

Norma inducida y bases ortonormales

Observación 0.1. *Las ideas principales a presentar en este video son:*

- (I) *En un espacio vectorial, podemos comparar qué tan “cerca” o “lejos” se encuentra un vector arbitrario de ser el vector nulo, con respecto a los vectores del subespacio que genera, e incluso con respecto a los vectores de todo el espacio. Esta cualidad se llama magnitud y puede tener diferentes interpretaciones según la aplicación que se le dé a los vectores, las cuales nos pueden brindar intuición adicional al momento de resolver problemas; por ello, es importante caracterizarla. Esto se logra a través de una función llamada norma que puede definirse a partir de unas cuantas observaciones geométricas sencillas. Un espacio vectorial con norma se conoce como un espacio vectorial normado.*
- (II) *Cualquier escala que sea realmente útil para hacer comparaciones debe tener unidades de medición establecidas. En espacios vectoriales normados se utilizan para este fin los vectores de norma uno, conocidos como vectores normales o unitarios. Cualquier vector no nulo puede ser reescalado de tal forma que resulte en el vector unitario que apunta en la misma dirección y sentido que el vector original; a este proceso se le llama normalización. Por otro lado, cualquier vector no nulo es igual al vector unitario que apunta en su misma dirección y sentido reescalado por su norma.*
- (III) *En cualquier espacio vectorial con producto escalar, es posible definir una norma a partir del producto escalar, conocida como norma inducida. Aunque existen normas que no provienen de un producto escalar, en esta serie de videos nos enfocaremos exclusivamente en la norma inducida.*
- (IV) *En un espacio vectorial con producto escalar, la proyección vectorial de un vector arbitrario sobre un vector no nulo puede ser reescrita considerando la norma inducida, y se simplifica si el vector sobre el cual se proyecta es unitario. Si, además, el espacio es de dimensión finita y consideramos una base ortogonal donde todos los vectores son unitarios, conocida como base ortonormal, entonces el problema de encontrar los coeficientes necesarios para expresar a un vector arbitrario como combinación lineal de dicha base tiene una solución extremadamente simple: cada coeficiente se calcula directamente mediante un producto escalar.*

Observación 0.2. *Considerando que la serie de videos “Espacios vectoriales con producto escalar” está enfocada en abordar la descomposición espectral de operadores lineales, creo que **no** es necesario incluir en ella una discusión sobre métrica ni normas distintas de aquellas inducidas por un producto escalar positivo definido; sin embargo, sería bueno buscar referencias para estos temas y ponerlas en la descripción.*

1. Introducción de la norma

1.1. Necesidad de caracterizar las magnitudes de vectores

Una de las principales aplicaciones de los vectores es en el modelado de fuerzas físicas y, a veces, es útil pensar en vectores como fuerzas, pues de esta forma algunas de sus propiedades parecen más intuitivas. Por ejemplo, supongamos por un momento que podemos colocar una caja sobre una superficie cuya fricción no depende de la dirección en que se desplacen los objetos sobre ella. Imaginemos primero que empujamos la caja hacia el frente con una fuerza, que llamaremos \vec{u} , y luego hacia un lado con una fuerza mayor, que llamaremos \vec{v} . Ahora imaginemos que desde el mismo punto de partida empujamos nuestra caja hacia el mismo lado con la misma fuerza \vec{v} antes de empujarla hacia el frente con fuerza \vec{u} . Dadas nuestras hipótesis, al empujar la caja en las mismas direcciones y con las mismas fuerzas en cada dirección obtenemos en el mismo desplazamiento neto, sin importar el orden de los empujes. La Ley del Paralelogramo no es más que una generalización de esta observación, en la que las fuerzas puedan tener la dirección que sea, además de poder ser arbitrariamente grandes o pequeñas. Más aún, el axioma de conmutatividad de la suma vectorial es simplemente una *abstracción* de esta propiedad a cualquier espacio vectorial.

Dado que un aumento o disminución de fuerza implica un respectivo aumento o disminución de desplazamiento, y vice versa, visualmente resulta natural asociar la longitud de la flecha que representa a un vector con la *magnitud* de la fuerza que está representando dicho vector. Más generalmente, podemos pensar que los vectores mismos tienen una magnitud que, intuitivamente, nos dice qué tan “cerca” o “lejos” están del vector nulo del espacio en comparación con los vectores del subespacio que generan, o incluso con los vectores de todo el espacio, sin importar las direcciones. En aplicaciones de los vectores distintas del modelado de fuerzas, las magnitudes de estos se pueden interpretar de otras formas pero, para poder hacer uso de todas estas interpretaciones y aprovechar la intuición que nos brindan, necesitamos caracterizar las magnitudes de los vectores de un espacio vectorial de alguna forma.

1.2. Definición de norma a partir de observaciones geométricas

La caracterización de las magnitudes de los vectores en un espacio vectorial se logra introduciendo una nueva operación llamada *norma*, que a cada vector del espacio le asigna una cantidad específica para representar el valor de su magnitud.

$$\begin{array}{c} \text{Norma} \\ || \cdot || : V \rightarrow \end{array}$$

Si volvemos a considerar vectores representados geoméricamente como flechas y a asociar la longitud de cada flecha con la magnitud del vector correspondiente, entonces la norma puede definirse mediante sencillas observaciones geométricas. Por ejemplo, como no existen flechas con “longitud negativa”, la cantidad asignada por la norma a cada vector será un número real no negativo. Además, si sumamos un vector consigo mismo —o, equivalentemente, si reescalamos a un vector por 2—, la magnitud del vector resultante es el doble que la del vector original. Lo mismo ocurre si, en vez de reescalar por 2, reescalamos por -2 pues, aunque el vector invierta el sentido en el cual apunta, su magnitud nuevamente es el doble de la original. Más generalmente, si multiplicamos a un vector por un escalar arbitrario, la magnitud del vector resultante es igual a la magnitud del vector original por el *valor absoluto* de ese

escalar —incluso cuando éste sea un número complejo¹. Esto nos da la primera propiedad de la norma, conocida como *escalabilidad absoluta*.

$$\begin{array}{c} \text{Norma} \\ || \cdot || : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \end{array}$$

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall a \in K,$$

$$||a\vec{u}|| = |a| ||\vec{u}||$$

Escalabilidad *absoluta*

Notemos que el vector nulo del espacio tiene magnitud cero; más aún, se distingue por ser el *único* vector con esta propiedad. Por lo tanto, el que un vector arbitrario tenga norma cero equivale a que dicho vector sea el vector nulo del espacio. Esta es la segunda propiedad de la norma y se conoce como *distinción del vector nulo*.

$$\begin{array}{c} \text{Norma} \\ || \cdot || : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \end{array}$$

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall a \in K,$$

$$||a\vec{u}|| = |a| ||\vec{u}||$$

Escalabilidad *absoluta*

$$||\vec{u}|| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

Distinción del vector nulo

Por último, observemos que, si consideramos la suma de dos vectores, entonces la magnitud del resultado de la suma debe ser menor o igual a la suma de las magnitudes de los vectores originales. Esto es fácil de ver si consideramos nuevamente la Ley del Paralelogramo y nos enfocamos en cualquiera de los dos triángulos en los que se divide el paralelogramo pues, en estos términos, la observación que acabamos de hacer sobre magnitudes de vectores equivale a afirmar que la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo siempre debe ser mayor o igual a la del tercer lado. Por ello, esta propiedad de la norma se conoce como la *desigualdad del triángulo*.

$$\begin{array}{c} \text{Norma} \\ || \cdot || : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \end{array}$$

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall a \in K,$$

$$||a\vec{u}|| = |a| ||\vec{u}||$$

Escalabilidad *absoluta*

$$||\vec{u}|| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

Distinción del vector nulo

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$$

Desigualdad del triángulo

¹Escribir “*Ver la Pregunta 2.? al final del video.” y cambiar K momentáneamente por \mathbb{C} .

Usando las tres propiedades de la norma, se puede demostrar que ésta es una operación positivo definida, lo cual será importante más adelante, por lo que lo hemos dejado como ejercicio al final del video². A un espacio vectorial con una función que cumpla esta definición se le conoce como un espacio vectorial *normado*.

2. Normalización y vectores normales/unitarios

Más adelante veremos la importancia que tienen los vectores con norma igual a uno, conocidos como vectores *normales*. Por lo pronto, supongamos que en un espacio vectorial normado tenemos un vector no nulo, y lo queremos reescalar de tal forma que se convierta en un vector normal, pero sin cambiar su dirección ni su sentido. Por la propiedad de distinción del vector nulo, sabemos que la norma de nuestro vector es distinta de cero, por lo que tiene un inverso multiplicativo. Si reescalamos a nuestro vector por el inverso multiplicativo de su norma entonces, por la propiedad de escalabilidad absoluta, se sigue que el vector reescalado es normal.

$$\vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \|\vec{v}\| > 0.$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \\ \left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \right\| &= \left| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \right| \|\vec{v}\| \\ &= \frac{1}{\|\vec{v}\|} \|\vec{v}\| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Más aún, como la norma es positivo definida, entonces la norma de \vec{v} es positiva, por lo que el vector resultante efectivamente apunta en la misma dirección y sentido que el vector original, ¡como queríamos! A los vectores normales, como el que acabamos de obtener, se les suele denotar de la siguiente manera³:

$$\vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \|\vec{v}\| > 0.$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} =: \hat{v} \\ \left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \right\| &= \left| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \right| \|\vec{v}\| \\ &= \frac{1}{\|\vec{v}\|} \|\vec{v}\| \end{aligned}$$

²Escribir “*Ver el Ejercicio 2.1 al final del video.”.

³Escribir “vector *normal*” a la derecha de \hat{v} .

$$= 1.$$

Además, a este proceso de reescalar a un vector no nulo por el inverso multiplicativo de su norma para convertirlo en un vector normal se le conoce como *normalización*⁴.

Decimos que un conjunto de vectores en un espacio normado es *normal* si todos sus vectores son normales

$$\vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \|\vec{v}\| > 0.$$

$$\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} =: \hat{v}$$

$$U = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\} \subseteq V \text{ es } \textit{normal} \text{ si } \|\vec{u}_i\| = 1 \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$

Notemos que, en un espacio normado, cualquier conjunto que *no* contenga al vector nulo puede ser convertido en un conjunto normal, simplemente normalizando a cada uno de sus vectores:

$$\vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \|\vec{v}\| > 0.$$

$$\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} =: \hat{v}$$

$$U = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\} \subseteq V \text{ es } \textit{normal} \text{ si } \|\vec{u}_i\| = 1 \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$

$$\vec{0} \notin \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \subseteq V \Rightarrow \{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k\} \subseteq V \text{ es un conjunto normal.}$$

Volvamos ahora a la ecuación anterior⁵. Observemos que, si la multiplicamos de ambos lados por la norma de \vec{v} , obtenemos la siguiente ecuación

$$\vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \|\vec{v}\| > 0.$$

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \hat{v}$$

Esta igualdad nos dice que, en un espacio normado, cualquier vector no nulo \vec{v} es igual al vector normal con su misma dirección y sentido reescalado por su norma. Recordando que la norma nos ayuda a comparar magnitudes entre vectores con relación al vector nulo, vemos que los vectores normales sirven como una especie de “unidad” en esta escala, por lo que también se les conoce como vectores *unitarios*⁶.

⁴Poner llaves y escribir *normalización* al lado de los renglones correspondientes al proceso, y después borrarlos.

⁵Borrar los dos renglones de abajo y los dos puntos de la ecuación restante.

⁶Escribir “o *unitario*”.

3. Norma inducida por un producto escalar

Hasta ahora, en esta serie de videos hemos visto que tanto la norma como el producto escalar son operaciones positivo definidas que distinguen al vector nulo⁷. Sin embargo, estas no son las únicas relaciones existentes entre estas dos operaciones. Observemos lo siguiente: supongamos que tenemos un espacio vectorial con producto escalar y que definimos una función de la siguiente manera

$$(V, K)$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K \text{ es un producto escalar en } V$$

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \quad \forall \vec{v} \in V$$

Entonces, de las propiedades del producto escalar se sigue que nuestra función asigna a cada vector del espacio un número real no negativo y, además, que cumple las siguientes propiedades

$$(V, K)$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K \text{ es un producto escalar en } V$$

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \quad \forall \vec{v} \in V$$

$$\|\cdot\| : V \rightarrow K$$

$$\forall \vec{u} \in V, \forall a \in K,$$

$$\|a\vec{u}\| = \sqrt{\langle a\vec{u}, a\vec{u} \rangle} = \sqrt{a\bar{a}\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{a\bar{a}}\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = |a| \|\vec{u}\|$$

$$\|\vec{u}\| = 0 \iff \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = 0 \iff \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

Es decir, nuestra función ya cumple las propiedades de norma de escalabilidad absoluta y distinción del vector nulo. Más aún, se puede demostrar que también cumple la desigualdad del triángulo, por lo que la función que hemos definido es una norma. Para completar esta demostración tendríamos que hablar sobre la llamada *desigualdad de Cauchy-Schwartz*⁸, pero será mejor dejar esto para otro video. Lo importante por ahora es observar que, en general, siempre que tengamos un espacio vectorial con un producto escalar, podremos definir una norma en ese espacio *a partir* de ese producto escalar. A esto se

⁷Escribir “Ver el Ejercicio 1.2 del video *Ortogonalización y ortonormalización (Teorema de Gram-Schmidt)* de Animate-mathica.” como nota al pie.

⁸Colocar referencias de desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad del triángulo en la descripción.

le conoce como una *norma inducida por un producto escalar*. A pesar de que no todas las normas en un espacio vectorial tengan que ser inducidas por un producto escalar, nos enfocaremos principalmente en este tipo de normas durante el resto de la serie⁹.

4. Proyecciones vectoriales y vectores unitarios

4.1. Proyecciones vectoriales sobre vectores unitarios

Ahora, volvamos a la expresión de la proyección vectorial de un vector \vec{u} sobre un vector no nulo \vec{v} que vimos al final del video anterior

$$\vec{u}, \vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}$$

Observemos que, considerando la norma inducida, podemos reescribir esta expresión como sigue:

$$\vec{u}, \vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\left(\sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\right)^2} \vec{v}$$

$$= \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

$$= \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|} \left(\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \right)$$

$$= \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|} \hat{v}$$

Es decir, la componente del vector \vec{u} que vive en el subespacio generado por el vector no nulo \vec{v} se obtiene reescalando al vector unitario en la misma dirección y sentido que \vec{v} por el producto escalar de \vec{u} con \vec{v} entre la norma de \vec{v} .

$$\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|} \hat{v}$$

En particular, si el vector sobre el que proyectamos es unitario, entonces la expresión de proyección vectorial se simplifica aún más¹⁰.

$$\vec{u}, \hat{v} \in V, \|\hat{v}\| = 1,$$

$$\frac{\langle \vec{u}, \hat{v} \rangle}{\langle \hat{v}, \hat{v} \rangle} \hat{v} = \langle \vec{u}, \hat{v} \rangle \hat{v}$$

Más adelante, aplicaremos esto al problema de encontrar coeficientes introducido al inicio de la serie, después de dar algunas definiciones.

⁹Podríamos colocar referencias a normas no inducidas por productos escalares en la descripción del video y añadir una nota al pie que diga “Ver referencias [N-1], [N-2], etc. en la descripción del video sobre normas no inducidas por productos escalares.”.

¹⁰Animar transformaciones hasta este punto.

4.2. Conjuntos y bases ortonormales

En un espacio vectorial con producto escalar y norma, decimos que un conjunto es *ortonormal* si es ortogonal y normal. Es decir, un conjunto ortonormal es un conjunto de vectores unitarios que son ortogonales entre sí.

$N = \{\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k\} \subseteq V$ es *ortonormal* si $\langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ con $1 \leq i, j \leq k$ y $\|\vec{n}_i\| = 1$ para $1 \leq i \leq k$.

Si consideramos la norma inducida por el producto escalar, entonces el que la norma de un vector sea uno es equivalente a que su producto escalar consigo mismo sea igual a uno

$N = \{\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k\} \subseteq V$ es *ortonormal* si $\langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ con $1 \leq i, j \leq k$ y $\langle \vec{n}_i, \vec{n}_i \rangle = 1$ para $1 \leq i \leq k$.

por lo que podemos caracterizar a un conjunto ortonormal como sigue:

$$N = \{\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k\} \subseteq V \text{ es } \textit{ortonormal} \text{ si } \langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

En particular, si una base cumple con ser un conjunto ortonormal, decimos que es una *base ortonormal*. Dado que se puede demostrar que todo conjunto ortonormal finito es linealmente independiente¹¹, tenemos que un conjunto N es una base ortonormal de V si se cumplen las condiciones siguientes¹².

$N = \{\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k\}$ es una base *ortonormal* de V si

$$\langle N \rangle = V, \quad \langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

4.3. Solución del problema de encontrar coeficientes usando bases ortonormales

Regresemos ahora al problema por el cual introdujimos la operación de producto escalar, y veamos cómo entra la norma en nuestra discusión: tenemos un espacio vectorial de dimensión finita y queremos encontrar los coeficientes necesarios para expresar a un vector no nulo arbitrario como combinación lineal de una base. En el video anterior vimos que, si suponemos que nuestro espacio tiene producto escalar y que existe una base ortogonal, entonces los coeficientes se obtienen de la siguiente manera. Ahora, si consideramos la norma inducida por este producto escalar y suponemos que existe una base *ortonormal* entonces, dado que dicha base en particular es ortogonal, podemos aplicar el mismo resultado. Más aún, como ahora todos los vectores de la base son unitarios, el resultado anterior se simplifica de la siguiente manera. Es decir, obtenemos que el cálculo de los coeficientes buscados se efectúa simplemente mediante un producto escalar. Por ello, las bases ortonormales son extremadamente útiles en espacios vectoriales con producto escalar. Algunos ejemplos de este tipo de bases incluyen las bases canónicas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

En el siguiente video, veremos cómo podemos obtener conjuntos ortogonales y ortonormales a partir de un conjunto linealmente independiente. Como consecuencia de esto, veremos además que las bases ortogonales y ortonormales siempre existen en espacios vectoriales de dimensión finita con producto escalar, lo que justifica *a posteriori* toda la discusión contenida en este video y en el video previo.

¹¹Escribir “*Ver Ejercicio 2.2.” como nota al pie.

¹²Escribir “*Ver Ejercicio 2.3.”.

5. Ejercicios y preguntas¹³

Ejercicio 2.1 Sea V un espacio vectorial con norma $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Para $\vec{u} \in V$, demuestra que

$$\vec{u} \neq \vec{0} \implies \|\vec{u}\| > 0,$$

es decir, que la norma es una operación positivo definida. Adicionalmente, demuestra que la implicación contraria también se verifica.

Ejercicio 2.2 Demuestra que todo conjunto ortonormal finito es linealmente independiente.

Sea (V, K) un espacio vectorial con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$ y norma inducida.

Sean $\dim(V) < \infty$ y $N = \{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \dots, \hat{n}_k\} \subseteq V$.

Ejercicio 2.3 Demuestra que las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) N es una base ortonormal de V .
- (b) $\langle N \rangle = V$ y $\langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$

Ejercicio 2.4 Demuestra que $N = \{\hat{n}_1, \dots, \hat{n}_k\}$ es una base *ortonormal* de V si, y sólo si,

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^k \langle \vec{v}, \hat{n}_i \rangle \hat{n}_i \quad \forall \vec{v} \in V.$$

Más aún, demuestra que, en este caso,

$$\langle \langle \vec{v}, \hat{n}_i \rangle \hat{n}_i, \langle \vec{v}, \hat{n}_j \rangle \hat{n}_j \rangle = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

Pregunta 2.? ESCALABILIDAD ABSOLUTA CON ESCALARES DE VALOR ABSOLUTO UNO EN ESPACIOS REALES Y COMPLEJOS.

¹³Idea: Incluir una escena de resumen, narrada con la Observación 0.1, antes de la escena de Ejercicios y preguntas.