

Norma inducida y bases ortonormales

Observación 0.1. *Las ideas principales a presentar en este video son:*

- (I) *Por definición, un producto escalar positivo en un espacio vectorial induce una norma en ese espacio. Aunque no todas las normas provienen de un producto escalar positivo definido¹, en esta serie de videos nos enfocaremos en este tipo de normas.*
- (II) *La norma nos da una noción de magnitud de un vector, y nos permite hacer comparaciones entre vectores en este sentido.*
- (III) *Todo vector no nulo puede ser reescalado de tal forma que el vector resultante tenga norma unitaria. A este tipo de vectores se les conoce como vectores unitarios. En particular, un conjunto en el que todos los vectores son unitarios y ortogonales entre sí se conoce como conjunto ortonormal.*
- (IV) *Si un espacio vectorial con producto escalar tiene dimensión finita y existe una base ortonormal, entonces el problema de encontrar los coeficientes necesarios para expresar a un vector arbitrario como combinación lineal de esta base tiene una solución extremadamente simple.*

¹Colocar ejemplos de normas no inducidas por productos escalares positivo definidos en la descripción.

1. Primera escena

2. Segunda escena

3. Tercera escena

Hablar sobre la notación $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} \equiv \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \equiv \hat{u}$ para $\vec{u} \neq \vec{0}$ y demostrar que $\|\hat{u}\| = 1$.

4. Cuarta escena

5. Escena final

Ejercicio 2.1 Demuestra que todo conjunto ortonormal es linealmente independiente.

Ejercicio 2.2

Ejercicio 2.¿? Una *métrica* o *función de distancia* en un conjunto X es una función $f(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ que cumple las siguientes propiedades:

- (I) $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$;
- (II) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$;
- (III) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$.

Demuestra que si (V, K) es un espacio vectorial con norma $\|\cdot\|$, entonces la función dada por $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$ es una métrica en V . Por lo tanto, toda norma *induce* una métrica. En particular, se sigue que todo producto escalar positivo definido induce una métrica; sin embargo, existen métricas que no son inducidas por normas ni productos escalares.

Pregunta