendo $\overline{p_i q_i}$ lineare su $\overline{p'_i q'_i}$, quindi estendiamo f anche a Q rendendo Q in Q' omomorficamente. Lemma 1 → estensione a $\overline{I}(Q) \rightarrow \overline{I}(Q')$.

Quindi abbiamo esteso f a quasi tutto $\overline{I}(C)$, escludendo gli interni delle curve di Jordan $p_i p_{i+1} q_{i+1} q_i$ tutte di diametro $< \varepsilon_1$. Anche le loro immagini hanno diametro $< \varepsilon_1$.

Dentro una di queste regioni:

7.9

come sopra scegiamo punti
accessibili di C da domo arch.



diametro $\leq \frac{\varepsilon_2}{3}$. Analogamente

i segmenti e le poligonal \rightarrow estensione di f \rightarrow
altri punti accessibili controllati da $\frac{\varepsilon_3}{3} \rightarrow$ successione
di estensioni che converge $h: \bar{I}(C) \rightarrow \bar{I}(T)$.

h continua e biettiva, $\bar{I}(C)$ compatto e $\bar{I}(T)$ $T_2 \Rightarrow$
 h omot.

Passando a S^2 mediante proiezione stereografica da $p \in I(C)$
l'esterno diventa l'interno \rightarrow posso estendere anche a
 $E(C) \rightarrow$

Teorema. C_1, C_2 curve di Jordan, $f: C_1 \rightarrow C_2$ omot.

Esiste $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ omot che estende f .

Dato che $S^2 \cong \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ si ha subito (eser.) :

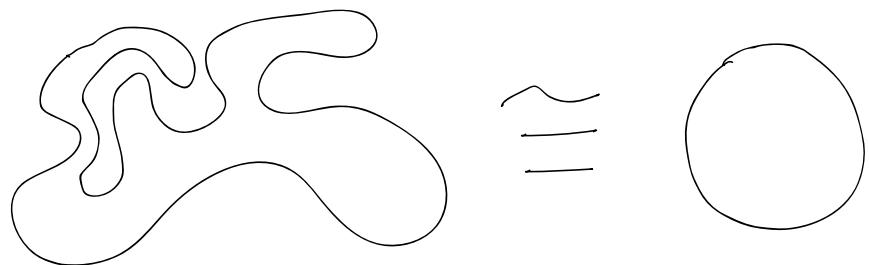
Teorema. $C \subset S^2$ curva di Jordan $\Rightarrow \exists h: S^2 \cong S^2$
omot t.c. $h(C) = S^1 \subset S^2$. Possono scegliere h che
estende un dato omot $f: C \rightarrow S^1$.

Cenni sul caso C^∞ .

7.10

Si provi dimostrare il

Teorema. $C \subset \mathbb{R}^2$ curva di Jordan differentiabile,
 $f: C \rightarrow S^1$ diffeo. Allora $\exists \tilde{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diffeo
che estende f . In particolare $\tilde{f}(C) = S^1$.



Analogo risultato vale in S^2 .

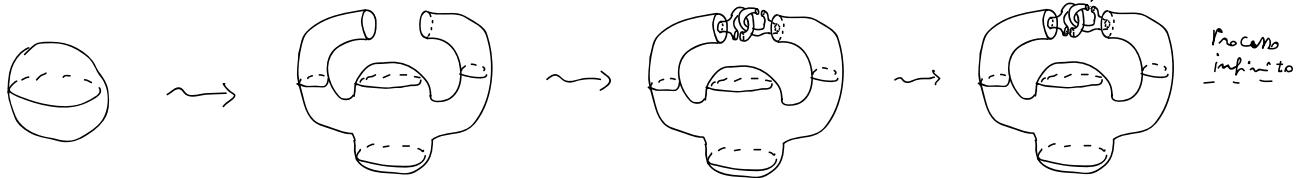
Il teorema di Jordan vale anche in dimensione
maggiore:

Teorema di Jordan-Brouwer. $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sottospazio
omeomorfo a $S^n \Rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \Sigma^n$ ha esattamente due
componenti connesse (p.a.) di cui una è limitata e
l'altra illimitata. Inoltre Σ^n è la frontiera
di ciascuna componente di $\mathbb{R}^{n+1} - \Sigma^n$.

Il teorema di Schönflies però non vale in dim
più alta, almeno nella versione più generale.

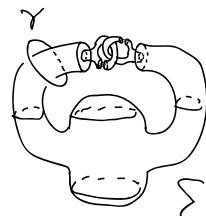
Controesempio (sfere connote di Alexander):

$$S^2 \subset R^3$$



Il limite Σ esiste ed è $\cong S^2$

Si può dimostrare che



γ non è omotope a cost. in $R^3 - \Sigma$

\Rightarrow una componente di $R^3 - \Sigma$ non è

Semplicemente connessa. Ma le componenti di

$R^3 - S^2$ sono entrambe semplicemente connesse (eser.)

$\Rightarrow \nexists h: R^3 \rightarrow R^3$ onto t. c. $h(\Sigma) = S^2$.

Teorema. Sia $U \subset \mathbb{R}^m$ un aperto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua e iniettiva. Allora f è aperto.

Dim (per $m \leq 2$). Se $m \leq 1$ eser. Supponiamo $m = 2$.

Dobbiamo far vedere che per ogni sotto aperto $D \subset U$ $f(D) \subset \mathbb{R}^2$ è aperto. Possiamo assumere $\bar{D} = \text{Cl } D \subset U$.

Dato che \bar{D} è compatto e \mathbb{R}^2 di Hausdorff, $f|: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un embedding $\Rightarrow f(\bar{D}) \cong \bar{D}$.

Dato che $\text{Bd } \bar{D} \cong S^1$, $C = f(\text{Bd } \bar{D}) \subset \mathbb{R}^2$ è una curva di Jordan.

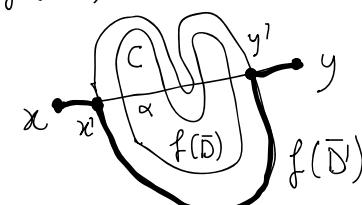
Dato che D è connesso anche $f(D)$ lo è.

Ovviamente $\mathbb{R}^2 - C = f(D) \cup (\mathbb{R}^2 - f(\bar{D}))$.

Notiamo che $\mathbb{R}^2 - f(\bar{D})$ è connesso per archi.

Siamo $x, y \in \mathbb{R}^2 - f(\bar{D})$ e $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ il segmento che li unisce parametrizzato in modo lineare. Per le compattezze di $f(\bar{D})$ posso trovare un altro aperto un po' più grande D' t.c. $\bar{D} \subset D' \subset \bar{D}' \subset U$ e $x, y \in \mathbb{R}^2 - f(\bar{D}')$.

Siano x' e y' rispettivamente il punto



e l'ultimo punto d'intersezione tra

$\alpha(I)$ e $\text{Bd } \bar{D}' \cong S^1$. Posso trovare un arco

in $\text{Bd } \bar{D}'$ tra x' e y' . Unendo quest'arco ai segmenti $\overline{x'x}$ e $\overline{y'y}$ otengo un cammino tra x e y in $\mathbb{R}^2 - f(\bar{D}')$.

Per il teorema di Jordan $f(D)$ è $\mathbb{R}^2 - f(\bar{D})$ sono le componenti connesse di $\mathbb{R}^2 - C$. Quando $f(D)$ è aperto in \mathbb{R}^2 è questo basta per concludere.

Coll. (inverso del domino). Siano $U, V \subset \mathbb{R}^m$

8.2

e $f: U \rightarrow V$ omes. Se U è aperto in \mathbb{R}^m anche V lo è.

Dim ($m=2$) f come applicazione in \mathbb{R}^m è aperta per il teorema precedente. Quando $V = f(U)$ è aperto.

Mettendo un ricoprimento aperto fatto di carte loc. si ottiene subito il

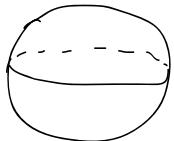
Coll. M, N varietà top. senza bordo con $\dim M = \dim N$.

Se $f: M \rightarrow N$ è continua e iniettiva allora f è aperta. In particolare se f è continua e biettiva allora f è omes.

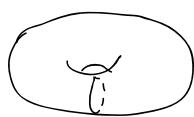
OSS. È importante sapere che $\dim M = \dim N$, almeno nella parte in cui f è iniettiva. Si può dimostrare che se $f: M \rightarrow N$ è continua e biettiva allora $\dim M = \dim N$ (e quindi f è omes).

Nel caso con bordo il coll. continua e biettivo si avrà ancora anche che f è propria.

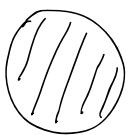
Def. Superficie topologica = 2-varietà topologica con bordo.



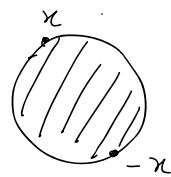
$$S^2$$



$$T^2 = S^1 \times S^1$$



$$B^2$$



$$P^2 \cong B^2 / (x \sim -x \quad \forall x \in S^1)$$

Termino. M varietà topologica connesse, $p, q \in \text{Int } M$ (oppure $p, q \in \text{bd } M$). Allora $\exists h: M \rightarrow M$ omotetico t.c. $h(p) = q$.

Dim (nel caso $p, q \in \text{Int } M$). Sia

$$X = \{x \in M \mid \exists h: M \rightarrow M \text{ omotetico con } h(p) = x\} \subset \text{Int } M.$$

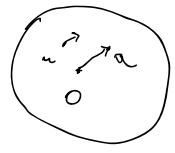
Chiaramente $X \neq \emptyset$ poiché $p \in X$ con $h = \text{id}$.

Fecciamo vedere che X è aperto in $\text{Int } M$. Se $x \in X$ avremo $h(p) = x$ per un certo $h: M \rightarrow M$ omotetico.

Sia (U, φ) certa loc. intorno a x , con $\varphi(U) = \mathbb{R}^m$, $m = \dim M$, e $\varphi(x) = 0$. Sia $a \in \mathbb{R}^m$, $\|a\| < 1$.

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, f(u) = \begin{cases} u & \text{se } \|u\| \geq 1 \\ u + (1-\|u\|)a & \text{se } \|u\| \leq 1 \end{cases}$$

f omotetico (eser.) e $f(0) = a$.



$$\text{Allora } j: M \rightarrow N, j(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \in M - U \\ (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(y) & \text{se } y \in U \end{cases}$$

è un mero di mappa x in $\varphi^{-1}(x)$. Data l'architettura di α , segue che $\exists V \subset M$ intorno di x t.c. $V \subset X \Rightarrow X$ aperto in N .

In modo analogo si fa vedere che $\text{Int } M - X$ è aperto.

$$N \text{ connesse} \Rightarrow \text{Int } M \text{ connesso} \Rightarrow X = \text{Int } M \Rightarrow g \in X.$$

(ver.)

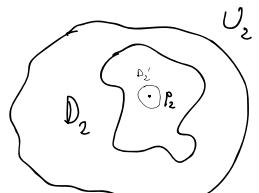
Se $p, q \in \text{Bd } M$ si procede in modo simile usando operazioni costanti omotopiche in R^m (ver.).

OSS. Dato che gli smotermismi utilizzati per dimostrare che X è aperto sono a supporto compatto, nell'enunciato possono assumere h a supporto compatto.

Teorema. S superficie topologica connessa, $D_1, D_2 \subset \text{Int } S$ dischi. Assumiamo che \exists carte loc. (U_i, φ_i) per S t.c. $D_i \subset U_i \quad \forall i=1,2$. Allora $\exists f: S \rightarrow S$ mero t.c. $f(D_1) = D_2$.

Dim. Sia $p_i \in \text{Int } D_i$. Sappiamo che $\exists j: S \rightarrow S$ mero t.c. $j(p_1) = p_2$.

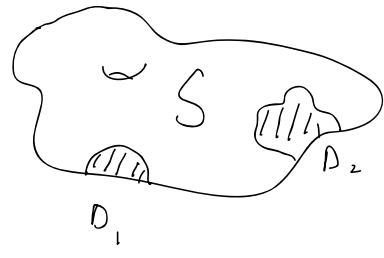
$\exists p'_1 \in D'_1 \subset D_1, D'_1$ disco, t.c.



$j(D'_1) = D'_2 \subset D_2$. T.d. Schoenflies \Rightarrow

$\exists h_i: S \rightarrow S$ mero t.c. $h_i(D'_i) = D'_i$. Allora basta porre $f = h_2^{-1} \circ j \circ h_1$.

OSS. Vede risultato analogo escludendo $D_i \cap BdS$ ^{9.3}
per $i = 1, 2$ (exer.).



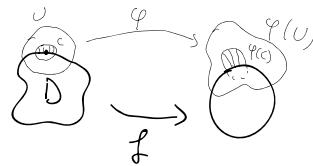
In effetti si può dimostrare che
qualsiasi disco in S è contenuto in una certa

loc., quindi l'ipotesi $D_i \subset (U_i, \varphi_i)$ è superflua.

Questo fatto è un po' tecnico e richiede il teorema di
Schoenflies. Lo studente può provare e dimostrarlo per esercizio.

Idee: $D \subset Int S$ dico

$f: D \rightarrow B^2$ ovvero.



$p \in Bd D \rightarrow (U, \varphi)$ certe loc.

intorno a p t.c. $U \cap Bd D$ orco \rightsquigarrow estensione di f ad un
intorno più piccolo.

S_1, S_2 superfici topologiche connesse

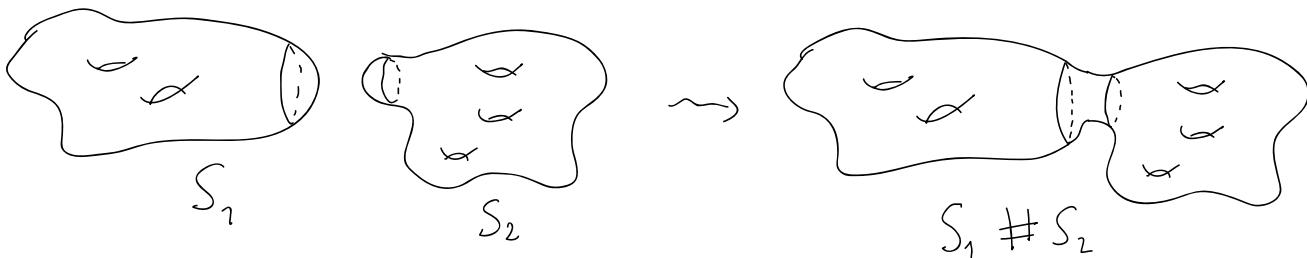
$D_i \subset Int S_i$ disco ($D_i \cong B^2$) $\rightsquigarrow S'_i = S_i - Int D_i$

$\varphi: Bd D_1 \xrightarrow{\cong} Bd D_2$ ovvero \rightsquigarrow

$$S_1 \# S_2 = S'_1 \cup_{\varphi} S'_2 = \frac{S'_1 \sqcup S'_2}{x \sim \varphi(x) \quad \forall x \in Bd D_1}$$

con $Bd D_i \subset S'_i$.

Def. $S_1 \# S_2$ si dice sommazione di
 S_1 e S_2 .



Si vede facilmente che $S_1 \# S_2$ è una superficie connessa. Inoltre $S_1 \# S_2$ non dipende da D_1, D_2 e φ a meno d'omotopie. Si vede facilmente che $\#$ è commutativa e associativa a meno d'omotopie. Inoltre S^2 è l'elemento neutro ($S \# S^2 \cong S + S$ superiore). Sottrarre un disco per poi incollarne un altro lungo le stesse curve di bordo.

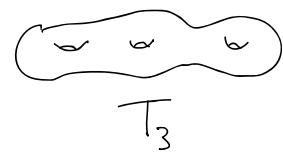
Le classi delle superficie non è un insieme, ma ogni insieme di superficie che contiene S^2 ed è chiuso rispetto a $\#$ è un monoido commutativo. Non è però un gruppo. Infatti se $S_1 \# S_2 \cong S^2$ allora

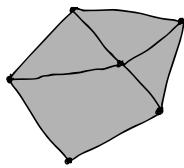
$S^2 \cong S_1' \cup_{\varphi} S_2'$ e per il teorema di Schoenflies le curve d'incollamento di S_1' e S_2' in S^2 bordano due dischi. Quindi S_i' è uno di questi dischi $\Rightarrow S_i \cong B^2 \cup_{\varphi_i} B^2 \cong S^2$. Pertanto S^2 è l'unica superficie che permette inverso rispetto a $\#$ (e l'inverso è S^2 stessa).

Per le proprietà associative in una somma connesse iterata $S_1 \# \dots \# S_k$ potremo omettere le parentesi.

Poniamo $T_g \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_g$ volte e $P_g \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{P^2 \# \dots \# P^2}_g$ volte per $g \geq 1$.

Poniamo anche $T_0 \stackrel{\text{def}}{=} S^2$.





S superficie topologica, $S = \bigcup_{n=1}^N p_n$, $1 \leq N < \infty$,
dove p_n è (omeomorfo ad) un poligono regolare con k_n lati.
Assumiamo:

$$1) \quad p_n \cap p_m = \begin{cases} \emptyset & \forall n \neq m; \\ \text{vertice} & \text{lati} \end{cases}$$

$$2) \quad \text{Le famiglie } \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ è loc. finita} (\Leftrightarrow \forall x \in S$$

$\exists U$ intorno di x che interseca al più un numero finito
di p_n);

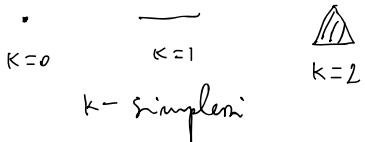
Def. Una decomposizione di questo tipo si chiama
poligonezazione di S . Se tutti i poligoni sono triangoli
($k_n = 3 \forall n$) si parla di triangolazione.

In una poligonezazione i vertici sono dette anche 0-celle,
i lati 1-celle e i poligoni 2-celle o facce.

Le k -celle sono anche dette celle di dimensione k .

Più in generale si chiama k -celle uno spazio $\cong \mathbb{B}^k$.

In una triangolazione le k -celle si chiamano anche
 k -simplessi (\circ nuplopi di dimensione k). In generale
un k -simplesso è l'inviluppo convesso di $k+1$ punti
in \mathbb{R}^k in posizione generale (= non contenuti in nessun
iperspazio affine).



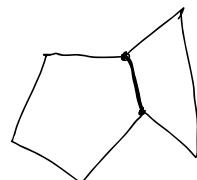
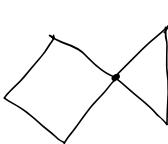
OSS. $\text{Int } p_m \subset \text{Int } S$ è un aperto per il teorema di 10.2
invarianza del dominio. $p_m \cap \text{Bd } S = \emptyset \Rightarrow \text{Int } p_m = \text{Int}_S p_m$.
 $\text{Bd } S$ è unione di lati.

S compatta $\Leftrightarrow N$ punti (exr.).

Applicazione d'incollamento

La condizione (1) dice che due poligoni di una poligonazione possono avere in comune solo un vertice oppure un lato.

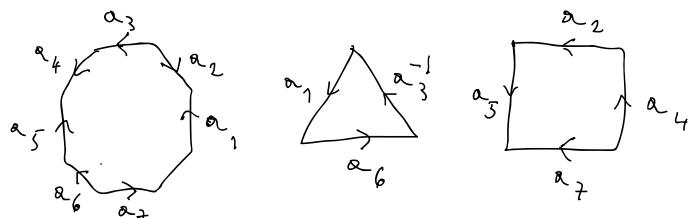
Possiamo ricostruire S



partendo da N poligoni regolari

stando a $p_m \subset \mathbb{R}^2$ con k_m lati orientati

e incollando i lati di poligoni distinti e due a due
mediante omomorfismi, che possiamo immaginare lineari.



In genere ammettiamo anche incollamenti di coppie di lati
dello stesso poligono, o anche che poligoni distinti si incollino
in più coppe di lati. In questa situazione più generale
possiamo di decomposizione poligonale.

I lati da incollare si individuano con lo stesso
simbolo se l'incollamento rispetta il verso (p.e. a_1 in figure)
o con simbolo inverso se lo inverte (p.e. a_3, a_3^{-1}).

I lati che non si incollano vanno a formare bordi.

Vede il seguente teorema fondamentale (che non dimostriamo).

Teorema di Radó. Ogni superficie topologica ammette triangolazioni.

La dimostrazione è un p' tante e si basa sul teorema di Schauder.

Useremo il teorema di Radó per classificare le superfici.

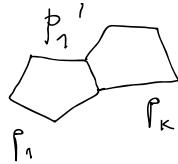
Adeos consideriamo S compatte e connesse.

Teorema. S ammette una decomposizione poligonale con un solo poligono. In altre parole S si ottiene da un poligono regolare identificando a due a due alcuni lati.

Dim. Partiamo da una decomposizione poligonale con N poligoni (p.e. una triangolazione, che esiste per il teorema di Radó). S compatte $\Rightarrow N$ finito.

Basta far vedere che se $N > 1$ possiamo trovare una decomposizione poligonale con $N - 1$ poligoni.

Dato che S è connesso il poligono p_1 deve essere incollato ad almeno un altro poligono p_k lungo uno o più lati. Esquiamo per ora solo l'incollamento lungo un lato l . Allora $p_1^l = p_1 \cup_l p_k \cong B^2$ è un poligono. Nella decomposizione poligonale di partenza possiamo rimpiazzare p_1 e p_k con p_1'



Sente modifcare tutte le altre identificazioni. Si ottiene una nuova decomposizione poligonale di S con $N-1$ poligoni, il che basta per concludere.

Si noti che se S è chiuso, il poligono di cui S è quoziente ha un numero pari di lati.

Sia $S = \bigcup_{n=1}^N P_n$ una decomposizione poligonale con

n_k k -elle (n_0 vertici, n_1 lati e $n_2=N$ facce), contate dopo gli incollamenti. Si noti che nelle dimostrazione precedente si modifica una decap. poligonale unendo due facce lungo un lato, quindi la decap. polg. che si ottiene ha n_0 vertici, n_1-1 lati e n_2-1 facce. Pertanto il numero

$$\chi(S) \stackrel{\text{def}}{=} n_0 - n_1 + n_2 \in \mathbb{Z}$$

non cambia. Faremo vedere più avanti che in effetti $\chi(S)$ è un invariante topologico di S e quindi non dipende dalla decomposizione poligonale usata per calcolarlo.

Def. $\chi(S)$ si chiama caratteristica di Euler di S .

G gruppo, $[G, G]$ sottogruppo commutatore di G
 ($[G, G]$ è generato da tutti i commutatori $[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$
 $\forall g_1, g_2 \in G$).

$[G, G]$ è un sottogruppo normale $\Rightarrow \text{Ab}(G) \stackrel{\text{df}}{=} G/[G, G]$
 è un gruppo abeliano chiamato abelianizzazione di G .

$\text{Ab}(G)$ ha le proprietà universali seguenti:
 se H è un qualunque gruppo abeliano e
 $\varphi: G \rightarrow H$ un omomorfismo, $\exists! \lambda: \text{Ab}(G) \rightarrow H$
 omomorfismo che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & \text{Ab}(G) \\ \varphi \downarrow & \swarrow \lambda & \\ H & & \end{array}$$

dove $\pi: G \rightarrow \text{Ab}(G)$ è la proiezione sul quoziente.
 Quindi $\text{Ab}(G)$ è il più "grande" quoziente abeliano
 di G e $G \cong \text{Ab}(G) \Leftrightarrow G$ è abeliano.

Ese. 1) G gruppo libero con n generatori \Rightarrow
 $\text{Ab}(G)$ libero abeliano con n generatori \Rightarrow
 $\text{Ab}(G) \cong \mathbb{Z}^n$.

$$2) \quad G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_s \rangle \implies \text{10.6}$$

$$\text{Ab}(G) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_s, [x_i, x_j] \forall i < j \rangle$$

$\Rightarrow \text{Ab}(G)$ è il gruppo abeliano con generatori

x_1, \dots, x_n e relazioni r_1, \dots, r_s .

In genere useremo le relazioni moltiplicative per i gruppi arbitrari e quelle additiva per i gruppi abeliani.

Teorema di classificazione dei gruppi abeliani finitamente generati.

Se G è un gruppo abeliano finitamente generato

$$\text{allora } G \cong \mathbb{Z}^m \oplus (\mathbb{Z}_{p_1^{s_1}})^{n_1} \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}_{p_k^{s_k}})^{n_k}$$

dove $n \geq 0$, $k \geq 0$, p_1, \dots, p_k primi a due a due distinti,

$s_i \geq 1$, $n_i \geq 1 \ \forall i$. Inoltre tale decomposizione è unica

a meno di riordinare i fattori.

Ricordiamo che se $r, s > 1$ sono interi coprimi allora

$$\mathbb{Z}_{rs} \cong \mathbb{Z}_r \oplus \mathbb{Z}_s.$$

In particolare se $m = p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k}$ è la fattorizzazione in primi distinti allora

$$\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}}.$$

Poniamo $\text{rk}(G) = \max \{ m \in \mathbb{N} \mid \mathbb{Z}^m \hookrightarrow G \}$ range di G .
 \hookrightarrow monomorfismi

G finit. generato $\Rightarrow 0 \leq \text{rk}(G) < \infty$ e $\text{rk}(G) = 0 \Leftrightarrow G$ finito.

$\text{rk}(\mathbb{Z}^n) = n$. Nella decomposizione del teorema di classificazione

$\text{rk}(G) = n$. $G < H \Rightarrow \text{rk}(G) \leq \text{rk}(H)$. $G \cong H \Rightarrow \text{rk}(G) = \text{rk}(H)$.

X Specie comune per archi $\rightarrow H_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} Ab(\pi_1(X))$

non dipende dal punto base e meno di isomorfismi canonici

($\pi_1(X)$ è indipendente dal punto base ma solo e meno
di isomorfismi non canonico α_* indotto da un cammino α
tra due punti base).

Def. $H_1(X)$ si dice primo gruppo d'omologie di X .

Se $H_1(X)$ è finitamente generato poniamo

$$b_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} rk(H_1(X)).$$

Def. $b_1(X)$ si dice primo numero di Betti di X .

$X \simeq Y \xrightarrow{\text{exer.}} H_1(X) \cong H_1(Y)$ (indipendente dal punto base)

$$\Rightarrow b_1(X) = b_1(Y).$$

Classificazione delle superfici chiuse.

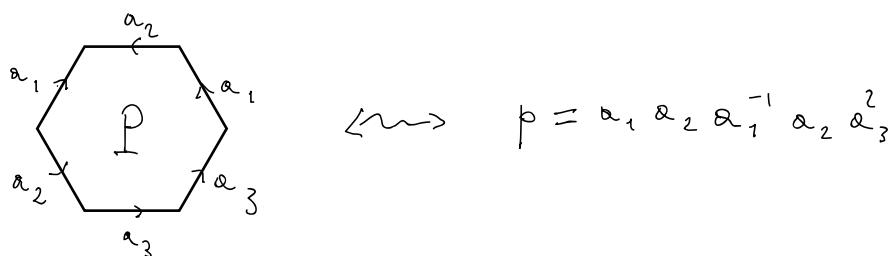
11.2

S superficie topologica chiusa connessa \rightarrow

$P \subset \mathbb{R}^2$ poligono regolare con $2n$ lati t.c. $S = P/\sim$

dove \sim identifica i lati a due a due. A meno di ormai potremo ammettere che le applicazioni d'incollamento dei lati siano tutte diverse. Orientiamo i lati

di P in senso antiorario, e abbiamo la convenzione che due lati sono etichettati con lo stesso simbolo (risp. simboli inversi) se si identificano rispettando (risp. invertendo) il verso. In questo modo possiamo rappresentare S con una parola p (non necessariamente molotta) di lunghezza $2n$ nel gruppo libero $F_n = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Comunque nei disegni orienteremo i lati in modo coerente con gli incollamenti, perché l'approccio visuale è più diretto.



Questa parola è ben definita o meno da permutazione cicliche e rotazioni di P leggendo le etichette dei lati in ordine antiorario.

Useremo spesso queste rappresentazioni, e scriveremo $S = S(p)$.

Possiamo sempre sommare le parole per ridurla.

11.3

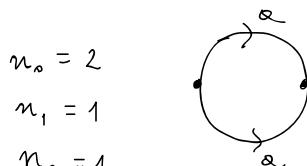


$$P = p_1 a \alpha^{-1} p_2 \rightsquigarrow P' = p_1 p_2 \text{ con } S(\phi) \cong S(P')$$

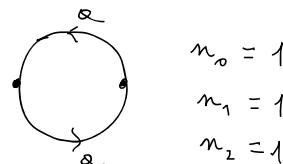
Dato che non identificare i lati o copie le potenze ammissibili sono solo i quadrati.

Si noti che la riduzione non modifica $\chi(S) = n_0 - n_1 + n_2$, dato che si elimina un lato a e il vertice tra le due copie di a (che non si identificano con altri vertici).

Tuttavia dobbiamo considerare anche poligoni con due lati, che come sapremo danno logo a $S^2 \circ P^2$. Questi possono risultare da una riduzione. S^2 si ottiene anche dalla parola vuota.

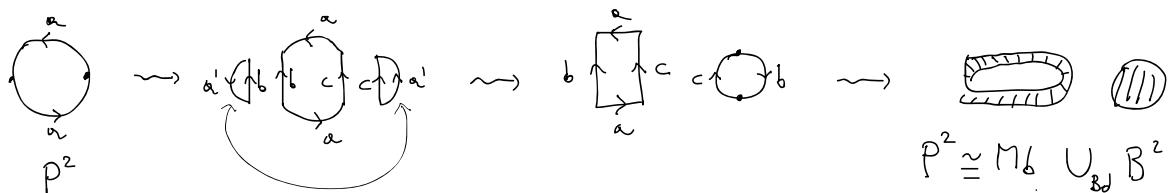


$$S^2 = S(a a^{-1}) = S(\emptyset)$$



$$P^2 = S(a^2)$$

Segue $\chi(S^2) = 2$ e $\chi(P^2) = 1$.



$$P^2 \cong M_b \cup_{\partial b} B^2$$

$$\text{BD } M_b \cong \text{BD } B^2$$

Prima di procedere esaminiamo altri esempi.

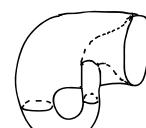
$n_0 = 1$
 $n_1 = 2$
 $n_2 = 1$

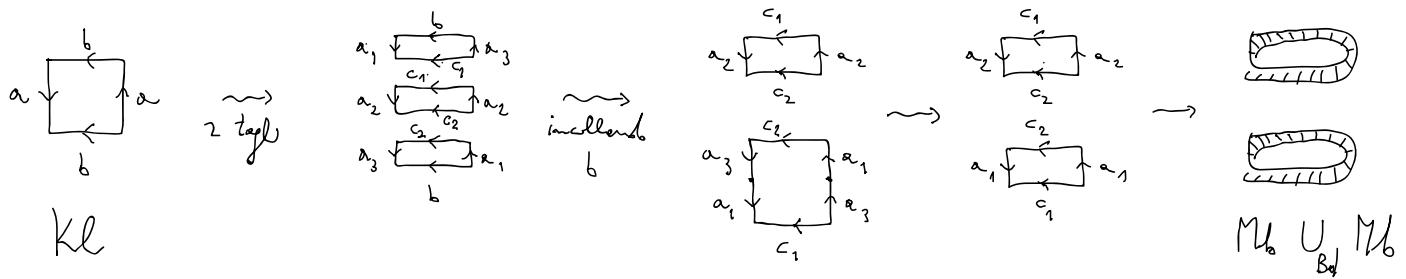
$$T^2 = S(a b a^{-1} b^{-1})$$

$$\chi(T^2) = 0$$

$$\text{Bottiglia di Klein } K = S(a b a^{-1} b^{-1})$$

$$\chi(K) = 0$$





Dato che M_b si ottiene da P^2 rimuovendo l'interno di un disco (come dimostrato sopra) segue che

$$Kl \cong P^2 \# P^2 = P_2.$$

Ricordiamo che $T_g = \begin{cases} S^2 & \text{se } g=0 \\ \#_g T^2 & \text{se } g \geq 1 \end{cases}$ e $P_g = \#_g P^2$.

Teorema di classificazione delle superfici chiuse.

Sia S una superficie chiusa connessa.

Allora $S \cong T_g$ con $g \geq 0$ oppure $S \cong P_g$ con $g \geq 1$.

Dim. Partiamo da una parola $p \in F_n$ che rappresenta una superficie chiusa connessa S come quoziente di un poligono con $2n$ lati orientati in senso antiorario.

Modifichiamo il poligono in uno dal quale sarà chiedere la decomposizione in somme connesse delle tesi.

p ha necessariamente lunghezza $2n$, e ogni lettere di p compare due volte (eventualmente invertita) dato che $BdS = \emptyset$.

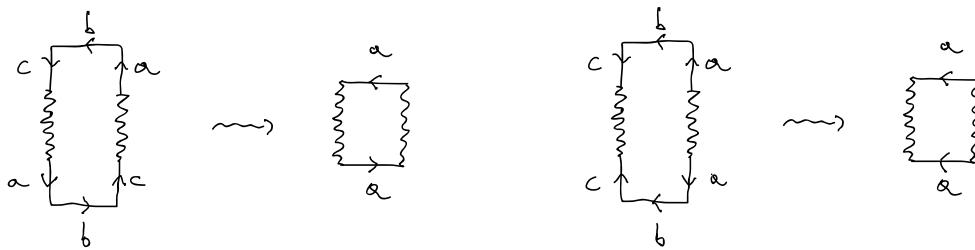
Dividiamo la dimostrazione in vari punti,

Passo 1. Ridurre p eliminando le coppie $\alpha\alpha^{-1}$ come sopra.

Passo 2. Se c'è una sottoperde q di p che si ripete

cioè $p = p_1 q p_2 q^{\pm 1} p_3$ (con p_i eventualmente vuote e lunghezze $q > 1$)

possiamo sostituire q con una sola lettera (che non compare tra le lettere di p_1, p_2, p_3). Questo equivale a sostituire i letti di q con un unico letto (nell'esempio $q = abc$).



Dopo queste semplificazioni è possibile ridurre p come al passo 1. Le semplificazioni non cambiano $\chi(S)$.

Se ottengo una perde vuota oppure di lunghezza 2 allora

$$S \cong S^2 \text{ oppure } S \cong P^2$$

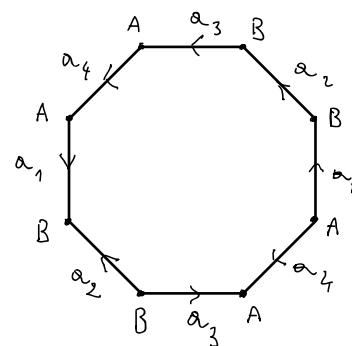


$$S^2 = S(\alpha\alpha^{-1}) = S(\phi)$$

$$P^2 = S(\alpha^2)$$

Altrimenti ottengo una perde ridotta di lunghezza $\gg 4$.

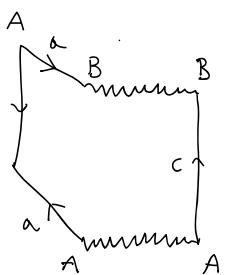
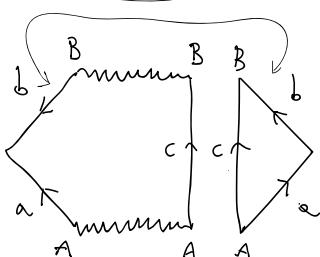
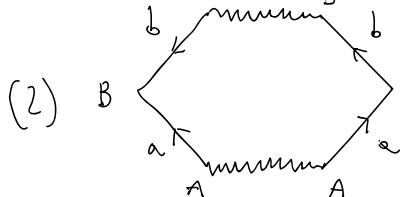
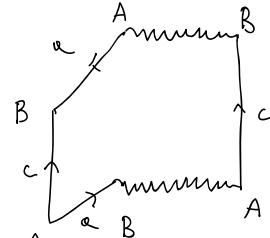
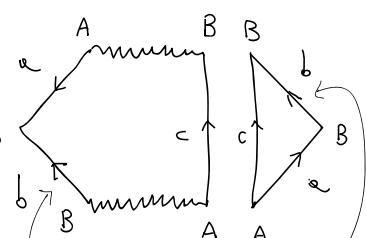
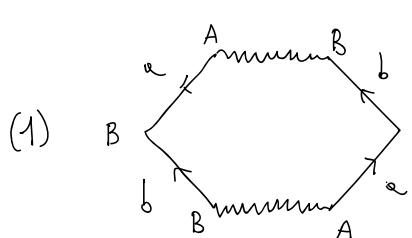
Passo 3. Fare in modo che tutti i vertici si identifichino tra loro (in figura ottieniamo una perde ridotta a meno di passi 1 e 2, ma nel quoziente ci sono due vertici A e B).



$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2^{-1} \alpha_3 \alpha_4^{-1}$$

Supponiamo quindi che ci siano almeno due vertici non equivalenti. Allora esiste un lato a del poligono i cui estremi A, B non si identificano.

Chiameremo il lato b consecutivo ed è non si può incollare ad a . Si presentano due casi.



In entrambi i casi l'operazione di taglio e incolla produce un poligono con lo stesso numero di vertici, ma uno in meno nelle classi di B e uno in più nelle classi di A .

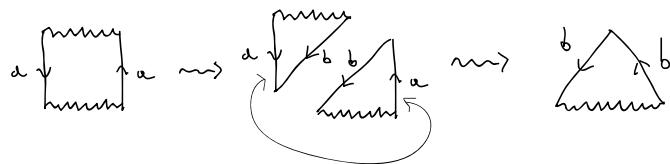
A questo punto se possibile si riapplicano i punti 1 e 2.

Se risultano ancora almeno due classi di equivalenti di vertici si ripete il punto 3 per trasferire un altro vertice verso una classe fissata (p.e. verso le più numerose). Quindi si ripetono i punti 1, 2 e poi 3. Si itera il procedimento un numero finito di volte e alla fine si ottiene un poligono che rappresenta la stessa superficie e con tutti i vertici identificati. Si noti che nessuna classe si muova con passo 3, ma occorrono 1 e 2. Anche il passo 3 non cambia $\chi(S)$.

Punto 4. Rendiamo adiacenti coppie di letti equivalenti concordi del tipo $p_1 \alpha p_2 \alpha p_3$.

11.7

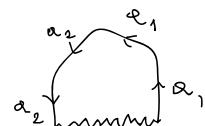
Se abbiamo due letti $a \dots a$ concordi ma non adiacenti procediamo come in figure, dove i letti a vengono sostituiti dai b .



Si noti che le coppie adiacenti concordi preesistenti non vengono spostate, quindi iterando il ragionamento otterremo che tutte le coppie concordi equivalenti sono adiacenti.

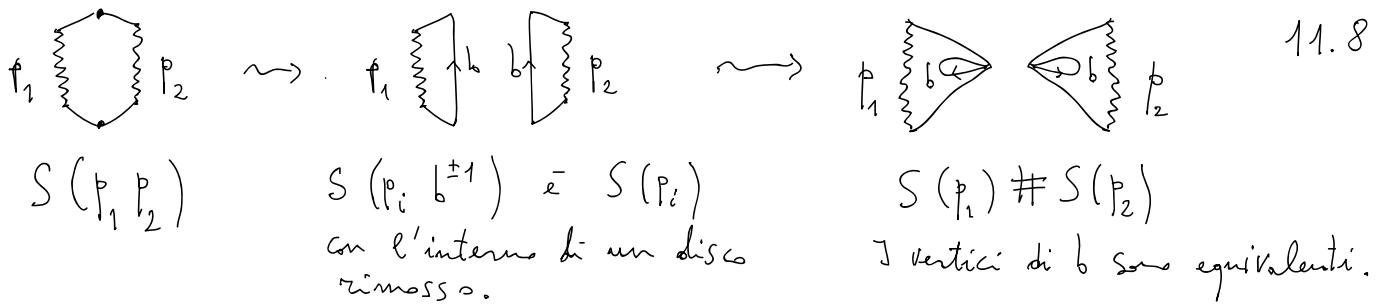
Dato che tutti i vertici si identificano sia prima che dopo questa operazione, segue che $\chi(S)$ non cambia.

A questo punto se non ci sono coppie di letti equivalenti discordi (del tipo $\dots a \dots a^{\dagger} \dots$) si ottiene $S \cong S(a_1^2 \dots a_g^2)$ per un certo $g \geq 1$.



In generale se p_1 e p_2 sono però disgiunte che rappresentano superfici chiuse si ha

$$S(p_1, p_2) \cong S(p_1) \# S(p_2).$$



11.8

Anche questa operazione non modifica $\chi(S)$. Inoltre si ha

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2 \quad (\text{eser.})$$

Se $p = p_1 \alpha^2$ allora $S(p) \cong S(p_1) \# P^2$ salvo che $S(\alpha^2) \cong P^2$.

Per induzione segue subito che $S(p) \cong S(p_1) \# P_m$

dove m è il numero di coppie α^2 ottenute iterando il passo 4 e p_1 non contiene letti concordi.

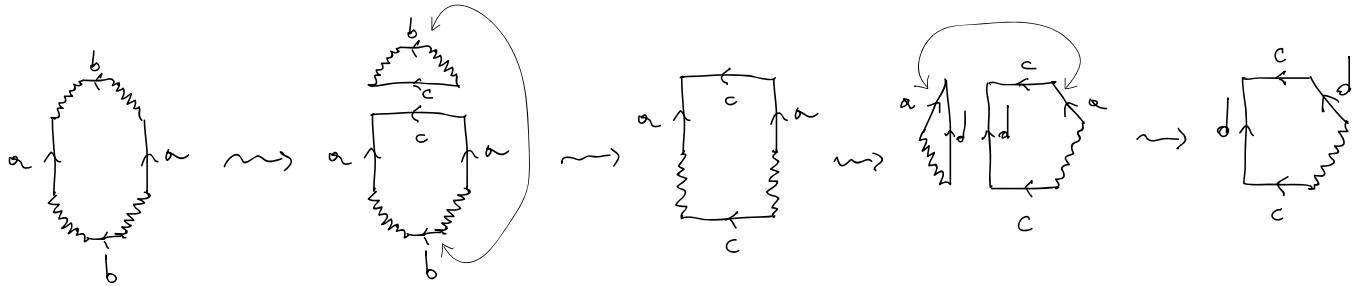
Se $p_1 = \phi$ allora $S \cong P_g$ con $g = m$ e la dimostrazione è conclusa.

Passo 5. Sistemazione delle coppie di letti discordi.

Assumiamo di aver fatto i passi precedenti e escludiamo $p = \phi$.

Prendiamo due letti a, a' separati da più di un letto.

Possiamo trovare due letti b, b' non delle stesse parti tra i due a (segue dal fatto che tutti i vertici sono equivalenti e dal fatto che ciascuna coppia equivalente concorda su delle stesse parti).



Iterando questo procedimento (e i passi 1, 2) otengo una parola

$$p = p_1 \cdots p_k \text{ dove } p_i \text{ è del tipo } a^2 \text{ oppure } [a, b] = a b a^{-1} b^{-1}.$$

Si noti che anche questo procedimento non cambia $\chi(S)$.

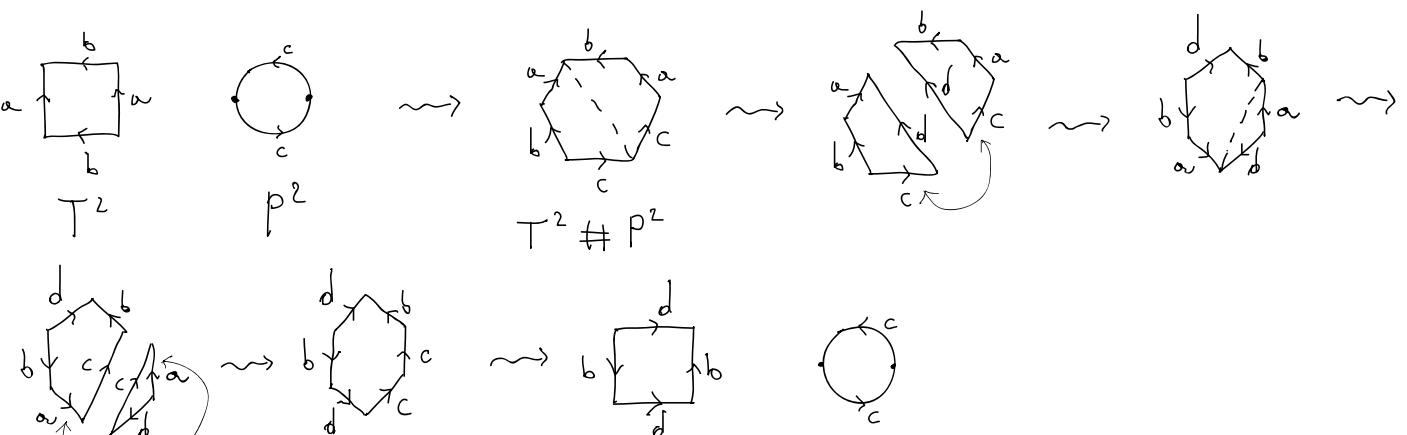
Sappiamo che $S(a^2) \cong P^2$ e che $S([a, b]) \cong T^2$ e quindi

$$S \cong S(p) \cong S(p_1) \# \cdots \# S(p_k) \cong T^2 \# P_m \text{ per certi } l, m.$$

Se $m=0$ la dimostrazione è conclusa.

Ora mostriamo l'importante relazione

$$T^2 \# P^2 \cong P^2 \# P^2 \# P^2 = P_3.$$

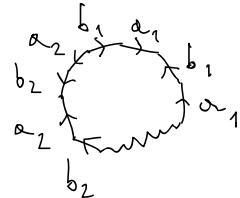


$$S(bd^{-1}bd^{-1}c^2) \cong S(bd^{-1}bd^{-1}) \# S(c^2) \cong K_3 \# P^2$$

Alla fine si ha $T^2 \# P^2 \cong Kl \# P^2$ il che basta per concludere che $Kl \cong P^2 \# P^2$.

Quindi se $m \geq 1$ $T_g \# P_m \cong P_g$ per un certo $g \geq 1$ e questo conclude la dimostrazione del teorema.

Dato che $T_g \cong S([a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g])$ segue che ogni superficie chiusa orientabile è quoziente di un poligono regolare con $4g$ lati.



$P_g \cong S(a_1^2 \cdots a_g^2) \Rightarrow$ ogni superficie chiusa non orientabile è quoziente di un poligono con $2g$ lati.

Chiamiamo queste le rappresentazioni canoniche di T_g e di P_g .

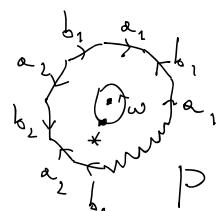


Teorema. Se $g \geq 1$, $\pi_1(T_g) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle$ e $\pi_1(P_g) \cong \langle a_1, \dots, a_g \mid a_1^2 \cdots a_g^2 = 1 \rangle$.

Dim. Si noti che le rappresentazioni canoniche con $4g$ o con $2g$ lati identificano tutti i vertici.

Sia $U \cong \mathbb{R}^2$ l'interno del poligono P e V il complementare del centro.

Allora V si deforma radialmente sul bordo di P e questa deformazione pone al quoziente. Consideriamo T_g .



Dato che i vertici sono tutti equivalenti, $B/P/\sim \cong \bigvee_{2j} S^1$

dove ciascun S^1 è quoziente di un lato $a_i \circ b_i$, $i=1, \dots, j$.

Dato che $U' = U/\sim \cong U$ è contribile e $V' = V/\sim \cong \bigvee_{2j} S^1$

si ha $\pi_1(U') \cong \{1\}$ e $\pi_1(V') \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_j, b_j \rangle$.

Inoltre U' e V' sono aperti in $T_g = U' \cup V'$ e

$U' \cap V' \cong \mathbb{R}^2 - \{o\} \cong S^1$ e quindi U' , V' e $U' \cap V'$

Sono connessi per archi. Pertanto possiamo applicare il teorema di Seifert-Van Kampen.

Il generatore di $\pi_1(U' \cap V')$ $\cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

è un coppia w che fa un giro intorno al centro.

In $\pi_1(V')$ w è omotopo a $[a_1, b_1] \cdots [a_j, b_j]$

$$\Rightarrow \pi_1(T_g) \cong \frac{\pi_1(V')}{\langle [a_1, b_1] \cdots [a_j, b_j] \rangle}$$

da cui segue le tesi.

In modo analogo si calcola $\pi_1(P_g)$.

Crollerio. $H_1(T_g) \cong \mathbb{Z}^{2j}$ e $H_1(P_g) \cong \mathbb{Z}^{j-1} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Dim. Per T_g la relazione $[a_1, b_1] \cdots [a_j, b_j]$ è
bona nell'abelianizzato, quindi $H_1(T_g)$ è abeliano libero
con $2j$ generatori $a_1, b_1, \dots, a_j, b_j$.

Per P_g la relazione $\alpha_1^2 \cdots \alpha_g^2 = 1$ diventa

11.12

$2(\alpha_1 + \cdots + \alpha_g) = 0$. Punto $z = \alpha_1 + \cdots + \alpha_g$, si ha

$\alpha_g = z - \alpha_1 - \cdots - \alpha_{g-1}$ con $2z = 0$. Quindi abbiamo i

generatori $\alpha_1, \dots, \alpha_{g-1}, z$ e l'unica relazione $2z = 0$

$$\Rightarrow H_1(P_g) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Collegio. $T_g \cong T_h \Rightarrow g = h$, $P_g \cong P_h \Rightarrow g = h$ e

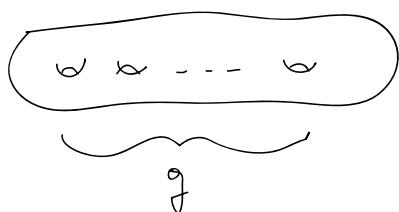
T_g non è omomorfo a $P_h \forall g, h$.

Collegio. S superficie chiuse connesse $\Rightarrow S \cong T_g$

oppure $S \cong P_g$ per un unico g detto genere di S .

Poniamo $g(S) = g$.

$$g(S^2) = 0, \quad g(T^2) = 1, \quad g(P^2) = 1, \quad g(Kl) = 2.$$



Superficie chiuse orientabili
di genere g .

Collegio. S_1, S_2 superficie chiuse. $S_1 \cong S_2 \Rightarrow S_1 \cong S_2$.

Corollario. La caratteristica di Euler $\chi(S)$ non dipende dalla decomposizione poligonale. Inoltre $S_1 \cong S_2 \Rightarrow \chi(S_1) = \chi(S_2)$.

Dimo. $S = S(q)$ con $q = q_1 \cdots q_k$, $q_i = \begin{bmatrix} a_i^2 \\ [a_i; b_i] \end{bmatrix}$

Possiamo riordinare i fattori senza cambiare $\chi(S)$ e nemmeno $S \rightsquigarrow q = t p$, $t = \prod_{i=1}^l [a_i; b_i]$, $p = \prod_{i=1}^m a_i^2$.

Mediente Van Kampen si determina $\pi_1(S)$ in modo simile a quanto fatto sopra \rightsquigarrow

$$H_1(S) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{2l} & \text{se } m=0 \\ \mathbb{Z}^{2l+m-1} \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{se } m \geq 1 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow b_1(S) = \begin{cases} 2l & \text{se } m=0 \\ 2l+m-1 & \text{se } m \geq 1 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \chi(S) = 2 - 2l - m = \begin{cases} 2 - b_1(S) & \text{se } m=0 \\ 1 - b_1(S) & \text{se } m \geq 1. \end{cases}$$

Dal calcolo di $H_1(T_g)$ e $H_1(P_g)$ segue che

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g & \text{se } S \text{ orientabile} \\ 2 - g & \text{se } S \text{ non orientabile} \end{cases}$$

$\Rightarrow S^2$ unica S chiusa connessa con $\chi(S) = 2$.

Le superfici orientabili hanno caratteristica di Euler pari. Inoltre

Corollario. S_1, S_2 superfici chiuse connesse. Allora $S_1 \cong S_2 \Leftrightarrow S_1$ e S_2 entrambe (non) orientabili e $\chi(S_1) = \chi(S_2)$.

12. SUPERFICI CON BORDO

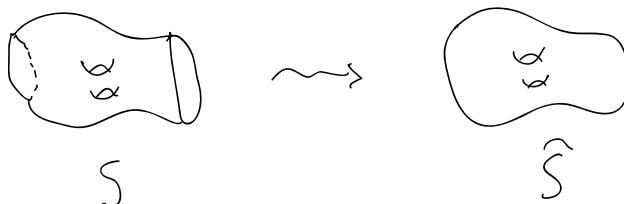
S superficie topologica compatta, connesse con bordo

$\Rightarrow \text{Bd } S \cong \bigsqcup_n S^1 \rightarrow$ poniamo toppare le componenti

d. bordo attaccando dei dischi \rightsquigarrow

$$\hat{S} = S \cup_{\text{Bd}} (\bigsqcup_n B^2) \text{ essendo } \text{Bd}(\bigsqcup_n B^2) \cong \bigsqcup_n S^1 \cong \text{Bd } S.$$

\hat{S} è una superficie chiusa connesse



Inoltre S si ottiene da \hat{S} rimuovendo gli interni di n dischi e due e due disgiunti. Non importa come scegliere questi dischi e meno di uno (eser.)

Sia $T_{g,n}$ la superficie ottenuta da T_g rimuovendo gli interni di n dischi disgiunti. Analogamente definiamo $P_{g,n} = P_g - \text{interni di } n \text{ dischi.}$

Seppure che $\exists g \geq 0$ t.c. $\hat{S} \cong \begin{cases} T_g \\ P_g & (g \geq 1) \end{cases}$

quindi S non ottiene da T_g o da P_g rimuovendo gli interni di n dischi disgiunti.

Inoltre $S_1 \cong S_2 \Rightarrow \hat{S}_1 \cong \hat{S}_2$ (eser.).

Teorema di classificazione delle superficie con bordo.

Ogni superficie connesse compatta è omotopica ad una e una soltanto tra $T_{g,n} \circ P_{g,n}$ per un certo g e un certo n .

Quindi prima definire il genere di S

$$g(S) \stackrel{\text{def}}{=} g(\hat{S}) = g \text{ se } S \cong T_{g,n} \circ P_{g,n}.$$

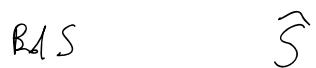
Un altro invarianto è il numero $n(S) = n$ di componenti di ∂S .

Se S è poligonale allora ∂S è suddiviso in lati: se possiamo poligono \hat{S} tagliando ∂S con poligoni in modo che lati si incollino a lati.

$$\text{Quindi } \chi(\hat{S}) = \chi(S) + n(S)$$



$$\Rightarrow \chi(S) \text{ invariante topologico}$$



di S .

Dato che le superficie chiuse sono classificate dalle caratteristiche d'Euler e dell'orientabilità, si ottiene subito il

Teorema. S_1, S_2 superficie connesse compatte. Allora

$$S_1 \cong S_2 \iff S_1 \text{ e } S_2 \text{ entrambe (non) orientabili},$$

$$\chi(S_1) = \chi(S_2) \text{ e } n(S_1) = n(S_2).$$

Supponiamo $\text{Bd } S \neq \emptyset \Rightarrow \hat{S}$ quoziente di un

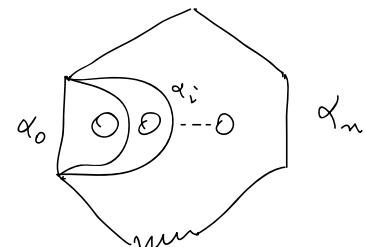
poligono P con tutti i vertici equivalenti. Tolgo $n = n(S)$ dischi aperti de $\text{Int } P$ e quotientando ottengo S .

Consideriamo archi α_i , $i = 0, \dots, n$, tra due

vertici consecutivi, con α_0 coincidente

col lato tra questi due vertici e

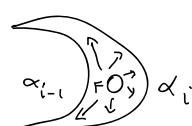
α_n l'unione degli altri letti di P .



La regione di P

comprata tra α_{i-1} , α_i e l'i-esimo
disco rimosso si deforma su $\alpha_{i-1} \cup \alpha_i$

(questa regione è omotopica all'anello
 $S^1 \times [0,1]$).



Tutte queste deformazioni si incollano bene e
perdono il quoziente. Quindi quotientiamo

gli α_i diventano un'unione puntuata $\bigvee_k S^1$ con

$k = n(S) + n_1 - 1$ dove n_1 è il numero di letti
di P/\sim .

Dato che $\chi(\beta) = 2 - n_1 = \chi(S) + n(S)$ si ha
 $\kappa = 1 - \chi(S)$. Quindi $S \simeq \bigvee_k S^1$ con κ
determinato da $\chi(S)$.

Si ha quindi

Corollario. S_1, S_2 superficie compatte connesse con $\text{Bd}(S_1) \neq \emptyset$ e $\text{Bd}(S_2) \neq \emptyset$. Allora $S_1 \approx S_2 \Leftrightarrow \chi(S_1) = \chi(S_2)$.

Oss. $S_1 \approx S_2 \Rightarrow \chi(S_1) = \chi(S_2)$ senza nessuna ipotesi sul bordo. Tuttavia non siamo in grado di dimostrare questa implicazione nel caso in cui $\text{Bd } S_1 = \emptyset$ e $\text{Bd } S_2 \neq \emptyset$.

Corollario. Se $\text{Bd } S \neq \emptyset$ allora $\pi_1(S)$ è un gruppo libero con $k = 1 - \chi(S)$ generatori.

Teorema. $\text{Bd } S \neq \emptyset$ e S semplicemente connesse $\Leftrightarrow S \cong \mathbb{B}^2$. S compatte e contrabbile $\Leftrightarrow S \cong \mathbb{B}^2$.

Dim. 1^a parte. S semplicemente connesse $\Rightarrow k = 0$ (con le notazioni usate sopra) $\Rightarrow \chi(S) = 1$.

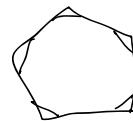
Quindi $n(S) + n_1 = 1 \Rightarrow n(S) = 1$ e $n_1 = 0$
 $\Rightarrow S \cong S^2$ (unico caso con poche voci) $\Rightarrow S \cong \mathbb{B}^2$ (per il teorema di Schoenflies).

2^a parte. $\pi_1(S) \cong 0 \Rightarrow S \cong \begin{cases} S^2 \\ \mathbb{B}^2 \end{cases}$ per il teorema di classificazione e 1^a parte.

Ma S^2 non è contrabbile (senza dimostrazione), quindi $S \cong \mathbb{B}^2$.

Supponiamo $\text{Bd } S \neq \emptyset$ e connesso, cioè $n(S) = 1$.

Nel poligono canonico che rappresenta

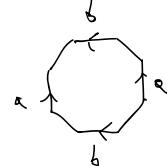
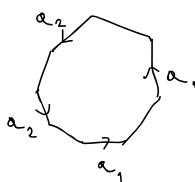


\widehat{S} togliamo un triangolino aperto intorno a



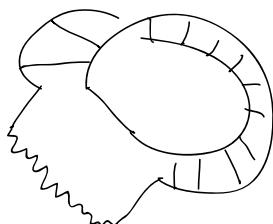
ciascun vertice. Questo equivale a rimuovere un disco aperto intorno al vertice in \widehat{S} , quindi il risultato è S . In altre parole stiamo aggiungendo un lato da non identificare tra due qualsiasi lati di P .

Si ottiene una pista che rappresenta S .



Le identificazioni si possono

fare in \mathbb{R}^3 mediante

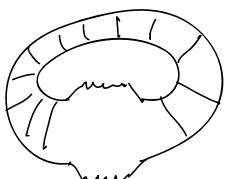


bende (fritte per

coppie discordi e

con un mezzo avvitamento

per coppie concordi)

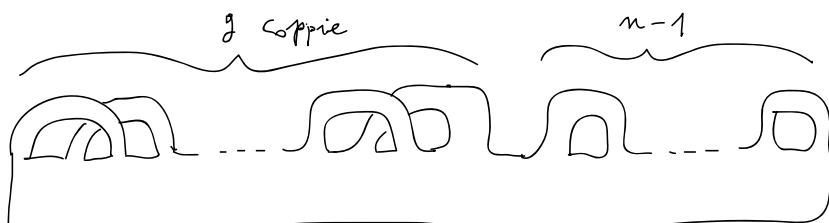


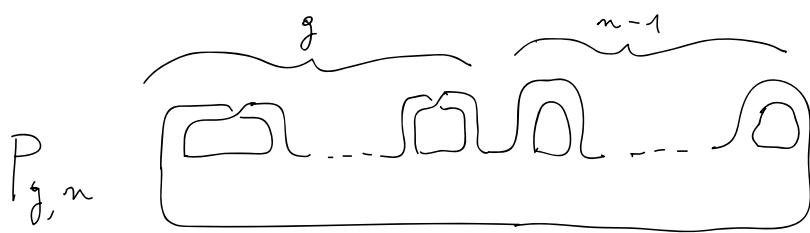
\rightsquigarrow rappresentazione a

bande (o a manici) di S .

A meno di omos prendiamo un rettangolo con tutte le identificazioni nel lato superiore. Aggiungendo bande piatte isolate si cambia $n(S)$.

$T_{g,n}$



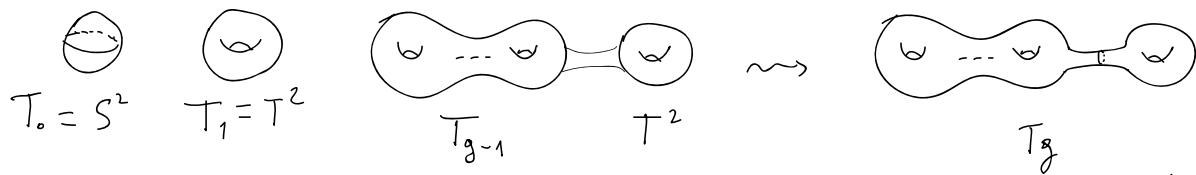


Teorema. S connesse con $\text{Bd } S \neq \emptyset \Rightarrow \exists f: S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ embedding.

Nel caso orientabile si osservi che la proiezione $\pi: S \rightarrow \mathbb{R}^2$ sul piano del disegno è una immersione locale.

Teorema. S orientabile connesse con bordo non vuoto $\Rightarrow \exists \pi: S \rightarrow \mathbb{R}^2$ immersione locale.

T_g ammette un embedding in $\mathbb{R}^3 \quad \forall g > 0$



Si provi dimostrare che P_g non ammette un embedding in \mathbb{R}^3 . Però vale il

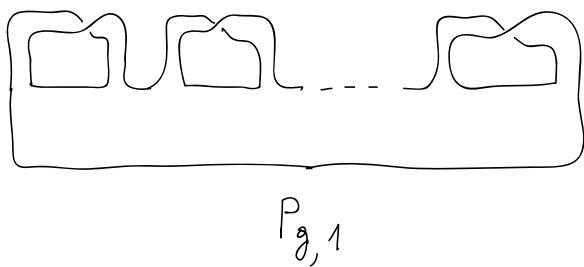
Teorema. Ogni superficie compatta ammette un embedding in \mathbb{R}^4 .

Dim. Se S orientabile. $\text{Bd } S \neq \emptyset$ allora $S \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$.

P_g si ottiene da $P_{g,1}$ incollando un disco lungo il bordo.

Quindi possiamo considerare $P_{g,1} \subset \mathbb{R}^3$ come in figura sotto.

Sia $C \subset \mathbb{R}^4$ il cono con vertice $(0, 0, 0, 1)$ e base $\text{Bd } P_{g,1} \cong S^1 \Rightarrow C \cong B^2$. Segue che $P_g \cong P_{g,1} \cup C \subset \mathbb{R}^4$.



Cenni sulle strutture differentiabili.

Se S_1 e S_2 sono superfici differentiabili, è possibile definire una struttura differentiabile in $S_1 \# S_2$ (secondo l'incollamento con un diffeomorfismo mediante un omeo).

dato che S^2, T^2 e P^2 ammettono una struttura diff.
segue che T_g e P_g ammettono struttura diff.
Topiando interni di dischi differentiabili in T_g
e in P_g segue che $T_{g,n}$ e $P_{g,n}$ ammettono
una struttura differentiabile. Più in generale:

Teorema. Ogni superficie topologica ammette
una struttura differentiabile, unica e meno di
diffeomorfismi. In altre parole, se due superfici
differentiabili sono omeomorfe, allora sono anche
diffeomorfe.