

Esercizi di riepilogo
Corso di Laurea in Informatica A.A. 2003-2004
Docente: Andrea Loi

1. Trovare le radici complesse del polinomio:

$$z^4 + i$$

e dire come sono disposte nel piano.

2. VERO O FALSO (giustificando la risposta).

- Un polinomio di quarto grado a coefficienti complessi ammette sempre 4 radici.
- Un polinomio di quarto grado a coefficienti complessi ammette sempre 4 radici distinte.
- Esistono polinomi a coefficienti reali che non ammettono radici reali.

3. Calcolare il prodotto scalare e vettoriale tra i vettori $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Verificare inoltre la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

4. Siano $\mathbf{v} = (1, 4, 0)$ e $\mathbf{w} = (1, -2, -1)$. Calcolare l'area del parallelogramma di vertici $O, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w} + \mathbf{v}$. Tale parallelogramma è un rombo, un rettangolo e/o un quadrato?

5. Sia \mathbf{v} un vettore di \mathbb{R}^n e λ un numero reale. Dimostrare che $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\|$.

6. VERO O FALSO (giustificando la risposta).

- Per tutti i vettori $\|\mathbf{v}\|$ e $\|\mathbf{w}\|$ in \mathbb{R}^n

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|.$$

- Esistono vettori $\|\mathbf{v}\|$ e $\|\mathbf{w}\|$ in \mathbb{R}^n

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|.$$

6. VERO O FALSO (giustificando la risposta).

- Se il prodotto di due matrici è uguale alla matrice nulla allora una delle due matrici è la matrice nulla.
- Una matrice $n \times n$ è invertibile se e solo se ha rango n .
- Se A e B sono due matrici invertibili $n \times n$ allora il loro prodotto è una matrice invertibile $n \times n$.
- Esistono due matrici A e B invertibili $n \times n$ tale che il loro prodotto non è invertibile.
- Per ogni matrice A $n \times n$ e $k \in \mathbb{R}$ allora $\det(kA) = k \det A$.
- Esiste una matrice $A \in M_{n,n}$ e $k \in \mathbb{R}$ tale che $\det(kA) = k \det A$.

7. Per quali valori del parametro λ la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile.

8. Trovare l'inversa (se possibile) della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

9. Trovare i valori del parametro reale λ in modo tale che il seguente sistema nelle incognite x, y, z abbia: (a) una soluzione unica, (b) nessuna soluzione, (c) un numero infinito di soluzioni:

$$\begin{cases} x - y + z = \lambda \\ 2x + y - z = \lambda + 1 \\ 5x + y - z = \lambda \end{cases}$$

10. VERO O FALSO (giustificare le risposte)

- Un sistema omogeneo è sempre compatibile
- Un sistema omogeneo di 3 equazioni in 9 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono da almeno 6 parametri.
- Un sistema omogeneo di 3 equazioni in 9 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono esattamente da 6 parametri.
- Se $A \in M_{m,n}$ con $m < n$, allora il sistema omogeneo $Ax = 0$ ammette soluzioni non banali.

11. VERO O FALSO (giustificare):

- 5 vettori in \mathbb{R}^6 sono sempre linearmente dipendenti;
- 7 vettori in \mathbb{R}^5 sono linearmente dipendenti;
- 6 vettori in \mathbb{R}^6 sono sempre linearmente indipendenti.

12. Dimostrare che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

è una base \mathcal{B}' di \mathbb{R}^3 . Scrivere inoltre le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base \mathcal{B}' . Verificare il risultato usando la matrice $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ del cambiamento di dalla base canonica \mathcal{B} alla base \mathcal{B}' . Se $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono le coordinate di un vettore rispetto alla base \mathcal{B}' quali sono le sue coordinate rispetto alla base \mathcal{B} ?

13. Scrivere la matrice A di rotazione di $\frac{\pi}{4}$ in senso antiorario intorno all'origine.
Quale è l'immagine del vettore $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ tramite la rotazione A ?
14. Scrivere la matrice A di rotazione di $\frac{\pi}{3}$ in senso antiorario intorno all'origine.
Quale è l'immagine del vettore $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ tramite la rotazione A ?
15. VERO O FALSO (giustificare le risposte)
- Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1;
 - Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 oppure -1 ;
 - Esistono matrici ortogonali che non rappresentano una rotazione.