Norma inducida y bases ortonormales

Observación 0.1. *Las ideas principales a presentar en este video son:*

(I) *Por definición, un producto escalar positivo en un espacio vectorial induce una norma en ese espacio. Aunque no todas las normas provienen de un producto escalar positivo definido*[1]*, en esta serie de videos nos enfocaremos en este tipo de normas.*

(II) *La norma nos da una noción de* magnitud *de un vector, y nos permite hacer comparaciones entre vectores en este sentido.*

(III) *Todo vector no nulo puede ser reescalado de tal forma que el vector resultante tenga norma unitaria. A este tipo de vectores se les conoce como vectores unitarios. En particular, un conjunto en el que todos los vectores son unitarios y ortogonales entre sí se conoce como conjunto ortonormal.*

(IV) *Si un espacio vectorial con producto escalar tiene dimensión finita y existe una base ortonormal, entonces el problema de encontrar los coeficientes necesarios para expresar a un vector arbitrario como combinación lineal de esta base tiene una solución extremadamente simple.*

[1] Colocar ejemplos de normas no inducidas por productos escalares positivo definidos en la descripción.

1. Primera escena

2. Segunda escena

3. Tercera escena

Hablar sobre la notación $\frac{1}{||\vec{u}||}\vec{u} \equiv \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} \equiv \hat{u}$ para $\vec{u} \neq \vec{0}$ y demostrar que $||\hat{u}|| = 1$.

4. Cuarta escena

5. Escena final

Ejercicio 2.1 Demuestra que todo conjunto ortonormal es linealmente independiente.

Ejercicio 2.2

Ejercicio 2.¿3? Una *métrica* o *función de distancia* en un conjunto X es una función $f(\cdot,\cdot) : X \times X \to [0,\infty)$ que cumple las siguientes propiedades:

(I) $d(x,y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$;

(II) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in X$;

(III) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todo $x, y, z \in X$.

Demuestra que si (V, K) es un espacio vectorial con norma $||\cdot||$, entonces la función dada por $d(\vec{x},\vec{y}) = ||\vec{x} - \vec{y}||$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$ es una métrica en V. Por lo tanto, toda norma *induce* una métrica. En particular, se sigue que todo producto escalar positivo definido induce una métrica; sin embargo, existen métricas que no son inducidas por normas ni productos escalares.

Pregunta 2.¿4?