

**Spazio tangente e il differenziale**  
**Corso di Laurea in Matematica A.A. 2024-2025**  
**Docente: Andrea Loi**

1. Sia  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, xy)$ . Sia  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Trovare  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tali che:

$$F_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p\right) = a\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{F(p)} + b\frac{\partial}{\partial v}\Big|_{F(p)} + c\frac{\partial}{\partial w}\Big|_{F(p)}.$$

2. Siano  $x, y$  le coordinate standard su  $\mathbb{R}^2$  e  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . In  $U$  le coordinate polari  $(\rho, \theta)$ ,  $\rho > 0, \theta \in (0, 2\pi)$  sono definite come  $x = \rho \cos \theta$  e  $y = \rho \sin \theta$ . Si scrivano  $\frac{\partial}{\partial \rho}$  e  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  in funzione di  $\frac{\partial}{\partial x}$  e  $\frac{\partial}{\partial y}$ .

3. Sia  $p = (x, y)$  un punto di  $\mathbb{R}^2$ . Allora

$$c_p(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

é una curva liscia in  $\mathbb{R}^2$  che inizia in  $p$ . Calcolare  $c'(0)$ .

4. Siano  $M$  e  $N$  varietà differenziabili e  $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$  e  $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$  le proiezioni naturali. Dimostrare che per  $(p, q) \in M \times N$  l'applicazione

$$(\pi_{1*}p, \pi_{2*}q) : T_{(p,q)}(M \times N) \rightarrow T_p M \times T_q N$$

é un isomorfismo.

5. Calcolare il differenziale dell'applicazione antipodale  $S^n \rightarrow S^n$ ,  $x \mapsto -x$  in un punto  $x \in S^n$ .
6. Dimostrare che  $\mathcal{Vett}$  è una categoria.
7. Dimostrare che  $\mathcal{Top}$  è una categoria.
8. Dimostrare che  $\mathcal{Var}$  è una categoria.
9. Dimostrare che  $\mathcal{Varp}$  è una categoria.
10. Dimostrare che l'applicazione che ad uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{R}$  associa il suo duale  $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$  e che ad  $L \in \text{Hom}(V, W)$  associa  $L^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$  definito da

$$L^*(\alpha) = \alpha \circ L, \quad \forall \alpha \in W^*.$$

definisce un funtore controvariante dalla categoria  $\mathcal{Vett}$  degli spazi vettoriali in se stessa.