Università degli Studi di Cagliari
Programma “Visiting Professors”

Il 7 Aprile 2011

Un Lemma di Margulis senza ipotesi sulla curvatura

(*Conferenza di Sylvestre Gallot, Visiting Professor*)

A) Riassunto :

La ”sistole nel punto x” (che chiamiamo $l(x)$) di una varietà riemanniana X^n è la lunghezza minimale di ogni laccio non banale basato in x. Quando la curvatura è negativa o nulla, ogni sfera piena di centro x e di raggio $\frac{l(x)}{4}$ è diffeomorfa (tramite la mappa esponenziale) a una sfera piena di $\mathbb{R}^n$, quindi si può ricostruire la varietà incollando un numero calcolabile di sfere piene di $\mathbb{R}^n$ di raggio conosciuto.

Il classico ”lemma” di Margulis dice che, se la curvatura di X^n è compresa tra -1 e 0, allora *esiste* un punto x tale che $l(x) \geq \varepsilon_0(n)$, dove $\varepsilon_0(n)$ è una costante universale. Un altra versione (dovuta a M. Gromov) dice che, se si aggiunge l'ipotesi ”diametro$(X) \leq D$”, allora *per ogni* x, si ha $l(x) \geq \frac{C(n)}{\sinh^{n-1}(D)}\,\varepsilon_0(n)$, dove $C(n)$ è una costante universale.

Applicazioni di questo risultato di Gromov sono teoremi di finitezza topologica e di compattezza dell'insieme delle varietà considerate. Una delle applicazioni del lemma di Margulis è l'esistenza di una partizione della varietà in una ”parte spessa” $= \{x \ : \ l(x) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}\}$ e una ”parte sottile” $= \{x \ : \ l(x) < \frac{\varepsilon_0}{2}\}$ tali che
- ogni componente connessa della ”parte sottile” ha la topologia del ”cilindro” $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}$,
- se si ammette un ”incertezza” $\varepsilon << \varepsilon_0$ sulla distanza tra due punti qualunque, c' è un numero limitato di geometrie possibili per la ”parte spessa”.

Questi risultati sono infatti corollari di un risultato tipo ”azione di gruppi” dello stesso Margulis, il quale dice che, se consideriamo un azione isometrica (senza punti fissi) d'un gruppo discreto Γ sul rivestimento universale $\widetilde{X}$ di X, per ogni $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ l'insieme dei $\gamma \in \Gamma$ tali che $d(\tilde{x}, \gamma\,\tilde{x}) < \varepsilon_0(n)$ genera un sottogruppo nilpotente di Γ.

Lo scopo di questa conferenza è di mostrare che le ipotesi sulla curvatura non sono necessarie e che risultati e applicazioni del tipo visto sopra si possono dedurre direttamente delle proprietà algebriche del gruppo Γ.

B) Il testo della conferenza :

1 Raggio di iniettività e sistole (e a che cosa servono):

Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta.

Definizione 1.1 *La* **sistole** *di* (M, g) *nel punto* $x \in M$ *è la lunghezza minimale di ogni laccio non banale (cioè non omotope a un punto) basato in* x *. La sistole nel punto* x *si denota con* $\operatorname{sis}_g(x)$.

Per ogni $x \in M$ ed ogni $v \in T_xM$ sia c_v la geodetica tale che $c_v(0) = x$ e $\dot{c}(0) = v$ e sia $exp_x : \begin{cases} T_xM \to M \\ v \mapsto c_v(1) \end{cases}$ l'applicazione esponenziale.
Denotiamo con $\mathbb{B}_x(r)$ la sfera piena di raggio r (centrata all'origine) nello spazio tangente T_xM ; la sfera geodetica piena di (M, g) di centro x e di raggio r sarà denotata con $B(x, r)$. Quando r è abbastanza piccolo, exp_x è un diffeomorfismo tra $\mathbb{B}_x(r)$ e $B(x, r)$.

Definizione 1.2 *Il* **raggio di iniettività** *di* (M, g) **nel punto** $x \in M$ *(denotato* $\operatorname{inj}_g(x)$ *) è il supremum dei valori* $r > 0$ *tali che* exp_x *sia un diffeomorfismo tra* $\mathbb{B}_x(r)$ *e* $B(x, r)$ *.*

Si definisce il **raggio di iniettività** *(globale) di* (M, g) *(denotato con* $\operatorname{inj}(M, g)$ *) tramite la formula* $\operatorname{inj}(M, g) = \inf_{x \in M} \operatorname{inj}_g(x)$.

In generale vale la disuguaglianza $\operatorname{inj}_g(x) \leq \dfrac{1}{2} \operatorname{sis}_g(x)$. Nel caso di curvatura sezionale $K_g \leq 0$, si ha $\operatorname{inj}_g(x) = \dfrac{1}{2} \operatorname{sis}_g(x)$.

Se il volume della varietà è limitato superiormente da una costante V , e se r_0 è un limite inferiore r_0 del raggio di iniettività allora esiste (senza che nessun'altra informazione sulla varietà sia necessaria) un numero $N(r_0, V) \in \mathbb{N}$ e un ricoprimento della varietà costituto di $N(r_0, V)$ aperti, ciascuno dei quali è diffeomorfo a $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$. Quindi, un limite inferiore r_0 del raggio di iniettività ha come conseguenza dei **teoremi di finitezza e di compatezza**: in effetti, si parte di $N(r_0, V)$ pezzi (che sono tutti diffeomorfi a $\mathbb{B}^n$) e si deve ricostruire tutte le varietà possibili incollando tra di loro questi pezzi.

In questa direzione, ricordiamo due Teoremi dove si assume l'esistenza d'un limite inferiore del raggio di iniettività per dimostrare risultati di finitezza e di compatezza :

Teorema 1.3 (J. Cheeger) *Se si identificano due varietà quando sono diffeomorfe, l'insieme delle varietà differenziabili che ammettono metriche g di diametro* $\mathrm{diam}(g) \leq D$ *, di curvatura sezionale $-a^2 \leq K_g \leq a^2$ e di raggio di iniettività* $\mathrm{inj}(g) \geq r_0$ *(dove r_0, a, D sono delle costante positive arbitrarie) è finito (il numero di elementi di quest'insieme è limitato da una costante universale $N(D, a, r_0)$).*

Teorema 1.4 (M. Gromov) *Su ogni varietà l'insieme delle metriche g di diametro* $\mathrm{diam}(g) \leq D$ *, di curvatura sezionale $-a^2 \leq K_g \leq a^2$ e di raggio di iniettività* $\mathrm{inj}(g) \geq r_0$ *è vuoto, oppure compatto per la distanza di Lipschitz tra metriche.*

Tra le ipotesi di questi due teoremi, l'ipotesi di limite inferiore del raggio di iniettività è quella più restrittiva. **Quindi se si potesse sostituire quest'ipotesi con un ipotesi algebrica sul gruppo fundamentale, questo sarebbe un miglioramento importante**. Questo è proprio lo scopo del famoso "Lemma di Margulis".

2 Il Lemma di Margulis classico :

Teorema 2.1 *Sia* (M^n, g) *una varietà riemanniana, con curvatura sezionale* K_g *tale che* $-1 \leq K_g < 0$ *, allora*

(i) (Margulis) $\mathrm{Sup}_{x\in M}\left(\mathrm{sis}_g(x)\right) = 2\ \mathrm{Sup}_{x\in M}\big(\mathrm{inj}_g(x)\big) \geq \varepsilon_0$, *dove* $\varepsilon_0 = 4^{-(n+3)}$.

(ii) (Gromov) *per ogni* $D > 0$ *, se inoltre il diametro verifica* $\mathrm{diam}(g) \leq D$ *, allora*

$$\mathrm{Inf}_{x\in M}\left(\mathrm{sis}_g(x)\right) = 2\ \mathrm{inj}(M^n, g) \geq \pi\ \frac{\mathrm{Vol}\,\mathbb{B}^n}{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n}\ \frac{\varepsilon_0^n}{(\sinh\ D)^{n-1}} \quad ,$$

Siccome la versione (ii) di questo Teorema da un limite inferiore del raggio di inettività globale del tipo $\mathrm{inj}(M^n, g) \geq r_0(n, a, D)$ (dove $-a^2$ e D sono i limiti della curvatura sezionale e del diametro), seguono dei risultati di finitezza e di compatezza come descritto nella sezione precedente.

La versione (i) di questo Teorema non da un limite inferiore per il raggio di inettività globale, pero ne possiamo dedurre informazioni sul numero dei tipi topologici o geometrici possibili nel modo seguente:

In effetti, se si usa la partizione della varietà in due sottoinsiemi: la **"parte sottile"**, definita come $\{x \in M^n \ : \ \mathrm{sis}_g(x) < \dfrac{\varepsilon_0}{2}\}$, e il suo sottoinsieme complementare, denotato **"parte spessa"**, si ottiene il

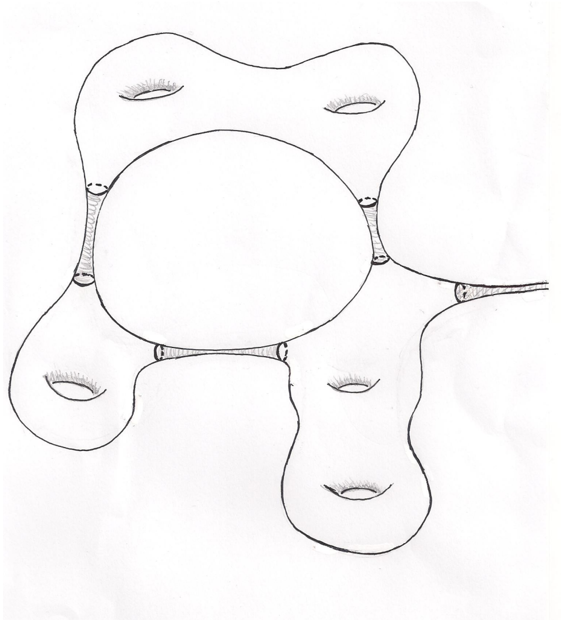

Figure 1: "Parte spessa" e "parte sottile" (in grigio)

Corollario 2.2 *Sia* (M^n, g) *una varietà riemanniana, con curvatura sezionale* K_g *tale che* $-1 \leq K_g < 0$, *allora*

- *la "parte spessa" non è vuota,*
- *ogni componente connessa* $\mathcal{C}$ *della "parte sottile" è diffeomorfa a un "cilindro"* $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}$,
- *Per ogni* $\varepsilon < \dfrac{\varepsilon_0}{2}\}$ *se esiste un punto* x *di* $\mathcal{C}$ *tale che* $\mathrm{sis}_g(x) \leq \varepsilon$, *allora* $\mathcal{C}$ *contiene un intorno tubolare (di raggio* $R > C(n)\,\ln\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ *) di una piccola geodetica periodica.*

Usando questo corollario, si ottengono dei risultati di finitezza (e poi di compatezza) in un modo che si può capire intuitivamente come segue : siccome la “parte spessa” ha (per definizione) un raggio di iniettività limitato inferiormente, si dispone d’un numero limitato di topologie tra quali si deve scegliere questa “parte spessa”. A questa “parte spessa” si deve incollare dei pezzi che hanno tutti la stessa struttura differenziale e che corrispondono alle diverse componenti connesse della “parte sottile”.

3 Perchè il Lemma di Margulis non ci soddisfa totalmente ?

L'ipotesi $-1 \leq K_g < 0$ del Lemma di Margulis è troppo forte; infatti **esistono trasformazioni banali della metrica che, pure non facendo diminuire la sistole, fanno uscire la varietà dell'insieme delle metriche tali che $-1 \leq K_g < 0$**: Per esempio, ogni varietà (localmente) iperbolica (Figure 2) soddisfa l'ipotesi del Lemma di Margulis...

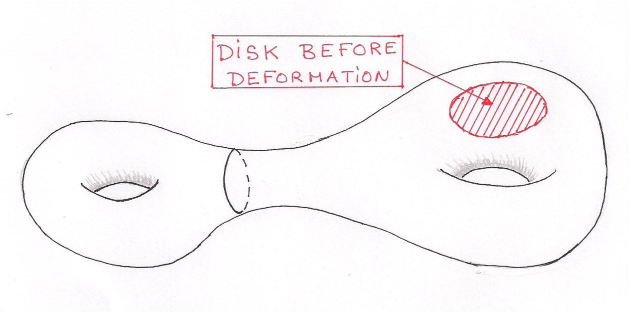

Figure 2: Una varietà iperbolica

Però la stessa varietà, dove un piccolo disco è stato deformato in un "fungo" (Figure 3) non soddisfa più l'ipotesi del Lemma di Margulis, mentre la sistole non è stata diminuita (perchè la nuova metrica è più grande di quella di prima).

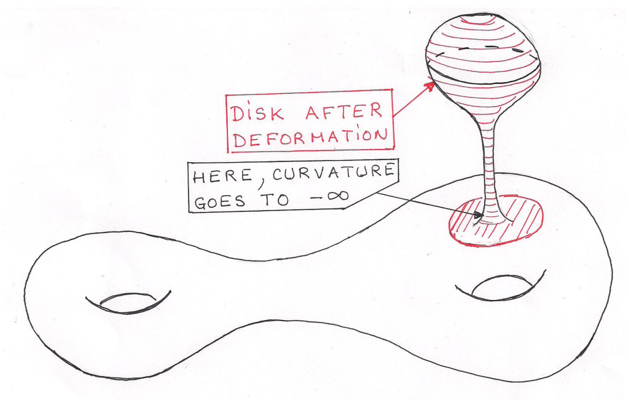

Figure 3: La stessa varietà, con metrica modificata

Ci vuole una versione del Lemma di Margulis dove il limite inferiore della sistole si deduce da proprietà algebriche del gruppo fundamentale, senza ipotesi sulla curvatura della metrica considerata.

4 Domande a questo proposito :

4.1 Una formulazione ingenua (e sbiadita) della domanda:

Domanda 4.1 *Se una varietà* (X, g_0) *soddisfa le ipotesi del Lemma di Margulis, è vero che, su ogni varietà riemanniana* (M, g) *, con gruppo fundamentale* $\pi_1(M)$ *isomorfo a* $\pi_1(X)$ *, si verificano ancora le conclusioni :*

(i) $\mathrm{Sup}_{x\in M}\ \mathrm{sis}_g(x) \geq \varepsilon_0(??)$ *?*

(ii) $\mathrm{Inf}_{x\in M}\ \mathrm{sis}_g(x) \geq \varepsilon_0'(??, D)$ *, se inoltre* $\mathrm{diameter}(M, g) \leq D$ *?*

Osserviamo che, dal momento che

$$\mathrm{Sup}_{x\in M}\ \left(\mathrm{sis}_{\varepsilon^2.g}(x)\right) = \varepsilon\ \mathrm{Sup}_{x\in M}\ \left(\mathrm{sis}_g(x)\right) \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0_+ \ ,$$

per sperare in un limite inferiore di $\mathrm{sis}_g(x)$, si deve normalizzare la metrica g con un altra grandezza geometrica.
Abbiamo visto che la normalizzazione $-1 \leq K_g < 0$ utilizzata nel Lemma di Margulis classico è troppo restrittiva e troppo sensibile ai cambiamenti locali della metrica.

Questa è la ragione perchè si usa il concetto di "entropia" (e la normalizzazione indotta) invece della curvatura.

4.2 L'entropia:

Definizione 4.2 .– *Sia* (M,g) *una varietà compatta e* $\pi : \left(\widetilde{M},\tilde{g}\right) \to (M,g)$ *il suo rivestimento universale riemanniano (cioè* $\tilde{g} = \pi^* g$ *); se* $\widetilde{B}(\tilde{x},R)$ *denota la sfera geodetica piena di* $\left(\widetilde{M},\tilde{g}\right)$, *si definisce l'entropia di* (M,g) *tramite la formula*

$$\mathrm{Ent}(M,g) := \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}\left[\mathrm{Vol}\,\widetilde{B}(\tilde{x},R)\right]\right)$$

Proprietà dell'entropia di una varietà compatta:

(i) (**omogeneità**) : $\mathrm{Ent}(M\,,\,\lambda^2.\,g) = \dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{Ent}(M,g)\,.$

(ii) (**monotonia**) Se g_1 e g_2 sono due metriche riemanniane su M tali che $g_1 \le g_2$, allora $\mathrm{Ent}(M,g_1) \ge \mathrm{Ent}(M,g_2)\,.$

(iii) (**annulamento**) Se esiste su M una metrica di entropia nulla, allora tutte le metriche su M hanno entropia nulla.

(iv) (**non annulamento**) Se esiste su M una metrica di entropia non nulla, allora tutte le metriche su M hanno entropia non nulla (però l'entropia può variare molto al variare della metrica).

La proprietà (iv) non è altro che la traduzione della proprietà (iii).

Dimostrazione della proprietà di monotonia : Se $\widetilde{g}_1$ e $\widetilde{g}_2$ sono i "pull back" di g_1 e g_2 sul rivestimento universale $\widetilde{M}$, segue dall'ipotesi $g_1 \le g_2$ che $\widetilde{g}_1 \le \widetilde{g}_2$ e quindi che $\widetilde{B}_{\widetilde{g}_2}(\tilde{x},R) \subset \widetilde{B}_{\widetilde{g}_1}(\tilde{x},R)$. Siccome M è compatta e le metriche $\widetilde{g}_1$ e $\widetilde{g}_2$ sono periodiche, esiste un limite superiore (che chiamiamo A^2) al rapporto $\dfrac{\widetilde{g}_2}{\widetilde{g}_1}$. Si ha pertanto

$$\mathrm{Vol}_{\widetilde{g}_2}\left(\widetilde{B}_{\widetilde{g}_2}(\tilde{x},R)\right) \le \mathrm{Vol}_{\widetilde{g}_2}\left(\widetilde{B}_{\widetilde{g}_1}(\tilde{x},R)\right) \le A^n\,\mathrm{Vol}_{\widetilde{g}_1}\left(\widetilde{B}_{\widetilde{g}_1}(\tilde{x},R)\right)\,,$$

il quale implica

$$\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}\left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{g}_2}\left(\widetilde{B}_{\widetilde{g}_2}(\tilde{x},R)\right)\right] \le \frac{1}{R}\,\mathrm{Log}\left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{g}_1}\left(\widetilde{B}_{\widetilde{g}_1}(\tilde{x},R)\right)\right] + \frac{n}{R}\,\mathrm{Log}(A)\,,$$

il quale, passando al limite, da $\mathrm{Ent}(M,g_2) \le \mathrm{Ent}(M,g_1)$. $\square$

Dimostrazione della proprietà di annulamento : Sia g_0 una metrica riemanniana su M di entropia nulla e g una metrica qualunque su M. Siccome M è compatta, esistono dei limiti inferiore e superiore (che chiamiamo respettivamente C_1 e C_2) per il rapporto $\frac{g}{g_0}$, il quale si traduce in $C_1 . g_0 \leq g \leq C_2 . g_0$. Dalle proprietà di omogeneità e di monotonia dell'entropia, si ottiene :

$$\frac{1}{\sqrt{C_2}} \operatorname{Ent}(M, g_0) \leq \operatorname{Ent}(M, g) \leq \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{Ent}(M, g_0) \quad ,$$

quindi $\operatorname{Ent}(M, g_0) = 0 \implies \operatorname{Ent}(M, g) = 0$. $\square$

Esempi :

- *Ogni metrica riemanniana g su $\mathbb{S}^n$ verifica* $\mathrm{Ent}(\mathbb{S}^n, g) = 0$.

  Dimostrazione: $\mathbb{S}^n$ coincide col suo proprio rivestimento universale e quindi

$$\mathrm{Ent}(\mathbb{S}^n, g) = \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}\left[\mathrm{Vol}\,\widetilde{B}(\tilde{x}, R)\right]\right)$$

$$\leq \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}\left[\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^n, g\right)\right]\right) = 0 \quad . \quad \square$$

- *Sia (X, g_0) una varietà compatta e piatta. Allora ogni metrica riemanniana g su X verifica* $\mathrm{Ent}(X, g) = 0$.

  Dimostrazione:
  Riferendosi alla proprietà di annulamento dell'entropia, è sufficiente dimostrare che $\mathrm{Ent}(X, g_0) = 0$. Siccome $\left(\widetilde{X}, \widetilde{g}_0\right)$ è lo spazio euclideo, abbiamo $\mathrm{Vol}\left(\widetilde{B}_{\widetilde{g}_0}\left(\tilde{x}, R\right)\right) = b_n\, R^n$, ne segue che

$$\mathrm{Ent}(X, g_0) := \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}\left[\mathrm{Vol}\left(\widetilde{B}_{\widetilde{g}_0}\left(\tilde{x}, R\right)\right)\right]\right)$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}(b_n) \;+\; \frac{n}{R}\,\mathrm{Log}\,R\right) = 0 \quad . \quad \square$$

- *Sia* (X, g_0) *una varietà compatta di curvatura costante* $K_{g_0} = -1$ *. Allora* $\text{Ent}(X, g_0) = n - 1$ *. Inoltre ogni metrica riemanniana* g *su* X *(non isometrica a* g_0 *ma dello stesso volume) verifica* $\text{Ent}(X, g) > n - 1$ *.*

Dimostrazione: Siccome $\left(\widetilde{X}, \widetilde{g}_0\right)$ è lo spazio iperbolico $\mathbb{H}^n$, nelle coordinate "polari" : $\phi : \begin{cases}]\,0, +\infty\,[\times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{H}^n \\ \quad (t, v) \quad \mapsto \quad exp_{\widetilde{x}}(t.v) \end{cases}$ la sua metrica si scrive : $\phi^* \widetilde{g}_0 = (dt)^2 + \sinh^2(t) \, . \, g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ (dove $g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ è la metrica canonica di $\mathbb{S}^{n-1}$). Ne segue che

$$\text{Vol}\left(\widetilde{B}_{\widetilde{g}_0}(\tilde{x}, R)\right) = \text{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) \int_0^R \sinh^{n-1}(t) \quad .$$

Siccome $\dfrac{e^t}{4} \leq \sinh(t) \leq \dfrac{e^t}{2}$ quando $t \geq 1$, si può dedurre che

$$A_n \, e^{(n-1)\,R} \leq \text{Vol}\left(\widetilde{B}_{\widetilde{g}_0}(\tilde{x}, R)\right) \leq B_n \, e^{(n-1)\,R}$$

quando R è grande, il quale implica che

$$\lim_{R \to +\infty} \left(\frac{1}{R} \,\text{Log}\left[\text{Vol}\left(\widetilde{B}_{\widetilde{g}_0}(\tilde{x}, R)\right)\right]\right) = n - 1 \quad . \quad \square$$

Per la dimostrazione del fatto che $\text{Ent}(X, g) > n - 1$ se $g \neq g_0$ (soluzione della congettura dell'entropia minimale) vedere il testo completo della conferenza precedente sul barycentro a l'indirizzo :

http://loi.sc.unica.it/seminari/baricentrocompleto.pdf

4.3 Perchè fare la normalizzazione con l'Entropia ?

a) **L'ipotesi "Entropia limitata " è molto più debole dell'ipotesi "curvatura sezionale limitata":**

In effetti, per ogni varietà riemanniana (M^n, g),

$$K_g \geq -a^2 \implies \text{Ricci} \geq -(n-1)a^2 \implies \text{Ent}(M, g) \leq (n-1)a$$

[La prima implicazione segue dalla definizione della curvatura di Ricci come somma di curvature sezionali. La seconda viene del Teorema di R. L. Bishop, il quale fornisce un limite superiore del volume delle sfere geodetiche piene in funzione della curvatura di Ricci].

b) **L'entropia è quasi insensibile ai cambiamenti locali (anche se drastici) della metrica**

Per esempio, considerando ogni varietà iperbolica (M^n, g_0) :

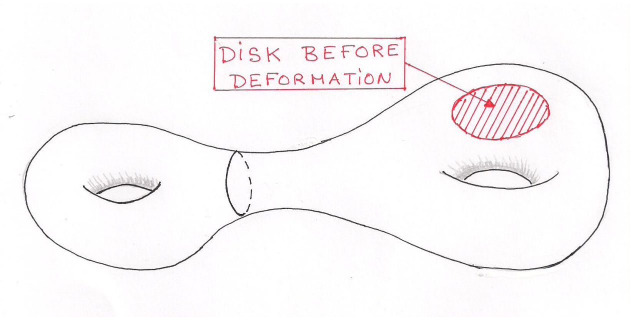

Figure 4: La varietà iperbolica (M^n, g_0)

e la nuova varietà (M^n, g_1) ottenuta per deformazione locale (ma drastica) della metrica iperbolica :

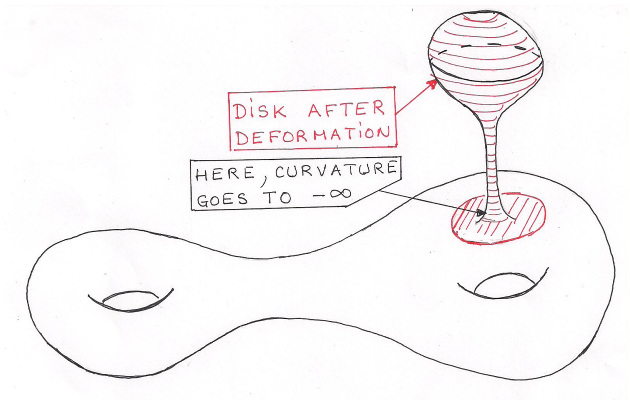

Figure 5: La nuova varietà (deformata) (M^n, g_1)

Queste due varietà hanno quasi la stessa entropia (mentre la curvatura della seconda non è più limitata).

Idea della dimostrazione del fatto che $\mathrm{Ent}(M, g_1) \approx \mathrm{Ent}(M, g_0)$ *:*

Se lo spazio totale del rivestimento universale riemanniano $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}_0) \to (M, g_0)$ "assomiglia" alla figura seguente (dove, se B_ε è il disco di M che sarà il supporto della deformazione, abbiamo rappresentato $\pi^{-1}(B_\varepsilon)$ come riunione di dischi):

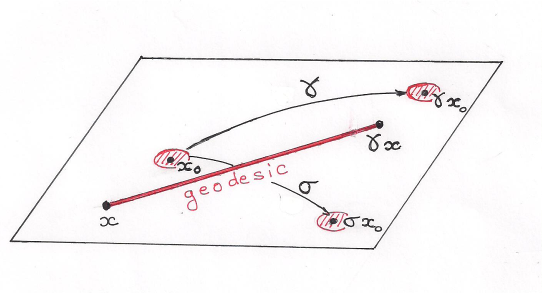

Figure 6: Il rivestimento universale di (M^n, g_0)

Allora il rivestimento universale $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_1)$ di (M, g_1) assomiglia a questo :

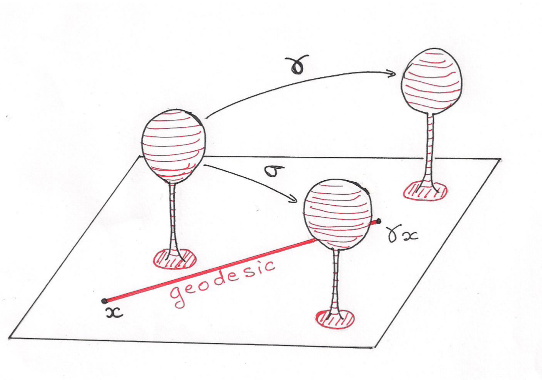

Figure 7: Il rivestimento universale di (M^n, g_1)

Se $\widetilde{d}_0$ e $\widetilde{d}_1$ sono le distanze riemanniane su $\widetilde{M}$ che corrispondono alle metriche $\widetilde{g}_0$ e $\widetilde{g}_1$, allora, esiste una costante C tale che, quando $\widetilde{d}_0(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ è abbastanza grande,

$$\widetilde{d}_0(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leq \widetilde{d}_1(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leq (1+\varepsilon)\, \widetilde{d}_0(\widetilde{x}, \widetilde{y}) + C \leq (1+2\,\varepsilon)\, \widetilde{d}_0(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \ ,$$

dalla quale segue (per le proprietà di omogeneità e di monotonia dell'entropia)

$$\mathrm{Ent}(M, g_0) \geq \mathrm{Ent}(M, g_1) \geq \frac{1}{1 + 2\,\varepsilon}\ \mathrm{Ent}(M, g_0)\ .$$

c) **La definizione dell'entropia si estende al quadro generale degli spazi metrici (X, d) (con una misura μ).**

Un esempio sarà fornito più tardi, quando si definirà "l'entropia algebrica ".

4.4 Con la normalizzazione data dall'entropia la "domanda ingenua" si trasforma in :

Domanda 4.3 .– *Se una varietà* (X, g_0) *soddisfa le ipotesi del Lemma di Margulis, è vero che, su ogni varietà riemanniana* (M, g) *che soddisfa*

- *gruppo fundamentale* $\pi_1(M)$ *isomorfo a* $\pi_1(X)$ *,*
- $\mathrm{Ent}(M, g) \leq 1$ *,*

si verificano ancora le conclusioni :

(i) $\mathrm{Sup}_{x\in M}\ \mathrm{sis}_g(x) \geq \varepsilon_0(X)$ *?*

(ii) $\mathrm{Inf}_{x\in M}\ \mathrm{sis}_g(x) \geq \varepsilon_0'(X, D)$ *, se inoltre* $\mathrm{diametro}(M, g) \leq D$ *?*

La risposta è SI :

5 Una prima risposta :

Teorema 5.1 *(Besson, Courtois, G.) Sia* (X^p, g_0) *una varietà riemanniana compatta di curvatura strettamente negativa (* $K_g \leq -a^2 < 0$ *). Sia* $\delta = a \,.\, \mathrm{inj}(g_0)$ *.*
Sia M^n *una varietà compatta tale che esiste un omomorfismo iniettivo :* $\pi_1(M) \to \pi_1(X)$ *, la cui immagine è un sottogruppo non abeliano. Allora, per ogni metrica riemanniana* g *su* M^n *tale che* $\mathrm{Ent}(M^n, g) \leq 1$ *, si ha :*

(i) $\mathrm{Sup}_{x \in M}\ \mathrm{sis}_g(x) \geq \dfrac{\delta \,\mathrm{Log}\, 2}{4+\delta}$,

(ii) Sia $\varepsilon_0 = \dfrac{\delta \,\mathrm{Log}\, 2}{4+\delta}$ *. Riferendosi alla definizione della "parte sottile " della varietà come l'insieme* $\{x \ :\ \mathrm{sis}_g(x) < \varepsilon_0/2\ \}$ *, ogni componente connessa* M_{ε_0} *di questa "parte sottile " "ha l'omotopia di un cilindro", cioè se chiamiamo* $i\ :\ M_{\varepsilon_0} \to M$ *l'iniezione canonica e* $i_*\ :\ \pi_1(M_{\varepsilon_0}, m) \to \pi_1(M, m)$ *l'omomorfismo associato, l'immagine* $i_*(\pi_1(M_{\varepsilon_0}, m))$ *è un sottogruppo isomorfo a* $\mathbb{Z}$ *,*

(iii) Ogni componente connessa M_{ε_0} *della "parte sottile " contiene una geodetica periodica (denotata* c *), la cui lunghezza è uguale al minimo della funzione* $x \mapsto \mathrm{sis}_g(x)$ *quando* x *percorre* M_{ε_0} *.*
Se ε *è la lunghezza di* c *e se si definisce*

$$R_\varepsilon = \frac{\delta}{2(4+\delta)}\ \mathrm{Log}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\ -\ \mathrm{Log}\left(\frac{4+\delta}{\delta}\right)\ -\ \frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

allora l'intorno tubolare di c *di raggio* R_ε *è isometrico all'intorno tubolare di raggio* R_ε *della geodetica periodica nel quoziente del rivestimento universale* $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ *per un sottogruppo di* $\pi_1(M)$ *isomorfo a* $\mathbb{Z}$ *(la geodetica periodica corrisponde al generatore di questo* $\mathbb{Z}$ *).*

(iv) Se inoltre diameter$(M,g) \leq D$ *, allora*

$$\mathrm{Inf}_{x\in M}\,[\,\mathrm{sis}_g(x)\,] \geq \frac{\delta}{4+\delta}\; e^{-\frac{2(4+\delta)}{\delta}D} \qquad .$$

Osserviamo che le conclusioni di questo Teorema interessano (M,g), ma che nessun'ipotesi è stata fatta sulla curvatura di (M,g).

L'unica ipotesi fatta sulla metrica di $(M^n,\, g)$ è $\mathrm{Ent}(M^n,\, g) \leq 1$: quest'ipotesi non è restrittiva (basta sostituire qualunque metrica g con la metrica $\lambda^2 . g$ per ottenere una metrica che soddisfa quest'ipotesi).

Una versione ideale di questo risultato sarebbe di poter calcolare ε_0 independentemente della metrica di X (per esempio, usando soltanto le proprietà algebriche del gruppo fundamentale $\pi_1(X)$ o (direttamente) di $\pi_1(M)$. Una versione di questo tipo (che si applica in particolare al caso dove $\pi_1(M)$ è un gruppo iperbolico nel senso di Gromov) è stata dimostrata da F. Zuddas.

Questo teorema si applica anche nel caso dove la varietà riemanniana (M,g) è sostituita con un spazio metrico (con una misura). Questo punto di vista è stato sviluppato da F. Zuddas quando (M,g) è sostituita con il grafo di Cayley di un gruppo discreto (metodo geometrico per dimostare risultati algebrici) e da G. Reviron quando (M,g) è sostituita con uno spazio metrico "di lunghezze".

Altre applicazioni : Teoremi di compatezza e di finitezza senza ipotesi sulla curvatura. Risultati di finitezza sulle varietà di Einstein.

5.1 Prima di fare la dimostrazione :

L'idea centrale: Il gruppo fundamentale Γ di M agisce per isometrie sul rivestimento universale $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ di (M^n, g) , ma anche sul rivestimento universale $(\widetilde{X}, \widetilde{g}_0)$ di (X, g_0) , tramite l'omomorfismo $\pi_1(M) \to \pi_1(X) \subset \mathrm{Isom}(\widetilde{X}, \widetilde{g}_0)$. Siccome la curvatura di (X, g_0) soddisfa $K_g \leq -a^2$, l'azione di Γ su $(\widetilde{X}, \widetilde{g}_0)$ induce su Γ proprietà algebriche che sono sufficienti per dimostrare che l'altra azione di Γ su $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ gode anche lei delle concluzioni del Lemma di Margulis.

Questa proprietà algebrica è una **alternativa di Tits quantificata** :

Sia Σ un sistema finito di generatori del gruppo Γ : per ogni $\gamma,\ \gamma' \in \Gamma$, si può scrivere $\gamma^{-1}\cdot\gamma'$ come una parola $\sigma_{i_1}\cdot\sigma_{i_2}\cdot\ldots\cdot\sigma_{i_p}$ le quale lettere $\sigma_{i_1},\ \sigma_{i_2},\ ...,\sigma_{i_p}$ sono elementi di $\Sigma\cup\Sigma^{-1}$: la distanza algebrica $d_\Sigma(\gamma, \gamma')$ è definita come il numero minimale di lettere nelle parole $\sigma_{i_1} \cdot \sigma_{i_2} \cdot ... \cdot \sigma_{i_p}$ che sono uguali a $\gamma^{-1} \cdot \gamma'$.

Definizione 5.2 *L'entropia algebrica di* Γ *rispetto a* Σ *è definita come*

$$\mathrm{Ent}_\Sigma(\Gamma) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \,\mathrm{Log}\,(\#\{\gamma \ : \ d_\Sigma(e, \gamma) < R\})$$

Siano A e B due sottogruppi di Γ , si definisce $[A\,, B]$ come il sottogruppo di Γ generato da l'insieme $\{a^{-1}b^{-1}a\,b : a \in A,\ b \in B\}$. Si costruisce la sequenza di sottogruppi

$$\Gamma_0 = \Gamma \quad , \quad \Gamma_i = [\,\Gamma\,, \Gamma_{i-1}] \quad , \quad i = 1, 2, \ldots$$

Un gruppo Γ è detto "nilpotente" se esiste i_0 tale che $\Gamma_i = 0$ per ogni $i \geq i_0$; è detto "virtualmente nilpotente" se esiste un sottogruppo nilpotente Γ' tale che Γ/Γ' sia finito.

L'alternativa di Tits quantificata si scrive allora:

Definizione 5.3 *Sia* $\alpha > 0$*, si dice che un gruppo* Γ *(non virtualmente nilpotente) soddisfa la proprietà* $\mathrm{Tits}(\alpha)$ *se, per ogni sottoinsieme finito* $\Sigma' \subset \Gamma \setminus \{e\}$*, il sottogruppo* $\langle \Sigma' \rangle$ *generato da* Σ' *è*

- *sia virtualmente nilpotente*
- *sia tale che* $\mathrm{Ent}_{\Sigma'}(< \Sigma' >) \geq \alpha$ *.*

5.2 Un idea della dimostrazione del fatto che $\mathrm{Sup}_{x\in M}\ \mathrm{sis}_g(x) \geq \dfrac{\delta \,\mathrm{Log}\, 2}{4+\delta}$:

Lemma 5.4 *Il gruppo fundamentale Γ di una varietà riemanniana (X^p, g_0), di curvatura sezionale e di raggio d'iniettività tali che $K_g \leq -1$ e $\mathrm{inj}(g_0) \geq \delta$ soddifa la proprietà $\mathrm{Tits}(\alpha)$ per $\alpha = \dfrac{\delta \,\mathrm{Log}\, 2}{4+\delta}$.*

Da ora in poi supponiamo che Γ ha la proprietà $\mathrm{Tits}(\alpha)$.

Lemma 5.5 *Considerando l'azione di Γ su $(\widetilde{M}, \tilde{g})$, se si definisce $\Gamma_\alpha(\tilde{x})$ come il sottogruppo di Γ generato da $\Sigma_\alpha(\tilde{x}) = \{\gamma \in \Gamma\ :\ d_{\widetilde{M}}(\tilde{x}, \gamma\,\tilde{x}) < \alpha\}$, allora $\Gamma_\alpha(\tilde{x})$ è abeliano (il quale significa, nel caso presente che è isomorfo o a $\mathbb{Z}$ oppure a $\{0\}$).*

Dimostrazione : Supponiamo che esistono un paio di elementi σ_1 e σ_2 di $\Sigma_\alpha(\tilde{x})$ che non commutano e che soddisfano $L(\sigma_1, \sigma_2) < \alpha$, dove $L(\sigma_1, \sigma_2) := \mathrm{Max}\left[d_{\widetilde{M}}(\tilde{x}, \sigma_1\,\tilde{x}); d_{\widetilde{M}}(\tilde{x}, \sigma_2\,\tilde{x})\right]$. Scriveremo L al posto di $L(\sigma_1, \sigma_2)$ per non appesantire le notazioni.
Si considera $\Gamma' = <\sigma_1\,,\,\sigma_2>$ munito del sistema di generatori $\{\sigma_1\,,\,\sigma_2\}$ e della distanza algebrica associata d_{alg} . Se si definisce la distanza geometrica da $d_{\mathrm{geom}}(\gamma, \gamma') = d_{\widetilde{M}}(\gamma\,\tilde{x}, \gamma'\,\tilde{x})$, la disuguaglianza triangolare da : $d_{\mathrm{geom}} \leq L\,.\,d_{\mathrm{alg}}$ e quindi, usando le proprietà di omogeneità e di monotonia dell'entropia, otteniamo :

$$1 \geq \mathrm{Ent}(M, g) \geq \mathrm{Ent}(\Gamma'.\,\tilde{x}, d_{\widetilde{M}}) = \mathrm{Ent}(\Gamma', d_{\mathrm{geom}})$$

$$\geq \frac{1}{L}\,\mathrm{Ent}(\Gamma', d_{\mathrm{alg}}) = \frac{1}{L}\,\mathrm{Ent}_{\{\sigma_1\,,\,\sigma_2\}}(\Gamma') \geq \frac{\alpha}{L} \quad ,$$

dove l'ultima disuguaglianza viene della proprietà $\mathrm{Tits}(\alpha)$. Otteniamo una contradizione con l'ipotesi $L < \alpha$. $\square$

Lemma 5.6 *Esiste un punto $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{M}$ tale che $\Gamma_\alpha(\widetilde{x}_0)$ sia uguale a $\{e\}$.*

Dimostrazione : Ricordiamo che $\Gamma_\alpha(\tilde{x})$ è il sottogruppo di Γ generato da $\Sigma_\alpha(\tilde{x}) = \{\gamma \in \Gamma \ : \ d_{\widetilde{M}}(\tilde{x}, \gamma\,\tilde{x}) < \alpha\}$ Supponiamo che questo Lemma sia falso, cioè che, per ogni $\tilde{x} \in \widetilde{M}$, $\Gamma_\alpha(\tilde{x})$ sia un sottogruppo non banale (e abeliano come l'abbiamo già dimostrato.
Consideriamo la relazione d'equivalenza $\sim$ su $\Gamma^* = \Gamma \setminus \{e\}$ definita da $\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \gamma_1$ e γ_2 commutano. $\Gamma_\alpha(\tilde{x})$ è contenuto in una unica classe di equivalenza che chiamiamo $C(\tilde{x})$.

Fissiamo un qualunque punto $\tilde{x}$: se U_x è un intorno abbastanza piccolo di $\tilde{x}$, allora, per ogni $\tilde{y} \in U_x$, abbiamo $\Sigma_\alpha(\tilde{x}) \subset \Sigma_\alpha(\tilde{y})$ (perchè $d_{\widetilde{M}}(\tilde{x}, \gamma\,\tilde{x}) < \alpha \implies d_{\widetilde{M}}(\tilde{y}, \gamma\,\tilde{y}) < \alpha$ per continuità), e quindi $C(\tilde{y}) = C(\tilde{x})$. Questo dimostra che la mappa $\tilde{x} \mapsto C(\tilde{x})$ è localmente costante, quindi è costante, il quale implica che $\Gamma_0 = C(\tilde{x}) \cup \{e\}$ è un sottogruppo **abeliano e fissato** che contiene $\Sigma_\alpha(g\,\tilde{y}) = g\,\Sigma_\alpha(\tilde{y})\,g^{-1}$ per ogni g, il quale implica che $\Gamma_0 = g\,\Gamma_0\,g^{-1}$ *è un sottogruppo normale e abeliano.*
Nel caso presente, questo implica che $\Gamma_0 = \Gamma$ o $\{e\} = \Gamma$ (perche contiene $\Sigma_\alpha(\tilde{y})$), in contradizione con il fatto che Γ non è abeliano.
□

Fine della dimostrazione del fatto che $\mathrm{Sup}_{x \in M}\ \mathrm{sis}_g(x) \geq \dfrac{\delta\,\mathrm{Log}\,2}{4+\delta}$ **:**

L'ultimo lemma implica l'esistenza d'un punto $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{M}$ tale che $\Gamma_\alpha(\widetilde{x}_0) = \{e\}$, il quale implica che $\Sigma_\alpha(\widetilde{x}_0) = \emptyset$; quindi, per ogni $\gamma \in \Gamma^*$, $d_{\widetilde{M}}(\widetilde{x}_0, \gamma\,\widetilde{x}_0) \geq \alpha$.
Siccome $\mathrm{sis}_g(x_0) = \inf_{\gamma \in \Gamma^*} d_{\widetilde{M}}(\widetilde{x}_0, \gamma\,\widetilde{x}_0)$ (per ogni proiezione x_0

di $\widetilde{x}_0$), si ottiene

$$\mathrm{sis}_g(x_0) \geq \alpha = \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{4+\delta} \quad .$$

6 Considerazioni sulle ipotesi del nostro teorema "alla Margulis" :

- Un punto positivo è che il limite inferiore ε_0 della sistole non dipende di M o di g.
- Un punto negativo è che dipende da un limite inferiore del raggio di iniettività di (X, g_0) .

Il teorema seguente leva questo difetto

Proposizione 6.1 *Sia* (X^n, g) *una varietà di Cartan-Hadamard, con curvatura sezionale tale che* $-1 \leq K_g \leq -a^2$ *, sia* Γ *un sottogruppo discreto e non virtualmente nilpotente del gruppo delle isometrie di* (X^n, g) *che ammette un sistema di generatori finito (ma non limitato), allora* Γ *soddisfa la proprietà* $\mathrm{Tits}(\alpha)$ *, dove* $\alpha = \varepsilon_0(n, a)$ *.*

Work in progress : una generalizzazione della proprietà $\mathrm{Tits}(\alpha)$ a tutti i gruppi discreti che agiscono su uno spazio metrico $\delta-$iperbolico nel senso di Gromov (sarebbe una miglioramento di un risultato anteriore di F. Zuddas)