

Esercizi sulla teoria degli anelli
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2014-2015
Docente: Andrea Loi

1. (Es 9.19) Sul gruppo abeliano $A = (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$ si consideri la moltiplicazione definita da

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' + yy', xy' + x'y).$$

- (a) Dimostrare che in questo modo $(A, +, \cdot)$ risulta un anello unitario e $\mathbb{R} \times \{0\}$ è un suo sottoanello.
 - (b) Caratterizzare gli elementi invertibili ed i divisori dello zero di A .
 - (c) Dire se esistono elementi che non sono né divisori dello zero né invertibili.
 - (d) Trovare gli ideali massimali di A .
2. (Es. 9.29-9.36) Sia A un anello commutativo unitario e I e J ideali di A . Definiamo

$$IJ = \{i_1 j_1 + \cdots + i_n j_n \mid n \in \mathbb{N}, i_k \in I, j_k \in J, k = 1, \dots, n\}.$$

- (a) Provare che IJ è un ideale di A contenuto nell'ideale $I \cap J$ e mostrare con un esempio che $IJ \neq I \cap J$.
 - (b) Provare che se $A = I + J$ allora $IJ = I \cap J$.
 - (c) Provare che l'affermazione in (b) non è vera se A non è un anello unitario.
 - (d) se I e J sono due ideali massimali distinti, allora $IJ = I \cap J$;
 - (e) se I e J sono ideali principali, $I = (a)$ e $J = (b)$, allora $IJ = (ab)$.
 - (f) descrivere IJ e $I \cap J$ in $A = \mathbb{Z}$ e dedurre quando $IJ = I \cap J$.
3. (Es.9.37) Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$. Provare che A è un sottocampo di $M_2(\mathbb{Z}_3)$. Dimostrare inoltre che (A^*, \cdot) è un gruppo ciclico, determinare l'ordine di A^* e un suo generatore.
4. (Es.9.38) Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Provare che A è un sottocampo di $M_2(\mathbb{R})$ isomorfo a \mathbb{C} .
5. (Es.9.39) Sia A un anello unitario e I un ideale bilatero di A . Dimostrare che l'insieme $U_I = \{x \in U(A) \mid x - 1 \in I\}$ è un sottogruppo normale di $U(A)$.
6. (Es.9.41) Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

- (a) Provare che A è un anello commutativo unitario, ma non è un dominio.
 - (b) Determinare l'ideale $N(A)$ degli elementi nilpotenti di A .
 - (c) Mostrare che ogni ideale proprio di A è contenuto in $N(A)$ e dedurre che A è un anello locale.
 - (d) Determinare tutti gli ideali di A .
7. (Es.9.42) Nell'anello $M_2(\mathbb{Z}_8)$, sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 5b \\ 4b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_8 \right\}$.
- (a) Provare che A è un sottoanello commutativo di $M_2(\mathbb{Z}_8)$.
 - (b) Dire se A è un dominio.

8. (Es.9.43) Fissato un numero razionale m , si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ mb & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Provare che:

- (a) R_m è un sottoanello commutativo unitario di $M_2(\mathbb{Q})$;
 - (b) R_m è un campo se e solo m non è un quadrato di un numero razionale.
9. (Es.9.49) Sia p un primo e $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid n \right\}$.
- (a) Provare che $\mathbb{Z}_{(p)}$ è un sottoanello di \mathbb{Q} .
 - (b) Determinare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{(p)}$.
 - (c) Determinare gli ideali di $\mathbb{Z}_{(p)}$.
 - (d) Determinare gli ideali primi e massimali di $\mathbb{Z}_{(p)}$.
 - (e) Provare che $\mathbb{Z}_{(p)}$ è un anello locale.
10. (Es.9.50) Dimostrare che:
- (a) ogni campo è un anello locale senza elementi nilpotenti non nulli;
 - (b) se \mathbb{Z}_m è locale e non ha elementi nilpotenti non nulli allora \mathbb{Z}_m è un campo;
 - (c) dare un esempio di anello locale senza elementi nilpotenti non nulli che non sia un campo.
11. (Es.9.51) Un anello commutativo unitario si dice *regolare* se per ogni $x \in A$ esiste $y \in A$ tale che $x = yx^2$. Dimostrare che:
- (a) ogni campo è un anello regolare e se A è un dominio regolare allora A è un campo;

- (b) l'anello quoziente di un anello regolare è regolare;
 - (c) in un anello regolare ogni ideale primo è massimale;
 - (d) in un anello regolare ogni ideale principale è generato da un idempotente;
 - (e) se I e J sono due ideali di un anello regolare allora $IJ = I \cap J$;
 - (f) per ogni insieme non vuoto S e per ogni campo K , l'anello K^S è regolare.
12. (Es.10.5-10-6) Sia G un gruppo abeliano ed $End(G)$ l'insieme degli endomorfismi di G . Siano $f, g \in End(G)$ e si definisca $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, per $x \in G$. Sia \circ l'usuale composizione di funzioni, cioè $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ per $x \in G$.
- (a) Si dimostri che $(End(G), +, \circ)$ è un anello unitario.
 - (b) Sia A un anello unitario. Si dimostri che A si può identificare con un sottoanello di $End(G)$ per qualche gruppo abeliano G .
13. (Es.10.8-10-9) Sia G un gruppo abeliano e $f \in A = End(G)$.
- (a) Dimostrare che se f è suriettivo, allora f non è divisore destro dello zero in A .
 - (b) Dimostrare che se f è iniettivo, allora f non è divisore sinistro dello zero in A .
 - (c) Trovare un anello dove esistono divisori sinistri dello zero che non sono divisori destri dello zero (suggerimento: considerare l'anello $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$).
14. (Es.10.10) Sia S un insieme. Nell'insieme $\mathcal{P}(S)$ definiamo l'operazione Δ , chiamata *differenza simmetrica*,
- $$X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y),$$
- per ogni coppia di sottoinsiemi di S .
- (a) Provare che la struttura algebrica $(\mathcal{P}(S), \Delta, \cap)$ è un anello commutativo unitario e che ogni sottoinsieme proprio di S è un divisore dello zero di A .
 - (b) Sia $Y \in \mathcal{P}(S)$: provare che l'applicazione $\varphi : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(S)$, definita da $\varphi(X) = X \setminus Y$ è un omomorfismo di anelli e determinare $\ker \varphi$ e $Im \varphi$.
 - (c) Sia $Y \in \mathcal{P}(S)$: determinare l'ideale (Y) .
 - (d) Se S è finito, provare che ogni ideale di $\mathcal{P}(S)$ è principale.
 - (e) Determinare la caratteristica di $\mathcal{P}(S)$.
15. (Es.10.11) Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$.
- (a) Dimostrare che A è un sottoanello di $M_2(\mathbb{C})$.

- (b) Sia $q = a + bi + cj + dk$ un elemento del corpo dei quaternioni \mathbb{H} . Si dimostri che l'applicazione $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow A$ definita da

$$\varphi(q) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha = a + bi, \quad \beta = c + id \in \mathbb{C}$$

è un isomorfismo di anelli e pertanto di corpi.

- (c) Si verifichi che

$$\det(\varphi(q)) = \|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Si deduca che $\|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|$, per ogni $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$.

- (d) Si verifichi che l'insieme dei quaternioni di norma 1 è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo (\mathbb{H}^*, \cdot) .

16. (Es.10.12) Determinare $\text{End}(A)$ dove A è uno dei seguenti anelli: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.

17. (Es.10.13) Sia $f : A_1 \rightarrow A_2$ un omomorfismo di anelli unitari.

- (a) Provare che $f(U(A_1)) \subset U(A_2)$.
 (b) Considerando l'omomorfismo canonico $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, mostrare che in (a) non vale l'uguaglianza se $n > 6$.

18. (Es. 10.16) Sia A l'anello $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$

- (a) Trovare la caratteristica di A .
 (b) Descrivere gli ideali (primi, massimali e principali) di A .
 (c) Determinare a quale degli anelli $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$ e \mathbb{Z}_{60} è isomorfo l'anello A .
 (d) Descrivere quali sono gli elementi invertibili e gli elementi nilpotenti di A .

19. (Es. 10.20) Sia \mathbb{K} un campo e $A = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ (n fattori). Trovare gli ideali primi e massimali di A .

20. (Es. 10.44) Nell'anello $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si considerino gli ideali $I = (2)$ e $J = (3)$. Dire se gli anelli quoziente A/I e A/J sono campi.

21. (Es. 10.45) Nell'anello $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ sia $A = (5)$ e si consideri l'anello quoziente A/I .

- (a) Provare che se $a \equiv 0 \pmod{5}$, allora l'elemento $a + b\sqrt{5} + I$ è nilpotente.
 (b) Provare che se $a \not\equiv 0 \pmod{5}$, allora l'elemento $a + b\sqrt{5} + I$ è invertibile.
 (c) Determinare gli ideali di A/I .

22. (Es. 10.46) Sia $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Per $\alpha = x + \sqrt{5}y \in A$ definiamo la norma di α come $N(\alpha) = x^2 - 5y^2$. Dimostrare che $M = \{\alpha \in A \mid N(\alpha) \text{ pari}\}$ è un ideale massimale di A .