

24. Serie temporali

Corso di Python per il Calcolo Scientifico

Outline

- Cosa è una serie temporale?
- Stazionarietà
- Trend
- Stagionalità
- Ulteriori componenti di una serie temporale
- Decomposizione STL
- I modelli ARIMA

Cosa è una serie temporale?

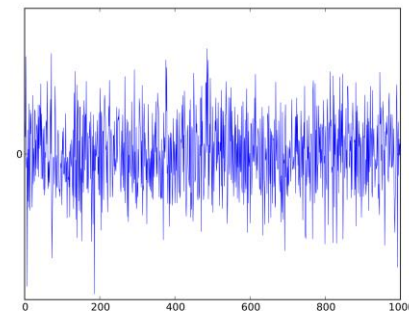
- Una definizione intuitiva di serie temporale è quella di **sequenza di campioni i cui parametri variano nel tempo**.
- Occorre anche sottolineare che le caratteristiche della serie in un dato istante t dipendono dai valori assunti dalla stessa negli istanti precedenti.
- In altri termini:

$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_n y(t-n)$$

- La precedente, ovviamente, vale nel *caso più semplice*.

Stazionarietà (1)

- Una proprietà desiderabile nell'analisi delle serie temporali è che queste risultino **stazionarie**.
- Ciò implica che le loro proprietà statistiche rimangano costanti nel tempo.
- Quale tra queste due serie temporali è stazionaria?



Stazionarietà (2)

- È possibile trasformare una serie, rendendola stazionaria.
- Esistono diversi modi per farlo; quello più semplice è **differenziare** la serie temporale.
- Per farlo, dovremo considerare la differenza tra il valore assunto dalla serie ad un generico istante t e quello assunto dalla stessa in un istante precedente $t - n$, con $n \geq 1$.
- In pratica:

$$y_d = y(t) - y(t - n)$$

- Molto spesso, si usa un valore di t pari ad 1.

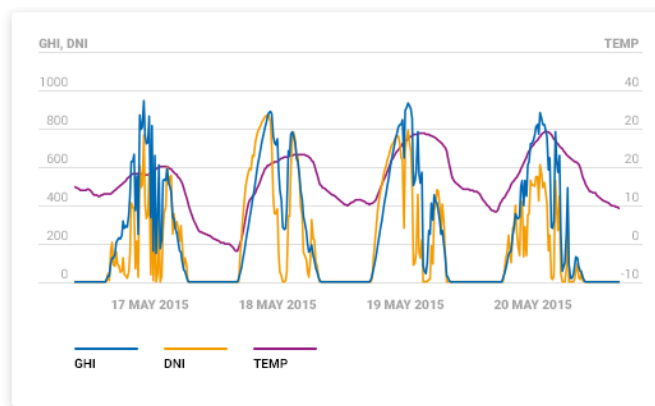
Trend

- Le serie temporali sono caratterizzate da uno o più **trend**, rappresentativi del generico andamento della serie.
- Nella seguente immagine, vediamo l'andamento dell'indice di borsa italiano (FTSE MIB) da marzo 2020 a maggio 2021. Possiamo ragionevolmente affermare che il trend risulta essere positivo.



Stagionalità

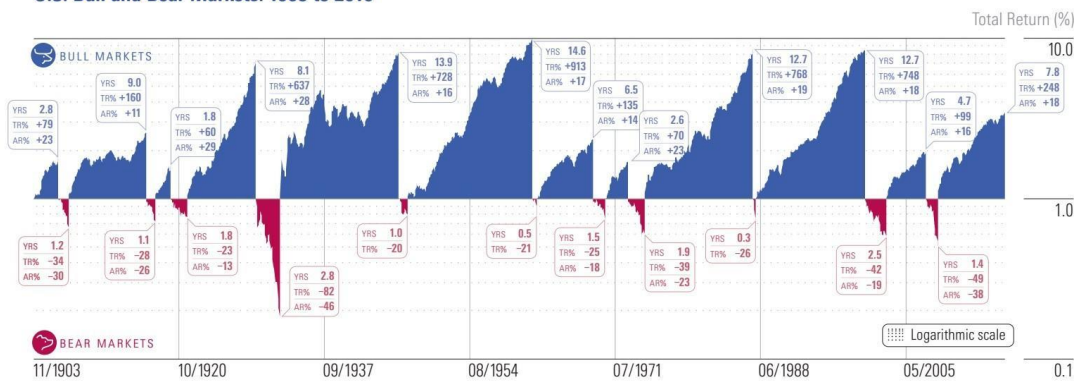
- La **stagionalità** è un contributo **regolare e predicibile** che occorre con una frequenza costante.
- Un esempio di stagionalità è mostrato dall'andamento della temperatura nell'arco di un anno, o anche alla produzione giornaliera di un impianto fotovoltaico.



Ulteriori componenti di una serie temporale

- Oltre che di trend e stagionalità, occorre tenere conto del **rumore**, ovvero di una componente supposta casuale che provoca fluttuazioni di entità limitata, e di una **componente ciclica**, che caratterizza pattern ad intervalli di tempo **irregolari**. Un esempio di quest'ultima si trova nei cicli dei mercati finanziari.

U.S. Bull and Bear Markets: 1903 to 2016



Bull markets are defined from the lowest close reached after the market has fallen 20% or more to next market high.
Bear markets are defined from the last market high before the market closing down at least 20% to the lowest close after it's down 20% or more.

Source: Robert Shiller's data library. Calculations by Newfound Research.

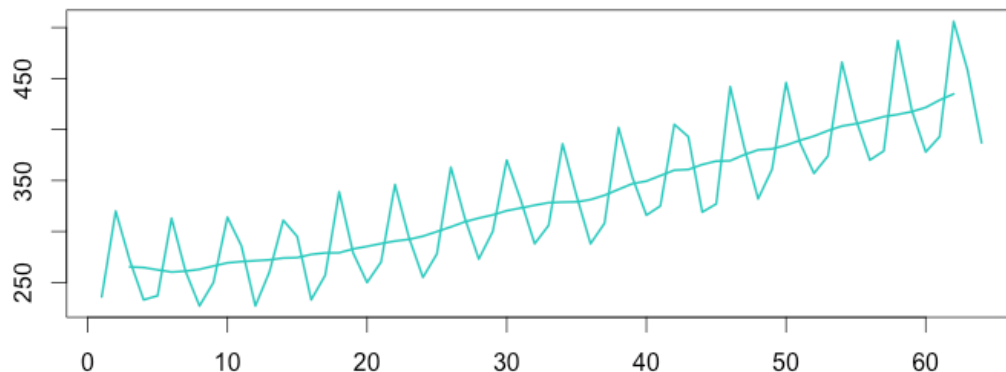
Decomposizione STL (1)

- La tecnica della **decomposizione STL** permette di suddividere una serie temporale nelle diverse componenti specifiche.
- In particolare, è possibile individuare le componenti legate al trend ed alla stagionalità, oltre che il rumore.
- Concettualmente, l'algoritmo di decomposizione si articola in quattro step.
 1. Nel primo, viene individuato ed isolato un trend.
 2. Nel secondo, il trend viene rimosso dalla serie temporale.
 3. Nel terzo, viene individuata la media sulla base della stagionalità.
 4. Nel quarto ed ultimo, viene esaminato il contributo legato al rumore.

Decomposizione STL (2)

1. Individuazione ed isolamento del trend.

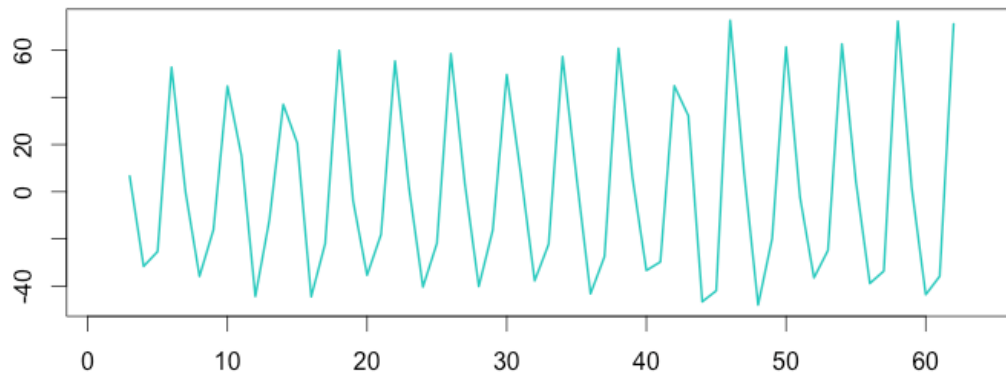
In tal senso, è possibile usare una funzione a media mobile, come quella descritta a [questo link](#).



Decomposizione STL (3)

2. Rimozione del trend.

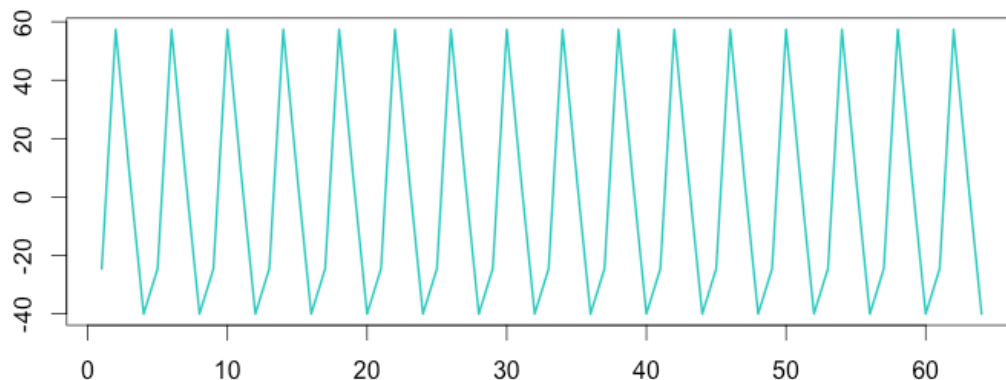
Dovremo adesso sottrarre il valore trovato in precedenza dal valore effettivamente assunto dalla serie.



Decomposizione STL (3)

3. Individuazione della media su base stagionale.

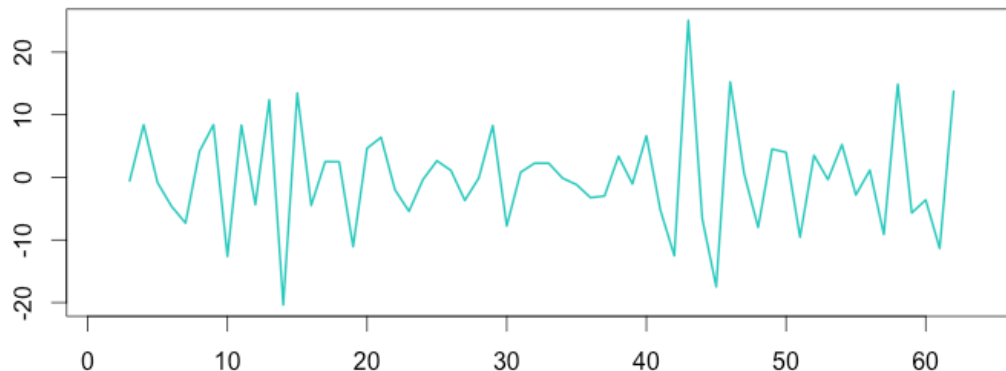
È possibile farlo calcolando il valore medio sulla base di n stagionalità.
Ovviamente, sono preferibili valori elevati di n .



Decomposizione STL (4)

4. Analisi del contributo legato al rumore.

Consideriamo il rumore come la differenza tra i valori veri della serie ed i contributi legati a trend e stagionalità.



I modelli ARIMA (1)

- La decomposizione STL è molto semplice, ma ha alcuni limiti notevoli.
- Infatti, il presupposto alla base della decomposizione STL è che vi sia sempre un contributo dato dalla stagionalità, e che il trend sia calcolabile mediante interpolazione della serie de-stagionalizzata.
- Esiste una classe di modelli (lineari) che offre un maggior controllo sulle singole componenti della serie temporale.
- Questa classe di modelli è definita dagli **ARIMA** e tutti i loro derivati.

I modelli ARIMA (2)

- I modelli ARIMA sono composti da tre parti.
- La prima è una parte **autoregressiva (AR)**, che mette in relazione il valore attuale della serie con quello assunto dalla stessa negli istanti di tempo precedenti.
- Ad esempio, un processo puramente AR di ordine n è espresso come:

$$y(t) = a_0 + a_1 y(t - n) + \dots + a_{n-1} y(t - 1)$$

- La seconda parte è data da un contributo a **media mobile (MA, moving average)** che valuta l'errore di regressione all'istante attuale come combinazione lineare degli errori agli istanti precedenti.
- Un processo puramente MA di ordine q è dato da:

$$y(t) = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

I modelli ARIMA (3)

- La terza parte è la parte **integrativa** (I), che indica quante volte differenziare la serie temporale per raggiungere la stazionarietà.
- I modelli ARIMA possono essere ulteriormente estesi.
- Considerando la presenza di variabili esterne al processo, o *esogene*, si utilizzano i cosiddetti modelli **ARIMAX**.
- Se invece si considera una componente stagionale, è possibile ottenere un modello **SARIMA**.
- Combinando i due modelli precedenti si ottiene un **SARIMAX**.

Domande?

42