Soluzione degli esercizi su indipendenza lineare, basi e dimensione
Corso di Laurea in Informatica A.A. 2006-2007
Docente: Andrea Loi

0. Per quali valori di λ i vettori $v_1 = 2\lambda\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $v_2 = \mathbf{j}$ sono linearmente indipendenti?

   Soluzione: Per definizione k vettori sono linearmente dipendenti se una qualunque loro combinazione lineare:

   $$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_kv_k = 0$$

   con gli a_i non tutti contemporaneamente nulli. Ció si puó anche esprimere come: *k vettori sono linearmente dipendenti se uno di essi si puó scrivere come combinazione lineare degli altri, ovvero:*

   $$v_i = b_1v_1 + \ldots + b_{i-1}v_{i-1} + b_{i+1}v_{i+1} + \ldots + b_kv_k$$

   Nel caso di due vettori ques'ultima si riduce a: $v_1 = b_2v_2$. Nel nostro caso si tratta di verificare per quali valori di λ si verifica quest'ultima eventualitá. Questa si verifica solo per $\lambda = 0$, per tale valore infatti $v_1 = v_2$. Quindi v_1 e v_2 son indipendenti per tutti i valori di $\lambda \neq 0$.

1. Provare che i vettori $\mathbf{v_1} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v_2} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v_3} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ sono linearmente indipendenti. Dire, inoltre se il vettore $\mathbf{j}$ é esprimibile come combinazione lineare di $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$, e se lo é, dire in quanti modi.

   Soluzione: Se i tre vettori sono linearmente dipendenti devono esistere due numeri reali x e y, tali che $x\mathbf{v_1} + y\mathbf{v_2} = \mathbf{v_3}$, ovvero dobbiamo risolvere il sistema:

   $$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 2x + 2y = -2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Dall'ultima e dalla seconda equazione si trova $x = 2$ e $y = -3$, valori che non soddisfano la prima equazione, pertanto il sistema non ammette soluzioni, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti. Poiché i tre vettori sono linearmente indipendenti, questi formano una base per $\mathbb{R}^3$. Dunque il sottospazio generato da $\mathbf{v_1}$,$\mathbf{v_2}$ $\mathbf{v_3}$ e $\mathbf{j}$ é formato da quattro vettori dipendenti, in quanto siamo in uno spazio di dimensione tre che ammette al piú tre vettori linearmente indipendenti in ogni suo sottospazio generato, pertanto é possibile scrivere in modo unico il vettore $\mathbf{j}$ come combinazione lineare di $\mathbf{v_1}$,$\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$, come segue:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $x = 0$, $y = \dfrac{1}{4}$ e $z = -\dfrac{1}{4}$, ovvero si ha che : $\mathbf{j} = 0\mathbf{v_1} + \frac{1}{4}\mathbf{v_2} + (-\frac{1}{4})\mathbf{v_3}$

2. Vero o falso:

   - 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti;

     Soluzione: Falso. Ad esempio vettori:

     $$(1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

     di $\mathbb{R}^6$ sono linearmente indipendenti.

   - 6 vettori in $\mathbb{R}^4$ sono linearmente dipendenti;

     Soluzione: Vero. Si hanno piú vettori della dimensione dello spazio, che é 4, in $\mathbb{R}^4$ si possono avere al massimo quattro vettori linearmente indipendenti, quindi sei vettori in $\mathbb{R}^4$ devono essere necessariamente dipendenti.

- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti.

  Soluzione: Falso. Ad esempio vettori:

  $$(1,0,0,0,0,0),(2,0,0,0,0,0),(3,0,0,0,0,0),(4,0,0,0,0,0)$$

  di $\mathbb{R}^6$ sono linearmente dipendenti.

3. Dire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti; scrivere, quando possibile, un vettore come combinazione lineare dei rimanenti:

   $$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Stessa domanda per i vettori

   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Soluzione: Diamo un nome ai vettori:

   $$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   questi sono linearmente indipendenti, come si vede calcolando il prodotto misto $v_1 \cdot v_2 \wedge v_3$:

   $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 + 3 + 10 = 6$$

   Questo é non nullo, ne consegue che i tre vettori sono non complanari e quindi risultano indipendenti.
   I vettori

   $$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

sono linearmente dipendenti infatti scrivendo il sistema $x\mathbf{u_1} + y\mathbf{u_2} = \mathbf{u_3}$:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

é banalmente soddisfatto, quindi $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = \mathbf{u_3}$.

4. Provare che i vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione: Calcoliamo il prodotto misto dei tre vettori, se questo é nullo allora i tre vettori sono complanari e quindi non possono essere una base per $\mathbb{R}^3$, se é non nullo allora sono non complanari e dunque una base per $\mathbb{R}^3$. Chiamiamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

calcoliamo $v_1 \cdot v_2 \wedge v_3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

é non nullo e quindi v_1, v_2 e v_3 sono una base per $\mathbb{R}^3$.

5. Siano $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1, 3)$ e $v_3 = (0, 1, 1, 1)$ tre vettori di $\mathbb{R}^4$. Trovare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori v_1, v_2 e v_3.

Soluzione: Controlliamo quanti di questi vettori sono linearmente indipendenti: Sicuramente v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti in quanto non proporzionali, anche v_1 e v_3, v_2 e v_3 sono non proporzionali, verifichiamo che v_2, v_3 sono indipendenti da v_1, ovvero cerchiamo due numeri reali per cui $xv_2 + yv_3 = v_1$, scrivendo il sistema si osserva subito che i tre vettori sono indipendenti in quanto la prima equazione Ë $0 = 1$ rende il sistema impossibile, pertanto non esistono i numeri da noi cercati. Quindi il sottospazio generato da v_1, v_2 e v_3 ha dimensione 3.

6. Trovare i valori del parametro reale λ per i quali i vettori $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,-1)$ e $v_3 = (0,-1,\lambda)$ di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti.

Soluzione: Calcoliamo il prodotto misto: $v_1 \cdot v_2 \wedge v_3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1$$

Dobbiamo assicurarci che questo non sia nullo, se lo fosse ció significherebbe che i tre vettori sono complanari e quindi linearmente dipendenti, dobbiamo pertanto richiedere che $\lambda - 1 \neq 0$ e ció avviene solamente se $\lambda \neq 1$.

7. Trovare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = (1,2,-1,1)$, $v_2 = (0,2,1,3)$ e $v_3 = (2,2,-1,-1)$.

Soluzione: Verifichiamo che i tre vettori siano indipendenti, risolviamo il sistema dato da $xv_1 + y_2 = v_3$:

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2x + 2y = 2 \\ -x + y = -1 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

si ottiene dalle prime due equazioni $x = 2$ e $y = -1$, queste soluzioni soddisfano la quarta equazione ma non la terza, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e lo spazio da questi generato é 3.

8. Trovare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^7$ generato dai seguenti vettori $v_1 = (1, 2, -1, 1, 5, 0, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1, 3, \sqrt{2}, \pi, -3)$ e $v_3 = (2, 4, -2, 2, 10, 0, 2)$.

   Soluzione: Dobbiamo verificare che i vettori siano indipendenti due a due e che lo siano anche tutti e tre assieme, osserviamo subito che $v_3 = 2v_1$, v_1 e v_3 sono quindi proporzionali e quindi linearmente dipendenti, v_1 e v_2 sono non proporzionali, e quindi indipendenti, ne consegue che in v_1, v_2 e v_3 solo v_1 e v_2 sono indipendenti, quindi il sottospazio generato da questi tre vettori ha dimensione 2.

9. Trovare i valori del parametro reale λ per i quali i tre vettori $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 0)$ e $v_3 = (0, -1, \lambda, 1)$ di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti.

   Soluzione: Impostiamo il sistema $xv_1 + yv_2 = v_3$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ x - y = \lambda \\ 0 = 1 \end{cases}$$

   l'ultima equazione rende il sistema impossibile, ne consegue che i tre vettori sono linearmente indipendenti per ogni valore di $\lambda \in \mathbb{R}$

10. Trovare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^8$ generato dai seguenti vettori: $v_1 = (1, 2, -1, 1, 5, 0, 1, 2)$ $v_2 = (0, 2, 1, 3, \sqrt{2}, \pi, -3, e)$

$v_3 = (2, 4, -2, 2, 10, 0, 2, 4)$ $v_4 = (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{e}{2})$

Soluzione: Potremo cercare di capire subito se questi quattro vettori sono linearmente indipendenti impostando il sistema $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$, ma ció che chi si presenta, é un sistema di otto equazioni in tre incognite, poco elegante da risolvere, procediamo in un altro modo. Dobbiamo assicurarci che i quattro vettori dati siano indipendenti due a due, tre a tre e poi tutti e quattro assieme. Con un po' di attenzione si nota immediatamente che $v_3 = 2v_1$ e che $v_4 = 2v_2$ pertanto dei quattro vettori considerati solo due potrebbero essere linearmente indipendenti, v_1 e v_2, e questi lo sono in quanto non proporzionali. Quindi il sottospazio di $\mathbb{R}^8$ generato da v_1, v_2, v_3 e v_4 altro non é che lo spazio generato da v_1 e v_2 e quindi ha dimensione 2.