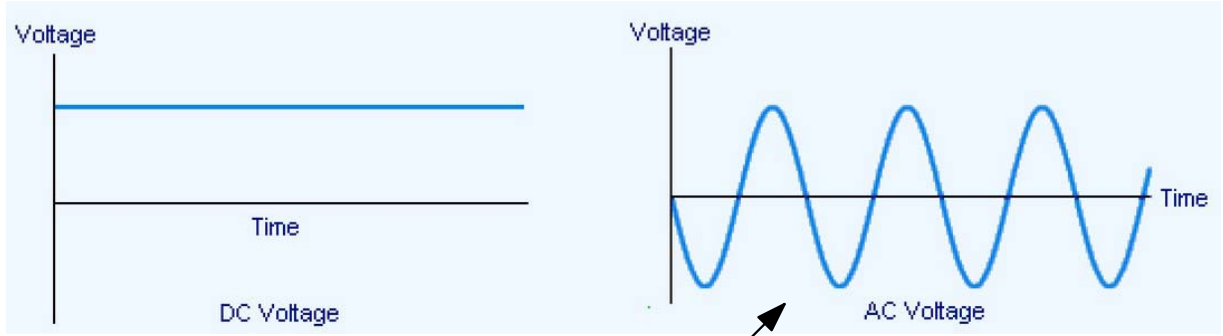


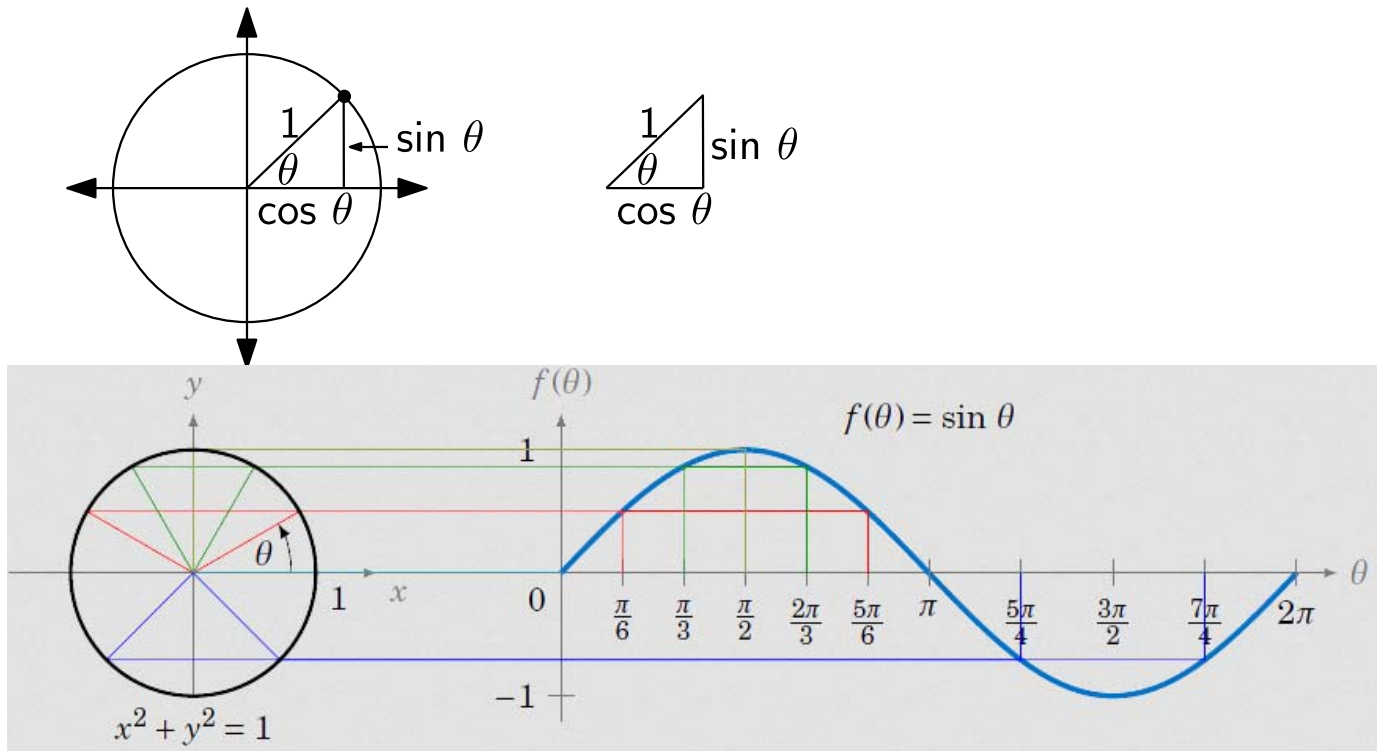
Sinüsoidal Sinyaller



Bu sinyali matematiksel olarak nasıl ifade edeceğiz?

5/58

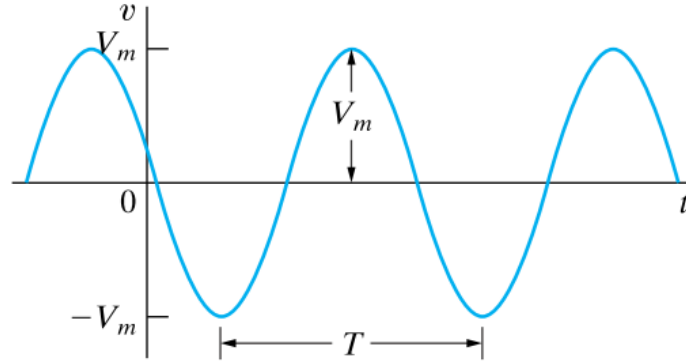
Sinüsoidal Sinyaller



Sinusoidal, sinüs veya kosinis formundaki sinyale verilen addır. Sinusoidal akım genelde alternatif akım (AC) olarak ifade edilir. (AC: Alternating Current)

6/58

Sinüsoidal Sinyaller



Sinyalin kendisini tekrar ettiği süre, bu sinyalin 1 periyodudur. Saniye cinsinden ifade edilir.

T : Periyod

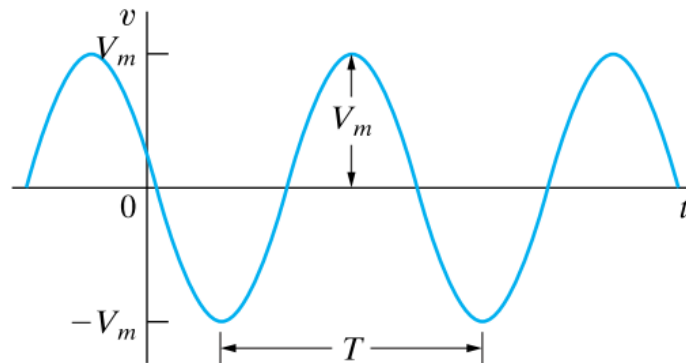
Bir saniyede kendini tekrar etme sayısına (çevrim - cycle) frekans denir. Birimi hertzdir. (Hz)

f : frekans

$$f = \frac{1}{T}$$

7/58

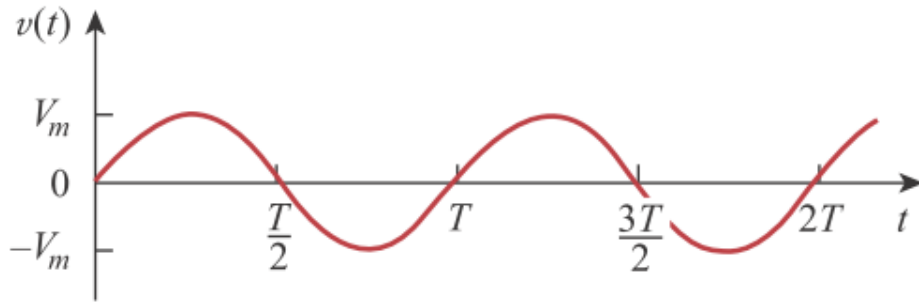
Sinüsoidal Sinyaller



- Grafikte gösterilen sinyal $\sin(X)$ veya $\cos(X)$ şeklinde ifade edilebilir.
- Sinyal sinüs fonksiyonu olsun.
- $\sin(X)$ fonksiyonu max 1 min -1 olabilirken, grafikteki sinyal ise max V_m , min $-V_m$ değerini alıyor.
- Bu durumda grafiğin fonksiyon $V_m \sin(X)$ şeklinde olur.

8/58

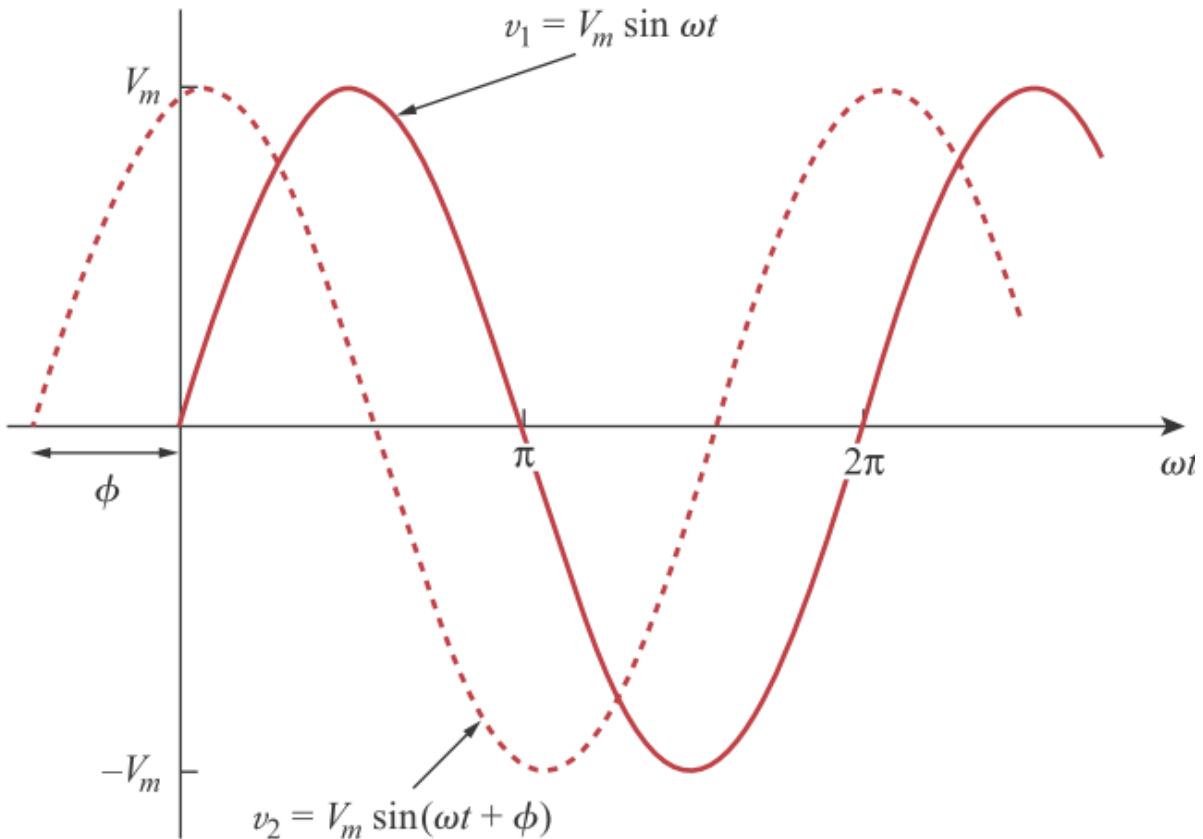
Sinüsoidal Sinyaller



- f : frekans, 1 saniyede kaç çevrim tamamladığını ifade ediyor.
- t zamanında açı radyan cinsinden $2\pi ft$ olarak ifade edilebilir.
- Yukarıdaki sinyal bir sinüs sinyalidir.
 t anında sinyalin değeri $v(t) = V_m \sin(2\pi ft)$ ifadesiyle bulunur.
- $\omega = 2\pi f$ açısal frekantır. Birimi rad/san.
- $v(t) = V_m \sin(\omega t)$

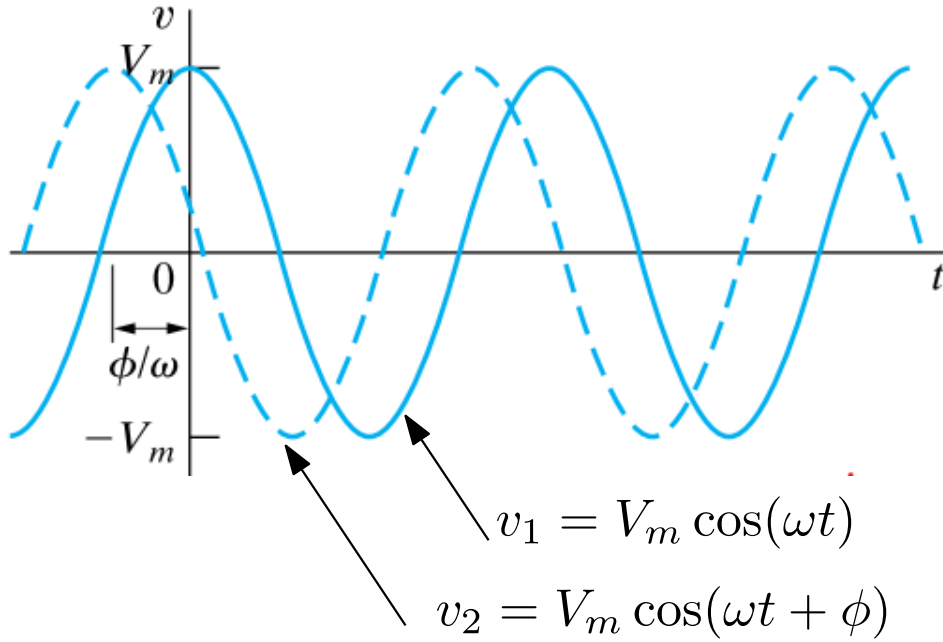
9/58

Sinüsoidal Sinyaller



10/58

Sinüsoidal Sinyaller



Şekilde görüldüğü üzere v_2 sinyali v_1 sinyalinden ϕ derece öndedir. Bu açığa sinyalin faz açısı denir. Aynı zamanda v_1 sinyali v_2 sinyalinin ϕ derece gerisindedir şeklinde de ifade edilir.

11/58

Sinüsoidal Sinyaller

Örnek: $i_1(t) = 3 \sin(100t + 10)$ ve $i_2(t) = 2 \cos(100t - 40)$ sinyalleri arasındaki faz farkını bulunuz, hangi sinyalin önde olduğunu belirtiniz.

12/58

Sinüsoidal Sinyaller

Örnek: $i_1(t) = 3 \sin(100t + 10)$ ve $i_2(t) = 2 \cos(100t - 40)$ sinyalleri arasındaki faz farkını bulunuz, hangi sinyalin önde olduğunu belirtiniz.

$$\cos(\omega t) = \sin(\omega t + 90), \sin(\omega t) = \cos(\omega t - 90)$$

$$i_1(t) = 3 \sin(100t + 10) = 3 \cos(100t + 10 - 90) = 3 \cos(100t - 80)$$

$$i_2(t) = 2 \cos(100t - 40)$$

i_2 sinyali i_1 sinyalinden 40 derece öndedir.

13/58

Karmaşık Sayılar

$$x^2 = -1$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Elektrik Mühendisliğinde i harfi akım için kullanılmaktadır.

Matematikçilerin karmaşık sayılar için kullandığı i yerine j harfi karmaşık sayılarda kullanılacaktır

14/58

Karmaşık Sayılar

Örnek: $z_1 = 8 + j3$, $z_2 = 9 - j2$ karmaşık sayıları için

a. $z_1 + z_2$

b. $z_1 - z_2$

c. $z_1 z_2$

d. z_1 / z_2

işlem sonuçlarını bulunuz.

15/58

Karmaşık Sayılar

$z = x + jy$ sayısının kompleks eşleniği $\bar{z} = z^* = x - jy$ olarak ifade edilir.

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

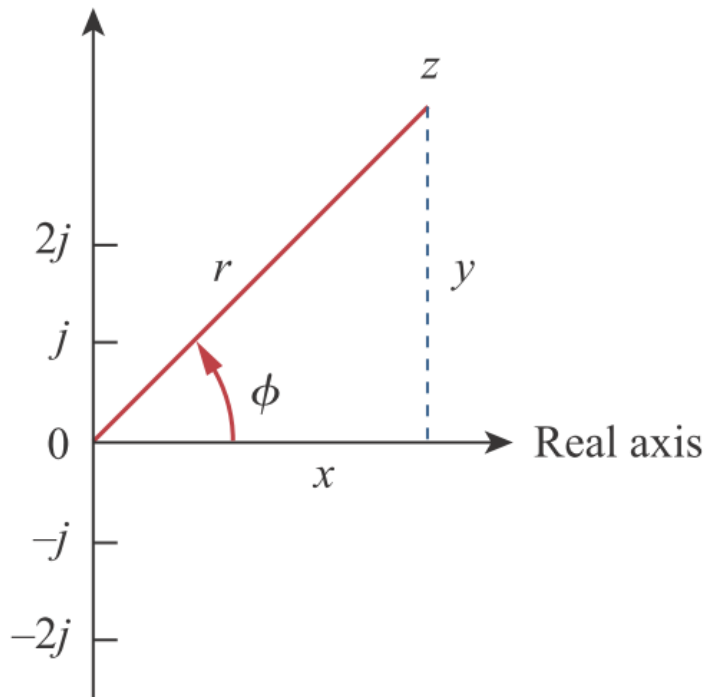
Örnek: $z_1 = 4 + j3$, $z_2 = 2 - j5$ için aşağıdaki işlem sonuçlarını bulunuz.

$$(z_1 + z_2)^*, (z_1 - z_2)^*, (z_1 z_2)^*, \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^*$$

16/58

Karmaşık Sayılar

Imaginary axis



$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

Euler's Formula

$$z = x + jy$$

$$= r \cos(\phi) + jr \sin(\phi)$$

$$= r(\cos(\phi) + j \sin(\phi))$$

$$= re^{j\phi}$$

17/58

Karmaşık Sayılar

Karmaşık Sayıların Gösterimleri:

Kartezyen: $z = x + iy$

Trigonometrik: $z = r(\sin(\theta) + j \cos(\theta))$

Üstel: $z = re^{j\theta}$

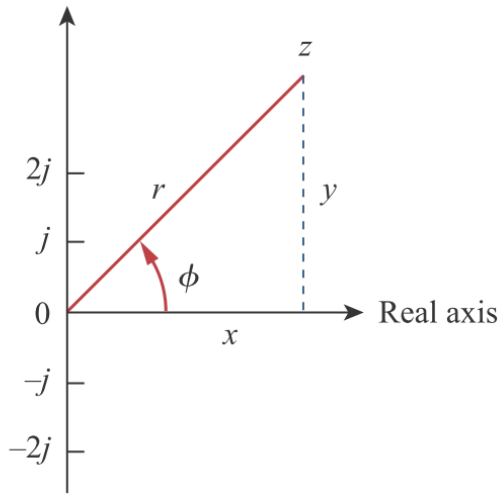
Kutupsal (Polar): $z = r\angle\theta$

18/58

Karmaşık Sayılar

Polar Kartezyen Dönüşümü

Imaginary axis



$z = x + jy$ karmaşık sayısını
 $z = r \angle \phi$ şeklinde ifade edelim.

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}(y/x)$$

Örnek: $z = 3 + j4$ sayısını polar (kutupsal) forma dönüştürünüz.

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$z = 5 \angle 53.13^\circ$$

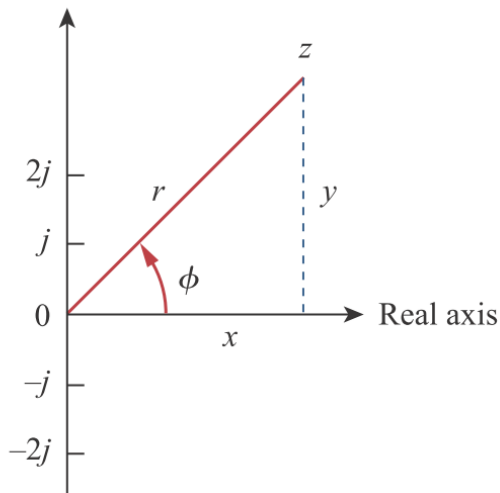
$$\phi = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(4/3) = 53.13$$

19/58

Karmaşık Sayılar

Polar Kartezyen Dönüşümü

Imaginary axis



$z = r \angle \phi$ karmaşık sayısını
 $z = x + jy$ şeklinde ifade edelim.

$$z = r \cos(\phi) + jr \sin(\phi)$$

Örnek: $z = 10 \angle 36.87^\circ$ sayısını kartezyen forma dönüştürünüz.

$$\begin{aligned} z &= r \cos(\phi) + jr \sin(\phi) = 10 \cos(36.87) + j10 \sin(36.87) \\ &= 10 \cdot 0.8 + j10 \cdot 0.6 = 8 + j6 \end{aligned}$$

20/58

Karmaşık Sayılar

Karmaşık Sayılarda Toplama-Çıkarma, Çarpma Bölme

$$z_1 = x_1 + jy_1, z_2 = x_2 + jy_2 \Rightarrow$$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 = r_1/\phi_1, z_2 = r_2/\phi_2 \Rightarrow$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2/\phi_1 + \phi_2$$

$$z_1/z_2 = r_1/r_2/\phi_1 - \phi_2$$

21/58

Karmaşık Sayılar

Karmaşık Sayılarda Toplama-Çıkarma, Çarpma Bölme

Örnek: $z_1 = 10/53.13^\circ$ ve $z_2 = 5/-36.87^\circ$ ise $z_1 + z_2$ işleminin sonucunu polar formda bulunuz.

$$z_1 = 10 \cos(53.13) + j10 \sin(53.13) = 6 + j8$$

$$z_2 = 5 \cos(-36.87) + j5 \sin(-36.87) = 4 - j3$$

$$z_1 + z_2 = 10 + j5$$

$$r = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11.18$$

$$\theta = \tan^{-1}(5/10) = 26.57$$

$$z_1 + z_2 = 10 + j5 = 11.18/26.57^\circ$$

22/58

Karmaşık Sayılar

Karmaşık Sayılarda Toplama-Çıkarma, Çarpma Bölme

Örnek: $n_1 = 8 + j10$, $n_2 = 5 - j4$ ise $n_1 \cdot n_2$ 'yi bulunuz.

$$\begin{aligned}n_1 n_2 &= (8 + j10)(5 - j4) = 40 - j32 + j50 + 40 \\&= 80 + j18 \\&= 82 \angle 12.68^\circ.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n_1 n_2 &= (12.81 \angle 51.34^\circ)(6.40 \angle -38.66^\circ) \\&= 82 \angle 12.68^\circ \\&= 80 + j18.\end{aligned}$$

23/58

Karmaşık Sayılar

Karmaşık Sayılarda Toplama-Çıkarma, Çarpma Bölme

Örnek: $n_1 = 6 + j3$, $n_2 = 3 - j1$ ise n_1/n_2 'yi bulunuz.

$$\begin{aligned}\frac{n_1}{n_2} &= \frac{6 + j3}{3 - j1} = \frac{(6 + j3)(3 + j1)}{(3 - j1)(3 + j1)} & \frac{n_1}{n_2} &= \frac{6.71 \angle 26.57^\circ}{3.16 \angle -18.43^\circ} = 2.12 \angle 45^\circ \\&= \frac{18 + j6 + j9 - 3}{9 + 1} & &= 1.5 + j1.5. \\&= \frac{15 + j15}{10} = 1.5 + j1.5 \\&= 2.12 \angle 45^\circ.\end{aligned}$$

24/58

Karmaşık Sayılar

Karmaşık Sayılarda Toplama-Çıkarma, Çarpma Bölme

Örnek: $n_1 = 10\angle 53.13^\circ$, $n_2 = 5\angle -135^\circ$ ise $n_1 + n_2$ 'yi bulunuz.

$$\begin{aligned}n_1 + n_2 &= 6 + j8 - 3.535 - j3.535 \\&= (6 - 3.535) + j(8 - 3.535) \\&= 2.465 + j4.465 = 5.10 \angle 61.10^\circ.\end{aligned}$$

25/58

Karmaşık Sayılar

Karmaşık Sayılarda Toplama-Çıkarma, Çarpma Bölme

Örnek: $n_1 = 10\angle 53.13^\circ$, $n_2 = 5\angle -135^\circ$ ise $n_1 - n_2$ 'yi bulunuz.

$$\begin{aligned}n_1 - n_2 &= 6 + j8 - (-3.535 - j3.535) \\&= 9.535 + j11.535 \\&= 14.966 \angle 50.42^\circ.\end{aligned}$$

26/58

Karmaşık Sayılar

Karmaşık Sayılarda Toplama-Çıkarma, Çarpma Bölme

Ödev:Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$(a) [(5 + j2)(-1 + j4) - 5\angle 60^\circ]^*$$

$$(b) \frac{10 + j5 + 3\angle 40^\circ}{-3 + j4} + 10\angle 30^\circ + j5$$

Cevap: (a) $-15.5 - j13.67$, (b) $8.293 + j7.2$.

27/58

Karmaşık Sayılar

$$j^2 = -1$$

$$jx = x\angle 90^\circ$$

$$-jx = x\angle -90^\circ$$

$$1/j = -j$$

$$(r\angle\phi)^n = r^n\angle n\phi$$

28/58