LR实验

PB18071477 敖旭扬

原理

LR (logistics regression) 模型就是要给出一个 $W=(b;\boldsymbol{w})$ ，它对一个样本 $\hat{\boldsymbol{x}}=(1,\boldsymbol{x})$ ，计算得到一个预测值

$$z=\hat{\boldsymbol{x}}W=w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_dx_d+b \tag{1}$$

那么在所建立的模型（给定 W ）下，样本 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 为正类的概率为

$$P(Y=1|\hat{\boldsymbol{x}},W)=sigmoid(z) \tag{2}$$

为反类的概率为

$$P(Y=0|\hat{\boldsymbol{x}},W)=1-P(Y=1|\hat{\boldsymbol{x}},W)=1-sigmoid(z) \tag{3}$$

一般 `sigmoid` 函数取

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}} \tag{4}$$

则样本 $(\hat{\boldsymbol{x}},y)$ 出现的概率为

$$\begin{aligned}P(y|\hat{\boldsymbol{x}},W)&=P(Y=1|\hat{\boldsymbol{x}},W)^yP(Y=0|\hat{\boldsymbol{x}},W)^{1-y}\\&=\left(\frac{1}{1+e^{-\hat{\boldsymbol{x}}W}}\right)^y\left(1-\frac{1}{1+e^{-\hat{\boldsymbol{x}}W}}\right)^{1-y}\end{aligned} \tag{5}$$

似然函数为

$$\mathcal{L}(W)=\prod_{i=1}^{n}P(y_i|\hat{\boldsymbol{x}}_i,W) \tag{6}$$

在**LR模型**中，损失函数称为最大似然损失函数，即似然函数取对数，在取得相反数：

$$J(W)=-\log\mathcal{L}(W)=-\sum_{i=1}^{n}\left[y_i\left(\frac{1}{1+e^{-\hat{\boldsymbol{x}}W}}\right)+(1-y_i)\left(1-\frac{1}{1+e^{-\hat{\boldsymbol{x}}W}}\right)\right]$$

训练**LR模型**的过程就是一步步迭代修改 W ，使得损失函数 $J(W)$ 取得最小值，**梯度下降法**就是一种优化**LR模型**的方法，先对 $J(W)$ 求偏导

$$\frac{\partial J}{\partial W_j}=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+e^{-\hat{\boldsymbol{x}}_iW}}\right)\cdot x_{ij} \tag{7}$$

写成矩阵形式即

$$\frac{\partial J}{\partial W}=X^T(H-Y) \tag{8}$$

其中

$$H=\frac{1}{1+e^{-XW}} \tag{9}$$

在梯度下降法中，输入训练次数 T 和学习率 α ，则循环 T 次，每一次都用下式更新 W

$$W = W - \alpha \cdot dW = W - \alpha \cdot \frac{\partial J}{\partial W} \tag{10}$$

或者不指定次数 T ，而是判断当 $max(dW) \leq \varepsilon$时停止学习，输入训练数据用梯度下降法计算出 W 得到最优模型后，即可用该模型对测试数据集进行预测，输出训练集和测试集的精度。

编程实现

本次实验给定的数据集有**70**组数据， $\boldsymbol{x}$ 的维度为$(,2)$（2列）， y 为一个 $0/1$ 的值，维度为$(,1)$（1列），则 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 维度为 $(,3)$， X 维度为 $(70,3)$ （70行3列）， Y 维度为 $(70,1)$。

由原理部分的公式推导可知 H 的维度为 $(70,1)$， W 的维度为 $(3,1)$ 。

矩阵运算使用`python`的`numpy`库实现。

最关键的梯度下降算法如下

```
def gradient_descent(X, Y, alpha=0.001, max_iter=100000):
    """
    返回使用梯度下降法求得的 W ，X形状为(n,3),Y形状为(n,1)
    """
    W = np.random.randn(X.shape[1], 1)  # 随机初始化 W ,维度(3,1)
    W_save = []  # 记录迭代过程中的 W,用于动态展示迭代过程
    save_step = int(max_iter/100)  # 记下100组W
    Xt = np.transpose(X)  # Xt 维度(3,70)
    for i in range(max_iter):
        H = sigmoid(np.dot(X, W))  # H 维度(70,1)
        dW = np.dot(Xt, H-Y)  # dw 维度(3,1)
        W = W-alpha * dW  # 更新 W
        if i % save_step == 0:
            W_save.append([W.copy(), i])
    return W, W_save
```

完整实验源码见压缩包中的`LR.py`

运算结果

实例

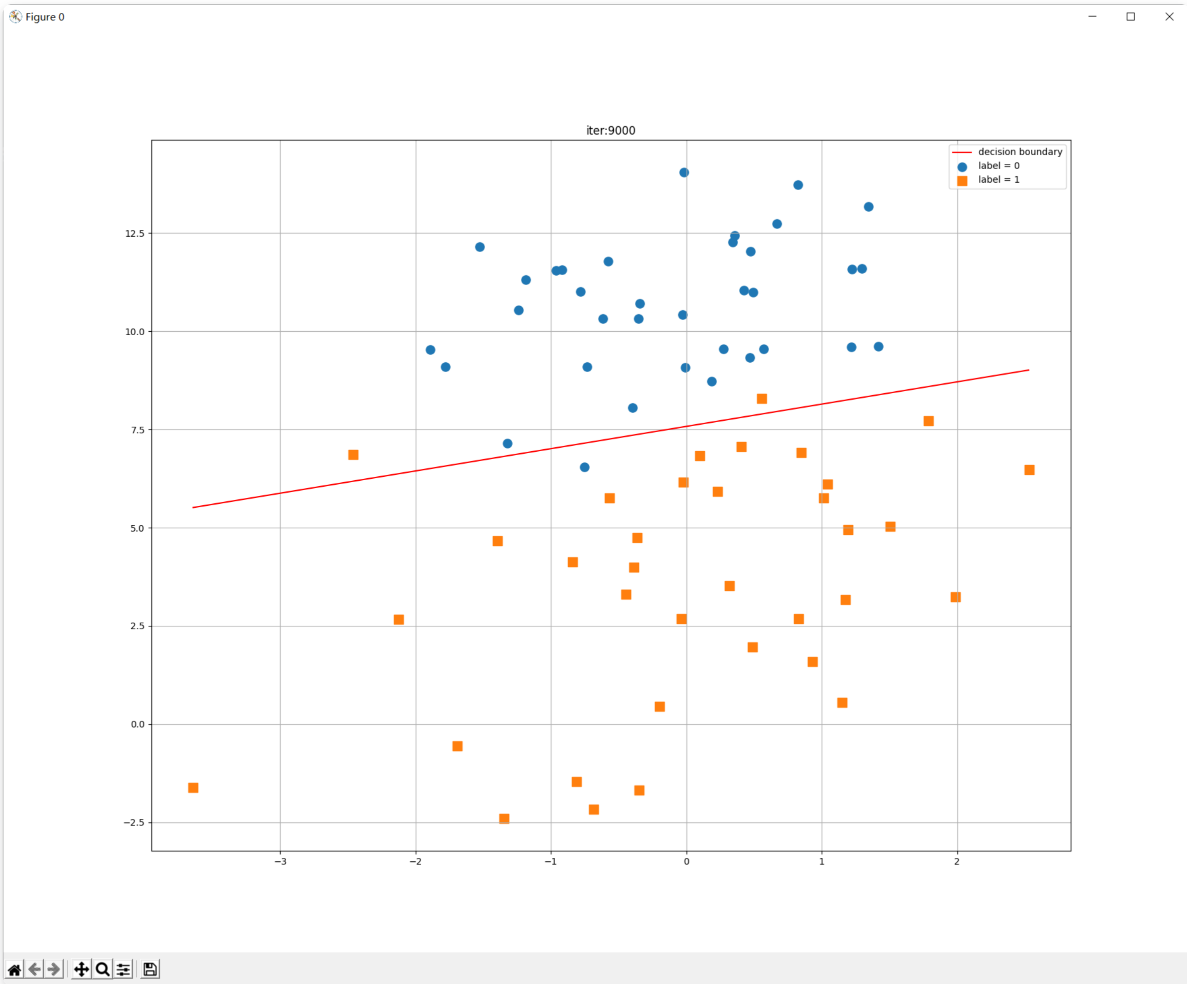
在主函数中(详见源码)调用下面的梯度下降实例

```
W, W_save = gradient_descent(X_train, Y_train, 0.001, 100000)
```

命令行输出结果为

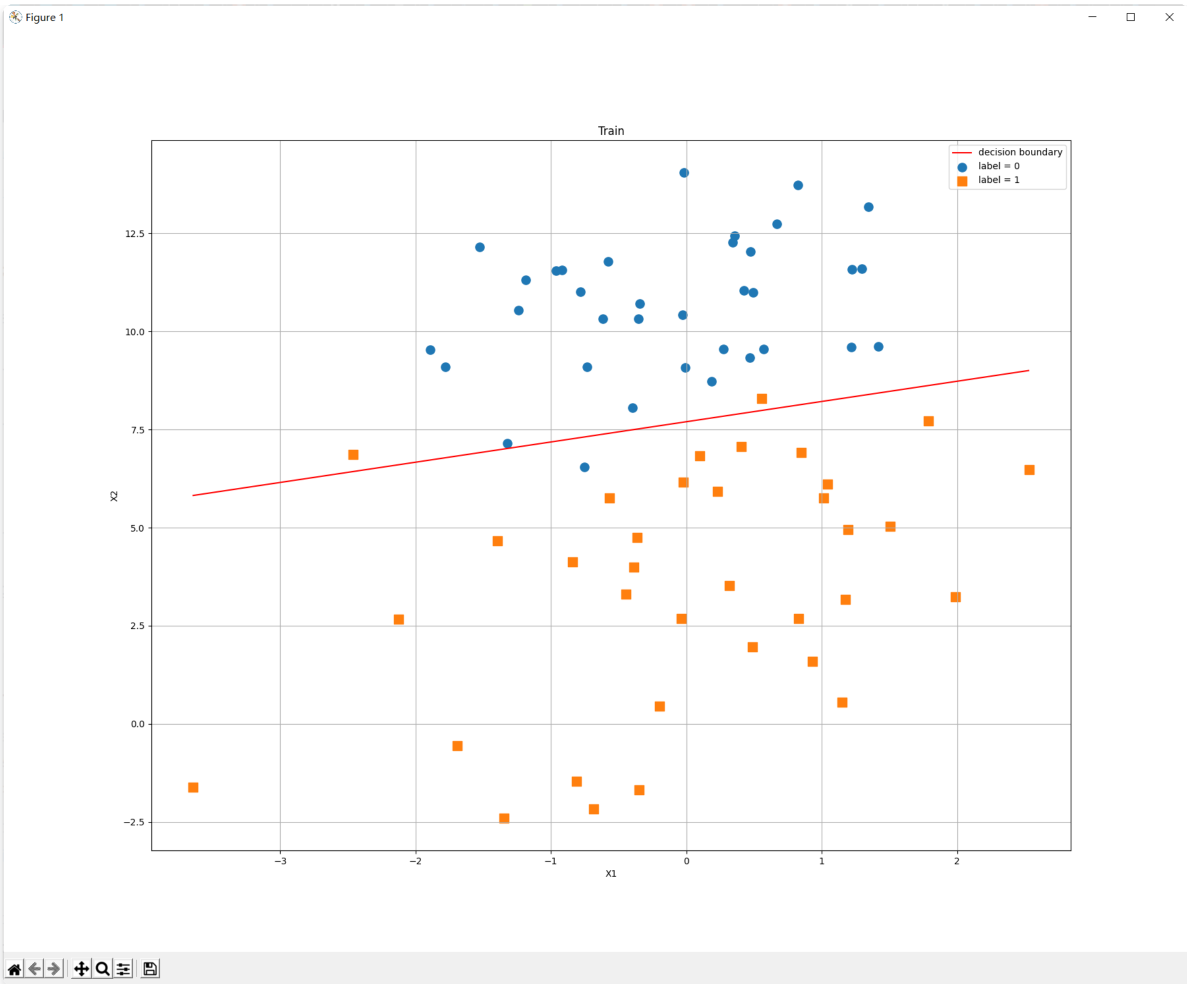
```
W = [[17.31462217]
     [ 1.1604812 ]
     [-2.24873526]]
训练集精度为 95.714286%
测试集精度为 93.333333%
```

动态展示迭代过程



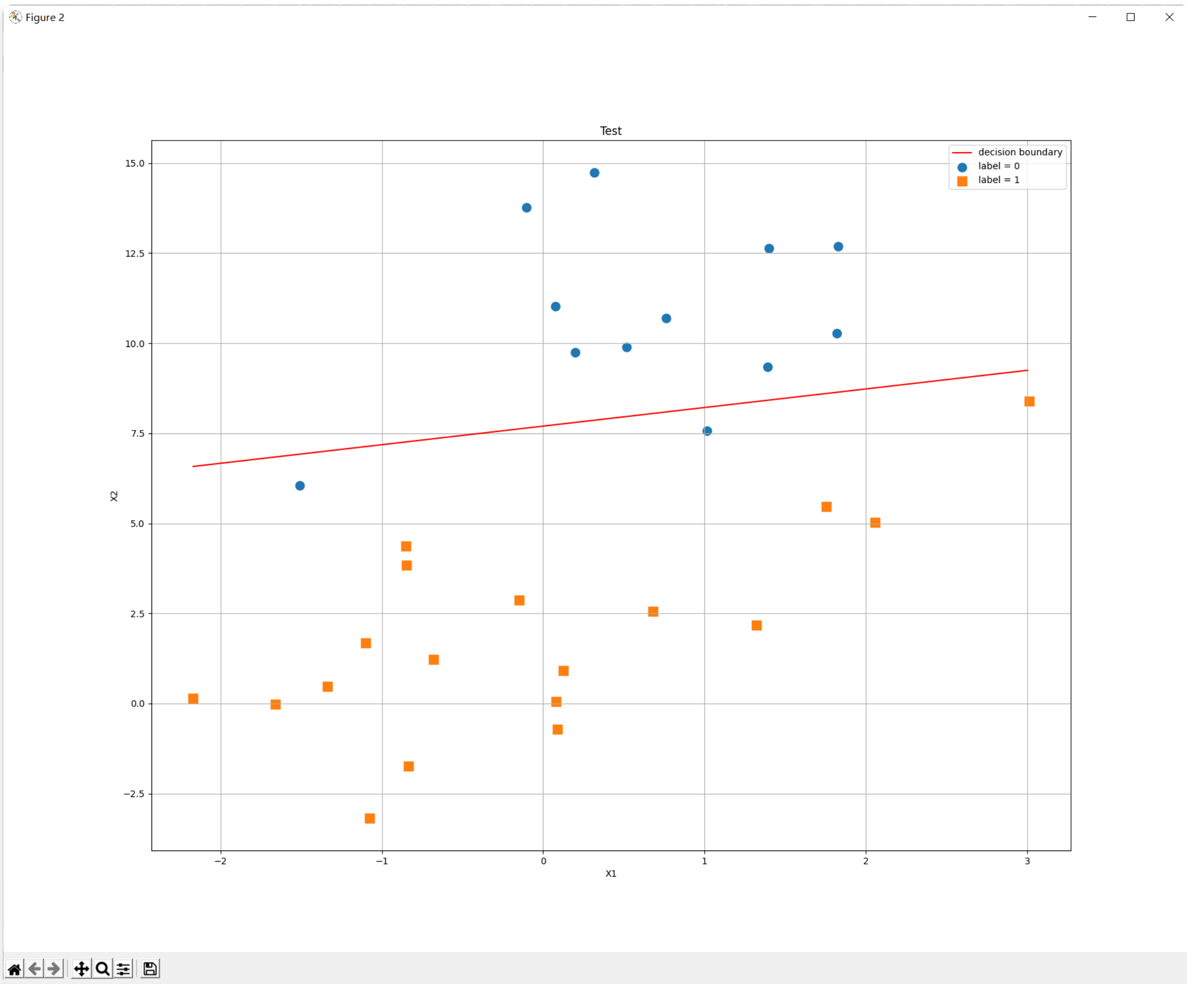
动态迭代图

训练结果



最终结果在训练集上的决策边界

预测效果



最终结果在测试集上的决策边界

总结

题目要求的Baseline为

```
测评指标：精度值，正确预测占整体的比例
训练集精度：0.9
测试集精度：0.85
```

我训练出的**LR模型**训练集精度为 95.714286%，测试集精度为 93.333333% ，性能达标。