Norma inducida y bases ortonormales

Observación 0.1. *Las ideas principales a presentar en este video son:*

(i) *En un espacio vectorial, podemos comparar qué tan "cerca" o "lejos" se encuentra un vector arbitrario del vector nulo, con respecto a los vectores del subespacio que genera, e incluso con respecto a los vectores de todo el espacio. Esta cualidad se llama* magnitud *y puede tener diferentes interpretaciones según la aplicación que se le dé a los vectores, las cuales nos pueden brindar intuición adicional al momento de resolver problemas; por ello, es importante caracterizarla. Esto se logra a través de una función llamada* norma *que puede definirse a partir de unas cuantas observaciones geométricas sencillas. Un espacio vectorial con norma se conoce como un espacio vectorial* normado*.*

(ii) *Cualquier escala que sea realmente útil para hacer comparaciones debe tener unidades de medición establecidas. En espacios vectoriales normados se utilizan para este fin los vectores de norma uno, conocidos como vectores* normales *o* unitarios*. Cualquier vector no nulo puede ser reescalado de tal forma que resulte en el vector unitario que apunta en la misma dirección y sentido que el vector original; a este proceso se le llama* normalización*. Por otro lado, cualquier vector no nulo es igual al vector unitario que apunta en su misma dirección y sentido reescalado por su norma.*

(iii) *En cualquier espacio vectorial con producto escalar, es posible definir una norma a partir del producto escalar, conocida como* norma inducida*. Aunque existen normas que no provienen de un producto escalar, en esta serie de videos nos enfocaremos exclusivamente en la norma inducida.*

(iv) *En un espacio vectorial con producto escalar, la proyección vectorial de un vector arbitrario sobre un vector no nulo puede ser reescrita considerando la norma inducida, y se simplifica si el vector sobre el cual se proyecta es unitario. Si, además, el espacio es de dimensión finita y consideramos una base ortogonal donde todos los vectores son unitarios, conocida como base ortonormal, entonces el problema de encontrar los coeficientes necesarios para expresar a un vector arbitrario como combinación lineal de dicha base tiene una solución extremadamente simple: cada coeficiente se calcula directamente mediante un producto escalar.*

Observación 0.2. *Considerando que la serie de videos "Espacios vectoriales con producto escalar" está enfocada en abordar la descomposición espectral de operadores lineales, creo que* ***no*** *es necesario incluir en ella una discusión sobre métrica ni normas distintas de aquellas inducidas por un producto escalar positivo definido; sin embargo, sería bueno buscar referencias para estos temas y ponerlas en la descripción.*

1 Introducción de la norma

1.1 Necesidad de caracterizar las magnitudes de vectores

Una de las principales aplicaciones de los vectores es en el modelado de fuerzas físicas. Por ejemplo, supongamos que podemos colocar una caja sobre una superficie con la misma fricción en cualquier dirección. Imaginemos primero que empujamos la caja hacia el frente con una fuerza, que llamaremos $\vec{u}$, y luego hacia un lado con una fuerza mayor, que llamaremos $\vec{v}$. Observemos el desplazamiento obtenido después de haber aplicado estas dos fuerzas. Ahora imaginemos que desde el mismo punto de partida empujamos nuestra caja hacia el mismo lado con la misma fuerza $\vec{v}$ *antes* de empujarla hacia el frente con fuerza $\vec{u}$. Notemos que el desplazamiento que obtenemos es el mismo, a pesar de haber aplicado las fuerzas en diferente orden. Es decir, al empujar la caja en las mismas direcciones y con las mismas fuerzas en cada dirección obtenemos el mismo desplazamiento neto, sin importar el orden de los empujes. La Ley del Paralelogramo no es más que una generalización de esta observación, en la que las fuerzas puedan tener la dirección que sea, además de poder ser arbitrariamente grandes o pequeñas. Más aún, el axioma de conmutatividad de la suma vectorial es simplemente una *abstracción* de esta propiedad a cualquier espacio vectorial. Así, vemos que a veces es útil pensar en vectores como fuerzas, pues de esta forma algunas de sus propiedades parecen más intuitivas.

Dado que un aumento o disminución de fuerza implica un respectivo aumento o disminución de desplazamiento, y vice versa, visualmente resulta natural asociar la longitud de la flecha que representa a un vector con la *magnitud* de la fuerza representada por ese vector. Más generalmente, podemos pensar que los vectores mismos tienen una magnitud que, intuitivamente, nos dice qué tan "cerca" o "lejos" están del vector nulo en comparación con los vectores del subespacio que generan, o incluso con los vectores de todo el espacio, sin importar las direcciones. En aplicaciones de los vectores distintas del modelado de fuerzas, las magnitudes de estos se pueden interpretar de otras formas pero, para poder hacer uso de todas estas interpretaciones y aprovechar la intuición que nos brindan, es necesario caracterizar las magnitudes de los vectores de un espacio vectorial.

1.2 Definición de norma a partir de observaciones geométricas

La caracterización de las magnitudes de vectores en un espacio vectorial se logra introduciendo una nueva operación llamada *norma*, que a cada vector del espacio le asigna una cantidad específica para representar el valor de su magnitud.

$$\text{Norma}$$
$$||\cdot|| : V \to$$

Si volvemos a considerar vectores representados geométricamente como flechas y a asociar la longitud de cada flecha con la magnitud del vector correspondiente, entonces la norma puede definirse mediante sencillas observaciones geométricas. Por ejemplo, como no existen flechas con "longitud negativa", la cantidad asignada por la norma a cada vector será un número real no negativo. Además, si sumamos un vector consigo mismo —o, equivalentemente, si reescalamos a un vector por 2—, la magnitud del vector resultante es el doble de la del vector original. Lo mismo ocurre si, en vez de reescalar por 2, reescalamos por -2 pues, aunque el vector invierta el sentido en el cual apunta, su magnitud nuevamente es el doble de la original. Más generalmente, si multiplicamos a un vector por un escalar arbitrario, la magnitud del vector resultante es igual a la magnitud del vector original multiplicada por el *valor absoluto* de ese escalar —incluso cuando éste sea un número complejo[1]. Esto nos da la primera propiedad de la norma, conocida como *escalabilidad absoluta*.

$$\text{Norma}$$
$$||\cdot|| : V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$$\forall\ \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \forall\ a \in K,$$

$$||a\vec{u}|| = |a|\ ||\vec{u}|| \qquad \text{Escalabilidad } \textit{absoluta}$$

Ahora, notemos que el vector nulo del espacio tiene magnitud cero; más aún, se distingue por ser el *único* vector con esta propiedad. Por lo tanto, el que un vector arbitrario tenga norma cero equivale a que dicho vector sea el vector nulo del espacio. Esta es la segunda propiedad de la norma y se conoce como *distinción del vector nulo*.

$$\text{Norma}$$
$$||\cdot|| : V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$$\forall\ \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \forall\ a \in K,$$

$$||a\vec{u}|| = |a|\ ||\vec{u}|| \qquad \text{Escalabilidad } \textit{absoluta}$$

$$||\vec{u}|| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0} \qquad \text{Distinción del vector nulo}$$

Por último, observemos que, si consideramos la suma de dos vectores, entonces la magnitud del resultado de la suma debe ser menor o igual a la suma de las magnitudes de los vectores originales. Geométricamente, esto equivale a afirmar que la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo siempre debe ser mayor o igual a la longitud del tercer lado. Por ello, esta propiedad de la norma se conoce como la *desigualdad del triángulo*.

$$\text{Norma}$$
$$||\cdot|| : V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$$\forall\ \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \forall\ a \in K,$$

$$||a\vec{u}|| = |a|\ ||\vec{u}|| \qquad \text{Escalabilidad } \textit{absoluta}$$

$$||\vec{u}|| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0} \qquad \text{Distinción del vector nulo}$$

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| \qquad \text{Desigualdad del triángulo}$$

Usando las tres propiedades de la norma, se puede demostrar que ésta es una operación positivo definida, lo cual será importante más adelante, por lo que lo hemos dejado como ejercicio al final del video[2]. A

[1]Escribir "*Ver la Pregunta 2.5 al final del video." y cambiar K momentáneamente por $\mathbb{C}$.
[2]Escribir "*Ver el Ejercicio 2.1.".

un espacio vectorial con una función que cumpla estas tres propiedades se le conoce como un espacio vectorial *normado*.

2 Normalización y vectores normales/unitarios

Más adelante veremos la importancia que tienen los vectores con norma igual a uno, conocidos como vectores *normales*. Por lo pronto, supongamos que en un espacio vectorial normado tenemos un vector no nulo, y lo queremos reescalar de tal forma que se convierta en un vector normal, pero sin cambiar su dirección ni su sentido. Por la propiedad de distinción del vector nulo, sabemos que la norma de nuestro vector es un número real distinto de cero, por lo que tiene un inverso multiplicativo. Si reescalamos a nuestro vector por el inverso multiplicativo de su norma entonces, por la propiedad de escalabilidad absoluta de la norma y el hecho de que la norma es positivo definida, se sigue que la norma del vector reescalado es igual a uno. Es decir, obtenemos un vector normal.

$$\vec{v} \in V, \ \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$\frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v}$$

$$\begin{aligned} \left|\left|\frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v}\right|\right| &= \left|\frac{1}{||\vec{v}||}\right| ||\vec{v}|| && \text{(escalabilidad absoluta)} \\ &= \frac{1}{||\vec{v}||}||\vec{v}|| && \text{(Ejercicio 2.1)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Más aún, como la norma es positivo definida, entonces el inverso multiplicativo de la norma de $\vec{v}$ es positivo, por lo que el vector resultante efectivamente apunta en la misma dirección y sentido que el vector original, ¡como queríamos! A los vectores normales, como el que acabamos de obtener, se les suele denotar de la siguiente manera[3]:

$$\vec{v} \in V, \ \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow ||\vec{v}|| > 0.$$

$$\frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v} =: \hat{v}$$

$$\left|\left|\frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v}\right|\right| = \left|\frac{1}{||\vec{v}||}\right| ||\vec{v}||$$

$$= \frac{1}{||\vec{v}||}||\vec{v}||$$

[3]Escribir "vector *normal*" a la derecha de $\hat{v}$.

$$= 1.$$

Además, a este proceso de reescalar un vector no nulo por el inverso multiplicativo de su norma para convertirlo en un vector normal se le conoce como *normalización*[4].

Decimos que un conjunto de vectores en un espacio normado es *normal* si todos sus vectores son normales

$$\vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow ||\vec{v}|| > 0.$$

$$\frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v} =: \hat{v}$$

$$U = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k\} \subseteq V \text{ es } \textit{normal} \text{ si } ||\vec{u}_i|| = 1 \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$

Notemos que, en un espacio normado, cualquier conjunto que *no* contenga al vector nulo puede ser convertido en un conjunto normal, simplemente normalizando a cada uno de sus vectores:

$$\vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow ||\vec{v}|| > 0.$$

$$\frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v} =: \hat{v}$$

$$U = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k\} \subseteq V \text{ es } \textit{normal} \text{ si } ||\vec{u}_i|| = 1 \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$

$$\vec{0} \notin \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\} \subseteq V \Rightarrow \{\hat{v}_1, ..., \hat{v}_k\} \subseteq V \text{ es un conjunto normal.}$$

Volvamos ahora a la ecuación anterior[5]. Observemos que, si la multiplicamos de ambos lados por la norma de $\vec{v}$, obtenemos la siguiente ecuación

$$\vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow ||\vec{v}|| > 0.$$

$$\vec{v} = ||\vec{v}||\hat{v}$$

Esta igualdad nos dice que, en un espacio normado, cualquier vector no nulo $\vec{v}$ es igual al vector normal con su misma dirección y sentido reescalado por su norma. Recordando que la norma nos ayuda a comparar magnitudes entre vectores, vemos que los vectores normales sirven como una especie de "unidad" en esta escala, por lo que también se les conoce como vectores *unitarios*[6].

[4]Poner llaves y escribir *normalización* al lado de los renglones correspondientes al proceso, y después borrarlos.
[5]Borrar los dos renglones de abajo y los dos puntos de la ecuación restante.
[6]Poner llaves abajo de $\hat{v}$ y escribir "vector *normal* o *unitario*".

3 Norma inducida por un producto escalar

Hasta ahora, en esta serie de videos hemos visto que tanto la norma como el producto escalar son operaciones positivo definidas que distinguen al vector nulo[7]. Sin embargo, estas no son las únicas relaciones existentes entre estas dos operaciones, como veremos a continuación. Supongamos que tenemos un espacio vectorial con producto escalar y que definimos una función de la siguiente manera

$$(V, K)$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K \text{ es un producto escalar en } V$$

$$||\vec{v}|| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \quad \forall\ \vec{v} \in V$$

Entonces, de las propiedades del producto escalar se sigue que nuestra función asigna a cada vector del espacio un número real no negativo y, además, que cumple las siguientes propiedades

$$(V, K)$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K \text{ es un producto escalar en } V$$

$$||\vec{v}|| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \quad \forall\ \vec{v} \in V$$

$$|| \cdot || : V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$$\forall\ \vec{u} \in V,\ \forall\ a \in K,$$

$$||a\vec{u}|| = \sqrt{\langle a\vec{u}, a\vec{u} \rangle} = \sqrt{a\bar{a}\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{a\bar{a}}\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = |a|\ ||\vec{u}||$$

$$||\vec{u}|| = 0 \iff \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = 0 \iff \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

Es decir, nuestra función ya cumple las propiedades de escalabilidad absoluta y distinción del vector nulo. Más aún, se puede demostrar que también cumple la desigualdad del triángulo, por lo que la función que hemos definido es una norma. Para completar esta demostración tendríamos que hablar sobre la llamada *desigualdad de Cauchy-Schwartz*[8], pero será mejor dejar esto para otro video. Lo importante por ahora es observar que, en general, siempre que tengamos un espacio vectorial con un producto escalar, podremos definir una norma en ese espacio *a partir* de ese producto escalar. A esto

[7] Escribir "Ver el Ejericicio 1.2 del video *Ortogonalización y ortonormalización (Teorema de Gram-Schmidt)* de Animathica." como nota al pie.

[8] Colocar referencias de desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad del triángulo en la descripción.

se le conoce como una *norma inducida por un producto escalar.* A pesar de que no todas las normas en un espacio vectorial tengan que ser inducidas por un producto escalar, nos enfocaremos principalmente en este tipo de normas durante el resto de la serie[9].

4 Proyecciones vectoriales y vectores unitarios

4.1 Proyecciones vectoriales sobre vectores unitarios

Ahora, volvamos a la expresión de la proyección vectorial de un vector $\vec{u}$ sobre un vector no nulo $\vec{v}$ que vimos al final del video anterior

$$\vec{u}, \vec{v} \in V, \ \ \vec{v} \neq \vec{0}.$$
$$\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}$$

Observemos que, considerando la norma inducida, podemos reescribir esta expresión como sigue:

$$\begin{aligned} &\vec{u}, \vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0}. \\ &\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\left(\sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\right)^2} \vec{v} \\ &\qquad\qquad = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{||\vec{v}||^2} \vec{v} \\ &\qquad\qquad = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{||\vec{v}||} \left(\frac{1}{||\vec{v}||} \vec{v} \right) \\ &\qquad\qquad = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{||\vec{v}||} \hat{v} \end{aligned}$$

Es decir, la componente del vector $\vec{u}$ que vive en el subespacio generado por el vector no nulo $\vec{v}$ se obtiene reescalando al vector unitario en la misma dirección y sentido que $\vec{v}$ por el producto escalar de $\vec{u}$ con $\vec{v}$ entre la norma de $\vec{v}$.

$$\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{||\vec{v}||} \hat{v}$$

En particular, si el vector sobre el que proyectamos es unitario, entonces la expresión de proyección vectorial se simplifica aún más[10].

$$\vec{u}, \hat{v} \in V, \ \ ||\hat{v}|| = 1,$$
$$\frac{\langle \vec{u}, \hat{v} \rangle}{\langle \hat{v}, \hat{v} \rangle} \hat{v} = \langle \vec{u}, \hat{v} \rangle \hat{v}$$

Más adelante, aplicaremos esto al problema de encontrar coeficientes introducido al inicio de la serie, después de dar algunas definiciones.

[9] Podríamos colocar referencias a normas no inducidas por productos escalares en la descripción del video y añadir una nota al pie que diga “Ver referencias [N-1], [N-2], etc. en la descripción del video sobre normas no inducidas por productos escalares.”.

[10] Animar transformaciones hasta este punto.

4.2 Conjuntos y bases ortonormales

En un espacio vectorial con producto escalar y norma, decimos que un conjunto es *ortonormal* si es ortogonal y normal. Es decir, un conjunto ortonormal es un conjunto de vectores unitarios que son ortogonales entre sí.

$N = \{\vec{n}_1, ..., \vec{n}_k\} \subseteq V$ es *ortonormal* si $\langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ con $1 \leq i, j \leq k$ y $||\vec{n}_i|| = 1$ para $1 \leq i \leq k$.

Si consideramos la norma inducida por el producto escalar, entonces el que la norma de un vector sea uno es equivalente a que su producto escalar consigo mismo sea igual a uno

$N = \{\vec{n}_1, ..., \vec{n}_k\} \subseteq V$ es *ortonormal* si $\langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ con $1 \leq i, j \leq k$ y $\langle \vec{n}_i, \vec{n}_i \rangle = 1$ para $1 \leq i \leq k$.

por lo que podemos caracterizar a un conjunto ortonormal como sigue:

$$N = \{\vec{n}_1, ..., \vec{n}_k\} \subseteq V \text{ es } \textit{ortonormal} \text{ si } \langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

En particular, si una base cumple con ser un conjunto ortonormal, decimos que es una *base ortonormal*. Dado que se puede demostrar que todo conjunto ortonormal finito es linealmente independiente[11], tenemos que un conjunto N es una base ortonormal de V si se cumplen las condiciones siguientes[12].

$$N = \{\vec{n}_1, ..., \vec{n}_k\} \text{ es una base } \textit{ortonormal} \text{ de } V \text{ si}$$
$$\langle N \rangle = V, \quad \langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

4.3 Solución del problema de encontrar coeficientes usando bases ortonormales

Regresemos ahora al problema por el cual introdujimos la operación de producto escalar, y veamos cómo entra la norma en nuestra discusión: tenemos un espacio vectorial de dimensión finita y queremos encontrar los coeficientes necesarios para expresar a un vector no nulo arbitrario como combinación lineal de una base. En el video anterior vimos que, si suponemos que nuestro espacio tiene producto escalar y que existe una base ortogonal, entonces los coeficientes se obtienen de la siguiente manera. Ahora, si consideramos la norma inducida por ese producto escalar y suponemos que existe una base *ortonormal* entonces, dado que dicha base en particular es ortogonal, podemos aplicar el mismo resultado. Más aún, como ahora todos los vectores de la base son unitarios, el resultado anterior se simplifica de la siguiente manera. Es decir, cada uno de los coeficientes buscados se calcula directamente mediante un producto escalar. Por ello, las bases ortonormales son extremadamente útiles en espacios vectoriales con producto escalar. Algunos ejemplos de este tipo de bases incluyen las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

En el siguiente video, veremos cómo podemos obtener conjuntos ortogonales y ortonormales a partir de un conjunto linealmente independiente. Como consecuencia de esto, veremos además que las bases ortogonales y ortonormales siempre existen en espacios vectoriales de dimensión finita con producto escalar, lo que justifica *a posteriori* toda la discusión contenida en este video y en el video previo.

[11] Escribir "*Ver Ejercicio 2.2." como nota al pie.
[12] Escribir "*Ver Ejercicio 2.3.".

5 Ejercicios y preguntas[13]

Ejercicio 2.1 Sea V un espacio vectorial con norma $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$. Para $\vec{u} \in V$, demuestra que

$$\vec{u} \neq \vec{0} \implies ||\vec{u}|| > 0,$$

es decir, que la norma es una operación positivo definida. Adicionalmente, demuestra que la implicación contraria también se verifica.

Ejercicio 2.2 Demuestra que todo conjunto ortonormal finito es linealmente independiente.

Sean (V, K) un espacio vectorial con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to K$, $\dim(V) < \infty$, y $N = \{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \ldots, \hat{n}_k\} \subseteq V$ considerando la norma inducida.

Ejercicio 2.3 Demuestra que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) N es una base ortonormal de V.

(b) $\langle N\rangle = V$ y $\langle \hat{n}_i, \hat{n}_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$

Ejercicio 2.4 Demuestra que $N = \{\hat{n}_1, ..., \hat{n}_k\}$ es una base *ortonormal* de V si, y sólo si,

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{v}, \hat{n}_i\rangle \hat{n}_i \quad \forall\ \vec{v} \in V.$$

Más aún, demuestra que en este caso $\Big\langle \langle \vec{v}, \hat{n}_i\rangle\hat{n}_i, \langle \vec{v}, \hat{n}_j\rangle\hat{n}_j \Big\rangle = 0$ si $i \neq j$.

Pregunta 2.5 Por la propiedad de *escalabilidad absoluta* de la norma, multiplicar a un vector arbitrario por un escalar con valor absoluto 1 deja invariante su norma. ¿Cómo se interpreta esto geométricamente en espacios vectoriales reales y complejos? (Sugerencia: Considera vectores de $\mathbb{R}^2$ multiplicados por escalares de $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\}$ y vectores de $\mathbb{C}$ multiplicados por escalares de $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. En cada caso, la multiplicación de vectores por escalares de valor absoluto 1 se interpreta como un tipo de operación geométrica bajo la cual la norma es invariante. ¿Cuáles son?)

Pregunta 2.6 Considerando el producto punto en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2,$$

¿qué fórmula conocida nos da la norma $||\cdot|| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ inducida por este producto escalar?

[13] Idea: Incluir una escena de resumen, narrada con la Observación 0.1, antes de la escena de Ejercicios y preguntas.