Queste brevi note sono un reassunto di quello che abbiamo visto a lezione. Non ci sono quindi ne dimostrazioni ne esercizi. I vettori $\mathbf{e_i}$ rappresentano i vettori di $\mathbb{R}^n$ con 1 nell' i-esima posizione e 0 altrove.

0.1 Combinazioni lineari

Un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si dice *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ se esistono scalari $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + \cdots x_k\mathbf{v_k}.$$

Gli scalari $x_1, \ldots, x_k$ si chiamano *coefficienti* della combinazione lineare. La combinazione lineare è detta *non banale* se almeno uno dei coefficienti è diverso da zero.

Lo *spazio generato* dai vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ è l'insieme di tutti i vettori che si ottengono come combinazioni lineari di $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$

$$\mathcal{L} = \{x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + \cdots x_k\mathbf{v_k} | x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}\}$$

Un insieme di vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ si dice insieme di generatori per $\mathbb{R}^n$ se

$$\mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}) = \mathbb{R}^n,$$

cioè se ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ è combinazione lineare di $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$. In questo caso si dice anche che che $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ generano $\mathbb{R}^n$.

- Se $\mathbf{v_1}$ è un vettore non nullo in $\mathbb{R}^3$ allora $\mathcal{L}(\mathbf{v_1})$ è la retta per l'origine $\{t\mathbf{v_1} | t \in \mathbb{R}\}$. Se $\mathbf{v_1} = \mathbf{0}$ allora $\mathcal{L}(\mathbf{v_1})$ consiste della sola origine.
- Se $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ sono due vettori di $\mathbb{R}^3$, allora $\mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ è l'insieme dei vettori della forma $a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2}$. Se $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ non sono multipli l'uno dell'altro, $\mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ è un piano per l'origine, altrimenti è una retta per l'origine, eccetto il caso $\mathbf{v_1} = \mathbf{v_2} = \mathbf{0}$., dove $\mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ è l'origine stessa.
- Analogamente, lo spazio generato da tre vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ può essere tutto $\mathbb{R}^3$, o un piano passante per l'origine, o una retta passante per l'origine, o l'origine stessa.
- I vettori $\mathbf{e_i}, i = 1, 2, \ldots n$ generano $\mathbb{R}^n$.

I vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ si dicono *linearmente dipendenti* se esistono $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$, almeno uno dei quali diverso da zero , tali che

$$x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + \cdots x_k\mathbf{v_k} = \mathbf{0}.$$

In altre parole, se il vettore nullo può essere scritto come combinazione lineare non banale di $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$.

I vettori si dicono *linearmente indipendenti* se non sono linearmente dipendenti, cioè se da

$$x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + \cdots x_k\mathbf{v_k} = \mathbf{0}$$

segue che

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0.$$

Ovvero l'unica combinazione lineare di $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ che è uguale al vettore nullo è quella banale.

I vettori $\mathbf{e_i}, i = 1, \ldots, n$ sono linearmente indipendenti.

Valgono i seguenti fatti:

- Se uno dei vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ è il vettore nullo, allora $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ sono linearmente dipendenti;

- un vettore $\mathbf{v_1}$ è linearmente indipendente se e solo se $\mathbf{v_1} \neq \mathbf{0}$;
- due vettori $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ sono linearmente indipendenti se e solo se non sono multipli l'uno dell'altro;
- Se $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ sono linearmente indipendenti, ma $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ $\mathbf{v_3}$ sono dipendenti, allora $\mathbf{v_3}$ è combinazione lineare di $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$. Viceversa, se $\mathbf{v_3}$ è combinazione lineare di $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$, allora $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$ sono linearmente dipendenti;
- Vettori di $\mathbb{R}^n$ non nulli e ortogonali sono linearmente indipendenti.

Criterio per vettori di $\mathbb{R}^n$

Dati $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$, possiamo formare la matrice $n \times k$, $A = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k})$ che ha per colonne i vettori dati. Allora ogni combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ si può esprimere come un prodotto di matrici:

$$x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + \cdots + x_k\mathbf{v_k} = Ax,$$

dove x è il vettore colonna di componenti $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Ciò consente di riformulare le nozioni di dipendenza lineare, indipendenza lineare e spazio generato nella terminologia dei sistemi lineari:

1. I vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se e solo se esiste una soluzione $x \neq 0$ del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$;

2. I vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se l'unica soluzione del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ è quella banale $x = 0$;

3. Un vettore $\mathbf{b}$ appartiene a $\mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k})$ se e solo se il sistema lineare $Ax = \mathbf{b}$ è compatibile.

Combinando le affermazioni precedenti con il Teorema di Rouché–Capelli si ottiene:

4. k vettori di $\mathbb{R}^n$ sono lineramente indipendenti se e solo se la corrispondente matrice $n \times k$ ha rango k (quindi $k \leq n$);

5. se $k > n$, k vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti (Attenzione: il viceversa non è vero. Fare un esempio);

6. k vettori di $\mathbb{R}^n$ generano $\mathbb{R}^n$ se e solo se la matrice A, $n\times k$ ha rango n. Questo richiede che $k \geq n$. (Attenzione non è vero che un qualsiasi insieme di n o più vettori di di $\mathbb{R}^n$ genera $\mathbb{R}^n$. Fare un esempio).

Un *base* di $\mathbb{R}^n$ è un insieme ordinato di generatori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$. Una *base ortogonale* di $\mathbb{R}^n$ è una base i cui vettori sono a due a due ortogonali. Una base di $\mathbb{R}^n$ si dice *ortonormale* se inoltre tutti i suoi vettori hanno lunghezza uno.

I vettori $\mathbf{e_i}, i = 1, \dots n$ sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Deduciamo il seguente

Teorema 1 *Una base di $\mathbb{R}^n$ è formata esattamente da n vettori. Un insieme di vettori $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n} \in \mathbb{R}^n$ è una base se e solo se la matrice $n \times n$ $A = (\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n})$ è non singolare.*

Coordinate Se $\mathcal{B} = (\mathbf{v_1}, \dots \mathbf{v_n})$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora ogni vettore v si può scrivere *in modo unico* come $v =$

$a_1\mathbf{v_1}+\cdots+a_n\mathbf{v_n}$, cioè come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$. Indicheremo con $[v]_{\mathcal{B}} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ le coordinate del vettore $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

La *dimensione* di $\mathbb{R}^n$ è il numero di vettori che compongono una sua base; quindi $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n.

Si verifica facilmente che se $\mathbf{v_1}, \dots \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti, allora per qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$ $\mathbf{v_1}+\lambda\mathbf{v_2}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_k}$ sono linearmente indipendenti.

Come conseguenza si ottiene che: *il rango di una matrice è uguale al numero delle sue righe linearmente indipendenti.*

Si riesce anche a dimostrare anche che: *il rango di una matrice è uguale al numero delle sue colonne linearmente indipendenti.*

Molti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ hanno proprietà analoghe a quelle di $\mathbb{R}^n$ stesso. Un sottoinsieme $W \neq \emptyset$ di $\mathbb{R}^n$ si dice *sottospazio vettoriale* se:

1. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$

2. $\forall \mathbf{v} \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \mathbf{v} \in W$.

Un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è esso stesso uno spazio vettoriale.

Esempi di sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono:

- lo spazio
$$W = \mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \ldots \mathbf{v_k})$$
spazio generato da k vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$. La dimensione di W è data dal rango della matrice $A = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k})$.

- Le soluzione di un sistema omogeneo $Ax = 0$, $A \in M_{m,n}$ la cui dimensione è $n - rg(A)$;

- I vettori in $\mathbb{R}^3$ aventi terza coordinata nulla;

- I vettori (x_1, x_2) di $\mathbb{R}^2$ con $x_1 = x_2$.

<u>Non</u> sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$ i seguenti:

- $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = x_2^k, k \neq 0, 1\}$

- $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = x_2 + \alpha, \alpha \neq 0, 1\}$

Sopra abbiamo introdotto la nozione di coordinate di vettori rispetto ad una base fissata. Cercheremo ora di capire cosa succede alle coordinate di un vettore di $\mathbb{R}^n$ quando cambiamo base.

Siano $\mathcal{B} = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})$ e $\mathcal{B}' = (\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_n})$ due basi di $\mathbb{R}^n$. Chiameremo *matrice di cambiamento di base* da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ la matrice $P = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = (p_{ij})$ che ha come j-esima colonna le coordinate di $\mathbf{w_j}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. In altri termini

$$P^j = [\mathbf{w_j}]_{\mathcal{B}},$$

dove P^j denota la colonna j-esima di P. Vale la seguente:

Proposizione 2 *Siano $\mathcal{B} = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})$ e $\mathcal{B}' = (\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_n})$ due basi di $\mathbb{R}^n$. Allora*

- $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = I$;
- $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ *è invertibile e la sua inversa è* $M(\mathcal{B}', \mathcal{B})$;
- *Siano $[v]_{\mathcal{B}}$ e $[v]_{\mathcal{B}'}$ i vettori delle coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ e e $\mathcal{B}'$, rispettivamente. Allora,*

$$[v]_{\mathcal{B}'} = M(\mathcal{B}', \mathcal{B})[v]_{\mathcal{B}}, \; [v]_{\mathcal{B}} = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')[v]_{\mathcal{B}'}.$$