3.6 Esercizi

Esercizio 3.1 Dire quali dei seguenti insiemi H sono sottogruppi del gruppo G indicato:

1. $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = \{\ln a \mid a \in \mathbb{Q},\ a > 0\}$;
2. $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = \{\ln n \mid n \in \mathbb{Z},\ n > 0\}$;
3. $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = \{x \in \mathbb{R} \mid \tan x \in \mathbb{Q}\}$;
4. $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $H = \{2^n 3^m \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$;
5. $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y) \mid y = 2x\}$.

Esercizio 3.2 Si consideri l'insieme $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\}$ con l'operazione binaria definita da

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b).$$

Dopo aver verificato che $(G, \cdot)$ é un gruppo, si verifichi che $H = \{(a, b) \in G \mid b = 0\} < G$.

Esercizio 3.3 Sia X un insieme e sia Δ_X la differenza simmetrica, cioé l'operazione su $\mathcal{P}(X)$ definita da:

$$A, B \in \mathcal{P}(X), A\Delta_X B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Si dimostri che $(\mathcal{P}(X), \Delta_X)$ é un gruppo abeliano. Sia $Y \subseteq X$. Si dimostri che $(\mathcal{P}(Y), \Delta_Y) \leq (\mathcal{P}(X), \Delta_X)$.

Esercizio 3.4 Si dimostri che l'insieme G delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ con l'operazione definita da

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

é un gruppo abeliano e che i seguenti sottoinsiemi sono sottogruppi di G.

1. $C(\mathbb{R}) = \{$funzioni continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$;
2. $D(\mathbb{R}) = \{$funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$;
3. $I(\mathbb{R}) = \{$funzioni integrabili $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Esercizio 3.5 In ognuno dei casi seguenti mostrare che H é un sottogruppo di S_X.

1. $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, 1\}$, $H = \{id, f, g\}$, dove $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{x-1}{x}$;
2. $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, $H = \{id, f, g, h\}$, dove $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -x$ $h(x) = -\frac{1}{x}$;
3. $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, 1\}$, $H = \{id, f, g, h, j, k\}$, dove $f(x) = 1 - x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = -\frac{1}{1-x}$, $j(x) = -\frac{x-1}{x}$ e $k(x) = -\frac{x}{x-1}$.

Esercizio 3.6 Per ogni coppia di numeri reali a, b, $a \neq 0$, si definisca la funzione $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$. Si dimostri che:

1. $f_{a,b} \in \mathrm{S}_{\mathbb{R}}$;
2. $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac,ad+b}$;
3. $f^{-1}_{a,b} = f_{a^{-1},-ba^{-1}}$;
4. $H = \{f_{a,b} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*\} < S_{\mathbb{R}}$.

Esercizio 3.7 Sia $G = D_n$, $n \geq 3$, il gruppo diedrale. Dimostrare che G ha esattemente n elementi di ordine 2 se e solo se n é dispari. Nel caso che n sia dispari dimostrare che gli n elementi di G che non hanno ordine 2 formano un sottogruppo abeliano di G.

Esercizio 3.8 Sia X un insieme finito e A un sottoinsieme di X. Sia H il sottoinsieme di S_X che consiste di tutte le permutazioni $f \in S_X$ tale che $f(x) \in A$, per ogni $x \in A$.

1. Dimostrare che $H < S_X$;
2. Fornire un esempio dove la conclusione del punto precedente non vale se X é un insieme infinito.

Esercizio 3.9

(1) Dimostrare che l'insieme delle trasposizioni di S_n genera S_n;

(2) Dimostrare che l'insieme $\{(12), (13), \ldots, (1n)\}$ genera S_n;

(3) Dimostrare che i cicli di lunghezza 3 generano A_n, for $n \geq 3$;

(4) Dimostrare che l'insieme $\{(123), (124), \ldots, (12n)\}$ genera A_n;

(5) Dimostrare che S_n é generato da $\{(12), (12 \ldots n)\}$.

(Suggerimento: per (3) usare $(13)(12) = (123)$ e $(12)(34) = (321)(134)$; per (4) usare $(abc) = (1ca)(1ab)$, $(1ab) = (1b2)(12a)(12b)$ e $(1b2) = (12b)^2$; per (5) usare $(1\dots n)(12)(1\dots n)^{-1} = (23)$ e $(12)(23)(12) = (13)$).

Esercizio 3.10 Siano H e K sottogruppi di un gruppo finito G tali che $H \leq K \leq G$. Si dimostri che $[G : H] = [G : K][K : H]$.