Norma inducida y bases ortonormales

Observación 0.1. *Las ideas principales detrás del Teorema de Gram-Schmidt son tres:*

(I) *en espacios vectoriales de dimensión finita con producto escalar, los conjuntos l.i. se pueden ortogonalizar/ortonormalizar,*

(II) *el conjunto ortogonal/ortonormal obtenido a partir del conjunto l.i. genera al mismo subespacio vectorial que el conjunto l.i. y*

(III) *sigue siendo l.i.*

El objetivo es mostrar estas tres ideas geométricamente para generar la intuición necesaria para entender el teorema.

1. Primera escena

2. Escena final

Sea V un espacio vectorial con producto escalar.

Ejercicio 2.1: Demuestra que

$$\left\langle \left\{ \vec{u}, \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{||\vec{u}||} \hat{u} \right\} \right\rangle = \langle \{ \vec{u}, \vec{v} \} \rangle$$

para $\vec{u}, \vec{v} \in V$ con $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ y dibuja un ejemplo en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.2: Demuestra que cualquier conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.

Pregunta 2.1: ¿Qué sucedería si aplicáramos el proceso de Gram-Schmidt a un conjunto de vectores linealmente *dependiente*?

Pregunta 2.2: ¿Qué sucedería si, en el proceso de Gram-Schmidt modificado, normalizáramos a alguno de los vectores *antes* de ortogonalizarlo en vez de *después*?