Varietà Differenziabili (seconda parte)
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2021-2022
Docente: Andrea Loi

1. Siano S_1 e S_2 due sottovarietà di due varietà differenziabili M_1 e M_2 rispettivamente. Dimostrare che $S_1 \times S_2$ é una sottovarietà di $M_1 \times M_2$.

2. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - 6xy + y^2$. Trovare i $c \in \mathbb{R}$ tali che $F^{-1}(c)$ sia una sottovarietà di $\mathbb{R}^2$.

3. Dire se le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 1 \\ z = xy \end{cases}$$
costuiscono una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$.

4. Un polinomio $F(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$ é omogeneo di grado k se é combinazione lineare di monomi $x_0^{j_1} \dots x_0^{j_m}$ di grado k, $\sum_{j=1}^m i_j = k$. Dimostrare che
$$\sum_{i=0}^n x^i \frac{\partial F}{\partial x_i} = kF.$$
Dedurre che $F^{-1}(c)$, $c \neq 0$ é una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - 1$. Dimostrare, inoltre che per $c, d > 0$, $F^{-1}(c)$ e $F^{-1}(d)$ sono diffeomorfe e lo stesso vale per $c, d < 0$. (Suggerimento per la prima parte: usare l'uguaglianza $F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k F(x_0, \dots, x_n)$ valida per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$).

5. Dimostare che $SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\}$ é una sottovarietà di $M_n(\mathbb{C})$ di dimensione $2n^2 - 2$.

6. Sia $F : N \to M$ un'applicazione liscia tra varietà differenziabili. Dimostare che l'insieme PR_F dei punti regolari di F é un aperto di N.

7. Sia $F : N \to M$ un'applicazione liscia tra varietà differenziabili. Dimostrare che se F é chiusa allora VR_F (insieme dei punti regolari di F) é aperto in M.

8. Dimostrare che $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (t, t^2, t^3)$ é un embedding liscio e scrivere $F(\mathbb{R})$ come zero di funzioni.

9. Dimostrare che $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ é un embedding liscio e $F(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$.

10. Dimostare che la composizione di immersioni é un'immersione e che il prodotto cartesiano di due immersioni é un'immersione.

11. Dimostrare che se $F : N \to M$ é un'immersione e $Z \subset N$ é una sottovarietà di N allora $F_{|Z} : Z \to M$ é un'immersione.

12. Dimostrare che l'applicazione
$$F : S^2 \to \mathbb{R}^4, (x, y, z) \mapsto (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$
induce un embedding liscio da $\mathbb{R}P^2$ a $\mathbb{R}^4$.

13. Dimostrare che un'immersione iniettiva e propria é un embedding liscio. Mostrare che esistono embedding lisci che non sono applicazioni proprie. (Ricorda che un'applicazione continua $f : X \to Y$ tra spazi topologici è propria se $f^{-1}(K)$ è compatto in X per ogni compatto K di Y).