Producto escalar y bases ortogonales (proyecciones y ortogonalidad)

Observación 0.1. *Por definición, cualquier base de un espacio vectorial genera a cada vector del espacio mediante una combinación lineal única. Sin embargo, encontrar los coeficientes necesarios para expresar a un vector arbitrario no nulo como combinación lineal de una base es, en general, un proceso laborioso que aumenta en complejidad a medida que aumenta la dimensión del espacio. Definiendo la operación de producto escalar —y, subsecuentemente, los conceptos de ortogonalidad, conjunto ortogonal y base ortogonal— podemos obtener un resultado poderoso que nos muestra cómo encontrar a dichos coeficientes de forma sencilla, suponiendo que existe una base ortogonal. Este resultado, a su vez, nos permite darle una interpretación geométrica a esta nueva operación, relacionada con las llamadas proyecciones vectoriales.*

Observación 0.2. *Las ideas principales a presentar en este video (por escena) son:*

(I) *Dada una base de un espacio vectorial de dimensión finita y un vector no nulo arbitrario, el problema de encontrar los coeficientes necesarios para expresar a ese vector como combinación lineal de dicha base no es trivial. En general, puede resolverse computacionalmente mediante sistemas de ecuaciones, pero su complejidad aumenta con la dimensión del espacio.*

(II) *El producto escalar es una operación no esencial que, de estar presente, dota a un espacio vectorial de estructura adicional; en particular, su introducción permite definir los conceptos de ortogonalidad y conjunto ortogonal.*

(III) *El "producto punto" es un ejemplo de producto escalar en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$. Usando una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$, podemos utilizar el producto escalar (en este caso, el producto punto) para resolver el problema de encontrar los coeficientes necesarios para expresar a un vector arbitrario como combinación lineal de una base de forma sencilla.*

(IV) *El resultado anterior se puede generalizar a cualquier espacio de dimensión finita con producto escalar, de donde obtenemos su interpretación geométrica: el producto escalar entre dos vectores es proporcional al número por el cual debemos reescalar al segundo vector para obtener la componente del primer vector que "vive" en el subespacio vectorial generado por el segundo; a esta componente se le conoce como la* proyección vectorial *del primer vector sobre el segundo. Con esto en mente, podemos deducir qué significa que un producto escalar entre dos vectores sea positivo, negativo o cero (¡ortogonalidad!) y, en el caso complejo, qué significa que dicho producto escalar tenga parte imaginaria positiva, negativa o cero.*

Observación 0.3. *Siendo el primer video de la serie, se dejarán muchos ejercicios al final, con la intención de que varios de ellos sean retomados en videos posteriores.*

1. El problema de encontrar coeficientes

1.1. Planteamiento del problema a resolver

Sabemos que, dados un espacio vectorial de dimensión finita y una base para ese espacio, cualquier vector del espacio puede ser expresado mediante una combinación lineal única de los vectores de esa base. Esto es de gran utilidad para hacer cálculos con vectores. Sin embargo, consideremos la siguiente pregunta: dado un vector no nulo cualquiera y una base arbitraria, ¿cómo encontramos los coeficientes necesarios para expresar a nuestro vector como combinación lineal de dicha base?

$$\dim(V) = k < \infty$$

$$\beta = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k\} \text{ base de } V$$

$$\langle \beta \rangle = V, \quad \beta \text{ es } l.i.$$

$$\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + ... + c_k\vec{b}_k$$

$$¿c_1, ..., c_k?$$

1.2. Representación del problema en $\mathbb{R}^2$

Veamos cómo podríamos representar este problema en el caso del espacio vectorial real[1] $\mathbb{R}^2$. Tenemos a nuestro vector no nulo cualquiera[2] y a nuestra base arbitraria, formada por los vectores $\vec{b}_1$[3] y $\vec{b}_2$[4]. Observemos que estos vectores efectivamente forman una base de $\mathbb{R}^2$, pues son linealmente independientes[5] y generan a todo el espacio $\mathbb{R}^2$, como mostraremos a continuación[6]. Precisamente, como la base genera a todo el espacio y es linealmente independiente, sabemos que existe una combinación lineal única de sus elementos que da como resultado a nuestro vector. Sin embargo, no sabemos cómo encontrar a los coeficientes de dicha combinación lineal. Más adelante, empezaremos por resolver el problema en este caso, para después generalizar la solución obtenida.

[1] Dibujamos el plano cartesiano.

[2] Dibujamos a $\vec{v}$ junto con su flecha.

[3] Dibujamos a $\vec{b}_1$ junto con su flecha.

[4] Dibujamos a $\vec{b}_2$ junto con su flecha.

[5] Trazamos ejes punteados como en 0:09 del video de Gram-Schmidt para mostrar la independencia lineal.

[6] Animar la generación del subespacio $\langle\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}\rangle$, así como en 0:28-0:54 del video de Gram-Schmidt. De preferencia, animar la variación de c_1 (la barra del lado izquierdo) antes de la de c_2 (del lado derecho). En la última transformación dentro del recuadro (0:51 en V1), escribir $\langle\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}\rangle = \mathbb{R}^2$ en vez de lo que aparece ahí.

1.3. Complicaciones de la solución por sistema de ecuaciones

Regresando al planteamiento general, este problema puede llegar a ser muy complicado, ya que nuestros vectores podrían ser funciones, n-tuplas, matrices, etc. y tendríamos que resolver un sistema de ecuaciones —mediante el método computacional de nuestra preferencia—, el cual aumentaría en complejidad a medida que aumente la dimensión del espacio. Sin embargo, se puede resolver de forma sencilla introduciendo las nociones de *producto escalar* y *base ortogonal*.

2. Definiciones

2.1. Definición de producto escalar y terminología

Un producto escalar en un espacio vectorial es una operación que toma un par ordenado de vectores del espacio y devuelve un escalar del campo, tal que cumple las siguientes propiedades:

Producto escalar

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$$

$$\forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V,\ \forall\ a \in K,$$

$$\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle a\vec{u}, \vec{v} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$$

$$\vec{u} \neq \vec{0} \ \Rightarrow\ \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$$

No es difícil demostrar que podemos resumir las primeras dos propiedades de la siguiente manera. Para referirnos a esta propiedad más sintetizada, decimos que el producto escalar es una operación *lineal en la entrada izquierda*[7]. A la siguiente propiedad se le conoce como *simetría conjugada* y, para referirnos a la última propiedad, decimos que el producto escalar es *positivo definido*.

Producto escalar

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$$

$$\forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V,\ \forall\ a \in K$$

[7] Abajo, en esta parte, faltan unos corchetes que no sé cómo poner. En general, en las animaciones, las cosas deberían quedar mejor alineadas de lo que logro hacerlo aquí con el ambiente *align**.

$$\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle a\vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle a\vec{u}, \vec{v} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

Linealidad en la entrada izquierda

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$$

Simetría *conjugada*

$$\vec{u} \neq \vec{0} \;\Rightarrow\; \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$$

Positivo definido

Juntando las propiedades de linealidad en la entrada izquierda y simetría conjugada, se puede demostrar que el producto escalar es una operación *antilineal* en la entrada derecha[8]. Además, dado que esta operación es positivo definida, se puede demostrar que el producto escalar de un vector consigo mismo es igual a cero si, y sólo si, dicho vector es igual al vector nulo del espacio; este importante hecho será usado más adelante, por lo que hemos dejado su demostración como ejercicio al final del video[9]. En resumen, podemos decir que el producto escalar es una operación de dos entradas que es positivo definida, tiene una entrada lineal y una entrada antilineal.

Producto escalar

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$$

$$\forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V,\ \forall\ a \in K$$

$$\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle a\vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle a\vec{u}, \vec{v} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

Linealidad en la entrada izquierda

$$\langle \vec{u}, a\vec{w} + \vec{v} \rangle = \overline{a}\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$$

Simetría *conjugada*

Antilinealidad en la entrada derecha

$$\vec{u} \neq \vec{0} \;\Rightarrow\; \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$$

Positivo definido

2.2. Definición de ortogonalidad y base ortogonal

Para ver la importancia de esta *nueva* operación en la solución del problema presentado al inicio del video, debemos introducir la definición de ortogonalidad. Decimos que dos vectores son *ortogonales* si su producto escalar es cero. Notemos que, como el complejo conjugado de cero es él mismo, por la propiedad de simetría conjugada se sigue que la ortogonalidad es una relación simétrica. Es decir, que $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{v}$ si, y sólo si, $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

$$\vec{u}, \vec{v} \in V \text{ son } \textit{ortogonales } (\vec{u} \perp \vec{v}) \text{ si } \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \text{ ó, equivalentemente, } \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0.$$

[8] Escribir "*Ver el Ejercicio 1.1 al final del video." como nota al pie.

[9] Escribir "*Ver el Ejercicio 1.2." como nota al pie.

Así mismo, decimos que un conjunto de vectores es *ortogonal* si cualesquiera dos vectores distintos del conjunto son ortogonales.

$$O = \{\vec{g}_1, ..., \vec{g}_k\} \subseteq V \text{ es } \textit{ortogonal} \text{ si } \langle \vec{g}_i, \vec{g}_j \rangle = 0 \text{ para } i \neq j, \text{ con } 1 \leq i, j \leq k.$$

Por último, si una base cumple con ser un conjunto ortogonal, decimos que es una *base ortogonal.* Dado que se puede demostrar que un conjunto ortogonal finito es linealmente independiente si, y sólo si, no contiene al vector nulo[10] entonces, por el Ejercicio 1.2 mencionado anteriormente, tenemos que un conjunto Γ es una base ortogonal de V si se cumplen las condiciones siguientes

$$\Gamma = \{\vec{g}_1, ..., \vec{g}_k\} \text{ es una base } \textit{ortogonal} \text{ de } V \text{ si}$$

$$\langle \Gamma \rangle = V, \quad \langle \vec{g}_j, \vec{g}_i \rangle = \begin{cases} \langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle \neq 0 & \text{si } \ j = i, \\ 0 & \text{si } \ j \neq i. \end{cases}$$

3. Solución en $\mathbb{R}^2$ usando el producto escalar

3.1. Producto punto

A continuación, veremos la importancia que tienen la operación de producto escalar y la noción de base ortogonal para la resolución del problema planteado al inicio del video mediante un ejemplo en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$. Consideremos la siguiente regla de correspondencia.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 v_2 + w_1 w_2$$

Veamos que la operación que define efectivamente cumple las propiedades de producto escalar, demostrándolas una por una[11].

Este tipo particular de producto escalar es conocido comunmente como *producto punto*, y cabe resaltar que puede generalizarse fácilmente al espacio $\mathbb{R}^n$, e inclusive al espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^n$. La demostración de que la operación en pantalla es un producto escalar queda como ejercicio para quien quiera hacerlo.

3.2. Base ortogonal y resolución del problema de encontrar coeficientes

Volvamos a representar nuestro problema en el caso del espacio $\mathbb{R}^2$ pero, esta vez, utilizando una base *particular*, que llamaremos Γ. Recordemos que nuestro objetivo es expresar a nuestro vector $\vec{v}$

[10] Escribir "*Ver el Ejercicio 1.5." como pie de página.
[11] Agregar nota al pie que diga "*La demostración termina en XX:XX.", y que persista hasta que termine.

como combinación lineal de los elementos de Γ, para lo cual debemos encontrar a los coeficientes c_i. Observemos que los vectores $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$ son ortogonales entre sí, pues su producto punto es igual a cero, por lo que Γ es un conjunto ortogonal. Además, $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$ son linealmente independientes entre sí y, más aún, generan a todo el espacio $\mathbb{R}^2$, como veremos a continuación. De lo anterior, concluimos que Γ es una base *ortogonal* de $\mathbb{R}^2$.

Calculemos el producto escalar de nuestro vector $\vec{v}$ con el vector $\vec{g}_1$, es decir, su producto punto. Observamos que hemos obtenido un número negativo. Ahora, vamos a volver a calcular el mismo producto escalar, pero de una forma diferente: primero, reemplazamos al vector $\vec{v}$ usando la ecuación que buscamos resolver; luego, aplicamos la propiedad de linealidad en la primer entrada del producto escalar; después, usamos el hecho de que Γ es una base ortogonal, por lo que el producto escalar entre $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$ es cero, eliminando así el segundo término; y, finalmente, calculamos el producto escalar de $\vec{g}_1$ consigo mismo. Notemos que hemos obtenido la siguiente ecuación, que podemos despejar para obtener el valor del coeficiente c_1. Recordamos que esta solución para c_1 es igual al producto escalar de $\vec{v}$ con $\vec{g}_1$ dividido entre el producto escalar de $\vec{g}_1$ consigo mismo.

Ahora, usaremos el mismo procedimiento para encontrar la solución del coeficiente c_2 directamente: empezamos considerando el producto escalar de $\vec{v}$ con $\vec{g}_2$, sustituimos $\vec{v}$ usando la ecuación que buscamos resolver, aplicamos la propiedad de linealidad en la primera entrada, usamos el hecho de que Γ es una base ortogonal para eliminar el coeficiente que no nos interesa, despejamos, calculamos los productos escalares restantes, y, finalmente, dividimos.

Verifiquemos que los coeficientes que hemos obtenido sean correctos. Efectivamente, vemos que lo son. Observemos que el procedimiento que acabamos de utilizar para resolver el problema de encontrar coeficientes en $\mathbb{R}^2$ sólo depende de tener un producto escalar —en este caso, el producto punto— y una base ortogonal para el espacio. Para ver esto, sugerimos considerar otra base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ y resolver el problema de encontrar coeficientes utilizando dicha base siguiendo el mismo procedimiento.

4. Generalización de la solución e interpretación geométrica

4.1. Generalización de la solución al problema de encontrar coeficientes

Veamos qué sucede si, regresando a nuestro problema original, suponemos que V es un espacio vectorial con producto escalar y que Γ es una base ortogonal de V. Nuevamente, por ser Γ una base, sabemos que existen coeficientes tales que la siguiente ecuación se cumple. ¿Pero cómo encontramos a estos coeficientes?

$$\beta = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k\} \text{ base de } V \qquad \Gamma = \{\vec{g}_1, ..., \vec{g}_k\} \text{ base } \textit{ortogonal} \text{ de } V$$

$$\langle \beta \rangle = V, \quad \beta \text{ es } l.i. \qquad \langle \Gamma \rangle = V, \quad \langle \vec{g}_j, \vec{g}_i \rangle = \begin{cases} \langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle \neq 0 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

$$\vec{v} = c_1 \vec{b}_1 + ... + c_k \vec{b}_k \qquad \vec{v} = d_1 \vec{g}_1 + ... + d_k \vec{g}_k$$

¿c_i? ¿d_i?

Observemos lo siguiente: si tomamos al i-ésimo elemento de la base ortogonal, aplicamos el producto escalar con este elemento a ambos lados de la ecuación que buscamos resolver, reescribimos nuestra expresión, usamos la propiedad de linealidad en la primer entrada del producto escalar y, finalmente, utilizamos el hecho de que nuestra base es ortogonal para eliminar los términos de la suma distintos del i-ésimo y despejar, podemos encontrar una expresión sumamente sencilla para el i-ésimo coeficiente: simplemente se obtiene a través de dos productos escalares y una división.

$$\vec{v} = d_1\vec{g}_1 + ... + d_k\vec{g}_k$$

$$\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle = \langle d_1\vec{g}_1 + ... + d_k\vec{g}_k, \vec{g}_i \rangle$$

$$\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle = \langle d_1\vec{g}_1, \vec{g}_i \rangle + ... + \langle d_k\vec{g}_k, \vec{g}_i \rangle$$

$$\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle = d_1\langle \vec{g}_1, \vec{g}_i \rangle + ... + d_k\langle \vec{g}_k, \vec{g}_i \rangle$$

$$\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle = \sum_{j=1}^{k} d_j \langle \vec{g}_j, \vec{g}_i \rangle$$

$$\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle = d_i\langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle$$

$$\frac{\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle}{\langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle} = d_i$$

Como esto es válido para toda i, tenemos el siguiente resultado para cualquier vector arbitrario de nuestro espacio vectorial con producto escalar:

$$d_i = \frac{\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle}{\langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle}, \quad 1 \leq i \leq k$$

$\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + ... + c_k\vec{b}_k$	$\vec{v} = d_1\vec{g}_1 + ... + d_k\vec{g}_k$
¿c_i?	$d_i = \frac{\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle}{\langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle}, \quad 1 \leq i \leq k$
$\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + ... + c_k\vec{b}_k$	$\vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{g}_1 \rangle}{\langle \vec{g}_1, \vec{g}_1 \rangle}\vec{g}_1 + ... + \frac{\langle \vec{v}, \vec{g}_k \rangle}{\langle \vec{g}_k, \vec{g}_k \rangle}\vec{g}_k$

¿c_i? $\qquad\qquad$ $d_i = \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle}{\langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle}, \quad 1 \le i \le k$

$\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + ... + c_k\vec{b}_k$ $\qquad\qquad$ $\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle}{\langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle}\vec{g}_i$

¿c_i? $\qquad\qquad$ $d_i = \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle}{\langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle}, \quad 1 \le i \le k$

Este resultado nos dice que cualquier vector del espacio se puede descomponer como una suma de componentes ortogonales entre sí, pues cada término de la suma es un reescalamiento de un elemento de la base ortogonal[12].

Hemos visto que, en espacios vectoriales de dimensión finita con producto escalar, las bases ortogonales nos ayudan a resolver nuestro problema de encontrar coeficientes de manera sencilla; sin embargo, ¡aún no hemos justificado que si quiera *existan*! Resulta que la existencia de bases ortogonales en espacios vectoriales de dimensión finita con producto escalar está asegurada, pero esto lo veremos en un video posterior cuando hablemos del Teorema de Gram-Schmidt.

4.2. Interpretación geométrica del producto escalar

Por lo pronto, observemos que el resultado general que hemos obtenido gracias al producto escalar y a las bases ortogonales nos permite dar una interpretación geométrica del producto escalar de la siguiente manera. Si tenemos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en cualquier espacio de dimensión finita con producto escalar y $\vec{v}$ es distinto del vector nulo, entonces podemos suponer *a priori* que $\vec{v}$ es un elemento de una base ortogonal de ese espacio[13]. En este caso, por lo visto anteriormente, sabemos que la componente de $\vec{u}$ que vive en el subespacio generado por $\vec{v}$ está dada por la siguiente expresión. Por lo tanto, en general, el producto escalar de un vector $\vec{u}$ con un vector no nulo $\vec{v}$ es un número proporcional al escalar por el cual debemos reescalar a $\vec{v}$ para obtener a la componente de $\vec{u}$ que vive en el subespacio generado por $\vec{v}$, conocida como la *proyección vectorial* de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

Una forma útil de visualizar esta proyección vectorial es imaginando que colocamos una fuente de luz fuera del subespacio generado por $\vec{v}$, del mismo lado donde se encuentra $\vec{u}$, y la alejamos hasta el infinito. En este caso, cuando los rayos de luz lleguen al subespacio generado por $\vec{v}$, la “sombra” producida por $\vec{u}$ en este subespacio será precisamente la proyección vectorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$. En esta serie de videos, frecuentemente utilizaremos esta forma de visualizar las proyecciones vectoriales. Para simplificarla, muchas veces sólo trazaremos un rayo que toque la punta del vector proyectado, como se muestra en pantalla.

En particular, $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{v}$ si, y sólo si, la proyección vectorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ es igual al vector nulo. Recordando que la relación de ortogonalidad es simétrica, esto también es equivalente a que la proyección vectorial de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ sea igual al vector nulo. En otras palabras, dos vectores son ortogonales si, y sólo si, la proyección vectorial de cualquiera de ellos sobre el otro es nula.

[12]Escribir “*Ver el Ejercicio 1.7.”.

[13]Escribir “*La justificación se explica en el video *Ortogonalización y ortonormalización (Teorema de Gram-Schmidt)* de Animathica.”

5. Ejercicios y preguntas

Sea (V, K) un espacio vectorial con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$.

Ejercicio 1.1 Demuestra que, para cualesquiera $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ y $a \in K$,

$$\langle \vec{u} + a\vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + a\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle \quad \text{y} \quad \langle \vec{u}, \vec{v} + a\vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \overline{a}\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle.$$

Ejercicio 1.2 Para $\vec{v} \in V$, demuestra que $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ si, y sólo si, $\vec{v} = \vec{0}$.

Ejercicio 1.3 Demuestra que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ para todo $\vec{u} \in V$.

(b) $\vec{v} = \vec{0}$.

(c) $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$ para todo $\vec{u} \in V$.

Ejercicio 1.4 Demuestra que, si $K = \mathbb{R}$, entonces el producto escalar es *bilineal* (i.e., lineal en ambas entradas).

Ejercicio 1.5 Demuestra que todo conjunto ortogonal finito es linealmente independiente si, y sólo si, no contiene al vector nulo.

Sean V un espacio de dimensión finita k y $\Gamma = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, ..., \vec{g}_k\} \subseteq V$.

Ejercicio 1.6 Demuestra que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) Γ es un conjunto ortogonal que no contiene al vector nulo.

(b) Γ es una base ortogonal de V.

(c) $\langle \Gamma \rangle = V$ y $\langle \vec{g}_j, \vec{g}_i \rangle = \begin{cases} \langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle \neq 0 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$

Ejercicio 1.7 Demuestra que Γ es una base ortogonal de V si, y sólo si,

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle}{\langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle} \vec{g}_i \quad \forall\, \vec{v} \in V.$$

Más aún, demuestra que, en este caso,

$$\left\langle \frac{\langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle}{\langle \vec{g}_i, \vec{g}_i \rangle} \vec{g}_i, \frac{\langle \vec{v}, \vec{g}_j \rangle}{\langle \vec{g}_j, \vec{g}_j \rangle} \vec{g}_j \right\rangle = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j.$$

Pregunta 1.8 ¿Se puede extender la interpretación geométrica del producto escalar entre dos vectores, que lo relaciona con la proyección vectorial del primero sobre el segundo, al caso en que cualquiera de ellos es el vector nulo del espacio?

Pregunta 1.9 ¿Qué significa que el producto escalar entre dos vectores sea positivo, negativo o cero?

Pregunta 1.10 En un espacio vectorial complejo con producto escalar, ¿qué significa geométricamente que el producto escalar entre dos vectores tenga parte imaginaria positiva, negativa o cero? Más aún, ¿cómo se interpreta la propiedad de simetría conjugada en este caso? (Sugerencia: Considera el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}$.)