Ortogonalización y ortonormalización (Proceso de Gram-Schmidt)

Observación 0.1. *Hemos visto ya la utilidad de las bases ortogonales y ortonormales —y, a través de ellas, la interpretación del producto escalar y la norma inducida— sin, hasta el momento, haber justificado su existencia. En este video, mostraremos cómo a partir de un conjunto linealmente dependiente finito se puede producir un conjunto ortogonal linealmente independiente u ortonormal que genere el mismo subespacio vectorial. Este resultado se conoce como el Teorema de Gram-Schmidt, y un corolario de este teorema es que las bases ortogonales y ortonormales siempre existen en espacios vectoriales con producto escalar de dimensión finita.*

Observación 0.2. *Siguiendo de la observación 0.1, las ideas principales a presentar en este video son:*

(I) *En un espacio vectorial real, a partir de cualquier conjunto linealmente independiente de dos vectores se puede obtener —mediante la modificación de uno de ellos con las operaciones de suma vectorial, producto de un vector por un escalar, y producto escalar— un conjunto ortogonal linealmente independiente que genere el mismo subespacio vectorial que el conjunto original (de hecho, se pueden obtener dos, dependiendo de cuál de los vectores modificamos), y lo mismo para conjuntos ortonormales.*

(II) *En un espacio vectorial real, a partir de cualquier conjunto linealmente independiente de tres vectores se puede obtener un conjunto ortogonal linealmente independiente que genere el mismo subespacio vectorial que el conjunto original (de hecho, se pueden obtener seis, dependiendo de cuál de ellos no modificamos), y lo mismo para conjuntos ortonormales.*

(III) *En un espacio vectorial arbitrario, a partir de cualquier conjunto linealmente independiente finito se pueden obtener conjuntos ortogonales linealmente independientes que generen el mismo subespacio que el conjunto original —y lo mismo para conjuntos ortonormales — mediante procesos algorítmicos finitos. Como consecuencia, todos los espacios vectoriales con producto escalar de dimensión finita tienen bases ortogonales y ortonormales.*

1. Primera escena (95 %)

Supongamos que, en un espacio vectorial real con producto escalar, tenemos un conjunto de dos vectores linealmente independientes[1], pero no ortogonales entre sí, y que queremos modificar a alguno de ellos, utilizando las operaciones disponibles[2], de tal forma que obtengamos un conjunto de dos vectores linealmente independientes y *ortogonales*[3] que genere el mismo subespacio vectorial que el conjunto original[4], el cual mostraremos a continuación.

Por definición, el hecho de que nuestros vectores no sean ortogonales significa que su producto escalar es distinto de cero[5], por lo que la proyección vectorial[6] de cualquiera de ellos sobre el otro es distinta del vector nulo. Dicho de otra forma, cada uno de los vectores debe tener una componente no nula en el subespacio generado por el otro vector, por la propiedad[7] de simetría conjugada del producto escalar.

¿Qué pasa si le removemos[8] esta componente a uno de los vectores? Obtenemos un conjunto ortogonal, ¡como queríamos! Veamos que este conjunto ortogonal efectivamente *genera el mismo subespacio vectorial que el conjunto linealmente independiente con el que empezamos*[9]; esto se debe a que obtuvimos al vector $\vec{b}'$ como combinación lineal de los vectores de I y, además, a que los vectores claramente no perdieron su independencia lineal[10] cuando los ortogonalizamos de esta forma[11].

Observemos que[12], si partiendo de nuestro conjunto original hubiéramos decidido modificar al *otro* vector, hubiéramos obtenido un conjunto ortogonal *distinto*[13] al anterior pero que, nuevamente, genera el *mismo* subespacio[14] que el conjunto original. Si quisiéramos hacer que este conjunto fuese ortonormal, podríamos simplemente normalizar a cada uno de los vectores[15]. Sin embargo, si nuestro objetivo hubiera sido obtener un conjunto ortonormal desde el principio[16], entonces, recordando que es más sencillo calcular proyecciones vectoriales sobre vectores unitarios, pudimos haber empezado[17] el proceso normalizando a uno de los vectores y, luego, removiéndole al *otro* vector su componente a lo largo del eje del vector normalizado, y normalizándolo también. Una vez más, observemos que el subespacio generado[18] por este conjunto *ortonormal* es igual al generado por el conjunto linealmente independiente original.

---

[1] Mostramos brevemente que están en ejes distintos.

[2] Mostramos brevemente algo como $\vec{u}+\vec{v}$, $a\vec{u}$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ en pantalla, para que se entienda que nos referimos a las operaciones de suma vectorial, producto de un vector por un escalar y producto escalar.

[3] Mostramos $\Gamma_1 = \{¿?\}$ en pantalla.

[4] Mostramos que $\langle I \rangle$ es todo el plano.

[5] Mostramos $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \neq 0$ en pantalla.

[6] Hacemos dos proyecciones vectoriales rápidas para mostrar que, en efecto, son no nulas.

[7] Debajo de $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \neq 0$, mostramos brevemente $\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle = \overline{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}$ y, abajo, $\implies \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \neq 0$ (quedaría como un silogismo); luego, desaparecemos los tres renglones, junto con la proyección vectorial de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.

[8] Usamos la proyección vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ para ortogonalizar a $\vec{b}$, obteniendo así a $\vec{b}'$, y escribimos $\Gamma_1 = \{\vec{a}, \vec{b}'\}$.

[9] Mostramos al generado de Γ_1 (que es todo el plano) y escribimos $\langle \Gamma_1 \rangle = \langle I \rangle$ en pantalla.

[10] Trazamos líneas punteadas para mostrar que los vectores ortogonalizados están ejes distintos.

[11] Escribimos "Nota: por el Ejercicio 1.¿?, I se puede ortogonalizar trivialmente haciendo a $\vec{b}$ igual a $\vec{0}$; sin embargo, se perdería la independencia lineal, por lo que el subespacio vectorial generado sería distinto." como pie de página.

[12] Regresamos al conjunto I original con las dos proyecciones vectoriales, desaparecemos ahora a la proyección vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ y usamos la de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ para ortogonalizar a $\vec{a}$ y obtener así a $\vec{a}'$.

[13] Escribimos $\Gamma_2 = \{\vec{a}', \vec{b}\}$ en pantalla.

[14] Mostramos al generado de Γ_2 (nuevamente, todo el plano) y escribimos $\langle \Gamma_1 \rangle = \langle I \rangle = \langle \Gamma_2 \rangle$ en pantalla.

[15] Tomamos el conjunto ortogonal que ya tenemos y normalizamos a cada uno de los vectores; luego, hacemos *fade out*.

[16] Borramos todo y dejamos sólamente al conjunto l.i. original y el texto $I = \{\vec{a}, \vec{b}\}$.

[17] Esta vez, empezamos normalizando a $\vec{b}$ para definir a $\hat{b}$, luego ortogonalizamos a $\vec{a}$ proyectándolo sobre $\hat{b}$, obteniendo así a $\vec{a}'$, y lo normalizamos para definir a $\hat{a}'$; finalmente, escribimos $N = \{\hat{a}', \hat{b}\}$.

[18] Mostramos al generado de N y escribimos $\langle I \rangle = \langle N \rangle$.

2. Segunda escena (95 %)

Consideremos ahora a un espacio real vectorial con producto escalar con un conjunto de tres vectores linealmente independientes pero no ortogonales entre sí. ¿Cómo podríamos obtener un conjunto linealmente independiente y ortogonal de tres vectores a partir del conjunto que tenemos, de tal forma que el subespacio generado no cambie?[19] Sugerimos pausar el video[20] para pensar cómo modificarías a estos tres vectores para cumplir nuestro objetivo, y continuar la reproducción hasta que tengas una idea clara —y, de preferencia, escrita— de cómo hacerlo.

Iniciamos de la misma manera: escogemos a un vector de referencia, por ejemplo, el vector $\vec{a}$; proyectamos a otro vector —digamos, a $\vec{b}$— sobre $\vec{a}$ y restamos esa componente a $\vec{b}$, obteniendo así un conjunto linealmente independiente y ortogonal de dos vectores

$$\{\vec{a}, \vec{b}'\}.$$

De la misma manera, tomamos al vector restante $\vec{c}$ y le removemos su componente a lo largo del eje del vector $\vec{a}$; de esta forma, aseguramos que este nuevo vector sea ortogonal al vector $\vec{a}$; sin embargo, esto no necesariamente implica que también sea ortogonal a $\vec{b}'$. Por ende, además de removerle a $\vec{c}$ su componente a lo largo del eje de $\vec{a}$, debemos removerle su componente a lo largo del eje de $\vec{b}'$. De esta forma, aseguraremos que el conjunto compuesto por $\vec{a}$, $\vec{b}'$ y $\vec{c}'$ sea ortogonal y linealmente independiente[21]

$$\Gamma_1 = \{\vec{a}, \vec{b}', \vec{c}'\}.$$

Hacemos énfasis en que, habiendo elegido un vector de referencia —como el vector $\vec{a}$[22], en el ejemplo anterior—, si cambiamos el orden en el que modificamos a los demás vectores, obtendremos también un conjunto ortogonal y linealmente independiente, aunque puede ser distinto al que obtuvimos anteriormente. Lo mismo ocurre si elegimos a cualquier otro vector como vector de referencia[23]. Observemos que cualquiera de estos conjuntos generará al mismo subespacio vectorial que nuestro conjunto original.

Γ_1	Γ_3	Γ_5
Γ_2	Γ_4	Γ_6

Además, nuevamente, si nuestro objetivo hubiera sido obtener un conjunto *ortonormal* de tres vectores, pudimos haber modificado el proceso anterior, empezando por normalizar al vector de referencia antes de "meterlo a nuestro conjunto", después, proyectando a alguno de los otros vectores sobre el vector normalizado, removiendo esa componente y normalizando al vector resultante antes de "agregarlo al conjunto" y, finalmente, proyectando al último vector sobre los dos vectores normales que tenemos en nuestro conjunto, removiendo dichas componentes, y normalizando al vector resultante antes de añadirlo a nuestro conjunto[24].

[19] Tal vez poner un ¿? grande y divertido en pantalla jiji

[20] Dejamos el espacio rotando unos segundos de tal forma que, cuando empiece el siguiente párrafo, ya se encuentre en una posición conveniente para empezar a hacer las proyecciones/modificaciones.

[21] Escribimos "Nota: Ver Ejercicio 3.1.".

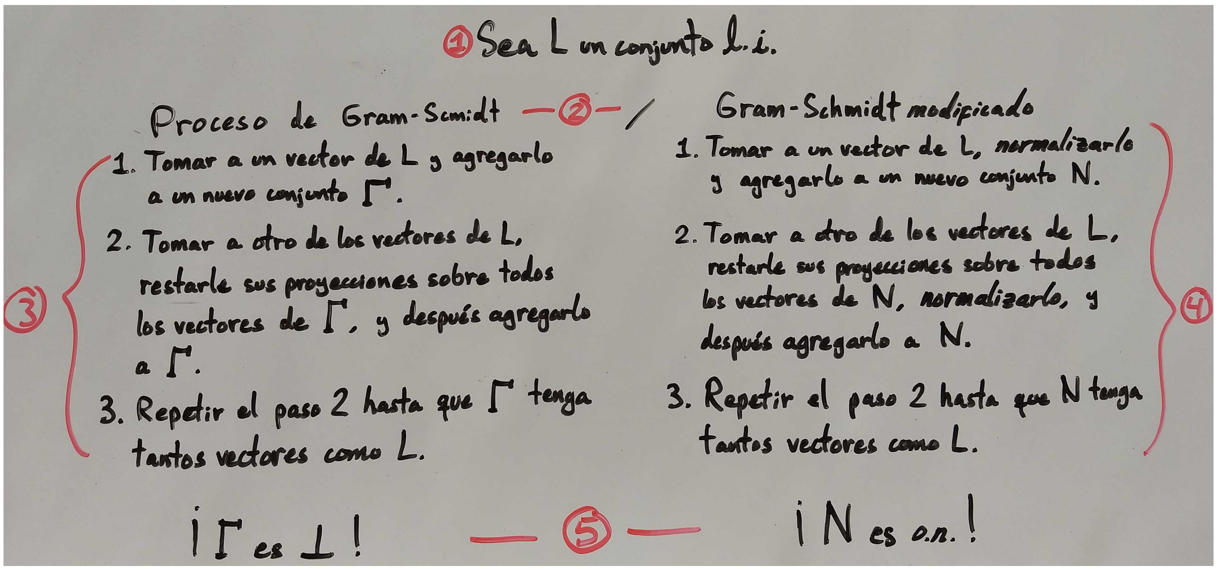
[22] Mostramos dos copias del mismo conjunto *l.i.* arriba y abajo (sin nombres), resaltamos al mismo vector (de referencia), ortogonalizamos en diferente orden y escribimos Γ_1 y Γ_2.

[23] Hacemos algo análogo para Γ_3 y Γ_4 y, luego, para Γ_5 y Γ_6.

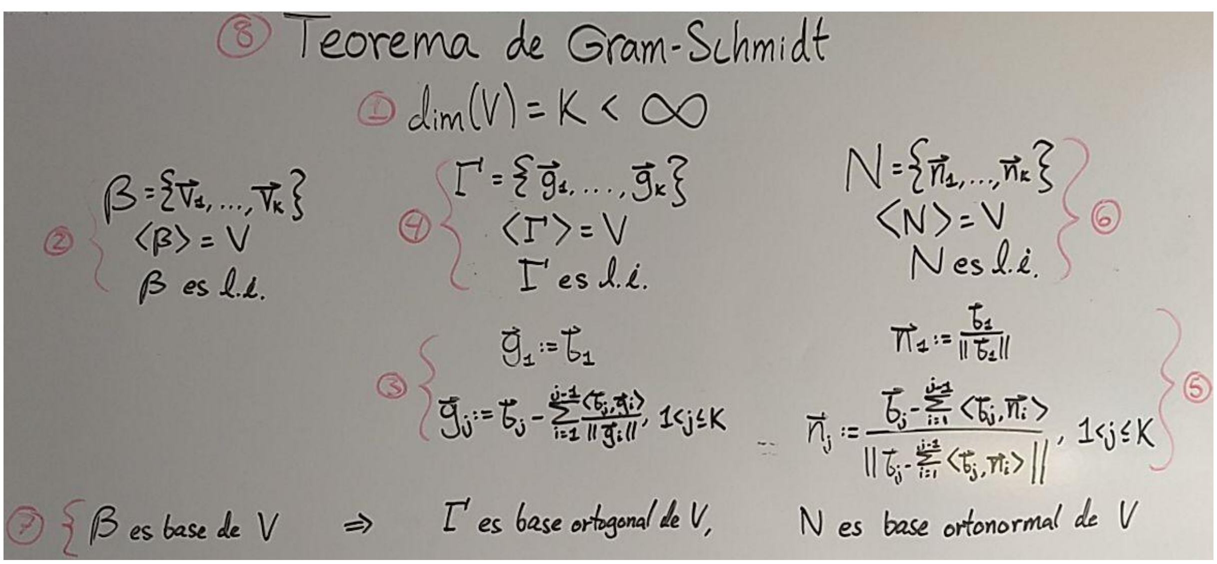
[24] En este párrafo ya no se hacen referencias a vectores con un nombre específico, pues en el párrafo pasado ya se estableció

3. Tercera escena (95 %)

Este procedimiento para, a partir de un conjunto linealmente independiente de dos o tres vectores, obtener conjuntos linealmente independientes y *ortogonales* que generen el mismo subespacio que el conjunto original puede ser generalizado para conjuntos finitos de cualquier cardinalidad, y se conoce como el proceso de Gram-Schmidt. Lo mismo ocurre con el procedimiento que nos permite obtener conjuntos *ortonormales* sin cambiar el subespacio generado, conocido como el proceso de Gram-Schmidt *modificado*[25]. En conjunto, este resultado se conoce como el Teorema de Gram-Schmidt.



Como consecuencia de este teorema, se sigue que la existencia de bases ortogonales y ortonormales siempre está asegurada en los espacios vectoriales con producto escalar de dimensión finita[26].



---

que tanto el punto como de partida como el orden es arbitrario; la animación debería reforzar este hecho quitándole los nombres a los vectores. Conceptualmente, esto facilita la transición a la escena tres.

[25]En esta imagen faltó agregar $< \Gamma >=< I >=< N >$ centrado debajo de donde dice 5 (aparecería hasta el final).

[26]Mejor porner los vectores “n”s con gorritos ya que, por la forma en que los estamos definiendo, son unitarios, y el objetivo es que la base N sea ortonormal.

4. Escena final

Ejercicio 3.1 Demuestra que todo conjunto ortogonal es linealmente dependiente si, y sólo si, no contiene al vector nulo.

Ejercicio 3.2 Demuestra que todo conjunto ortonormal es linealmente independiente.

Pregunta ¿Cuántos conjuntos ortogonales linealmente independientes diferentes se pueden obtener a partir de un conjunto linealmente independiente de k vectores, y cuántos ortonormales?[27]

[27] Respuesta: ortogonales linealmente independientes, una infinidad —suponiendo que el campo es infinito; ortonormales, sólo $k!$.