

# Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü kullanılarak devre analizi 3 adımda yapılır:

- Devre bileşenleri zaman uzayından  $s$  uzayına çevrilir.
- Devre analiz yöntemleri kullanılarak devre çözülür.
- Ters Laplace dönüşümü yapılarak çözüm  $s$  uzayından zaman uzayına çevrilir.

1/37

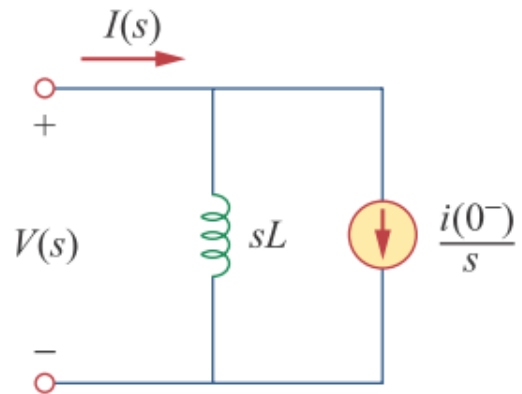
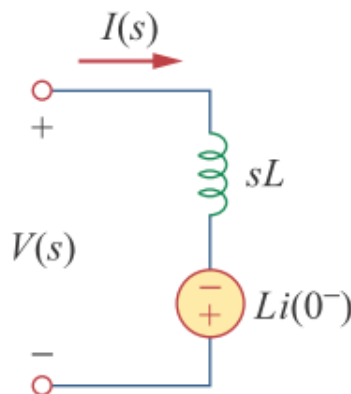
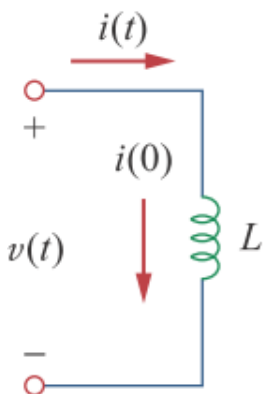
## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

Direnç  $v(t) = Ri(t) \quad V(s) = RI(s)$

Bobin  $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

$$V(s) = L[sI(s) - i(0^-)] = sLI(s) - Li(0^-)$$

$$I(s) = \frac{1}{sL} V(s) + \frac{i(0^-)}{s}$$



2/37

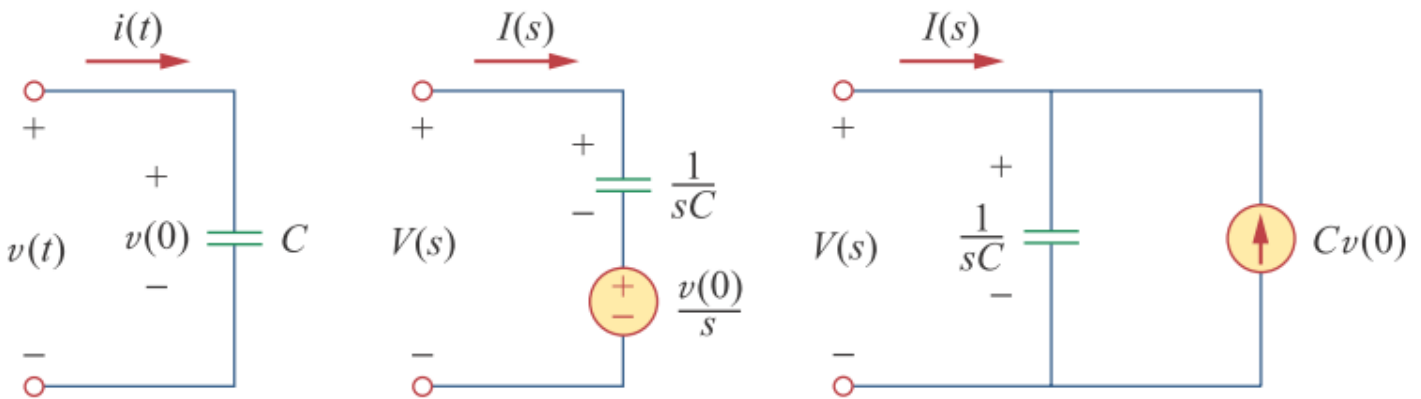
# Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

## Kapazitör

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$I(s) = C[sV(s) - v(0^-)] = sCV(s) - Cv(0^-)$$

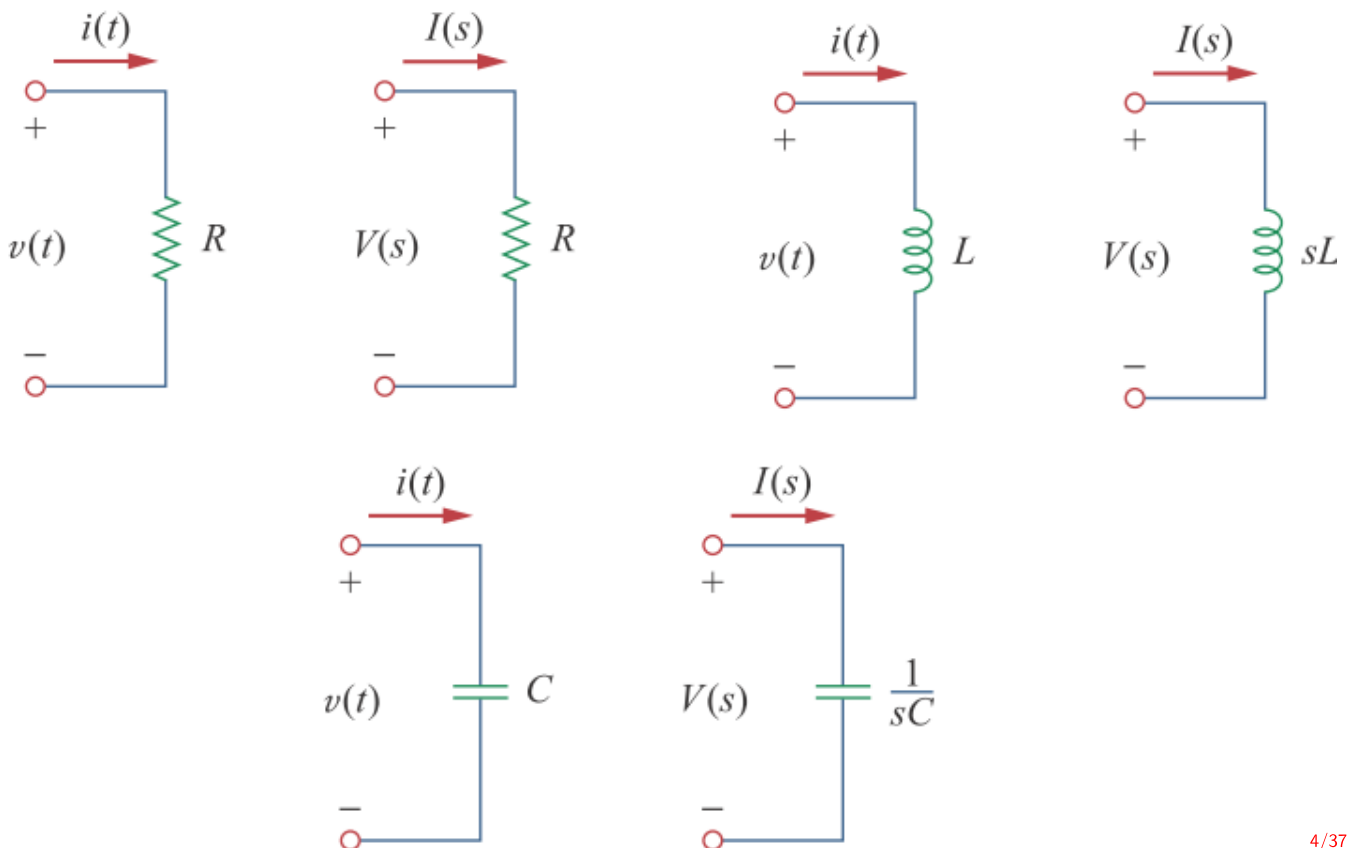
$$V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$



3/37

# Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

Başlangıç durumları 0 ise:



4/37

# Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

Başlangıç durumları 0 ise:

Resistor:  $V(s) = RI(s)$

Inductor:  $V(s) = sLI(s)$

Capacitor:  $V(s) = \frac{1}{sC}I(s)$

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

Resistor:  $Z(s) = R$

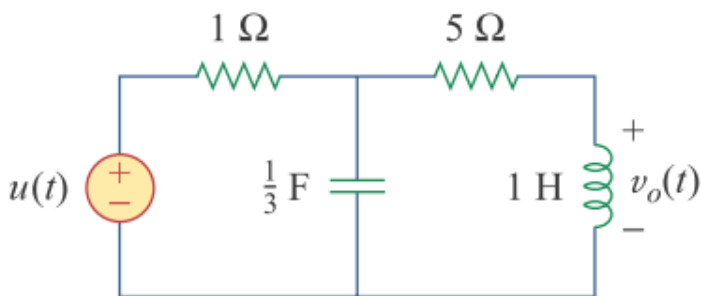
Inductor:  $Z(s) = sL$

Capacitor:  $Z(s) = \frac{1}{sC}$

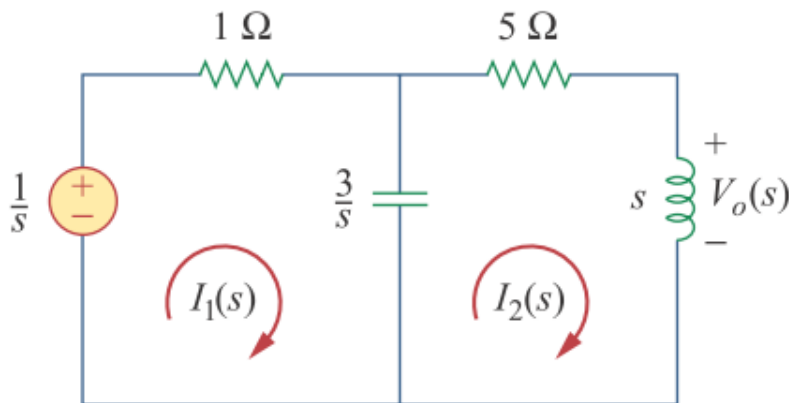
5/37

# Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

Soru: Devrede başlangıç koşulları 0 ise  $v_o(t)$ 'yi bulunuz.



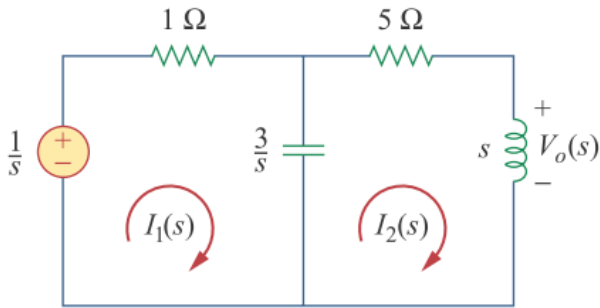
$$\begin{aligned} u(t) &\Rightarrow \frac{1}{s} \\ 1\text{ H} &\Rightarrow sL = s \\ \frac{1}{3}\text{ F} &\Rightarrow \frac{1}{sC} = \frac{3}{s} \end{aligned}$$



6/37

## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

Devrede başlangıç koşulları 0 ise  $v_o(t)$ 'yi bulunuz.



$$\frac{1}{s} = \left(1 + \frac{3}{s}\right)I_1 - \frac{3}{s}I_2$$
$$0 = -\frac{3}{s}I_1 + \left(s + 5 + \frac{3}{s}\right)I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{3}(s^2 + 5s + 3)I_2$$

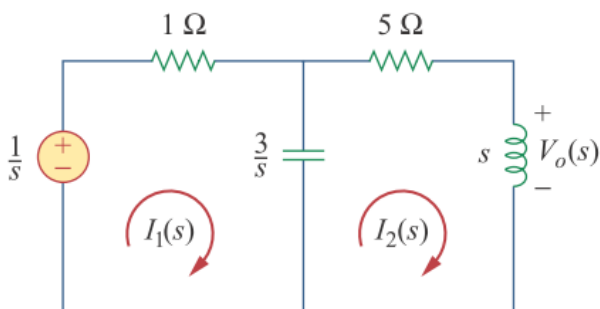
$$\frac{1}{s} = \left(1 + \frac{3}{s}\right)\frac{1}{3}(s^2 + 5s + 3)I_2 - \frac{3}{s}I_2 \quad 3s \text{ ile çarpalım}$$

$$3 = (s^3 + 8s^2 + 18s)I_2 \quad I_2 = \frac{3}{s^3 + 8s^2 + 18s}$$

7/37

## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

Devrede başlangıç koşulları 0 ise  $v_o(t)$ 'yi bulunuz.



$$I_2 = \frac{3}{s^3 + 8s^2 + 18s}$$

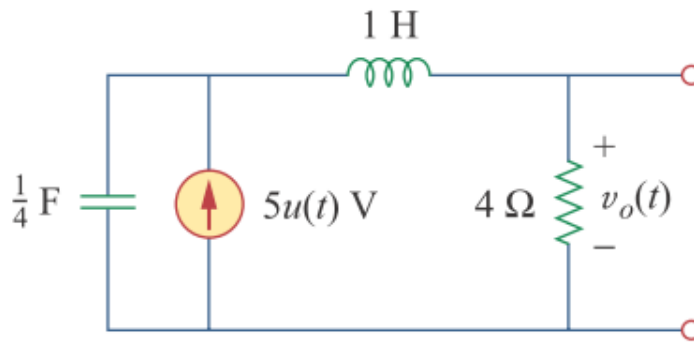
$$V_o(s) = sI_2 = \frac{3}{s^2 + 8s + 18} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(s + 4)^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$v_o(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-4t} \sin \sqrt{2}t \text{ V}, \quad t \geq 0$$

8/37

## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

Ödev: Devrede başlangıç koşulları 0 ise  $v_o(t)$ 'yi bulunuz.

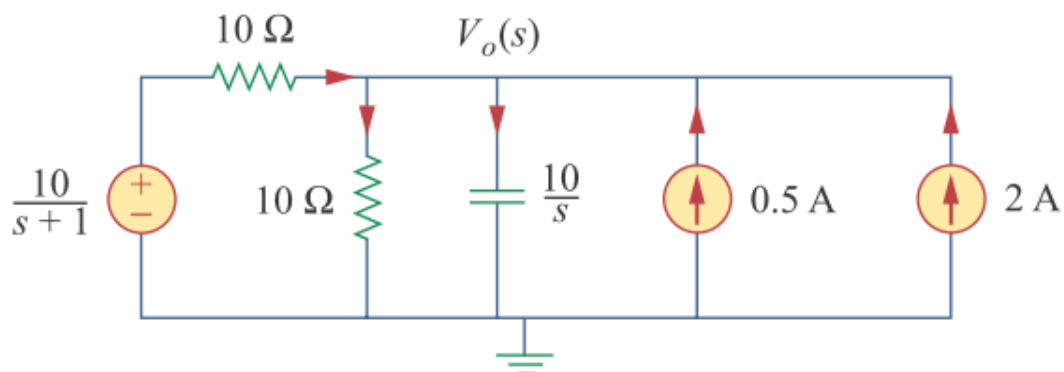
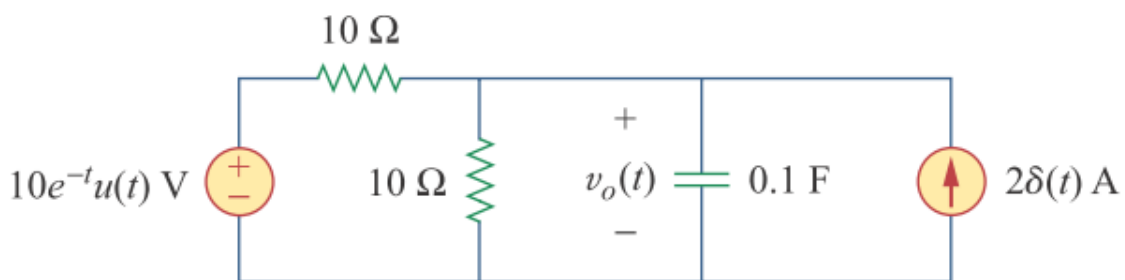


$$20(1 - e^{-2t} - 2te^{-2t})u(t) \text{ V.}$$

9/37

## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

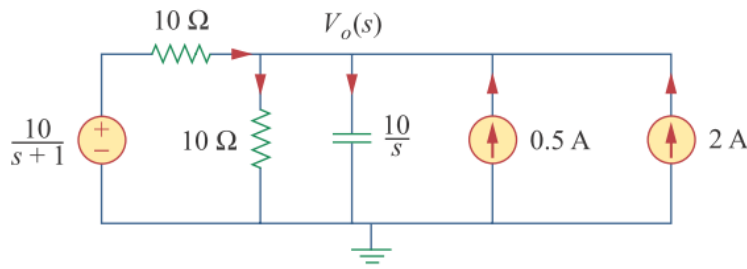
Soru:  $v_o(0) = 5 \text{ V}$  ise  $v_o(t)$ 'yi bulunuz.



10/37

## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

Soru:  $v_o(0) = 5V$  ise  $v_o(t)$ 'yi bulunuz.



$$\frac{10/(s+1) - V_o}{10} + 2 + 0.5 = \frac{V_o}{10} + \frac{V_o}{10/s}$$

$$\frac{1}{s+1} + 2.5 = \frac{2V_o}{10} + \frac{sV_o}{10} = \frac{1}{10}V_o(s+2)$$

$$\frac{10}{s+1} + 25 = V_o(s+2)$$

11/37

## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

$v_o(0) = 5V$  ise  $v_o(t)$ 'yi bulunuz.

$$\frac{10}{s+1} + 25 = V_o(s+2)$$

$$V_o = \frac{25s+35}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = (s+1)V_o(s) \Big|_{s=-1} = \frac{25s+35}{(s+2)} \Big|_{s=-1} = \frac{10}{1} = 10$$

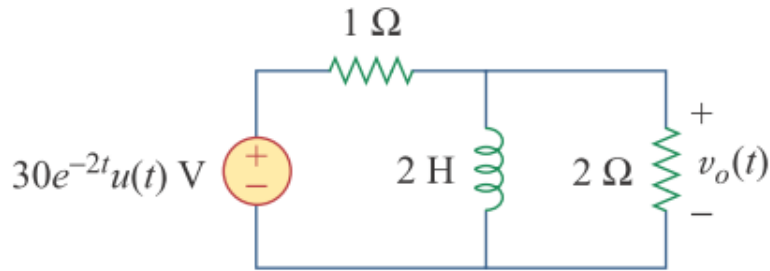
$$B = (s+2)V_o(s) \Big|_{s=-2} = \frac{25s+35}{(s+1)} \Big|_{s=-2} = \frac{-15}{-1} = 15$$

$$V_o(s) = \frac{10}{s+1} + \frac{15}{s+2} \quad v_o(t) = (10e^{-t} + 15e^{-2t})u(t) \text{ V}$$

12/37

# Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

Ödev:  $v_o(t)$ 'yi bulunuz.

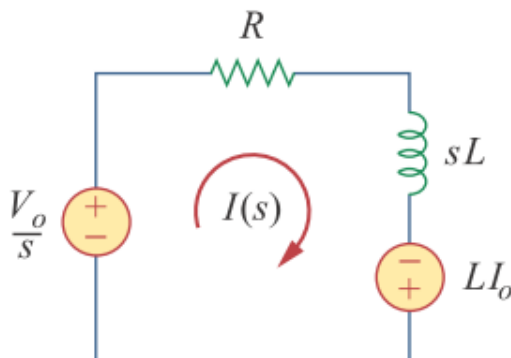
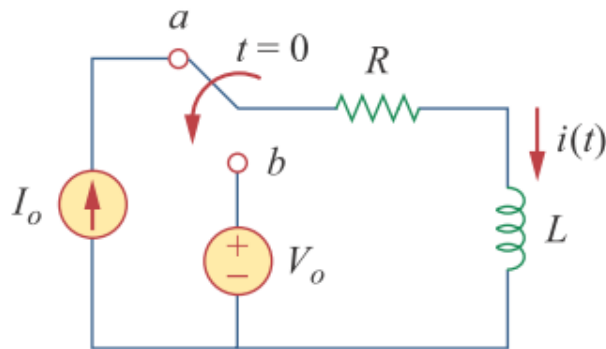


$$(24e^{-2t} - 4e^{-t/3})u(t)\text{ V.}$$

13/37

# Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

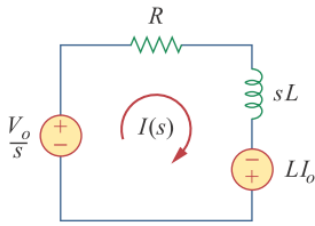
Soru:  $t = 0$  anında anahtar a'dan b'ye çeviriliyor.  $t > 0$  için  $i(t)$ 'yi bulunuz.



14/37

## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

Soru:  $t = 0$  anında anahtar a'dan b'ye çeviriliyor.  $t > 0$  için  $i(t)$ 'yi bulunuz.



$$I(s)(R + sL) - LI_o - \frac{V_o}{s} = 0$$

$$I(s) = \frac{LI_o}{R + sL} + \frac{V_o}{s(R + sL)} = \frac{I_o}{s + R/L} + \frac{V_o/L}{s(s + R/L)}$$

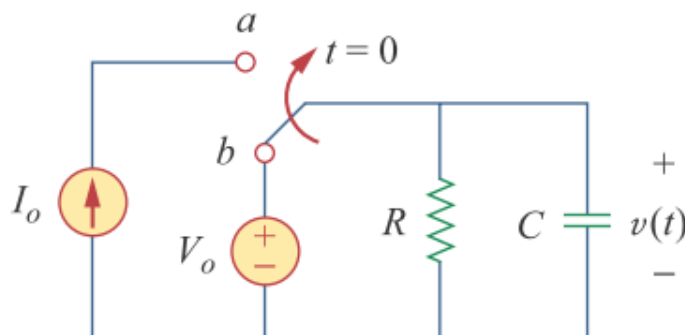
$$I(s) = \frac{I_o}{s + R/L} + \frac{V_o/R}{s} - \frac{V_o/R}{(s + R/L)}$$

$$i(t) = \left( I_o - \frac{V_o}{R} \right) e^{-t/\tau} + \frac{V_o}{R}, \quad t \geq 0 \quad \tau = \frac{L}{R}$$

15/37

## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

Ödev: Anahtar b pozisyonunda uzusüre bekledikten sonra  $t = 0$  anında a pozisyonuna getiriliyor.  $t > 0$  için  $v(t)$ 'yi bulunuz.



$$v(t) = (V_o - I_o R) e^{-t/\tau} + I_o R, \quad t > 0, \text{ where } \tau = RC.$$

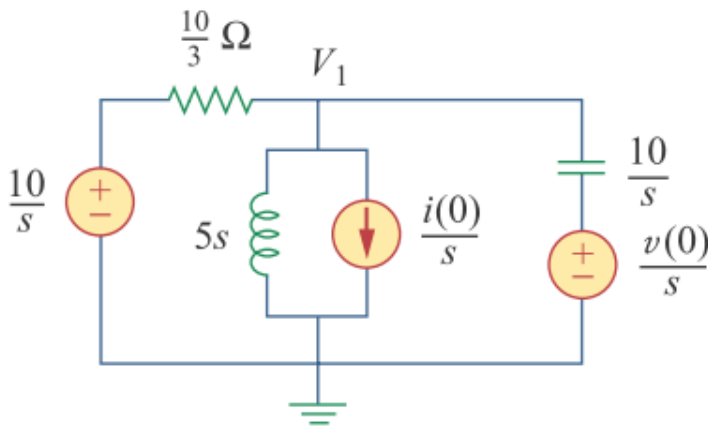
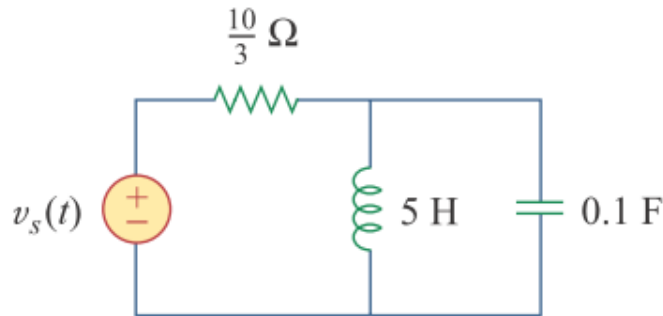
16/37



## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

Soru:  $t = 0$  anında bobinden  $-1\text{A}$  akım akıyor ve kapasitörde  $5\text{V}$  voltaj var ise kapasitör üzerindeki voltajı düğüm gerilim yöntemi ile bulunuz.

$$v_s(t) = 10u(t) \text{ V}$$



$$v(0) = 5 \text{ V}$$

$$i(0) = -1 \text{ A}$$

17/37

## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

$$\frac{V_1 - 10/s}{10/3} + \frac{V_1 - 0}{5s} + \frac{i(0)}{s} + \frac{V_1 - [v(0)/s]}{1/(0.1s)} = 0$$

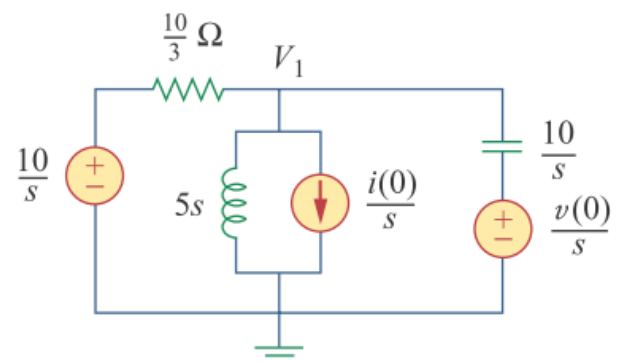
$$0.1 \left( s + 3 + \frac{2}{s} \right) V_1 = \frac{3}{s} + \frac{1}{s} + 0.5$$

$$0.1 \left( s + 3 + \frac{2}{s} \right) V_1 = \frac{3}{s} + \frac{1}{s} + 0.5$$

$$(s^2 + 3s + 2) V_1 = 40 + 5s$$

$$V_1 = \frac{40 + 5s}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{35}{s + 1} - \frac{30}{s + 2}$$

$$v_1(t) = (35e^{-t} - 30e^{-2t})u(t) \text{ V}$$

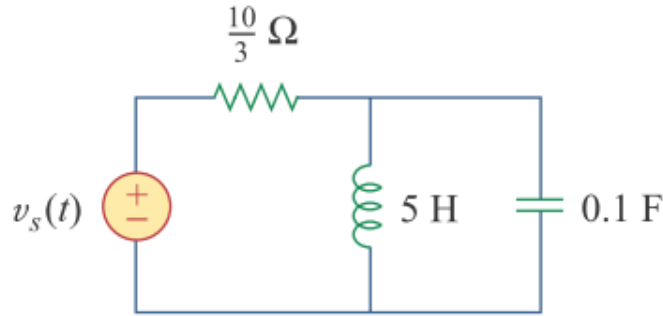


18/37

## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

Ödev: Bir önceki soruda verilen devrede bobin üzerinden geçen akımı bulunuz.

$$v_s(t) = 10u(t) \text{ V}$$



$$i(t) = (3 - 7e^{-t} + 3e^{-2t})u(t) \text{ A.}$$

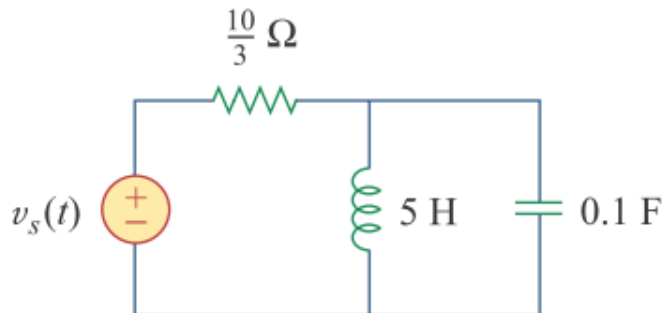
19/37

## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

Soru: Bir önceki örnekte verilen devrede kapasitör üzerindeki voltajı bulmak için süperpozisyon yöntemini kullanınız.

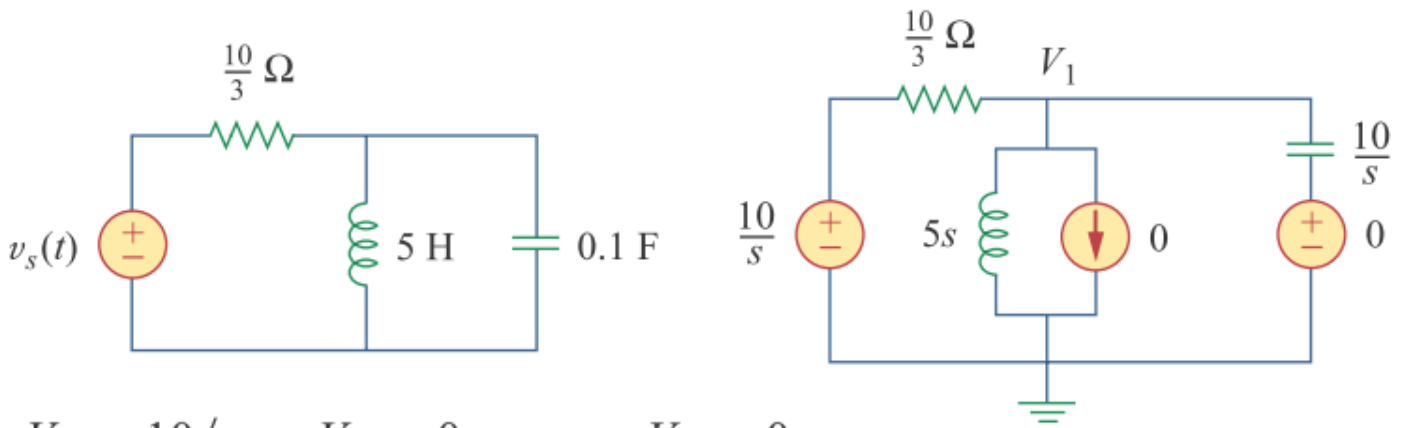
$t = 0$  anında bobinden -1A akım akıyor ve kapasitörde 5V voltaj var ise kapasitör üzerindeki voltajı bulunuz.

$$v_s(t) = 10u(t) \text{ V}$$



20/37

## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü



$$\frac{V_1 - 10/s}{10/3} + \frac{V_1 - 0}{5s} + 0 + \frac{V_1 - 0}{1/(0.1s)} = 0$$

$$0.1 \left( s + 3 + \frac{2}{s} \right) V_1 = \frac{3}{s}$$

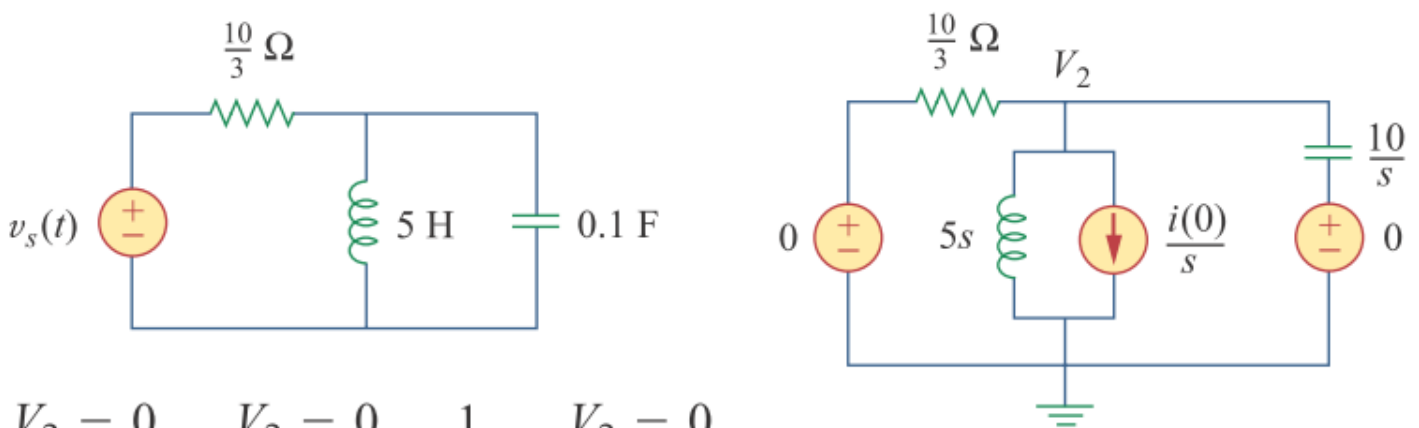
$$(s^2 + 3s + 2) V_1 = 30$$

$$V_1 = \frac{30}{(s+1)(s+2)} = \frac{30}{s+1} - \frac{30}{s+2}$$

$$v_1(t) = (30e^{-t} - 30e^{-2t})u(t) \text{ V}$$

21/37

## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü



$$\frac{V_2 - 0}{10/3} + \frac{V_2 - 0}{5s} - \frac{1}{s} + \frac{V_2 - 0}{1/(0.1s)} = 0$$

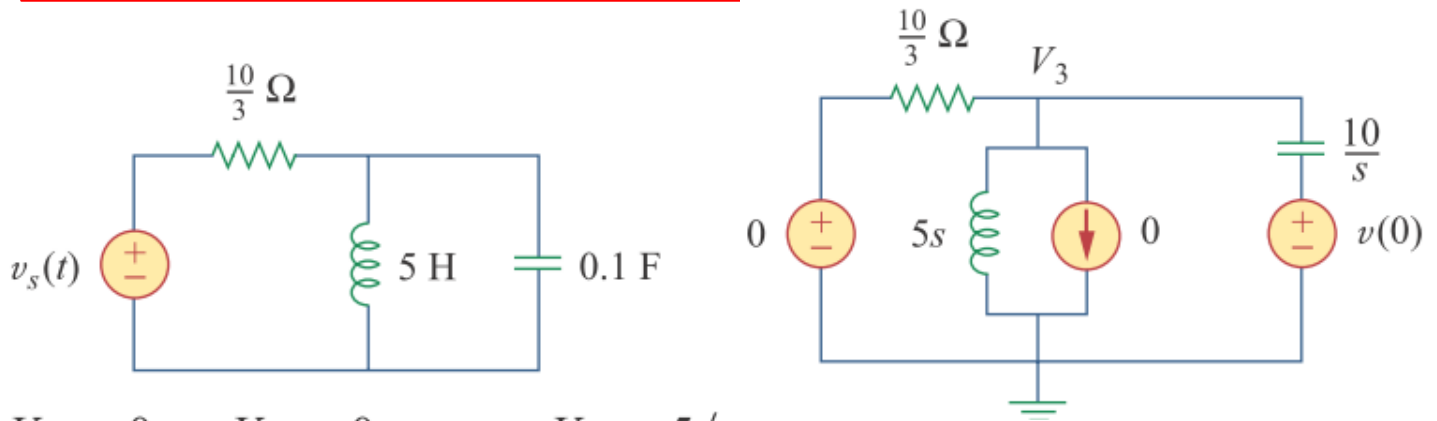
$$0.1 \left( s + 3 + \frac{2}{s} \right) V_2 = \frac{1}{s}$$

$$V_2 = \frac{10}{(s+1)(s+2)} = \frac{10}{s+1} - \frac{10}{s+2}$$

$$v_2(t) = (10e^{-t} - 10e^{-2t})u(t) \text{ V}$$

22/37

## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü



$$\frac{V_3 - 0}{10/3} + \frac{V_3 - 0}{5s} - 0 + \frac{V_3 - 5/s}{1/(0.1s)} = 0$$

$$0.1 \left( s + 3 + \frac{2}{s} \right) V_3 = 0.5$$

$$V_3 = \frac{5s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-5}{s+1} + \frac{10}{s+2}$$

$$v_3(t) = (-5e^{-t} + 10e^{-2t})u(t) \text{ V}$$

23/37

## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

$$v_1(t) = (30e^{-t} - 30e^{-2t})u(t) \text{ V}$$

$$v_2(t) = (10e^{-t} - 10e^{-2t})u(t) \text{ V}$$

$$v_3(t) = (-5e^{-t} + 10e^{-2t})u(t) \text{ V}$$

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t)$$

$$= \{(30 + 10 - 5)e^{-t} + (-30 + 10 - 10)e^{-2t}\}u(t) \text{ V}$$

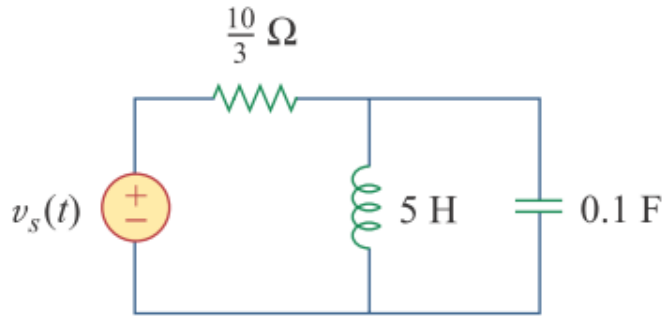
$$v(t) = (35e^{-t} - 30e^{-2t})u(t) \text{ V}$$

24/37

## Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

Ödev: Bir önceki örnekte verilen devrede bobin üzerinden geçen akımı bulmak için süperpozisyon yöntemini kullanınız.  $t = 0$  anında bobinden  $-1\text{A}$  akım akıyor ve kapasitörde  $5\text{V}$  voltaj var ise kapasitör üzerindeki voltajı bulunuz.

$$v_s(t) = 10u(t) \text{ V}$$



$$i(t) = (3 - 7e^{-t} + 3e^{-2t})u(t) \text{ A.}$$

25/37

## Transfer Fonksiyonu

Transfer fonksiyonu sinyal işlemede önemli kavramlardan biridir. Bir sistemden geçen sinyalin nasıl davranacağını ifade eder. Transfer fonksiyonu  $s$ -uzayında çıkış sinyalinin giriş sinyaline oranı olarak tanımlanır.  $X(s)$  giriş sinyali  $Y(s)$  çıkış sinyali ise transfer fonksiyonu:

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad \text{Voltaj kazancı}$$

$$H(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)} \quad \text{Akım kazancı}$$

$$H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \quad \text{Empedans}$$

$$H(s) = \frac{I(s)}{V(s)} \quad \text{Admittans}$$

26/37

## Transfer Fonksiyonu

---

Eğer sistemin input fonksiyonu ve transfer fonksiyonu biliniyorsa:

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Eğer giriş fonksiyonu darbe fonksiyonu ise:

$$x(t) = \delta(t) \quad X(s) = 1$$

$$Y(s) = H(s) \quad y(t) = h(t) \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

Birim darbe cevabı

---

27/37

## Transfer Fonksiyonu

---

Soru: Bir lineer sistemin input ve outputu aşağıda verilmiştir. Transfer fonksiyonunu ve darbe cevabını bulunuz.

$$y(t) = 10e^{-t} \cos 4t u(t) \quad x(t) = e^{-t} u(t)$$

$$Y(s) = \frac{10(s+1)}{(s+1)^2 + 4^2} \quad X(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10(s+1)^2}{(s+1)^2 + 16} = \frac{10(s^2 + 2s + 1)}{s^2 + 2s + 17}$$

$$H(s) = 10 - 40 \frac{4}{(s+1)^2 + 4^2} \quad h(t) = 10\delta(t) - 40e^{-t} \sin 4t u(t)$$

---

28/37

## Transfer Fonksiyonu

Ödev: Transfer fonksiyonu verilen bir lineer sisteme  $5e^{-3t}u(t)$  input sinyali uygulanıyorsa  $y(t)$ 'yi bulunuz.

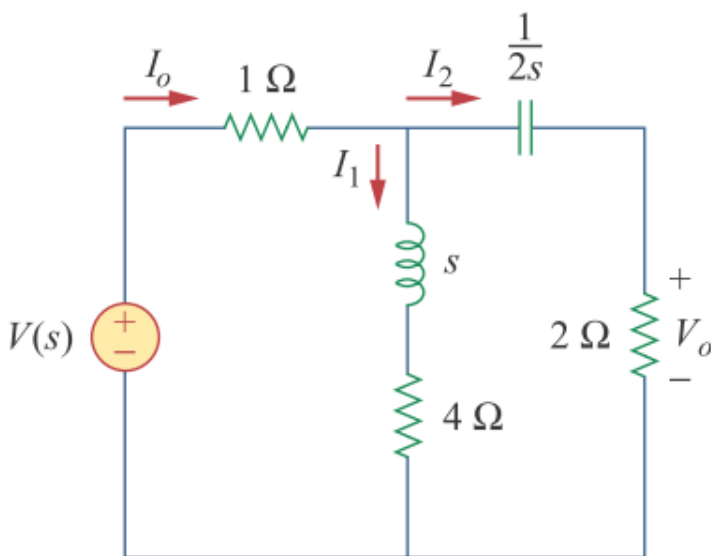
$$H(s) = \frac{2s}{s + 6}$$

$$-10e^{-3t} + 20e^{-6t}, t \geq 0,$$

29/37

## Transfer Fonksiyonu

Soru: Verilen devrede  $H(s) = V_o(s)/I_o(s)$  transfer fonksiyonunu bulunuz.



$$I_2 = \frac{(s + 4)I_o}{s + 4 + 2 + 1/2s}$$

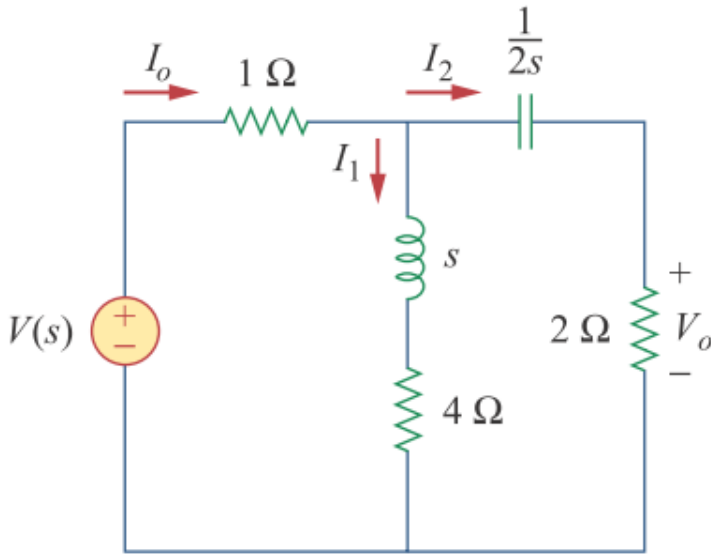
$$V_o = 2I_2 = \frac{2(s + 4)I_o}{s + 6 + 1/2s}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{I_o(s)} = \frac{4s(s + 4)}{2s^2 + 12s + 1}$$

30/37

## Transfer Fonksiyonu

Ödev: Verilen devrede  $H(s) = I_1(s)/I_0(s)$  transfer fonksiyonunu bulunuz.

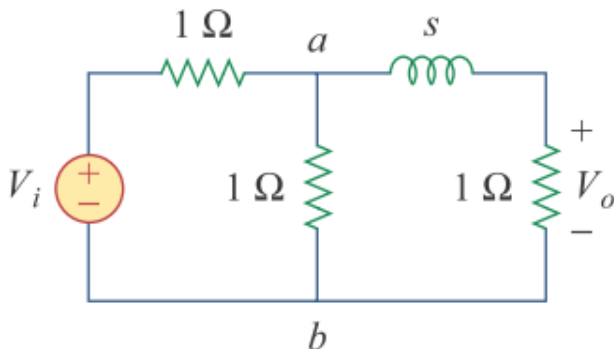


$$\frac{4s + 1}{2s^2 + 12s + 1}$$

31/37

## Transfer Fonksiyonu

Soru: Verilen devrede  $H(s) = V_o/V_i$  transfer fonksiyonunu bulunuz. Darbe cevabını,  $v_i = u(t)$  ve  $v_i = 8 \cos 2t$  olduğunda sistemin cevabını bulunuz.



$$V_o = \frac{1}{s + 1} V_{ab}$$

$$V_{ab} = \frac{1 \parallel (s + 1)}{1 + 1 \parallel (s + 1)} V_i = \frac{(s + 1)/(s + 2)}{1 + (s + 1)/(s + 2)} V_i$$

$$V_{ab} = \frac{s + 1}{2s + 3} V_i \quad V_o = \frac{V_i}{2s + 3} \quad H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{2s + 3}$$

32/37



## Transfer Fonksiyonu

---

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{2s + 3} \quad H(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s + \frac{3}{2}}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} e^{-3t/2} u(t) \quad \text{darbe cevabı}$$

$$v_i(t) = u(t), V_i(s) = 1/s$$

$$V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{1}{2s(s + \frac{3}{2})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{3}{2}}$$

---

33/37

## Transfer Fonksiyonu

---

$$V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{1}{2s(s + \frac{3}{2})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{3}{2}}$$

$$A = sV_o(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{2(s + \frac{3}{2})} \Big|_{s=0} = \frac{1}{3}$$

$$B = \left(s + \frac{3}{2}\right) V_o(s) \Big|_{s=-3/2} = \frac{1}{2s} \Big|_{s=-3/2} = -\frac{1}{3}$$

$$V_o(s) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{3}{2}} \right) \quad v_o(t) = \frac{1}{3} (1 - e^{-3t/2}) u(t) \text{ V}$$

---

34/37

## Transfer Fonksiyonu

---

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{2s + 3} \quad v_i(t) = 8 \cos 2t, \quad V_i(s) = \frac{8s}{s^2 + 4},$$

$$V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{4s}{(s + \frac{3}{2})(s^2 + 4)}$$
$$= \frac{A}{s + \frac{3}{2}} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4}$$

$$A = \left(s + \frac{3}{2}\right) V_o(s) \Big|_{s=-3/2} = \frac{4s}{s^2 + 4} \Big|_{s=-3/2} = -\frac{24}{25}$$

Her iki tarafı

$$(s + 3/2)(s^2 + 4) \quad 4s = A(s^2 + 4) + B\left(s^2 + \frac{3}{2}s\right) + C\left(s + \frac{3}{2}\right)$$

çarpalım.

35/37

## Transfer Fonksiyonu

---

$$4s = A(s^2 + 4) + B\left(s^2 + \frac{3}{2}s\right) + C\left(s + \frac{3}{2}\right) \quad A = -\frac{24}{25}$$

$$s=0 \text{ iken} \quad 0 = 4A + \frac{3}{2}C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{8}{3}A \quad C = 64/25.$$

$$s=1 \text{ iken} \quad 4 = 5A + (5/2)B + (5/2)C \quad B = 24/25$$

$$V_o(s) = \frac{-\frac{24}{25}}{s + \frac{3}{2}} + \frac{24}{25} \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{32}{25} \frac{2}{s^2 + 4}$$

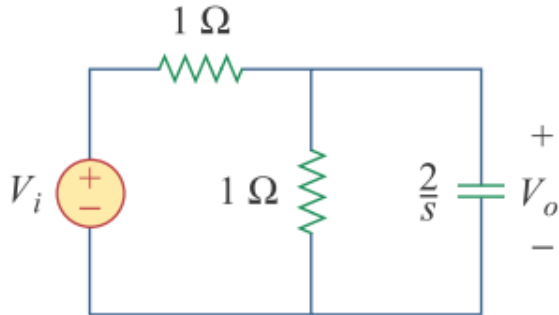
$$v_o(t) = \frac{24}{25} \left( -e^{-3t/2} + \cos 2t + \frac{4}{3} \sin 2t \right) u(t) \text{ V}$$

36/37

## Transfer Fonksiyonu

---

Ödev: Verilen devrede  $H(s) = V_o/V_i$  transfer fonksiyonunu bulunuz. Darbe cevabını,  $v_i = u(t)$  ve  $v_i = 8 \cos 2t$  olduğunda sistemin cevabını bulunuz.



$$2/(s + 4)$$

$$2e^{-4t}u(t)$$

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-4t})u(t) \text{ V}$$

$$3.2(-e^{-4t} + \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t)u(t) \text{ V}$$