PROGRAMMA DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2022-2023, primo semestre
Docente: Andrea Loi

1. Geometria differenziale in $\mathbb{R}^n$
1.1 Funzioni lisce e reali analitiche. Richiami sulle funzioni lisce e reali analitiche su aperti di $\mathbb{R}^n$; funzioni C^k ma non C^{k+1}; esempi di funzioni lisce che non sono reali analitiche.
1.2 Diffeomorfismi e la formula di Taylor Diffeomorfismi tra aperti di $\mathbb{R}^n$ (applicazioni lisce, bigettive con inversa liscia); esistono funzioni bigettive e lisce che non sono diffeomorfismi; gli intervalli aperti limitati o illimitati di $\mathbb{R}$ sono diffeomorfi; il prodotto di n intervalli aperti di $\mathbb{R}$ risulta diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$; una palla aperta di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$ sono diffeomorfi; sviluppo di Taylor con resto intorno ad un punto p di una funzione liscia definita su un aperto stellato di $\mathbb{R}^n$.
1.3 Vettori tangenti. Vettori tangenti in un punto $p \in \mathbb{R}^n$; lo spazio $T_p\mathbb{R}^n$ come insieme dei vettori colonna; derivata direzionale di una funzione liscia rispetto ad un vettore $v \in T_p\mathbb{R}^n$; il germe di una funzione in un punto p; l'insieme dei germi di funzioni $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ definite in un intorno di un punto $p \in \mathbb{R}^n$ é un algebra su $\mathbb{R}$; derivazioni puntuali in un punto $p \in \mathbb{R}^n$; la derivata direzionale $D_v : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ rispetto ad un vettore $v \in T_p\mathbb{R}^n$; l'insieme $\mathrm{Der}(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ delle derivazioni puntuali risulta uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; l'applicazione $\Phi : T_p\mathbb{R}^n \to \mathrm{Der}(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)), v \mapsto D_v$ è un isomorfismo tra spazi vettoriali; base canonica di $\mathrm{Der}(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$.
1.4 Campi di vettori. Campi di vettori su un aperto U di $\mathbb{R}^n$; l'insieme dei campi di vettori lisci $\chi(U)$ formano un $C^\infty(U)$-modulo; derivata di una funzione liscia f rispetto ad un campo di vettori liscio X; campi di vettori lisci su un aperto U di $\mathbb{R}^n$ come derivazioni dell'algebra $C^\infty(U)$.

2. Varietà differenziabili
2.1 Varietà topologiche. Richiami sulle varietà topologiche; dimensione di una varietà topologica e teorema dell'invarianza della dimensione topologica (solo enunciato); esempi e non esempi.
2.2 Varietà differenziabili. Carte compatibili; atlanti differenziabili su uno spazio topologico; atlanti massimali (strutture differenziabili); ogni atlante è contenuto in un unico atlante massimale; varietà differenziabili; esempi di varietà: $\mathbb{R}^n$, aperti di varietà; varietà di dimensione zero; grafici di funzioni; curve e superfici in $\mathbb{R}^3$; il gruppo lineare; il cerchio unitario S^1; la sfera S^n; il prodotto di varietà differenziabili; il toro n-dimensionale.
2.3 Quozienti Topologia quoziente; applicazioni costanti sulle classi di'equivalenza; identificazione di un sottoinsieme ad un suo punto; condizioni affinchè il quoziente di uno spazio topologico sia T_2 e N_2.
2.4 Lo spazio proiettivo reale e la Grassmanniana Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{R}P^n$ come varietà differenziabile di dimensione n; La Grassmanniana dei k-piani in $\mathbb{R}^n$ come varietà differenziabile di dimensione $k(n-k)$.

3. Applicazioni lisce
3.1 Funzioni lisce su varietà Funzione liscie su una varietà a valori reali; funzioni a campana; estensioni di applicazioni lisce.
3.2 Applicazioni lisce tra varietà Applicazioni lisce tra varietà; composizione di applicazioni lisce tra varietà; esempi; diffeomorfismi tra varietà; cenni sull'esistenza e

unicità delle strutture differenziabili su una varietà topologica; esempi di strutture differenziabili diverse su $\mathbb{R}$; le funzioni coordinate sono diffeomorfismi; ogni diffeomorfismo da un aperto di una varietà in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione coordinata.
3.3 Esempi di applicazioni lisce Vari esempi di applicazioni lisce; applicazioni sul prodotto di varietà; definizione di gruppi di Lie; esempi: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(V)$, $(\mathbb{R}^n, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^+, +)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $(S^1, \cdot)$, il prodotto di gruppi di Lie; il toro $\mathbb{T}^n$; un qualunque gruppo finito o numerabile con la topologia discreta è un gruppo di Lie 0-dimensionale.
3.4 Derivate parziali Derivata parziale di una funzione liscia su una varietà; la matrice Jacobiana di un'applicazione liscia tra varietà; lo Jacobiano dell'applicazione di transizione; diffeomorfismi locali e il teorema delle funzione inversa per applicazioni lisce tra varietà.

4. Lo spazio tangente e il differenziale.
4.1 Lo spazio tangente Lo spazio tangente T_pM ad una varietà M in un suo punto p come insieme delle derivazioni puntuali $\mathrm{Der}_p(C_p^\infty(M))$ in p dei germi di funzioni lisce intorno a p; $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, $i = 1, \dots, n$ come elementi della base dello spazio tangente in p ad una varietà differenzibile M di dimensione n.
4.2 Il differenziale Il differenziale di un'applicazione liscia tra varietà differenziabili; il differenziale e lo Jacobiamo: il differenziale e il teorema della funzione inversa; la regola della catena per applicazioni lisce tra varietà; il teorema di invarianza della dimensione nel caso liscio; espressione locale per il differenziale;
4.3 Categorie e funtori (un cenno) Definizione di categorie e funtori tra categorie; esempi; proprietà funtoriali del differenziale; curve su una varietà.
4.4 Curve su varietà curve su varietà e il vettore tangente ad una curva liscia in un suo punto; derivata direzionale in termini di curve; spazio tangente ad una varietà in un suo punto come insieme dei vettori tangenti a curve lisce sulla varietà pasanti per il punto; calcolo del differenziale di un'applicazione liscia tra varietà in termini di curve; il differenziale della traslazione a sinistra in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; differenziale della moltiplicazione e dell'inversione in un gruppo di Lie.

5. Sottovarietà.
5.1 Immersioni e sommersioni Inclusione canonica e proiezione canonica; immerisoni e sommersioni; rango in un punto di un'applicazione liscia tra varietà differenziabili; punti regolari e punti critici, valori regolari e valori critici; esempi; massimi e minimi locali e punti ciritici.
5.2 Sottovarietà Carte adattate; sottovarietà di una varietà è essa stessa una varietà; il teorema della preimmagine di un valore regolare; esempi: la sfera, i grafici, ipersuperfici dello spazio proiettivo reale, il gruppo lineare speciale.
5.3 Il Teorema del rango costante il teorema del rango costante in analisi; il teorema del rango costante per applicazioni lisce tra varietà differenziabili. preimmagine di un'applicazione di rango costante; dimostrazione che il gruppo ortogonale è una sottovarietà del gruppo lineare; dimostrazione che avere rango massimale in un punto è una condizione aperta; il teorema di immersione e di sommersione; una sommersione è un'applicazione aperta; ogni summersione da una varietà campatta ad una varietà connessa è suriettiva; il teorema della preimmagine si deduce anche dal teorema della preimmagine di un'applicazione di rango costante.

5.4 Immersioni e embedding immagine di applicazioni lisce: esistono immersioni iniettive la cui immagine non è una sottovarietà (figura a otto e curva di pendenza irrazionale sul toro); sottovarietà immerse; embedding e sottovarietà; teorema di Whitney (senza dimostrazione); l'inclusione di una sottovarietà è un embedding; applicazioni lisce la cui immagine è contenuta in una (sotto)varietà; la motiplicazione in $SL_n(\mathbb{R})$ è liscia.

6. Il fibrato tangente e i campi di vettori.

6.1 Il fibrato tangente Topologia e struttura differenziabile sul fibrato tangente di una varietà differenziabile;.

6.2 Campi di vettori Campi di vettori su un varietà; criteri affinchè un campo di vettori su una varietà sia liscio; uguaglianza tra campi di vettori; campi di vettori come derivazioni dell'algebra delle funzioni lisce; esempi di campi di vettori sulle sfere.

6.3 Curve integrali e flussi Curve integrali di un campo di vettori; flussi locali e globali; campi di vettori completi.

6.4 Campi di vettori come algebra di Lie Il commutatore (o bracket) di Lie di due campi di vettori; algebre di Lie; pushforward di un campo di vettori tramite un diffeomorfismo; campi di vettori F-related tramite un'applicazione; campi di vettori F-related e commutatore di Lie.

7. Gruppi di Lie

7.1 Gruppi e sottogruppi di Lie. Le traslazioni a sinistra e a destra; omomorfismi e isomorfismi tra gruppi di Lie e le loro principali proprietà; $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$ e $O(n)$ come gruppi di Lie, calcolo della dimensione di $O(n)$ usando il teorema della preimmagine di un valore regolare. Sottogruppi di Lie; se H è un sottogruppo algebrico e una sottovarietà di un gruppo di Lie G allora H è un sottogruppo di Lie di G; sottogruppi di Lie embedded; $SL_n(\mathbb{R})$ e $O(n)$ sono sottogruppi di Lie embedded di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e $SL_n(\mathbb{C})$ è un sottogruppo di Lie embedded di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; esempi di sottogruppi di Lie non embedded.

7.2 L'esponenziale di una matrice. Spazi vettoriali normati; $M_n(\mathbb{R})$ come spazio vettoriale normato; definizione dell'esponenziale di una matrice; algebre normate e loro proprietà; $M_n(\mathbb{R})$ come algebra normata; spazi di Banach e algebre di Banach; in uno spazio di Banach una successione assolutamente convergente è convergente e quindi l'esponenziale di una matrice risulta ben definito; alcune proprietá dell'esponenziale di una matrice.

7.3 Richiami di algebra lineare. Matrici simili e unitariamente simili; teorema di Schur: ogni matrice a entrate complesse é simile ad una matrice triangolare; basi di Schur; matrici normali; il teorema spettrale per matrici normali: ogni matrice normale é unitariamente simile ad una matrice diagonale; forma canonica ortogonale; matrici elementari e operazioni elementari sulle righe e sulle colonne di una matrice; per ogni campo $\mathbb{K}$ e per ogni $n \geq 1$, $SL_n(\mathbb{K})$ é generato da matrici elementari.

7.4 Traccia, determinante e esponenziale di una matrice. Il determinante dell'esponenziale di una matrice é uguale all'esponenziale della traccia della matrice; il differenziale del determinante; ll gruppo lineare speciale $SL_n(\mathbb{R})$ è un sottogruppo di Lie connesso e non compatto di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; il gruppo lineare speciale complesso $SL_n(\mathbb{C})$ è un sottogruppo di Lie connesso e non compatto di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; il gruppo unitario $U(n)$ è un sottogruppo di Lie compatto e connesso di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ di dimensione n^2; il gruppo unitario speciale $SU(n)$ è un sottogruppo di Lie compatto e connesso di $U(n)$ di dimensione $n^2 - 1$; il gruppo ortogonale speciale $SO(n)$ è un sottogruppo di Lie compatto e connesso di $O(n)$; $SO(n)$ è una componente connessa di $O(n)$; esiste un diffeomorfismo tra $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e $SL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$; se n è dispari (pari) allora $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e $SL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (non) sono isomorfi come gruppi di Lie.

8. Algebra di Lie.
8.1 ALgebra di Lie di un gruppo di Lie. Campi di vettori invarianti a sinistra su un gruppo di Lie; algebra di Lie di un gruppo di Lie; calcolo dell'algebra di Lie di $\mathbb{R}^n$, T^n e $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
8.2 Omomorfismi di gruppi di Lie. Push-forward di campi di vettori invarianti a sinistra tramite un omomorfismo di gruppi di Lie; omomorfismo di algebra di Lie indotto da un omomorfismo di gruppi di Lie; calcolo dell'algebra di Lie dei gruppi matriciali.
8.3 Esponenziale di un gruppo di Lie. Flussi (globali) di campi di vettori invarianti a sinistra su un gruppo di Lie e applicazione esponenziale; sottogruppi di Lie ad un parametro di un gruppo di Lie; omomorfismi di gruppi di Lie e applicazione esponenziale; l'applicazione esponenziale di un sottogruppo H di Lie di un gruppo G è la restrizione dell'esponenziale di G; l'applicazione esponenziale di un gruppo matriciale coincide con l'esponenziale di matrici.
8.4 Altri legami tra gruppi e algebre di Lie Classificazione dei gruppi di Lie abeliani e connessi; suriettività dell'applicazione esponenziale: l'applicazione esponenziale di $SL_2(\mathbb{R})$ non é suriettiva; corrispondenza e funtore di Lie; corrispondenza tra i sottogruppi connessi del toro bidimensionale e le sottolagebre della sua algebra di Lie; esempio di omomorfismo suriettivo tra $SU(2)$ e $SO(3)$ e isomorfismo tra le loro algebre di Lie; difffeomorfismo tra $SO(3)$ e $\mathbb{R}P^3$.

Tabella reassuntiva

Gruppo	T_IG	Dimensione	Compatto	Connesso
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$	$M_n(\mathbb{R})$	n^2	no	no
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	$M_n(\mathbb{C})$	$2n^2$	no	si
$SL_n(\mathbb{R})$	$\{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}B = 0\}$	$n^2 - 1$	no	si
$SL_n(\mathbb{C})$	$\{B \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}B = 0\}$	$2n^2 - 2$	no	si
$U(n)$	$\{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid B + B^* = 0\}$	n^2	si	si
$SU(n)$	$\{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid B + B^* = 0 \wedge \mathrm{tr}B = 0\}$	$n^2 - 1$	si	si
$O_n(\mathbb{R})$	$\{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid B + B^T = 0\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	si	si
$SO_n(\mathbb{R})$	$\{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid B + B^T = 0\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	si	si

Testi di riferimento

Lorin, W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer Verlag.
J. Lee, *Introduction to Manifolds*, Springer Verlag.
W. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press.
M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company.
F.W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie grous*, Springer Verlag.