26/01/2010

Geometria 3 – Corso di laurea in Matematica

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

N.B. La risposta ad ogni singolo esercizio deve essere riportata nello spazio sottostante l'esercizio stesso (gli esercizi svolti in altri fogli non verranno presi in considerazione).
N.B.2 Gli esercizi senza nome e cognome hanno valore nullo.

Esercizio 1 Descrivere il concetto di connessione di uno spazio topologico avendo cura di enunciare e dimostrare almeno un risultato importante al riguardo.
Risposta:

Esercizio 2 Sia X un insieme non vuoto. Un *operatore di interno* su X è un'applicazione $\mathcal{I} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tale che:

- $\mathcal{I}(X) = X$;
- $S \supset \mathcal{I}(S), \ \forall S \in \mathcal{P}(X)$;
- $\mathcal{I}(\mathcal{I}(S)) = \mathcal{I}(S), \ \forall S \in \mathcal{P}(X)$;
- $\mathcal{I}(A \cap B) = \mathcal{I}(A) \cap \mathcal{I}(B), \ \forall A, B \in \mathcal{P}(X)$.

Dimostrare che se $\mathcal{I}$ è un operatore di interno su X e se $\mathcal{T}$ denota la famiglia di tutti i sottoinsiemi A di X tali che $\mathcal{I}(A) = A$, allora $\mathcal{T}$ è una topologia su X. Dimostrare inoltre che per ogni sottoinsieme S di X si ha:

$$\mathcal{I}(S) = \mathrm{Int}(S)$$

nella topologia $\mathcal{T}$. (Suggerimento: è utile dimostrare che se $A \subset B$ allora $\mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(B)$).
Risposta: