

**PROGRAMMA DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE**  
**Corso di Laurea in Matematica A.A. 2022-2023, primo semestre**  
**Docente: Andrea Loi**

**1. Geometria differenziale in  $\mathbb{R}^n$**

**1.1 Funzioni lisce e reali analitiche.** Richiami sulle funzioni lisce e reali analitiche su aperti di  $\mathbb{R}^n$ ; funzioni  $C^k$  ma non  $C^{k+1}$ ; esempi di funzioni lisce che non sono reali analitiche.

**1.2 Diffeomorfismi e la formula di Taylor** Diffeomorfismi tra aperti di  $\mathbb{R}^n$  (applicazioni lisce, bigettive con inversa liscia); esistono funzioni bigettive e lisce che non sono diffeomorfismi; gli intervalli aperti limitati o illimitati di  $\mathbb{R}$  sono diffeomorfi; il prodotto di  $n$  intervalli aperti di  $\mathbb{R}$  risulta diffeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ ; una palla aperta di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^n$  sono diffeomorfi; sviluppo di Taylor con resto intorno ad un punto  $p$  di una funzione liscia definita su un aperto stellato di  $\mathbb{R}^n$ .

**1.3 Vettori tangenti.** Vettori tangenti in un punto  $p \in \mathbb{R}^n$ ; lo spazio  $T_p\mathbb{R}^n$  come insieme dei vettori colonna; derivata direzionale di una funzione liscia rispetto ad un vettore  $v \in T_p\mathbb{R}^n$ ; il germe di una funzione in un punto  $p$ ; l'insieme dei germi di funzioni  $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$  definite in un intorno di un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  è un'algebra su  $\mathbb{R}$ ; derivazioni puntuali in un punto  $p \in \mathbb{R}^n$ ; la derivata direzionale  $D_v : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  rispetto ad un vettore  $v \in T_p\mathbb{R}^n$ ; l'insieme  $\text{Der}(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$  delle derivazioni puntuali risulta uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ ; l'applicazione  $\Phi : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow \text{Der}(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)), v \mapsto D_v$  è un isomorfismo tra spazi vettoriali; base canonica di  $\text{Der}(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ .

**1.4 Campi di vettori.** Campi di vettori su un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^n$ ; l'insieme dei campi di vettori lisci  $\chi(U)$  formano un  $C^\infty(U)$ -modulo; derivata di una funzione liscia  $f$  rispetto ad un campo di vettori liscio  $X$ ; campi di vettori lisci su un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^n$  come derivazioni dell'algebra  $C^\infty(U)$ .

**2. Varietà differenziabili**

**2.1 Varietà topologiche.** Richiami sulle varietà topologiche; dimensione di una varietà topologica e teorema dell'invarianza della dimensione topologica (solo enunciato); esempi e non esempi.

**2.2 Varietà differenziabili.** Carte compatibili; atlanti differenziabili su uno spazio topologico; atlanti massimali (strutture differenziabili); ogni atlante è contenuto in un unico atlante massimale; varietà differenziabili; esempi di varietà:  $\mathbb{R}^n$ , aperti di varietà; varietà di dimensione zero; grafici di funzioni; curve e superfici in  $\mathbb{R}^3$ ; il gruppo lineare; il cerchio unitario  $S^1$ ; la sfera  $S^n$ ; il prodotto di varietà differenziabili; il toro  $n$ -dimensionale.

**2.3 Quozienti** Topologia quoziente; applicazioni costanti sulle classi di equivalenza; identificazione di un sottoinsieme ad un suo punto; condizioni affinché il quoziente di uno spazio topologico sia  $T_2$  e  $N_2$ .

**2.4 Lo spazio proiettivo reale e la Grassmanniana** Lo spazio proiettivo reale  $\mathbb{R}P^n$  come varietà differenziabile di dimensione  $n$ ; La Grassmanniana dei  $k$ -piani in  $\mathbb{R}^n$  come varietà differenziabile di dimensione  $k(n - k)$ .

**3. Applicazioni lisce**

**3.1 Funzioni lisce su varietà** Funzione lisce su una varietà a valori reali; funzioni a campana; estensioni di applicazioni lisce.

**3.2 Applicazioni lisce tra varietà** Applicazioni lisce tra varietà; composizione di applicazioni lisce tra varietà; esempi; diffeomorfismi tra varietà; cenni sull'esistenza

e unicità delle strutture differenziabili su una varietà topologica; esempi di strutture differenziabili diverse su  $\mathbb{R}$ ; le funzioni coordinate sono diffeomorfismi; ogni diffeomorfismo da un aperto di una varietà in  $\mathbb{R}^n$  è un'applicazione coordinata; altri esempi di applicazioni lisce: le proiezioni; applicazioni sul prodotto di varietà.

**3.3 Gruppi di Lie** Definizione di gruppi di Lie; esempi:  $GL_n(\mathbb{R})$ ,  $GL_n(\mathbb{C})$ ,  $GL(V)$ ,  $(\mathbb{R}^n, +)$ ,  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}^+, +)$ ,  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ ,  $(S^1, \cdot)$ , il prodotto di gruppi di Lie; il toro  $\mathbb{T}^n$ ; un qualunque gruppo finito o numerabile con la topologia discreta è un gruppo di Lie 0-dimensionale.

**3.4 Derivate parziali** Derivata parziale di una funzione liscia su una varietà; la matrice Jacobiana di un'applicazione liscia tra varietà; lo Jacobiano dell'applicazione di transizione; diffeomorfismi locali e il teorema della funzione inversa per applicazioni lisce tra varietà.

#### 4. Lo spazio tangente e il differenziale.

**4.1 Lo spazio tangente** Lo spazio tangente  $T_p M$  ad una varietà  $M$  in un suo punto  $p$  come insieme delle derivazioni puntuali  $\text{Der}_p(C_p^\infty(M))$  in  $p$  dei germi di funzioni lisce intorno a  $p$ ;  $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ ,  $i = 1, \dots, n$  come elementi della base dello spazio tangente in  $p$  ad una varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$ .

**4.2 Il differenziale** Il differenziale di un'applicazione liscia tra varietà differenziabili; il differenziale e lo Jacobiano: il differenziale e il teorema della funzione inversa; la regola della catena per applicazioni lisce tra varietà; il teorema di invarianza della dimensione nel caso liscio; espressione locale per il differenziale;

**4.3 Categorie e funtori (un cenno)** Definizione di categorie e funtori tra categorie; esempi; proprietà functoriali del differenziale; curve su una varietà.

**4.4 Curve su varietà** curve su varietà e il vettore tangente ad una curva liscia in un suo punto; derivata direzionale in termini di curve; spazio tangente ad una varietà in un suo punto come insieme dei vettori tangenti a curve lisce sulla varietà passanti per il punto; calcolo del differenziale di un'applicazione liscia tra varietà in termini di curve; il differenziale della traslazione a sinistra in  $GL_n(\mathbb{R})$ ; differenziale della moltiplicazione e dell'inversione in un gruppo di Lie.

#### 5. Sottovarietà.

**5.1 Immersioni e sommersioni** Inclusione canonica e proiezione canonica; immersioni e sommersioni; rango in un punto di un'applicazione liscia tra varietà differenziabili; punti regolari e punti critici, valori regolari e valori critici; esempi; massimi e minimi locali e punti critici.

**5.2 Sottovarietà** Carte adattate; sottovarietà di una varietà è essa stessa una varietà; il teorema della preimmagine di un valore regolare; esempi: la sfera, i grafici, ipersuperfici dello spazio proiettivo reale, il gruppo lineare speciale.

**5.3 Il Teorema del rango costante** il teorema del rango costante in analisi; il teorema del rango costante per applicazioni lisce tra varietà differenziabili. preimmagine di un'applicazione di rango costante; dimostrazione che il gruppo ortogonale è una sottovarietà del gruppo lineare; dimostrazione che avere rango massimale in un punto è una condizione aperta; il teorema di immersione e di sommersione; una sommersione è un'applicazione aperta; ogni sommersione da una varietà compatta ad una varietà connessa è suriettiva; il teorema della preimmagine si deduce anche dal teorema della preimmagine di un'applicazione di rango costante.

**5.4 Immersioni e embedding** immagine di applicazioni lisce: esistono immersioni iniettive la cui immagine non è una sottovarietà (figura a otto e curva di pendenza irrazionale sul toro); sottovarietà immerse; embedding e sottovarietà; teorema di Whitney (senza dimostrazione); l'inclusione di una sottovarietà è un embedding; applicazioni lisce la cui immagine è contenuta in una (sotto)varietà; la moltiplicazione in  $SL_n(\mathbb{R})$  è liscia.

## 6. Il fibrato tangente e i campi di vettori.

**6.1 Il fibrato tangente** Topologia e struttura differenziabile sul fibrato tangente di una varietà differenziabile;.

**6.2 Campi di vettori** Campi di vettori su una varietà; criteri affinché un campo di vettori su una varietà sia liscio; uguaglianza tra campi di vettori; campi di vettori come derivazioni dell'algebra delle funzioni lisce; esempi di campi di vettori sulle sfere.

**6.3 Curve integrali e flussi** Curve integrali di un campo di vettori; flussi locali e globali; campi di vettori completi.

**6.4 Campi di vettori come algebra di Lie** Il commutatore (o bracket) di Lie di due campi di vettori; algebre di Lie; pushforward di un campo di vettori tramite un diffeomorfismo; campi di vettori  $F$ -related tramite un'applicazione; campi di vettori  $F$ -related e commutatore di Lie.

## 7. Gruppi di Lie

**7.1 Gruppi e sottogruppi di Lie.** Le traslazioni a sinistra e a destra; omomorfismi e isomorfismi tra gruppi di Lie e le loro principali proprietà;  $SL_n(\mathbb{R})$ ,  $SL_n(\mathbb{C})$  e  $O(n)$  come gruppi di Lie, calcolo della dimensione di  $O(n)$  usando il teorema della preimmagine di un valore regolare. Sottogruppi di Lie; se  $H$  è un sottogruppo algebrico e una sottovarietà di un gruppo di Lie  $G$  allora  $H$  è un sottogruppo di Lie di  $G$ ; sottogruppi di Lie embedded;  $SL_n(\mathbb{R})$  e  $O(n)$  sono sottogruppi di Lie embedded di  $GL_n(\mathbb{R})$  e  $SL_n(\mathbb{C})$  è un sottogruppo di Lie embedded di  $GL_n(\mathbb{C})$ ; esempi di sottogruppi di Lie non embedded.

**7.2 L'esponenziale di una matrice.** Spazi vettoriali normati;  $M_n(\mathbb{R})$  come spazio vettoriale normato; definizione dell'esponenziale di una matrice; algebre normate e loro proprietà;  $M_n(\mathbb{R})$  come algebra normata; spazi di Banach e algebre di Banach; in uno spazio di Banach una successione assolutamente convergente è convergente e quindi l'esponenziale di una matrice risulta ben definito; alcune proprietà dell'esponenziale di una matrice.

**7.3 Richiami di algebra lineare.** Matrici simili e unitariamente simili; teorema di Schur: ogni matrice a entrate complesse è simile ad una matrice triangolare; basi di Schur; matrici normali; il teorema spettrale per matrici normali: ogni matrice normale è unitariamente simile ad una matrice diagonale; forma canonica ortogonale; matrici elementari e operazioni elementari sulle righe e sulle colonne di una matrice; per ogni campo  $\mathbb{K}$  e per ogni  $n \geq 1$ ,  $SL_n(\mathbb{K})$  è generato da matrici elementari.

**7.4 Traccia, determinante e esponenziale di una matrice.** Il determinante dell'esponenziale di una matrice è uguale all'esponenziale della traccia della matrice; il differenziale del determinante; Il gruppo lineare speciale  $SL_n(\mathbb{R})$  è un sottogruppo di Lie connesso e non compatto di  $GL_n(\mathbb{R})$ ; il gruppo lineare speciale complesso  $SL_n(\mathbb{C})$  è un sottogruppo di Lie connesso e non compatto di  $GL_n(\mathbb{C})$ ; il gruppo unitario  $U(n)$  è un sottogruppo di Lie compatto e connesso di  $GL_n(\mathbb{C})$  di dimensione  $n^2$ ; il gruppo unitario speciale  $SU(n)$  è un sottogruppo di Lie compatto e connesso di  $U(n)$  di dimensione  $n^2 - 1$ ; il gruppo ortogonale speciale  $SO(n)$  è un sottogruppo di Lie compatto e

connesso di  $O(n)$ ;  $SO(n)$  è una componente connessa di  $O(n)$ ; esiste un diffeomorfismo tra  $GL_n(\mathbb{R})$  e  $SL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; se  $n$  è dispari (pari) allora  $GL_n(\mathbb{R})$  e  $SL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (non) sono isomorfi come gruppi di Lie.

## 8. Algebra di Lie.

**8.1 Algebra di Lie di un gruppo di Lie.** Campi di vettori invarianti a sinistra su un gruppo di Lie; algebra di Lie di un gruppo di Lie; calcolo dell'algebra di Lie di  $\mathbb{R}^n$ ,  $T^n$  e  $GL_n(\mathbb{R})$ .

**8.2 Omomorfismi di gruppi di Lie.** Push-forward di campi di vettori invarianti a sinistra tramite un omomorfismo di gruppi di Lie; omomorfismo di algebra di Lie indotto da un omomorfismo di gruppi di Lie; calcolo dell'algebra di Lie dei gruppi matriciali.

**8.3 Esponenziale di un gruppo di Lie.** Flussi (globali) di campi di vettori invarianti a sinistra su un gruppo di Lie e applicazione esponenziale; sottogruppi di Lie ad un parametro di un gruppo di Lie; omomorfismi di gruppi di Lie e applicazione esponenziale; l'applicazione esponenziale di un sottogruppo  $H$  di Lie di un gruppo  $G$  è la restrizione dell'esponenziale di  $G$ ; l'applicazione esponenziale di un gruppo matriciale coincide con l'esponenziale di matrici.

**8.4 Altre legami tra gruppi e algebre di Lie** Classificazione dei gruppi di Lie abeliani e connessi; suriettività dell'applicazione esponenziale: l'applicazione esponenziale di  $SL_2(\mathbb{R})$  non è suriettiva; corrispondenza e funtore di Lie; corrispondenza tra i sottogruppi connessi del toro bidimensionale e le sottolagere della sua algebra di Lie; esempio di omomorfismo suriettivo tra  $SU(2)$  e  $SO(3)$  e isomorfismo tra le loro algebre di Lie; diffeomorfismo tra  $SO(3)$  e  $\mathbb{R}P^3$ .

### Tabella riassuntiva

Gruppo	$T_I G$	Dimensione	Compatto	Connesso
$GL_n(\mathbb{R})$	$M_n(\mathbb{R})$	$n^2$	no	no
$GL_n(\mathbb{C})$	$M_n(\mathbb{C})$	$2n^2$	no	si
$SL_n(\mathbb{R})$	$\{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr} B = 0\}$	$n^2 - 1$	no	si
$SL_n(\mathbb{C})$	$\{B \in M_n(\mathbb{C}) \mid \text{tr} B = 0\}$	$2n^2 - 2$	no	si
$U(n)$	$\{B \in GL_n(\mathbb{C}) \mid B + B^* = 0\}$	$n^2$	si	si
$SU(n)$	$\{B \in GL_n(\mathbb{C}) \mid B + B^* = 0 \wedge \text{tr} B = 0\}$	$n^2 - 1$	si	si
$O_n(\mathbb{R})$	$\{B \in GL_n(\mathbb{R}) \mid B + B^T = 0\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	si	si
$SO_n(\mathbb{R})$	$\{B \in GL_n(\mathbb{R}) \mid B + B^T = 0\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	si	si

### Testi di riferimento

**Lorin, W. Tu**, *An Introduction to Manifolds*, Springer Verlag.

**J. Lee**, *Introduction to Manifolds*, Springer Verlag.

**W. Boothby**, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press.

**M. Spivak**, *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company.

**F.W. Warner**, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie groups*, Springer Verlag.