Nome e mail
Matricola

Algebra 2 24 Febbraio 2015

Esercizio 1 Si consideri un esagono regolare inscritto in un cerchio di raggio 1 e centro l'origine del piano complesso. Siano σ la rotazione antioraria di $\frac{\pi}{3}$ radianti con centro l'origine del piano complesso e τ la riflessione dell'esagono rispetto ad una delle sue diagonali grandi. Allora $\sigma, \tau \in S_{\mathbb{C}}$ e σ e τ trasformano l'esagono in se stesso.

(1) Quali sono tutte e sole le altre rotazioni del cerchio su se stesso che trasformano l'esagono in sè?
(2) Qual'è l'ordine del gruppo ciclico $< \sigma >$?
(3) Qual'è l'ordine di τ?
(4) Si provi che $\tau \circ \sigma \circ \tau = \sigma^{-1}$.
(5) Si provi che $G =< \sigma, \tau >$ ha ordine 12 e che $|Z(G)| = 2$.

Esercizio 2 Sia $A = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.

(1) Dimostrare che A è un sottoanello di $M_2(\mathbb{C})$.

(2) Sia $q = a + bi + cj + dk$ un elemento del corpo dei quaternioni $\mathbb{H}$. Si dimostri che l'applicazione $\varphi : \mathbb{H} \to A$ definita da

$$\varphi(q) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \ \alpha = a + bi, \ \beta = c + id \in \mathbb{C}$$

è un isomorfismo di anelli e pertanto di corpi.

(3) Si verifichi che

$$\det(\varphi(q)) = \|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Si deduca che $\|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|$, per ogni $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$.

(4) Si verifichi che l'insieme dei quaternioni di norma 1 è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo $(\mathbb{H}^*, \cdot)$.