Capitolo 1

I numeri complessi

1.1 I numeri complessi

Introduciamo un simbolo i, detto unità immaginaria definito dalla condizione

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

Il simbolo i soddisfa l'equazione

$$x^2 + 1 = 0.$$

Un numero complesso è un'espressione del tipo:

$$z = a + ib, \ \ a, b \in \mathbb{R}.$$

I numeri a e b si chiamano parte reale e parte immaginaria del numero complesso z.

Indicheremo con $\operatorname{Re} z$ e con $\operatorname{Im} z$ la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso z.

Sia $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e un sottoinsieme di $\mathbb{C}$. Infatti i numeri reali si possono identificare con l'insieme

$$\{z = a + ib \in \mathbb{C} | \quad \operatorname{Im}(z) = b = 0\}.$$

I numeri complessi $z = a + ib$ tali che $\operatorname{Re} z = 0$ si dicono <u>immaginari puri</u>.

Due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$ sono *uguali* se $a = c$ e $b = d$.

Definiamo la <u>somma</u> e la <u>moltiplicazione</u> di due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$ con le solite regole del calcolo algebrico.

$$z = (a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d),$$

$$z \cdot w = (a+ib)(c+id) = ac+ibc+iad+i^2bd = ac-bd+i(bc+ad).$$

Dato un numero complesso $z = a + ib \neq 0$ esiste un numero complesso w, chiamato l'<u>inverso</u> di z tale che

$$z \cdot w = 1.$$

Denoteremo l'inverso di z con $\frac{1}{z}$.

Per trovare $\frac{1}{z}$ scriviamo $\frac{1}{z} = x + iy$. Allora

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1 = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay),$$

quindi

$$ax - by = 1, \;\; bx + ay = 0.$$

Abbiamo quindi un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite x, y. Usando, il fatto che $z \neq 0$ e quindi $a^2+b^2 \neq 0$ otteniamo:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \;\; , \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Equivalentemente

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Quindi il <u>quoziente</u> di due numeri complessi $w = c + id$ e $z = a + ib \neq 0$ è dato da:

$$\frac{w}{z} = w \cdot \frac{1}{z} = \frac{c + id}{a + ib} = \frac{(c + id)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + i\frac{ad - bc}{a^2 + b^2}.$$

Osservazione 1 Le operazioni di somma e prodotto dei numeri complessi, ristrette ai numeri reali (cioè ai numeri complessi con parte immaginaria uguale a zero), coincidono con le operazioni di somma e prodotto sui numeri reali. Per questo motivo si dice che il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è un *estensione* del campo dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Osservazione 2 Una differenza sostanziale tra il campo dei numeri reali e quello dei numeri complessi è quella dell'ordinamento.
Il campo dei numeri reali è un *campo ordinato* in quanto sussistono le seguenti proprietà:

1) se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$;

2) se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$;

3) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$;

4) se $x \leq y$, allora $x + z \leq y + z, \forall z \in \mathbb{R}$;

5) se $0 \leq x$ e $0 \leq y$, allora $0 \leq xy$.

Nel campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ non è possibile definire una struttura " $\leq$ " di campo ordinato.
Infatti dalle proprietà 4) e 5) seguirebbe che una relazione d'ordine $\leq$ soddisfa le seguenti proprietà:

- se un numero è positivo (negativo) il suo oppposto è negativo (positivo);

- il quadrato di un numero qualsiasi non è mai negativo.

D'altra parte $1^2 = 1$ e $i^2 = -1$. Quindi abbiamo due quadrati che sono l'uno l'opposto dell'altro. Nessuno dei due però può essere negativo (perchè sono quadrati) e questo è assurdo (perchè tra a e $-a$ uno dev'essere negativo se $a \neq 0$).

Il complesso coniugato di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero, che si indica con $\bar{z}$, dato da $\bar{z} = a - ib$.

Un numero complesso è reale se e solo se coincide col suo coniugato.

Inoltre valgono le seguenti proprietà (esercizio!):

- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$;
- $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$;
- $z\bar{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$;
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$;
- $\bar{\bar{z}} = z$; (l'operazione di coniugio è involutoria);
- $\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$;
- $\overline{(zw)} = \bar{z}\bar{w}, \forall z, w \in \mathbb{C}$;
- $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$.

Esempio 3 Vogliamo scrivere la forma algebrica, cioè la forma $z = a + ib$ del numero complesso

$$z = \frac{2+5i}{1-3i}.$$

Per fare questo moltiplichiamo numeratore e denominatore per $1+3i$ (il complesso coniugato di $1-3i$) e otteniamo:

$$z = \frac{2+5i}{1-3i} = \frac{(2+5i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{1}{10}(-13+11i).$$

Quindi $a = \mathrm{Re}(z) = -\frac{13}{10}$ e $b = \mathrm{Im}(z) = \frac{11}{10}$.

Esempio 4 Scriviamo in forma algebrica il numero complesso

$$i(5+6i)^2 - \frac{4}{1-i}.$$

Si ha:

$$i(25+60i+36i^2) - \frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -60-11i-2(1+i) = -62-13i$$

1.2 Rappresentazione geometrica e trigonometrica dei numeri complessi

Ricordiamo che i numeri reali si possono rappresentare come i punti di una retta una volta scelto un sistema di riferimento su di essa. Analogamente i numeri complessi si possono rappresentare con i punti di un piano, che prende il nome di *piano di Gauss*.

Fissato un sistema di coordinate ortogonali, associamo al numero complesso $z = a+ib$ il punto P del piano di coordinate (a, b).

In questo modo ai numeri reali vengono associati i punti dell'asse x, che viene detto *asse reale*, mentre gli immaginari puri sono rappresentati dai punti dell'asse y, detto *asse immaginario*.

L'unità immaginaria viene quindi rappresentata come la coppia $(0, 1)$.

Il punto che rappresenta il complesso coniugato $\bar{z}$ è il simmetrico rispetto all'asse x del punto che rappresenta z.

La distanza dall'origine O (che rappresenta lo zero 0 in $\mathbb{C}$) del punto P che rappresenta z si chiama <u>modulo</u> di z e si indica con $\rho = |z|$.

Per il Teorema di Pitagora

$$\rho = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Supponiamo $z \neq 0$ (e quindi $P \neq O$). Denotiamo con

$$\theta = \mathrm{Arg}(z)$$

la misura in radianti di una qualsiasi rotazione che sovrappone l'asse delle x al segmento orientato OP, presa con il segno positivo se avviene in senso antiorario, negativo nel caso opposto, si chiama *argomento* di z.

Osserviamo che l'argomento di z è definito a meno di multipli di 2π. Inoltre se $z = 0$, l'argomento è indeterminato.

Per assegnare un ben determinato argomento basta assegnare un intervallo di ampiezza 2π nel quale far variare l'angolo θ. Noi fisseremo l'intervallo $[0, 2\pi)$.

Dato un numero complesso $z = a+ib$ sussistono le relazioni:

$$a = \mathrm{Re}(z) = \rho\cos\theta,\;\; b = \mathrm{Im}(z) = \rho\sin\theta. \tag{1.1}$$

Quindi

$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}, \tag{1.2}$$

che prende il nome di <u>rappresentazione trigonometrica</u> del numero complesso z.

Per trovare la forma trigonometrica (1.2) di un numero complesso $z = a + ib$ si usano le (1.1). Prima di tutto si calcola il modulo di z dato da

$$\boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Inoltre

$$\boxed{\cos\theta = \tfrac{a}{\rho} \quad \sin\theta = \tfrac{b}{\rho}}.$$

e quindi possiamo trovare univocamente θ restringendosi all'intervallo $[0, 2\pi)$.

Esempio 5 Scriviamo la forma trigonometrica del numero complesso $z = 1 - i$. Si ha

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

mentre

$$\cos\theta = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ oppure } \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$\sin\theta = \frac{-1}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ oppure } \theta = \frac{7\pi}{4}$$

Segue che $\theta = \frac{7\pi}{4}$ e la forma trigonometrica di z è data da

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}).$$

Due numeri complessi

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \text{ e } z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

sono uguali se e solo se

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Dati

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

usando le relazioni trigonometriche

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

e

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1$$

si ottiene

$$\boxed{z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]}. \tag{1.3}$$

Proprietà *il prodotto di due numeri complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti*

In particolare per ogni intero non negativo n e per ogni numero complesso $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ si ottiene la cosidetta *formula di De Moivre*:

$$\boxed{z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]} \tag{1.4}$$

Inoltre è immediato verificare che:

$$|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\rho}, \quad \operatorname{Arg}(\frac{1}{z}) = -\operatorname{Arg}(z) = -\theta.$$

Equivalentemente
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta).$$
Dati
$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
con $z_2 \neq 0$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \tag{1.5}$$

Proprietà *il quoziente di due numeri complessi ha come modulo il quoziente dei moduli e come argomento la differenza degli argomenti.*

Esempio 6 Calcoliamo $z = (2-2i)^5$. Si ha:
$$z = (2-2i)^5 = 2^5(1-i)^5 = 32(1-i)^5.$$
Per l'esempio (5)
$$1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$$
Usando formula di formula di De Moivre (1.4) otteniamo:
$$(1-i)^5 = (\sqrt{2})^5(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})^5 = 4\sqrt{2}(\cos\frac{35\pi}{4}+i\sin\frac{35\pi}{4}).$$
Siccome $\frac{35\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 8\pi)$, otteniamo
$$(1-i)^5 = 4\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}) = 4\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4(-1+i).$$
Quindi $z = 128(-1+i)$.

Esempio 7 Cerchiamo i numeri complessi z che soddisfano l'equazione:

$$z^3 - |z|^2 = 0. \tag{1.6}$$

Primo metodo Scriviamo z in forma algebrica $z = x+iy$. L'equazione (1.6) diventa

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = x^2 + y^2,$$

la quale è equivalente al sistema (non lineare!)

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 & = & x^2 + y^2 \\ 3x^2y - y^3 & = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

nelle incognite reali x e y.
Dalla seconda equazione ricaviamo $y(3x^2 - y^2) = 0$ le cui soluzioni sono $y = 0$ e $y^2 = 3x^2$.
Sostituendo $y = 0$ nella prima equazione otteniamo

$$x^3 = x^2$$

le cui soluzioni sono $x = 0$ e $x = 1$. Quindi le coppie $(x = 0, y = 0)$ e $(x = 1, y = 0)$ sono soluzioni del sistema.
Sostituendo $y^2 = 3x^2$ nella prima equazione si ottiene

$$x^3 - 9x^3 = -8x^3 = x^2 + 3x^2 = 4x^2,$$

o, equivalentemente,

$$4x^2(2x+1) = 0,$$

le cui soluzioni sono $x = 0$ e $x = -\frac{1}{2}$. La soluzione $x = 0$ sostituita in $y^2 = 3x^2$ ci da $y = 0$ mentre $x = -\frac{1}{2}$ sostituita in $y^2 = 3x^2$ ci da $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Abbiamo trovato quindi due nuove soluzioni $(x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2})$

In definitiva abbiamo trovato le quattro coppie di soluzioni

$$(0,0), (1,0), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}),$$

e quindi le soluzioni dell'equazione (1.6) sono fornite dai quattro numeri complessi:

$$z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Secondo metodo Scriviamo z in forma trigonometrica

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Per la formula di De Moivre, l'equazione (1.6) è equivalente all'equazione

$$\rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = \rho^2,$$

la quale è a sua volta equivalente al sistema

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho^2 \\ \cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = 1 \end{cases} \tag{1.8}$$

nelle incognite $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$.

Le soluzioni della prima equazione sono $\rho = 0$ e $\rho = 1$. Mentre le soluzioni della seconda equazione sono $3\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ossia le tre soluzioni $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. In questo modo ritroviamo le soluzioni già trovate in precedenza e cioè:

$$z_1 = 0, z_2 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$
$$z_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esempio 8 Calcoliamo il quoziente $\frac{z_1}{z_2}$ dove $z_1 = i$ e $z_2 = 1 - i$ usando le loro forme trigonometriche. Il modulo e l'argomento di $z_1 = i$ sono $\rho_1 = 1$ e $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, mentre il modulo e l'argomento di z_2 sono dati da $\rho_2 = \sqrt{2}$ e $\theta_2 = \frac{7\pi}{4}$. Qunidi per la formula (1.5)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4}).$$

Osserviamo che

$$\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4} = 2\pi - \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

da cui

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}(-1+i)$$

1.3 Radici di un numero complesso

Vogliamo estendere il concetto di radice n-esima valido per i numeri reali positivi a tutti i numeri complessi.

Definizione 9 *Dati un numero naturale* $n \geq 1$ *e un numero complesso* w*, diremo che il numero complesso* z *è una radice* n*-esima di* w*, e scriveremo* $z = \sqrt[n]{w}$ *se* $z^n = w$*.*

Teorema 10 *Sia* $w \in \mathbb{C}$*,* $w \neq 0$*, e* n *un intero* ≥ 1*. Esistono esattamente* n *radici* n*-esime complesse* $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ *di* w*. Posto* $w = r(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$ *e* $z_k = \rho_k(cos\,\theta_k + i\,sin\,\theta_k)$ *abbiamo*

$$\rho_k = \sqrt[n]{r}$$
$$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Equivalentemente

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}(cos(\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}) + i\,sin(\tfrac{\varphi+2k\pi}{n})), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1} \tag{1.9}$$

Dimostrazione: I numeri z_k sono evidentemente radici n-esime di w, come risulta applicando la formula di De Moivre (1.4). Mostriamo che non ce ne sono altre. Infatti affinchè un numero complesso $R(\cos\psi + i\sin\psi)$ sia radice n-esima di w, dovrebbe risultare:

$$R^n = r \;\text{ e }\; n\psi = \varphi + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}$$

e cioè

$$R = \sqrt[n]{r} \;\text{ e }\; \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2h\pi}{n}.$$

Attribuendo a n i valori $0, 1, \ldots, n-1$ troviamo appunto i numeri z_k. Dando a h un qualsiasi altro valore $\tilde{h}$ diverso dai precedenti, questo può scriversi nella forma $\tilde{h} = k+mn, m \in \mathbb{Z}$ ($m \in \mathbb{Z}$ è il quoziente e k il resto della divisione di $\tilde{h}$ per n) per cui sarebbe

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2m\pi = \theta_k + 2m\pi$$

e ritroveremmo ancora gli stessi z_k precedenti. $\square$

Indichiamo con ϵ_k <u>le radici n-esime del numero 1</u>. Osserviamo che il modulo del numero 1 è uguale a 1 mentre l'argomento è $\theta = 0$.
Dalla formula (1.9) si ottiene allora:

$$\boxed{\epsilon_k = \cos\tfrac{2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1} \qquad (1.10)$$

Esempio 11 Calcoliamo le radici quarte di 1. In queto caso nella formula (1.10) $k = 0, 1, 2, 3$. Otteniamo quindi:

$$\epsilon_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$\epsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$
$$\epsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$
$$\epsilon_3 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Proposizione 12 *Le radici n-esime di un qualunque numero complesso z si possono ottenere moltiplicando una di esse per le n radici n-esime del numero* 1.

Dimostrazione: se z_1 è una radice n-esima di z ed ϵ_k una qualsiasi radice n-esima di 1 si ha:

$$(z_1\epsilon_k)^n = z_1^n(\epsilon_k)^n = z_1^n = z$$

e quindi $z_1\epsilon_k$ è una radice n-esima di z; inoltre, al variare di $\epsilon_k, k = 0, 1, \ldots, n-1$, i numeri $z_1\epsilon_k$ sono tutti distinti. $\square$

Esempio 13 Calcoliamo le radici terze di -27. Sicuramente ci sono tre radici complesse. Una di queste è -3. Per la Proposizione 12 le radici terze di -27 si possono ottenere moltiplicando -3 per le radici terze di 1.

Dalla formula (1.10) queste ultime sono date da:

$$\epsilon_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$\epsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\epsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quindi le radici terze di -27 sono date $z_0 = -3, z_1 = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Il Teorema 10 ci dice che un polinomio del tipo $z^n = z_0$ ammette n radici complesse. Vale un risultato più generale noto come il *teorema fondamentale dell'algebra* del quale riportiamo l'enunciato.

Abbiamo bisogno di una definizione

Definizione 14 *Se $P(z)$ è un polinomio in z di grado n e z_0 una sua radice, si dice che z_0 è di molteplicità k (k intero ≥ 1) se vale la formula*

$$P(z) = (z - z_0)^k Q(z),$$

dove Q è un polinomio tale che $Q(z_0) \neq 0$.

Esempio 15 *L'unità immaginaria i è radice di molteplicità due del polinomio $P(z) = z^3 - iz^2 + z - i = z^2(z-i) + (z-i) = (z-i)(z^2+1) = (z-i)^2(z+i)$*

Teorema 16 *(teorema fondamentale dell'algebra) Un'equazione polinomiale*

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0, \quad a_n \neq 0$$

con coefficienti complessi qualsiasi ammette precisamente n radici in $\mathbb{C}$, se ognuna di esse viene contata con la sua molteplicità.