Gruppi di Lie
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2024-2025
Docente: Andrea Loi

1. Sia $\pi : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1, (t, s) \mapsto (e^{2\pi it}, e^{2\pi is})$, $L = \{(t, \alpha t) \mid \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ e $f = \pi_{|L} : L \to S^1 \times S^1$. Sia τ_f la topologia indotta da f su $H = \pi(L)$ e τ_s quella indotta dall'inclusione $H \subset S^1 \times S^1$. Dimostrare che $\tau_s \subset \tau_f$. (Suggerimenrto: si usi il fatto che $f(L)$ è denso in $S^1 \times S^1$).

2. Sia $F : H \to G$ un omomorfismo iniettivo tra gruppi di Lie. Dimostrare che F è un'immersione (e quindi $F(H)$ è un sottogruppo di Lie di G). (Suggerimenrto: si usi il fatto che un omomorfismo tra gruppi di Lie ha rango costante e il Teorema del rango costante).

3. Sia $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dimostrare che $e^X = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$.

4. Trovare due matrici A e B tali che $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

5. Dimostrare che (teorema della forma canonica ortogonale) data $A \in O(n)$ allora esiste $P \in O(n)$, p, q naturali tali che

$$P^{-1}AP = P^tAP = \left(\begin{array}{cc|ccc} I_p & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -I_q & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & P_1 & & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & P_{n-p-q} \end{array}\right) \qquad (1)$$

dove $P_j = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \cos\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$, $\theta_j \in \mathbb{R}$, $\theta_j \neq s\pi$, $\forall s \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, \frac{n-p-q}{2}$, I_p (risp. I_q) è la matrice identità di ordine p (risp. q). (Suggerimento: la dimostrazione si ottiene attraverso i seguenti passi.

   a) esistono $p \geq 0$ autovalori di A uguali a 1, $q \geq 1$ autovalori di A uguali a -1, e $2h \geq 0$ autovalori complessi $e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_h}, e^{-i\theta_h}$ di A.

   b) esiste una base ortonormale di autovettori reali $w_1, \ldots, w_p$ di V_1 e una base ortonormale di autovettori reali $t_1, \ldots, t_q$ di V_{-1} tali che $< w_j, t_k >= 0$, $\forall j = 1, \ldots, p$ e $\forall k = 1, \ldots q$.

   c) sia m_ℓ la molteplicità algebrica di $e^{i\theta_\ell}$, $\ell = 1, \ldots h$. Allora esiste una base ortonormale $u_1^\ell + iv_1^\ell, \ldots, u_{m_\ell}^\ell + iv_{m_\ell}^\ell$ di $V_{e^{i\theta_\ell}}$ e $u_1^\ell - iv_1^\ell, \ldots, u_{m_\ell}^\ell - iv_{m_\ell}^\ell$ base ortonormale di $V_{e^{-i\theta_\ell}}$ tali che $< u_{j_\ell}^\ell + iv_{j_\ell}^\ell, u_{k_\ell}^\ell - iv_{k_\ell}^\ell >= 0$, $\forall j_\ell, k_\ell = 1, \ldots, m_\ell$.

   d) sia $\ell = 1, \ldots, h$ fissato, dedurre dal punto precedente che $\forall j_\ell.k_\ell = 1, \ldots, m_\ell, \forall j = 1, \ldots, p$ e $\forall k = 1, \ldots q$

$$\|u_{j_\ell}^\ell\| = \|u_{j_\ell}^\ell\| = 1, \ < u_{j_\ell}^\ell, u_{k_\ell}^\ell >=< v_{j_\ell}^\ell, v_{k_\ell}^\ell >= 0$$
$$< w_j, u_{j_\ell}^\ell >=< w_j, v_{j_\ell}^\ell >=< t_k, u_{j_\ell}^\ell >=< t_k, v_{j_\ell}^\ell >= 0.$$

   e) per ogni $\ell = 1, \ldots, h$, siano $u_{j_\ell}^{(\ell)} := \frac{u_{j_\ell}^\ell}{\|u_{j_\ell}^\ell\|}$ e $v_{j_\ell}^{(\ell)} := \frac{v_{j_\ell}^\ell}{\|v_{j_\ell}^\ell\|}$. Dedurre che

$$A(u_{j_\ell}^{(\ell)} + v_{j_\ell}^{(\ell)}) = e^{i\theta_\ell}(u_{j_\ell}^{(\ell)} + v_{j_\ell}^{(\ell)}).$$

   e che $Au_{j_\ell}^{(\ell)} = \cos\theta_\ell \ u_{j_\ell}^{(\ell)} - \sin\theta_\ell \ v_{j_\ell}^{(\ell)}$ e $Av_{j_\ell}^{(\ell)} = \sin\theta_\ell \ u_{j_\ell}^{(\ell)} + \cos\theta_\ell \ v_{j_\ell}^{(\ell)}$, $\forall j_\ell = 1, \ldots, m_\ell$.

f) dedurre dai punti precedenti che i vettori

$$w_1, \dots w_p, t_1, \dots, t_q, u_1^{(1)}, v_1^{(1)}, \dots, u_{m_1}^{(1)}, v_{m_1}^{(1)}, \dots, u_1^{(h)}, v_1^{(h)}, \dots, u_{m_h}^{(h)}, v_{m_h}^{(h)}$$

sono una base ortonormale di vettori di $\mathbb{R}^n$ e che se $P \in O(n)$ è la matrice associata a questa base (cioè la matrice che ha come colonne tali vettori) si ottiene la (1).

6. Sia G un gruppi di Lie e sia G_0 la componente connessa di G che contiene e (elemento neutro di G). Se μ e i denotano la moltiplicazione e l'inversione in G, provare che

    1. $\mu(\{x\} \times G_0) \subset G_0, \forall x \in G_0$;
    2. $i(G_0) \subset G_0$;
    3. G_0 é un sottoinsieme aperto di G
    4, G_0 é un sottogruppo di Lie di G.

7. Sia G un gruppo di Lie e $\mu : G \times G \to G$ la moltiplicazione. Dimostrare che

$$\mu_{*(a,b)}(X_a, Y_b) = (R_b)_{*a}(X_a) + (L_a)_{*b}(Y_b),\ \forall (a,b) \in G \times G,\ \forall X_a \in T_aG,\ \forall Y_b \in T_bG,$$

dove L_a (risp. R_b) denota la traslazione a sinistra (risp. a destra) associata ad a (risp. b).

8. Sia G un gruppo di Lie con inversione $i : G \to G, a \mapsto i(a) = a^{-1}$. Dimostrare che

$$i_{*a}(Y_a) = -(R_{a^{-1}})_{*e}(L_{a^{-1}})_{*a}(Y_a),\ \forall a \in G,\ \forall Y_a \in T_aG.$$

9. Dimostrare che ogni gruppo di Lie é parallelizzabile.