Esercizi sulla teoria degli anelli
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2019-2020
Docente: Andrea Loi

1. Sul gruppo abeliano $A = (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$ si consideri la moltiplicazione definita da
$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' + yy', xy' + x'y).$$
   (a) Dimostrare che in questo modo $(A, +, \cdot)$ risulta un anello unitario e $\mathbb{R} \times \{0\}$ è un suo sottoanello.
   (b) Caratterizzare gli elementi invertibili ed i divisori dello zero di A.
   (c) Dire se esistono elementi che non sono né divisori dello zero né invertibili.
   (d) Trovare gli ideali massimali di A.

2. Sia A un anello commutativo unitario e I e J ideali di A. Definiamo
$$IJ = \{i_1 j_1 + \cdots + i_n j_n \mid n \in \mathbb{N},\ i_k \in I, j_k \in J,\ k = 1, \ldots, n\}.$$
   (a) Provare che IJ è un ideale di A contenuto nell'ideale $I \cap J$ e mostrare con un esempio che $IJ \neq I \cap J$.
   (b) Provare che se $A = I + J$ allora $IJ = I \cap J$.
   (c) Provare che l'affermazione in (b) non è vera se A non è un anello unitario.
   (d) se I e J sono due ideali massimali distinti, allora $IJ = I \cap J$;
   (e) se I e J sono ideali principali, $I = (a)$ e $J = (b)$, allora $IJ = (ab)$.
   (f) descrivere IJ e $I \cap J$ in $A = \mathbb{Z}$ e dedurre quando $IJ = I \cap J$.

3. Sia $A = \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3\}$. Provare che A è un sottocampo di $M_2(\mathbb{Z}_3)$. Dimostrare inoltre che $(A^*, \cdot)$ è un gruppo ciclico, determinare l'ordine di A^* e un suo generatore.

4. Sia $A = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Provare che A è un sottocampo di $M_2(\mathbb{R})$ isomorfo a $\mathbb{C}$.

5. Sia A un anello unitario e I un ideale bilatero di A. Dimostrare che l'insieme $U_I = \{x \in U(A) \mid x - 1 \in I\}$ è un sottogruppo normale di $U(A)$. s

6. Sia $A = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

(a) Provare che A è un anello commutativo unitario, ma non è un dominio.

(b) Determinare l'ideale $N(A)$ degli elementi nilpotenti di A.

(c) Mostrare che ogni ideale proprio di A è contenuto in $N(A)$ e dedurre che A è un anello locale.

(d) Determinare tutti gli ideali di A.

7. Nell'anello $M_2(\mathbb{Z}_8)$, sia $A = \{\begin{pmatrix} a & 5b \\ 4b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_8\}$.

   (a) Provare che A è un sottoanello commutativo di $M_2(\mathbb{Z}_8)$.

   (b) Dire se A è un dominio.

8. Sia p un primo e $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid n,\ (m, n) = 1\}$.

   (a) Provare che $\mathbb{Z}_{(p)}$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.

   (b) Determinare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{(p)}$.

   (c) Determinare gli ideali di $\mathbb{Z}_{(p)}$.

   (d) Determinare gli ideali primi e massimali di $\mathbb{Z}_{(p)}$.

   (e) Provare che $\mathbb{Z}_{(p)}$ è un anello locale.

9. Dimostrare che:

   (a) ogni campo è un anello locale senza elementi nilpotenti non nulli;

   (b) se $\mathbb{Z}_m$ è locale e non ha elementi nilpotenti non nulli allora $\mathbb{Z}_m$ è un campo;

   (c) dare un esempio di anello locale senza elementi nilpotenti non nulli che non sia un campo.

10. Un anello commutativo unitario si dice *regolare* se per ogni $x \in A$ esiste $y \in A$ tale che $x = yx^2$. Dimostrare che:

    (a) ogni campo è un anello regolare e se A è un dominio regolare allora A è un campo;

    (b) l'anello quoziente di un anello regolare è regolare;

    (c) in un anello regolare ogni ideale primo e massimale;

    (d) in un anello regolare ogni ideale principale è generato da un idempotente;

    (e) se I e J sono due ideali di un anello regolare allora $IJ = I \cap J$;

    (f) per ogni insieme non vuoto S e per ogni campo K, l'anello K^S è regolare.

11. Sia G un gruppo abeliano ed $\mathrm{End}(G)$ l'insieme degli endomorfismi di G. Siano $f, g \in \mathrm{End}(G)$ e si definisca $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, per $x \in G$. Sia $\circ$ l'usuale composizione di funzioni, cioè $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ per $x \in G$.

    (a) Si dimostri che $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ è un anello unitario.

    (b) Sia A un anello unitario. Si dimostri che A si può identificare con un sottoanello di $\mathrm{End}(G)$ per qualche gruppo abeliano G.

12. Sia G un gruppo abeliano e $f \in A = \mathrm{End}(G)$.

    (a) Dimostrare che se f è suriettivo, allora f non è divisore destro dello zero in A.

    (b) Dimostrare che se f è iniettivo, allora f non è divisore sinistro dello zero in A.

    (c) Trovare un anello dove esistono divisori sinistri dello zero che non sono divisori destri dello zero (suggerimento: considerare l'anello $\mathrm{End}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})$).

13. Sia S un insieme. Nell'insieme $\mathcal{P}(S)$ definiamo l'operazione Δ, chiamata *differenza simmetrica*,

$$X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y),$$

    per ogni coppia di sottoinsiemi di S.

    (a) Provare che la struttura algebrica $(\mathcal{P}(S), \Delta, \cap)$ è un anello commutativo unitario e che ogni sottoinsieme proprio di S è un divisore dello zero di A.

    (b) Sia $Y \in \mathcal{P}(S)$: provare che l'applicazione $\varphi : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$, definita da $\varphi(X) = X \setminus Y$ è un omomorfismo di anelli (non unitario) e determinare $\ker \varphi$ e $Im\varphi$.

    (c) Sia $Y \in \mathcal{P}(S)$: determinare l'ideale (Y).

    (d) Se S è finito, provare che ogni ideale di $\mathcal{P}(S)$ è principale.

    (e) Determinare la caratteristica di $\mathcal{P}(S)$.

14. Sia $A = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.

    (a) Dimostrare che A è un sottoanello di $M_2(\mathbb{C})$.

    (b) Sia $q = a + bi + cj + dk$ un elemento del corpo dei quaternioni $\mathbb{H}$. Si dimostri che l'applicazione $\varphi : \mathbb{H} \to A$ definita da

$$\varphi(q) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \ \alpha = a + ib, \ \beta = c + id \in \mathbb{C}$$

    è un isomorfismo di anelli e pertanto di corpi.

(c) Si verifichi che

$$\det(\varphi(q)) = \|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Si deduca che $\|q_1 q_2\| = \|q_1\|\|q_2\|$, per ogni $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$.

(d) Si verifichi che l'insieme dei quaternioni di norma 1 è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo $(\mathbb{H}^*, \cdot)$.

15. Determinare l'insieme degli endomorfismi unitari dei seguenti anelli: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.

16. Sia $f : A_1 \to A_2$ un omomorfismo di anelli unitari.

    (a) Provare che $f(U(A_1)) \subseteq U(A_2)$.

    (b) Considerando l'omomorfismo canonico $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, mostrare che in (a) non vale l'uguaglianza se $n > 6$.

17. Sia A l'anello $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$

    (a) Trovare la caratteristica di A.

    (b) Descrivere gli ideali (primi, massimali e principali) di A.

    (c) Determinare a quale degli anelli $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$ e $\mathbb{Z}_{60}$ è isomorfo l'anello A.

    (d) Descrivere quali sono gli elementi invertibili e gli elementi nilpotenti di A.

18. Sia $\mathbb{K}$ un campo e $A = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ (n fattori). Trovare gli ideali primi e massimali di A e dire quanti sono.

    Soluzione: Gli ideali di A si ottengono come prodotto degli ideali dei singoli fattori. Essendo i singoli fattori campi i loro ideali sono solo $\{0\}$ e $\mathbb{K}$. Il quoziente di A per uno di questi ideali è un dominio se e solo se è isomorfo a $\mathbb{K}$. Quindi gli ideali primi sono in numero di n e si ottengono:

    $$\mathbb{K} \times \{0\} \times \cdots \{0\}, \{0\} \times \mathbb{K} \times \cdots \{0\}, \ldots, \{0\} \times \{0\} \times \cdots \mathbb{K}$$

    Questi (in tutto n) sono anche tutti gli ideali massimali e primi.

19. Nell'anello $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si considerino gli ideali $I = (2)$ e $J = (3)$. Dire se gli anelli quoziente A/I e A/J sono campi.

20. Nell'anello $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ sia $I = (5)$ e si consideri l'anello quoziente A/I.

    (a) Provare che se $a \equiv 0 \mod 5$, allora l'elemento $a + b\sqrt{5} + I$ è nilpotente.

    (b) Provare che se $a \not\equiv 0 \mod 5$, allora l'elemento $a + b\sqrt{5} + I$ è invertibile.

    (c) Determinare gli ideali di A/I.

21. Sia $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Per $\alpha = x + \sqrt{5}y \in A$ definiamo la norma di α come $N(\alpha) = x^2 - 5y^2$. Dimostrare che $M = \{\alpha \in A \mid N(\alpha) \text{ pari}\}$ è un ideale massimale di A.