Norma inducida y bases ortonormales

Observación 0.1. *Las ideas principales a presentar en este video son:*

(I) *Por definición, un producto escalar positivo en un espacio vectorial induce una norma en ese espacio. Aunque no todas las normas provienen de un producto escalar positivo definido*[1]*, en esta serie de videos nos enfocaremos en este tipo de normas.*

(II) *La norma nos da una noción de* magnitud *de un vector, y nos permite hacer comparaciones entre vectores en este sentido.*

(III) *Todo vector no nulo puede ser reescalado de tal forma que el vector resultante tenga norma unitaria. A este tipo de vectores se les conoce como vectores unitarios. En particular, un conjunto en el que todos los vectores son unitarios y ortogonales entre sí se conoce como conjunto ortonormal.*

(IV) *Si un espacio vectorial con producto escalar tiene dimensión finita y existe una base ortonormal, entonces el problema de encontrar los coeficientes necesarios para expresar a un vector arbitrario como combinación lineal de esta base tiene una solución extremadamente simple.*

[1] Colocar ejemplos de normas no inducidas por productos escalares positivo definidos en la descripción.

1. Primera escena

2. Segunda escena

3. Tercera escena

4. Cuarta escena

5. Escena final

Ejercicio 2.1 Demuestra que todo conjunto ortonormal es linealmente independiente.

Ejercicio 2.2

Ejercicio 2.¿? Una *métrica* o *función de distancia* en un conjunto X es una función $f(\cdot,\cdot) : X \times X \to [0, \infty)$ que cumple las siguientes propiedades:

(i) $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$;

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$.

Demuestra que si (V, K) es un espacio vectorial con norma $||\cdot||$, entonces la función dada por $d(\vec{x}, \vec{y}) = ||\vec{x} - \vec{y}||$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$ es una métrica en V. Por lo tanto, toda norma *induce* una métrica. En particular, se sigue que todo producto escalar positivo definido induce una métrica; sin embargo, existen métricas que no son inducidas por normas ni productos escalares.

Pregunta