Norma inducida y bases ortonormales

Observación 0.1. *Las ideas principales a presentar en este video son:*

(i) *La norma es una operación que, de estar presente en un espacio vectorial, nos da una noción de* magnitud *de un vector, y nos permite hacer comparaciones entre vectores en este sentido.*

(ii) *Por definición, un producto escalar en un espacio vectorial induce una norma en ese espacio. Aunque no todas las normas provienen de un producto escalar*[1]*, en esta serie de videos nos enfocaremos en este tipo de normas.*

(iii) *Todo vector no nulo puede ser reescalado de tal forma que el vector resultante tenga norma unitaria. A este tipo de vectores se les conoce como vectores unitarios. En particular, una base en la que todos los vectores son unitarios y ortogonales entre sí se conoce como una base ortonormal.*

(iv) *Si un espacio vectorial con producto escalar tiene dimensión finita y existe una base ortonormal, entonces el problema de encontrar los coeficientes necesarios para expresar a un vector arbitrario como combinación lineal de esta base tiene una solución extremadamente simple.*

Observación 0.2. *Considerando que la serie está enfocada en abordar la descomposición espectral de operadores lineales, creo que* ***no*** *es necesario incluir en ella una discusión sobre métrica ni normas distintas de aquellas inducidas por un producto escalar positivo definido; sin embargo, sería bueno buscar referencias para estos temas y ponerlas en la descripción.*

[1] Podríamos colocar ejemplos de normas no inducidas por productos escalares positivo definidos en la descripción del video.

1. Primera escena

Por definición, *todos* los espacios vectoriales deben tener una operación llamada *suma* o *adición vectorial* y otra llamada *producto de un vector por un escalar* o, simplemente, *reescalamiento*[2]. Por ello, decimos que estas son las operaciones *esenciales* de los espacios vectoriales. Sin embargo, puede que un espacio vectorial tenga, además, *otras* operaciones, que doten al espacio de una estructura adicional. Un ejemplo es la operación de producto escalar, la cual introduce nociones de ortogonalidad y proyecciones en un espacio vectorial, como vimos en el video anterior. En este video veremos otra operación conocida como *norma*, así como las nociones que introduce en un espacio, y la forma en que se relaciona con el producto escalar.

Una norma en un espacio vectorial es una operación que a cada vector del espacio le asigna número real, tal que cumple las siguientes propiedades:

$$\text{Norma}$$
$$||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$$

$$\forall\ \vec{u} \in V,\ \forall\ a \in K,$$

$$||a\vec{u}|| = |a|\ ||\vec{u}||$$

$$||\vec{u}|| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$$

La primera propiedad, conocida como *escalabilidad absoluta*, nos dice que la norma de un vector reescalado es directamente proporcional al *valor absoluto* del escalar en cuestión. En particular, se sigue que la norma de un vector no cambia si lo reescalamos por cualquier escalar con valor absoluto uno. Recordando al interpretación geométrica del producto de un vector por un escalar se sigue que, en espacios vectoriales reales, la norma de un vector es invariante bajo inversiones de sentido y, más generalmente, que en espacios vectoriales complejos, la norma es invariante bajo rotaciones. Entonces, se sigue que la norma de un vector está relacionada con la longitud de la flecha que lo representa.

La siguiente propiedad se conoce como *distinción del vector nulo*, y nos dice que el vector nulo es el único vector del espacio que tiene norma nula. Esto es consistente con la interpretación anterior, pues el vector nulo es el único representado geométricamente por un punto, que podemos considerar como una flecha de longitud cero.

La última propiedad se conoce como la *desigualdad del triángulo*, dado que nos recuerda a la desigualdad existente entre los lados de un triángulo aplicada al que se obtiene mediante la *Ley del paralelogramo* cuando sumamos dos vectores.

[2] Podríamos aprovechar la mención de ambas operaciones para implícitamente introducir su interpretación geométrica en el plano real y complejo, siguiendo las notas del curso.

Norma

$$|| \cdot || : V \to K$$

$$\forall\ \vec{u} \in V,\ \forall\ a \in K,$$

$$||a\vec{u}|| = |a|\ ||\vec{u}|| \qquad \text{Escalabilidad absoluta}$$

$$||\vec{u}|| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0} \qquad \text{Distinción del vector nulo}$$

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| \qquad \text{Desigualdad del triángulo}$$

Por último, no es difícil demostrar, a partir de las tres propiedades anteriores, que la norma es positivo definida[3]. Una vez más, esto es consistente con nuestra interpretación de la norma de un vector como la longitud de la flecha que lo representa, pues no existen flechas con *longitud negativa*.

A un espacio vectorial con una función que cumpla estas propiedades se le conoce como un *espacio normado*. En general, la norma nos da una noción de la *magnitud* de un vector, en el sentido de qué tan "cerca" o "lejos" está del vector nulo del espacio, así como una escala con la cual comparar a diferentes vectores. Más aún, a partir de cualquier norma se puede definir una *métrica inducida*, lo que nos da una noción de distancia entre vectores[4], aunque esto vas más allá del enfoque de esta serie de videos.

[3]Escribir "Ver Ejercico 2.1." como nota al pie.
[4]Escribir "Ver Ejercicio 2.2." como nota al pie.

2. Segunda escena

Hasta ahora, hemos visto que tanto la norma como el producto escalar son operaciones positivo definidas que distinguen al vector nulo[5]. Sin embargo, estas no son las únicas relaciones existentes entre estas dos operaciones. Observemos lo siguiente: supongamos que tenemos un espacio vectorial con producto escalar y que definimos una función de la siguiente manera

$$(V, K)$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K \text{ es un producto escalar en } V$$

$$||\vec{v}|| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \quad \forall\ \vec{v} \in V$$

Entonces, se sigue de las propiedades del producto escalar que nuestra función asigna a cada vector del espacio un número real y, además, que cumple las siguientes propiedades

$$(V, K)$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K \text{ es un producto escalar en } V$$

$$||\vec{v}|| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \quad \forall\ \vec{v} \in V$$

$$|| \cdot || : V \to K$$

$$\forall\ \vec{u} \in V,\ \forall\ a \in K,$$

$$||a\vec{u}|| = \sqrt{\langle a\vec{u}, a\vec{u} \rangle} = \sqrt{a\overline{a}\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{a\overline{a}}\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = |a|\ ||\vec{u}||$$

$$||\vec{u}|| = 0 \iff \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = 0 \iff \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

En otras palabras, nuestra función ya cumple dos de las propiedades de norma. Más aún, se puede demostrar que también cumple la desigualdad del triángulo[6]. Es decir que, en general, siempre que tengamos un espacio vectorial con un producto escalar, ¡podemos definir una norma en ese espacio *a partir* del producto escalar de la misma manera en que lo hicimos anteriormente! A esto se le conoce como una *norma inducida por un producto escalar*. A pesar de que no todas las normas en un espacio vectorial tengan que ser inducidas por un producto escalar, dado que esta serie de videos trata sobre

[5] Escribir "Ver Ejericicio 1.2." como nota al pie.

[6] Podríamos colocar referencias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz y a la desigualdad del triángulo en la descripción del video pues, personalmente, no creo que valga tanto la pena ahondar en todo eso en este video.

la teoría de espacios vectoriales *con* producto escalar, nos enfocaremos principalmente en este tipo de normas durante el resto de la serie[7].

A los vectores con norma igual a uno se les conoce como vectores *normales* o *unitarios*, y se les suele denotar con este símbolo. Observemos que, considerando la norma inducida, podemos reescribir a la proyección vectorial de un vector $\vec{u}$ sobre un vector no nulo $\vec{v}$ como sigue:

$$\frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}\vec{v} = \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{\left(\sqrt{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}\right)^2}\vec{v}$$

$$= \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{||\vec{v}||^2}\vec{v}$$

$$= \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{||\vec{v}||}\left(\frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v}\right)$$

$$= \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{||\vec{v}||}\hat{v}.$$

Es decir, la componente del vector $\vec{u}$ que vive en el subespacio generado por el vector no nulo $\vec{v}$ se obtiene reescalando al vector unitario en el mismo sentido y dirección que $\vec{v}$ por el producto escalar de $\vec{u}$ con $\vec{v}$ entre la norma de $\vec{v}$.

$$\frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}\vec{v} = \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{||\vec{v}||}\hat{v}.$$

[7] Podríamos colocar referencias a normas no inducidas por productos escalares en la descripción del video y añadir una nota al pie que diga "Ver referencias [N-1], [N-2], etc. en la descripción del video sobre normas no inducidas por productos escalares.".

3. Tercera escena

Supongamos que en un espacio vectorial normado tenemos un vector no nulo, y lo queremos reescalar de tal forma que su norma sea igual a uno. Dado que la norma es positivo definida y nuestro vector es distinto al vector nulo, sabemos que su norma es positiva. Observemos que, si reescalamos al vector por el inverso multiplicativo de su norma entonces, por la propiedad de escalabilidad absoluta de la norma, se sigue que el vector reescalado tiene norma igual a uno.

$$\vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow ||\vec{v}|| > 0.$$

$$\frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v}$$

$$\begin{aligned} \left|\left| \frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v} \right|\right| &= \left| \frac{1}{||\vec{v}||} \right| ||\vec{v}|| \\ &= \frac{1}{||\vec{v}||}||\vec{v}|| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Este proceso de reescalar a un vector no nulo por el inverso multiplicativo de su norma para convertirlo en un vector de norma uno se conoce como *normalización*.

Decimos que un conjunto es *normal* si todos sus vectores son normales, y que es *ortonormal* si es ortogonal y normal. Es decir, un conjunto ortonormal es un conjunto de vectores de norma uno que son ortogonales entre sí. En particular, si una base cumple con ser un conjunto ortonormal, decimos que es una *base ortonormal*. Dado que se puede demostrar que todo conjunto ortonormal finito es linealmente independiente[8] se sigue que, en un espacio vectorial de dimensión finita con producto escalar, cualquier conjunto ortonormal con tantos vectores como la dimensión del espacio es una base ortonormal del espacio. Este tipo de bases son de gran utilidad, como veremos a continuación.

[8] Escribir “Ver Ejercicio 2.3.” como nota al pie.

4. Cuarta escena

Regresemos ahora al problema por el cual introdujimos la operación de producto escalar, y veamos cómo entra la norma en nuestra discusión: tenemos un espacio vectorial de dimensión finita y queremos encontrar los coeficientes necesarios para expresar a un vector no nulo arbitrario como combinación lineal de una base. En el video anterior vimos que, si suponemos que nuestro espacio tiene producto escalar y que existe una base ortogonal, entonces los coeficientes se obtienen de la siguiente manera. Ahora, si consideramos la norma inducida por este producto escalar y suponemos que existe una base *ortonormal* entonces, dado que dicha base en particular es ortogonal, podemos aplicar el mismo resultado. Más aún, como un vector tiene norma uno si, y sólo si, el producto escalar de dicho vector consigo mismo es uno, en este caso, el resultado anterior se simplifica de la siguiente manera. Es decir, obtenemos que el cálculo de los coeficientes buscados se efectúa simplemente a través de un producto escalar. Por ende, las bases ortonormales son de gran utilidad.

En el siguiente video, veremos cómo podemos obtener conjuntos ortogonales y ortonormales a partir de un conjunto linealmente independiente. Como consecuencia de esto, veremos además que las bases ortogonales y ortonormales siempre existen en espacios vectoriales de dimensión finita con producto escalar, lo que justifica *a posteriori* toda la discusión contenida en este video y en el video previo.

5. Escena final

Ejercicio 2.1 Sean V un espacio vectorial normado y $\vec{u} \in V$. Demuestra que $||\vec{u}|| > 0$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$, es decir, que la norma es positivo definida.

Ejercicio 2.2 Una *métrica* o *función de distancia* en un conjunto X es una función $f(\cdot, \cdot) : X \times X \to [0, \infty)$ que cumple las siguientes propiedades:

(I) $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$;

(II) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$;

(III) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$.

Demuestra que si (V, K) es un espacio vectorial con norma $|| \cdot ||$, entonces la función dada por $d(\vec{x}, \vec{y}) = ||\vec{x} - \vec{y}||$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$ es una métrica en V. Por lo tanto, toda norma *induce* una métrica. En particular, se sigue que todo producto escalar positivo definido induce una métrica; sin embargo, existen métricas que no son inducidas por normas ni productos escalares.

Ejercicio 2.3 Demuestra que todo conjunto ortonormal finito es linealmente independiente.