

Producto escalar y bases ortogonales (proyecciones y ortogonalidad)

Observación 0.1. *Por definición, cualquier base de un espacio vectorial genera a cada vector del espacio mediante una combinación lineal única. Sin embargo, encontrar los coeficientes necesarios para expresar a un vector arbitrario no nulo como combinación lineal de una base es, en general, un proceso laborioso que en complejidad a medida que aumenta la dimensión del espacio. Definiendo la operación de producto escalar —y, subsecuentemente, los conceptos de ortogonalidad, conjunto ortogonal y base ortogonal— podemos obtener un resultado poderoso que nos muestra cómo encontrar a dichos coeficientes de forma sencilla, suponiendo que existe una base ortogonal. Este resultado, a su vez, nos permite darle una interpretación geométrica al producto escalar.*

Observación 0.2. *Las ideas principales a presentar en este video son:*

- (I) *Dada una base de un espacio vectorial de dimensión finita y un vector no nulo arbitrario, el problema de encontrar los coeficientes para expresar a ese vector como combinación lineal de la base no es trivial. En general, puede resolverse computacionalmente mediante sistemas de ecuaciones, pero su complejidad aumenta dependiendo de la dimensión del espacio y de qué tipo de vectores viven en él.*
- (II) *El producto escalar es una operación no esencial que, de estar presente, dota a un espacio vectorial de estructura adicional; en particular, su introducción permite definir los conceptos de ortogonalidad y conjunto ortogonal.*
- (III) *Si un espacio vectorial con producto escalar tiene dimensión finita y existe una base ortogonal, ésta simplifica enormemente el problema de encontrar los coeficientes necesarios para expresar a un vector arbitrario como combinación lineal de una base.*
- (IV) *El resultado anterior nos permite interpretar geométricamente la operación de producto escalar: el producto escalar entre dos vectores es proporcional al número por el cual debemos reescalar a uno de los vectores para obtener la componente del otro vector que “vive” en el subespacio vectorial generado por el vector reescalado. En particular, dos vectores son ortogonales si, y sólo si, la proyección vectorial de cualquiera de ellos sobre el otro es nula.*
- (V) *La interpretación geométrica anterior es consistente con las propiedades que definen al producto escalar.*

Observación 0.3. *Considerando que la serie está enfocada en abordar la descomposición espectral de operadores lineales, creo que **no** es necesario incluir en ella una discusión sobre métrica ni normas distintas de aquellas inducidas por un producto escalar positivo definido; sin embargo, sería bueno buscar referencias para estos temas y ponerlas en la descripción.*

Observación 0.4. *Siendo el primer video de la serie, se dejarán varios ejercicios con la intención de que sean retomados en videos posteriores.*

1. Primera escena

Sabemos que, dados un espacio vectorial de dimensión finita y una base para ese espacio, cualquier vector del espacio puede ser expresado mediante una combinación lineal única de los vectores de esa base. Esto es de gran utilidad para hacer cálculos con vectores. Sin embargo, consideremos la siguiente pregunta: dado un vector no nulo cualquiera y una base arbitraria, ¿cómo encontramos los coeficientes necesarios para expresar a nuestro vector como combinación lineal de dicha base?

$$\dim(V) = k < \infty$$

$$\beta = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\} \text{ base de } V$$

$$\langle \beta \rangle = V, \quad \beta \text{ es l.i.}$$

$$\vec{v} = c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_k \vec{b}_k$$

$$\text{¿}c_1, \dots, c_k\text{?}$$

Veamos cómo podríamos representar este problema en el caso del espacio vectorial real \mathbb{R}^2 . Tenemos a nuestro vector no nulo cualquiera y a nuestra base arbitraria. Como la base genera a todo el espacio y es linealmente independiente, sabemos que existe una combinación lineal única de sus elementos que da como resultado a nuestro vector. Sin embargo, no sabemos cómo encontrar a los coeficientes de dicha combinación lineal.

Este problema de encontrar los coeficientes puede llegar a ser muy complicado. Considérese, por ejemplo, el caso en que nuestros vectores son n-tuplas. En ese caso tendríamos que resolver un sistema de ecuaciones —mediante el método computacional de nuestra preferencia—, el cual aumentaría en complejidad a medida que aumente la dimensión del espacio. Más aún, nuestros vectores posiblemente sean funciones, matrices, etc. A pesar de todo esto, este problema puede ser resuelto de forma sencilla en espacios que cuentan con una propiedad adicional: ser espacios donde se puede definir una operación llamada *producto escalar*.

2. Segunda escena

Un producto escalar en un espacio vectorial es una operación que toma un par ordenado de vectores del espacio y devuelve un escalar del campo, tal que cumple las siguientes propiedades:

Producto escalar

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$$

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, \forall a \in K,$$

$$\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle a\vec{u}, \vec{v} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0 \text{ si } \vec{u} \neq \vec{0}$$

No es difícil demostrar que podemos resumir las primeras dos propiedades de la siguiente manera. Para referirnos a esta propiedad más sintetizada, decimos que el producto escalar es una operación *lineal en su primera entrada*¹. A la siguiente propiedad se le conoce como *simetría conjugada* y, para referirnos a la última propiedad, decimos que el producto escalar es *positivo definido*.

Producto escalar

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$$

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, \forall a \in K$$

$$\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle a\vec{u}, \vec{v} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle a\vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

Linealidad en la primera entrada

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$$

Simetría conjugada

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0 \text{ si } \vec{u} \neq \vec{0}$$

Positivo definido

Juntando las propiedades de linealidad en la primera entrada y simetría conjugada, se puede demostrar que el producto escalar es una operación *antilineal* en su otra entrada². Además, dado que esta operación

¹Abajo, en esta parte, faltan unos corchetes que no sé cómo poner. En general, en las animaciones, las cosas deberían quedar mejor alineadas de lo que logro hacerlo aquí con el ambiente *align**.

²Escribir “Ver Ejercicio 1.1.” como nota al pie.

es positivo definida, se puede demostrar que el producto escalar de un vector consigo mismo es igual a cero si, y sólo si, dicho vector es igual al vector nulo del espacio; este importante hecho será usado a continuación en la solución de nuestro problema, por lo que hemos dejado su demostración como ejercicio al final del video³. En resumen, podemos decir que el producto escalar es una operación positivo definida de dos entradas, siendo una de ellas lineal y la otra, antilineal.

Producto escalar

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$$

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, \forall a \in K$$

$$\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle a\vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle a\vec{u}, \vec{v} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

Linealidad en la primera entrada

$$\langle \vec{u}, a\vec{w} + \vec{v} \rangle = \bar{a}\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$$

Simetría *conjugada* *Antilinealidad* en la segunda entrada

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0 \text{ si } \vec{u} \neq \vec{0}$$

Positivo definido

En particular, observemos que, si el campo sobre el cual está definido nuestro espacio vectorial es el de los números reales, entonces todos los escalares son iguales a sus complejos conjugados. Por ende, podemos demostrar que en espacios vectoriales reales el producto escalar es una operación simétrica y lineal en ambas entradas, o *bilineal*⁴.

Producto escalar

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle a\vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle a\vec{u}, \vec{v} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

Linealidad en la primera entrada

$$\langle \vec{u}, a\vec{w} + \vec{v} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

Simetría *Linealidad* en la segunda entrada

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0 \text{ si } \vec{u} \neq \vec{0}$$

Positivo definido

³Escribir “Ver Ejercicio 1.2.” como nota al pie.

⁴Escribir “Ver Ejercicio 1.3.” como nota al pie.

Para ver la importancia de esta *nueva* operación en la solución del problema presentado al inicio del video, debemos introducir la definición de ortogonalidad. Decimos que dos vectores son *ortogonales* si su producto escalar es cero. Notemos que, como el complejo conjugado de cero es él mismo, por la propiedad de simetría conjugada se sigue que la ortogonalidad es una propiedad simétrica.

$$\vec{u}, \vec{v} \in V \text{ son } \textit{ortogonales} (\vec{u} \perp \vec{v}) \text{ si } \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \text{ ó, equivalentemente, } \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0.$$

Así mismo, diremos que un conjunto de vectores es *ortogonal* si cualesquiera dos vectores distintos del conjunto son ortogonales.

$$O = \{\vec{o}_1, \dots, \vec{o}_k\} \subseteq V \text{ es } \textit{ortogonal} \text{ si } \langle \vec{o}_i, \vec{o}_j \rangle = 0 \text{ para } i \neq j, \text{ con } 1 \leq i, j \leq k.$$

Por último, si una base cumple con ser un conjunto ortogonal, diremos que es una *base ortogonal*. Dado que se puede demostrar que un conjunto ortogonal es linealmente independiente si, y sólo si, no contiene al vector nulo⁵, entonces por el Ejercicio 1.2 vemos que un conjunto Γ es una base ortogonal de V si se cumplen las siguientes condiciones⁶

$$\Gamma = \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\} \text{ base } \textit{ortogonal} \text{ de } V$$

$$\langle \Gamma \rangle = V, \quad \langle \vec{g}_j, \vec{g}_i \rangle = \begin{cases} \langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle \neq 0 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

⁵Escribir “Ver Ejercicio 1.5.” como pie de página.

⁶Tal vez quede mejor cambiando de lugar los dos casos de la expresión $\langle \vec{g}_j, \vec{g}_i \rangle$ aquí y en lo que sigue, pero no estoy seguro aún.

3. Tercera escena

Veamos qué sucede si, regresando a nuestro problema original, suponemos que V es un espacio vectorial con producto escalar y que Γ es una base ortogonal de V . Nuevamente, por ser Γ una base, sabemos que existen coeficientes tales que la siguiente ecuación se cumple. ¿Pero cómo encontramos a estos coeficientes?

$$\beta = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\} \text{ base de } V \quad \Gamma = \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\} \text{ base ortogonal de } V$$

$$\langle \beta \rangle = V, \quad \beta \text{ es l.i.} \quad \langle \Gamma \rangle = V, \quad \langle \vec{g}_j, \vec{g}_i \rangle = \begin{cases} \langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle \neq 0 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

$$\vec{v} = c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_k \vec{b}_k$$

$$\vec{v} = d_1 \vec{g}_1 + \dots + d_k \vec{g}_k$$

$$¿c_i?$$

$$¿d_i?$$

Observemos lo siguiente: si tomamos al i -ésimo elemento de la base ortogonal, aplicamos el producto escalar con ese elemento a ambos lados de la ecuación, usamos la propiedad de linealidad en la primer entrada del producto escalar y, finalmente, utilizamos el hecho de que nuestra base es ortogonal, y despejamos, podemos encontrar una expresión sumamente sencilla para el i -ésimo coeficiente: simplemente se obtiene a través de dos productos escalares y una división.

$$\vec{v} = d_1 \vec{g}_1 + \dots + d_k \vec{g}_k$$

$$\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle = \langle d_1 \vec{g}_1 + \dots + d_k \vec{g}_k, \vec{g}_i \rangle$$

$$\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^k d_j \vec{g}_j, \vec{g}_i \right\rangle$$

$$\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle = \sum_{j=1}^k \langle d_j \vec{g}_j, \vec{g}_i \rangle$$

$$\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle = \sum_{j=1}^k d_j \langle \vec{g}_j, \vec{g}_i \rangle$$

$$\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle = d_i \langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle$$

$$\frac{\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle}{\langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle} = d_i$$

Como esto es válido para toda i , tenemos el siguiente resultado para cualquier vector arbitrario de nuestro espacio vectorial con producto escalar:

$$d_i = \frac{\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle}{\langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle}, \quad 1 \leq i \leq k$$

$$\vec{v} = c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_k \vec{b}_k$$

$$\vec{v} = d_1 \vec{g}_1 + \dots + d_k \vec{g}_k$$

$$i c_i?$$

$$d_i = \frac{\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle}{\langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle}, \quad 1 \leq i \leq k$$

$$\vec{v} = c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_k \vec{b}_k$$

$$\vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{g}_1 \rangle}{\langle \vec{g}_1, \vec{g}_1 \rangle} \vec{g}_1 + \dots + \frac{\langle \vec{v}, \vec{g}_k \rangle}{\langle \vec{g}_k, \vec{g}_k \rangle} \vec{g}_k$$

$$i c_i?$$

$$d_i = \frac{\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle}{\langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle}, \quad 1 \leq i \leq k$$

$$\vec{v} = c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_k \vec{b}_k$$

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle}{\langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle} \vec{g}_i$$

$$i c_i?$$

$$d_i = \frac{\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle}{\langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle}, \quad 1 \leq i \leq k$$

Por lo tanto, si un espacio vectorial de dimensión finita *con producto escalar* tiene una base *ortogonal*, ésta resuelve nuestro problema de encontrar coeficientes de manera sencilla, y es precisamente este resultado el que nos ayudará a encontrarle una interpretación geométrica a la operación de producto escalar⁷, como veremos a continuación para un caso particular.

⁷Escribir “Como veremos en un video posterior, la existencia de bases ortogonales siempre está asegurada para este tipo de espacios; esto es consecuencia de un resultado conocido como el Teorema de Gram-Schmidt.” como nota al pie.

4. Cuarta escena

Regresemos a la representación geométrica de nuestro problema en el caso del espacio vectorial real \mathbb{R}^2 . Como quizá ya lo estés sospechando, la operación conocida como *producto punto* es un ejemplo de un producto escalar en este espacio. Observemos que un conjunto que contiene a los vectores con entradas $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ forma una base ortogonal de este espacio, pues cumple con las propiedades descritas anteriormente. Aplicando el resultado anterior, se sigue que los coeficientes necesarios para expresar a nuestro vector arbitrario como combinación lineal de esta base ortogonal son los siguientes.

Ahora, observemos que cada término de la combinación lineal es un reescalamiento de uno de los vectores de la base. En otras palabras, cada término de la suma es igual a la componente de nuestro vector arbitrario que se encuentra en el subespacio generado por el elemento de la base que reescalamos. A dichas componentes se les conoce como las *proyecciones vectoriales* de nuestro vector arbitrario sobre los elementos de nuestra base. En particular, esto nos dice que dos vectores son ortogonales si, y sólo si, la proyección vectorial de cualquiera de ellos sobre el otro es el vector nulo. En particular, en el caso de los espacios reales, se sigue que el producto escalar de dos vectores es positivo si ambos apuntan en el mismo sentido, y negativo si apuntan en sentidos contrarios.

El razonamiento anterior se puede aplicar también en el caso general. Por lo tanto, geométricamente, podemos interpretar al producto escalar como una operación que nos permite calcular las proyecciones vectoriales de unos vectores sobre otros con facilidad.

5. Quinta escena

Veamos que esta interpretación geométrica es consistente con las propiedades que definen al producto escalar. COMPLETAR⁸

⁸Esta escena servirá como la fundación del siguiente video, pues la interpretación geométrica de la norma inducida por el producto escalar se deberá seguir directamente de lo que se presente en esta escena. Por lo tanto, trabajaré esta escena en paralelo con el guión del segundo video “Norma inducida y bases ortonormales”.

6. Escena final

Sea (V, K) un espacio vectorial con producto escalar.

Ejercicio 1.1 Demuestra que

$$\langle \vec{u} + a\vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + a\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle,$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} + a\vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \bar{a}\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

para todo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$, $a \in K$; luego, dibuja un ejemplo no trivial ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$, $a \neq 0$) en \mathbb{R}^2 .

Ejercicio 1.2 Para $\vec{v} \in V$, demuestra que $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ si, y sólo si, $\vec{v} = \vec{0}$.

Ejercicio 1.3 Demuestra que si $K = \mathbb{R}$, entonces el producto escalar en V es bilineal.

Ejercicio 1.4 Demuestra que las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ para todo $\vec{u} \in V$.
- (b) $\vec{v} = \vec{0}$.
- (c) $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$ para todo $\vec{u} \in V$.

Ejercicio 1.5 Demuestra que todo conjunto ortogonal es linealmente independiente si, y sólo si, no contiene al vector nulo.

Ejercicio 1.6 Demuestra que, para un espacio vectorial de dimensión finita k , cualquier conjunto ortogonal de k vectores que no contiene al vector nulo es una base.

Pregunta 1.7 ¿Cómo puedes interpretar la propiedad de simetría conjugada del producto escalar en un espacio vectorial complejo?⁹

Pregunta 1.8 ¿El resultado de las bases ortogonales será válido en espacios vectoriales con producto escalar de dimensión *infinita*? Argumenta¹⁰.

⁹Ésta ni yo la sé responder en toda su profundidad, pero me parece interesante pensarla.

¹⁰Respuesta: no porque, en general, las combinaciones lineales infinitas no están bien definidas; se tendrían que considerar cuestiones de convergencia.