

**Sottovarietà**  
**Corso di Laurea in Matematica A.A. 2024-2025**  
**Docente: Andrea Loi**

1. Siano  $S_1$  e  $S_2$  due sottovarietà di due varietà differenziabili  $M_1$  e  $M_2$  rispettivamente. Dimostrare che  $S_1 \times S_2$  è una sottovarietà di  $M_1 \times M_2$ . Dedurre che il toro  $T^n$  di dimensione  $n$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^{2n}$ .

2. Sia  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - 6xy + y^2$ . Trovare i  $c \in \mathbb{R}$  tali che  $F^{-1}(c)$  sia una sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$ .

3. Dire se le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 1 \\ z = xy \end{cases}$$

costituiscono una sottovarietà di  $\mathbb{R}^3$ .

4. Un polinomio  $F(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$  è omogeneo di grado  $k$  se è combinazione lineare di monomi  $x_0^{j_1} \dots x_n^{j_m}$  di grado  $k$ ,  $\sum_{j=1}^m i_j = k$ . Dimostrare che

$$\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = kF.$$

Dedurre che  $F^{-1}(c)$ ,  $c \neq 0$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $n - 1$ . Dimostrare, inoltre che per  $c, d > 0$ ,  $F^{-1}(c)$  e  $F^{-1}(d)$  sono diffeomorfe e lo stesso vale per  $c, d < 0$ . (Suggerimento per la prima parte: usare l'uguaglianza  $F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k F(x_0, \dots, x_n)$  valida per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

5. Dimostrare che  $SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$  è una sottovarietà di  $M_n(\mathbb{C})$  di dimensione  $2n^2 - 2$ .

6. Sia  $F : N \rightarrow M$  un'applicazione liscia tra varietà differenziabili. Dimostrare che l'insieme  $PR_F$  dei punti regolari di  $F$  è un aperto di  $N$ .

7. Sia  $F : N \rightarrow M$  un'applicazione liscia tra varietà differenziabili. Dimostrare che se  $F$  è chiusa allora  $VR_F$  (insieme dei punti regolari di  $F$ ) è aperto in  $M$ .

8. Dimostrare che  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t, t^2, t^3)$  è un embedding liscio e scrivere  $F(\mathbb{R})$  come zero di funzioni.

9. Dimostrare che  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$  è un embedding liscio e  $F(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ .

10. Dimostrare che la composizione di immersioni è un'immersione e che il prodotto cartesiano di due immersioni è un'immersione.

11. Dimostrare che se  $F : N \rightarrow M$  è un'immersione e  $Z \subset N$  è una sottovarietà di  $N$  allora  $F|_Z : Z \rightarrow M$  è un'immersione.

12. Dimostrare che l'applicazione

$$F : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, (x, y, z) \mapsto (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$

induce un embedding liscio da  $\mathbb{R}P^2$  a  $\mathbb{R}^4$ .

13. Dimostrare che un'immersione iniettiva e propria é un embedding liscio. Mostrare che esistono embedding lisci che non sono applicazioni proprie. (Ricorda che un'applicazione continua  $f : X \rightarrow Y$  tra spazi topologici é propria se  $f^{-1}(K)$  é compatto in  $X$  per ogni compatto  $K$  di  $Y$ ).