Producto escalar y bases ortogonales (proyecciones y ortogonalidad)

Observación 0.1. *Por definición, cualquier base de un espacio vectorial genera a cada vector del espacio mediante una combinación lineal única. Sin embargo, encontrar los coeficientes necesarios para expresar a un vector arbitrario no nulo como combinación lineal de una base es, en general, un proceso laborioso que en complejidad a medida que aumenta la dimensión del espacio. Definiendo la operación de producto escalar —y, subsecuentemente, los conceptos de ortogonalidad, conjunto ortogonal y base ortogonal— podemos obtener un resultado poderoso que nos muestra cómo encontrar a dichos coeficientes de forma sencilla, suponiendo que existe una base ortogonal. Este resultado, a su vez, nos permite darle una interpretación geométrica al producto escalar.*

Observación 0.2. *Las ideas principales a presentar en este video son:*

(I) *Dada una base de un espacio vectorial de dimensión finita y un vector no nulo arbitrario, el problema de encontrar los coeficientes para expresar a ese vector como combinación lineal de la base no es trivial. En general, puede resolverse computacionalmente mediante sistemas de ecuaciones, pero su complejidad aumenta dependiendo de la dimensión del espacio y de qué tipo de vectores viven en él.*

(II) *El producto escalar es una operación no esencial que, de estar presente, dota a un espacio vectorial de estructura adicional; en particular, su introducción permite definir los conceptos de ortogonalidad y conjunto ortogonal.*

(III) *Si un espacio vectorial con producto escalar tiene dimensón finita y existe una base ortogonal, ésta simplifica enormemente el problema de encontrar los coeficientes necesarios para expresar a un vector arbitrario como combinación lineal de una base.*

(IV) *El resultado anterior nos permite interpretar geométricamente la operación de producto escalar: el producto escalar entre dos vectores es proporcional al número por el cual debemos reescalar a uno de los vectores para obtener la componente del otro vector que "vive" en el subespacio vectorial generado por el vector reescalado. En particular, dos vectores son ortogonales si, y sólo si, la proyección vectorial de cualquiera de ellos sobre el otro es nula.*

(V) *La interpretación geométrica anterior es consistente con las propiedades que definen al producto escalar.*

Observación 0.3. *Considerando que la serie está enfocada en abordar la descomposición espectral de operadores lineales, creo que **no** es necesario incluir en ella una discusión sobre métrica ni normas distintas de aquellas inducidas por un producto escalar positivo definido; sin embargo, sería bueno buscar referencias para estos temas y ponerlas en la descripción.*

Observación 0.4. *Siendo el primer video de la serie, se dejarán varios ejercicios con la intención de que sean retomados en videos posteriores.*

1. Primera escena

2. Segunda escena

3. Tercera escena

4. Cuarta escena

5. Quinta escena

6. Escena final

Sea (V, K) un espacio vectorial con producto escalar.

Ejercicio 1.1 Demuestra que

$$\langle \vec{u} + a\vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + a\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle,$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} + a\vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \overline{a}\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

para todo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$, $a \in K$ y dibuja un ejemplo no trivial $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}, a \neq 0)$ en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 1.2 Demuestra que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ para todo $\vec{u} \in V$.

(b) $\vec{v} = \vec{0}$.

(c) $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$ para todo $\vec{u} \in V$.

Ejercicio 1.3 Demuestra que todo conjunto ortogonal es linealmente independiente si, y sólo si, no contiene al vector nulo.

Ejercicio 1.4

Pregunta 1.1 ¿Cómo puedes interpretar la propiedad de simetría conjugada del producto escalar en un espacio vectorial complejo?[1]

Pregunta 1.2 ¿El resultado de las bases ortogonales será válido en espacios vectoriales con producto escalar de dimensión *infnita*? Argumenta[2].

[1] Ésta ni yo la sé responder en toda su profundida, pero me parece interesante pensarla.

[2] Respuesta: no porque, en general, las combinaciones lineales infinitas no están bien definidas; se tendrían que considerar cuestiones de convergencia.