Dal baricentro euclideo ai teoremi di rigidità

Sunto: Il seminario parte dall'osservazione che il baricentro euclideo soddisfa una proprietà di contrazione, cioè, che si può maggiorare la distanza tra i baricentri di due misure μ e μ' in funzione della "distanza" tra μ e μ'. Quindi mostreremo come la nozione di baricentro (e la proprietà di contrazione) si generalizzano (per esempio) agli spazi simmetrici.
Su uno spazio localmente simmetrico (X, g_0) (di curvatura negativa o nulla), consideriamo un' altra metrica riemanniana qualunque g. Usando una famiglia di misure $x \mapsto \mu_x$ (al variare di x in X), di densità $e^{-c\, d_g(x,\cdot)}$, si costruisce la mappa $F : x \mapsto$ baricentro di μ_x di X in se stesso. Usando la proprietà di contrazione del baricentro, si maggiora la distanza tra i punti $F(x)$ e $F(x')$ in funzione della distanza tra x e x'.
Si ottiene cosí una disuguaglianza del tipo $|\det(d_y F)| \leq \left(\frac{\mathrm{Ent}(g)}{\mathrm{Ent}(g_0)}\right)^n$, dove $Ent(g)$ è l'entropia della metrica g (quando ci si muove seguendo il sistema dinamico dato dalle geodetiche della metrica g, l'entropia misura, per una posizione iniziale conosciuta con precisione piccola ε, come si è deteriorata questa precisione all'istante t).
Integrando questa disuguaglianza, si dimostra che, tra tutte le metriche che hanno lo stesso volume, è quella localmente simmetrica che corrisponde al chaos (cioè all'entropia) minimale. Se la curvatura di g è maggiore della curvatura di g_0, questo implica che $\mathrm{Volume}(g) \geq \mathrm{Volume}(g_0)$ e questo fornisce una risposta positiva ad una congettura di M. Gromov sul volume minimale di una varietà. Inoltre l'uguaglianza $\mathrm{Volume}(g) = \mathrm{Volume}(g_0)$ implica che F è un isometria di (X, g) su (X, g_0). Questo fornisce una dimostrazione costruttiva del teorema di rigidità di Mostow che si generalizza anche alle varietà di Einstein di dimensione 4. Infine, dal momento che l'entropia e il volume sono invarianti del sistema dinamico associato alle geodetiche si può dimostrare che se una varietà (Y, g) ha un sistema dimamico coniugato a quello di (X, g_0), allora (Y, g) è isometrica a (X, g_0).