

Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica



NUMERI 2-PALINVERTIBILI

TESI A CURA DI: **Calamia Nicola**

RELATORE: **Prof. Loi Andrea**

Anno Accademico
2017-2018

- Come scriviamo i numeri?
- Cosa significa invertire le cifre e quali conseguenze ha?

1

Come scriviamo i numeri?

Esempio

Se abbiamo centoventitre oggetti, come li rappresentiamo?

1

Come scriviamo i numeri?

Quindi se $a \in \mathbb{N}$ possiamo scriverlo in base 10 come:

$$\begin{aligned} a &= a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \dots + a_1 \times 10^0 = \\ &= (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)_{10} \\ &= a_n a_{n-1} \cdots a_1 \end{aligned}$$

dove:

$$a_n \neq 0 \quad \text{e} \quad a_i < 10, \quad \text{per ogni } i$$

1

Come scriviamo i numeri?

In generale allora, se $a \in \mathbb{N}$ possiamo scriverlo in una certa base b come:

$$\begin{aligned} a &= a_n \times b^{n-1} + a_{n-1} \times b^{n-2} + \dots + a_1 \times b^0 = \\ &= (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)_b \\ &= a_n a_{n-1} \cdots a_1 \end{aligned}$$

dove:

$$a_n \neq 0 \quad \text{e} \quad a_i < b, \quad \text{per ogni } i$$

1

Cosa significa invertire le cifre?

1

Cosa significa invertire le cifre?

FUNZIONE DI INVERSIONE CIFRARIA

Sia $a \in \mathbb{N}$ e sia b una base per la rappresentazione di a . Consideriamo a di n cifre:

$$a = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)_b , \quad \text{con } a_n, a_1 \neq 0.$$

Definiamo la funzione «inverso cifrario», “ i_b ”, come

$$i_b : \mathbb{N} \xrightarrow{\hspace{10cm}} \mathbb{N}$$

$$a = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)_b \longleftrightarrow i(a) = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)_b$$

ALCUNE CONSEGUENZE DELL'INVERSIONE

- L'inversione cifraria cambia il valore del numero
- L'inversione cifraria è una proprietà intrinseca della notazione posizionale
- I numeri palindromi sono invarianti per inversione cifraria

Ovvero quei numeri tali che: $a = i_b(a)$

NOTA: i numeri con una sola cifra sono considerati palindromi

1

Cosa significa invertire le cifre?

PALINDROMI: TANTE CURIOSITÀ, POCHE SOLUZIONI.

- Ogni numero come somma di palindromi in base 10

2015: Si è dimostrato che ogni numero naturale può essere espresso come somma di non più di 49 palindromi.

2017: Si è affinato il risultato dimostrando che ogni numero $n \in \mathbb{N}$ può essere espresso come somma di, al più, 3 soli palindromi per $n > 5$.

PROBLEMA APERTO: E in base b ?

1

Cosa significa invertire le cifre?

PALINDROMI: TANTE CURIOSITÀ, POCHE SOLUZIONI.

- Quadrati Palindromi

Numeri palindromi $a \in \mathbb{N}$ in base b i cui quadrati siano ancora dei numeri palindromi, cioè quando

$$a = i_b(a) \quad \wedge \quad a^2 = i_b(a^2)$$

Numeri qualsiasi i cui quadrati siano palindromi

$$a^2 = i_b(a^2)$$

1

Cosa significa invertire le cifre?

PALINDROMI: TANTE CURIOSITÀ, POCHE SOLUZIONI.

- Potenze h -esime di Palindromi

Numeri qualsiasi le cui potenze h -esime siano palindromi

$$a^h = i_b(a^h)$$

PROBLEMA APERTO: Classificare tali numeri.

Esempi: $26^2 = 676$

$$2201^3 = 10662526601$$

Una curiosa proprietà:

2

Una curiosa proprietà

Notiamo subito che:

2

Una curiosa proprietà

In termini matematici

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ x \\ 1 \ 2 \\ \hline 2 \ 4 \\ 1 \ 2 \ + \\ \hline 1 \ 4 \ 4 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 2 \ 1 \ x \\ 2 \ 1 \\ \hline 4 \ 2 \\ 2 \ 1 \ + \\ \hline 4 \ 4 \ 1 \end{array}$$

2

Una curiosa proprietà

Possiamo osservare che

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ x \\ 1 \ 2 \\ \hline 2 \ 4 \\ 1 \ 2 \ + \\ \hline 1 \ 4 \ 4 \end{array} \qquad \qquad \qquad \begin{array}{r} 2 \ 1 \ x \\ 2 \ 1 \\ \hline 4 \ 2 \\ 2 \ 1 \ + \\ \hline 4 \ 4 \ 1 \end{array}$$


2

Una curiosa proprietà

DEF. : Chiamiamo «banali» i numeri con zeri tra le loro cifre.

Ridefiniamo quindi il nostro problema in base 10 come:

DOMANDA : Sia $a \in \mathbb{N}$ «non banale» e i_{10} la funzione di inversione cifraria. Vogliamo classificare tutti i numeri a in base 10 tali che:

$$i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$$

2

Una curiosa proprietà

- Caso di una cifra : $a = (a_1)_{10}$, $i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

1: $i(1^2) = i(1)^2 \Rightarrow i(1) = 1 = 1^2 = 1$ ●

2: $i(2^2) = i(2)^2 \Rightarrow i(4) = 4 = 2^2 = 4$ ●

3: $i(3^2) = i(3)^2 \Rightarrow i(9) = 9 = 3^2 = 9$ ●

4: $i(4^2) = i(4)^2 \Rightarrow i(16) = 61 \neq 4^2 = 16$ ✗

5: $i(5^2) = i(5)^2 \Rightarrow i(25) = 52 \neq 5^2 = 25$ ✗

2

Una curiosa proprietà

- Caso di una cifra : $a = (a_1)_{10}$, $i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

6: $i(6^2) = i(6)^2 \Rightarrow i(36) = 31 \neq 6^2 = 36 \quad \text{X}$

7: $i(7^2) = i(7)^2 \Rightarrow i(49) = 94 \neq 7^2 = 49 \quad \text{X}$

8: $i(8^2) = i(8)^2 \Rightarrow i(64) = 46 \neq 8^2 = 64 \quad \text{X}$

9: $i(9^2) = i(9)^2 \Rightarrow i(81) = 18 \neq 9^2 = 81 \quad \text{X}$

2

Una curiosa proprietà

- Caso di una cifra : $a = (a_1)_{10}$, $i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

Nel caso di una cifra abbiamo:

1,

2,

3.

2

Una curiosa proprietà

- Caso di due cifre : $a = (a_2, a_1)_{10}$, $i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

Analizziamo l'algoritmo:

$$\begin{array}{r} a_2 \quad a_1 \quad x \\ a_2 \quad a_1 \\ \hline a_{12} \quad a_{11} \\ a_{22} \quad a_{21} \quad + \\ \hline a_{22} \quad 2a_{12} \quad a_{11} \end{array}$$

2

Una curiosa proprietà

- Caso di due cifre : $a = (a_2, a_1)_{10}$, $i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

Ogni a_{ij} è prodotto di due cifre per cui il risultato può essere di una sola cifra o di due.

In base 10 risulta:

$$1^2 \leq a_{ij} \leq 9^2$$

a_2	a_1	x
a_2	a_1	
<hr/>		
		a_{12} a_{11}
a_{22}	a_{21}	+
<hr/>		
		a_{22} $2a_{12}$ a_{11}

2

Una curiosa proprietà

- Caso di due cifre : $a = (a_2, a_1)_{10}$, $i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

Se o a_{ii} o $2a_{ij}$ superano la base,
cioè se

$$a_{ii} \geq 10 \quad \text{o} \quad 2a_{ij} \geq 10 ,$$

come sappiamo, facciamo il riporto, sommando la cifra in più
nella successiva colonna a sinistra.

a_2	a_1	x
a_2	a_1	
		<hr/>
		$a_{12} \ a_{11}$
a_{22}	a_{21}	+
		<hr/>
$a_{22} \ 2a_{12} \ a_{11}$		

2

Una curiosa proprietà

Ad esempio, nel caso di 14:

$$\begin{array}{r} 1^1 4 \ x \\ 1 \ 4 \\ \hline 5 \ 6 \\ 1 \ 4 \ + \\ \hline 1 \ 9 \ 6 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 4 \ 1 \ x \\ 4 \ 1 \\ \hline 4 \ 1 \\ 1 \ 6 \ 4 \ + \\ \hline 1 \ 6 \ 8 \ 1 \end{array}$$

2

Una curiosa proprietà

- Caso di due cifre : $a = (a_2, a_1)_{10}$, $i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

Un dettaglio importante

Il riporto consiste nel sommare a sinistra le cifre che sforano le unità.

E' chiaro quindi che, invertendo le cifre, i riporti rimangono gli stessi ma vanno a sommarsi a cifre diverse!

$$\begin{array}{r}
 a_2 \quad a_1 \quad x \\
 a_2 \quad a_1 \\
 \hline
 a_{12} \quad a_{11} \\
 \\
 a_{22} \quad a_{21} \quad +
 \hline
 a_{22} \quad 2a_{12} \quad a_{11}
 \end{array}$$

2

Una curiosa proprietà

- Caso di due cifre : $a = (a_2, a_1)_{10}$, $i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

Intuizione: la soluzione è nel riporto!

Se non abbiamo riporti non abbiamo termini da sommare.

Se non abbiamo termini da sommare, invertendo, si avranno le stesse cifre invertite, ovvero avremo:

$$i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$$

a_2	a_1	x
a_2	a_1	
<hr/>		
a_{12}	a_{11}	
<hr/>		
a_{22}	a_{21}	+
<hr/>		
a_{22}	$2a_{12}$	a_{11}

2

Una curiosa proprietà

- Caso di due cifre : $a = (a_2, a_1)_{10}$, $i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

Nel caso della base 10 abbiamo:

11,

12, 21,

22,

13, 31

$$\begin{array}{r}
 a_2 \quad a_1 \quad x \\
 a_2 \quad a_1 \\
 \hline
 a_{12} \quad a_{11} \\
 a_{22} \quad a_{21} \quad +
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\ \\
 \hline
 \\ \\
 \hline
 a_{22} \quad 2a_{12} \quad a_{11}
 \end{array}$$

2

Una curiosa proprietà

- Caso di tre o più cifre: $a = (\dots, a_3, a_2, a_1)_{10}$, $i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

$$\begin{array}{r}
 & a_3 & a_2 & a_1 & x \\
 a_3 & a_2 & a_1 & \\
 \hline
 a_{13} & a_{12} & a_{11} & \\
 a_{23} & a_{22} & a_{21} & + \\
 a_{33} & a_{32} & a_{31} & + \\
 \hline
 \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1
 \end{array}$$

2

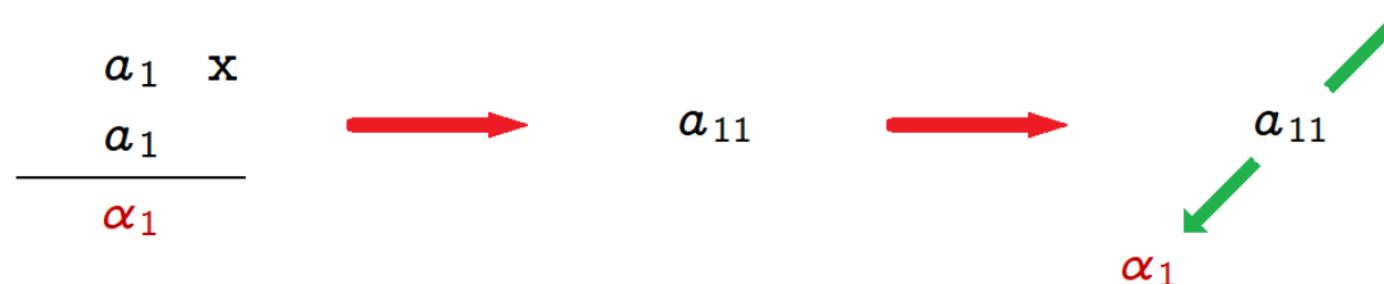
Una curiosa proprietà

- Caso di tre o più cifre

$$i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$$

Reinterpretiamo l'algoritmo della Moltiplicazione:

$$a = (a_1)_{10}$$



2

Una curiosa proprietà

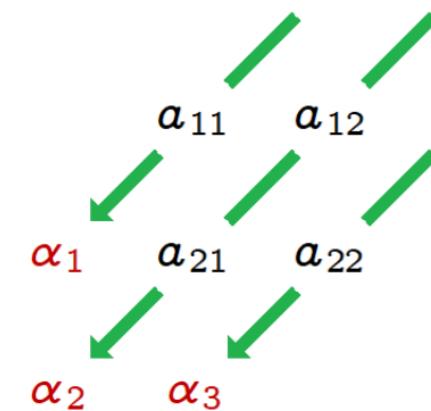
- Caso di tre o più cifre

$$i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$$

$$a = (a_2, a_1)_{10}$$

$$\begin{array}{r}
 a_2 \quad a_1 \quad x \\
 a_2 \quad a_1 \\
 \hline
 a_{12} \quad a_{11} \\
 a_{22} \quad a_{21} \quad +
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 a_{11} \quad a_{12} \\
 a_{21} \quad a_{22}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 a_{11} \quad a_{12} \\
 a_{21} \quad a_{22}
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 \begin{array}{c}
 a_{11} \quad a_{12} \\
 \alpha_1 \quad a_{21} \quad a_{22} \\
 \alpha_2 \quad \alpha_3
 \end{array}$$



2

Una curiosa proprietà

- Caso di tre o più cifre

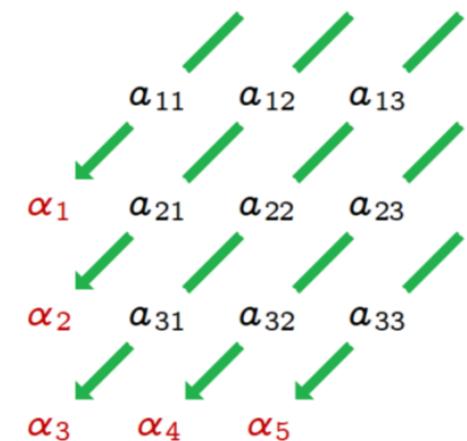
$$i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$$

$$a = (a_3, a_2, a_1)_{10}$$

$$\begin{array}{r}
 a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad x \\
 a_3 \quad a_2 \quad a_1 \\
 \hline
 a_{13} \quad a_{12} \quad a_{11} \\
 a_{23} \quad a_{22} \quad a_{21} \quad + \\
 a_{33} \quad a_{32} \quad a_{31} \quad + \\
 \hline
 \alpha_5 \quad \alpha_4 \quad \alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1
 \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33}
 \end{array}$$



2

Una curiosa proprietà

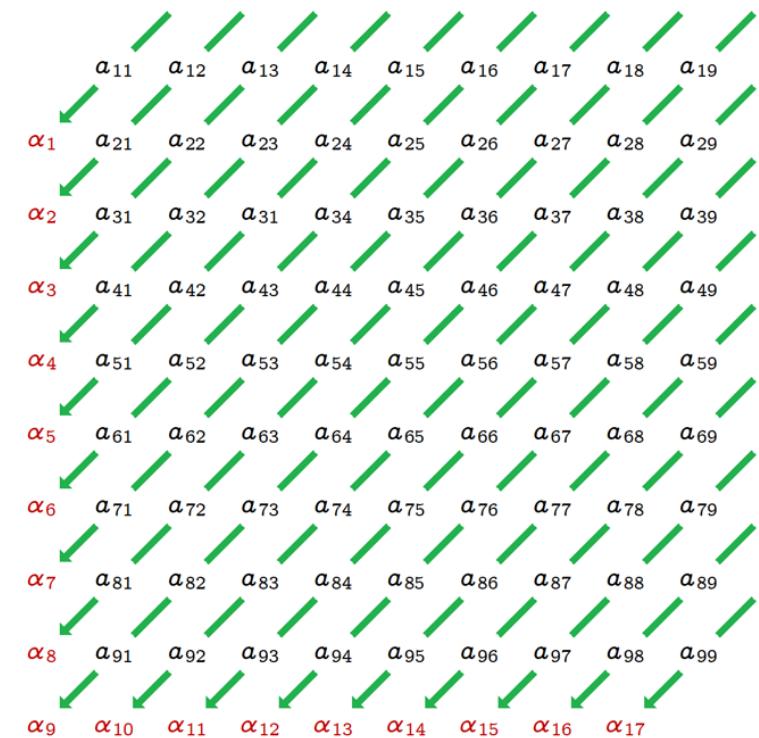
- Caso di tre o più cifre

$$i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$$

UNA NOTA:

in base 10,

il numero di cifre massime è 9



2

Una curiosa proprietà

- Il Teorema

TEOREMA (CLASSIFICAZIONE DEI NUMERI **2**-PALINVERTIBILI)

Sia $a \in \mathbb{N}$ «non banale» e i_{10} la funzione di inversione cifraria.

In base **10**, $a = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)_{10}$ è **2**-*Palinvertibile*, ovvero gode della proprietà

$$i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$$

se e solo se

$$\sum_{\substack{i+j=k+1}} a_i \times a_j < 10 , \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, 2n-1 .$$

- Basi qualunque

TEOREMA

Sia $a \in \mathbb{N}$ «non banale» e i_b la funzione di inversione cifraria.

In base b , $a = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)_b$ è **2-Palinvertibile**, ovvero gode della proprietà

$$i_b(a^2) = i_b(a)^2$$

se

$$\sum_{\substack{i+j=k+1}} a_i \times a_j < b, \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, 2n-1.$$

- Potenze h -esime

TEOREMA

Sia $a \in \mathbb{N}$ «non banale» e i_b la funzione di inversione cifraria.

In base b , $a = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)_b$ è h -Palinvertibile, ovvero gode della proprietà

$$i_b(a^h) = i_b(a)^h ,$$

se

$$\sum a_{i_1} \times \dots \times a_{i_h} < b, \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, hn - (h-1).$$

$$i_1 + \dots + i_h = k + (h-1)$$

3

Generalizzazioni

NUMERI (NON BANALI) h -PALINVERTIBILI IN BASE 10

$h = 2$

1	1111	1111111
2	1112, 1121, 1211, 2111	1111112, 1111121, 1111211, 1121111, 1211111, 2111111
3	1122, 1212, 2121, 2211	
	1113, 3111	
11		
12, 21	11111	11111111
22		
13, 31	11112, 11121, 11211, 12111, 21111	
	11122, 22111	
111	11113, 31111	
112, 121, 211		
122, 212, 221	111111	111111111
113, 311	111112, 111121, 111211, 112111, 121111, 211111	

3

Generalizzazioni

NUMERI (NON BANALI) h -PALINVERTIBILI IN BASE 10

$$h = 3 ,$$

$$h = 4 ,$$

$$h \geq 5$$

1
2

1

1

11

11

111