Esercizi geometria analitica nello spazio
Corso di Laurea in Informatica A.A. 2002-2003
Docente: Andrea Loi

1. Denotiamo con P'_{12}, P'_{13}, P'_{23}, P'_1, P'_2, P'_3, P' i simmetrici di un punto P rispetto ai piani coordinati $[xy]$, $[xz]$, $[yz]$, agli assi coordinati x, y, z e all'origine del sistema di riferimento. Calcolare P'_{12}, P'_{13}, P'_{23}, P'_1, P'_2, P'_3, P' quando $P(1,2,3)$.

2. Verificare che i punti $A(1,1,1)$, $B(2,-1,3)$, $C(0,1,4)$ non sono allineati.

3. Il baricentro G di un sistema di n punti $A_i(x_i, y_i, z_i)$ ha coordinate:

$$x_G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ y_G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ z_G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i.$$

   Calcolare il baricentro G del triangolo di vertici $A_1(1,1,1)$, $A_2(-1,1,2)$, $A_3(0,0,1)$. Calcolare inoltre il baricentro G del quadrilatero di vertici $A_1(1,1,1)$, $A_2(-1,1,2)$, $A_3(0,0,1)$, $A_4(0,0,0)$.

4. Scrivere l'equazione del piano α passante per la retta $r : x+y-1 = 0,\ y-2z = 0$ e parallelo alla retta $s : y-z = 0,\ 3y-2z+2 = 0$.

5. Sia r la retta intersezione dei due piani, non paralleli, $\alpha : ax+by+cz+d = 0$ e $\alpha' : a'x+b'y+c'z+d' = 0$

   Dimostrare che le componenti di un vettore direttore $\mathbf{v} = (l, m, n)$ della retta r sono date da:

$$l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix},\quad m = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix},\quad n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

6. Scrivere l'equazione cartesiana del piano α passante per $P_0(1,2,3)$ e contenente la retta $r : x = 2,\ y = 1-t,\ z = 3t+1$.

7. Dato il punto $P_0(1, 2, -1)$ ed il piano $\alpha : x + y - z + 1 = 0$. Determinare l'equazione del piano α' passante per P_0 e parallelo a α.

8. Scrivere le equazione cartesiana e l'equazioni parametriche della retta passante per i punti A e B nei seguenti casi:

   a) $A(1, 1, 0)$, $B(1, 1, -1)$;

   b) $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$;

   c) $A(-1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$.

9. Determinare i parametri direttori e dare una rappresentazione parametrica per ciascuna delle seguenti rette:

   a) $x = y = \frac{z+1}{2}$;

   b) $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$;

   c) $x - 2y + z - 1 = 0$, $x + 3y - 2z + 2 = 0$.

10. Scrivere come intersezione di piani le rette r e s aventi le seguenti equazioni parametriche: $r : x = 1 - 2t,\ y = 1 + t,\ z = 2 - 3t$, $s : x = 1 - u,\ y = 3,\ z = 2 + 3u$.

11. Determinare la posizione reciproca delle seguenti coppie di rette:

    a) $r : x + y + z = 0,\ x = 0$ $s : x = 0,\ x - 2y = 1$;

    b) $r : x = 1 + t,\ y = t,\ z = -t$, $s : x = 1 + u,\ y = u,\ z = -2 + u$;

    c) $r : x + y + z = 1,\ x - y = 0$, $s : x = t,\ y = 1 + t,\ z = -t$;

    d) $r : x = 2+t,\ y = -1-t,\ z = 4+3t$, $s : x = 3+u,\ y = 2+u,\ z = 4+u$;

12. Trovare la distanza del punto $P_0(1, 1, 0)$ dalla retta $r : x + y = 0,\ x - z = 0$.

13. Calcolare la distanza tra le rette $r : 2x + z = 0,\ x - y = 0$ e $s : x = t,\ y = 1 + t,\ z = -t$.

14. Determinare centro e raggio della sfera di equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 1 = 0.$$

Trovare, inoltre l'equazione del piano tangente a S nel punto $P_0(0, 1, 0)$.

15. Trovare centro e raggio della circonferenza σ intersezione della sfera S dell'esercizio precedente con il piano $\pi : x + y + z - 1 = 0$.