PROGRAMMA DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2019-2020, primo semestre
Docente: Andrea Loi

1. Geometria differenziale nello spazio euclideo.

1.1 Funzioni lisce e reali analitiche. Richiami di funzioni lisce e reali analitiche su aperti di $\mathbb{R}^n$; funzioni C^k ma non C^{k+1}; sviluppi di Taylor; esempi di funzioni lisce che non sono reali analitiche.

1.2 Diffeomorfismi. Diffeomorfismi tra aperti di $\mathbb{R}^n$ (applicazioni lisce, bigettive con inversa liscia); esistono funzioni bigettive e lisce che non sono diffeomorfismi; gli intervalli aperti limitati o illimitati di $\mathbb{R}$ sono diffeomorfi; il prodotto di n intervalli aperti di $\mathbb{R}$ risulta diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$; una palla aperta di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$ sono diffeomorfi; sviluppo di Taylor con resto intorno ad un punto p di una funzione liscia definita su un aperto stelllato di $\mathbb{R}^n$.

1.3 Vettori tangenti. Vettori tangenti in un punto $p \in \mathbb{R}^n$; lo spazio $T_p\mathbb{R}^n$ come insieme dei vettori colonna; derivata direzionale di una funzione liscia rispetto ad un vettore $v \in T_p\mathbb{R}^n$; il germe di una fiunzione in un punto p; l'insieme dei germi di funzioni $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ definite in un intorno di un punto $p \in \mathbb{R}^n$ formano un algebra su $\mathbb{R}$; derivazioni puntuali in un punto $p \in \mathbb{R}^n$ (applicazioni $\mathbb{R}$-lineari $D : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ che soddisfano la regola di Leibniz $D(fg) = (Df)g(p) + f(p)Dg$); la derivata direzionale $D_v : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ rispetto ad un vettore $v \in T_p\mathbb{R}^n$ definisce una derivazione puntuale in un punto p; l'insieme $Der_p(\mathbb{R}^n)$ delle derivazioni puntuali risulta uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; l'applicazione $\Phi : T_p\mathbb{R}^n \to Der_p(\mathbb{R}^n), v \mapsto D_v$ è un isomorfismo tra spazi vettoriali.

1.4 Campi di vettori. Campi di vettori su un aperto U di $\mathbb{R}^n$ (funzione che assegna ad un punto $p \in U$ un vettore $X_p \in T_p\mathbb{R}^n$); l'insieme dei campi di vettori lisci $\chi(U)$ su un aperto U di $\mathbb{R}^n$ formano un $C^\infty(U)$-modulo; derivata di una funzione liscia f rispetto ad un campo di vettori liscio X; campi di vettori lisci su un aperto U di $\mathbb{R}^n$ come derivazioni dell'algebra $C^\infty(U)$.

1.5 Algebra esterna (o di Grassmann) di uno spazio vettoriale. Spazio duale V^* di uno spazio vettoriale finito dimensionale V; base dello spazio duale; lo spazio vettoriale $L_k(V)$ dei k-tensori su uno spazio vettoriale come applicazioni k-lineari dal prodotto cartesiano di V per se stesso k volte; esempi: il prodotto scalare e il determinante; tensori simmetrici e alternanti; lo spazio vettoriale $\Lambda^k(V) = A_k(V)$ dei k-tensori alternanti su uno spazio vettoriale V; azione del gruppo simmetrico S_k su $L_k(V)$; l'operatore simmetrizzante S e alternatizzante A; il prodotto tensoriale; il prodotto esterno (wedge-product); il prodotto esterno risulta bilineare, anticommutativo e associativo; il prodotto esterno di elementi di V^*; base e dimensione di $\Lambda^k(V)$; algebra esterna (o di Grassmann) $\Lambda^*(V)$ su uno spazio vettoriale finito dimensionale V (algebra graduata anticommutativa).

1.6 Frome differenziali su aperti di $\mathbb{R}^n$. 1-forme differenziali lisce il differenziale di una funzione; k-forme differenziali; prodotto esterno tra forme differenziali (anticommutativo e associativo); forme differenziali come campi di tensori covarianti; la derivata esterna e la sua caratterizzazione come antiderivazione su $\Omega^*(U)$ di grado 1 il cui quadrato si annulla; un cenno sulle forme chiuse e esatte su aperti di $\mathbb{R}^n$; forme chiuse e esatte su aperti di $\mathbb{R}^3$ e legami con la divergenza, il rotore e il gradiente.

2. Varietà differenziabili.

2.1 Varietà topologiche Richiami sulle varietà topologiche; dimensione di una varietà topologica e teorema dell'invarianza della dimensione (solo enunciato); esempi e non esempi; carte compatibili; atlante differenziabile su una varietà topologica; osservazione che l'essere compatibilie non è una proprietà transitiva; se due carte sono compatibili con tutte le carte di un atlante differenziabile allora sono compatibili tra loro; atlanti massimali (strutture differenziabili); ogni atlante è contenuto in un unico atlante massimale; varietà differnziabili (varietà topologica insieme ad un atlante differenziabile); esempi di varietà: $\mathbb{R}^n$, aperti di varietà; varietà di dimensione zero; grafici di funzioni; curve e superfici in $\mathbb{R}^3$; il gruppo lineare; il cerchio unitario S^1; la sfera S^n; il prodotto di varietà differenziabili.

2.2 Funzioni su e tra varietà Funzioni lisce a valori in $\mathbb{R}$ su una varietà; funzione lisce tra varietà; composizoine di applicazioni lisce tra varietà; esempi; diffeomorfismi tra varietà; cenni sull'esistenza e unicità delle strutture differenziabili su una varietà topologica; esempi di strutture differenziabili diverse su $\mathbb{R}$; le funzioni coordinate sono diffeomorfismi; ogni diffeomorfismo da un aperto di una varietà in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione coordinata; esempi di applicazioni lisce: le proiezioni; applicazioni sul prodotto di varietà; gruppi di Lie e qualche esempio; derivate parziali; la matrice Jacobiana per applicsaizoni lisxce tra varietà; Jacobaino dell'applicaiozione di transizione; il teorema delle funzione inversa per applicazioni lisce tra varietà; quozienti: il proiettivo reale e la Grassmanniana come varietá differenziabili.

2.3 Lo spazio tangente Lo spazio tangente T_pM ad una varietà M in un suo punto p come insieme delle derivazioni puntuali $Der_p(C_p^\infty(M))$ in p dei germi di funzioni lisce intorno a p; $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, $i = 1, \dots, n$ come elementi dello spazio tangente in p ad una varietà differenzibile M di dimensione n; il differenziale di un'applicazione liscia; esempi: la regola della catena per applicazioni tra varietà; definizione di categorie e funtori; proprietà funtoriali del differenziale; il teorema di invarianza della dimensione nel caso liscio: espressione locale per il differenziale; curva su una varietà e vettore tangente ad una curva in un suo punto; spazio tangente ad una varietà in un suo punto come insieme dei vettori tangenti a curve lisce sulla varietà pasanti per p; calcolo del differenziale di un'applicazione liscia tra varietà in termini di curve; esempi: il differenziale della traslazione a sinistra in $GL_n(\mathbb{R})$: differenziale della moltiplicazione e dell'inversione in un gruppo di Lie.

2.3 Immersioni, summerisoni e sottovarietà. Inclusione canonica e proiezione canonica; rango in un punto di un'applicazione liscia tra varietà differenziabili; punti regolari e punti critici, valori regolari e valori critici; esempi; massimi e minimi locali e punti ciritici; carte adattate e sottovarietà; il teorema della preimmagine di un valore regolare; esempi: la sfera, i grafici, ipersuperfici dello spazio proiettivo reale, il gruppo lineare speciale; richiami di analisi: il teorema della funzione implicita e il teorema del rango costante; il teorema del rango costante per applicazioni lisce tra varietà differenziabili; preimmagine di un'applicazione di rango costante; dimostrazione che il gruppo ortogonale è una sottovarietà del gruppo lineare; dimostrazione che avere rango massimale in un punto è una condizione aperta; il teorema di immersione e di summersione; una summersione è un'applicazione aperta; ogni summersione da una varietà campatta ad una varietà connessa è suriettiva; il teorema della preimmagine si deduce anche dal teorema della preimmagine di un'applicazione di rango costante; immagine di applicazioni lisce: esistono immersioni iniettive la cui immagine non è una sottovarietà (figura a otto e curva di pendenza irrazionale sul toro); sottovarietà immerse; embedding e sottovarietà; teorema di Whitney (senza dimostrazione); l'inclusione di una sottovarietà è un embedding; applicazioni lisce la cui immagine è contenuta in una (sotto)varietà; la motiplicazione in $SL_n(\mathbb{R})$ è liscia; legami con il corso di curve e superfici.

2.4 Il fibrato tangente e i campi di vettori Topologia e struttura differenziabile sul fibrato tangente ad una varietà differenziabile; il fibrato tangente come fibrato vettoriale; Jacobiano del cambio di carte del fibrato tangente; funzioni a campana su una varietà ed estensioni di funzioni lisce; campi di vettori su un varietà; criteri affinchè un campo di vettori su una varietà sia liscio come sezione del fibrato tangente o come opertore sulle funzioni lisce; campi di vettori come derivazioni dell'algebra delle funzioni lisce; estensioni di campi di vettori; il commutaore (o bracket) di Lie; algebre di Lie; derivazioni di un algebra di Lie; pushforward di un campo di vettori tramite un diffeomorfismo; campi di vettori F-related tramite un'applicazione liscia F tra varietà; campi di vettori F-related e commutatore di Lie.

3. Gruppi e algebre di Lie.

3.1 Gruppi di Lie Traslazioni a sinistra e a destra; sottogruppi di Lie (sottogruppi algebrici, sottovarietà immerse con moltiplicazione e inversione lisce); se H è un sottogruppo algebrico e una sottovarietà di un gruppo di Lie G allora H è un sottogruppo di Lie di G; omomorfismi e isomorfismi tra gruppi di Lie; esempi di sottogruppi di Lie non embedded; l'esponenziale di un matrice e le sue principali proprietà; la traccia di un matrice e il differenziale del determinante; esempi di gruppi di Lie e del loro spazio tangente: il gruppo ortogonale $O(n)$ è un sottogruppo di Lie compatto di $GL_n(\mathbb{R})$ di dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$ e $T_I O(n)$ sono le matrici antisimmetriche di $M_n(\mathbb{R})$; il gruppo ortogonale speciale $SO(n)$ è un sottogruppo di Lie compatto e connesso di $O(n)$ ($SO(n)$ è una componente connessa di $O(n)$); il gruppo lineare speciale $SL_n(\mathbb{R})$ è un sottogruppo di Lie connesso di $GL_n(\mathbb{R})$ e $T_I SL_n(\mathbb{R})$ sono le matrici con traccia nulla di $M_n(\mathbb{R})$; il gruppo lineare complesso $GL_n(\mathbb{C})$; il gruppo unitario $U(n)$ è un sottogruppo di Lie compatto e connesso di $GL_n(\mathbb{C})$ di dimensione n^2 e $T_I U(n)$ sono le matrici antihermitiane di $M_n(\mathbb{C})$; il gruppo unitario speciale $SU(n)$ è un sottogruppo di Lie compatto e connesso di $U(n)$ di dimensione $n^2 - 1$ e $T_I SU(n)$ sono le matrici antihermitiane di $M_n(\mathbb{C})$ di traccia nulla; il gruppo lineare speciale complesso $SL_n(\mathbb{C})$ è un sottogruppo di Lie connesso di $GL_n(\mathbb{C})$ e $T_I SL_n(\mathbb{C})$ sono le matrici con traccia nulla di $M_n(\mathbb{C})$; esiste un diffeomorfismo tra $GL_n(\mathbb{R})$ e $SL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$; se n è pari allora $GL_n(\mathbb{R})$ e $SL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ non sono isomorfi come gruppi di Lie; se n è dispari allora $GL_n(\mathbb{R})$ e $SL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sono isomorfi come gruppi di Lie.

3.2 Algebra di Lie Campi di vettori invarianti a sinistra su un gruppo di Lie (campi di vettori L_g-related a se stessi per ogni $g \in G$); esiste un isomorfismo tra lo spazio tangente ad un gruppoi di Lie nell'identità e i campi di vettori invarianti a sinistra di G; definizione di algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di un gruppo di Lie; algebra di Lie di $\mathbb{R}^n$, del toro e di $GL_n(\mathbb{R})$; pushforward di un campo di vettori invariante a sinistra tramite un omomorfismo di gruppi di Lie; un omomorfismo di gruppi di Lie induce un omomorfismo sulle corrispondenti algebre di Lie; algebra di Lie dei gruppi di matrici; il Teorema di Ado (enunciato); l'esponenziale non è in generale suriettivo; dato un gruppo di Lie G e la sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$ allora esiste una corrispondenza biunivoca tra le sottoalgebre di Lie di $\mathfrak{g}$ e i sottogruppi di Lie connessi di G (senza dimostrazione).

Testi di riferimento

Lorin, W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer Verlag.
J. Lee, *Introduction to Manifolds*, Springer Verlag.
W. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press.

L. Conlon, *Differentiable Manifolds*, Nodern Birkhauser Classics.

I. Madsen, J. Tronehave, *From calculus to cohomology* , Cambridge University Press.

M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company.

F.W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie grous*, Springer Verlag.